

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра **ФИЗИКИ УСКОРИТЕЛЕЙ**

Направление подготовки **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

Кладов Сергей Алексеевич

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Влияние нелинейностей на бетатронные колебания  
вблизи разностного линейного и нелинейного резонансов связи

**«К защите допущена»**

Тельнов Валерий Иванович

д.ф.-м.н., проф.

зав. кафедрой, ИЯФ СО РАН

...../.....  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

**Научный руководитель**

Переведенцев Евгений Алексеевич

в.н.с.лаб 11 ИЯФ СО РАН

...../.....  
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....20...г.

Дата защиты: «.....».....20...г.

Новосибирск, 2020

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Собственные векторы и собственные значения матрицы периода .....	4
3. Теория. Совместное действие резонансов 1-1 и 2-2 .....	5
3.1 Исследование задачи в разностных переменных .....	6
4. Колебания дипольного момента пучка .....	11
5. Моделирование сигналов .....	13
5.1 Спектры колебаний одной частицы .....	14
6. Источники кубических нелинейностей в магнитной системе .....	17
6.1 Краевые поля соленоидов .....	17
6.2 Краевые поля квадрупольных линз .....	18
6.3 Встречный пучок .....	19
7. Предлагаемый эксперимент .....	21
8. Обсуждение полученных результатов и заключение .....	24
Список литературы .....	25
Приложение .....	26
а) Гамильтониан системы с октупольными нелинейностями .....	26
б) Краевые поля соленоидов и квадрупольных линз. Кубическая нелинейность .....	28

## 1. Введение

Линейная динамика пучка в ускорителе хорошо изучена, однако, движение частиц в разных плоскостях связано, а также подвержено влиянию нелинейностей. Раньше исследование связанных бетатронных колебаний не было актуально ввиду отсутствия машин с сильной связью. Сейчас же существует ВЭПП-2000, который использует круглые встречные пучки и работает на главном резонансе связи, где нелинейные эффекты нас практически интересуют. В данной работе исследуется влияние нелинейностей на связанные бетатронные колебания при совместном действии линейного (1-1) и нелинейного (2-2) резонансов связи для коллайдера ВЭПП-2000.

Для достижения понимания в вопросах такой динамики были поставлены следующие цели:

1. Изучить совместное действие двух близко расположенных резонансов, а именно 1-1 и 2-2;
2. Построить фазовый портрет вблизи разностного резонанса под влиянием нелинейностей;
3. Вывести теоретическое предсказание для сигналов с пикапов;
4. Сравнить полученные результаты с измеренными на датчиках положения пучка историями бетатронных колебаний.

Поставленные цели были достигнуты путем решения гамильтоновых уравнений, с применением усреднения быстрых фаз. Исследование движения проводилось путем построения гамильтониана и фазовых портретов. Важным элементом исследования является избавление гамильтониана от явной временной зависимости и сведение этой зависимости к фазам. Система из двух резонансов 1-1 и 2-2 легко сводится к интегрируемой благодаря простоте их выражения через друг друга, что также дает возможность простого сведения двумерной задачи к одномерной и построения фазового портрета. Однако, такое сведение невозможно в условиях пересечения нескольких резонансных линий, например, в важных для работы ВЭПП-2000 точках  $1/4$  и  $1/3$ . В таких

случаях рассмотреть фазовую динамику гораздо сложнее из-за четырехмерности фазового пространства.

## 2. Собственные векторы и собственные значения матрицы периода

Будем работать в 4х мерном фазовом пространстве  $(x, x', y, y')$ . Для четырехмерной симплектической матрицы обхода в линейной задаче, определенной как  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , собственные числа легко находятся:

$$2 \cos \mu_{1,2} = \Lambda_{A,D} = (trA + trD)/2 \pm \sqrt{\frac{(trA - trD)^2}{4} + \det[C + \bar{B}]}$$

Где  $\bar{B}$  – симплектически сопряженная матрица  $B$ . Собственные векторы находятся по определению, их общий вид получается таким [2]:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} w_{1x} e^{i\varphi_{1x}} \\ \left(v_{1x} + i \frac{Q}{w_{1x}}\right) e^{i\varphi_{1x}} \\ w_{1y} e^{i\varphi_{1y}} \\ \left(v_{1y} + i \frac{1-Q}{w_{1y}}\right) e^{i\varphi_{1y}} \end{bmatrix}; Y_2 = \begin{bmatrix} w_{2x} e^{i\varphi_{2x}} \\ \left(v_{2x} + i \frac{1-Q}{w_{2x}}\right) e^{i\varphi_{2x}} \\ w_{2y} e^{i\varphi_{2y}} \\ \left(v_{2y} + i \frac{Q}{w_{2y}}\right) e^{i\varphi_{2y}} \end{bmatrix}$$

Нормальные колебания в общем случае эллиптически поляризованы.

Вблизи резонансов они могут быть выражены через параметры Твисса оптики без связи, а именно, вблизи разностного линейного резонанса они принимают вид [1]:

$$Y_A = \begin{bmatrix} e^{i(\chi_x + 2\pi n \frac{n_{\text{рез}}}{2})} w_x \cos \gamma \\ e^{i(\chi_x + 2\pi n \frac{n_{\text{рез}}}{2})} \left(w'_x + \frac{i}{w_x}\right) \cos \gamma \\ e^{i(\chi_y - 2\pi n \frac{n_{\text{рез}}}{2} - \alpha)} w_y \sin \gamma \\ e^{i(\chi_y - 2\pi n \frac{n_{\text{рез}}}{2} - \alpha)} \left(w'_y + \frac{i}{w_y}\right) \sin \gamma \end{bmatrix} e^{2\pi i n (v_x + v_y + \eta)/2}$$

$$Y_B = \begin{bmatrix} -e^{i(\chi_x + 2\pi n \frac{n_{\text{рез}}}{2} + \alpha)} w_x \sin \gamma \\ -e^{i(\chi_x + 2\pi n \frac{n_{\text{рез}}}{2} + \alpha)} \left(w'_x + \frac{i}{w_x}\right) \sin \gamma \\ e^{i(\chi_y - 2\pi n \frac{n_{\text{рез}}}{2})} w_y \cos \gamma \\ e^{i(\chi_y - 2\pi n \frac{n_{\text{рез}}}{2})} \left(w'_y + \frac{i}{w_y}\right) \cos \gamma \end{bmatrix} e^{2\pi i n (v_x + v_y - \eta)/2}$$
(1)

Здесь  $n = s/2\pi\bar{R}$  – безразмерный азимут,  $w_x = \sqrt{\beta_x}$ ,  $w_y = \sqrt{\beta_y}$ ,  $\eta = \nu_a - \nu_b$  – разница частот двух мод, и угол смешивания  $\gamma$  введены так, что  $\eta = \sqrt{\delta^2 + |C|^2}$ ,  $\delta = \eta \cos 2\gamma$ ,  $C = \eta \sin 2\gamma e^{i\alpha}$ ,  $C$  – амплитуда резонанса  $1 - 1$ , или коэффициент связи. Начальные частоты подчиняются уравнению  $\nu_x - \nu_y = n_{\text{рез}} + \delta$ . В таком виде собственные векторы используются в качестве базиса разложения решения нелинейной задачи. При численном моделировании в гл. 3,5 ниже безразмерный азимут  $n$  считается целой переменной (номером оборота).

### 3. Теория. Совместное действие резонансов 1-1 и 2-2

Как было изложено выше, движение частиц в системе со связью довольно хорошо изучено, если говорить о линейной ее части. Такую связь порождают поля косых квадрупольных и соленоидов. Однако, существуют также и нелинейные члены связи. Для рабочей точки, стоящей на главном резонансе связи, и выбранной далеко от вредных узлов суммовых резонансов, таких как  $1/2$ ,  $1/3$  и  $1/4$ , актуально будет рассмотрение тех нелинейных полей, которые порождают резонанс  $2 - 2$ ,  $4 - 4$  и т.д. Резонансы выше  $2 - 2$  вносят существенно меньший вклад в динамику пучка, поэтому ограничимся здесь только им.

Такой резонанс отвечает членам гамильтониана второго порядка по действию и четвертого по координатам, их генерируют:

- края квадрупольных линз,
- края соленоидов,
- возмущения в виде прямых и косых октупольных полей,
- поля встречного пучка.

Будем рассматривать свободные бетатронные колебания с октупольным возмущением, остальные источники исследуются аналогично. Невозмущенная же задача – колебания с косо-квадрупольным возмущением, ее решение хорошо известно [1]. Будем решать данную задачу путем усреднения быстрых

фаз, а также считать, что собственные векторы невозмущенной задачи заданы, а новые являются их линейной комбинацией:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A e^{i\varphi_a}; \hat{B} = B e^{i\varphi_b} \\ x &= \frac{1}{2}A a_1 (e^{i(\psi_a+\varphi_a)} + e^{-i(\psi_a+\varphi_a)}) + \frac{1}{2}B(b_1 e^{i(\psi_b+\varphi_b)} + b_1^* e^{-i(\psi_b+\varphi_b)}) \\ y &= \frac{1}{2}A (a_3 e^{i(\psi_a+\varphi_a)} + a_3^* e^{-i(\psi_a+\varphi_a)}) + \frac{1}{2}B b_3 (e^{i(\psi_b+\varphi_b)} + e^{-i(\psi_b+\varphi_b)})\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь  $a_i$  и  $b_i$  – компоненты собственных векторов нормальных мод (1) невозмущенной задачи,  $\psi_i$  – их бетатронные фазы;  $A, B$  – медленные амплитуды,  $\varphi_a, \varphi_b$  – медленные фазы, возникающие из-за возмущения.

Коэффициенты в этом линейном разложении подчиняются уравнениям [6]:

$$\hat{A}' = -i Y_A^{*T} S G; \hat{B}' = -i Y_B^{*T} S G \quad (3)$$

Где  $S$  – единичная симплектическая матрица,  $G$  – вектор возмущения уравнений движения.

Расписывая полученные уравнения, и переходя к разностным переменным, получаем гамильтониан (см. приложение):

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}((J^2 + II^2)(p + r) + (p - r)(2IIJ)) + q(II^2 - J^2) + 4\pi J\eta + 2II\nu_0 + \\ &+ \sqrt{II^2 - J^2}(k_{11}(J + II) + k_{12}(II - J)) \cos(\alpha + \Phi) + f_2(II^2 - J^2) \cos(2\Phi)\end{aligned}\quad (4)$$

Из него получаются уравнения на новые переменные:

$$J' = -\frac{dH}{d\Phi}, \Phi' = \frac{dH}{dJ}, \Phi'_{\text{сум}} = \frac{dH}{dII}, II' = 0$$

### 3.1 Исследование задачи в разностных переменных

Как видно, благодаря разностным переменным, задача свелась к одномерной, что позволяет построить фазовый портрет и исследовать его. Интересен случай больших нелинейностей, они создают дополнительные стационарные точки вне полюсов сферы (рис. 4), что ведет к некруглости пучка. После исследования фазовых портретов при разных параметрах заключаем, что критерием их качественного усложнения можно считать условие  $c = \frac{|f_2|II}{\eta} > 1$ . То же относится и к  $k_{11}, k_{12}$ . Причем заметим, что это условие – оценка нижней

границы появления дополнительных стационарных точек, при разных параметрах они могут не проявляться и при гораздо больших нелинейностях.

Линейный резонанс, как известно, раздвигает частоты. Так, на ВЭПП-2000,  $\eta$  по обычно больше 0,001. Этот факт, вместе с приведенными ниже оценками позволяет утверждать, что при значениях  $f_2, k_{11}, k_{12}$ , существующих на ВЭПП-2000, такие дополнительные области автофазировки и стационарные точки либо не образуются, либо их глубина невелика. В любом случае малое перераспределение частиц есть, однако некруглость до  $\sim 20\%$ , как было выяснено экспериментально на ВЭПП-2000, почти не влияет на важные параметры коллайдера.

Стационарные точки находятся из равенства производных нулю. Решения полученной системы при нулевом сдвиге резонанса  $1 - 1$  от  $2 - 2$  будут всегда включать точки  $\Phi = 0, \pi$ , а также при некоторых параметрах ( $|f_2| \geq |k_{11}|, |k_{12}|$ ) еще одну, нетривиальную. Смещение  $1 - 1$  резонанса  $\alpha$ , очевидно, на фазовой плоскости перемещает  $2\pi$ -периодическую картину относительно  $1\pi$ -периодической. В итоге получаются небанальные фазовые портреты, примеры которых изображены на рис. 1, где выбраны параметры:

$$\begin{aligned} \text{a) } & I = 2 \cdot 10^{-4}, f_2 = -22, p = 5.5, q = 7.5, \\ & r = 15, k_{11} = -6, k_{12} = 9, \alpha = 5, \eta = 0.0005 \\ \text{b) } & I = 2 \cdot 10^{-4}, f_2 = 15, p = 4, q = 7.5, \\ & r = -11, k_{11} = 14, k_{12} = -9, \alpha = 2.7, \eta = -0.0005 \end{aligned}$$

Изображение фазового портрета на плоскости в декартовых координатах  $J$ - $\Phi$  стало возможным в связи с переходом из двумерной задачи в одномерную, и выбор именно таких координат связан с тем, что  $J$  принимает и отрицательные значения, а две моды (положительные и отрицательные значения  $J$ ) должны быть отображены равнозначно.

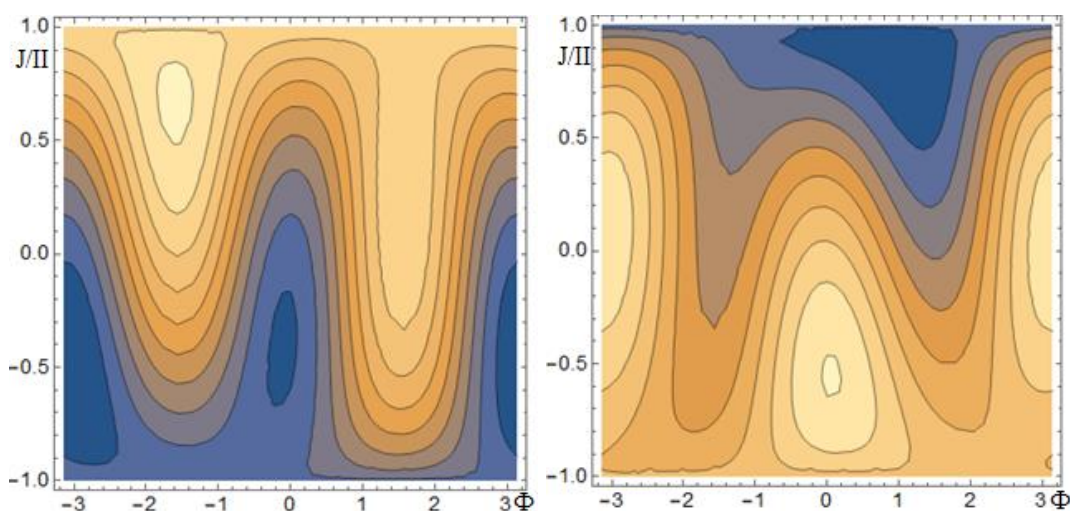


Рис. 1. Фазовые портреты при больших нелинейностях (в присутствии дополнительных областей автофазировки) при разных параметрах

Устойчивость определяется через матрицу квадратичной формы линеаризованного гамильтониана вблизи стационарных точек, определенной обычным образом через вторые частные производные гамильтониана:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial J^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial J \partial \Phi} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial J \partial \Phi} & \frac{\partial^2 H}{\partial \Phi^2} \end{pmatrix} \bigg|_{(\Phi_0, J_0)}$$

В гамильтоновой системе возможные типы точек покоя – седло и центр. Их устойчивость определяется знакоопределенностью квадратичной формы: точка устойчива (центр), если  $\det A > 0$  и неустойчива (седло), если  $\det A < 0$ . В задаче  $(1 - 1) + (2 - 2)$  каждая такая точка при разных параметрах может быть как устойчивой, так и неустойчивой, конкретные выводы можно делать для конкретных ускорителей с точно известными параметрами.

Общий вид зависимости  $J_{\text{стац}}$  от  $\eta$  приведен на рис. 2. Здесь

- a)  $H = 0.0002, f_2 = -15, p = 1, q = -1.5, r = 3, k_{11} = -4, k_{12} = 6, \alpha = 0$
- b)  $H = 0.0002, f_2 = -15, p = 11, q = -1.5, r = 3, k_{11} = -4, k_{12} = -6, \alpha = 0$



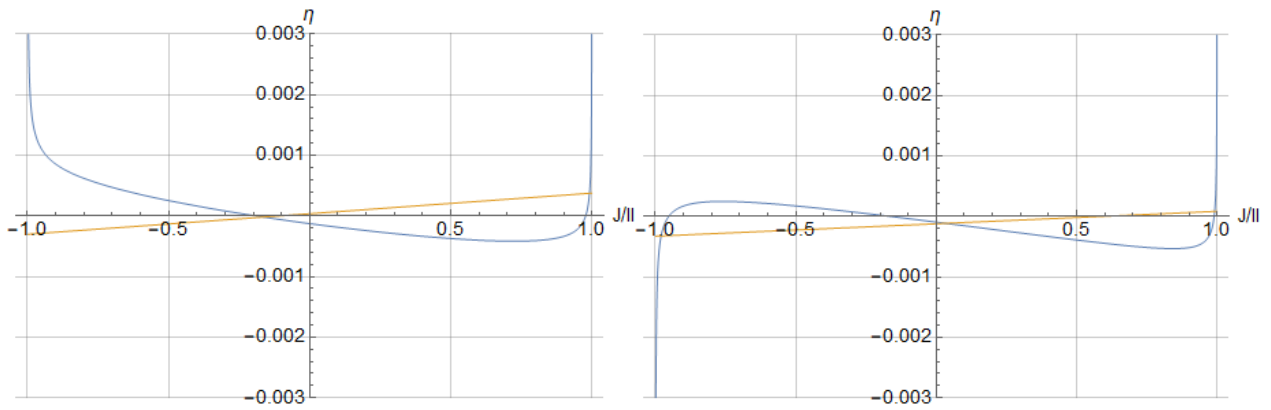


Рис 2. Пример зависимости  $\eta(J_{\text{стац}})$  в задаче  $(1 - 1) + (2 - 2)$

Всего при заданной  $\eta$  возможно существование от 0 до 4 стационарных точек, причем не больше 3 центров и не больше 1 седла.

Фазовые траектории можно, для наглядности, уложить на сферу радиуса  $II$ . Это удобно ввиду сохранения суммового действия. На таких портретах по оси  $z$  откладывается отношение  $I/II$ , разностная фаза  $\Phi$  здесь отображается как полярный угол. Примеры таких фазовых портретов изображены на рис. 3, в случае: а) двух и б) трех стационарных точек в присутствии некой симметрии, и в общем случае несимметричной картины с седловой точкой (в). В каждой строке на рис. 3 – по одному фазовому портрету, изображенному под разными углами. На всех портретах для простоты наблюдения  $\alpha = 0$ . Также для понимания изменений, которые приносят резонансы, на рис. 4 изображены фазовые портреты без нелинейностей (а), при нелинейностях меньше (б) и больше (в) критических (появление дополнительных стационарных точек).

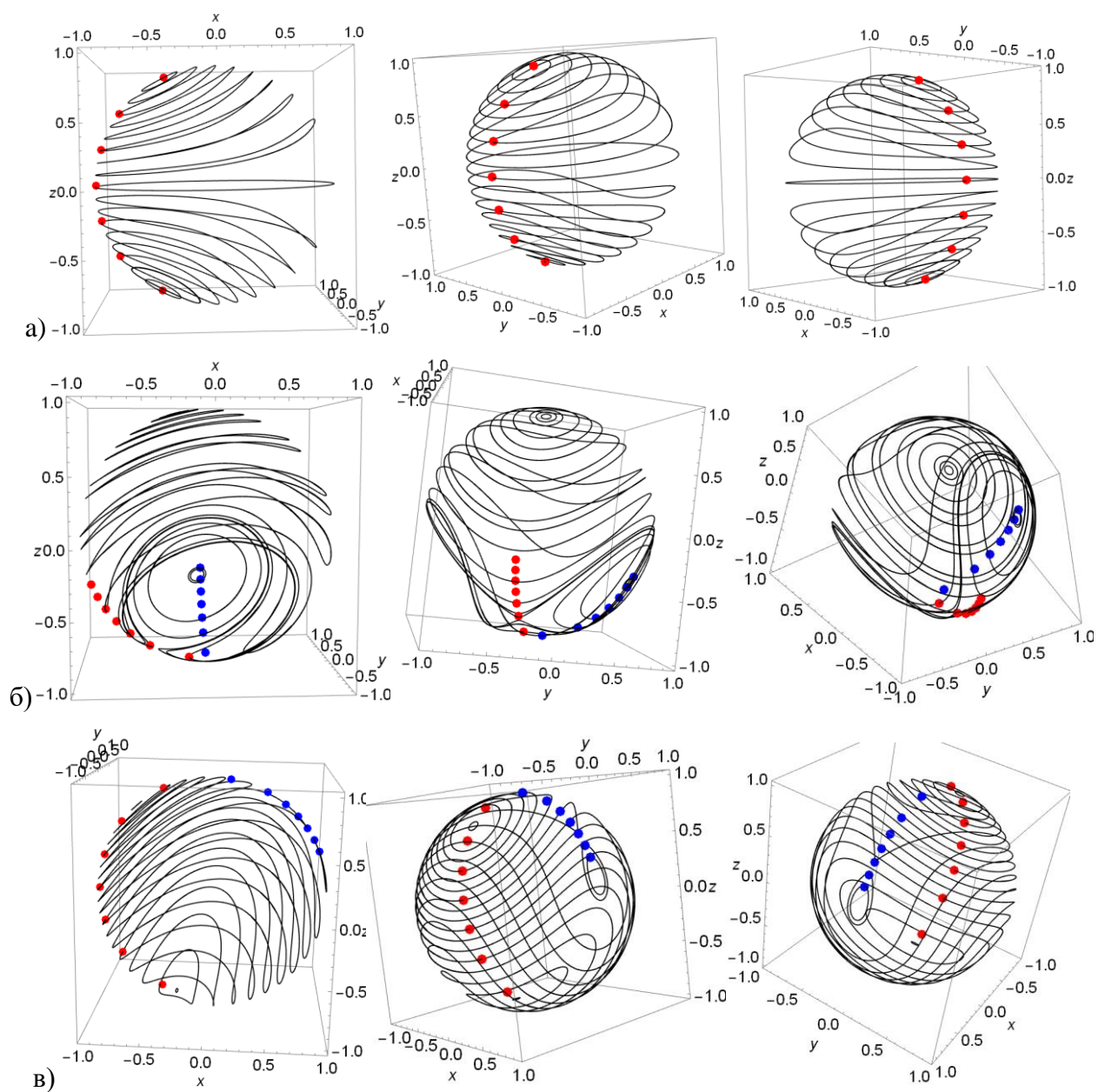


Рис. 3. Фазовые портреты свободных бетатронных колебаний системы 1-1+2-2

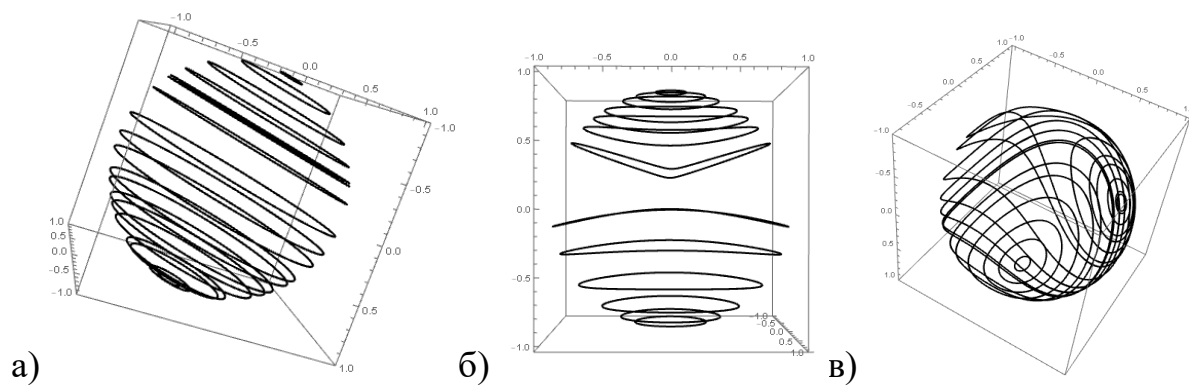


Рис 4. Фазовые портреты свободных бетатронных колебаний без нелинейностей (а) и в их присутствии (б), (в)

#### 4. Колебания дипольного момента пучка

Для детектирования бетатронных колебаний обычно применяются Датчики Положения Пучка (ДПП), позволяющие отслеживать поведение дипольного момента (либо центра заряда) и записывать по-оборотную историю колебаний. На присутствие нелинейностей, описанных выше, указывает наличие расфазировки на сигналах с таких приборов – дипольный момент пучка исчезает за  $\sim 1000$  оборотов. Теория расфазировки хорошо описана в препринте S.Y.Lee [7], и в [8] для несвязанных колебаний, и она применима для модовых сигналов. Напомним здесь основные моменты этой теории.

В ситуации затухших бетатронных колебаний, пучок в нормализованных координатах лежит в центре координат с некоторой сигмой нормального распределения. Бетатронные колебания обычно возбуждаются ударом – он придает пучку некоторый импульс  $\Delta x'$ , то есть сразу после удара центр пучка на фазовой плоскости находится в координатах  $\varphi(0) = \pm\pi/2$ ,  $A_{\text{амплитуда}}(0) = Z = \beta\Delta x'$ . В простой линейной теории такой пучок просто вращается в фазовой плоскости по окружности радиуса  $Z$ , однако, благодаря некомпенсированному хроматизму и наличию нелинейностей, частицы со временем размазываются по этой окружности (кольцу), и центр тяжести смещается в 0.

##### 1. Хроматизм

Он ответственен за смещение частоты, равное  $\Delta\nu = \xi\delta \cos(\pi\nu_s n + \varphi_s)$

После подстановки в стандартное усреднение по распределению  $x \sim \cos(2\pi n\nu_{\beta 0} + 2\xi\delta \sin(\pi\nu_s n) \cos(\pi\nu_s n + \varphi_s)/\nu_s)$ , получаем ответ:

$$\langle x(n) \rangle = a \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \cos(2\pi n\nu_{\beta 0} + \varphi_\beta),$$

где

$$a = 2\xi\sigma_s \sin(\pi\nu_s n) / \nu_s.$$

Видно, что это периодическая функция, и частицы периодически собираются в начальное состояние с частотой равной синхротронной. При исследовании историй бетатронных колебаний будем иметь это ввиду, однако более интересен второй источник расфазировки, ведущий к необратимому затуханию.

## 2. Кубическая нелинейность

Эффект постоянных членов кубических нелинейностей гамильтониана описывается линейной зависимостью частот бетатронных колебаний от квадрата их амплитуды:

$$\Delta\nu_x = (k_{xx}a_x^2 + k_{xz}a_z^2); \quad \Delta\nu_z = (k_{zx}a_x^2 + k_{zz}a_z^2)$$

Продельвая то же, что и для первого источника, получаем искомое безвозвратное затухание колебаний дипольного момента:

$$A = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\xi\sigma_\delta}{v_s}\sin(\pi v_s n)\right)^2} Z_a F_{aa} F_{ab}, \quad B = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\xi\sigma_\delta}{v_s}\sin(\pi v_s n)\right)^2} Z_b F_{bb} F_{ab}$$

$$\varphi_a = \phi_{aa} + \phi_{ab} + \frac{Z_a^2}{2\sigma_a^2} \frac{\theta_{aa}^2}{(1+\theta_{aa}^2)} + \frac{Z_b^2}{2\sigma_b^2} \frac{\theta_{ab}^2}{(1+\theta_{ab}^2)} \quad (5)$$

$$F_{ij} = \frac{1}{1+\theta_{ij}^2} \exp\left(-\frac{Z_j^2}{2\sigma_j^2} \frac{\theta_{ij}^2}{(1+\theta_{ij}^2)}\right), \theta_{ij} = 4\pi k_{ij} \sigma_j^2 n, \phi_{ij} = 2\arctan(\theta_{ij})$$

На рис. 5 представлена одна из историй колебаний, снятая на ВЭПП-2000 при токе 8 мА и с расстройкой частот  $\eta \approx 0.001$ . Грубо натягивая на эту картинку описанные результаты теоретического расчета (5), можно увидеть колебания амплитуды из-за хроматизма с синхротронной частотой ( $\sim 0.003$ ), перекачку амплитуды с частотой  $\sim \eta$  и затухание амплитуды вследствие присутствия постоянных нелинейностей.

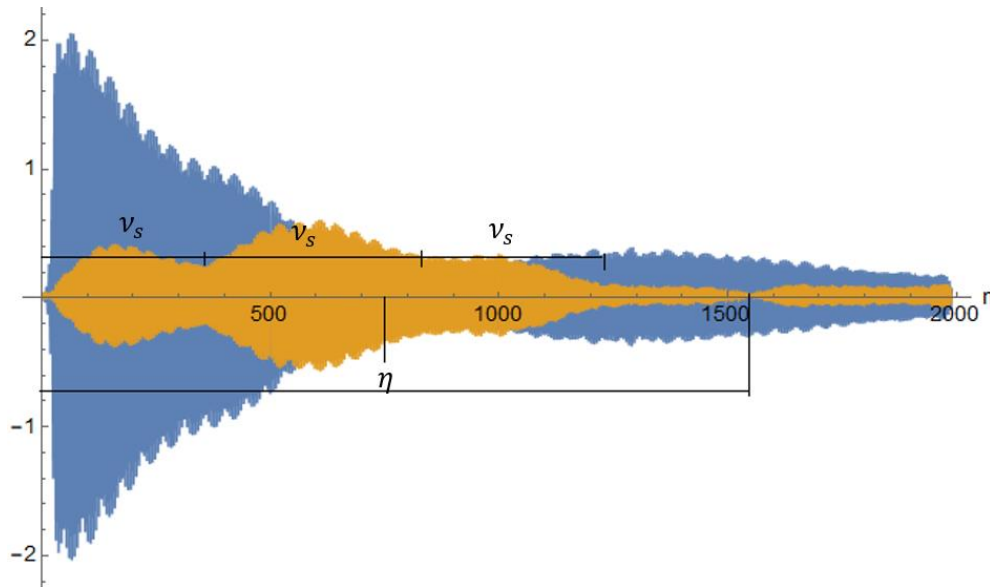


Рис. 5 История колебаний дипольного момента пучка на резонансе связи

## 5. Моделирование сигналов

Предполагая, что сила нелинейности мала ( $c = \frac{|f_2|H}{\eta} \ll 1$ ), для гамильтониана (П.1) можно получить выражение для фаз  $a$  и  $b$  в первом порядке по действию. Получаем:

$$\varphi_a(n) = (q b_2^2 + p b_1^2) n, \quad \varphi_b(n) = (q b_1^2 + r b_2^2) n$$

Где  $b_1 = \sqrt{2J_a}, b_2 = \sqrt{2J_b}$  – средние амплитуды колебаний. Резонансы проявляются только во втором порядке по действию, и в первом приближении  $A, B = \text{const}$ . Видно, что данная формула очень схожа с такой из S.Y.Lee [7]. Без учета фазовых колебаний действий и амплитуд, получаем ответ в виде S.Y.Lee с коэффициентами:

$$k_{xx} = \frac{p}{2\pi}; k_{xz} = \frac{q}{2\pi}; k_{zx} = \frac{q}{2\pi}; k_{zz} = \frac{r}{2\pi}$$

Далее нужно полученные выражения подставить во введенное выше линейное разложение (1) и получить выражения в координатах  $x$ - $y$ . Полученная формула объясняет расфазировку и, после моделирования выписанной выше функции и ее сравнения с данными с пикапов получается, что эти коэффициенты не очень малы, а по порядку величины  $p, q, r \sim \eta/H$ . Вспоминая, что все коэффициенты в гамильтониане одного порядка (см. приложение), получаем, что коэффициент  $c$  также не мал, а система находится на границе появления дополнительных стационарных точек. Пример моделирования сигнала с параметрами:  $H = 0.0002, f_2 = 19, p = 11, q = -11, r = 11, k_{11} = 0, k_{12} = 0$  приведен на рис. 6.

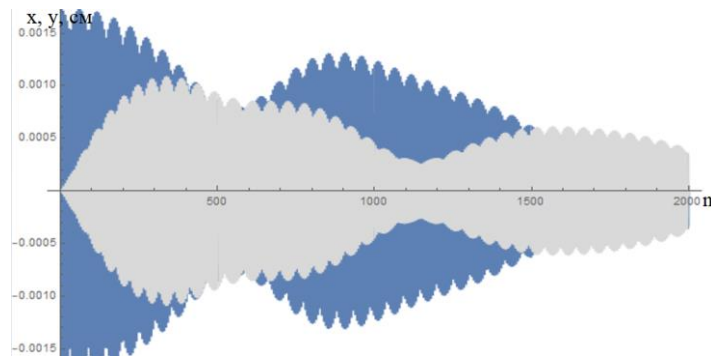


Рис. 6. Пример моделированной истории колебаний

## 5.1 Спектры колебаний одной частицы

В присутствии резонанса  $2 - 2$  действия, очевидно, перестают быть константами, и испытывают колебания на двойной частоте  $2\eta$ , также как и фазы. Амплитуда этих колебаний и сдвиг частот пропорциональны  $c^2$ . Такой же эффект дает резонанс  $1 - 1$ , возбуждая колебания на одинарной  $\eta$ . При переходе к координатам  $x$ - $y$  спектры мод складываются с весами, являющимися компонентами векторов нормальных колебаний в соответствии с введенным линейным разложением координат по модам.

В результате при Фурье-анализе колебаний дипольного момента видны 2 основных частоты  $\nu_x$  и  $\nu_y$ , смещенных из-за наличия нелинейностей, резонансов и расфазировки, и один или несколько сателлитов, отвечающих за фазовые колебания в областях автофазировки на одинарной и двойной  $\eta$ . При различных параметрах частоты мод  $a$  и  $b$  смещаются в разные стороны (за вычетом общего сдвига), увеличивая или уменьшая расстояние между основными пиками, обозначенное далее как  $\eta_1$ . Такой сдвиг действует и на все сателлиты, возникающие из-за резонансов. В итоге на Фурье должно быть видно несколько равноотстоящих друг от друга частот. Такое поведение предполагается подтвердить экспериментально.

Было проделано моделирование коллективных (как, например, на рис. 6) и одночастичных сигналов на основе численного решения уравнений, полученных из усредненного гамильтониана (П.1). В дальнейшем отдается предпочтение одночастичному моделированию благодаря большей точности и более информативной картине, чем в многочастичном, а также отсутствию больших объемов численного счета. Также все спектры ниже принадлежат модовому движению, а именно моды А. Спектр моды В, очевидно, не содержит критических отличий, переход к  $x$ - $y$  осуществляется описанным выше способом. Серии спектров движения с разными начальными условиями, отображенными на рис. 3 точками, изображены на рис. 7. На спектрах синяя и красная линии означают основную частоту моды В и А соответственно.

Соответствие между фазовыми портретами и спектрами задается следующим образом:

Рис. 7а)  $\leftrightarrow$  Рис. 3а) красные точки, по порядку увеличения  $J$ .

Рис. 7б)  $\leftrightarrow$  Рис. 3б) красные точки, по порядку увеличения  $J$ .

Рис. 7в)  $\leftrightarrow$  Рис. 3в) синие точки, по порядку уменьшения  $J$ .

Как и было предположено, на полученных Фурье спектрах видно несколько пиков, расстояние  $\eta_1$  между которыми зависит от близости траектории к сепаратрисе – оно пропорционально периоду обращения вокруг стационарной точки. Для траекторий, расположенных далеко от стационарных точек и сепаратрис, на спектре видны основные модовые колебания и малые сателлиты. В стационарных точках действия и разностная фаза постоянны, и на спектре моды видна только линия с частотой этой моды. При попадании частицы на траекторию, проходящую близко к седловой точке, частота фазовых колебаний уменьшается, и на спектре видно много линий близко отстоящих друг от друга.

На рис. 8 изображены модовые колебания вблизи сепаратрисы (первые 2 графика), и вблизи стационарной точки (3 график). Из них видно, что, действительно, вблизи сепаратрисы в колебаниях действий и фаз наблюдается множество гармоник. Периодичность огибающей явно указывает на то, что спектр таких колебаний линейчатый.

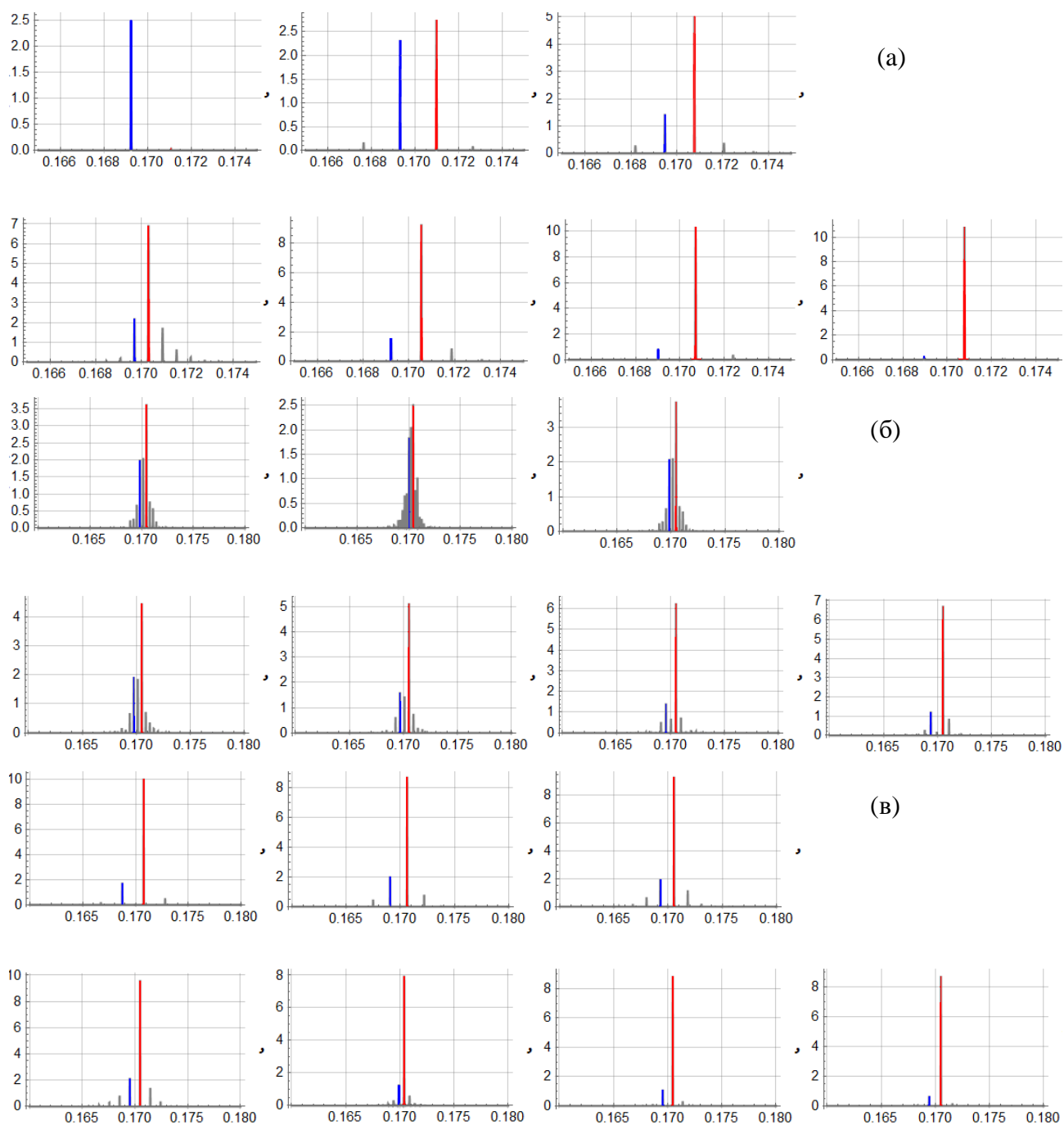


Рис. 7. Фурье-спектр в терминах нормальных мод а-в при близких значениях  $k_{11}$  и  $k_{12}$

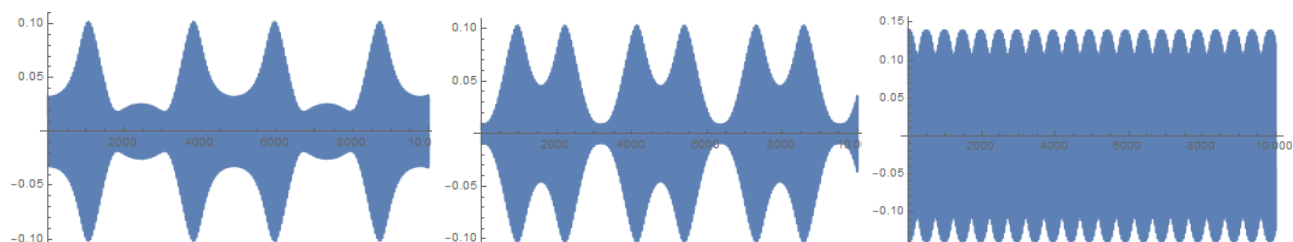


Рис. 8. Модовые колебания частицы, проходящей вблизи сепаратрисы



## 6. Источники кубических нелинейностей в магнитной системе

Перейдем к оценке возбуждаемых в коллайдере ВЭПП-2000 нелинейностей, порождающих резонанс  $2 - 2$ . Рассмотрим последовательно края соленоидов, квадруполь и действие встречного пучка. Точное вычисление коэффициентов довольно трудно и осложнено отсутствием точных количественных измерений полей на краях соленоидов и квадрупольных линз. Особенно последних ввиду их сложного включения в ахроматические блоки, тем не менее, возможна оценка по порядку величины на основе модели «максвелловских» краевых полей.

### 6.1 Краевые поля соленоидов

Важными элементами коллайдера ВЭПП-2000, конечно, являются соленоиды финального фокуса. Они имеют нелинейное радиальное магнитное поле на краях, и, следовательно, закручивают пучок, внося при этом амплитудную зависимость частот.

$$\begin{aligned} B_x &= H'(z)x + \frac{H'''(z)}{16}(x^3 + y^2x) \\ B_y &= H'(z)y + \frac{H'''(z)}{16}(x^2y + y^3) \end{aligned}$$

В уравнение на  $x$  входит  $B_y$  и наоборот. Видно, что эти источники дают вклад четных степеней  $x$  и  $y$  (например,  $x^4$  или  $x^2y^2$ ) в гамильтониан. Коэффициенты в гамильтониане умножаются на квадрат действий, и получаются интегрированием полей с весами в виде квадратов бета-функций.

Действия оцениваются просто – из геометрических параметров установки, бета-функций и амплитуд бетатронных колебаний, порядок величины получается  $10^{-4}$ . Что касается сил резонанса, для краев соленоида оценка без учета циркулярных мод (для кольца, в котором присутствуют только соленоиды) уже была сделана в работе [4]:  $f_2 \sim 100 \text{ см}^{-1}$ . При оценивании простым способом – подстановкой полей в виде возмущений (см. приложение),  $f_2$  грубо представляется как  $Lh_3\beta^2$ , где  $h_3 = \frac{H'''(s)}{16B\rho} \sim 10^{-2}$ , в результате чего получается такая же величина. В итоге имеем  $s \lesssim 10$ , что, оказывается, не

сильно отличается от граничного случая качественного усложнения фазовых портретов и появления дополнительных областей бетатронной автофазировки.

## 6.2 Краевые поля квадрупольных линз

Для оценки вклада квадрупольных линз в кубическую нелинейность, будем считать, что вклады от каждого края можно просуммировать, пренебрегая при этом влиянием других близкорасположенных элементов коллайдера.

На краях квадрупольных линз создаются поля (см. приложение):

$$\begin{aligned} H_x &= G(z)y - \frac{G''(z)}{12}(3x^2y + y^3) \\ H_y &= G(z)x - \frac{G''(z)}{12}(x^3 + 3xy^2) \\ H_z &= G'(z)xy \end{aligned}$$

Для простоты, будем считать, что протяженность краевых полей мала, и квадрупольный градиент  $G$  испытывает скачек с 0 до  $G_0$  на границе линзы.

Используя тот же метод возмущений, подставляем выписанные поля как возмущение уравнений движения из-за силы Лоренца:

$$G_x = \frac{1}{B\rho}(y'H_z - H_y), G_y = -\frac{1}{B\rho}(x'H_z - H_x)$$

Для простоты оценки, положим, что система без связи, и собственные вектора – обычные одномерные вектора Флоке. Прodelывая то же, что и при вычислении октупольного гамильтониана, сначала интегрируем возмущение с весом в соответствии с формулой (2) (усредняем по бетатронным фазам  $\psi_x, \psi_y$ ), а затем интегрируем по  $z$  ( $s$  или  $t$ ) – по участку с краевым полем – здесь это малая область вблизи скачка градиента. Здесь, ввиду наличия второй производной градиента, то есть первой производной дельта-функции, необходимо также произвести интегрирование по частям. Получаем амплитудно-зависящие сдвиги частот:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_x &= \frac{G_0}{4B\rho}(w_x^3w'_xJ_x + (w_y^2w_xw'_x - w_x^2w_yw'_y)J_y) \\ \Delta\varphi_y &= \frac{G_0}{4B\rho}((w_y^2w_xw'_x - w_x^2w_yw'_y)J_x - w_y^3w'_yJ_y) \end{aligned} \quad (6)$$

К тому же результату можно прийти через гамильтонов подход, такое исследование проделано в работе [11].

Получив «гамильтонов» результат для входного края, остается лишь учесть выходной край и множественность линз. Опять же, для оценки, будем считать линзу тонкой с силой  $\frac{1}{P}, P = \frac{G_0 L}{B\rho}$ . Тогда бета-функция на входе и выходе совпадает, а  $\Delta w' = -Pw$ . Далее суммируем эффекты от входа и выхода по формуле (6) (с учетом того, что  $G'_{\text{вход}} = -G'_{\text{выход}}$ ):

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_x &= \frac{G_0 P}{4B\rho} (w_x^4 J_x + 2w_y^2 w_x^2 J_y) = \left(\frac{G_0}{B\rho}\right)^2 \frac{L}{4} w_x^2 (w_x^2 J_x + 2w_y^2 J_y) \\ \Delta\varphi_y &= \left(\frac{G_0}{B\rho}\right)^2 \frac{L}{4} w_y^2 (2w_x^2 J_x + w_y^2 J_y)\end{aligned}\quad (7)$$

Просуммируем для всех линз, установленных на ВЭПП-2000. Используя данные об установке, приведенные в таблице 1 и подробно изложенные в [9], получаем численную оценки для нелинейностей  $(p, q, r)$ , вычисленных по формуле (7):

$$p \sim 2.5; q \sim 1.5; r \sim 1.6,$$

что, как видно, заметно меньше вклада от соленоидов.

Формула для краевых нелинейностей в терминах нормальных мод а-в (с использованием базиса (1)) здесь не приводится ввиду ее громоздкости.

Таблица 1. Основные параметры квадрупольных линз одного квадранта магнитной структуры ВЭПП-2000. Поля приведены для энергии кольца 1 Гэв.

Обозначение	Длина, см	Градиент, кГс/см	Бета-х, м	Бета-з, м
F1	6	0.995	7.5	7.5
D1	14	-1.16	3	3.5
F2	19	4.7	6	2.7
D2	14	-2.53	4	4
D3	14	-4.77	0.5	4
F3	14	4.94	1.5	1.5

### 6.3 Встречный пучок

Как известно, для круглых пучков встречный гауссов пучок создает радиальную силу, схематично изображенную на рис. 9. Здесь  $n$  – линейная плотность частиц в пучке:

$$F_r(r) = -2n e^2 (1 + \beta^2) \frac{1}{r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right) \quad (8)$$

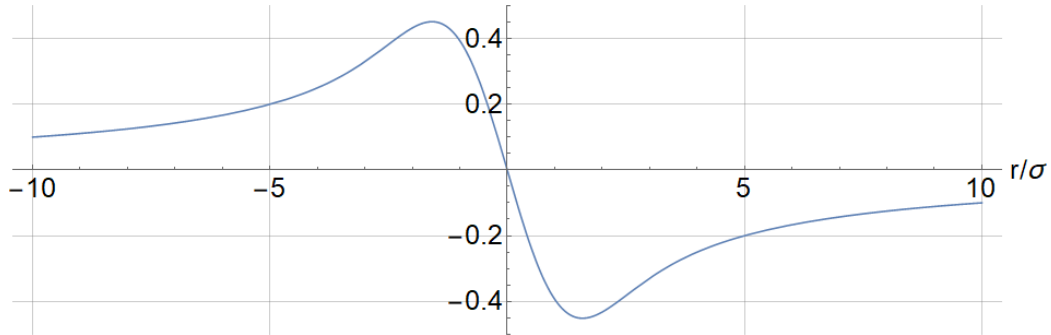


Рис. 9. Амплитудная зависимость радиальной силы, вызванной встречным пучком

После интегрирования (8) по всему участку столкновения, с учетом предполагаемого нормального продольного распределения, получаем угловое смещение, получаемое при столкновении:

$$\Delta r' = -f \frac{\sigma^2}{r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right), f = \frac{4Nr_e}{\gamma\sigma^2} \quad (9)$$

Для частицы, прилетающей почти точно «в лоб» (с малыми амплитудами) встречному пучку, эта сила линейна по амплитуде и действует как квадрупольная линза с силой  $f$ , за исключением того, что фокусирует/дефокусирует в обоих направлениях. Такая линза создает постоянное смещение частоты примерно равное коэффициенту взаимодействия встречных пучков  $\xi$ . Для бóльших амплитуд сила становится нелинейной и, в том числе, порождает кубическую нелинейность.

Для того, чтобы оценить кубическую нелинейность, создаваемую встречным пучком, нужно разложить интегральную силу (9) дальше. В грубом приближении, умножаем полученный из линейного разложения гамильтониан сдвига частоты  $-H = J\xi$  на показатель экспоненты, а затем заменяя  $r \rightarrow \sqrt{J}\beta^*$ , получаем оценку для  $f_2$ , создаваемую встречным пучком:

$$f_2 \sim \frac{\xi\beta^{*2}}{\sigma^2} \sim 10^5$$

Получается огромная величина, и, действительно, на ВЭПП-2000  $\beta^*$  – бета-функция в точке встречи 10 см, что ведет к амплитудам  $\sim 0.1$  см, что примерно в

10 раз больше  $\sigma$ , и, следовательно, нельзя пользоваться разложением экспоненты. Большой вклад в силу нелинейности дает также рекордная  $\xi \sim 0.1$ . В реальности действие нелинейности встречного пучка не такое большое – это видно, например, из рис. 9 – при больших амплитудах сила мала.

## 7. Предлагаемый эксперимент

Рабочая точка коллайдера ВЭПП-2000 располагается в центре полосы линейного резонанса связи, конкретное её местоположение регулируется квадрупольными корректорами. Управление линейной бетатронной связью позволяет регулировать расщепление частот нормальных бетатронных мод с минимальным значением  $\sim 0.001$ .

Для изучения роли нелинейностей следует воспользоваться имеющимися в наборе диагностики пучка средствами для точного измерения частот бетатронных колебаний, а также цифровыми телекамерами (на основе ПЗС-матриц с последующей программной обработкой изображений, максимум – 16 по периметру коллайдера), которые формируют изображения пучка на разных азимутах. В соответствии с теоретическими результатами работы можно выделить два подхода.

### 1) Изучение вынужденных колебаний.

Необходимо заснять экспериментальную зависимость амплитуд возбуждения обеих нормальных мод в зависимости от частоты раскачки. Для этого многократно, с разными установками этой амплитуды, производится сканирование по частоте раскачки в диапазоне, покрывающем резонанс. При этом фиксируется изменение "портрета" нормальных колебаний на телекамерах. Такой эксперимент призван подтвердить ранее проделанные теоретические выкладки для резонанса  $1 - 1$  и постоянных нелинейностей.

Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = h_1 \sqrt{J_a} \cos(\varphi_a) + h_2 \sqrt{J_b} \cos(\varphi_b) + c_{11} J_a^2 + c_{22} J_b^2 + 2c_{12} J_a J_b + 2\pi\delta(J_a - J_b) - 2\pi\Delta(J_a + J_b) \quad (10)$$

На телекамерах будут видны амплитуды раскаченных нормальных мод, из них определяются устойчивые стационарные точки. Их устойчивость определяется при помощи критерия Сильвестра для знакоопределенности квадратичных форм. Примеры зависимостей стационарных действий от частот раскачки  $\Delta$  приведены на рис. 11, 12. Обычно такие зависимости по-отдельности для каждой моды напоминают одномерный случай, где кривые с включенной раскачкой ( $h \neq 0$ , синие линии) как-бы обволакивают прямую с выключенной ( $h = 0$ , оранжевая линия). Пример такой ситуации изображен на рис. 11, здесь все стационарные точки выступают в роли центров финитного движения. При некоторых параметрах и при увеличении амплитуды раскачки сходство исчезает, кривые стационарных точек уже не обгибают прямую с выключенной раскачкой, и появляются неустойчивые решения. На рис. 12а отображены все стационарные точки такой системы, а на рис. 12б только устойчивые. В общем случае количество решений системы уравнений на стационарные точки для гамильтониана (10) может достигать 9 (вследствие того, что включает в себя 2 степенных уравнения 3 степени).

Основным препятствием для наблюдения на телекамерах большого количества столь плотно идущих решений будет, по-видимому, нестабильность бетатронных частот машины, вызванная пульсациями тока питания линз. Для этих измерений придётся специально настраивать и контролировать имеющиеся системы подавления пульсаций.

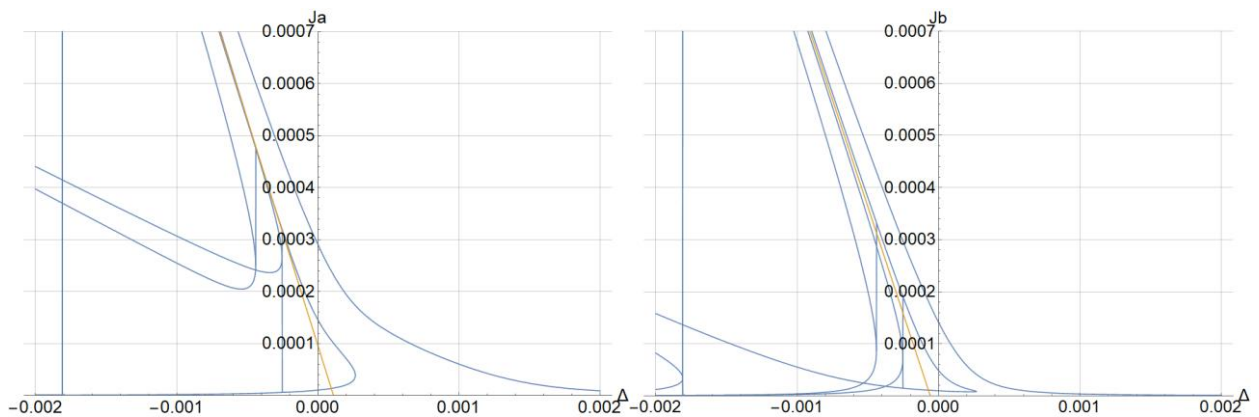


Рис. 11. Зависимость  $J_{\text{стац}}(\Delta)$ . Случай схождения с одномерной раскачкой.

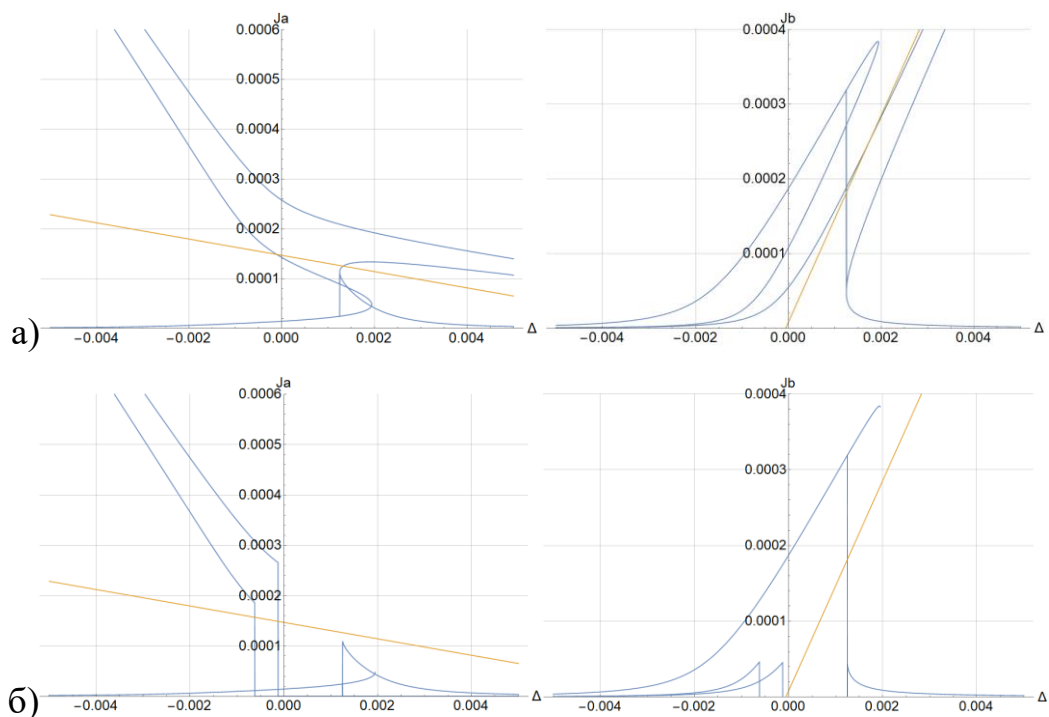


Рис. 12. Зависимость  $J_{\text{стац}}(\Delta)$ , а) все стационарные точки, б) только устойчивые.

## 2) Изучение свободных колебаний.

Они возбуждаются ударом, когерентные колебания детектируются, оцифровываются и записываются в память четырьмя ВРМ-станциями. В зависимости от амплитуды удара длительность сигнала до расфазировки может составлять 500-5000 оборотов. Сигнал подвергают цифровой фильтрации, Фурье-анализу, используется программное уточнение частот (до  $\sim 0.0001$ ). При использовании скользящего интервала в преобразовании Фурье можно выявлять амплитудную зависимость нормальных частот, а также увидеть компоненту  $2\eta$ , что покажет влияние резонанса  $2 - 2$  на динамику пучка.

Цель измерений – сопоставить экспериментальные данные с теоретическим предсказанием амплитудно-зависимых частот в присутствии нелинейности, а также наблюдать появление вызванных ею дополнительных колебаний на удвоенной и одинарной частотах фазовых колебаний для двух нормальных бетатронных мод, то есть появление дополнительных равноотстоящих пиков на Фурье спектре колебаний дипольного момента.

В отличие от первого эксперимента, во втором важны только первые несколько тысяч оборотов, по которым строится Фурье-спектр. Длительность

сигнала порядка 4 000 оборотов примерно соответствует 3-4 кГц, а частота пульсаций тока питания линз в свою очередь равна  $100 \div 300$  Гц, а значит, такие пульсации не внесут существенного вклада в эксперимент №2.

## **8. Обсуждение полученных результатов и заключение**

При совместном рассмотрении двух близко расположенных резонансов с применением усреднения быстрых фаз возможно приведение системы к интегрируемому виду, то есть эта динамика регулярна.

В работе был исследован случай одновременного действия резонансов  $1 - 1$  и  $2 - 2$ , найдены качественные характеристики такого движения, оценена величина нелинейностей, создающих кубические нелинейности на ВЭПП-2000, ведущие к появлению резонансов. Сравнение с моделированием известной теории двумерной расфазировки показало качественное соответствие таких оценок и измерений.

Были построены и проанализированы фазовые портреты, найдены качественные характеристики таких систем, фазовые области автофазировки и стационарные точки.

Были произведены серии моделирований в ситуациях с качественно разными фазовыми портретами, для прогнозирования качественной картины бетатронных колебаний. Предсказан вид Фурье-спектра бетатронных колебаний и описан переход из модовых колебаний и спектров в наблюдаемые координаты  $x$ - $y$ .

В дальнейшем планируется вывести общую теорию построения картины колебаний для нескольких резонансов, расположенных нетривиально относительно друг друга, изучить возможность приведения таких систем к интегрируемому виду.

Предлагается также провести описанную серию экспериментов на ВЭПП-2000, выявить предсказанные в работе эффекты совместного действия линейного и нелинейного резонансов связи.



## Список литературы

1. Ястребов М. Н. Особенности динамики частиц при работе коллайдера вблизи линейного резонанса связи. Выпускная квалификационная бакалаврская работа, НГУ. 2014.
2. Литвиненко В. Н., Переведенцев Е. А. Расчет параметров пучка в накопителях со связью колебаний. Тр. VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, т. II. 1979.
3. R. D. Ruth. Single particle dynamics and nonlinear resonances in circular accelerators. SLAC-PUB-3836. 1985.
4. V. V. Danilov, E. A. Perevedentsev, et al. Dynamic aperture limitation in storage ring due to solenoids. Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk. EPAC1990.
5. W. Herr, T. Pieloni. Beam-Beam Effects. CERN Yellow Reports: School Proceedings, Vol. 3/2017, CERN-2017-006-SP.
6. E. A. Perevedentsev. Linear beam dynamics and beyond. High quality beams. New York. 2001.
7. S. Y. Lee. Decoherence of the kicked beams II. Indiana University. SSCI-N-749. 1991.
8. M. G. Minty, A. W. Chao, W. L. Spence. Emittance growth due to decoherence and wakefields. Particle Accelerator Conference, 1995, vol.5.
9. Шварц Д. Б. Круглые встречные пучки в коллайдере ВЭПП-2000: Дисс. к.ф.-м.н. ИЯФ СО РАН. 2013.
10. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. Москва. 1970.
11. E. Forest. Leading order hard edge fringe fields effects exact in  $(1 + \delta)$  and consistent with Maxwell's equations for rectilinear magnets. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A269 (1988) 474-482.

## Приложение

### а) Гамильтониан системы с октупольными нелинейностями

Октупольные поля имеют вид:

$$\begin{aligned} H_x &= h_3(3x^2y - y^3) \\ H_y &= h_3(x^3 - 3xy^2) \end{aligned}$$

Отсюда получаются компоненты  $G$ :

$$G_4 = H_x, G_2 = -H_y.$$

Подставляя  $G$  в формулу (2) получим сумму по модам:

$$A' + i A \varphi'_a = \sum_{k,l=-4}^4 c_{kl} e^{i(k(\varphi_a + \psi a) + l(\varphi_b + \psi b))}$$

Показатели экспонент представляются в виде

$$i \left( k \varphi_a + l \varphi_b + \left( \nu + n_q \right) \frac{s}{\bar{R}} \right),$$

где  $\nu + n_q$  – некая получившаяся в результате частота,  $\nu$  и  $n_q$  – ее дробная и целая части соответственно,  $s$  – продольная координата,  $\bar{R}$  – средний радиус орбиты частицы. Дальше надо усреднить полученные уравнения по периоду обращения частиц в коллайдере. Слагаемые в правой части, у которых частота  $\nu$  в показателе экспоненты не мала (не выполнено резонансное условие), усредняются в 0. Экспоненты с медленными фазами можно вынести из под интеграла усреднения, в итоге усредненные уравнения имеют вид:

$$A'(n) + i A(n) \varphi'_a(n) = 2\pi \bar{R} \sum_{k,l=-4}^4 \overline{c_{kl}} e^{i(k \varphi_a + l \varphi_b + \nu 2\pi n)}$$

$$\overline{c_{kl}} = \frac{1}{2\pi \bar{R}} \oint_0^{2\pi \bar{R}} c_{kl} e^{i(n_q \frac{s}{\bar{R}})} ds$$

и аналогично для  $B$ . Здесь  $n = s/2\pi \bar{R}$  – номер оборота. Коэффициенты в сумме имеют сложный вид и должны быть вычислены отдельно для каждого источника нелинейностей с разными полями. Приведем здесь коэффициент при главном резонансе для этой работы:

$$\begin{aligned} \overline{c_{2-2}} = & -\frac{3i}{64} AB^2 \oint_0^1 h_3 e^{-2i(\chi_x + \chi_y + 2\pi n n_{\text{рез}})} \left[ -\beta_x^2 e^{2i(\alpha + \chi_x + \chi_y + 2\pi n n_{\text{рез}})} + \right. \\ & + (3e^{4i(\alpha + \chi_x + 2\pi n n_{\text{рез}})} - 4e^{2i(\alpha + \chi_x + \chi_y + 2\pi n n_{\text{рез}})} + 3e^{4i\chi_y}) \beta_x \beta_y - \\ & - e^{2i(\alpha + \chi_x + \chi_y + 2\pi n n_{\text{рез}})} \beta_y^2 - 4(e^{4i(\alpha + \chi_x + 2\pi n n_{\text{рез}})} - e^{4i\chi_y}) \beta_x \beta_y \cos(2\gamma) + \\ & + (e^{4i(\alpha + \chi_x + 2\pi n n_{\text{рез}})} \beta_x \beta_y + e^{4i\chi_y} \beta_x \beta_y) \cos(4\gamma) + \\ & \left. + e^{2i(\alpha + \chi_x + \chi_y + 2\pi n n_{\text{рез}})} (\beta_x^2 + 4\beta_x \beta_y + \beta_y^2) \cos(4\gamma) \right] dn \end{aligned}$$

Изначально в общем случае коэффициенты  $\overline{c_{kl}}$  комплексные, их фазы для удобства добавим в экспоненты, тогда все коэффициенты в уравнениях будут вещественны. В данной задаче не предполагалась близость средней частоты ни к  $1/2$ , ни к  $1/4$ , поэтому, при усреднении по большому периоду времени, останутся только члены с медленно осциллирующими экспонентами – искомые резонансы  $2 - 2$  и  $1 - 1$ , а также постоянная мода:

$$\begin{aligned} A' + i A \varphi'_a &= ipA^3 + i \left( \frac{3}{2} A^2 B k_{11} + \frac{1}{2} B^3 k_{12} \right) e^{-i(\varphi_a - \varphi_b + 2\pi n \eta + \alpha)} + \\ &+ if_2 A B^2 \left( \frac{q}{f_2} + e^{-i(2\varphi_a - 2\varphi_b + 4\pi n \eta)} \right) \\ B' + i B \varphi'_b &= irB^3 + i \left( \frac{1}{2} A^3 k_{11} + \frac{3}{2} AB^2 k_{12} \right) e^{-i(\varphi_a - \varphi_b + 2\pi n \eta + \alpha)} + \\ &+ if_2 B A^2 \left( \frac{q}{f_2} + e^{-i(2\varphi_a - 2\varphi_b + 4\pi n \eta)} \right) \\ H &= 2 \left( k_{11} J_a^{\frac{3}{2}} \sqrt{J_b} + k_{12} J_b^{\frac{3}{2}} \sqrt{J_a} \right) \cos(\varphi_a - \varphi_b + 2\pi n \eta + \alpha) + \\ &+ (pJ_a^2 + rJ_b^2 + 2qJ_a J_b) + 2f_2 J_a J_b \cos(2\varphi_a - 2\varphi_b + 4\pi n \eta) \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Где  $\eta = \nu_{a0} - \nu_{b0}$  – разница начальных модовых частот,  $J_a = \frac{A^2}{2}$ ,  $J_b = \frac{B^2}{2}$ , а начальные фазы были переобозначены так, что постоянное смещение  $\alpha$  (здесь не то же, что в собственных векторах модовых колебаний (1)) есть только у резонанса  $1 - 1$ . Следует сразу заметить, что все коэффициенты в общем случае одного порядка, так как все пропорциональны  $h_3$ , силе возмущения. Остальные источники кубической нелинейности дают такой же по форме гамильтониан, с различием лишь в коэффициентах. Будем рассматривать общий случай всех коэффициентов не равных нулю, а здесь упомянем лишь то, что введенные  $p$  и  $r$  для краев соленоида равны нулю.

Для получения полного гамильтониана системы, к нему следует прибавить и невозмущенный гамильтониан:  $H_0 = (J_a + J_b)2\pi\nu_0 + (J_a - J_b)2\pi\eta$ ,  $\nu_0 = \frac{\nu_{a0} + \nu_{b0}}{2}$ . Видно, что  $J'_a = -J'_b$ , от куда следует сохранение суммарного действия  $II = J_a + J_b$ . Появление дополнительного интеграла движения означает выполнение теоремы Лиувилля об интегрируемых системах и позволяет свести задачу к одномерной.

Введем разностное  $J$  и суммовое  $II$  действия, избавляясь тем самым от одной переменной. Понижая дальше размерность задачи, обозначим разностную фазу в скобках  $\Phi = 2\pi n \eta + \varphi_a - \varphi_b$ . Аккуратно расписывая гамильтоновы уравнения (или пользуясь производящей функцией), получаем новый гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2}(p(J^2 + II^2 + 2IIJ) + r(J^2 + II^2 - 2IIJ)) + q(II^2 - J^2) + 4\pi J\eta + 2II\nu_0 + \sqrt{II^2 - J^2}(k_{11}(J + II) + k_{12}(II - J))\cos(\alpha + \Phi) + f_2(II^2 - J^2)\cos(2\Phi)$$

Из него получаются уравнения на новые переменные:

$$J' = -\frac{dH}{d\Phi}, \Phi' = \frac{dH}{dJ}, \Phi'_{\text{сум}} = \frac{dH}{dII}, II' = 0$$

## **б) Краевые поля соленоидов и квадрупольных линз. Кубическая нелинейность**

Рассмотрим, край квадрупольной линзы. Пусть она имеет конечную длину, поле внутри постоянно вдоль оси и имеет градиент  $G$ , а на концах резко убывает. Стандартно введенный скалярный потенциал  $\Psi$  ( $B = -\nabla\Psi$ ) должен удовлетворять уравнению Лапласа. В основной части квадруполь он тогда будет иметь вид  $-\Psi = G x y$ . Ввиду осевой симметрии задачу на краях удобно решать в цилиндрических координатах. В этой части производные градиента отличны от нуля и должны быть взяты в рассмотрение. Предположив, что основной член  $\frac{1}{2}G(z)r^2\sin(2\varphi)$  остается основным, получаем лапласиан:  $\frac{1}{2}G''(z)r^2\sin(2\varphi) = 0$ , откуда заключаем, что в потенциал должен входить

также член со второй производной градиента. Продолжая итерации находим первые члены разложения:

$$-\Psi = G(z)xy - \frac{G''(z)}{12}(x^2 + y^2)xy + \dots$$

$$B_x = G(z)y - \frac{G''(z)}{12}(3x^2y + y^3)$$

$$B_y = G(z)x - \frac{G''(z)}{12}(x^3 + 3y^2x)$$

Вклад соленоида вычисляется аналогичным образом. Можно также сразу посмотреть ответ в [10]:

$$B_x = H'(z)x + \frac{H'''(z)}{16}(x^3 + y^2x)$$

$$B_y = H'(z)y + \frac{H'''(z)}{16}(x^2y + y^3)$$