Очень краткое введение в математический анализ для оценщиков

К. А. Мурашев

14 ноября 2021 г.

Какую бы работу не выполнял оценщик, во всех случаях он имеет дело с информацией и данными. Часто эти данные представляют собой числа либо могут быть формализованы иным образом. В любом случае требуется алгоритмическая обработка входных данных и преобразование их в информацию, а в некоторых случаях — в знания. Целью данного фрагмента является формирование общих представлений об основных понятиях и методах математического анализа, необходимых современному оценщику. Материал построен таким образом, при котором существует возможность ссылаться на него при решении практически всех математических задач, возникающих у оценщиков, начиная со школьной программы 5-класса, заканчивая математическим анализом, в объёме преподаваемом на нематематических специальностях вузов. Специфические вопросы, касающиеся частотного подхода в математической статистике, байесовского подхода, а также математических методов, применяемых в машинном обучении, а также иных специфических методов, выходящих за рамки программы нематематических специальностей, рассмотрены в отдельных материалах. Автор постарался прибегать к минимальному числу формул и сложных определений, хотя это и не вполне получилось. Поскольку конечной целью всей работы является цифровизация оценочной деятельности, в тексте приводятся короткие листинги на языках R и Python, позволяющие реализовать то, о чём говорится в тексте.

Содержание

1. Некоторые особенности материала

1.1. Список обозначений

Все обозначения, используемые в материале, соответствуют общепринятым в математике. Далее приводится краткая шпаргалка [2].

$\mathbb{N}$ — множество **натуральных чисел**, т. е. таких чисел, которые получаются при счёте объектов: $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$. Наименьшее натуральное число — 1. Наибольшего натурального числа не существует. **Натуральный ряд** — это последовательность всех натуральных чисел. В натуральном ряду каждое число больше предыдущего на 1. Натуральный ряд бесконечен, наибольшего натурального числа в нём не существует.

$\mathbb{Z}$ — множество **целых чисел**, включающее в себя *натуральные числа*, все числа противоположные им по знаку, а также число ноль.

$\mathbb{Q}$ — множество **рациональных чисел**, т. е. дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. [

$\mathbb{I}$ — множество **иррациональных чисел**, т. е. , бесконечных непериодических дробей. Примерами являются $\sqrt{2}$, число $\pi \approx 3.15159$, число $e \approx 2.718281828459$ и т. д.

$\mathbb{R}$ — множество **вещественных (действительных) чисел**, содержащее в себе все *рациональные* и *иррациональные* числа.

$\in$ — оператор принадлежности. Запись $x \in \mathbb{Z}$ означает «х принадлежит к множеству *целых чисел*» либо «х является *целым числом*».

$x \in X : a$ — означает подмножество множества X, состоящее из элементов, удовлетворяющих условию a.

$A \bigcup B$ — объединение множеств A и B.

$A \bigcap B$ — пересечение множеств A и B.

$A \subset B$ — множество A является подмножеством множества B.

$A \backslash B$ — разность множеств A и B.

$A \triangle B$ — симметричная разность множеств A и B.

A' — Дополнение к множеству A.

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ — объединение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, n$.

$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ — пересечение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, n$.

Æ — пустое множество.

M_A — множество всех подмножеств множества A.

$[a,b]$ — **отрезок** между числами a и b т. е. множество вещественных чисел, лежащих между числами a и b, включая сами числа a и b. На математическом языке это можно записать как $[a,b] = x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$. При $a = b$ отрезок состоит из одной точки и называется *вырожденным отрезком.*

(a,b) — **интервал** между числами a и b т. е. множество вещественных чисел, лежащих строго между a и b, не включая их самих. На математическом языке это можно записать как $(a,b) = x \in \mathbb{R} : a < x < b$.

$[a,b), (a,b]$ — **полуинтервалы** между числами a и b: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

$[a,+\infty)$ — луч: $[a,+\infty)] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.

$\boldsymbol{(}a,+\infty\boldsymbol{)}$ — открытый луч: $(a,+\infty)] = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

$(-\infty,b]$ — луч: $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.

$(-\infty,b)$ — открытый луч: $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

Промежуток — *отрезок*, *интервал* либо *полуинтервал*.Промежуток любого из четырех типов обозначается $\langle a,b \rangle$. В рамках одного утверждения запись $\langle a,b \rangle$ всегда обозначает один и тот же подвид промежутка.

$\langle a,b \rangle$ — любой из двух промежутков (a,b) и $[a,b)$.

$\forall$ — квантор всеобщности, используется для сокращённой записи вместо понятий «каждый», «любой», или «для всякого», «для любого» и т. п.

$\exists$ — квантор существования, используется для сокращённой записи вместо слов «найдётся», «существует» и т. п.

$\sum\limits_{k=n}^{n} a_k$ — сумма чисел a_k по k от m до n, т. е. $a_m + a_{m+1} + a_{m+1} + \ldots + a_n$.

$f : X \to Y$ — функция, заданная на множестве X, множество значений которой лежит в Y (но необязательно с ним совпадает).

: — в формулах означает выражение «при условии», например $x^3 > 0 : x > 0$.

$\equiv$ — означает тождественность.

$\Rightarrow$ — знак импликации, следования. Означает «влечёт», «отсюда следует», «следовательно».

$\Leftrightarrow$ — знак равносильности, означает «если и только если» либо «равносильно».

$\wedge$ — логическое «и» (конъюнкция).

$\vee$ — логическое «или» (дизъюнкция).

$\neg$ — логическое «нет» (отрицание).

$\stackrel{def}{=}$ — определение.

ρ — расстояние между двумя точками.

$\vdots$ — означает делимость.

2. Основные понятия

2.1. Виды чисел

Натуральными числами называются такие числа, которые используются для подсчёта количества объектов. Например, количество входов торгово-развлекательного комплекса выражается натуральным числом. Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$ (понятие множества рассмотрено в 3.1). Примерами *натуральных чисел* являются: $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$. Наименьшее натуральное число — 1. Наибольшего натурального числа не существует. **Натуральный ряд** — это последовательность всех *натуральных чисел*. В натуральном ряду каждое число больше предыдущего на 1. *Натуральный ряд* бесконечен, наибольшего натурального числа в нём не существует. 0 не является *натуральным числом.*

Целыми числами являются все *натуральные числа*, все числа противоположные им по знаку, а также число ноль. Множество целых чисел обозначается символом $\mathbb{Z}$.

Рациональными числами являются дроби вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Множество *рациональных чисел* обозначается символом $\mathbb{Q}$.

Иррациональными числами называют бесконечные непериодические дроби, например $\sqrt{2}$, число $\pi \approx 3.15159$, число $e \approx 2.718281828459$ и т. д. Множество иррациональных чисел обозначается символом $\mathbb{I}$.

Вещественными (действительными) числами называют множество чисел включающее в себя множества *рациональных* и *иррациональных чисел*. Множество вещественных чисел обозначается символом $\mathbb{R}$.

Комплексными числами) числами называют расширение множества вещественных чисел. Такие числа могут быть записаны в виде $z = x + iy$, где i — мнимая единица, для которой выполняется равенство $i^2 = -1$. Множество *комплексных чисел* обозначается символом $\mathbb{C}$.

Помимо вышеперечисленных видов чисел также существуют **кватернионы** ($\mathbb{I}$), **октонионы** ($\mathbb{O}$), **седенионы** ($\mathbb{S}$), **адели** и **идели**. Однако их рассмотрение в данном материале является избыточным.

Общая иерархия чисел может быть записана выражением

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O} \subset \mathbb{S}. \tag{1}$$

На естественном языке это звучит как «все *натуральные числа* являются *целыми числами*, но не все *целые* — *натуральными*, все *целые числе* являются *рациональными*, но не все *рациональные* — *целыми* и т. д.». На математическом языке это звучит как «*множество натуральных чисел* является *подмножеством целых чисел*, *множество целых* — *подмножеством рациональных* и т. д.». Данная иерархия показана графически на рисунке 1. Как правило, в практике оценки стоимости работа осуществляется с *вещественными числами* и их подмножествами.

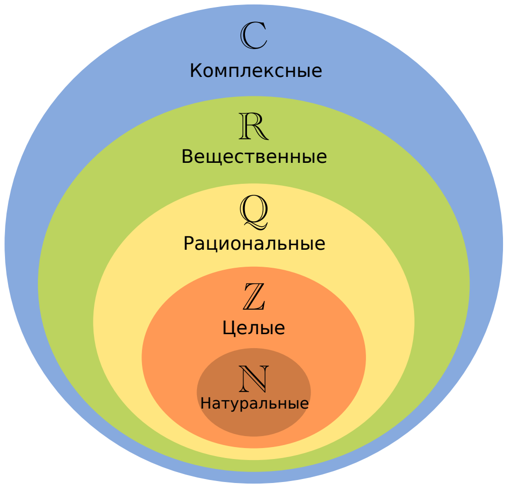

Рис. 1. Иерархия типов чисел [5]

2.2. Элементарные формулы, уравнения и пропорции

2.2.1. Пропорции

Две величины *прямо пропорциональны* друг другу, если изменение значения одной из них в m раз влечёт за собой такое же изменение другой.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{x} \\ xa &= bc \\ x &= \frac{bc}{a} \end{aligned} \tag{2}$$

Две величины *обратно пропорциональны* друг другу, если увеличение (уменьшение) значения одной из них в m раз влечёт за собой уменьшение (увеличение) значения другой также в m раз.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{x} \\ xb &= ac \\ x &= \frac{ac}{b} \end{aligned} \tag{3}$$

Пример 2.1. Для отопления здания строительным объёмом 2000 куб. м необходима отопительная система мощностью 68 кВт. Какова потребная мощность отопительной системы для здания строительным объёмом 2000 куб. м?

$$\begin{aligned} \frac{68}{2000} &= \frac{x}{2500} \\ 2000x &= 68 \times 2500 \\ 2000x &= 170000 \\ x &= \frac{170000}{2000} \\ x &= 85 \end{aligned}$$

Ответ: для здания строительным объёмом 2500 куб. м необходима система мощностью 85 кВт.

Пример 2.2. Резец токарного станка утрачивает свои свойства и нуждается в обслуживании после 30 дней эксплуатации при ежедневном односменном использовании (1 смена — 8 часов). Через сколько дней потребуется обслуживание резца при трёхсменной работе?

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{30}{x} \\ 3x &= 30 \\ x &= \frac{30}{3} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Ответ: при трёхсменной работе обслуживание резца потребуется через 10 дней.

2.2.2. Трансформация бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную

В ряде случаев возникает потребность трансформации бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную. Для выполнения этой операции следует использовать формулу

$$a.b(c) = a\frac{<b><c> - <b>}{x[9]y[0]}, \tag{4}$$

где a — целая часть десятичной дроби,

b — не повторяющая часть десятичной дроби,

c — периодическая часть десятичной дроби,

x — количество цифр 9 в знаменателе, зависит от количества чисел в периодической части c,

x — количество цифр 0 в знаменателе, зависит от количества чисел в не повторяющейся части b.

В случае отсутствия не повторяющейся части используется формула

$$a.(c) = a\frac{c}{x[9]} \tag{5}$$

Пример 2.3. Вычислим

$$2.12(3) = 2\frac{123-12}{900} = 2\frac{111}{900} = 2\frac{37}{300}$$
$$2.(3) = 2\frac{3}{9} = 2\frac{1}{3}$$

2.2.3. Работа с многоэтажными дробями

С учётом повсеместного распространения компьютерных вычислений, нет никакой сложности вычисления многоэтажных дробей. Однако при работе с аналитическими методами часто возникает необходимость приведения выражения к табличному (стандартному кем-то уже исследованному) виду. Например, такая потребность возникает при вычислении производных, дифференциалов и интегралов, многие из которых имеют стандартные решения. Умение видеть в существующем выражении другое, имеющее стандартное решение, и преобразовать первое ко второму позволяет экономить много времени. Таким образом, хотя типичный оценщик возможно никогда не будет вычислять дифференциалы, оценщику, занимающемуся разработкой экспертных систем, подобное знание не будет лишним. В общем виде работа с многоэтажными дробями выглядит следующим образом

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \tag{6}$$

2.2.4. Свойства числовых неравенств

Первым свойством неравенств является сохранение знака неравенства при сложении его обеих частей с константой.

$$\begin{gathered} a > b \\ a + k > b + k : \ \forall k \end{gathered} \tag{7}$$

Вторым свойством неравенств является сохранение знака неравенства при умножении либо делении его обеих частей на положительную константу.

$$\begin{gathered} a > b \\ ak > bk : \ k > 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Третьим свойством неравенств является изменение знака неравенства на противоположный при умножении либо делении его обеих частей на отрицательную константу.

$$\begin{gathered} a > b \\ ak < bk : \ k < 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Четвёртым свойством неравенств является возможность почленного сложения неравенств, имеющих одинаковый знак. При этом знак неравенств сохраняется.

$$\begin{aligned} a &> b \\ c &> d \\ a + c &> b + d \end{aligned} \tag{10}$$

Пятым свойством неравенств является возможность почленного вычитания неравенств, имеющих одинаковый знак. При этом сохраняется знак первого неравенства.

$$\begin{aligned} a &> b \\ c &< d \\ a - c &> b - d \end{aligned} \tag{11}$$

Шестым свойством неравенств является возможность их почленного умножения при одинаковом знаке с его сохранением в том случае, когда все члены неравенств являются положительными числами.

$$\begin{gathered} a > b \\ c > d \\ ac > bd : \ a,b,c,d > 0 \end{gathered} \tag{12}$$

Седьмое свойство неравенств заключается в сохранении знака неравенства при сложении его членов с одной и той же константой.

$$\begin{gathered} a > b \\ b > c \Rightarrow \\ a > c \end{gathered} \tag{13}$$

Восьмое свойство неравенств заключается в сохранении знака неравенства при возведении его членов в степень с одинаковым показателем, при условии положительного значения членов.

$$\begin{aligned} a > b \Rightarrow \\ a^n > b^n : \ a{,}b > 0 \end{aligned} \tag{14}$$

2.2.5. Системы уравнений с двумя переменными

В общем виде такие уравнения задаются выражением

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Решением системы таких уравнений является нахождение x и y, удовлетворяющих каждому из условий.

Корень уравнения — такое значение переменной, при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство. **Корень уравнения** с одной переменной также называют решением уравнения.

Существует несколько методов решения уравнений с двумя переменными. В данном материале будут рассмотрены *метод подстановки* и *метод сложения*. В первом случае одна из неизвестных выражается через другую.

Пример 2.4. Дано:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

Выразим y через x из первого уравнения

$$\begin{aligned} y = 2x - 2 \Rightarrow 4x + 3(2x - 2) = 9 \\ 4x + 6x - 6 = 9 \\ 10x = 15 \\ x = 1.5 \Rightarrow 3 - y = 2 \\ y = 1 \\ \text{Ответ: x = 1.5, y = 1} \end{aligned}$$

Во втором случае на первом этапе одно из уравнений умножается на константу так, чтобы при почленном сложении на втором этапе одно из неизвестных уничтожилось. Умножение обоих уравнений на константы также допускается. При этом константой может быть любое положительное число.

Пример 2.5. Дано:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 2| \times 3 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ + \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$10x = 15$$

$$x = 1.5$$

$$3y = 9 - 6$$

$$y = 1$$

Ответ: x = 1.5, y = 1

2.2.6. Уравнения с двумя неизвестными

В общем виде уравнение с двумя неизвестными может быть записано следующим образом.

$$ax + by + c = 0 : \ a \vee b \neq 0 \tag{16}$$

Подобные уравнения имеют бесконечное число решений, которые могут быть представлены графически.

Пример 2.6. Дано:

$4x - 2y + 2 = 0$

Методом подстановки можно догадаться, что решением является x=1, y=3.

Однако решениями будут и x=0, y=1, x=-3, y=-2. и т. д.

Графическое решение показано на рисунке 2.

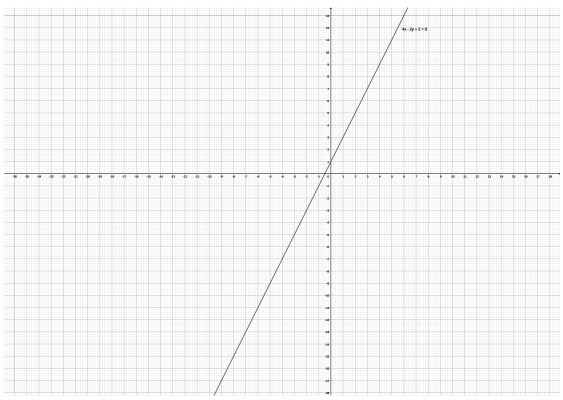

Рис. 2. Графическое решение уравнения с двумя неизвестными

2.2.7. Операции со степенями с натуральными и нулевым показателями

Свойствами степени с натуральным показателем являются:

$$\begin{aligned} a^n * a^m &= a^{n+m} \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\ a^{n^m} &= a^{nm} \\ a^n \times b^n &= (ab)^n \\ \frac{a^n}{b^n} &= \frac{(}{a}b)^n \\ a^0 &= 1 : a \neq 0 \\ 0^0 &= \neq \ \exists. \end{aligned} \tag{17}$$

2.2.8. Понятие одночлена и операции с ним

Одночлен — произведение переменных либо чисел, возведённое в степень с натуральным показателем.

Для работы с одночленами, как правило, их приводят в стандартный вид, при котором числовая часть выносится вперёд.

Пример 2.7. Дано:
$4x^3y^3z^2 \times -2x^2y^2z^{-1}$
Необходимо привести данный одночлен к стандартному виду.
Ответ: $-8x^5y^5z$

Подобные одночлены — одночлены, состоящие из одних и тех же переменных, возведённых в степень с одним и тем же показателем.

2.2.9. Понятие многочлена и операции с ним

Многочлен — сумма одночленов.

Для осуществления операций с многочленами, как правило, необходимо привести каждый из входящих в него одночленов в стандартный вид, а затем привести подобные слагаемые.

Существует ряд стандартных формул для упрощённого умножения многочленов.

Квадрат суммы двух выражений:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{18}$$

Квадрат разности двух выражений:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{19}$$

Разность квадратов двух выражений:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b). \tag{20}$$

Куб суммы двух выражений:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \tag{21}$$

Куб разности двух выражений:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \tag{22}$$

Сумма кубов двух выражений:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \tag{23}$$

где $(a^2 - ab + b^2)$ — неполный квадрат разности выражений. Разность кубов двух выражений:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \tag{24}$$

где $(a^2 - ab + b^2)$ — неполный квадрат суммы выражений.

Применение стандартных формул упрощает работу с аналитическими выражениями.

Пример 2.8. Земельный участок какой максимальной площади можно огородить, имея ограждение общей длиной 240 м? Какова длина сторон такого участка, если участок имеет прямоугольную форму?

Примем длину одной стороны за x, тогда другая сторона равна $120 - x$.

$S = (120 - x)(x) = 120x - x^2 = -(x^2 - 30x)$

Выделим полный квадрат выражения.

$-(\underbrace{x^2 - 2x60 + 60^2}_{\text{полный квадрат}} - 60^2) = 3600 - (x - 60)^2$

Проанализируем полученное выражение. Логично, что площадь будет максимальной (3600 кв. м) в том случае, если выражение в скобке будет равно нулю, что достигается при $x = 60$. Таким образом, максимально возможная площадь составляет 3600 кв. м при всех сторонах равных 60 м, т. е. тогда, когда участок будет иметь форму квадрата, что соответствует априорным знаниям.

Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения других многочленов.

2.2.10. Тождество

Тождество — равенство, являющееся верным при всех допустимых значения переменных.

Примерами тождеств являются формулы сокращённого умножения (18–24).

2.2.11. Алгебраические дроби

Алгебраической дробью называется выражение вида

$$\frac{P}{Q}: \; Q \neq 0. \tag{25}$$

Примерами алгебраических дробей являются, например выражения $\frac{x^2+y}{x}$, $\frac{x+2}{x-2}$, $\frac{5}{11}$ и т. д.

Основным свойством *алгебраических дробей* является то, что при умножении их числителя и знаменателя на один и тот же многочлен, значение алгебраической дроби не меняется при условии ненулевого значения такого многочлена.

Из этого свойства следует возможность сокращения числителя и знаменателя на общий множитель.

Для сложения и вычитания алгебраических дробей их следует привести к общему знаменателю по обычным правилам.

Пример 2.9.
$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} = \frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)} + \frac{y(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x(x-y)+y(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \\ = \frac{x^2-xy+xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

Умножение и деление алгебраических дробей осуществляется согласно общим правилам осуществления таких операций с дробями.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{26}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \tag{27}$$

Возведение алгебраической дроби в степень осуществляется отдельно для числителя и знаменателя.

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{28}$$

2.2.12. Рациональные уравнения

Рациональные уравнения — это выражения вида

$$p(x) = 0 \tag{29}$$

2.2.13. Степень с целым отрицательным показателем

Вычисление степени с целым отрицательным показателем осуществляется по формуле

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{30}$$

2.2.14. Функция $y = \sqrt{x}$, её свойства и график

По свойству квадрата областью определения данной функции являются все неотрицательные числа, т. е. Областью её значений также являются все неотрицательные числа.

$$y = \sqrt{x} D(y) = [0, +\infty) E(y) = [0, +\infty) \tag{31}$$

Данная функция является возрастающей, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. $\begin{matrix} x_2 > x_1 \\ y_2 > y_1 \end{matrix}$ График функции $\sqrt{x}$ показан на рисунке 3.

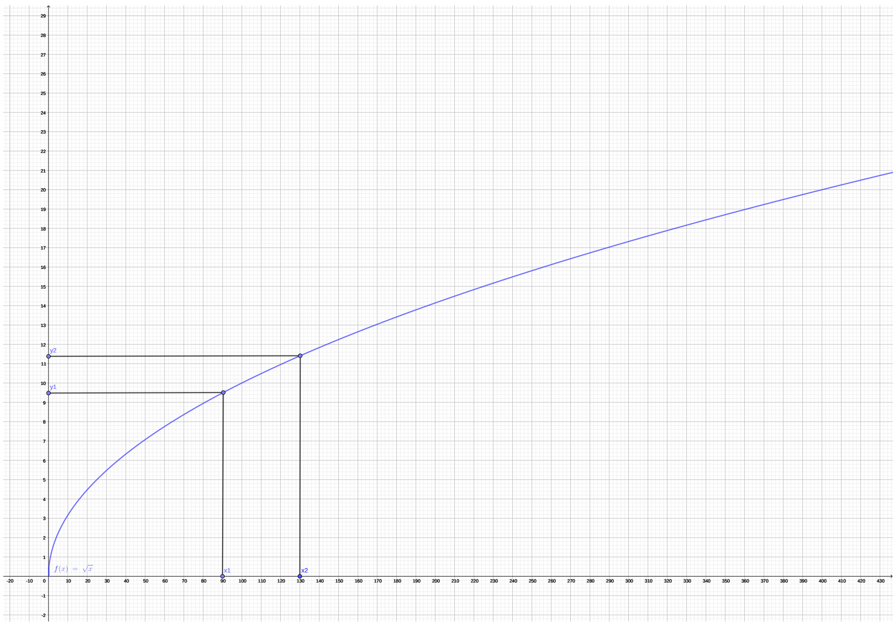

Рис. 3. Функция $\sqrt{x}$

Первое свойство квадратного корня:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} : \ a,b \geq 0. \tag{32}$$

Из этого также следует что

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} : \ a,b \geq 0. \tag{33}$$

2.2.15. Модуль действительного числа

Общее выражения для модуля числа x:

$$|x| = \begin{cases} x : \ x & \geq 0 \\ -x : \ x & \leq 0. \end{cases} \tag{34}$$

Свойствами модуля являются:

$$
\begin{gathered}
|a| \geq 0 \\
|ab| = |a| \times |b| \\
|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \\
|a| = |-a| \\
|a|^2 = a^2 \\
|a+b| \leq |a| + |b| \\
|a| \geq a
\end{gathered}
\tag{35}
$$

Пример графика функции, содержащей модуль, приведён на рисунке 4.

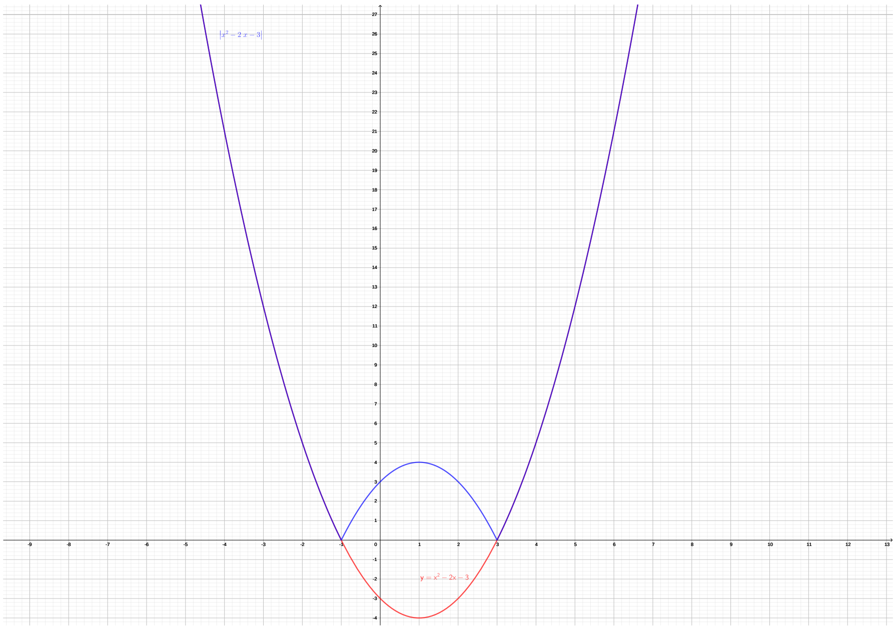

Рис. 4. График функции, содержащей модуль, и аналогичной функции без модуля.

2.2.16. Квадратные уравнения

2.2.16.1. Основные понятия Квадратное уравнение — это уравнение следующего вида:

$$ax^2 + bx + c = 0 : \; a \neq 0, \tag{36}$$

где x — неизвестное,
a — старший коэффициент,
b — средний коэффициент,
c — свободный член.

Уравнение, в которой $a = 1$, называется *приведённым*. Уравнения, в которых b либо c равны нуля называются *неполными квадратными уравнениями*. Решением квадратного уравнения является нахождение такого значения (значений) x, при котором (которых) выполняется исходное равенство. Такие значения x называются *корнями* квадратного уравнения.

2.2.16.2. Формула корней квадратного уравнения Для решения квадратного уравнения чаще всего используют *формулу дискриминанта*:

$$D = b^2 - 4ac \tag{37}$$

В зависимости от значения дискриминанта возможны следующие варианты:

$$\begin{aligned} &D > 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ — 2 вещественных корня} \\ &D = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ — 1 вещественный корень} \\ &D < 0 \Rightarrow \text{ — нет вещественных корней.} \end{aligned} \tag{38}$$

В последнем случае можно говорить о том, что существуют два комплексных корня. Также выражение можно переписать, выразив корень из отрицательного числа в виде произведения корня с мнимой единицей.

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} \tag{39}$$

Однако в контексте оценки стоимости можно говорить о том, уравнения с $D < 0$ не имеют корней.

2.2.16.3. Теорема Вийета В случае *приведённого квадратного* уравнения, т. е. такого, в котором *старший коэффициент* равен единице, решение может быть осуществлено по упрощённой формуле без вычисления дискриминанта.

Теорема 2.10. *Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна среднему коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а их произведение — свободному члену.*

$$\begin{aligned} &x^2 + px + q = 0 \\ &\quad x_1 + x2 = -p \\ &\quad x_1 \times x_2 = q \end{aligned} \tag{40}$$

2.2.16.4. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители Разложение квадратного трехчлена на линейные множители осуществляется по формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{41}$$

2.2.17. Делимость чисел

Под делимостью в данной секции подразумевается делимость без остатка. Рассмотрим два натуральных числа a и b. В случае существования такого натурального числа q, умножение на которого b даёт a, можно говорить о делимости a на b.

$$a \vdots b : a = bq, \quad a,\ b,\ q \in \mathbb{N} \tag{42}$$

Свойства делимости:

$$\begin{gathered} a \vdots b,\ b \vdots c \Rightarrow a \vdots c \\ a \vdots b,\ c \vdots b \Rightarrow a + c \vdots b \\ a \vdots b,\ c \neg\vdots b \Rightarrow a + c \neg\vdots b \\ a \vdots b \Leftrightarrow ac \vdots\ bc \\ a \vdots b \Rightarrow ac \vdots b \\ \text{среди n последовательных чисел одно и только одно делится на n} \end{gathered} \tag{43}$$

Простыми числами называются числа, имеющие только два делителя — единицу и самих себя. Числа имеющие более двух делителей называются *составными*. Единица не является ни простым, ни составным числом.

Наименьшим общим кратным n чисел (НОК) является наименьшее число, которое делится без остатка на любое из них.

Наибольшим общим делителем n чисел (НОД) является наибольшее число, на которое любое из них делится без остатка.

$$HOK(a,b) \times HOD(a,b) = a \times b \tag{44}$$

2.2.18. Основная теорема арифметики натуральных чисел

Теорема 2.11. *Всякое число, большее 1, может быть разложено в произведение простых чисел, и это разложение единственно с точностью до порядка множителей.*

Иными словами любое натуральное число кроме 1 либо является простым, либо может быть разложено на простые множители единственным способом.

2.2.19. Уравнения высших степеней

Уравнениями высших степеней являются уравнения вида

$$P(x) = 0, \tag{45}$$

где P многочлен в степени больше 2.

Существует два метода решения таких уравнений:

- метод разложения на множители, при котором уравнение сводится к квадратному;
- метод замены, при котором на первом этапе члены уравнения заменяются на многочлены второй степени, после чего осуществляется решение нового уравнения с ними, на втором этапе полученные значения подстановка значений в новую систему уравнений.

2.2.20. Уравнения с модулями

Существует два метода решения таких уравнений:

- метод последовательного раскрытия модуля со знаками плюс и минус;
- метод вынесения части, не содержащей модуль, в другую часть уравнения.

2.2.21. Иррациональные уравнения

Иррациональными уравнениями называются уравнения, содержащие иррациональные значения корня в знаменателе. Решение таких уравнений сводится к домножению членов на множители так, чтобы иррациональная часть переместилась в числитель, а знаменатели сократились. Дальнейшее решение уравнения осуществляется по общим правилам.

2.2.22. Задачи с параметрами

Задачей с параметром является уравнение, в котором часть коэффициентов заменены буквенным выражением. В общем виде такие задачи можно выразить как:

$$f(x,a) = 0. \tag{46}$$

Особенностью данных задач является необходимость решения для каждого значения параметра.

Пример 2.12.

$$\begin{aligned} ax + 4 &= 12 \\ x &= \frac{8}{a} : \ a \neq 0 x \quad \in \ : \ a = 0 \end{aligned}$$

Пример 2.13.

$$\begin{aligned} (a^2 + 8a - 5)x &= a - 2 \\ (a+5)(a-2)x &= a - 2 \\ x &\in \mathbb{R} : \ a = 2 \\ x &\in \ : \ a = -5 \\ x &= \frac{a-2}{(a+5)(a-2)} : \ a \neq 2, \, a \neq -5 \end{aligned}$$

2.2.23. Линейные и квадратные неравенства

С точки зрения механики вычислений решение таких неравенств принципиально не отличается от решения уравнений. Особенность неравенств является то, что при их умножении на положительное число знак неравенства не меняется, на отрицательное — меняется на противоположный.

2.2.24. Стандартный вид числа

Стандартный вид числа — запись числа в виде

$$a = a_0 10^n, \tag{47}$$

где $0 \geq a < 10$, n-порядок числа.

В информатике вместо 10^n как правило используют E.

Пример 2.14.
$$\begin{aligned} 1703 &= 1.703 \times 10^3 &&= 1.703E3 \\ 398.098 &= 3.98098 \times 10^2 &&= 3.98098E2 \\ 0.572 &= 5.72 \times 10^-1 &&= 5.72E-1 \end{aligned}$$

2.3. Основы геометрии

2.3.1. Треугольники и их свойства

2.3.1.1. Признаки равенства треугольников Первым признаком равенства треугольников является признак по двум сторонам и углу между ними.

Теорема 2.15. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Вторым признаком равенства треугольников является признак по двум углам и стороне между ними.

Теорема 2.16. *Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Вторым признаком равенства треугольников является признак по трём сторонам.

Теорема 2.17. *Если все стороны треугольника соответственно равны сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

2.3.1.2. Замечательные прямые и точки треугольника В данном материале будут рассмотрены простейшие замечательные прямые:

- медиана;
- биссектриса;
- высота;
- прямая Эйлера,

а также простейшие замечательные точки:

- центроид;
- инцентр;
- ортоцентр.

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Иногда *медианой* называют также прямую, содержащую этот отрезок. Точка пересечения медианы со стороной треугольника называется **основанием медианы**.

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **центроидом** либо центром тяжести треугольника, и делятся этой точкой на две части в отношении 2:1, считая от вершины.

На рисунке 5 медианы выделены синим цветом, а центроидом является точка H.

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Иногда *медианой* называют также прямую, содержащую этот отрезок. Точка пересечения медианы со стороной треугольника называется **основанием медианы**.

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **центроидом** либо центром тяжести треугольника, и делятся этой точкой на две части в отношении 2:1, считая от вершины.

На рисунке 5 *медианы треугольника* выделены синим цветом, а точка H является его *центроидом.*

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла, проведённый от вершины угла до её пересечения с противолежащей стороной. Точка пересечения биссектрисы угла треугольника с его стороной, не являющейся стороной этого угла, называется **основанием биссектрисы**.

Все три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, называемом **инцентр** и являющейся центром вписанной в этот треугольник окружности.

На рисунке 5 *биссектрисы* выделены зелёным цветом, а точка J является *инцентром.*

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону (точнее, на прямую, содержащую противоположную сторону).

В зависимости от типа треугольника высота может содержаться внутри треугольника (для остроугольного треугольника), совпадать с его стороной (являться катетом прямоугольного треугольника) или проходить вне треугольника у тупоугольного треугольника. Все 3 высоты треугольника пересекаются в 1 точке, называемой **ортоцентром**.

На рисунке 5 *высоты* (и их продолжения) выделены фиолетовым цветом, а точка M является *ортоцентром*.

Пря́мая Эйлера — прямая, проходящая через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника.

На рисунке 5 *прямая Эйлера* выделена оранжевым цветом.

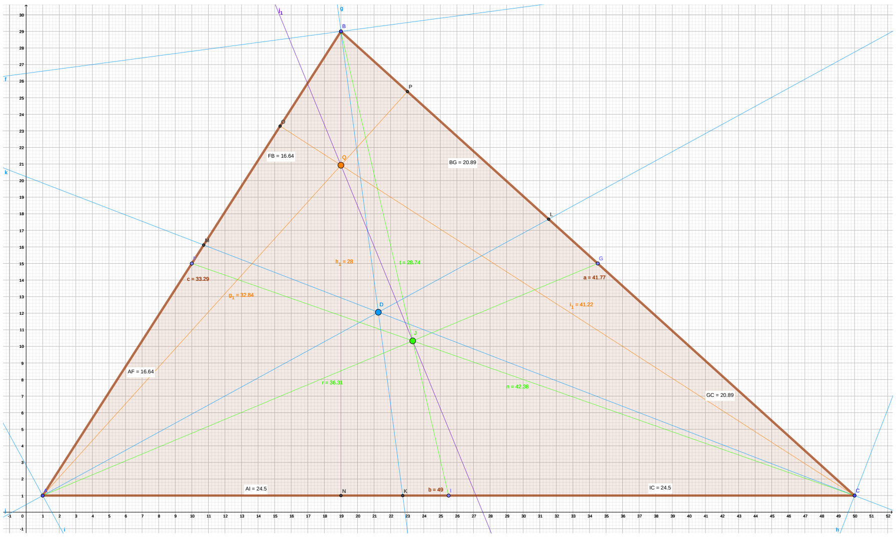

Рис. 5. Основные замечательные прямые и точки треугольника

2.3.1.3. Свойства треугольника

1) Сумма углов любого треугольника равна 180 °.

2) В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30 °, равен половине гипотенузы.

2.3.1.4. Площадь треугольника

Площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah, \tag{48}$$

где a — длина основания, h — длина высоты, опущенной на основание. Площадь прямоугольного треугольника также равна

$$S = \frac{ab}{2}, \tag{49}$$

где a, b — длины катетов. Формула 48 имеет следствие: *площади треугольников, имеющих равные высоты, относятся друг к другу также как относятся соответствующие основания этих треугольников.* Из этого следствия вытекает ещё одно: площади треугольников относятся друг к другу также как произведение их сторон, имеющих равный общий соответственный угол.

2.3.1.5. Теорема Пифагора

Теорема 2.18. *В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Гипотенузой является сторона, лежащая против прямого угла.*

В настоящее время известно свыше двухсот доказательств данной теоремы, являющейся, пожалуй, самой известной теоремой в математике.

2.3.1.6. Теорема обратная теореме Пифагора

Теорема 2.19. *Если в треугольнике квадрат одной из его сторон равен сумме квадратов других сторон, такой треугольник является прямоугольным. Если квадрат одной из сторон больше суммы квадратов других сторон, угол, лежащий против первой стороны, является тупым. Если квадрат одной из сторон меньше суммы квадратов других сторон, угол, лежащий против первой стороны, является острым.*

2.3.1.7. Формула Герона Данная формула позволяет находить площадь треугольника по длине его сторон и имеет вид:

$$S = \sqrt{p(p-1)(p-b)(p-c)}, \tag{50}$$

где, a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр, определяемый по формуле:

$$p = \frac{a+b+c}{2} \tag{51}$$

2.3.2. Многоугольники

2.3.2.1. Общие сведения Рассмотрим рисунок 6. На нём изображена фигура, состоящая из последовательных отрезков (segment) f, g, h, i, j. Соседние отрезки, например f и g, g и h, i и g, называются *смежными*. Если отрезки f, g, h, i, j не лежат на одной прямой, то образуемая ими фигура называется *ломаной*, сами отрезки являются её *звеньями*, а точки A, B, C, D, E, F — её *вершинами*. Длиной *ломаной* является сумма длин образующих её отрезков.

В случае, когда крайние точки *ломаной* совпадают, такую *ломаную* называют *замкнутой*. В случае, когда несмежные отрезки замкнутой ломаной не имеют общих точек, образуемая ими фигура называется многоугольником (polygon), см. рисунок 7. Многоугольник, имеющий n вершин, называется n-угольником. Примером многоугольника, является, в частности, треугольник, рассмотренный ранее в 2.3.1. Число сторон многоугольника равно числу его вершин. Две вершины многоугольника, лежащие на одной стороне называются соседними. Таким образом, соседними являются вершины A и B, B и C, F и A. Отрезок, соединяющий две вершины многоугольника, не являющиеся соседними, называется *диагональю*. На рисунке 7 диагональю является отрезок l. Любой многоугольник делит плоскость на внешнюю и внутреннюю части. Максимально возможное число диагоналей *выпуклого многоугольника* определяется по формуле

$$\frac{n(n-3)}{2}, \tag{52}$$

где n — число вершин многоугольника.

Выпуклым многоугольником называется многоугольник, лежащий в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через любую его сторону.

Пример выпуклого многоугольника показан на рисунке 7, на котором его стороны изображены чёрным цветом, диагональ — синим, прямые, проходящие через его стороны, — красным. Пример невыпуклого многоугольника показан на рисунке 8, на котором его внутренняя сторона закрашена красно-коричневым цветом.

В данном материале чаще всего речь будет идти о выпуклых многоугольниках.

Правильным многоугольником называется многоугольник, все стороны и углы которого равны.

Выпуклые многоугольники обладают рядом свойств:

1) опускание всех диагоналей из любой вершины приводит к образованию *n-2* треугольников;

2) вследствие этого и в силу правила равенства суммы углов треугольника 180 °можно сделать вывод о том, что сумма углов многоугольника равна $180^\circ \times (n-2)$;

3) сумма внешних (смежных) углов многоугольника равна 360°.

На рисунке 9 показаны внешние углы правильного многоугольника.

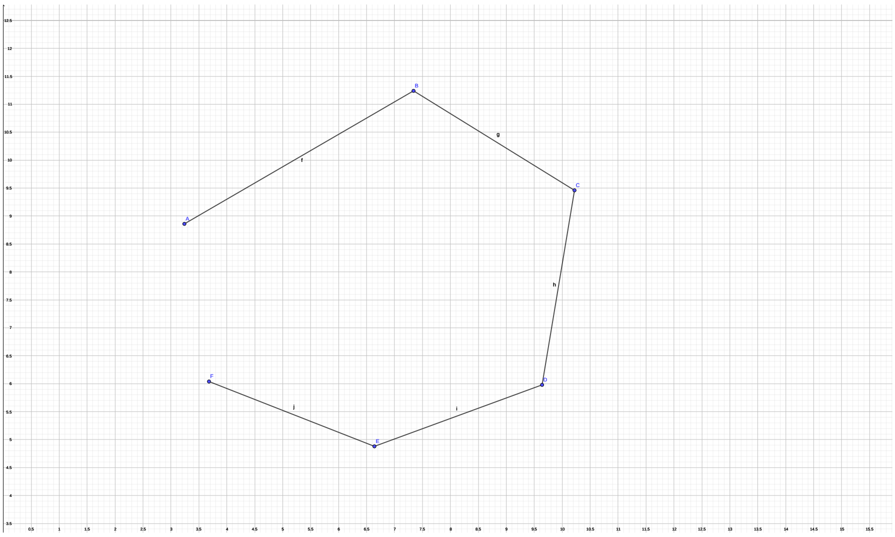

Рис. 6. Последовательные отрезки

2.3.2.2. Параллелограмм

Параллелограмм — выпуклый четырёхугольник, стороны которого попарно параллельны.

Основные свойства параллелограмма:

1) противоположные стороны равны между собой;

2) противоположные углы равны между собой;

3) точка пересечения диагоналей делит их пополам;

Все основные свойства параллелограмма показаны на рисунке 10.

2.3.2.3. Трапеция

Трапеция — выпуклый четырёхугольник, две стороны которого параллельны.

Параллельные стороны трапеции называются её *основаниями*, две другие — *боковыми сторонами*. Трапеция, боковые стороны которой равны между собой, называется *равнобедренной*. Углы при основании равнобедренной трапеции равны между собой. Диагонали равнобедренной трапеции равны между собой.

Трапеция, один из её углов равен 90°, называется *прямоугольной*. В прямоугольной трапеции два угла равны 90°.

Равнобедренная трапеция и её основные свойства показана на рисунке 11.

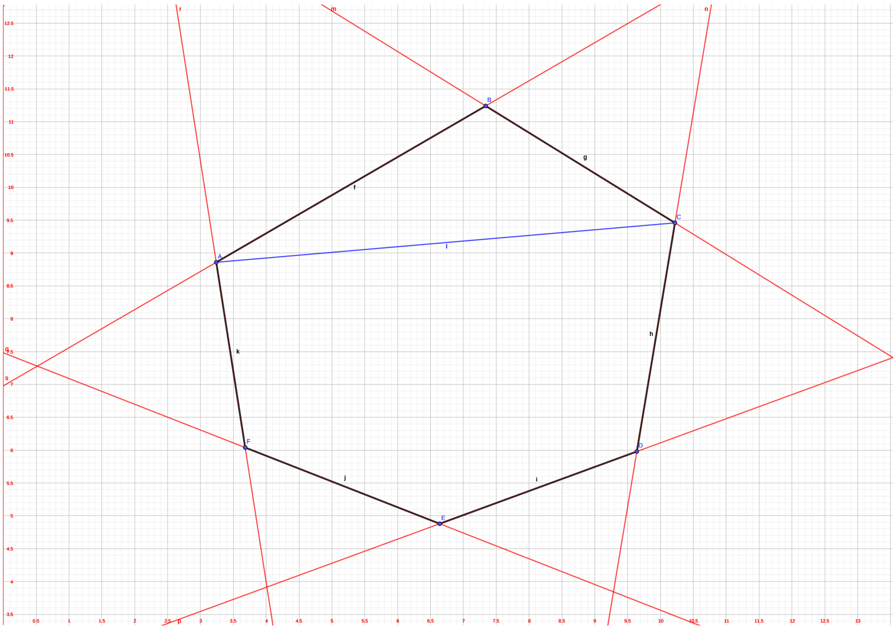

Рис. 7. Выпуклый многоугольник

2.3.2.4. Прямоугольник, ромб и квадрат

Прямоугольник — параллелограмм, все углы которого являются прямыми.

Из определения следует, что прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Диагонали прямоугольника равны между собой и делятся пополам в точке пересечения.

Ромб — параллелограмм, все стороны которого равны.

Из определения следует, что ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

Квадрат — прямоугольник, все стороны которого равны.

Из определения следует, что ромб обладает всеми свойствами прямоугольника и, как следствие — параллелограмма. Также квадрат обладает всеми свойствами ромба. Отличие квадрата от ромба в том, что во-первых углы ромба могут отличаться от 90 °, во-вторых, диагонали ромба могут не быть равны между собой. Иными словами, любой квадрат является ромбом, но не любой ромб является квадратом.

Прямоугольник, ромб и квадрат, а также их основные свойства показаны на рисунке 12.

2.3.2.5. Площадь многоугольника

Площадь многоугольника — величина части плоскости внутри многоугольника.

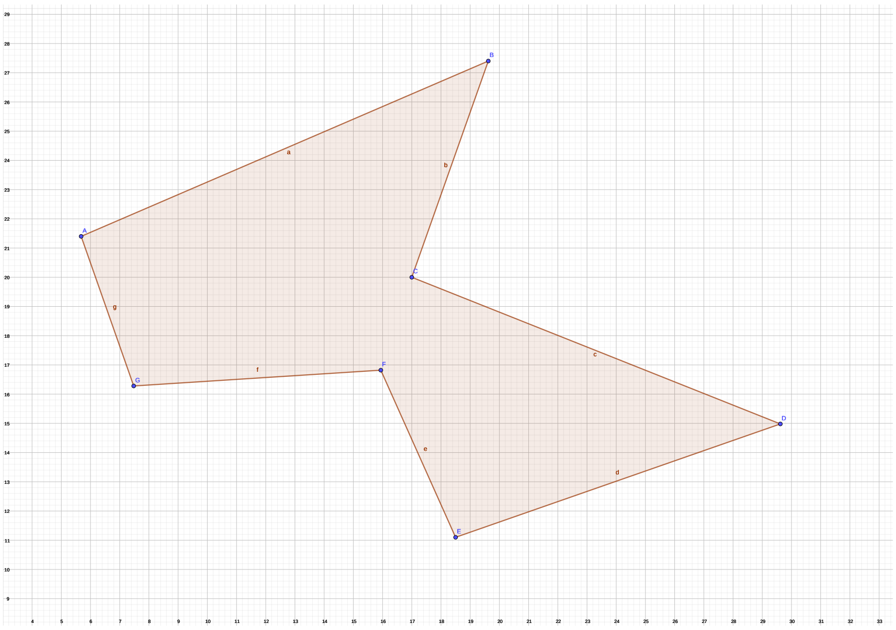

Рис. 8. Невыпуклый многоугольник

Свойства площади многоугольника.

1) Если фигуры равны, то и их площади равны.

2) Если фигура разбита на несколько частей, то сумма фигуры равна сумме частей.

Площадь квадрата:

$$S = a^2, \tag{53}$$

где a — длина стороны.

Площадь прямоугольника:

$$S = ab, \tag{54}$$

где a, b — длина не равных между собой сторон.

Площадь параллелограмма:

$$S = ah, \tag{55}$$

где a — длина стороны, h — длина высоты, опущенной на эту сторону. На рисунке 10 такой стороной является, например d, а высотой — отрезок h. Также возможно использование, например c и t.

Площадь трапеции:

$$S = \frac{ab}{2}h, \tag{56}$$

где, a, b — основания трапеции, h — её высота.

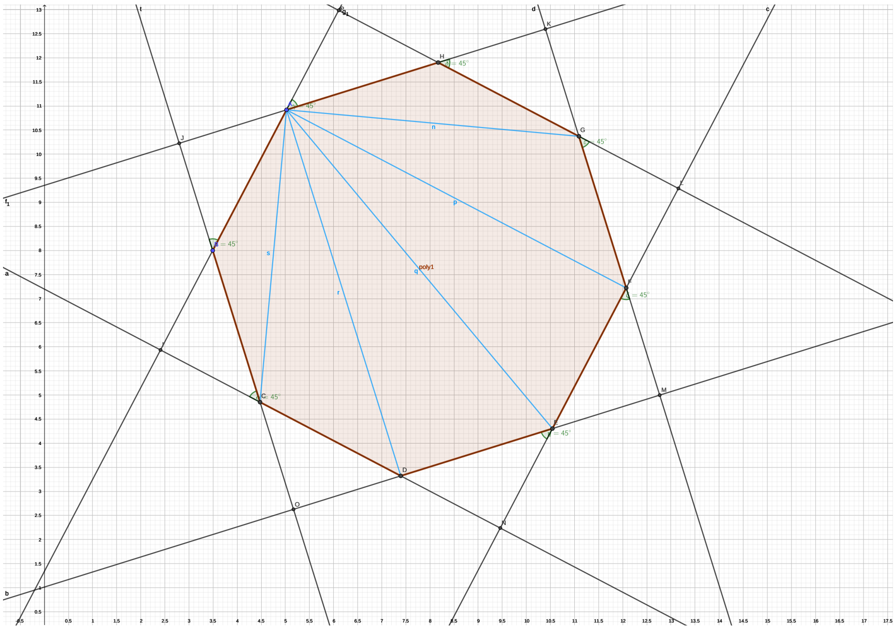

Рис. 9. Смежные углы многоугольника

2.3.3. Осевая симметрия

Осевая симметрия — симметрия относительно прямой.

Центральная симметрия — симметрия относительно точки.

2.4. Функции

2.4.1. Понятие функции

Функция является одним из самых важных понятий в математике.

Функция — инструкция (набор инструкций) в соответствии с которой каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

В общем виде функцию можно записать следующим образом.

$$y = f(x), \tag{57}$$

где y — зависимая переменная (значение функции),
x — независимая переменная (аргумент функции),
f — выражение.

Одним из ключевых понятий являются **область определения функции** и **область значения функци**и.

Область определения функции — все возможные значения независимой переменной, при которых существуют значения зависимой переменной.

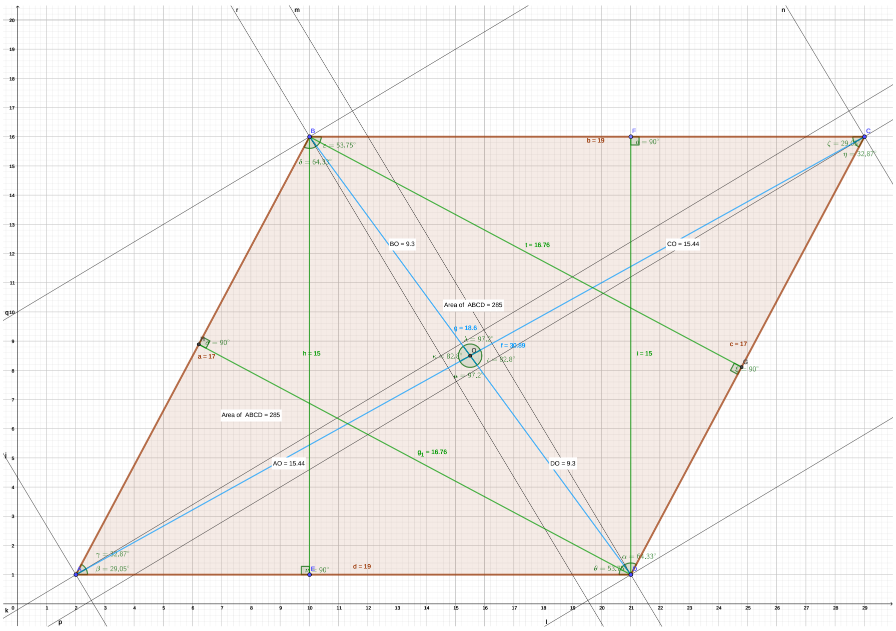

Рис. 10. Параллелограмм и его основные свойства

Область определения функции записывается следующим образом.

$$D(f) \tag{58}$$

Область значения функции — все возможные значения зависимой переменной.

Область значения функции записывается следующим образом.

$$E(y) \tag{59}$$

Функция является *возрастающей* на отрезке *[a, b]*, если при $x_1 < x_2 f(x_1) < f(x_2)$. Функция является *убывающей* на отрезке *[a, b]*, если при $x_1 < x_2 f(x_1) > f(x_2)$. Возрастающая либо убывающая функция называется *монотонной функцией*.

2.4.2. Линейная функция и её график, взаимное расположение графиков линейных функций

Общая формула линейной функции следует из 16 и представляет собой выражение

$$ax + by + c = 0 : b \neq 0. \tag{60}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} by &= -ax - c \\ y &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ k &= -\frac{a}{b}, m = -\frac{c}{b} \Rightarrow \\ y &= kx + m. \end{aligned} \tag{61}$$

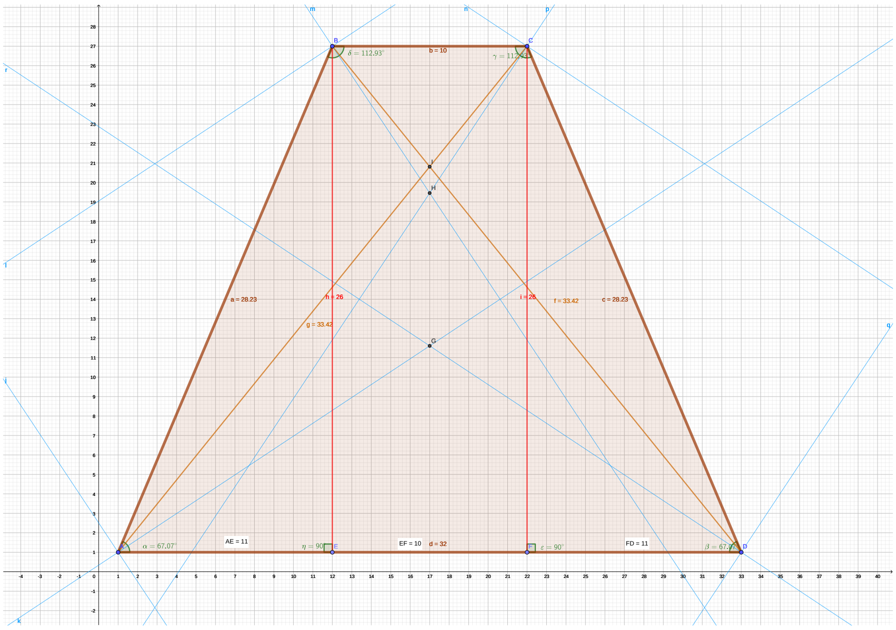

Рис. 11. Равнобедренная трапеция и её основные свойства

Последнее выражение $y = kx + m$ называется *линейной функцией*, в которой x — независимая переменная (аргумент), y — зависимая переменная (зачение функции). Графиком линейной функции является прямая.

Для определения взаимного расположения графиков двух линейных функций

$$y = k_1x + m_1$$
$$y = k_2x + m_2$$

следует использовать правила: в случае, когда $k_1 = k_2, m_1 \neq m_2$ — графики функций параллельны; в случае, когда $k_1 = k_2, m_1 = m_2$ — графики функций совпадают; в случае, когда $k_1 \neq k_2, m_1 \neq m_2$ — графики функций имеют пересечение, являющееся единственным.

Для поиска точки пересечения графиков можно использовать следующую простую логику: если выполняется условие пересечения графиков функций, следовательно существует такая единственная точка, в которой $y_1 = y_2$, следовательно $= k_1x+m_1 = k_2x + m_2$. Далее путём решения простого линейного уравнения можно найти x.

Пример 2.20. Дано:

$y_1 = 8x - 3$

$y_2 = 3x + 2$

Найти точку пересечения этих функций. Поскольку коэффициенты перед x_1, x_2 разные, следовательно графики функций имеют пересечение, а значит существует такая единственная точка в которой выполняется условие $y_1 = y_2$. Соответственно в этой точке $8x - 3 = 3x + 2$. Тогда $5x = 5$. Из этого следует, что $x = 1$. Подставив значение x в любую из функций получим $y = 5$.

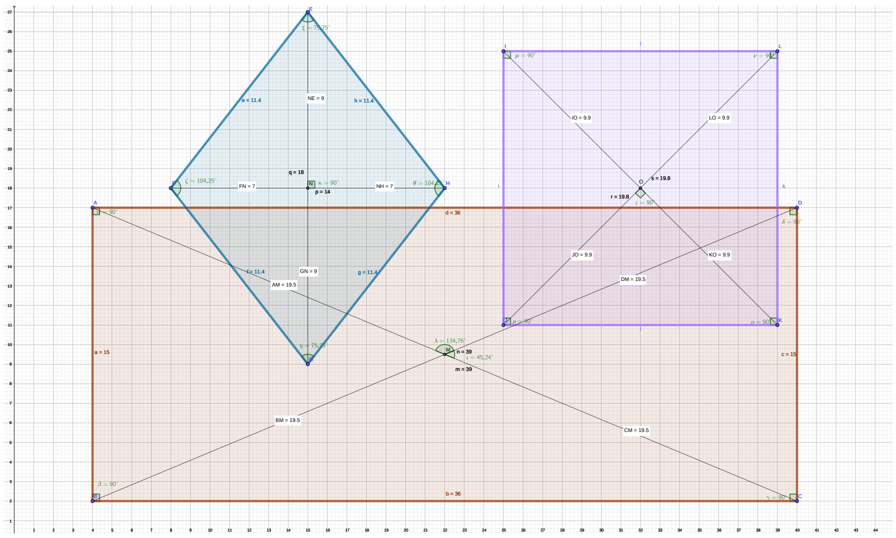

Рис. 12. Прямоугольник, ромб и квадрат и их основные свойства

Ответ: графики функций пересекаются в точке $(1,\ 5)$.

3. Последовательности

3.1. Понятие множества

Под *множеством* понимают совокупность, класс или собрание объектов безразлично какой природы. Согласно определению основоположника теории множеств Г. Кантора [4], множество — это собрание предметов одинаковых или различных между собой, мыслимое как единое целое. Собрание предметов рассматривается как один предмет. Не следует понимать множество как совокупность действительно существующих предметов, принадлежность предметов одному множества не требует от них сосуществования во времени и пространстве. В логике множество понимается как абстрактный объект, в котором каждый предмет рассматривается с точки зрения признаков, по которым данный предмет принадлежит данному множеству. В множестве предметы становятся неразличимыми друг от друга по признакам и их только по именам.

Объект, принадлежащий данному множеству, называется его **элементом**. Множество обозначается заглавными латинскими буквами $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\ldots$. Элементы, входящие в множество, обозначаются строчными латинскими буквами и заключаются в фигурные скобки: $\{a,b,c\}$.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**, а бесконечное число элементов — **бесконечным**.

Два множества называются **равными**, если содержат одинаковые элементы $(\mathrm{A} = 2,4,8 = \mathrm{B} = 2,2,4,8)$.

Элементами множества могут быть другие множества А = 2,3,4,5. При этом А = 2,3,4,5 ≠ В = 2,3,4,5.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым множеством**.

Пустое множество и само множество называются **несобственными** подмножествами множества , все остальные подмножества — **собственными**.

Множество называется **заданным**, если перечислены все входящие в него элементы либо определены признаки, по которым данный объект можно отнести к данному множеству:

$A = \{x, P(x)\}$ — x — элементы множества, $P(x)$ — свойства элементов данного множества.

$B = \{x, x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ — множество чётных чисел.

Если *множество* задано своим свойством, то нельзя заранее сказать, будут ли в нём элементы.

Если множество A содержит n элементов, количество его подмножеств составляет

$$|M_a| = 2^n, \tag{62}$$

где n — число элементов множества.

Пример 3.1. Дано:
А = $\{a, b, c, d, e, f, g\}$
В = $\{f, g, v, w, x, y, z\}$
С = $\{a, b\}$
Тогда:
$C \subset A$
$A \bigcup B = \{a, b, c, d, e, f, g, v, w, x, y, z\}$
$A \bigcap B = \{f, g\}$
$A \backslash B = \{a, b, c, d, e\}$
$B \backslash A = \{v, w, x, y, z\}$
$A \triangle B = \{a, b, c, d, e, v, w, x, y, z\}$

Пример 3.2. Дано: А = a, b, c, $n = 3$
Вычислить число подмножеств A.
$2^3 = 8$
$M_A = \{\text{Æ}, a, b, c, \{ab\}, \{ac\}, \{bc\}, \{a,b,c\}\}$
$M_A = 8$

Теорема 3.3. *Пустое множество является подмножеством любого множества.*

End.[3]

3.2. Понятие отображения множеств

Большую роль в математике имеет установление связей между двумя множествами X и Y, связанное с рассмотрением пар объектов, образованных из элементов первого множества и соответствующих им элементов второго множества. Особое значение при этом имеет *отображение множеств*.

Пусть X и Y — произвольные множества. Отображением множества X на множество Y называется $\forall$ правило f, по которому каждому элементу множества X сопоставляется вполне определённый (единственный) элемент множества Y. Тот факт, что f есть отображение X в Y, кратко записывают в виде: $f : X- > Y$.

Таким образом, для того чтобы задать отображение f множества в множество Y, надо каждому элементу $x \in X$ поставить в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Если при этом элементу $\in$ сопоставлен элемент $y \in Y$, то y называют **образом элемента** , а — **прообразом элемента** y при отображении f, что записывается в виде $f(x) = y$.

Из определения отображения f следует, что у каждого элемента x из есть только один *образ* в Y, однако для элемента y из Yможет быть несколько *прообразов*. Множество всех прообразов элемента y из Y называется его *полным прообразом* и обозначается через $f^{-1}(y)$. Таким образом, $f^{-1}(y) = x \in X|f(x) \in y$.

Если множества и Y числовые, то f называется **функцией**.

На первый взгляд может показаться, что всё вышеизложенное не имеет отношения к оценочной деятельности и не имеет практического применения в ней. Однако данное мнение является заблуждением. Оценщики очень часто сталкиваются с понятием *функции*. Например, замена исходных значений признака на его квадрат либо логарифм являются типичными примерами отображения множеств. Так, например в [1] утверждается, что использование логарифмов значений цен позволяет избежать систематического завышения результатов оценки. В таблицах 1, 2 показаны примеры отображения при которых f представляет собой операцию возведения числа в квадрат и операцию логарифмирования соответственно.

Таблица 1. Отображение множества при $f =^2$

x	f	y
-5	^{2}	25
-2	^{2}	4
-1	^{2}	1
0	^{2}	0
1	^{2}	1
2	^{2}	4
5	^{2}	25

Таблица 2. Отображение множества при $f = log$

x	f	y
1	log	0.000
2	log	0.693
3	log	1.099
5	log	1.609
8	log	2.079
13	log	2.565
21	log	3.045

3.3. Примеры последовательностей

Последовательностью называется отображение множества натуральных числе во множество вещественных чисел, т. е. $\mathbb{N}- > \mathbb{R}$. Наиболее простым и очевидным способом задания последовательности явным образом путём перечисления её членов, например $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$. Можно также использовать задание последовательности с помощью формул либо словесных описаний. Например, последовательность квадратов натуральных чисел можно задать с помощью формулы

$$x_n = x^2. \tag{63}$$

Последовательность десятичных знаков числа π может быть задана формулой

$$x_n = \frac{[10^{n-1}\pi]}{10^{n-1}} \tag{64}$$

В ряде случаев задание последовательности может быть выполнено графически. Например для задания последовательности $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$ можно использовать функцию

$$x_n = \sin\frac{\pi n}{2}. \tag{65}$$

Графически такое отображение показано на рисунке 13, на котором заглавными латинскими буквами показаны элементы последовательности.

3.4. Пределы последовательностей

Рассмотрим для примера уже знакомую ранее последовательность $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$, а затем другую: $1, 1.5, 1{,}41666, 1.41421566862\ldots, 1.4142135623\ldots$, задаваемую рекуррентно с помощью формулы

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \frac{2}{y_n}), y_1 = 1. \tag{66}$$

Как видно, данные последовательности имеют принципиальное отличие: члены первой последовательности чередуются, второй — приближаются к некоторому числу (квадратному корню из числа 2). Предел последовательности имеет форму записи

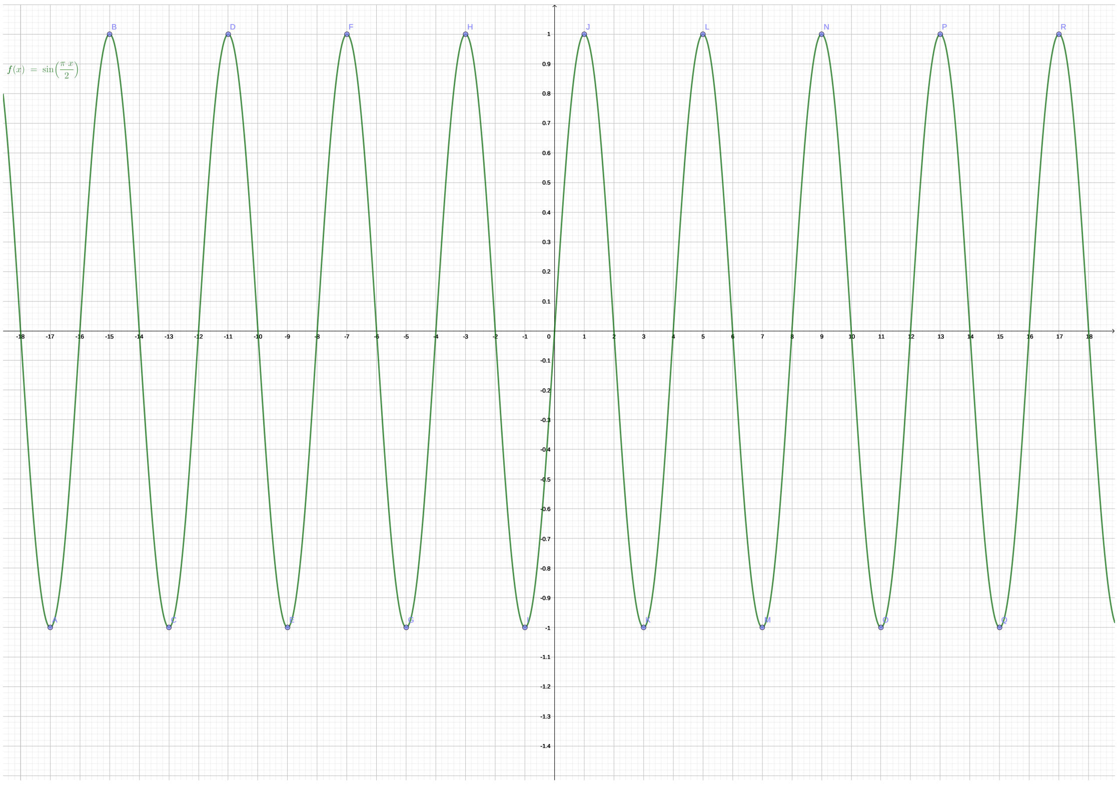

Рис. 13. Графическое отображение последовательности $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$)

$$\lim_{n \to \infty} x_n = l. \tag{67}$$

Данную запись можно описать как:

- l есть предел последовательности x_n либо
- последовательность x_n сходится к n, либо
- последовательность x_n стремится к n.

Из этого следует, что для любого интервала, содержащего точку l, вне его находится лишь конечное число последовательности. При этом неважно, является данный интервал произвольным либо симметричным относительно этой точки, поскольку любой интервал может быть уменьшен либо увеличен для симметричного. Таким образом во всех случаях можно вести речь о симметричных интервалах. Из этого следует:

- при любом $\epsilon > 0$ вне интервала $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ находится лишь конечное число членов последовательности;
- для любого $\epsilon > 0$ найдётся такой номер N, что $|x_n - l| < \epsilon$, при всех $n \geq N$;

- с помощью кванторов, описанных в 1.1, два вышеуказанных утверждения можно записать кратко: $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad N \qquad \forall n \geq N \qquad |x_n - l| < \epsilon$.

Рассмотрим пример. Возьмём последовательность

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \tag{68}$$

и покажем, что она стремится к 1. Для этого оценим модуль разности и найти такое n, при котором он будет меньше 1.

$$|\frac{n^2}{n^2+1} - 1| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} < \epsilon \quad \text{при } n \geq [\epsilon^{(-\frac{1}{2})} + 1]. \tag{69}$$

4. Логарифмы

5. Функции и непрерывность

6. Производные

7. Интегралы

Источники информации

[1] М. Б. Ласкин и С. В. Пупенцова. «Логарифмическоераспределение цен на объекты недвижимости». В: *Имущественные отношения в Российской Федерации* 5(15) (2014), с. 52—59.

[2] Computer Science Center. *Введение в математический анализ.* 2021. URL: `https://stepik.org/course/95/info` (дата обр. 22.10.2021).

[3] studopedia.ru. *Основные определения: множество.* URL: `https://studopedia.ru/11_34535_osnovnie-opredeleniya.html` (дата обр. 22.10.2021).

[4] Wikipedia. *Кантор, Георг.* URL: `https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%BE%D1%80,_%D0%93%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B3` (дата обр. 23.10.2021).

[5] Wikipedia. *Число.* URL: `https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE` (дата обр. 28.10.2021).