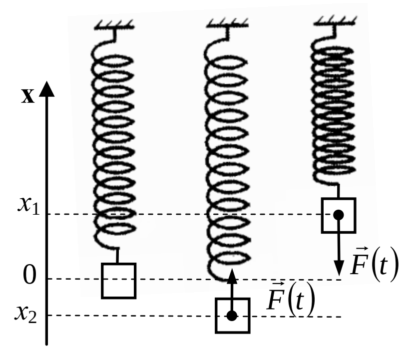
ТЕОРИЯ

Механични и електрични трептения

1. Трептения. Основни понятия

Трептения се наричат движения, притежаващи определена повтаряемост във времето.

Ако една механична система е изведена от положение на устойчиво равновесие, в нея се появяват сили, стремящи се да възстановят първоначалното ѝ състояние. Класически е примерът с тяло, окачено на вертикална еластична пружина, чието равновесие е нарушено (пружината е деформирана) (фиг. 1). Тогава еластичната сила връща системата към равновесното положение ($x = 0$), след подминаването на което отново възниква връщаща сила и т.н.

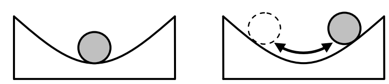


Фиг. 1

Големината на еластичната сила е пропорционална на деформацията на пружината, респективно на отместването на тялото от равновесното положение и обратно насочена. Определя се от закона на Хук

$$F = -\mathrm{k}x\,. \tag{1}$$

Друг пример за трептеливо движение е представен на фиг. 2. Когато топката е изведена от положение на равновесие тя започва да се колебае вляво и вдясно от дъното на ямата, като ролята на връщаща сила изпълнява силата на тежестта. В отсъствие на триене процесът на трептене може да продължи безкрайно дълго.



Фиг. 2

Трептеливите движения са широко разпространени: от трептенията на сложните конструкции на мостове и небостъргачи, на автомобилните ресори и махалата на стенните часовници до трептенията на атомите във възлите на кристалната решетка. Общото помежду им е, че притежават повторяемост във времето и възникат при отклонение на системата от равновесно положение, а връщащата сила е пропорционална на отместването от равновесното положение и е насочена в обратна посока на отместването.

Освен механични съществуват електромеханични, електромагнитни и пр. трептения. Всички те математически се описват по подобен начин.

Трептенията се наричат **свободни**, ако се извършват в отсъствие на външни за системата сили и възникват при отклонение от положението ѝ на устойчиво равновесие. Трептенията са **принудени**, ако се извършват под влияние на външно за системата въздействие. Трептенията се наричат **периодични**, ако стойностите на характеризиращите ги физични величини се повтарят през равни инервали от време.

Интервалът от време, за който трептящото тяло/система извършва едно пълно трептене, се нарича **период** T. Може да се каже, че в моментите t и $t+T$ трептящата система се намира в едно и също състояние, т.е. положението и скоростта ѝ в тези моменти са еднакви.

Величината

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{2}$$

се нарича **честота** на трептенето. Тя показва, колко пълни трептения извършва системата за една секунда. Измерва се в в херци (Hz), като 1 Hz = 1 s^{-1} .

Амплитуда на трептенията A е максималното отместване на системата от положението ѝ на равновесие. Амплитудата и честотата не характеризират еднозначно трептенето, понеже две различини движения може да имат еднакви честоти и амплитуди. От основно значение е видът на силата, която се стреми да върне системата в равновесното ѝ положение.

В зависимост от това дали амплитудата на трептене намалява или остава постоянна в процеса на трептене, то бива **затихващо** или **незатихващо**.

2. Свободни механични хармонични трептения

2.1. Хармоничен осцилатор

Хармоничното трептене е движение, при което връщащата сила $\vec{F}$ е пропорционална на отместването x на системата от равновесното ѝ положение

$$\vec{F} = -\mathrm{k}\vec{x}. \qquad (3)$$

Коефициентът на пропорционалност k, се нарича **коефициент на квазиеластичната сила**. Силата е квазиеластична в смисъл, че се определя по формула, аналогична на закона на Хук $F = -\mathrm{k}x$, но връщащата сила може и да няма еластичен характер. Минусът във формулата показва, че силата винаги има противоположна посока на отместването.

При незатихващо хармонично движение, когато върху трептящата система действа само връщащата сила, уравнението на движение е

$$ma = -\mathrm{k}x \qquad \text{или} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{k}x. \qquad (4)$$

Решението на това уравнение е от вида

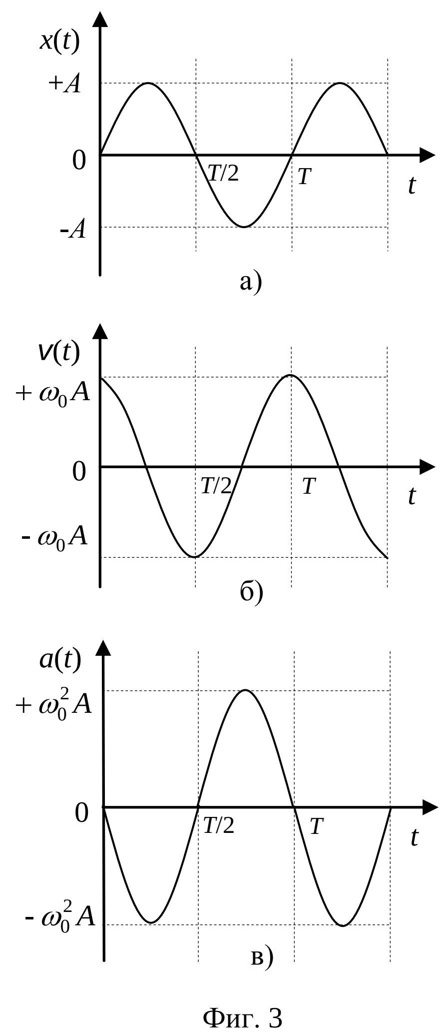
$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad (5)$$

където A е **амплитудата**, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ е **собствената кръгова честота** на трептенето. Аргументът на синусовата функция $\Phi = \omega_0 t + \varphi$ се нарича **фаза** на трептенето, а φ е **началната фаза** (фазата в началния момент t = 0**)**. Изразът (5) се нарича **закон за отместването** или закон за движението. Трептяща система, която се подчинява на такъв закон за отместването се нарича **едномерен хармоничен осцилатор**.

За разлика от линейната честота, която се определя от (2), кръговата честота е свързана с периода на трептене по следния начин

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \qquad (6)$$

и се измерва в радиани за секунда (rad/s).



Фиг. 3

Синусоидалният характер на трептеливото движение на хармоничния осцилатор с начална фаза $\varphi = 0$ е представен с фиг. 3 а.

Изразите за зависимостта на скоростта и ускорението на хармоничния осцилатор от времето се извеждат от закона за отместване съответно чрез еднократно и двукратно диференциране по времето

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi); \tag{7}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t + \varphi). \tag{8}$$

Скоростта и ускорението, също както отместването x, се изменят по хармоничен закон (фиг. 3 б, в). Скоростта добива амплитудна стойност $v_{\max} = \omega_0 A$, когато фазата на трептенето е нула, т.е. при преминаване на осцилатора през равновесно положение. Обратно, ускорението е максимално $|a_{\max}| = \omega_0^2 \mathrm{A}$, когато отместването е максимално. Ускорението винаги е насочено към равновесното положение (по посока на силата). В състояние с максимално ускорение скоростта на осцилатора е нула. В тези моменти скоростта променя посоката си.

Връщащата сила е максимална в случаите на максимално отместване

$$F_{\max} = \mathrm{k}x_{\max} = \mathrm{k}A = m\,\omega_0^2 A. \tag{9}$$

2.2. Енергия на хармонично трептене

Кинетичната и потенциалната енергия на хармоничен осцилатор, който извършва свободни незатихващи трептения, се определят съответно с изразите

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \tag{10}$$

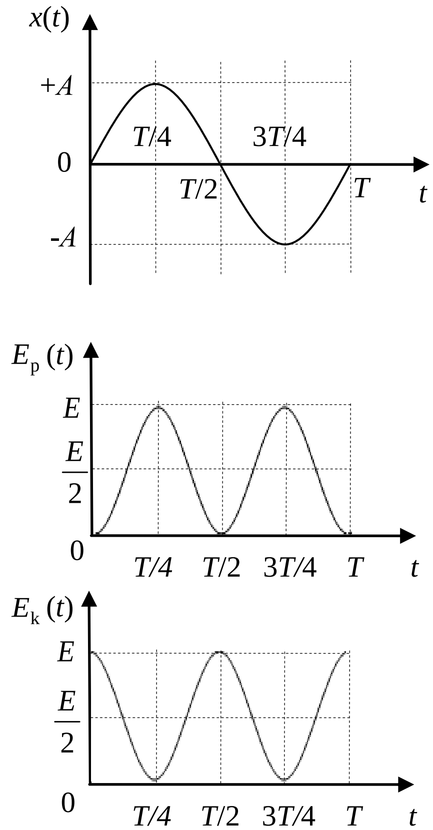
$$E_{\mathrm{p}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \tag{11}$$

от които се вижда, че те се изменят във времето. С периодичната промяна на отклонението x се наблюдава и периодично превръщане на кинетичната енергия на осцилатора в потенциална и обратно (фиг. 4).

Пълната енергия на осцилатора е постоянна величина, пропорционална на квадрата на кръговата честотата и на квадрата на амплитудата

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2. \tag{12}$$

Потенциалната енергия е равна на пълната енергия при максимално отместване от равновесното положение (t = T/4, 3T/4; $E_p = E$, $E_k = 0$), а кинетичната енергия е равна на пълната енергия при преминаване на системата през равновесно положение (t = T/2, T; $E_k = E$, $E_p = 0$). Средните стойности на кинетичната и потенциалната енергия за един период на трептене са еднакви и равни на E/2.



Фиг. 4

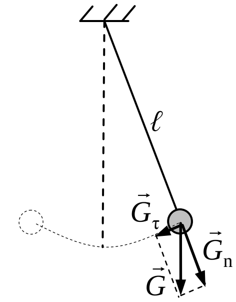
2.3. Махало

Математичното махало е идеализирана трептяща система, съставена от дълга, безтегловна, неразтеглива нишка и окачено на нея тяло, което представлява материална точка (фиг. 5). При отклоняване на нишката от равновесно положение възниква тангенциална компонента на силата на тежестта – $\vec{G}_\tau$. Тя се явява връщаща сила, насочена към равновесното положение на махалото. При малки начални отклонения нейният въртящ момент предизвиква хармонични трептения на махалото с период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,, \qquad (13)$$

където ℓ е дължината на нишката, а g е земното ускорение.

Като пример за математично махало може да се разглежда махалото на Фуко.



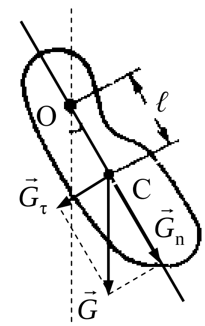
Фиг. 5

Пружинното махало. Неговият период зависи от масата на окачената на пружината тежест и от коефициента на еластичност на пружината

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mathrm{k}}}\,. \tag{14}$$

Физичното махало (фиг. 6) е твърдо тяло, което при малки ъглови отмествания от положение на равновесие, под действие на силата на тежестта извършва трептения около хоризонтална ос (т.О) с период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}}\,. \tag{15}$$



Фиг. 6

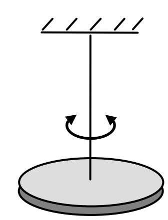
Инерчният момент на тялото I се определя спрямо оста на люлеене на тялото, m е неговата маса, а ℓ е разстоянието от центъра на масите на тялото до оста. За да може физичното махало да се люлее, масовият му център не трябва да лежи върху оста.

Измерването на периода на трептене на физично махало позволява да се определи инерчният момент на тела с произволна форма, ако е известна масата им и разположението на центъра на масите.

При математичното и физичното махало връщащата сила се определя от силата на земното притегляне. Те извършват хармонични трептения само при малки отклонения от равновесното положение.

Торзионното махало (фиг. 7) е тяло окачено на еластична нишка, което, изведено от състояние на равновесие, извършва трептения в равнина, перпендикулярна на нишката, с период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\,, \tag{16}$$


Фиг. 7

където I е инерчният момент на тялото спрямо оста на нишката, а D е дирекционният момент на нишката. В този случай връщащата сила се определя от еластичните свойства на нишката.

Дирекционният момент характеризира еластичните свойства на нишката при усукване и е аналог на коефициента на еластичност при невъртеливите трептения.

Балансовото колело на механичните часовници представлява торзионно махало, чийто период на трептене определя точността им. Вместо нишка, обаче, се използва спирална пружина.

3. Затихващи механични хармонични трептения

В реалните трептящи системи действат сили на триене или на съпротивление от страна на средата, поради което движението им не е незатихващо. Например физичното махало изпитва сила на съпротивление във въздуха и сила на триене на махалото в оста на окачване, в резултат на което енергията му се изразходва за тяхното преодоляване и трептенията затихват. Трептенията, които се извършват с намаляваща във времето амплитуда, се наричат затихващи.

В повечето трептящи системи силата на съпротивление е пропорционална на скоростта на движение v и е насочена в противоположна посока

$$\vec{F}_{\mathrm{c}} = -\mathrm{b}\vec{v} = -\mathrm{b}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}, \tag{17}$$

където b е коефициентът на съпротивление на средата.

Ако се отчете тази сила на съпротивление при движението на тяло с маса m, окачено на еластична, безтегловна пружина, то уравнението на движението има вида

$$ma = -\mathrm{k}x - \mathrm{b}v, \tag{18}$$

или

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \mathrm{b}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \mathrm{k}x = 0. \tag{19}$$

Решението на последното уравнение е

$$x(t) = A_0\mathrm{e}^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi). \tag{20}$$

Този израз представя закона за движението на трептящо тяло с експоненциално намаляваща амплитуда

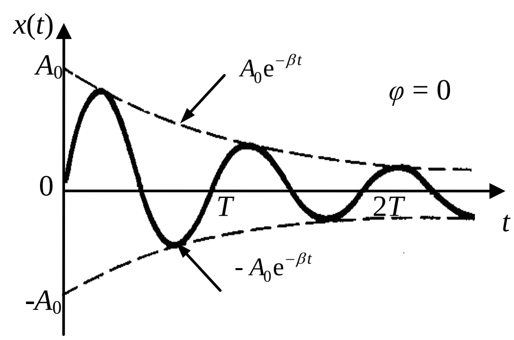
$$A(t) = A_0\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{21}$$

и коефициент на затихване

$$\beta = \frac{\mathrm{b}}{2m}. \tag{22}$$

На фиг. 8 е представена графичната зависимост $x(t)$ на затихващо трептене с начална фаза φ = 0. Пунктираната линия представя зависимостта на амплитудата на трептенето от времето.

Кръговата честота на затихващите трептения е



Фиг. 8

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{23}$$

При малки загуби на енергия ($\omega_0 >> \beta$) кръговата честота съвпада със собствената кръгова честота на незатихващите трептения $\omega \approx \omega_0$.

При постоянни k, m и β периодът на затихващите трептения е

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} . \tag{24}$$

Времето τ, за което амплитудата намалява e-пъти се нарича **време на релаксация**. То е равно на реципрочната стойност на коефициента на затихване

$$\tau = \frac{1}{\beta} . \tag{25}$$

Друга важна величина за затихващите трептения е **логаритмичният декремент на затихване.** Той се дефинира като логаритъм от отношението на две последователни амплитуди, отделени една от друга с време, равно на един период на трептенето

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T . \tag{26}$$

В случай, че $\beta = \omega_0$ се наблюдава **критично затихване** (демпфериране) и системата достига равновесие за най-кратко време.

Амортисьорите на автомобилите и устройствата за затваряне на врати работят на принципа на бързото затихване на трептенията. Те се конструират така, че да е изпълнено условието за критично затихване. Същият принцип се използва и при стрелките на измерителни прибори, които трябва да се установяват за възможно най-кратко време на съответното показание.

Ако $\beta > \omega_0$, движението не е периодично, величините кръгова честота и период на трептенето нямат смисъл и движението придобива апериодичен характер. Система, за която е изпълнено това условие, след като се изведе от равновесно положение се връща в него, без да извършва трептене.

4. Принудени механични трептения
4.1. Резонанс

Превръщането на затихващите трептения в незатихващи е възможно, ако в трептящата система се внася допълнителна енергия, която компенсира енергетичните загуби. Тогава системата извършва принудени трептения.

Нека върху хармоничен осцилатор действа променлива външна принуждаваща сила от вида

$$F(t) = F_0 \cos\omega t , \tag{27}$$

където F_0 е максималната стойност (амплитудата) на силата. Тогава трептенията се извършват с честотата на външната сила ω, наречена кръгова честота на принудените трептения.

Уравнението на движение на осцилатора е

$$m\vec{a} = -k\vec{x} - b\vec{v} + \vec{F}(t), \tag{28}$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos\omega t . \tag{29}$$

Решението на уравнението е от вида

$$x\,(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi\right), \tag{30}$$

който наподобява закона за движение при свободните незатихващи трептения (5). Има обаче една съществена разлика: амплитудата на трептенията A зависи от кръговата честота ω на външната сила и от съпротивлението на средата

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\,. \tag{31}$$

При определена стойност на честотата на принуждаващата сила амплитудата на принудените трептения рязко нараства. Това явление се нарича **резонанс**, а максималната амплитуда на трептене – **резонансна**.

Резонансните честота и амплитуда се определят с изразите

$$\omega_{\text{г}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,, \tag{32}$$

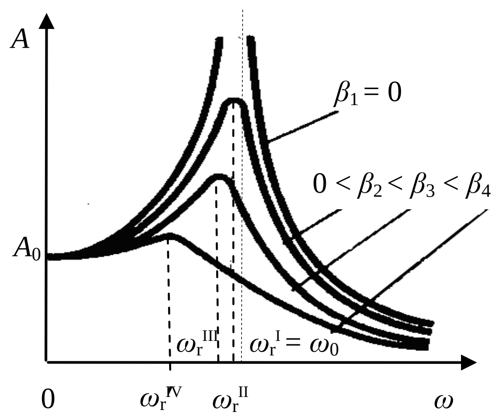
$$A_{\text{г}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\,. \tag{33}$$

От горните равенства се вижда, че при намаляване на коефициента на затихване β резонансната честота клони към собствената кръгова честота на системата, а резонансната амплитуда нараства. Когато $\beta = 0$, то $\omega_{\text{г}} = \omega_0$ и амплитудата нараства неограничено.

На фиг. 9 са представени резонансните криви за четири раз-лични стойности на β. Ако $\omega \to 0$ всички криви се стремят към една и съща амплитуда на трептенията A_0, наречена **статично отклонение**. От (6.31) следва, че

$$A_0 = \frac{F_0}{\text{k}}\,, \tag{34}$$

т.е. това е отклонението, което би имала системата под действие на постоянна сила, равна по големина на амплитудата F_0 на външната периодична сила.



Фиг. 9

Когато $\omega \to \infty$, всички криви асимптотично се стремят към нула, защото при високите честоти силата толкова бързо изменя посоката си, че системата не успява да реагира и да се отклони заблежимо от равновесното си положение.

4.2. Доброкачественост на трептящите системи

Височината и ширината на резонансната крива определят т.н. доброкачественост Q на трептящата система. Доброкачествеността (още се нарича Q – фактор) показва колко пъти резонансната амплитуда е по-голяма от статичното отклонение

$$Q = \frac{A_{\text{г}}}{A_0} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\,. \tag{35}$$

При слабо затихване на трептенията в една система ($\beta << \omega_0$) доброкачествеността се определя с израза

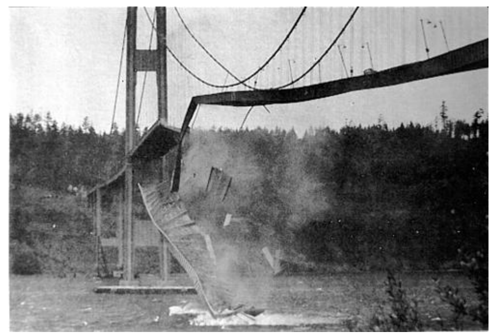
$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}. \tag{36}$$

От друга страна Q – факторът може да се представи и чрез отношението на запасената енергия в системата в даден момент $E(t)$ и изразходваната енергия ΔE през предходния период на трептене

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t - T)}. \tag{37}$$

Явлението резонанс се използва в радиотехниката (за настройка на радиоприемниците на различни честоти), в акустиката, във физиката на атомите и молекулите. То обяснява много от оптичните явления, например аномалната дисперсия.

При конструиране на различни съоръжения се взема предвид това, че собствената честота на трептенията трябва силно да се различава от честотата на външните въздействия. Такива съоръжения са машините с въртящи се части, мостовите конструкции, високите сгради и др. При близки стойности на външните честоти със собствените честоти възникват вибрации, които могат да доведат до разрушаване на трептящите системи. На фиг. 10 е показана снимка на моста Tacoma Narrows Bridge, който се е разрушил под въздействието на ветровете само 4 месеца след построяването му през 1940 г.



Фиг. 10

В земетръсни зони сградите трябва така да се конструират, че собствените им честоти да се различават значително от честотите на сеизмичните вълни, характерни за района.

Аналогично високоговорителите трябва да имат собствени честоти извън честотния диапазон, който те възпроизвеждат.

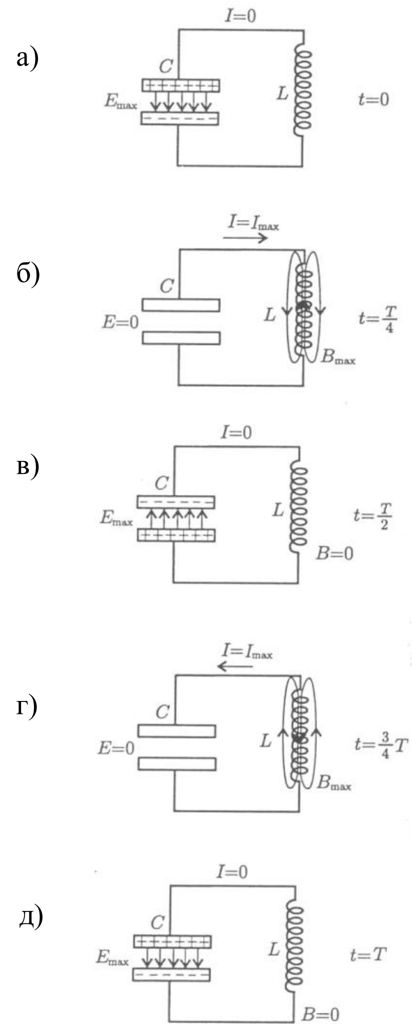
Молекулите на въглеродния диоксид (CO_2) в земната атмосфера поглъщат слънчевата инфрачервена радиация, защото молекулите резонират на честотите на лъчението. В резултат се получава т.нар. парников ефект, който се счита за една от причините за глобалното затопляне на планетата.

Когато не е възможно да се избегне резонансно нарастване на амплитудата, в трептящата система се включват допълнителни части, които да възпрепятстват достигането на опасно големи осцилации.

5. Незатихващи електрични трептения

Свободни незатихващи електрични трептения възникват във верига, състояща се от бобина с индуктивност L и зареден кондензатор с капацитет C (фиг. 11). Такъв трептящ кръг се нарича **идеален**, тъй като не съдържа омово съпротивление и възбудените трептения продължават безкрайно дълго време с една и съща амплитуда без загуба на енергия.

Процесът започва с първоначално зареждане на кондензатора (фиг. 11 а) и между плочите му се създава електрично поле E_{max}. Когато зареденият кондензатор се свърже с бобината, той започва да се разрежда. Протичащият ток създава в нея магнитно поле с индукция B. Токът нараства постепенно, както и енергията на магнитното поле (фиг. 11 б). При пълно разреждане на кондензатора електричната му енергия изцяло се превръща в енергия на магнитното поле на бобината. Това поле индуцира в нея ток с обратна посока на тока от кондензатора. На следващия етап запасената магнитна енергия в бобината се превръща в електрична енергия на кондензатора и плочите му се зареждат със заряд, противоположен на изходния (фиг. 11 в). Следва ново разреждане на кондензатора и процесът се повтаря, само че с ток, течащ в противоположна посока на началния (фиг. 11 г). Магнитната енергия на бобината се превръща изцяло в електрична енергия на кондензатора и системата се връща без загуби на енергия в начално състояние (фиг. 11 д).



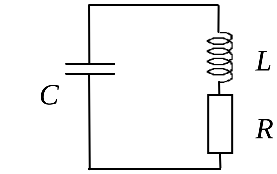
Фиг. 11

Превръщанията на енергията се извършват подобно на свободните незатихващи трептения на системата от фиг. 9.2. В нея потенциалната енергия на първоначално деформираната пружина се превръща в кинетична енергия на движещото се тяло и обратно, като при отсъствие на триене трептенията продължават до безкрайност. Трептенията на системата са с честота, която зависи от съотношението на коефициента на еластичност на пружината k и масата на тялото m. Подобно на нея, трептенията в електричния кръг се извършват с честота, която зависи от индуктивността на бобината L и капацитета на кондензатора C

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad . \tag{38}$$

6. Затихващи електрични трептения

Всеки **реален трептящ кръг** притежава омово съпротивление R, което е съпротивлението на съединителните проводници, на намотката и др. Такъв електричен трептящ кръг е показан на фиг. 12. Той съдържа кондензатор с капацитет C, бобина с индуктивност L и активно съпротивление R. При разреждане на кондензатора в кръга протича ток I



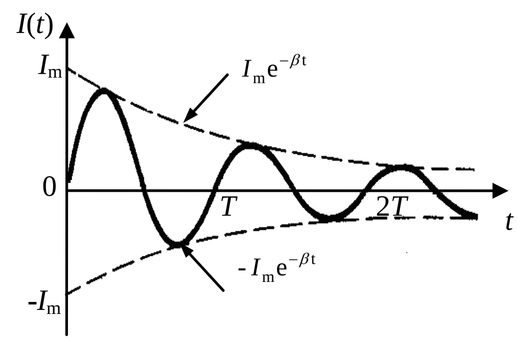
Фиг. 12

и възникват трептения, при които енергията на електричното поле преминава в енергия на магнитното поле на бобината и обратно. При този преход част от енергията се отделя като джаулова топлина в активното съпротивление. Този процес е необратим – топлината се разсейва в околното пространство и електромагнитната енергия на кръга постоянно намалява. На практика това означава, че след първия период големината на електричния заряд на пластините на кондензатора и напрежението му са по-ниски от тези в началото на процеса. През втория период намаляването продължава, поради което амлитудата на трептенията намалява с времето. Такива трептения, чиято амплитуда намалява с времето, се наричат **затихващи**.

Ако $2\sqrt{L/C} > R > 0$ и $\omega_0 > \beta > 0$, се наблюдават свободни затихващи трептения на електричния ток (фиг. 13) по закона

$$I(t) = I_m e^{-\beta t} \sin \omega t, \tag{39}$$

където $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ е честотата на затихващите трептения, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ е **собствената кръгова честота** на трептенията, $\beta = \dfrac{R}{2L}$ е **коефициентът на затихване**, а $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ е **вълновото съпротивление** на трептящия кръг.



Фиг. 13

Периодът на затихващите трептения е

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{40}$$

Декремент на затихване Δ на трептенията е отношението на големината на тока в даден момент $I(t)$ и големината му $I(t + T)$ след време равно на един период на трептения във веригата

$$\Delta = \frac{I(t)}{I(t+T)} = e^{\beta t}. \tag{41}$$

Логаритмичният декремент на затихване е

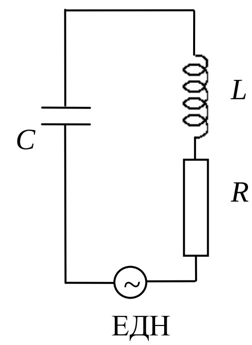
$$\delta = \ln \Delta = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{\pi R}{\omega L}. \tag{42}$$

Когато собствената кръгова честота е равна на коефициента на затихване ($\omega_0 = \beta$) и съпротивлението $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2\rho$, то честотата на затихващите трептения е нула, а периодът нараства до безкрайност – налице е **апериодичен процес**. Съпротивлението $R_{кр} = 2\rho$ се нарича **критично**.

При $R = 0$ и $\beta = 0$ трептенията са незатихващи с честота равна на собствената и $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$.

7. Принудени електрични трептения

В практиката много често се използват трептящи кръгове, на които периодично се подава енергия отвън (фиг. 14). Тази енергия компенсира загубите на електрична енергия, свързани с отделянето на джаулова топлина, поради наличието на активно съпротивление *R*. Трептенията, които възникват в този случай в трептящия кръг, се наричат **принудени трептения**. Енергията може да се подава периодично на кръга по два начина – като електрична и като магнитна.



Фиг. 14

Принудени трептения в електричните вериги възникват при включване във веригата на генератор на променливо електродвижещо напрежение

$$E(t) = E_0 \sin \omega t. \quad (43)$$

Амплитудата на принудените електромагнитни трептения е максимална при настъпване на резонанс.