Введение в математику и математический анализ для оценщиков

К. А. Мурашев

1 декабря 2021 г.

Какую бы работу не выполнял оценщик, во всех случаях он имеет дело с информацией и данными. Часто эти данные представляют собой числа либо могут быть формализованы иным образом. В любом случае требуется алгоритмическая обработка входных данных и преобразование их в информацию, а в некоторых случаях — в знания. Целью данного фрагмента является формирование общих представлений об основных понятиях и методах математического анализа, необходимых современному оценщику. Материал построен таким образом, при котором существует возможность ссылаться на него при решении практически всех математических задач, возникающих у оценщиков, начиная со школьной программы 5-класса, заканчивая математическим анализом, в объёме преподаваемом на нематематических специальностях вузов. Специфические вопросы, касающиеся частотного подхода в математической статистике, байесовского подхода, а также математических методов, применяемых в машинном обучении, а также иных специфических методов, выходящих за рамки программы нематематических специальностей, рассмотрены в отдельных материалах. Автор постарался прибегать к минимальному числу формул и сложных определений, хотя это и не вполне получилось. Поскольку конечной целью всей работы является цифровизация оценочной деятельности, в тексте приводятся короткие листинги на языках R и Python, позволяющие реализовать то, о чём говорится в тексте.

Содержание

1. Некоторые особенности материала

1.1. Список обозначений

Все обозначения, используемые в материале, соответствуют общепринятым в математике. Далее приводится краткая шпаргалка [2].

$\mathbb{N}$ — множество **натуральных чисел**, т. е. таких чисел, которые получаются при счёте объектов: $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$. Наименьшее натуральное число — 1. Наибольшего натурального числа не существует. **Натуральный ряд** — это последовательность всех натуральных чисел. В натуральном ряду каждое число больше предыдущего на 1. Натуральный ряд бесконечен, наибольшего натурального числа в нём не существует.

$\mathbb{Z}$ — множество **целых чисел**, включающее в себя *натуральные числа*, все числа противоположные им по знаку, а также число ноль.

$\mathbb{Q}$ — множество **рациональных чисел**, т. е. дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. [

$\mathbb{I}$ — множество **иррациональных чисел**, т. е. , бесконечных непериодических дробей. Примерами являются $\sqrt{2}$, число $\pi \approx 3.15159$, число $e \approx 2.718281828459$ и т. д.

$\mathbb{R}$ — множество **вещественных (действительных) чисел**, содержащее в себе все *рациональные* и *иррациональные* числа.

$\in$ — оператор принадлежности. Запись $x \in \mathbb{Z}$ означает «x принадлежит к множеству *целых чисел*» либо «x является *целым числом*».

$x \in X : a$ — означает подмножество множества X, состоящее из элементов, удовлетворяющих условию a.

$A \bigcup B$ — объединение множеств A и B.

$A \bigcap B$ — пересечение множеств A и B.

$A \subset B$ — множество A является подмножеством множества B.

$A \backslash B$ — разность множеств A и B.

$A \triangle B$ — симметричная разность множеств A и B.

A' — Дополнение к множеству A.

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ — объединение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, n$.

$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ — пересечение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, n$.

$\varnothing$ — пустое множество.

Æ — пустое множество.

M_A — множество всех подмножеств множества A.

$[a,b]$ — **отрезок** между числами a и b т. е. множество вещественных чисел, лежащих между числами a и b, включая сами числа a и b. На математическом языке это можно записать как $[a, b] = x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$. При $a = b$ отрезок состоит из одной точки и называется *вырожденным отрезком.*

(a, b) — **интервал** между числами a и b т. е. множество вещественных чисел, лежащих строго между a и b, не включая их самих. На математическом языке это можно записать как $(a, b) = x \in \mathbb{R} : a < x < b$.

$[a, b), (a, b]$ — **полуинтервалы** между числами a и b: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

$[a, +\infty)$ — луч: $[a, +\infty)] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.

$(a, +\infty)$ — открытый луч: $(a, +\infty)] = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

$(-\infty, b]$ — луч: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.

$(-\infty, b)$ — открытый луч: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

Промежуток — *отрезок*, *интервал* либо *полуинтервал*.Промежуток любого из четырех типов обозначается $\langle a, b\rangle$. В рамках одного утверждения запись $\langle a, b\rangle$ всегда обозначает один и тот же подвид промежутка.

$\langle a, b\rangle$ — любой из двух промежутков (a,b) и $[a,b)$.

$\forall$ — квантор всеобщности, используется для сокращённой записи вместо понятий «каждый», «любой», или «для всякого», «для любого» и т. п.

$\exists$ — квантор существования, используется для сокращённой записи вместо слов «найдётся», «существует» и т. п.

$\sum\limits_{k=n}^{n} a_k$ — сумма чисел a_k по k от m до n, т. е. $a_m + a_{m+1} + a_{m+1} + \ldots + a_n$.

$f : X \to Y$ — функция, заданная на множестве X, множество значений которой лежит в Y (но необязательно с ним совпадает).

: — в формулах означает выражение «при условии», например $x^3 > 0 : x > 0$.

$\equiv$ — означает тождественность.

$\Rightarrow$ — знак импликации, следования. Означает «влечёт», «отсюда следует», «следовательно».

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности, означает «если и только если» либо «равносильно».

$\wedge$ — логическое «и» (конъюнкция).

$\vee$ — логическое «или» (дизъюнкция).

$\neg$ — логическое «нет» (отрицание).

$\stackrel{def}{=}$ — определение.

ρ — расстояние между двумя точками.

$\vdots$ — означает делимость.

$\sim, \backsim$ — знаки пропорциональности.

$\smile$ — дуга.

2. Основы арифметики и алгебры

2.1. Виды чисел

Натуральными числами называются такие числа, которые используются для подсчёта количества объектов. Например, количество входов торгово-развлекательного комплекса выражается натуральным числом. Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$ (понятие множества рассмотрено в 4.1). Примерами *натуральных чисел* являются: $1, 2, 3, 4, 5\ldots$. Наименьшее натуральное число — 1. Наибольшего натурального числа не существует. **Натуральный ряд** — это последовательность всех *натуральных чисел*. В натуральном ряду каждое число больше предыдущего на 1. *Натуральный ряд* бесконечен, наибольшего натурального числа в нём не существует. 0 не является *натуральным числом.*

Целыми числами являются все *натуральные числа*, все числа противоположные им по знаку, а также число ноль. Множество целых чисел обозначается символом $\mathbb{Z}$.

Рациональными числами являются дроби вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Множество *рациональных чисел* обозначается символом $\mathbb{Q}$.

Иррациональными числами называют бесконечные непериодические дроби, например $\sqrt{2}$, число $\pi \approx 3.15159$, число $e \approx 2.718281828459$ и т. д. Множество иррациональных чисел обозначается символом $\mathbb{I}$.

Вещественными (действительными) числами называют множество чисел включающее в себя множества *рациональных* и *иррациональных чисел.* Множество вещественных чисел обозначается символом $\mathbb{R}$.

Комплексными числами) числами называют расширение множества вещественных чисел. Такие числа могут быть записаны в виде $z = x + iy$, где i — мнимая единица, для которой выполняется равенство $i^2 = -1$. Множество *комплексных чисел* обозначается символом $\mathbb{C}$.

Помимо вышеперечисленных видов чисел также существуют **кватернионы** ($\mathbb{I}$), **октонионы** ($\mathbb{O}$), **седенионы** ($\mathbb{S}$), **адели** и **идели**. Однако их рассмотрение в данном материале является избыточным.

Общая иерархия чисел может быть записана выражением

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O} \subset \mathbb{S}. \tag{1}$$

На естественном языке это звучит как «все *натуральные числа* являются *целыми числами*, но не все *целые* — *натуральными*, все *целые числе* являются *рациональными*, но не все *рациональные* — *целыми* и т. д.». На математическом языке это звучит как «*множество натуральных чисел* является *подмножеством целых чисел*, *множество целых* — *подмножеством рациональных* и т. д.». Данная иерархия показана графически на рисунке 1. Как правило, в практике оценки стоимости работа осуществляется с *вещественными числами* и их подмножествами.

2.2. Элементарные формулы, уравнения и пропорции

2.2.1. Пропорции

Две величины *прямо пропорциональны* друг другу, если изменение значения одной из них в m раз влечёт за собой такое же изменение другой.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{x} \\ xa &= bc \\ x &= \frac{bc}{a} \end{aligned} \tag{2}$$

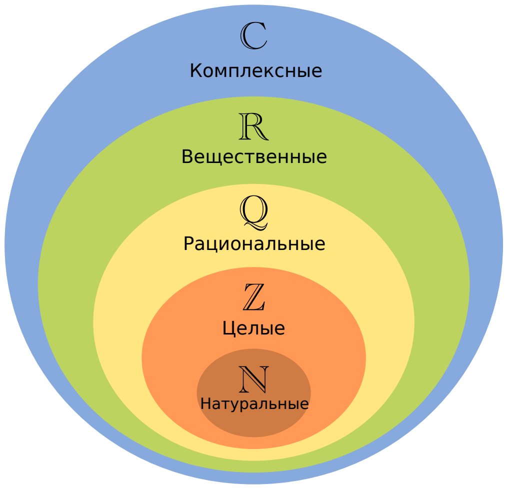

Рис. 1. Иерархия типов чисел [5]

Две величины *обратно пропорциональны* друг другу, если увеличение (уменьшение) значения одной из них в m раз влечёт за собой уменьшение (увеличение) значения другой также в m раз.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{x} \\ xb &= ac \\ x &= \frac{ac}{b} \end{aligned} \tag{3}$$

Пример 2.1. Для отопления здания строительным объёмом 2000 куб. м необходима отопительная система мощностью 68 кВт. Какова потребная мощность отопительной системы для здания строительным объёмом 2000 куб. м?

$$\begin{aligned} \frac{68}{2000} &= \frac{x}{2500} \\ 2000x &= 68 \times 2500 \\ 2000x &= 170000 \\ x &= \frac{170000}{2000} \\ x &= 85 \end{aligned}$$

Ответ: для здания строительным объёмом 2500 куб. м необходима система мощностью 85 кВт.

Пример 2.2. Резец токарного станка утрачивает свои свойства и нуждается в обслуживании после 30 дней эксплуатации при ежедневном односменном использовании (1 смена — 8 часов). Через сколько дней потребуется обслуживание резца при трёхсменной работе?

$$\frac{1}{3} = \frac{30}{x}$$
$$3x = 30$$
$$x = \frac{30}{3}$$
$$x = 10$$

Ответ: при трёхсменной работе обслуживание резца потребуется через 10 дней.

2.2.2. Трансформация бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную

В ряде случаев возникает потребность трансформации бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную. Для выполнения этой операции следует использовать формулу

$$a.b(c) = a\frac{<b><c> - <b>}{x[9]y[0]}, \tag{4}$$

где a — целая часть десятичной дроби,

b — не повторяющая часть десятичной дроби,

c — периодическая часть десятичной дроби,

x — количество цифр 9 в знаменателе, зависит от количества чисел в периодической части c,

x — количество цифр 0 в знаменателе, зависит от количества чисел в не повторяющейся части b.

В случае отсутствия не повторяющейся части используется формула

$$a.(c) = a\frac{c}{x[9]} \tag{5}$$

Пример 2.3. Вычислим

$$2.12(3) = 2\frac{123 - 12}{900} = 2\frac{111}{900} = 2\frac{37}{300}$$
$$2.(3) = 2\frac{3}{9} = 2\frac{1}{3}$$

2.2.3. Работа с многоэтажными дробями

С учётом повсеместного распространения компьютерных вычислений, нет никакой сложности вычисления многоэтажных дробей. Однако при работе с аналитическими методами часто возникает необходимость приведения выражения к табличному (стандартному кем-то уже исследованному) виду. Например, такая потребность возникает при вычислении производных, дифференциалов и интегралов, многие из которых имеют стандартные решения. Умение видеть в существующем выражении другое, имеющее стандартное решение, и преобразовать первое ко второму позволяет экономить много времени. Таким образом, хотя типичный оценщик возможно никогда не будет вычислять дифференциалы, оценщику, занимающемуся разработкой экспертных систем, подобное знание не будет лишним. В общем виде работа с многоэтажными дробями выглядит следующим образом

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \tag{6}$$

2.2.4. Свойства числовых неравенств

Первым свойством неравенств является сохранение знака неравенства при сложении его обеих частей с константой.

$$\begin{gathered} a > b \\ a + k > b + k : \ \forall k \end{gathered} \tag{7}$$

Вторым свойством неравенств является сохранение знака неравенства при умножении либо делении его обеих частей на положительную константу.

$$\begin{gathered} a > b \\ ak > bk : \ k > 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Третьим свойством неравенств является изменение знака неравенства на противоположный при умножении либо делении его обеих частей на отрицательную константу.

$$\begin{gathered} a > b \\ ak < bk : \ k < 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Четвёртым свойством неравенств является возможность почленного сложения неравенств, имеющих одинаковый знак. При этом знак неравенств сохраняется.

$$\begin{aligned} a &> b \\ c &> d \\ a + c &> b + d \end{aligned} \tag{10}$$

Пятым свойством неравенств является возможность почленного вычитания неравенств, имеющих одинаковый знак. При этом сохраняется знак первого неравенства.

$$\begin{aligned} a &> b \\ c &< d \\ a - c &> b - d \end{aligned} \tag{11}$$

Шестым свойством неравенств является возможность их почленного умножения при одинаковом знаке с его сохранением в том случае, когда все члены неравенств являются положительными числами.

$$\begin{aligned} a &> b \\ c &> d \\ ac &> bd : \ a,b,c,d > 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Седьмое свойство неравенств заключается в сохранении знака неравенства при сложении его членов с одной и той же константой.

$$\begin{aligned} &a > b \\ &b > c \Rightarrow \\ &a > c \end{aligned} \tag{13}$$

Восьмое свойство неравенств заключается в сохранении знака неравенства при возведении его членов в степень с одинаковым показателем, при условии положительного значения членов.

$$\begin{aligned} a > b \Rightarrow \\ a^n > b^n :\ a,b > 0 \end{aligned} \tag{14}$$

2.2.5. Системы уравнений и неравенств с двумя переменными

В общем виде такие уравнения задаются выражением

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Решением системы таких уравнений является нахождение x и y, удовлетворяющих каждому из условий.

Корень уравнения — такое значение переменной, при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство. **Корень уравнения** с одной переменной также называют решением уравнения.

Существует несколько методов решения уравнений с двумя переменными. В данном материале будут рассмотрены *метод подстановки*, *метод сложения*, *метод замены* и *метод деления*. В первом случае одна из неизвестных выражается через другую.

Пример 2.4. Дано:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения

$$\begin{aligned} y = 2x - 2 \Rightarrow 4x + 3(2x - 2) = 9 \\ 4x + 6x - 6 = 9 \\ 10x = 15 \\ x = 1.5 \Rightarrow 3 - y = 2 \\ y = 1 \\ \text{Ответ: x = 1.5, y = 1} \end{aligned}$$

Во случае применения *метода подстановки* на первом этапе одно из уравнений умножается на константу так, чтобы при почленном сложении на втором этапе одно из неизвестных уничтожилось. Умножение обоих уравнений на константы также допускается. При этом константой может быть любое положительное число.

Пример 2.5. Дано:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 2 | \times 3 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ + \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} \quad 10x = 15$$

$$x = 1.5$$

$$3y = 9 - 6$$

$$y = 1$$

Ответ: x = 1.5, y = 1

В случае применения *метода замены* какая-либо неудобная переменная заменяется на другую.

Пример 2.6. Дано:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} + \dfrac{3}{2x+y} = 2 \\ \dfrac{8}{x-3y} - \dfrac{9}{2x+y} = 1. \end{cases}$$

$$\text{Сделаем замены:} \begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} = a \\ \dfrac{3}{2x+y} = b. \end{cases} \quad \text{Тогда:} \begin{cases} a + b = 2 | \times 3 \\ 4a - 3b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 3b = 3 \\ + \\ 4a - 3b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} = 1 \\ \dfrac{3}{2x+y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 2 \\ + \\ 2x + y = 3 | \times 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{7} \\ y = -\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

В случае применения *метода деления* одно из уравнений делится на другое в результате чего возникает новое уравнение с одним неизвестным.

Пример 2.7. Дано:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 5 \\ y^3 + x^2y = 10 \end{cases}$$

$\begin{cases} x(x^2 + y^2) = 5 \\ y(x^2 + y^2) = 10 \end{cases}$ разделим второе уравнение на первое $\dfrac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = 2x$

подставим значение y в первое уравнение $x^3 + x4x^2 = 5 \Rightarrow 5x^3 = 5x = 1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

2.2.6. Уравнения с двумя неизвестными

—

Уравнения с двумя неизвестными уравнения вида

$$f(x,y) = 0 \tag{16}$$

2.2.6.1. Уравнения с двумя неизвестными, имеющие бесконечное число решений Частный случай таких уравнений может быть записан следующим образом.

$$ax + by + c = 0 : \ a \vee b \neq 0 \tag{17}$$

Такие уравнения имеют бесконечное число решений, которые могут быть представлены графически.

Пример 2.8. Дано:

$4x - 2y + 2 = 0$

Методом подстановки можно догадаться, что решением является x=1, y=3.

Однако решениями будут и x=0, y=1, x=-3, y=-2. и т. д.

Графическое решение показано на рисунке 2.

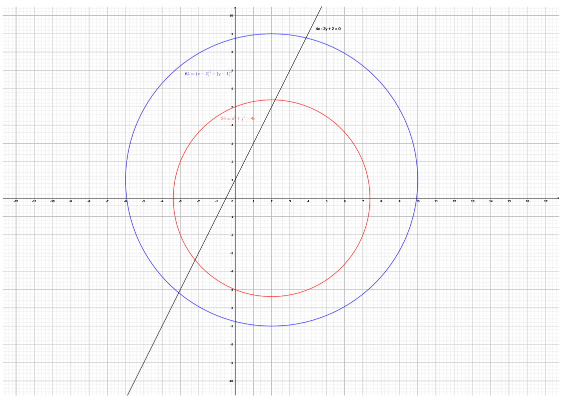

Рис. 2. Графическое решение уравнения с двумя неизвестными и окружность, задаваемая уравнением

2.2.6.2. Однородные уравнения

Уравнения с двумя неизвестными — уравнения вида

$$p(x,y) = 0, \tag{18}$$

где $p(x,y)$ — многочлен следующего вида:

$$p(x,y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \ldots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n. \tag{19}$$

Таким образом, показатель степени x повышается, y — понижается.

Пример 2.9. $x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0$

Разделим всё выражение на y^3

$x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0| : y^3 \neq 0 \Leftrightarrow (\dfrac{x}{y})^3 + 4(\dfrac{x}{y}) - 5 = 0$

Заменим $\dfrac{x}{y}$ на t.

Тогда $t^3 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = y$.

2.2.6.3. Практическое применение уравнений с двумя неизвестными Графиком уравнения $p(x,y) = 0$ является множество точек на координатной плоскости, удовлетворяющих данному уравнению.

Расстояние между двумя точками $A(x_1,y_1)$, $B(x_0,y_0)$ на координатной плоскости, то есть длина отрезка AB вычисляется по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \tag{20}$$

Из данной формулы следует, например уравнение окружности с центром $O(x_0,y_0)$ и радиусом R.

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2 \tag{21}$$

Примеры окружностей, заданных уравнением, показаны на 2.

2.2.7. Операции со степенями с натуральными и нулевым показателями

Свойствами степени с натуральным показателем являются:

$$\begin{aligned}
a^n \times a^m &= a^{n+m} \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\
a^{n^m} &= a^{nm} \\
a^n \times b^n &= (ab)^n \\
\frac{a^n}{b^n} &= (\frac{a}{b})^n \\
a^0 &= 1 : a \neq 0 \\
0^0 & \nexists.
\end{aligned} \tag{22}$$

2.2.8. Понятие одночлена и операции с ним

Одночлен — произведение переменных либо чисел, возведённое в степень с натуральным показателем.

Для работы с одночленами, как правило, их приводят в стандартный вид, при котором числовая часть выносится вперёд.

Пример 2.10. Дано:
$4x^3y^3z^2 \times -2x^2y^2z^{-1}$
Необходимо привести данный одночлен к стандартному виду.
Ответ: $-8x^5y^5z$

Подобные одночлены — одночлены, состоящие из одних и тех же переменных, возведённых в степень с одним и тем же показателем.

2.2.9. Понятие многочлена и операции с ним

Многочлен — сумма одночленов.

Для осуществления операций с многочленами, как правило, необходимо привести каждый из входящих в него одночленов в стандартный вид, а затем привести подобные слагаемые.

Существует ряд стандартных формул для упрощённого умножения многочленов.

Квадрат суммы двух выражений:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{23}$$

Квадрат разности двух выражений:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{24}$$

Разность квадратов двух выражений:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b). \tag{25}$$

Куб суммы двух выражений:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \tag{26}$$

Куб разности двух выражений:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \tag{27}$$

Сумма кубов двух выражений:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \tag{28}$$

где $(a^2 - ab + b^2)$ — неполный квадрат разности выражений. Разность кубов двух выражений:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \tag{29}$$

где $(a^2 - ab + b^2)$ — неполный квадрат суммы выражений.

Применение стандартных формул упрощает работу с аналитическими выражениями.

Пример 2.11. Земельный участок какой максимальной площади можно огородить, имея ограждение общей длиной 240 м? Какова длина сторон такого участка, если участок имеет прямоугольную форму?

Примем длину одной стороны за x, тогда другая сторона равна $120 - x$.

$S = (120 - x)(x) = 120x - x^2 = -(x^2 - 30x)$

Выделим полный квадрат выражения.

$-(\underbrace{x^2 - 2x60 + 60^2}_{\text{полный квадрат}} - 60^2) = 3600 - (x - 60)^2$

Проанализируем полученное выражение. Логично, что площадь будет максимальной (3600 кв. м) в том случае, если выражение в скобке будет равно нулю, что достигается при $x = 60$. Таким образом, максимально возможная площадь составляет 3600 кв. м при всех сторонах равных 60 м, т. е. тогда, когда участок будет иметь форму квадрата, что соответствует априорным знаниям.

Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения других многочленов.

2.2.10. Тождество

Тождество — равенство, являющееся верным при всех допустимых значения переменных.

Примерами тождеств являются формулы сокращённого умножения (23–29).

2.2.11. Алгебраические дроби

Алгебраической дробью называется выражение вида

$$\frac{P}{Q}:\ Q \neq 0. \tag{30}$$

Примерами алгебраических дробей являются, например выражения $\frac{x^2+y}{x}$, $\frac{x+2}{x-2}$, $\frac{5}{11}$ и т. д.

Основным свойством *алгебраических дробей* является то, что при умножении их числителя и знаменателя на один и тот же многочлен, значение алгебраической дроби не меняется при условии ненулевого значения такого многочлена.

Из этого свойства следует возможность сокращения числителя и знаменателя на общий множитель.

Для сложения и вычитания алгебраических дробей их следует привести к общему знаменателю по обычным правилам.

Пример 2.12.
$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} = \frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)} + \frac{y(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x(x-y)+y(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \\ = \frac{x^2 - xy + xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

Умножение и деление алгебраических дробей осуществляется согласно общим правилам осуществления таких операций с дробями.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{31}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \tag{32}$$

Возведение алгебраической дроби в степень осуществляется отдельно для числителя и знаменателя.

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{33}$$

2.2.12. Рациональные уравнения

Рациональные уравнения — это выражения вида

$$p(x) = 0 \tag{34}$$

2.2.13. Степень с целым отрицательным показателем

Вычисление степени с целым отрицательным показателем осуществляется по формуле

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{35}$$

2.2.14. Функция $y = \sqrt{x}$, её свойства и график

По свойству квадрата областью определения данной функции являются все неотрицательные числа, т. е. Областью её значений также являются все неотрицательные числа.

$$y = \sqrt{x} D(y) = [0, +\infty) E(y) = [0, +\infty) \tag{36}$$

Данная функция является возрастающей, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. $\begin{matrix} x_2 > x_1 \\ y_2 > y_1 \end{matrix}$ График функции $\sqrt{x}$ показан на рисунке 3.

Первое свойство квадратного корня:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} : \; a,b \geq 0. \tag{37}$$

Из этого также следует что

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} : \; a,b \geq 0. \tag{38}$$

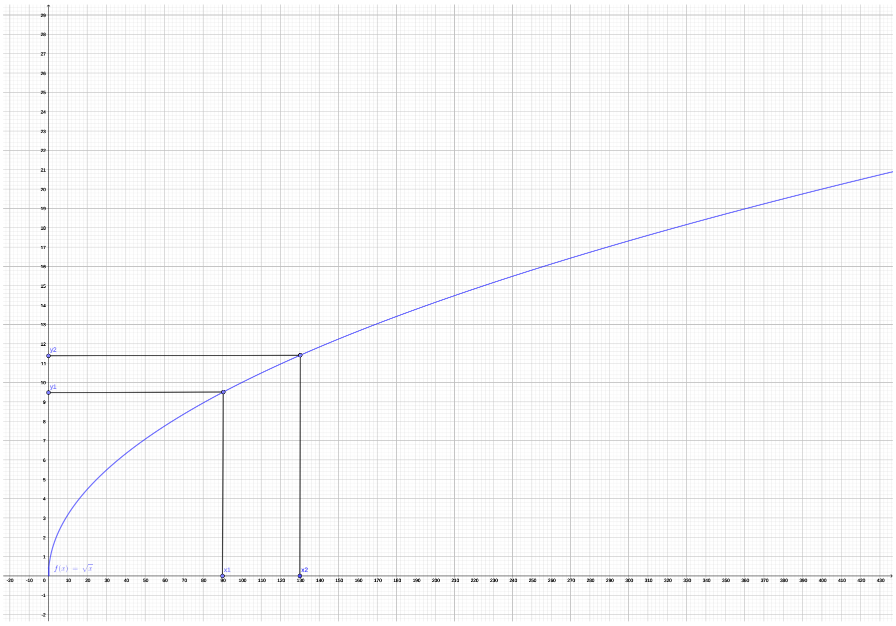

Рис. 3. Функция $\sqrt{x}$

2.2.15. Модуль действительного числа

Общее выражения для модуля числа x:

$$|x| = \begin{cases} x: \ x & \geq 0 \\ -x: \ x & \leq 0. \end{cases} \tag{39}$$

Свойствами модуля являются:

$$\begin{gathered} |a| \geq 0 \\ |ab| = |a| \times |b| \\ |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \\ |a| = |-a| \\ |a|^2 = a^2 \\ |a+b| \leq |a| + |b| \\ |a| \geq a \end{gathered} \tag{40}$$

Пример графика функции, содержащей модуль, приведён на рисунке 4.

2.2.16. Квадратные уравнения

2.2.16.1. Основные понятия Квадратное уравнение — это уравнение следующего вида:

$$ax^2 + bx + c = 0: \ a \neq 0, \tag{41}$$

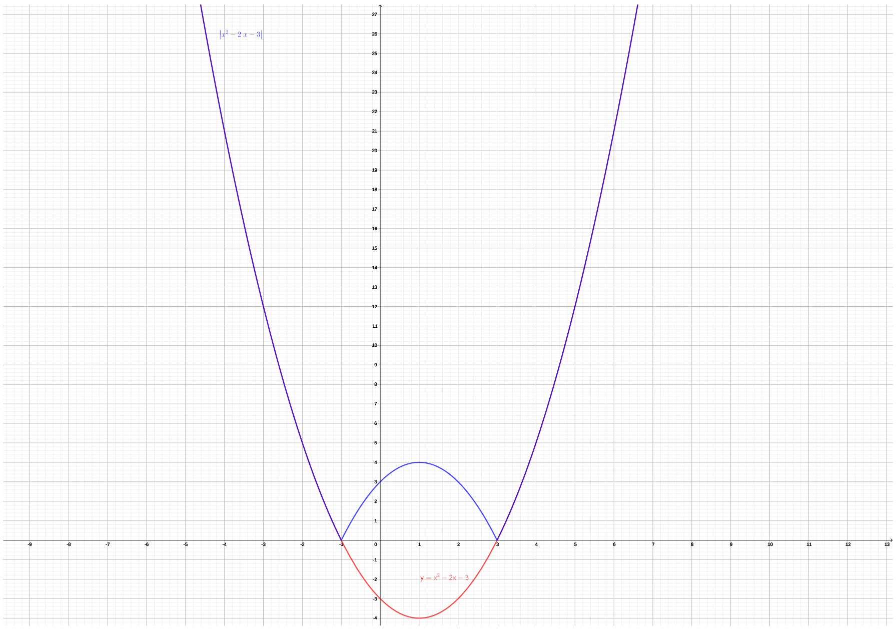

Рис. 4. График функции, содержащей модуль, и аналогичной функции без модуля.

где x — неизвестное,

a — старший коэффициент,

b — средний коэффициент,

c — свободный член.

Уравнение, в которой $a = 1$, называется *приведённым*. Уравнения, в которых b либо c равны нуля называются *неполными квадратными уравнениями*. Решением квадратного уравнения является нахождение такого значения (значений) x, при котором (которых) выполняется исходное равенство. Такие значения x называются *корнями* квадратного уравнения.

2.2.16.2. Формула корней квадратного уравнения Для решения квадратного уравнения чаще всего используют *формулу дискриминанта*:

$$D = b^2 - 4ac \tag{42}$$

В зависимости от значения дискриминанта возможны следующие варианты:

$$\begin{aligned} &D > 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ — 2 вещественных корня} \\ &D = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ — 1 вещественный корень} \\ &D < 0 \Rightarrow \text{ — нет вещественных корней.} \end{aligned} \tag{43}$$

В последнем случае можно говорить о том, что существуют два комплексных корня. Также выражение можно переписать, выразив корень из отрицательного числа в виде произведения корня с мнимой единицей.

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} \tag{44}$$

Однако в контексте оценки стоимости можно говорить о том, что уравнения с $D < 0$ не имеют корней.

2.2.16.3. Теорема Вийета В случае *приведённого квадратного* уравнения, т. е. такого, в котором *старший коэффициент* равен единице, решение может быть осуществлено по упрощённой формуле без вычисления дискриминанта.

Теорема 2.13. *Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна среднему коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а их произведение — свободному члену.*

$$\begin{aligned} x^2 + px + q = 0 \\ x_1 + x2 = -p \\ x_1 \times x_2 = q \end{aligned} \tag{45}$$

2.2.16.4. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители Разложение квадратного трехчлена на линейные множители осуществляется по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{46}$$

2.2.17. Делимость чисел

Под делимостью в данной секции подразумевается делимость без остатка. Рассмотрим два натуральных числа a и b. В случае существования такого натурального числа q, умножение на которого b даёт a, можно говорить о делимости a на b.

$$a \vdots b : a = bq, \quad a,\, b,\, q \in \mathbb{N} \tag{47}$$

Свойства делимости:

$$\begin{gathered} a \vdots b,\ b \vdots c \Rightarrow a \vdots c \\ a \vdots b,\ c \vdots b \Rightarrow a + c \vdots b \\ a \vdots b,\ c \neg\vdots b \Rightarrow a + c \neg\vdots b \\ a \vdots b \Leftrightarrow ac \vdots\ bc \\ a \vdots b \Rightarrow ac \vdots b \\ \text{среди n последовательных чисел одно и только одно делится на n} \end{gathered} \tag{48}$$

Простыми числами называются числа, имеющие только два делителя — единицу и самих себя. Числа имеющие более двух делителей называются *составными*. Единица не является ни простым, ни составным числом.

Наименьшим общим кратным n чисел (НОК) является наименьшее число, которое делится без остатка на любое из них.

Наибольшим общим делителем n чисел (НОД) является наибольшее число, на которое любое из них делится без остатка.

$$HOK(a,b) \times HOD(a,b) = a \times b \tag{49}$$

2.2.18. Основная теорема арифметики натуральных чисел

Теорема 2.14. *Всякое число, большее 1, может быть разложено в произведение простых чисел, и это разложение единственно с точностью до порядка множителей.*

Иными словами любое натуральное число кроме 1 либо является простым, либо может быть разложено на простые множители единственным способом.

2.2.19. Уравнения высших степеней

Уравнениями высших степеней являются уравнения вида

$$P(x) = 0, \tag{50}$$

где P многочлен в степени больше 2.

Существует два метода решения таких уравнений:

- метод разложения на множители, при котором уравнение сводится к квадратному;
- метод замены, при котором на первом этапе члены уравнения заменяются на многочлены второй степени, после чего осуществляется решение нового уравнения с ними, на втором этапе полученные значения подстановка значений в новую систему уравнений.

2.2.20. Уравнения с модулями

Существует два метода решения таких уравнений:

- метод последовательного раскрытия модуля со знаками плюс и минус;
- метод вынесения части, не содержащей модуль, в другую часть уравнения.

2.2.21. Иррациональные уравнения

Иррациональными уравнениями называются уравнения, содержащие иррациональные значения корня в знаменателе. Решение таких уравнений сводится к домножению членов на множители так, чтобы иррациональная часть переместилась в числитель, а знаменатели сократились. Дальнейшее решение уравнения осуществляется по общим правилам.

2.2.22. Задачи с параметрами

Задачей с параметром является уравнение, в котором часть коэффициентов заменены буквенным выражением. В общем виде такие задачи можно выразить как:

$$f(x,a) = 0. \tag{51}$$

Особенностью данных задач является необходимость решения для каждого значения параметра.

Пример 2.15.
$$\begin{aligned} ax + 4 &= 12 \\ x &= \frac{8}{a} : \ a \neq 0x \quad \in \ : \ a = 0 \end{aligned}$$

Пример 2.16.
$$\begin{aligned} (a^2 + 8a - 5)x &= a - 2 \\ (a+5)(a-2)x &= a - 2 \\ x &\in \mathbb{R} : \ a = 2 \\ x &\in \ : \ a = -5 \\ x &= \frac{a-2}{(a+5)(a-2)} : \ a \neq 2, \, a \neq -5 \end{aligned}$$

2.2.23. Линейные и квадратные неравенства

С точки зрения механики вычислений решение таких неравенств принципиально не отличается от решения уравнений. Особенность неравенств является то, что при их умножении на положительное число знак неравенства не меняется, на отрицательное — меняется на противоположный.

2.2.24. Стандартный вид числа

Стандартный вид числа — запись числа в виде

$$a = a_0 10^n, \tag{52}$$

где $0 \geq a < 10$, n-порядок числа.

В информатике вместо 10^n как правило используют E.

Пример 2.17.
$$\begin{aligned} 1703 &= 1.703 \times 10^3 &&= 1.703E3 \\ 398.098 &= 3.98098 \times 10^2 &&= 3.98098E2 \\ 0.572 &= 5.72 \times 10^-1 &&= 5.72E - 1 \end{aligned}$$

2.2.25. Рациональные неравенства

Рациональные неравенства — неравенства вида:

$$f(x)\begin{cases} > \\ < \\ \geq \\ \leq \end{cases} 0. \tag{53}$$

Два неравенства называются *равносильными*

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0, \tag{54}$$

если они имеют одинаковое решение, либо оба не имеют решения вовсе. Равносильное неравенство может быть получено путём умножения неравенства на выражение. В случае положительного значения результата выражения, знак неравенства сохраняется, при отрицательном — меняется на противоположный.

Общая схема решения таких неравенств заключается к поиску их корней путём приравнивания к нулю каждого члена и проверки соблюдения знака при подстановке значений больше и меньше каждого корня. При этом важным свойством является чередование знаков вокруг корней, получаемых из членов, стоящих в любой нечётной степени, включая первую, и их повторение вокруг корней, образуемых членами, стоящими в любой чётной степени.

2.2.26. Системы и совокупности неравенств

Системы неравенств в общем виде выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \dots \\ z(x) > 0, \end{cases} \tag{55}$$

при этом знаки неравенств могут быть любыми: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ равно как и число неравенств. Для того, чтобы решить *систему неравенств*, необходимо найти все значения x, удовлетворяющие каждому из них. Иначе говоря, решением системы неравенств является *множество*, представляющее собой *пересечение множеств*, получаемых при решении каждого неравенства в отдельности. Если хотя бы одно неравенство в системе не имеет решения, тогда его не имеет вся система. Если одно из неравенств выполняется при любом значении x, решение оставшейся части неравенств также является решением всей системы.

Совокупности неравенств в общем виде выглядят следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \dots \\ z(x) > 0, \end{array}\right. \tag{56}$$

при этом аналогично с *системами неравенств* знаки неравенств, образующих совокупность, могут быть любыми: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ равно как и число неравенств. Для того, чтобы решить *совокупность неравенств*, необходимо найти все значения x, удовлетворяющие хотя бы одному из них. Иначе говоря, решением системы неравенств является *множество*, представляющее собой *объединение множеств*, получаемых при решении каждого неравенства в отдельности.

2.2.27. Неравенства с модулями

Первым видом неравенства с модулем является неравенство вида:

$$|f(x)| < c: \;\; c > 0. \tag{57}$$

Тогда:

$$|f(x)| < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -c \\ f(x) < c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c < f(x) < c. \end{cases} \tag{58}$$

Пример 2.18. $|3x+2| < 4 \Leftrightarrow -4 < 3x+2 < 4 = -6 < 3x < 2 = -2 < x < \dfrac{2}{3}$

Вторым видом неравенства с модулем является неравенство вида:

$$|f(x)| > c: \;\; c > 0. \tag{59}$$

Тогда:

$$|f(x)| < c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > c \\ f(x) < -c \end{array}\right. \tag{60}$$

Пример 2.19. $|2x+5| > 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+5 > 10 \\ 2x+5 < -10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x > 5 \\ 2x < -15 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2.5 \\ x < -7.5 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -7.5) \cup (2.5; \infty)$

Третьим видом неравенства с модулем является неравенство вида:

$$|f(x)| < g(x). \tag{61}$$

Поскольку $g(x)$ больше *модуля* некоторого выражения, очевидно, что $g(x) > 0$. Тогда

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x > 0) \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x > 0) \\ f^2(x) < g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x > 0) \\ f^2(x) - g^2(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x > 0) \\ (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) < 0 \end{cases} \tag{62}$$

Четвёртым видом неравенства с модулем является неравенство вида:

$$|f(x)| > g(x). \tag{63}$$

В этом случае:

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ x \in D(f) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right. \qquad \vee \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ x \in D(f) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \tag{64}$$

2.2.28. Иррациональные неравенства

Первый тип иррациональных неравенств

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \tag{65}$$

Тогда

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f^2(x) < g^2(x). \end{cases} \tag{66}$$

Пример 2.20. $\sqrt{x^2 - x - 12} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 12 \geq 0 \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x+3)(x-4) \geq 0 \\ x > -12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq 4$

Второй тип иррациональных неравенств

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \tag{67}$$

Тогда

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right. \tag{68}$$

Пример 2.21. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x - 12 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 12 > x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ (x+3)(x-4) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x < -12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3].$

2.2.29. Неравенства с двумя переменными

Неравенства с двумя переменными — это неравенства вида

$$p(x,y)\left[\begin{matrix} > \\ \geq \\ \leq \\ < \end{matrix}\right. \quad 0 \tag{69}$$

Как правило, для решения таких неравенств используется графический метод. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.22. $(x+7)^2 + (y+5)^2 \leq 4$

В 2.2.6.3 было показано, что выражения такого вида задают окружность. Решением данного неравенства является множество точек, представляющих собой часть плоскости внутри окружности, включая саму окружность. В случае строгости неравенства сама окружности не входила бы в эту часть плоскости. В случае противоположного знака решением бы было множество точек за пределами окружности, включая либо не включая её саму, в зависимости от строгости неравенства. Графическое решение данного неравенства приведено на рисунке 5.

Пример 2.23. Разберём другое неравенство. $xy < 1$. Рассмотрим три случая:

1. $x = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$
2. $x > 0 \Rightarrow y < \dfrac{1}{x}$
3. $x > 0 \Rightarrow y > \dfrac{1}{x}$

Графическим решением, будет часть плоскости между соответствующими гиперболами, не включая их самих в силу строгости неравенства, см. рисунок 5.

2.2.30. Однородные и симметрические системы уравнений

Однородная система уравнений — Система уравнений вида

$$\begin{cases} p(x,y) = a \\ q(x,y) = b, \end{cases} \tag{70}$$

если p, q — *однородные многочлены*, a, b — некоторые числа.

Однородный многочлен — многочлен, все одночлены которого имеют одинаковую сумму степеней. Любая алгебраическая форма является однородным многочленом. Квадратичная форма задается однородным многочленом второй степени, бинарная форма — однородным многочленом любой степени от двух переменных.

Примеры:

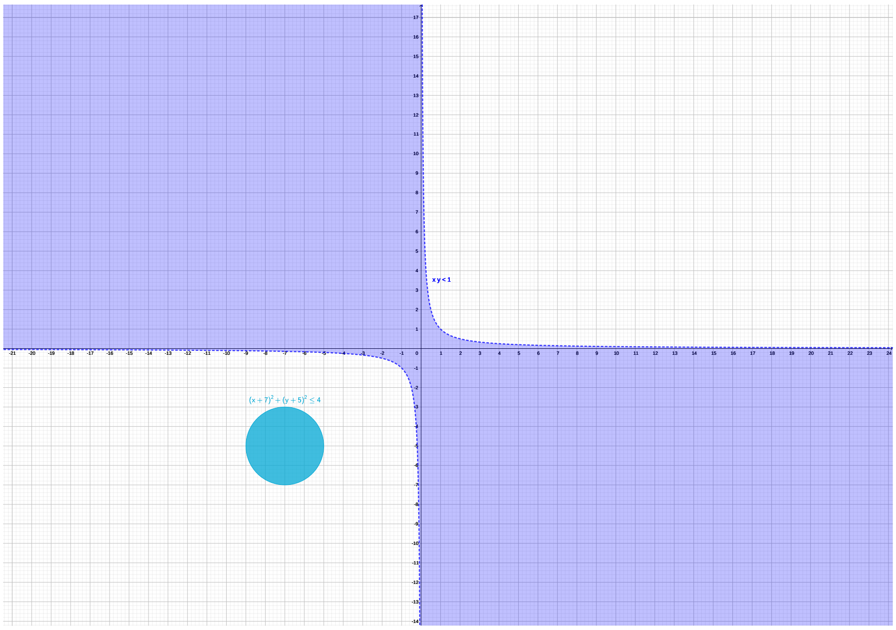

Рис. 5. Графическое решение неравенств с двумя переменными

$x^2 + y^2$ — однородный многочлен

$x^3 + 2xy^2$ — однородный многочлен

$x^4 + qzyx$ — однородный многочлен

$x + yz$ — неоднородный многочлен

Решение таких уравнений осуществляется путём преобразования правой части к нулю, после чего возможно применение обычных приёмов, описанных в 2.2.5.

Симметрическая система уравнений — система уравнений вида

$$p(x,y) = p(y,x), \text{ т. е. } \begin{cases} p(x,y) = 0 \\ q(x,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases} \tag{71}$$

Пример 2.24. Дано:

$\begin{cases} x + y & = 5 \\ x^2 + y^2 & = 13 \end{cases}$ Введём $u = x + y$, $v = xy$. Преобразуем $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$$\text{Тогда} \begin{cases} u = 5 \\ u^2 - 2v = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ 2y = 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

2.2.31. Иррациональные системы уравнений, системы уравнений с модулями

Для решения подобных систем возможно использование всех ранее рассмотренных методов, однако существует ряд нюансов: в случае *иррациональных уравнений* какие-либо их члены находятся под знаком корня, что означает необходимость принятия во внимание *области допустимых значений* (выражения, находящиеся под корнем чётной степени не могут иметь отрицательное значение), в случае уравнений с модулями, содержащиеся в них выражения могут раскрываться с любым знаком.

2.3. Основы геометрии

2.3.1. Основные геометрические объекты

Базовые геометрические объекты не имеют строгих определений и определяются через свои свойства, изложенные в аксиомах. Следующие ниже описания не являются строгими и служат для понимания основных свойств таких объектов.

Точка — неделимый элемент соответствующего математического пространства.

Прямая — длина без ширины, равно лежащая на всех своих точках.

Плоскость — поверхность, содержащая полностью каждую прямую, соединяющую любые её точки.

Следующие объекты уже имеют формализованные описания.

Отрезок прямой — часть прямой, ограниченная двумя точками. Точнее: это множество, состоящее из двух различных точек данной прямой (которые называются *концами отрезка*) и всех точек, лежащих между ними (которые называются его внутренними точками).

Отрезок, концами которого являются точки AB, обозначается символом AB. Расстояние между концами отрезка называют его длиной и обозначают AB или $|AB|$. Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B1 и C_1D_1, если выполняется равенство:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \tag{72}$$

Таким образом,

$$AB,\, CD \propto A_1B1,\, C_1D_1 : \ \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \tag{73}$$

2.3.2. Треугольники и их свойства

2.3.2.1. Признаки равенства треугольников Первым признаком равенства треугольников является признак по двум сторонам и углу между ними.

Теорема 2.25. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Вторым признаком равенства треугольников является признак по двум углам и стороне между ними.

Теорема 2.26. *Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Вторым признаком равенства треугольников является признак по трём сторонам.

Теорема 2.27. *Если все стороны треугольника соответственно равны сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

2.3.2.2. Замечательные прямые и точки треугольника В данном материале будут рассмотрены простейшие замечательные прямые:

- медиана;
- биссектриса;
- высота;
- прямая Эйлера,

а также простейшие замечательные точки:

- центроид;
- инцентр;
- ортоцентр.

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Иногда *медианой* называют также прямую, содержащую этот отрезок. Точка пересечения медианы со стороной треугольника называется **основанием медианы**.

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **центроидом** либо центром тяжести треугольника, и делятся этой точкой на две части в отношении 2:1, считая от вершины.

На рисунке 6 медианы выделены зелёным цветом, а точка J является центроидом.

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла, проведённый от вершины угла до её пересечения с противолежащей стороной. Точка пересечения биссектрисы угла треугольника с его стороной, не являющейся стороной этого угла, называется **основанием биссектрисы**.

Любая точка на биссектрисе равноудалена от сторон данного угла, т. е. длины перпендикуляров, опущенных из любой точки биссектрисы на стороны угла, одинаковы. Также верно и обратное: если точка равноудалена от сторон угла, она лежит на его биссектрисе.

Все три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, называемом **инцентр** и являющейся центром вписанной в этот треугольник окружности. Биссектриса делит сторону, на которую она опускается, на отрезки пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

На рисунке 6 *биссектрисы* выделены синим цветом, а точка D является *инцентром*.

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону (точнее, на прямую, содержащую противоположную сторону).

В зависимости от типа треугольника высота может содержаться внутри треугольника (для остроугольного треугольника), совпадать с его стороной (являться катетом прямоугольного треугольника) или проходить вне треугольника у тупоугольного треугольника. Все 3 высоты треугольника пересекаются в 1 точке, называемой **ортоцентром**.

На рисунке 6 *высоты* (и их продолжения) выделены оранжевым цветом, а точка Q является *ортоцентром*.

Пря́мая Эйлера — прямая, проходящая через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника.

На рисунке 6 *прямая Эйлера* выделена фиолетовым цветом.

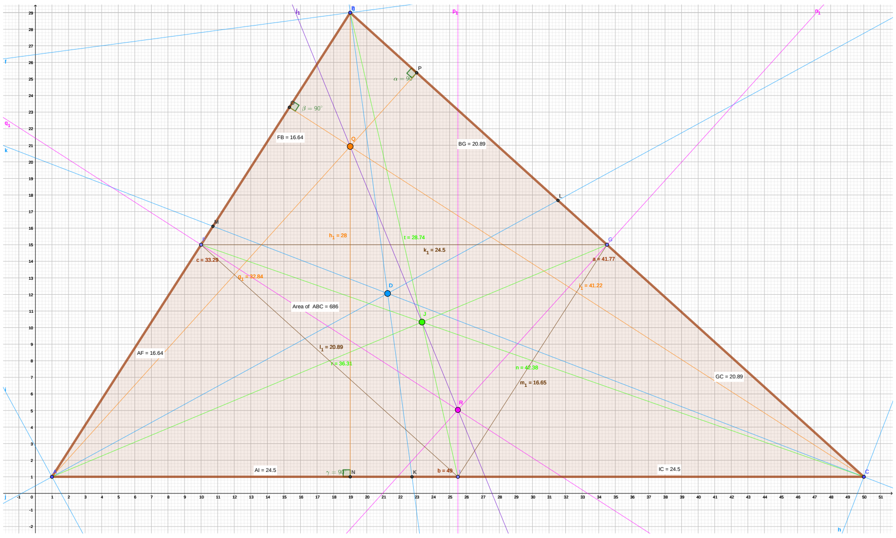

Рис. 6. Основные замечательные прямые и точки треугольника

2.3.2.3. Серединный перпендикуляр

Серединный перпендикуляр — прямая, перпендикулярная данному отрезку и проходящая через его середину.

Свойства:

1) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника (или другого многоугольника, для которого существует описанная окружность) пересекаются в одной точке — центре описанной окружности. У остроугольного треугольника эта точка лежит внутри, у тупоугольного — вне треугольника, у прямоугольного — на середине гипотенузы.

2) Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка, т. е., от вершин треугольника. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудалённая от концов отрезка (вершин треугольника), лежит на серединном перпендикуляре к нему.

3) В равнобедренном треугольнике высота, биссектриса и медиана, проведённые из вершины угла с равными сторонами, совпадают и являются серединным перпендикуляром, проведённым к основанию треугольника, а два других серединных перпендикуляра равны между собой.

На рисунке 6 *серединные перпендикуляры* выделены малиновым цветом и пересекаются в точке R.

2.3.2.4. Свойства треугольника

1) Сумма углов любого треугольника равна $180\,^{\circ}$.

2) В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в $30\,^{\circ}$, равен половине гипотенузы.

2.3.2.5. Площадь треугольника Площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah, \tag{74}$$

где a — длина основания, h — длина высоты, опущенной на основание. Площадь прямоугольного треугольника также равна

$$S = \frac{ab}{2}, \tag{75}$$

где a, b — длины катетов. Формула 74 имеет следствие: *площади треугольников, имеющих равные высоты, относятся друг к другу также как относятся соответствующие основания этих треугольников.* Из этого следствия вытекает ещё одно: площади треугольников относятся друг к другу также как произведение их сторон, имеющих равный общий соответственный угол.

2.3.2.6. Теорема Пифагора

Теорема 2.28. *В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Гипотенузой является сторона, лежащая против прямого угла.*

В настоящее время известно свыше двухсот доказательств данной теоремы, являющейся, пожалуй, самой известной теоремой в математике.

2.3.2.7. Теорема обратная теореме Пифагора

Теорема 2.29. *Если в треугольнике квадрат одной из его сторон равен сумме квадратов других сторон, такой треугольник является прямоугольным. Если квадрат одной из сторон больше суммы квадратов других сторон, угол, лежащий против первой стороны, является тупым. Если квадрат одной из сторон меньше суммы квадратов других сторон, угол, лежащий против первой стороны, является острым.*

2.3.2.8. Формула Герона Данная формула позволяет находить площадь треугольника по длине его сторон и имеет вид:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{76}$$

где, a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр, определяемый по формуле:

$$p = \frac{a+b+c}{2} \tag{77}$$

2.3.2.9. Подобные треугольники

2.3.2.9.1. Определение и основные свойства Строгое определение:

Фигура F называется подобной фигуре F' если существует преобразование подобия, при котором $F \mapsto F'$. Подобие фигур является отношением эквивалентности.

Иными словами каждой точке фигуры F соответствует какая-то единственная точка фигуры F'. При этом выполняется соотношение

$$\frac{MN}{M_1N_1} = k: \ \forall M,\, N, \tag{78}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Нестрогое определение:

Подобными фигурами являются фигуры, имеющие одинаковую форму.

1) Подобие есть взаимно однозначное отображение евклидова пространства на себя.

2) Подобие является аффинным преобразованием плоскости.

3) Подобие сохраняет порядок точек на прямой, т. е. если точка B лежит между точками A, C, и B', A', C' — соответствующие их образы при некотором подобии, то B' также лежит между точками A' и C'.

4) Точки, не лежащие на прямой, при любом подобии переходят в точки, не лежащие на одной прямой.

5) Подобие преобразует прямую в прямую, отрезок в отрезок, луч в луч, угол в угол, окружность в окружность, n-угольник в n-угольник.

6) Подобие сохраняет величины углов между кривыми.

7) Подобие с коэффициентом $k \neq 1$, преобразующее каждую прямую в параллельную ей прямую, является гомотетией с коэффициентом k либо $-k$.

8) Каждое подобие можно рассматривать как композицию движения D и некоторой гомотетии Γ с положительным коэффициентом.

9) Подобие называется собственным (несобственным), если движение D является собственным (несобственным). Собственное подобие сохраняет ориентацию фигур, а несобственное изменяет ориентацию на противоположную.

10) Площади подобных фигур пропорциональны квадратам их сходственных линий (например, сторон). Так, площади кругов пропорциональны отношению квадратов их радиусов.

Подобными треугольниками являются треугольники, имеющие одинаковые углы.

Стороны, лежащие против равных углов в двух треугольниках, называются **сходственными**. Математическая запись условий подобия треугольников выглядит следующим образом:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 : \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle A = \angle A_1 \wedge \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k, \tag{79}$$

где k — коэффициент подобия.

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2.3.2.9.2. Признаки подобия треугольников

Первым признаком подобия треугольников является равенство двух углов.

Вторым признаком подобия треугольников является равенство соответствующих углов и пропорциональность образующих их сторон.

Третьим признаком подобия треугольников является пропорциональность всех сторон.

2.3.2.9.3. Подобие произвольных фигур

2.3.2.10. Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Треугольник имеет три средние линии. На рисунке 6 *средние линии* выделены коричневым цветом.

Свойства средней линии:

1) средняя линия параллельна третьей стороне треугольника и равна половине её длины;

2) периметр треугольника, образуемого средними линиями, равен половине периметра основного треугольника.

2.3.2.11. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рисунок 7) с прямым углом β у вершины C. Опустим высоту h из угла β на сторону c в точку D, получив, таким образом, два треугольника ACD, BDC, являющихся прямоугольными.

Докажем подобие треугольников ACD, BDC друг другу, а также треугольнику ABC. Докажем что $\triangle ACD \sim \triangle ABC$. Оба этих треугольника прямоугольные и имеют одинаковый угол $\alpha = 49.1\,°$. Равенство двух углов означает, что треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников (см. 2.3.2.9.2). Аналогичным образом доказывается, что $\triangle BDC \sim \triangle ABC$. Из этого следует, что $\triangle ACD \sim \triangle BDC$.

В $\triangle ABC$ стороны a, b — катеты, сторона c — гипотенуза. В таком случае, отрезок AD — проекция катета b на гипотенузу c, отрезок BD — проекция катета a на гипотенузу c. Обозначим эти отрезки, являющиеся проекциями, как b_h и a_h соответственно.

Введём понятие **среднего геометрического** x для переменных i, j

$$x = \sqrt{ij} \tag{80}$$

Докажем, что высота h является средним геометрическим проекций катетов a, b. Т. е. что $h = \sqrt{a_h \times b_h}$. Из $\triangle ACD \sim \triangle BDC$ следует, что их стороны сходственно пропорциональны. Тогда $\frac{h}{b_h} = \frac{a_h}{h} \Rightarrow h^2 = a_h b_h \Rightarrow h = \sqrt{a_h \times b_h}$. Таким образом, было доказано, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из его прямого угла, равна среднему геометрическому между проекциями катетов на гипотенузу. Из этого также следует, что $a = \sqrt{a_h c}$, $b = \sqrt{b_h c}$, а также $h = \frac{ab}{c}$.

2.3.2.12. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника

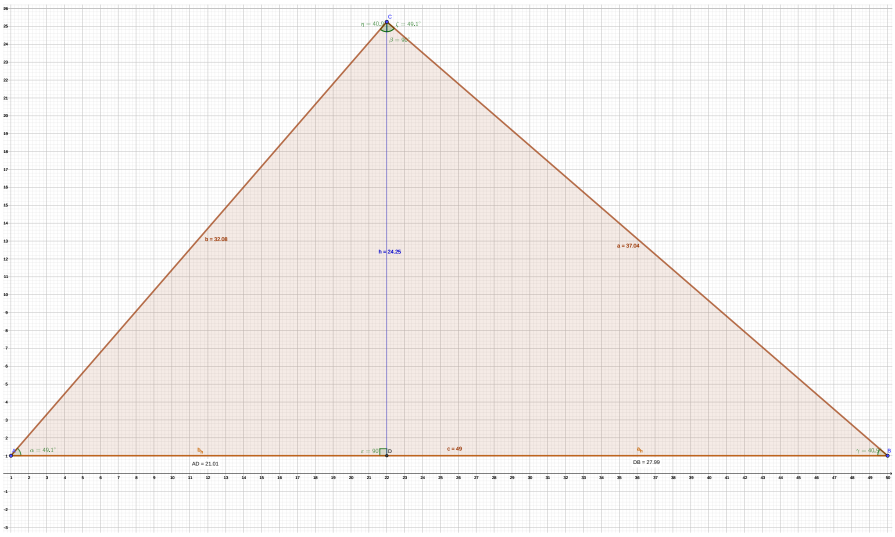

Рис. 7. Прямоугольный треугольник

2.3.2.12.1. Определения функций

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Так, синусом угла α на 7, будет являться отношение $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \approx 0.756$.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Так, косинусом угла α на 7, будет являться отношение $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} \approx 0.655$.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Так, тангенсом угла α на 7, будет являться отношение $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} \approx 1.155$.

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Так, тангенсом угла α на 7, будет являться отношение $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a} \approx 0.866$.

Секансом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к прилежащему катету.

Так, секансом угла α на 7, будет являться отношение $\sec\alpha = \dfrac{c}{b} \approx 1.527$.

Косекансом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к противолежащему катету.

Так, секансом угла α на 7, будет являться отношение $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} \approx 1.323$.

Любую тригонометрическую функцию можно выразить через любую другую тригонометрическую функцию с тем же аргументом (с точностью до знака из-за неоднозначности раскрытия квадратного корня). Нижеприведённые формулы верны для $0 < x < \frac{\pi}{2}$. В таблице 1 приводятся соотношения тригонометрических функций.

Таблица 1. Соотношения тригонометрических функций

	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
$\sin x =$	$\sin x$	$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+1}}$	$\frac{\sec^2 x-1}{\sec x}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} x}$
$\cos x =$	$\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+1}}$	$\frac{1}{\sec x}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}{\operatorname{cosec} x}$
$\operatorname{tg} x =$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$	$\sqrt{\sec^2 x-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}$
$\operatorname{ctg} x =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}$
$\sec x =$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+1}}{\operatorname{ctg} x}$	$\sec x$	$\frac{\operatorname{cosec} x}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}$
$\operatorname{cosec} x =$	$\frac{1}{\sin x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}$	$\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+1}$	$\frac{\sec x}{\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\operatorname{cosec} x$

Помимо шести основных вышеуказанных функций существует ряд относительно редко используемых в настоящее время, например *синус-верзус*, *косинус-верзус*, *гаверсинус*, *гаверкосинус*, *эксеканс*, *экскосеканс*. Рассмотрение данных функций в контексте математической подготовки оценщика является избыточным.

2.3.2.12.2. Тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 : \ \forall\alpha \tag{81}$$

Данное выражение называется основным тригонометрическим тождеством. Другие тождества приведены ниже.

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha : \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n : \ n \in \mathbb{Z} \tag{82}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha : \ \alpha \neq \pi n, \, n \in \mathbb{Z} \tag{83}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1 : \ \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \, n \in \mathbb{Z} \tag{84}$$

2.3.2.12.3. Свойства и значения тригонометрических функций Синус и косинус вещественного аргумента представляют собой периодические, непрерывные и бесконечно дифференцируемые вещественнозначные функции. Остальные четыре функции на вещественной оси также вещественнозначны, периодичны и бесконечно дифференцируемы, за исключением счётного числа разрывов второго рода: у тангенса и секанса в точках $\pm\pi n + \dfrac{\pi}{2}$, а у котангенса и косеканса — в точках $\pm\pi n$. Последнее обстоятельство связано с тем, что вычисление значений этих четырёх функций приводит к операции деления на ноль, что означает, что в этих точках их значение не определено, а в окрестности этих точек — стремится к бесконечности. На рисунке 8 показаны значения шести основных тригонометрических функций в зависимости от значения угла в градусах.

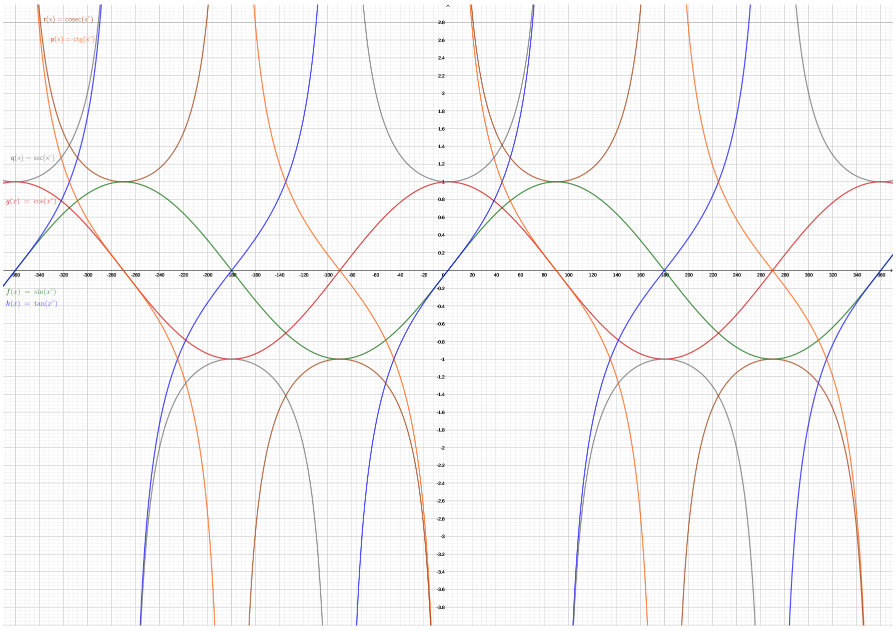

Рис. 8. Значения шести основных тригонометрических функций в зависимости от значения угла в градусах

2.3.3. Многоугольники

2.3.3.1. Общие сведения Рассмотрим рисунок 9. На нём изображена фигура, состоящая из последовательных отрезков (segment) f, g, h, i, j. Соседние отрезки, например f и g, g и h, i и g, называются *смежными*. Если отрезки f, g, h, i, j не лежат на одной прямой, то образуемая ими фигура называется *ломаной*, сами отрезки являются её *звеньями*, а точки A, B, C, D, E, F — её *вершинами*. Длиной *ломаной* является сумма длин образующих её отрезков.

В случае, когда крайние точки *ломаной* совпадают, такую *ломаную* называют *замкнутой*. В случае, когда несмежные отрезки замкнутой ломаной не имеют общих точек, образуемая ими фигура называется многоугольником (polygon), см. рисунок 10. Многоугольник, имеющий n вершин, называется n-угольником. Примером многоугольника, является, в частности, треугольник, рассмотренный ранее в 2.3.2. Число сторон многоугольника равно числу его вершин. Две вершины многоугольника, лежащие на одной стороне называются соседними. Таким образом, соседними являются вершины A и B, B и C, F и A. Отрезок, соединяющий две вершины многоугольника, не являющиеся соседними, называется *диагональю.* На рисунке 10 диагональю является отрезок l. Любой многоугольник делит плоскость на внешнюю и внутреннюю части. Максимально возможное число диагоналей *выпуклого многоугольника* определяется по формуле

$$\frac{n(n-3)}{2}, \tag{85}$$

где n — число вершин многоугольника.

Выпуклым многоугольником называется многоугольник, лежащий в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через любую его сторону.

Пример выпуклого многоугольника показан на рисунке 10, на котором его стороны изображены чёрным цветом, диагональ — синим, прямые, проходящие через его стороны, — красным. Пример невыпуклого многоугольника показан на рисунке 11, на котором его внутренняя сторона закрашена красно-коричневым цветом.

В данном материале чаще всего речь будет идти о выпуклых многоугольниках.

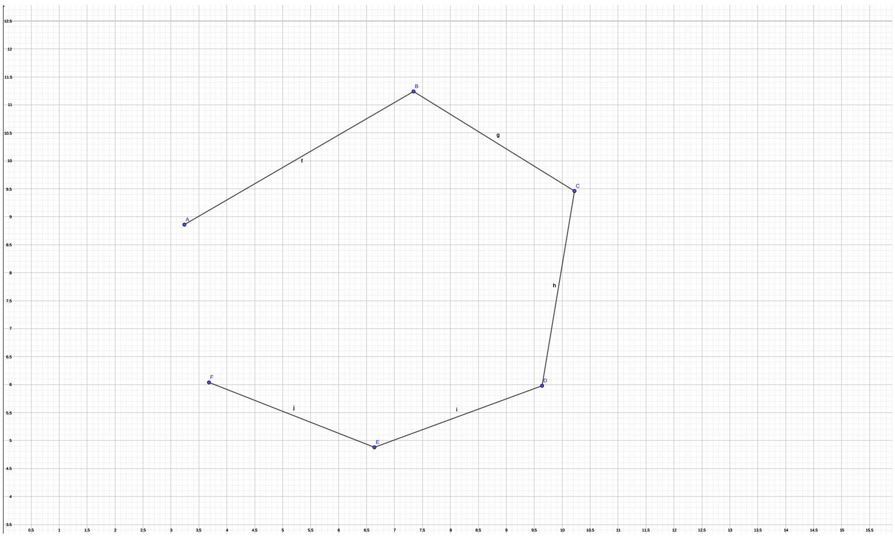

Рис. 9. Последовательные отрезки

Правильным многоугольником называется многоугольник, все стороны и углы которого равны.

Выпуклые многоугольники обладают рядом свойств:

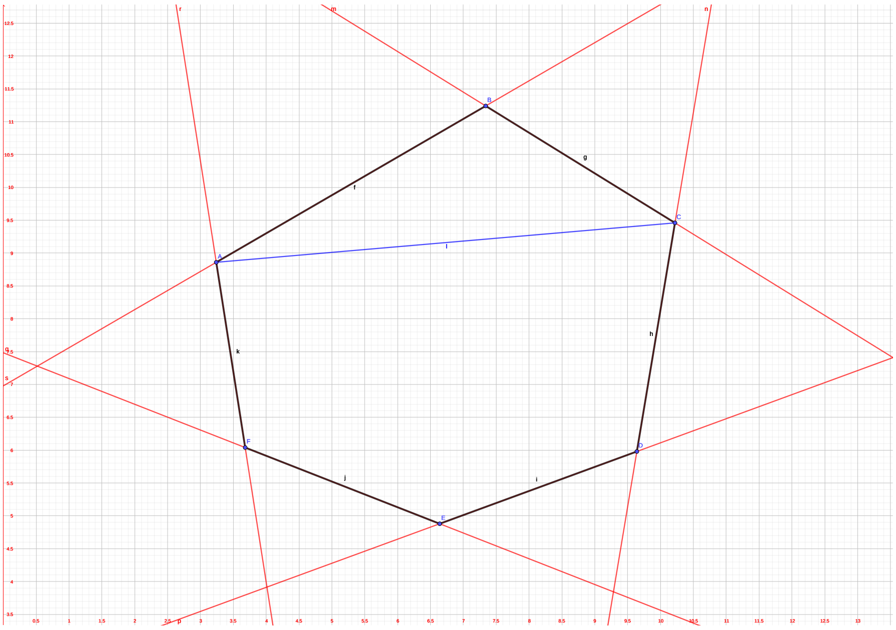

Рис. 10. Выпуклый многоугольник

1) опускание всех диагоналей из любой вершины приводит к образованию *n-2* треугольников;

2) вследствие этого и в силу правила равенства суммы углов треугольника 180°можно сделать вывод о том, что сумма углов многоугольника равна $180° \times (n - 2)$;

3) сумма внешних (смежных) углов многоугольника равна 360°.

На рисунке 12 показаны внешние углы правильного многоугольника.

2.3.3.2. Параллелограмм

Параллелограмм — выпуклый четырёхугольник, стороны которого попарно параллельны.

Основные свойства параллелограмма:

1) противоположные стороны равны между собой;

2) противоположные углы равны между собой;

3) точка пересечения диагоналей делит их пополам;

Все основные свойства параллелограмма показаны на рисунке 13.

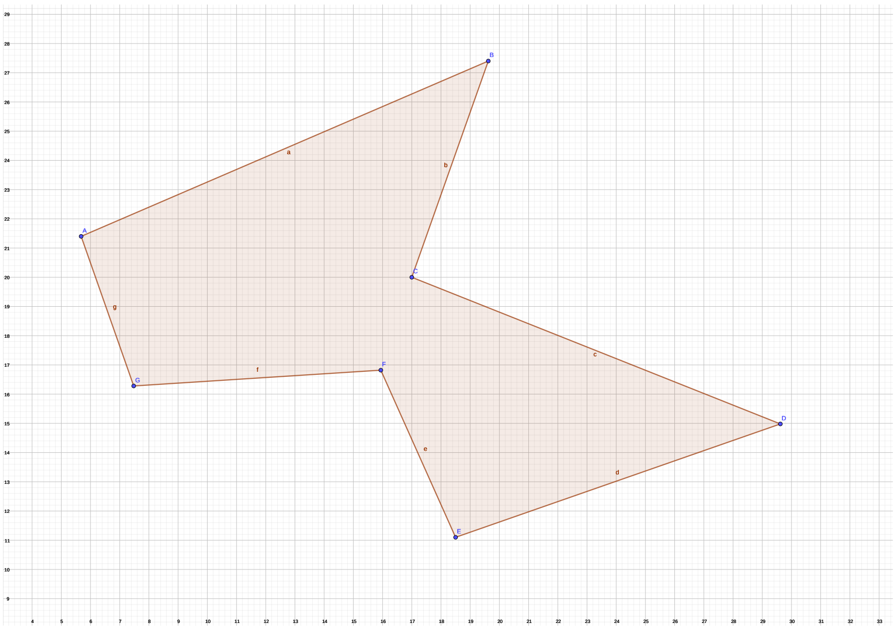

Рис. 11. Невыпуклый многоугольник

2.3.3.3. Трапеция

Трапеция — выпуклый четырёхугольник, две стороны которого параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются её *основаниями*, две другие — *боковыми сторонами*. Трапеция, боковые стороны которой равны между собой, называется *равнобедренной*. Углы при основании равнобедренной трапеции равны между собой. Диагонали равнобедренной трапеции равны между собой.

Трапеция, один из её углов равен 90°, называется *прямоугольной*. В прямоугольной трапеции два угла равны 90°.

Равнобедренная трапеция и её основные свойства показана на рисунке 14.

2.3.3.3.1. Средняя линия трапеция

Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна половине их суммы. На рисунке 14 средней линией является отрезок e.

2.3.3.4. Прямоугольник, ромб и квадрат

Прямоугольник — параллелограмм, все углы которого являются прямыми.

Из определения следует, что прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Диагонали прямоугольника равны между собой и делятся пополам в точке пересечения.

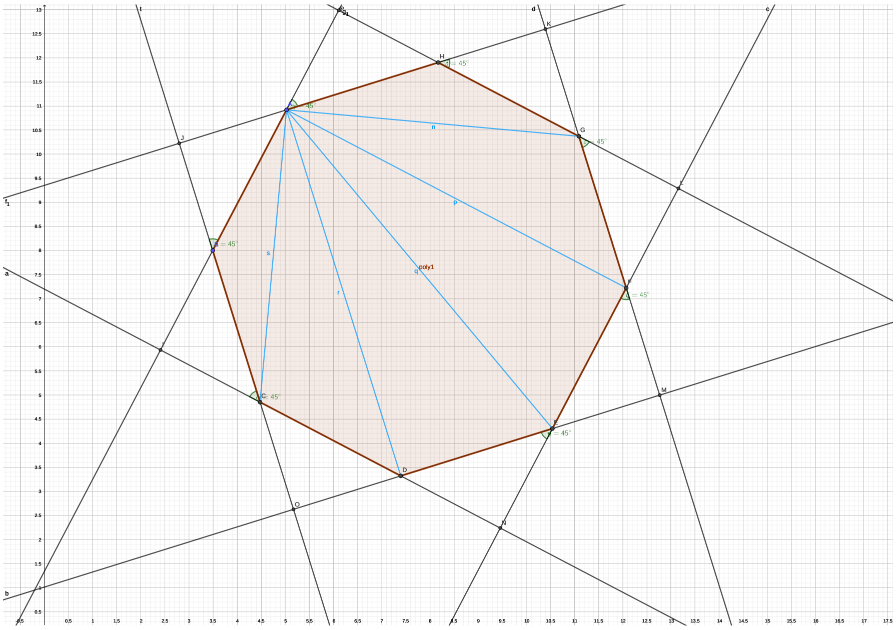

Рис. 12. Смежные углы многоугольника

Ромб — параллелограмм, все стороны которого равны.

Из определения следует, что ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

Квадрат — прямоугольник, все стороны которого равны.

Из определения следует, что ромб обладает всеми свойствами прямоугольника и, как следствие — параллелограмма. Также квадрат обладает всеми свойствами ромба. Отличие квадрата от ромба в том, что во-первых углы ромба могут отличаться от 90 °, во-вторых, диагонали ромба могут не быть равны между собой. Иными словами, любой квадрат является ромбом, но не любой ромб является квадратом.

Прямоугольник, ромб и квадрат, а также их основные свойства показаны на рисунке 15.

2.3.3.5. Площадь многоугольника

Площадь многоугольника — величина части плоскости внутри многоугольника.

Свойства площади многоугольника.

1) Если фигуры равны, то и их площади равны.

2) Если фигура разбита на несколько частей, то сумма фигуры равна сумме частей.

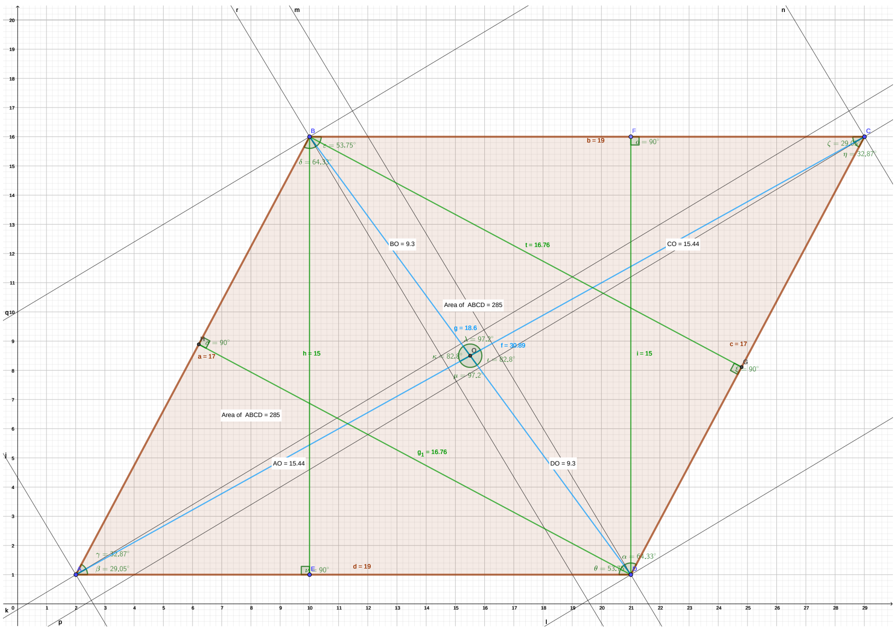

Рис. 13. Параллелограмм и его основные свойства

Площадь квадрата:

$$S = a^2, \tag{86}$$

где a — длина стороны.

Площадь прямоугольника:

$$S = ab, \tag{87}$$

где a, b — длина не равных между собой сторон.

Площадь параллелограмма:

$$S = ah, \tag{88}$$

где a — длина стороны, h — длина высоты, опущенной на эту сторону. На рисунке 13 такой стороной является, например d, а высотой — отрезок h. Также возможно использование, например c и t.

Площадь трапеции:

$$S = \frac{ab}{2}h, \tag{89}$$

где, a, b — основания трапеции, h — её высота.

2.3.4. Осевая симметрия

Осевая симметрия — симметрия относительно прямой.

Центральная симметрия — симметрия относительно точки.

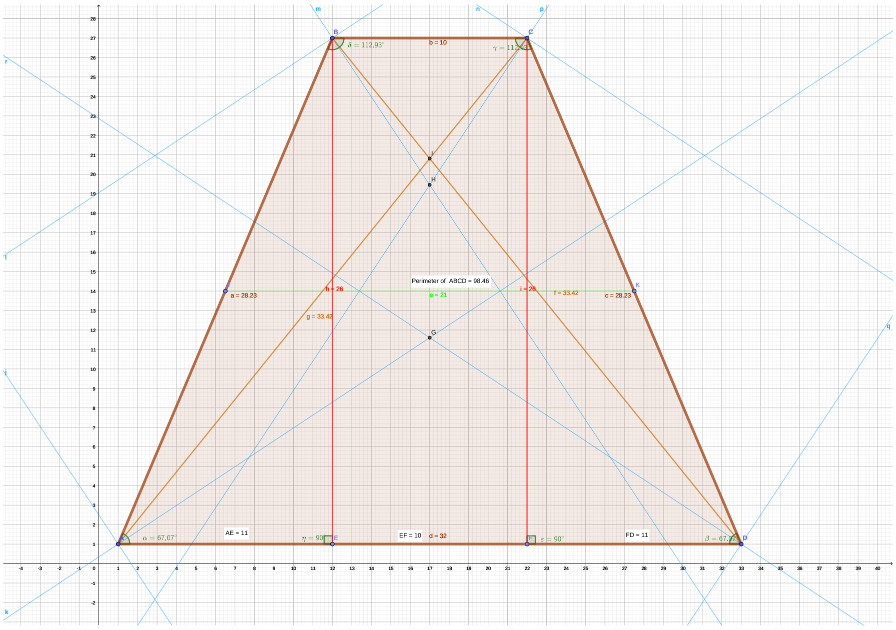

Рис. 14. Равнобедренная трапеция и её основные свойства

2.3.5. Взаимное расположение прямой и окружности

Рассмотрим рисунок 16, на котором изображена окружность c с радиусом $r = 1$. На одном плоскости с этой окружностью мы видим четыре прямые f (голубая), j (зелёная), e (красная), g (фиолетовая). Минимальное расстояние h, получаемое путём опускания перпендикуляра из центра окружности на прямую, между центром окружности и прямой может быть меньше радиуса, больше его либо равно ему.

- В случае, если расстояние h равно радиусу, такая прямая называется **касательной** и имеет одну общую точку с окружностью. На рисунке 16 такой прямой является прямая g.

- В случае, если расстояние h меньше радиуса, такая прямая называется **секущей** и имеет две общие точки с окружностью. На рисунке 16 такими прямыми являются прямые f, e. В случае прохождения прямой через центр окружности является частным случаем равенства $h < r$.

- В случае, если если расстояние h больше радиуса, такая прямая не имеет общих точек с окружностью. На рисунке 16 такой прямой является прямая j.

2.3.6. Градусная мера дуги окружности, теорема о вписанном угле

Рассмотрим окружность c, изображённую на рисунке 17.

Дуга — часть окружности, ограниченная двумя точками

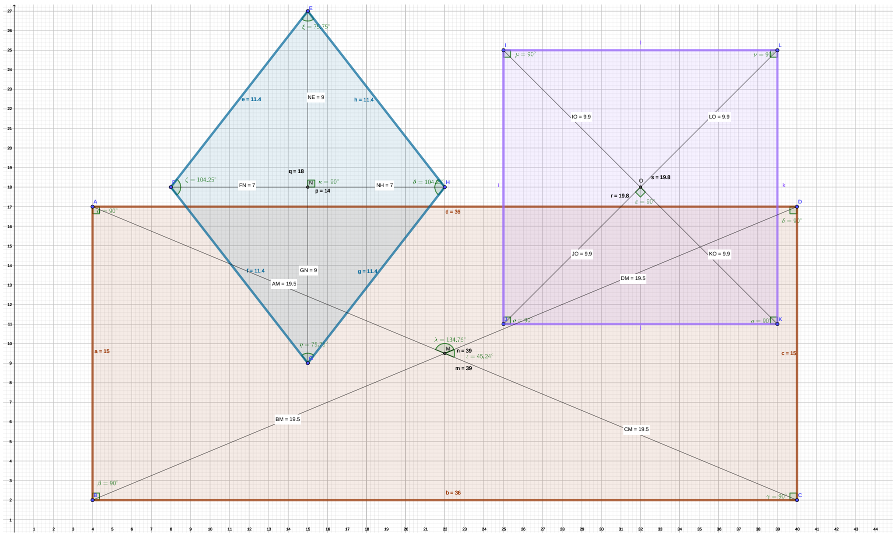

Рис. 15. Прямоугольник, ромб и квадрат и их основные свойства

Таблица 2. Варианты взаимного расположения прямой и окружности

Условие	Число общих точек	Название прямой
$h < r$	2	секущая
$h = r$	1	касательная
$h > r$	0	—

Дугой является, например $\smile CFC'$.

Полуокружность — дуга, образуемая точками, отрезок, соединяющий которые, проходит через центр окружности.

Центральный угол — угол, вершина которого находится в середине окружности.

Таким углом является угол COC', обозначенный как $\angle\alpha$. В случае, если дуга меньше полуокружности, то её градусная мера равна градусной мере центрального угла. Таким образом, градусная мера $\smile CFC' = \angle\alpha = 100\,°$. В случае, если дуга больше полуокружности, её градусная мера определяется по формуле

$$\smile ABC = 360 - \alpha. \tag{90}$$

Таким образом, градусная мера $\smile CGC' = 360\,° - \angle\alpha = 260\,°$.

Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности.

Вписанным углом является, например угол $\smile CBC'$, обозначенный как $\angle\beta$.

Теорема 2.30. *Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры центрального угла, опирающегося на те же точки на окружности.*

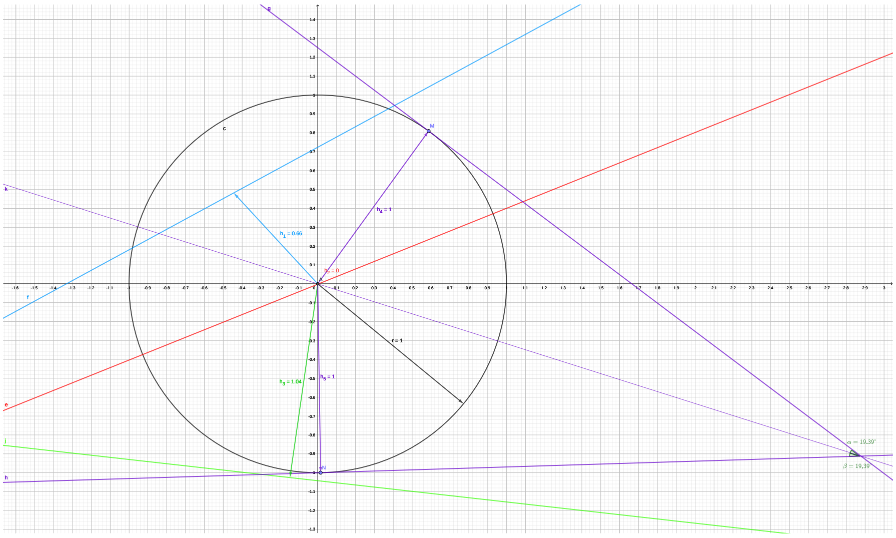

Рис. 16. Взаимное расположение прямой и окружности

При этом, вершина вписанного угла может быть любой. Как видно на рисунке 17 $\angle\beta = \angle\gamma = \angle\gamma = \angle\varepsilon = \dfrac{1}{2}\angle\alpha = 50\,^\circ$. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность — прямой. Например $\angle\zeta = 90\,^\circ$.

2.3.7. Вписанная и описанная окружность

Вписанная в многоугольник окружность — окружность, касающаяся всех его сторон.

Описанная вокруг многоугольника окружность — окружность, касающаяся всех его вершин.

Для построения вписанной в треугольник окружности необходимо использовать в качестве её центра *инцентр* — точку пересечения биссектрис углов при его вершинах. При этом сам треугольник будет являться описанным для данной окружности. Для построения описанной вокруг треугольника окружности необходимо использовать в качестве её центра точку пересечения серединных перпендикуляров. При этом сам треугольник будет являться вписанным для данной окружности. Вписанная и описанная окружности треугольника показаны на рисунке 18.

Окружность может быть вписана в любой треугольник равно как и описана около него. Окружность может быть вписана в четырёхугольник, если равны суммы длин его противоположных сторон. Окружность может быть описана около четырёхугольника тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна $180\,^\circ$.

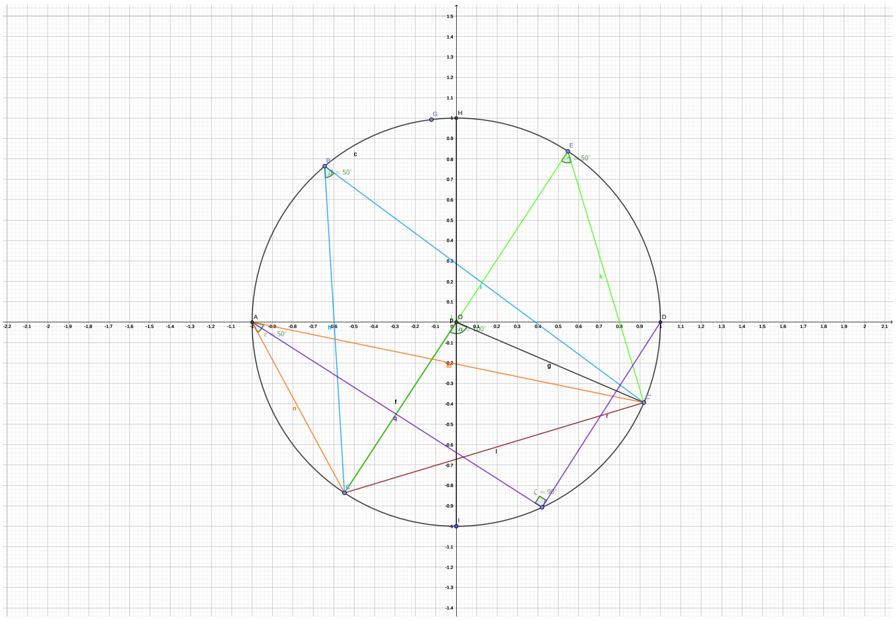

Рис. 17. Центральный и вписанный углы

2.3.8. Векторы

2.3.8.1. Понятие вектора

Вектор — направленный отрезок прямой, то есть отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B принято обозначать как $\overrightarrow{AB}$. Векторы также могут обозначаться малыми латинскими буквами со стрелкой над ними, например $\vec{a}$.

Нулевой вектор — вектор, начало которого совпадает с концом.

Точка является *нулевым вектором*. Нулевой вектор обозначают как $\vec{0}$ либо $\overrightarrow{AA}$.

Длина вектора — длина соответствующего отрезка.

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| \tag{91}$$

2.3.8.2. Коллинеарность и равенство векторов Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой либо на параллельных прямых. Такие векторы обозначаются следующим образом: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Два коллинеарных вектора могут быть **сонаправленными** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ либо **противоположно направленными** $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$. Два вектора являются *сонаправленными*, если они коллинеарны и лежат по одну сторону от прямой, проходящей через их начало. Два вектора являются *противоположно направленными*, если они коллинеарны и лежат по разные стороны от прямой, проходящей через их начало. Два вектора равны, если

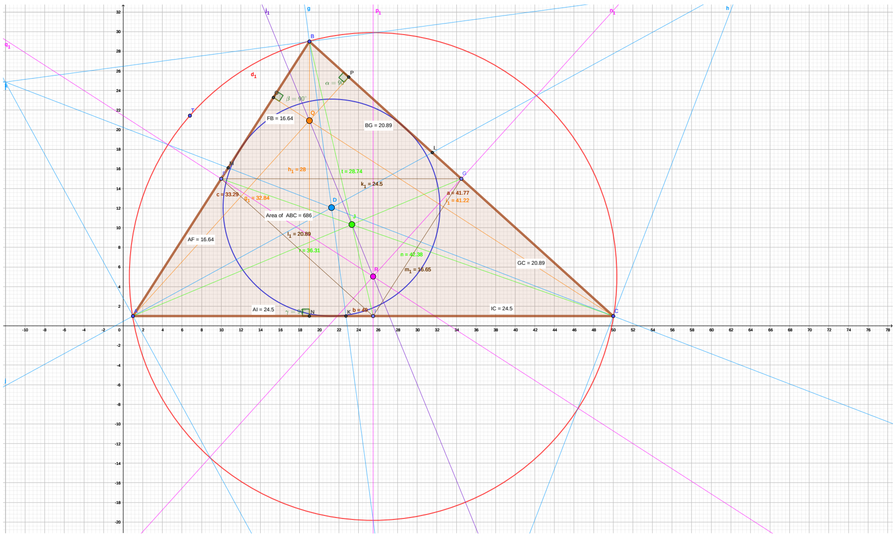

Рис. 18. Вписанная и описанная окружности треугольника

они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases} \tag{92}$$

2.3.8.3. Сложение векторов

2.3.8.3.1. Сложение по правилу треугольника Рассмотрим $\vec{a}$ $\vec{b}$ на рисунке 19. Для их сложения возьмём произвольную точку A и отложим из неё $\vec{u} = \vec{a}$. Затем из конца $\vec{u}$ в точке B отложим $\vec{v} = \vec{b}$ в точку C. Затем проведём $\vec{w}$ из A в C. Вектор $\vec{w}$ и будет являться результатом сложения $\vec{a}$ $\vec{b}$.

2.3.8.3.2. Сложение по правилу трёх точек Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ вектор $\vec{a}$, а отрезок $\overrightarrow{BC}$ изображает вектор $\vec{b}$, то $\overrightarrow{AC}$ изображает вектор $\vec{a} + \vec{b}$.

2.3.8.3.3. Сложение по правилу параллелограмма Для сложения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по *правилу параллелограмма* оба эти векторы переносятся параллельно самим себе так, чтобы их начала совпадали. Тогда вектор суммы задаётся диагональю построенного на них параллелограмма, исходящей из их общего начала. Эта диагональ совпадает с третьей стороной треугольника при использовании *правила треугольника*.

2.3.8.3.4. Сложение по правилу многоугольника (правилу ломаной) Начало второго вектора совмещается с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д., сумма же n векторов есть вектор, с началом, совпадающим с началом первого, и концом, совпадающим с концом n-го (то есть изображается направленным отрезком, замыкающим ломаную).

2.3.8.3.5. Законы сложения векторов Коммутативный закон:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \tag{93}$$

Сочетательный закон:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}) + \vec{c}). \tag{94}$$

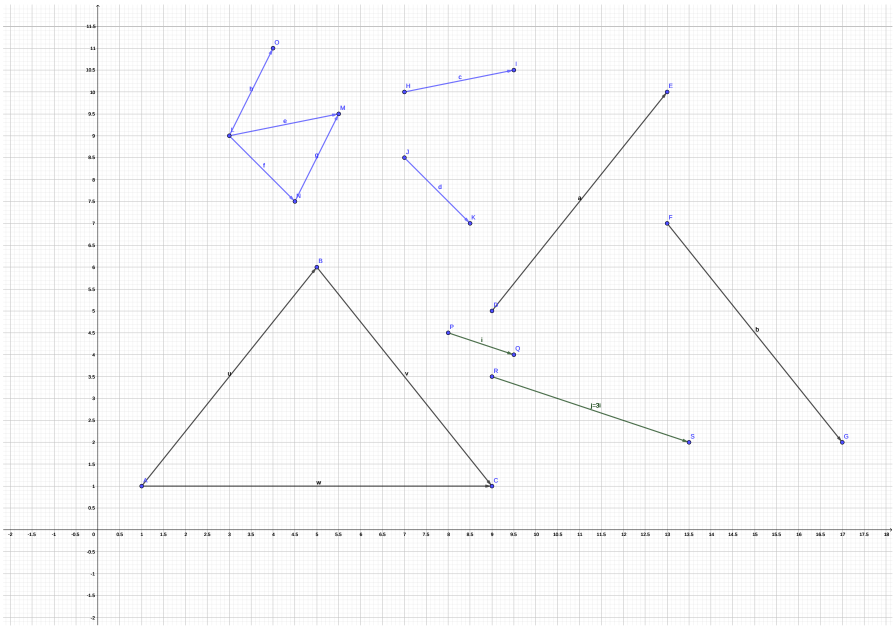

Рис. 19. Сложение и вычитание векторов и умножение их на число

2.3.8.4. Вычитание векторов Разностью $\vec{c}$ и $\vec{d}$ является такой $\vec{g}$, который при его сложении с $\vec{d}$ даёт $\vec{c}$. См. рисунок 19. Алгоритм вычитания: отложить оба вектора из одной точки, затем отложить вектор из конца вычитаемого вектора к концу вектора, из которого вычитается. Полученный вектор и будет результатом.

Другим способом вычитания векторов является сложение вектора, из которого вычитается, с вектором, противоположным вычитаемому.

$$\vec{c} - \vec{d} = \vec{c} + (-\vec{d}) \tag{95}$$

$$\vec{d} = -\vec{e} : \begin{cases} |\vec{d}| = |\vec{e}| \\ \vec{d} \uparrow\downarrow \vec{e} \end{cases} \tag{96}$$

2.3.8.5. Произведение вектора на число

$$\begin{gathered}
k \times \vec{i} = \vec{j} \Rightarrow \\
1)\ |\vec{j}| = |k| \times |\vec{i}| \\
2)\ \begin{cases} k > 0 \Rightarrow \vec{j} \uparrow\uparrow \vec{i} \\ k < 0 \Rightarrow \vec{j} \uparrow\downarrow \vec{i} \\ k = 0 \Rightarrow \vec{j} = 0 \end{cases}
\end{gathered} \tag{97}$$

Свойства умножения вектора на число:

$$\begin{gathered}
kl(\vec{a}) = k(l\vec{a}) \\
k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \\
(k + l) \times \vec{a} = k\vec{a} \times k\vec{b}
\end{gathered} \tag{98}$$

3. Функции

3.1. Понятие функции

Функция является одним из самых важных понятий в математике.

Функция — инструкция (набор инструкций) в соответствии с которой каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

В общем виде функцию можно записать следующим образом.

$$y = f(x), \tag{99}$$

где y — зависимая переменная (значение функции),
x — независимая переменная (аргумент функции),
f — выражение.

Одним из ключевых понятий являются **область определения функции** и **область значения функци**и.

Область определения функции — все возможные значения независимой переменной, при которых существуют значения зависимой переменной.

Область определения функции записывается следующим образом.

$$D(f) \tag{100}$$

Область значения функции — все возможные значения зависимой переменной.

Область значения функции записывается следующим образом.

$$E(y) \tag{101}$$

Функция является *возрастающей* на отрезке *[a, b]*, если при $x_1 < x_2 f(x_1) < f(x_2)$. Функция является *убывающей* на отрезке *[a, b]*, если при $x_1 < x_2 f(x_1) > f(x_2)$. Возрастающая либо убывающая функция называется *монотонной функцией.*

3.2. Определение числовой функции

Рассмотрим некоторое числовое множество X. Пусть для элементов этого множества задано некоторое правило f, согласно которому каждому элементу данного множества ставится в соответствие некоторое число X. Т. е.

$$X \text{ — числовое множество, } f \text{ — правило, } x \in X \to y. \tag{102}$$

Тогда можно сказать, что на множестве X задана числовая функция $y = f(x)$, где x — независимая переменная (аргумент), f — правило, y — значение функции.

3.3. Способы задания функции

Аналитический способ состоит в задании функции одной или несколькими формулами (например $y = f(x)$) и был рассмотрен ранее. **Рекурсивный способ** состоит в задании функции через саму себя, при этом значения функции определяются через другие её же значения. Такой способ задания функции используется в задании множеств и рядов. **Графический способ** заключается в проведении линии (графика), у которой абсциссы изображают значения аргумента, а ординаты — соответствующие значения функции. **Словесный способ** состоит в задании функции естественным языком, т. е. словами. При этом необходимо задать входные и выходные значения, а также соответствие между ними. **Табличный способ** заключается в задании таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции. Такой способ задания функции применяется только в том случае, когда *область определения функции* является дискретным конечным множеством.

3.4. Свойства функций

3.4.1. Ограниченные и неограниченные функции

Обозначим X некоторое множество чисел, входящих в область определения $D(f)$ функции $y = f(x)$.

Функцию $y = f(x)$ называют ограниченной сверху на множестве X если существует такое число α, что для любого x из множества X выполняется неравенство

$$f(x) \leq \alpha. \tag{103}$$

Функцию $y = f(x)$ называют ограниченной снизу на множестве X если существует такое число β, что для любого x из множества X выполняется неравенство

$$f(x) \geq \beta. \tag{104}$$

Функцию $y = f(x)$ называют ограниченной на множестве X если существуют такие числа α, β, что для любого x из множества X выполняется неравенство

$$\beta \leq f(x) \leq \alpha. \tag{105}$$

Функцию $y = f(x)$ **называют неограниченной сверху на множестве** X если для любого числа α существует такой x из множества X, для которого выполняется неравенство

$$f(x) > \alpha. \tag{106}$$

Функцию $y = f(x)$ **называют неограниченной сверху на множестве** X если для любого числа β существует такой x из множества X, для которого выполняется неравенство

$$f(x) < \beta. \tag{107}$$

Функцию $y = f(x)$ **называют неограниченной на множестве** X если эта функция или не ограничена сверху, или не ограничена снизу, или не ограничена и сверху, и снизу.

Наименьшее значение функции $y = f(x)$ представляется собой такое значение β, для которого выполняется неравенство $f(x_0) = \beta \wedge f(x) \geq \beta$, т. е.

$$\beta = y_{min} : \begin{cases} f(x_0) = \beta \\ f(x) \geq \beta. \end{cases} \tag{108}$$

Наибольшее значение функции $y = f(x)$ представляется собой такое значение α, для которого выполняется неравенство $f(x_0) = \alpha \wedge f(x) \leq \alpha$, т. е.

$$\alpha = y_{max} : \begin{cases} f(x_0) = \alpha \\ f(x) \leq \alpha. \end{cases} \tag{109}$$

Минимум функции $y = f(x)$ представляется собой такую точку x_{min}, в некоторой окрестности которой выполняется неравенство $f(x) > f(x_{min})$, т. е.

$$x_{min} : f(x) > f(x_{min}) \tag{110}$$

Максимум функции $y = f(x)$ представляется собой такую точку x_{max}, в некоторой окрестности которой выполняется неравенство $f(x) < f(x_{max})$, т. е.

$$x_{max} : f(x) < f(x_{max}) \tag{111}$$

3.4.2. Монотонные и строго монотонные функции

Функцию $y = f(x)$ **называют возрастающей на множестве** $y = f(x)$ если для любых чисел $x_1 \in X$, $x_2 \in X$,удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, т. е. меньшему значению аргумента соответствует такое же либо меньшее значение функции.

$$y = f(x) \nearrow : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \tag{112}$$

Возрастающие функции также называют **неубывающими функциями**.

Функцию $y = f(x)$ **называют убывающей на множестве** $y = f(x)$ если для любых чисел $x_1 \in X$, $x_2 \in X$,удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$, т. е. меньшему значению аргумента соответствует такое же либо большее значение функции.

$$y = f(x) \searrow: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \tag{113}$$

Убывающие функции также называют **невозрастающими функциями**.

Функцию $y = f(x)$ **называют строго возрастающей на множестве** $y = f(x)$ если для любых чисел $x_1 \in X$, $x_2 \in X$,удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

$$y = f(x) \uparrow: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{114}$$

Функцию $y = f(x)$ **называют строго убывающей на множестве** $y = f(x)$ если для любых чисел $x_1 \in X$, $x_2 \in X$,удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции.

$$y = f(x) \downarrow: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \tag{115}$$

Монотонная функция — возрастающая либо убывающая функция.

Стого монотонная функция — строго возрастающая либо строго убывающая функция.

На рисунке 20 показаны примеры различных типов функций.

Пример 3.1.
$$y = x^2 \downarrow: x \in (-\infty; o],\ y = x^2 \uparrow: x \in [0; \infty)$$
$$y = -x^2 \uparrow: x \in (-\infty; o],\ y = -x^2 \downarrow: x \in [0; \infty)$$
$$y = x \uparrow: x \in (-\infty; \infty)$$
$$y = \operatorname{arctg} \uparrow: x \in (-\infty; \infty)$$

3.4.3. Чётные и нечётные функции

Чётная функция — функция вида $y = f(x)$, определённая на множестве X, при которой для любых чисел x и $-x$, принадлежащих множеству X, выполняется неравенство $f(-x) = f(x)$. На математическом языке данная запись выглядит следующим образом:

$$f(-x) = f(x) :\ x \in X,\ D(f) \text{ симметричное множество} \Rightarrow \text{чётная функция.} \tag{116}$$

Нечётная функция — функция вида $y = f(x)$, определённая на множестве X, при которой для любых чисел x и $-x$, принадлежащих множеству X, выполняется неравенство $f(-x) = -f(x)$. На математическом языке данная запись выглядит следующим образом:

$$f(-x) = -f(x): \; x \in X, D(f) \text{ симметричное множество} \Rightarrow \text{нечётная функция.} \tag{117}$$

Для того, чтобы говорить о чётности либо нечётности функции $y = f(x)$ необходимо, чтобы она была определена как в точке x так и в точке $-x$, т. е. область определения функции ($D(f)$) должна являться *симметричным множеством.*

Ни чётной, ни нечётная функция — функция вида $y = f(x)$, определённая на множестве X, при которой для любых чисел x и $-x$, принадлежащих множеству X, не выполняется ни одно их двух вышеприведённых неравенств. На математическом языке данная запись выглядит следующим образом:

$$f(-x) \neq f(x) \wedge f(-x) \neq -f(x): \; x \in X \Rightarrow \text{ни чётная, ни нечётная функция.} \tag{118}$$

На рисунке 20 показаны примеры различных типов функций.

Пример 3.2.
$$\begin{aligned}
&y = x^2 \text{ — чётная функция}\\
&y = -x^2 \text{ — чётная функция}\\
&y = x \text{ — нечётная функция}\\
&y = \operatorname{arctg}(x) \text{ — нечётная функция}\\
&y = a^x: \; a \in (0; \infty) | a \neq 1 \text{ — ни чётная, ни нечётная функция}\\
&y = \log_a x: \; a \in (0; \infty) | a \neq 1 \text{ — ни чётная, ни нечётная функция}
\end{aligned}$$

Теорема 3.3. *Любую функцию $y = f(x)$, определённую на симметричном относительно точки $x = 0$ множестве X, можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций.*

3.4.4. Периодические и непериодические функции, период функции

Период функции $y = f(x)$ — такое число T, не равное нулю, если для любого числа $x \in D(f)$ числа $x + T$, $x - T$ также принадлежат области определения функции ($D(f)$) и справедливы равенства ($f(x - T) = f(x)$, $f(x - T) = f(x)$). На математическом языке данная запись выглядит следующим образом:

$$f(x+T) = f(x) \wedge f(x-T) = f(x) : x, x+T, x-T \in D(f), T \neq 0 \Rightarrow T \text{— период функции.} \tag{119}$$

Периодическая функция — функция, имеющая *период.*

Непериодическая функция — функция, не имеющая *периода.*

Если число T является периодом некоторой функции, то и число kT, где k — любое целое число, отличное от нуля, также является периодом этой функции.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ являются периодическими функциями с периодом 2π], функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ являются периодическими функциями с периодом π]. Показательные, логарифмические и степенные функции являются *непериодическими функциями*.

3.4.5. График функции. Свойства графиков чётных, нечётных и периодических функций

График функции $y = f(x)$ — множество всех точек, координаты которых имеют вид

$$(x; f(x)) : x \in D(f). \tag{120}$$

.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, график нечётной функции симметричен относительно начала координат. График периодической функции не изменяется при сдвиге вдоль оси абсцисс на период вправо или влево. Примеры графиков функций приведены на рисунке 20.

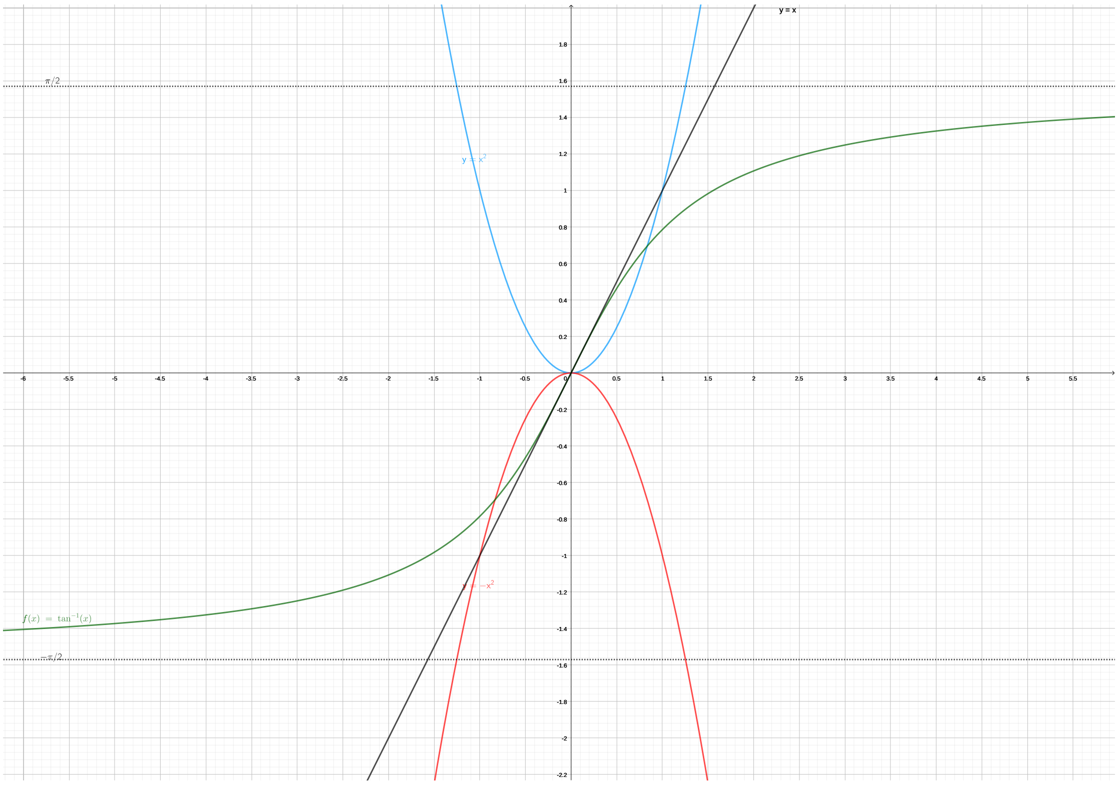

Рис. 20. Примеры типов функций

3.5. Линейная функция и её график, взаимное расположение графиков линейных функций

Общая формула линейной функции следует из **??** и представляет собой выражение

$$ax + by + c = 0 : b \neq 0. \tag{121}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} by &= -ax - c \\ y &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ k = -\frac{a}{b}, m &= -\frac{c}{b} \Rightarrow \\ y &= kx + m. \end{aligned} \tag{122}$$

Последнее выражение $y = kx + m$ называется *линейной функцией*, в которой x — независимая переменная (аргумент), y — зависимая переменная (зачение функции). Графиком линейной функции является прямая.

Для определения взаимного расположения графиков двух линейных функций

$$y = k_1x + m_1$$
$$y = k_2x + m_2$$

следует использовать правила: в случае, когда $k_1 = k_2, m_1 \neq m_2$ — графики функций параллельны; в случае, когда $k_1 = k_2, m_1 = m_2$ — графики функций совпадают; в случае, когда $k_1 \neq k_2, m_1 \neq m_2$ — графики функций имеют пересечение, являющееся единственным.

Для поиска точки пересечения графиков можно использовать следующую простую логику: если выполняется условие пересечения графиков функций, следовательно существует такая единственная точка, в которой $y_1 = y_2$, следовательно $= k_1x+m_1 = k_2x + m_2$. Далее путём решения простого линейного уравнения можно найти x.

Пример 3.4. Дано:

$y_1 = 8x - 3$

$y_2 = 3x + 2$

Найти точку пересечения этих функций. Поскольку коэффициенты перед x_1, x_2 разные, следовательно графики функций имеют пересечение, а значит существует такая единственная точка в которой выполняется условие $y_1 = y_2$. Соответственно в этой точке $8x - 3 = 3x + 2$. Тогда $5x = 5$. Из этого следует, что $x = 1$. Подставив значение x в любую из функций получим $y = 5$.

Ответ: графики функций пересекаются в точке (1, 5).

4. Последовательности

4.1. Понятие множества

Под *множеством* понимают совокупность, класс или собрание объектов безразлично какой природы. Согласно определению основоположника теории множеств

Г. Кантора [4], множество — это собрание предметов одинаковых или различных между собой, мыслимое как единое целое. Собрание предметов рассматривается как один предмет. Не следует понимать множество как совокупность действительно существующих предметов, принадлежность предметов одному множества не требует от них сосуществования во времени и пространстве. В логике множество понимается как абстрактный объект, в котором каждый предмет рассматривается с точки зрения признаков, по которым данный предмет принадлежит данному множеству. В множестве предметы становятся неразличимыми друг от друга по признакам и их только по именам.

Объект, принадлежащий данному множеству, называется его **элементом**. Множество обозначается заглавными латинскими буквами A, B, C .... Элементы, входящие в множество, обозначаются строчными латинскими буквами и заключаются в фигурные скобки: a, b, $c \in A$. Обратная запись: $A = \{a, b, c\}$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**, а бесконечное число элементов — **бесконечным**. Примером *бесконечного множества* является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Примером *конечного множества* является, например множество многоквартирных жилых домов на территории Санкт-Петербурга.

Множество A является подмножеством множества B, если все элементы множества A также являются элементами множества B. На математическом языке данная запись выглядит следующим образом: $A \subset B$.

Пересечение множеств A, B — такое множество, которое содержит все элементы, входящие и в A, и в B, т. е.

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} \tag{123}$$

Например, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

Объединение множеств A, B — такое множество, которое содержит все элементы, входящие хотя бы в одно из множеств: A, или B, т. е.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} \tag{124}$$

Например, $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Два множества называются **равными**, если содержат одинаковые элементы (A = 2,4,8 = B = 2,2,4,8).

Элементами множества могут быть другие множества A = 2,3,4,5. При этом A = 2,3,4,5 $\neq$ B = 2,3,4,5.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым множеством**.

Пустое множество и само множество называются **несобственными** подмножествами множества , все остальные подмножества — **собственными**.

Множество называется **заданным**, если перечислены все входящие в него элементы либо определены признаки, по которым данный объект можно отнести к данному множеству:

$A = \{x, P(x)\}$ — x — элементы множества, $P(x)$ — свойства элементов данного множества.

$B = \{x, x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ — множество чётных чисел.

Если *множество* задано своим свойством, то нельзя заранее сказать, будут ли в нём элементы.

Если множество A содержит n элементов, количество его подмножеств составляет

$$|M_a| = 2^n, \tag{125}$$

где n — число элементов множества.

Пример 4.1. Дано:
A $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$
B $= \{f, g, v, w, x, y, z\}$
C $= \{a, b\}$
Тогда:
$C \subset A$
$A \bigcup B = \{a, b, c, d, e, f, g, v, w, x, y, z\}$
$A \bigcap B = \{f, g\}$
$A \backslash B = \{a, b, c, d, e\}$
$B \backslash A = \{v, w, x, y, z\}$
$A \triangle B = \{a, b, c, d, e, v, w, x, y, z\}$

Пример 4.2. Дано: A $= a, b, c$, $n = 3$
Вычислить число подмножеств A.
$2^3 = 8$
$M_A = \{Æ, a, b, c, \{ab\}, \{ac\}, \{bc\}, \{a,b,c\}\}$
$M_A = 8$

Теорема 4.3. *Пустое множество является подмножеством любого множества.*

End.[3]

4.2. Понятие отображения множеств

Большую роль в математике имеет установление связей между двумя множествами X и Y, связанное с рассмотрением пар объектов, образованных из элементов первого множества и соответствующих им элементов второго множества. Особое значение при этом имеет *отображение множеств.*

Пусть X и Y — произвольные множества. Отображением множества X на множество Y называется $\forall$ правило f, по которому каждому элементу множества X сопоставляется вполне определённый (единственный) элемент множества Y. Тот факт, что f есть отображение X в Y, кратко записывают в виде: $f : X- > Y$.

Таким образом, для того чтобы задать отображение f множества в множество Y, надо каждому элементу $x \in X$ поставить в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Если при этом элементу $\in$ сопоставлен элемент $y \in Y$, то y

называют **образом элемента** , а —**прообразом элемента** у при отображении f, что записывается в виде $f(x) = y$.

Из определения отображения f следует, что у каждого элемента x из есть только один *образ* в Y, однако для элемента y из Yможет быть несколько *прообразов*. Множество всех прообразов элемента y из Y называется его *полным прообразом* и обозначается через $f^{-1}(y)$. Таким образом, $f^{-1}(y) = x \in X | f(x) \in y$.

Если множества и Y числовые, то f называется **функцией**.

На первый взгляд может показаться, что всё вышеизложенное не имеет отношения к оценочной деятельности и не имеет практического применения в ней. Однако данное мнение является заблуждением. Оценщики очень часто сталкиваются с понятием *функции*. Например, замена исходных значений признака на его квадрат либо логарифм являются типичными примерами отображения множеств. Так, например в [1] утверждается, что использование логарифмов значений цен позволяет избежать систематического завышения результатов оценки. В таблицах 3, 4 показаны примеры отображения при которых f представляет собой операцию возведения числа в квадрат и операцию логарифмирования соответственно.

Таблица 3. Отображение множества при $f =^2$

x	f	y
-5	^{2}	25
-2	^{2}	4
-1	^{2}	1
0	^{2}	0
1	^{2}	1
2	^{2}	4
5	^{2}	25

Таблица 4. Отображение множества при $f = log$

x	f	y
1	log	0.000
2	log	0.693
3	log	1.099
5	log	1.609
8	log	2.079
13	log	2.565
21	log	3.045

4.3. Примеры последовательностей

Последовательностью называется отображение множества натуральных числе во множество вещественных чисел, т. е. $\mathbb{N} -> \mathbb{R}$. Наиболее простым и очевидным способом задания последовательности явным образом путём перечисления её членов, например $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$. Можно также использовать задание последовательности с помощью формул либо словесных описаний. Например, последовательность квадратов натуральных чисел можно задать с помощью формулы

$$x_n = x^2. \tag{126}$$

Последовательность десятичных знаков числа π может быть задана формулой

$$x_n = \frac{[10^{n-1}\pi]}{10^{n-1}} \tag{127}$$

В ряде случаев задание последовательности может быть выполнено графически. Например для задания последовательности $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$ можно использовать функцию

$$x_n = \sin\frac{\pi n}{2}. \tag{128}$$

Графически такое отображение показано на рисунке 21, на котором заглавными латинскими буквами показаны элементы последовательности.

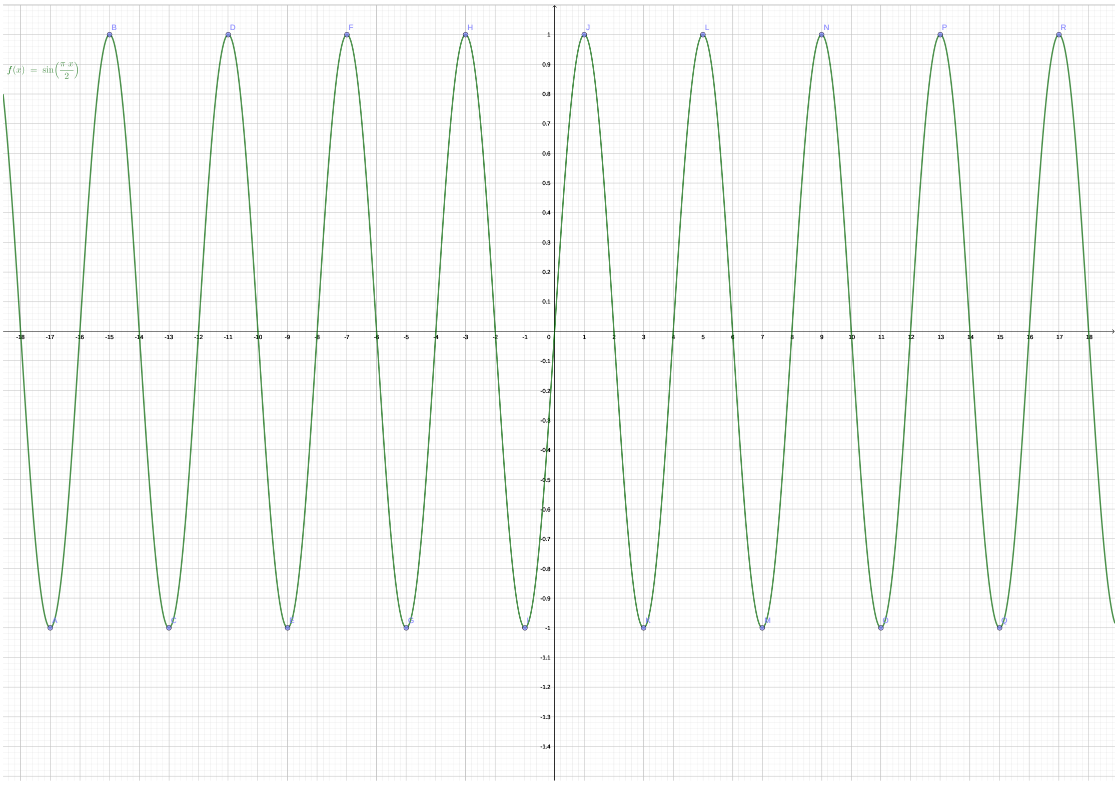

Рис. 21. Графическое отображение последовательности $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$)

4.4. Пределы последовательностей

Рассмотрим для примера уже знакомую ранее последовательность $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$, а затем другую: $1, 1.5, 1{,}41666, 1.41421566862\ldots, 1.4142135623\ldots$, задаваемую рекуррентно с помощью формулы

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \frac{2}{y_n}), y_1 = 1. \tag{129}$$

Как видно, данные последовательности имеют принципиальное отличие: члены первой последовательности чередуются, второй — приближаются к некоторому числу (квадратному корню из числа 2). Предел последовательности имеет форму записи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l. \tag{130}$$

Данную запись можно описать как:

- l есть предел последовательности x_n либо
- последовательность x_n сходится к n, либо
- последовательность x_n стремится к n.

Из этого следует, что для любого интервала, содержащего точку l, вне его находится лишь конечное число последовательности. При этом неважно, является данный интервал произвольным либо симметричным относительно этой точки, поскольку любой интервал может быть уменьшен либо увеличен для симметричного. Таким образом во всех случаях можно вести речь о симметричных интервалах. Из этого следует:

- при любом $\epsilon > 0$ вне интервала $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ находится лишь конечное число членов последовательности;
- для любого $\epsilon > 0$ найдётся такой номер N, что $|x_n - l| < \epsilon$, при всех $n \geq N$;
- с помощью кванторов, описанных в 1.1, два вышеуказанных утверждения можно записать кратко: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad N \qquad \forall n \geq N \qquad |x_n - l| < \epsilon$.

Рассмотрим пример. Возьмём последовательность

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \tag{131}$$

и покажем, что она стремится к 1. Для этого оценим модуль разности и найти такое n, при котором он будет меньше 1.

$$|\frac{n^2}{n^2+1} - 1| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} < \epsilon \quad \text{при } n \geq [\epsilon^{(-\frac{1}{2})} + 1]. \tag{132}$$

5. Логарифмы

6. Функции и непрерывность

7. Производные

8. Интегралы

Источники информации

[1] М. Б. Ласкин и С. В. Пупенцова. «Логарифмическоераспределение цен на объекты недвижимости». В: *Имущественные отношения в Российской Федерации* 5(15) (2014), с. 52—59.

[2] Computer Science Center. *Введение в математический анализ.* 2021. URL: https://stepik.org/course/95/info (дата обр. 22.10.2021).

[3] studopedia.ru. *Основные определения: множество.* URL: https://studopedia.ru/11_34535_osnovnie-opredeleniya.html (дата обр. 22.10.2021).

[4] Wikipedia. *Кантор, Георг.* URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D1%80,_%D0%93%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B3 (дата обр. 23.10.2021).

[5] Wikipedia. *Число.* URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE (дата обр. 28.10.2021).