Энтропийное соотношение неопределенности

Кирилл Шохин

June 30, 2021

1 Введение

С 1929 года было известно соотношение Гейзенберга-Робинсона:

$$\langle \Delta A \rangle \langle \Delta B \rangle \geq \frac{1}{2} \langle \psi \mid c \mid \psi \rangle \tag{1}$$

Оно имеет ряд неудобств:

1. Если для некоммутирующих операторов A и B взять состояние $\mid \psi_{a_i} \rangle$, то мы получим точное значение:
$$A \mid \psi_{a_i} \rangle = a_i \mid \psi_{a_i} \rangle \tag{2}$$
а значит правая часть уравнения(1) равна 0.
2. Отсутсвует информация (количество бит) в явном виде.

В 1983 году Дэвид Дойч вывел энтропийное соотношение неопределенности, которое решило предыдущие проблемы.

2 Вывод неравенства

Пусть есть две наблюдаемые A и B, каждая из которых имеет свои собственные числа a_i и b_j. Вероятность конкретного исхода:

$$p(a_i) = |\langle \psi \mid \psi_{a_i} \rangle|^2 \tag{3}$$

Прирост информации при измерении:

$$I(a_i) = \log \frac{1}{p(a_i)} \tag{4}$$

Энтропия Шенона или математическое ожидание информации каждого исхода:

$$H(A) = -\sum_i p(a_i) \log p(a_i) \tag{5}$$

Тогда сумма энтропий двух наблюдаемых:

$$H(A) + H(B) = -\sum_i \sum_j p(a_i) p(b_j) \Big(\log p(a_i) + \log p(b_j) \Big) \tag{6}$$

Так как *log* выпуклая функция:

$$\log p(a_i) + \log p(b_j) \leq 2 \log \left(\frac{p(a_i) + p(b_j)}{2} \right) \tag{7}$$

Для собственных векторов справедливы выражения:

$$|\langle a_i | b_j \rangle|^2 \leq \frac{1}{2} \big(1 + |\langle a_i | b_j \rangle| \big) \tag{8}$$

$$|\langle\psi|a_i\rangle|^2 + |\langle\psi|b_j\rangle|^2 \leq 1 + |\langle a_i|b_j\rangle| \tag{9}$$

Тогда уравнение(6) можно переписать в виде:

$$H(A) + H(B) \geq -2\sum_i \sum_j |\langle\psi|a_i\rangle|^2 |\langle\psi|b_j\rangle|^2 \log \frac{1}{2}\Big(1 + |\langle a_i|b_j\rangle|\Big) \tag{10}$$

Мы хотим найти максимальное значение правой части неравенства(10), чтобы сумма энтропий была не меньше этой границы. Пусть

$$c = \max_{i,j} |\langle a_i|b_j\rangle|$$

Тогда

$$H(A) + H(B) \geq -2\log\left(\frac{1+c}{2}\right) \geq 0 \tag{11}$$

3 Итоги

То есть, если A и B коммутируют, то найдутся совпадающие значения a_i и b_j, а значит $c = 1$ и $\log 1 = 0$

Если A и B некоммутируют, то $c < 1$ и $H(A) + H(B) \geq const > 0$.

Это значит, что мы получили еще одно соотношение неопределенности, которое уже содержит в себе информацию и не зависит от входного квантового состояния.