

Содержание

1	Аксиоматика вещественных чисел	4
2	Индуктивные множества. Натуральные числа. Метод математической индукции	4
3	Неравенство Бернулли. Принцип Архимеда	4
4	Максимум и минимум. Супремум и инфимум	5
5	Теорема о целой части. Принцип Архимеда.	5
6	Плотность \mathbb{Q} в \mathbb{R} и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в \mathbb{R}	5
7	Лемма Кантора о вложенных отрезках. Лемма о стягивающихся отрезках	5
8	Лемма Гейне-Бореля	5
9	Точка сгущения. Лемма Больцано–Вейерштрасса.	5
10	Равномощные множества. Счётные множества. Их свойства.	6
11	Теорема Кантора о несчётности множества точек отрезка	6
12	Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.	6
13	Арифметические действия над сходящимися последовательностями	6
14	Теорема о сжатой последовательности	6
15	Предельный переход в неравенстве	7
16	Предел монотонной последовательности	7
17	Определение числа ε	7
18	Верхние и нижние пределы. Характеристика верхнего предела	7
19	Фундаментальность последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.	7
20	Подпоследовательность. Частичный предел. Теорема о верхнем и нижнем пределе последовательности	7
21	Предел последовательности в широком смысле. Расширенный вариант теоремы о монотонной последовательности.	8
22	Предел функции. Определение предела по Коши и по Гейне. Их эквивалентность.	8
23	Критерий Коши для предела функций	9
24	Предел функции и арифметические операции. Предельный переход в неравенстве	9

25 Первый замечательный предел	9
26 Односторонние пределы. Предел монотонной функции	9
27 Существование и единственность корня степени n	9
28 Арифметические действия и предел. Единственность предела	9
29 Определение показательной функции (леммы)	10
30 Логарифм. Степенная функция.	10
31 Второй замечательный предел	10
32 Символы Ландау: О-большое, о-малое, эквивалентность. Их свойства	10
33 Эквивалентные бесконечно малые. Замена на эквивалентное при вычислении пределов	10
34 Непрерывность. точки разрыва (их классификация). Примеры	11
35 Локальные свойства непрерывных функций	12
36 Теорема о промежуточном значении непрерывной функции (Больцано-Коши). Т.о сохранении промежутка	12
37 Теорема Вейерштрасса о функции, непрерывной на отрезке	12
38 Равномерная непрерывность. Примеры. Теорема Кантора	12
39 Теорема о монотонности обратимой непрерывной функции	13
40 Критерий непрерывности монотонной функции	13
41 Производная. Дифференциал. Односторонняя производная. Непрерывность деффирицируемой функции.	13
42 Правила дифференцирования. Дифференцирование обратной функции. Дифференцирование композиции	13
43 Интерполяционный многочлен Лагранжа	14
44 Производные высших порядков. Правило Лейбница	14
45 Локальный экстремум. Теорема Ферма	14
46 Теорема Ролля, Лагранжа, Коши	14
47 Следствие т. Лагранжа (о монотонности, о равномерной непрерывности)	14
48 Теорема Дарбу	15
49 Правило Лопиталя	15
50 Неравенства: обобщённое Бернулли, Юнга, Гёльдера, Минковского	15

51	Формула Тейлора с остатком в форме Пеано	16
52	Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа	16
53	Иррациональность числа e	16
54		16
55	Выпуклость. Лемма о трёх хордах	16
56	Односторонняя дифференцируемость выпуклой функции	16
57	Выпуклость и касательная. Опорная прямая	16
58	Критерий выпуклости в терминах производных	17
59	Неравенство Йенсена	17

1 Аксиоматика вещественных чисел

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ существуют две бинарные операции:

1. $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
2. $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Аксиомы \mathbb{R} :

1. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \ x + 0 = 0 + x = x$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ x + (y + z) = (x + y) + z$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ x + y = y + x$
5. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \forall x \in \mathbb{R} \ x * 1 = 1 * x = x$
6. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists x^{-1} : x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ x * (y * z) = (x * y) * z$
8. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ x * y = y * x$
9. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ (x + y) * z = xz + yz$
10. $x \leq x$
11. $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$
12. $x \leq y \vee y \leq x$
13. $x \leq y \implies x + z \leq y + z$
14. $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \implies xy \geq 0$
15. $X, Y \subset \mathbb{R} : \forall x \in X \ \forall y \in Y \ x \leq y \implies \exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ \forall y \in Y \ x \leq c \leq y$

2 Индуктивные множества. Натуральные числа. Метод математической индукции

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называют **индуктивным**, если $1 \in X$ и $\forall x \in X \implies x + 1 \in X$

Множество натуральных чисел: $\mathbb{N} = \bigcap_{X \subset \mathbb{R}} X$, где X - индуктивное множество.

$\mathcal{P}(n)$ - некоторое утверждение, является верным или неверным в зависимости от n .

Принцип математической индукции: если $\mathcal{P}(1)$ - верно, и $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$, тогда $\mathcal{P}(n)$ - верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

3 Неравенство Бернулли. Принцип Архимеда

Неравенство Бернулли: $(1 + x)^n \geq 1 + nx \ \forall x > -1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Причём равенство достигается только при $n = 1$ или $x = 0$.

Бином Ньютона: $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}$.

4 Максимум и минимум. Супремум и инфимум

$$\max X = a \iff a \in X \wedge \forall x \in X \ x \leq a$$

$$\min X = a \iff a \in X \wedge \forall x \in X \ x \geq a$$

Если \max и \min существуют, то они единственные.

$$\sup X = \min\{c \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \leq c\} = a \iff (\forall x \in X \ x \leq a) \wedge (\forall r < a \ \exists x' \in X : r < x')$$

Любое непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет \sup

$$\inf X = \max\{c \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \geq c\} = a \iff (\forall x \in X \ x \geq a) \wedge (\forall r > a \ \exists x' \in X : r > x')$$

Каждое ограниченное подмножество $E \subset \mathbb{N}$ имеет максимум. Множество \mathbb{N} неограниченно сверху.

5 Теорема о целой части. Принцип Архимеда.

Теорема о целой части: $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists! k \in \mathbb{Z} : k \leq x < k + 1$.

Принцип Архимеда: $\forall \varepsilon > 0, A > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > A$.

6 Плотность \mathbb{Q} в \mathbb{R} и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в \mathbb{R}

Плотность \mathbb{Q} в \mathbb{R} : $\forall (a, b) \subset \mathbb{R} \ \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.

Плотность $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в \mathbb{R} : $\forall (a, b) \subset \mathbb{R} \ \exists t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < t < b$.

7 Лемма Кантора о вложенных отрезках. Лемма о стягивающихся отрезках

Лемма Кантора о вложенных отрезках: Каждая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset \dots \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Для вложенных интервалов она не работает!

Лемма о стягивающихся отрезках: если в условиях леммы о вложенных отрезках

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$, то в пересечении $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ лежит ровно одна точка.

8 Лемма Гейне-Бореля

Говорят, что система множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ покрывает множество $X \in \mathbb{R}$, если $X \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Лемма Гейне-Бореля: из любого покрытия отрезка открытыми интервалами можно выделить конечное подпокрытие. Если $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где $I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$ покрывает $[c, d]$, то

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A : [c, d] \subset \bigcup_{j=1}^n I_{\alpha_j}$$

9 Точка сгущения. Лемма Больцано–Вейерштрасса.

Интервал $V_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$ называется δ -окрестностью точки x .

$\dot{V}_\delta(x) = V_\delta(x) \setminus \{x\}$ называют проколотой окрестностью.

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется точкой сгущения множества $X \subset \mathbb{R}$, если любая её проколотая окрестность содержит точку из множества X .

Лемма Больцано–Вейерштрасса: каждое бесконечное ограниченное множество $X \in \mathbb{R}$ имеет точку сгущения $a \in \mathbb{R}$.

10 Равномощные множества. Счётные множества. Их свойства.

Множество X называется конечным, если существует биекция между X и множеством $1, 2, \dots, n$. При этом n - количество элементов X . $n := \#X$.

Множества X и Y называются равномощными, если между ними можно установить биекцию.

Множество X называется счётным, если оно равномощно множеству \mathbb{N} .

Каждое бесконечное подмножество $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ счётно. Свойства счётных множеств:

1. Если X и Y - счётные множества, то и $X \times Y$ - тоже счётное.
2. Пусть $X_{m_1}, X_{m_2}, \dots, X_{m_n}, \dots$ - счётное семейство счётных множеств. Тогда $\mathbb{X} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ - счётно.

11 Теорема Кантора о несчётности множества точек отрезка

$X = [0, 1]$ не является счётным.

Говорят, что множество X имеет мощность континуум, если X равномощно $[0, 1]$.

12 Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.

Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $A \in \mathbb{R}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N |a_n - A| < \varepsilon$.

Если последовательность имеет предел, то говорят, что она сходится. Иначе, расходится.

Теорема: если предел существует, то он единственный.

Теорема: сходящаяся последовательность ограничена.

13 Арифметические действия над сходящимися последовательностями

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n * y_n) = ab$
3. если $b \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

14 Теорема о сжатой последовательности

Теорема "о двух милиционерах": если $x_n \leq c_n \leq y_n \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, тогда c_n тоже сходится, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

15 Предельный переход в неравенстве

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и $\exists N : \forall n > N \ x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

16 Предел монотонной последовательности

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - называется неубывающей, если $\forall n \ x_n \leq x_{n+1}$

Теорема о монотонной последовательности: любая неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : x \in \mathbb{N}\}$

17 Определение числа e

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

18 Верхние и нижние пределы. Характеристика верхнего предела

Пусть $\{x_n\}$ ограничена сверху и снизу.

Верхняя огибающая: $\bar{x}_n := \sup_{m \geq n} x_m$.

Нижняя огибающая: $\underline{x}_n := \inf_{m \geq n} x_m$.

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} := \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} x_m$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} x_m$$

Характеристика верхнего предела:

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = A \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ x_n < A + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \ \forall N : \exists n > N : x_n > A - \varepsilon \end{cases}$$

19 Фундаментальность последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (или сходящейся в себе, или последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall m, n \geq N \ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема Коши: последовательность $\{x_n\}, x_n \in \mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

20 Подпоследовательность. Частичный предел. Теорема о верхнем и нижнем пределе последовательности

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}$. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} : n_k \in \mathbb{N}, \forall k \ n_k < n_{k+1}$.

Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Лемма: если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, то любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к A : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = A$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

Теорема о верхнем и нижнем пределе последовательности: $\{x_n\} : x_n \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ равен наибольшему из всех частичных пределов.
2. последовательность x_n сходится $\iff \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$

21 Предел последовательности в широком смысле. Расширенный вариант теоремы о монотонной последовательности.

Расширенная числовая прямая: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$.

Некоторые арифметические операции:

1. $a + (+\infty) = +\infty$
2. $a + (-\infty) = -\infty$
3. $+\infty + (+\infty) = +\infty$
4. $-\infty + (-\infty) = -\infty$
5. $a * (+\infty) = +\infty$
6. $a * (-\infty) = -\infty$
7. $(+\infty) * (+\infty) = +\infty$
8. $(-\infty) * (-\infty) = +\infty$
9. $(+\infty) * (-\infty) = -\infty$

Бесконечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \iff \forall M > 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n > M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \iff \forall M < 0 \exists N : \forall n \geq N \ x_n < M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \iff \forall M > 0 \exists N : \forall n \geq N \ |x_n| > M$$

Расширенная теорема о монотонной последовательности: любая монотонная последовательность имеет предел (конечный или бесконечный).

22 Предел функции. Определение предела по Коши и по Гейне. Их эквивалентность.

$E \in \mathbb{R}$

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$ - точка сгущения E . Предел по Коши:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{V}_\delta(a) \cap E \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Эквивалентная переформулировка через окрестности:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \mathbf{V}_\varepsilon(L) \exists \dot{\mathbf{V}}_\delta(a) : x \in \dot{\mathbf{V}}_\delta(a) \implies f(x) \in \mathbf{V}_\varepsilon(L)$$

Определение предела по Гейне:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty : x_n \in E \setminus \{a\} \ x_n \rightarrow A \implies f(x_n) \rightarrow L$$

Теорема: определения по Коши и Гейне равносильны.

23 Критерий Коши для предела функций

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \dot{\mathbf{V}}_\delta(a) \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

24 Предел функции и арифметические операции. Предельный переход в неравенстве

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$; a - точка сгущения E .

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = AB$$

$$\forall x \in E \ B \neq 0, g(x) \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{A}{B}$$

25 Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

26 Односторонние пределы. Предел монотонной функции

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^{+0}} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Теорема о пределе монотонной функции: если $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ не убывает, тогда:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$$

27 Существование и единственность корня степени n

Пусть $n \in \mathbb{N}; a > 0$. Тогда $\exists! \xi > 0 : \xi^n = a$

28 Арифметические действия и предел. Единственность предела

Уже было

29 Определение показательной функции (леммы)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : -\varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon$$

$$\lim_{\mathbb{Q} \ni t \rightarrow r} a^t = a^r, r \in \mathbb{Q}$$

30 Логарифм. Степенная функция.

Теорема о существовании \log : пусть $a > 1$. $\forall y \in \mathbb{R}^+ \exists t : a^t = y$. $t := \log_a y$

Определение степенной функции: пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$

31 Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Следствия:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \lg(1+t)^{\frac{1}{t}} = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} = 1$$

32 Символы Ландау: О-большое, о-малое, эквивалентность. Их свойства

$$f(x) = o(g(x)) \iff \exists \alpha : f(x) = \alpha(x)g(x), \alpha - \text{бесконечно малая при } x \rightarrow a$$

$$f(x) = O(g(x)) \iff \exists U_a, \exists \varphi - \text{огранич. на } \dot{U}_a : f(x) = \alpha(x)g(x)$$

$$f \sim g \ (x \rightarrow a) \iff \exists \psi : f(x) = \psi(x)g(x), \psi(x) \rightarrow 1$$

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$$

$$\alpha = o(\beta) \implies \alpha = O(\beta)$$

$$o(\alpha) \pm o(\alpha) = o(\alpha)$$

$$\text{const} * o(\beta) = o(\beta)$$

$$o(\alpha)o(\beta) = o(\alpha\beta)$$

33 Эквивалентные бесконечно малые. Замена на эквивалентное при вычислении пределов

$\alpha \rightarrow 0$. Тогда:

$$\sin \alpha \sim \alpha$$

$$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$$

$$e^\alpha - 1 \sim \alpha$$

$$(1+\alpha)^a - 1 \sim \alpha a$$

$$\tan \alpha \sim \alpha$$

$$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\arcsin \alpha \sim \alpha$$

$$\arctan \alpha \sim \alpha$$

Теорема о замене на эквивалентное при вычислении пределов:
 Пусть $\alpha, \beta : E \rightarrow \mathbb{R}$, и a - предельная точка E ;
 $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$ при $x \rightarrow a$
 Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)\beta(x) = \lim_{x \rightarrow a} \tilde{\alpha}(x)\tilde{\beta}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$$

34 Непрерывность. точки разрыва (их классификация). Примеры

Определение непрерывности:

$$f \text{ непрерывна в точке } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Классификация точек разрыва:

1. Разрывы I рода

- (a) \exists конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ (или $f(a)$ не существует). Это называется устранимым разрывом
 Устранение разрыва - переопределение или доопределение функции до непрерывной.

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), \forall x \neq a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), x = a \end{cases}$$

- $f(x) = \text{sign}^2(x)$
- $f(x) = \frac{x^2}{x}$

- (b) \exists конечные односторонние пределы, но они не совпадают.

- $f(x) = \lfloor x \rfloor$
- $f(x) = \{x\}$

2. Все остальные

- (a) бесконечные пределы

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \tan x$

- (b) нет предела в т. a

- $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
- $f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$

- Функция Дирехле

$$\mathbf{D}(x) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q} \\ 1, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

- Функция Римана

$$\mathbf{R}(x) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

35 Локальные свойства непрерывных функций

1. Локальная ограниченность

Если f - непрерывна в т. a , то $\exists U_a; \exists M > 0 : \forall x \in U_a \quad |f(x)| \leq M$

2. Локальное сохранение знака

Если $f(a) \neq 0$, то $\exists U_a : \forall x \in U_a$ знак $f(x)$ совпадает со знаком $f(a)$.

3. Непрерывность суммы и произведения

$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$; f, g - непр. в т. a , тогда $f + g$ и fg непрерывны в т. a , и если $\exists U_a : g(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_a$, то $\frac{f}{g}$ - непр. в т. a .

4. Непрерывность композиции

$f : X \rightarrow Y; g : Y \rightarrow \mathbb{R}$

f - непр. в т. $a \in X \implies g \circ f$ - непр. в т. a .

36 Теорема о промежуточном значении непрерывной функции (Больцано-Коши). Т.о сохранении промежутка

$$C(E) := \{f : E \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ - непр. на } E\}$$

$$f \in C(E) \iff \forall x_0 \in E \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Теорема Больцано-Коши: Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.

Теорема о промежуточном значении непрерывной функции: Пусть $f \in C[a, b]; f(a) = A; f(b) = B \neq A$. Тогда $\forall C$, лежащего между A и B $\exists c \in (a, b) : f(c) = C$. Теорема: непрерывный образ промежутка - промежуток.

$f \in C < a, b > \implies f(< a, b >) = < m, M >$.

37 Теорема Вейерштрасса о функции, непрерывной на отрезке

Непрерывная функция на отрезке ограничена и достигает своего min и max

38 Равномерная непрерывность. Примеры. Теорема Кантора

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E \quad |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

- $f(x) = x^2$ не является равномерно непр на \mathbb{R}
- $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не является равномерно непр. на $(0, 1)$
- $f(x) = \sqrt{x}$ является равномерно непрерывной на $[0, 1]$

Теорема Кантора: непрерывная функция на отрезке является на нём равномерно непрерывной.

Модуль непрерывности:

$$\omega_f(E, \delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E, |x - y| < \delta\}$$

39 Теорема о монотонности обратимой непрерывной функции

Пусть $f : X \rightarrow Y$ - биекция и f - строго монотонна.

Тогда $\exists f^{-1} : Y \rightarrow X$, f^{-1} строго монотонна, причём знак монотонности сохраняется.

40 Критерий непрерывности монотонной функции

Если f - монотонная функция на $[a, b]$, то

$$f(x) \in C([a, b]) \iff f([a, b]) = [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$$

41 Производная. Дифференциал. Односторонняя производная. Непрерывность дифференцируемой функции.

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =: \frac{df}{dx}$$

Дифференциал $df = f'(x_0)dx$. $df : dx \mapsto f'(x_0)dx$

Односторонняя производная:

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Если f - дифф.-ма в т. x_0 , то она непрерывна в т. x_0 .

42 Правила дифференцирования. Дифференцирование обратной функции. Дифференцирование композиции

Пусть $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in (a, b)$. Тогда:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $g(x) \neq 0 \implies \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Теорема о дифференцировании обратной функции:

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$; $f \in C(a, b)$ и монотонна.

f - дифф.-ма в т. $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) \neq 0$

Тогда обратная функция f^{-1} дифф.-ма в т. $f(x_0) =: y_0$, причём $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Теорема о дифф.-ии композиции:

Пусть $f(x_0)$ - дифф.-ма в т. x_0 , а $g(y)$ дифф.-ма в т. $y_0 = f(x_0)$

Тогда $g \circ f$ - дифф.-ма в т. x_0 , причём

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

43 Интерполяционный многочлен Лагранжа

$M_k(x_k, y_k), 0 \leq k \leq n, x_k \neq x_j \quad \forall k \neq j$

Задача: найти многочлен степени $\leq n$, такой, что $\forall k \quad P(x_k) = y_k$.

$$Q(x) := \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

$$P(x) := \sum_{i=0}^n \frac{Q(x)}{(x - x_i)Q'(x_i)} y_i = \sum_{i=0}^n \left(y_i \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$P(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n \frac{Q(x)}{(x - x_i)Q'(x_i)} y_i, & x \neq x_i \\ y_i, & x = x_i \end{cases}$$

44 Производные высших порядков. Правило Лейбница

$$f''(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} =: \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

Если $f^{(n)}$ определена в окрестности т. x_0 , то говорят, что f - $(n+1)$ -дифф-ма, если $\exists (f^{(n)})'(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)$

Правило Лейбница:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$$

45 Локальный экстремум. Теорема Ферма

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. $x_0 \in (a, b)$ называется точкой локального экстремума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \begin{cases} f(x) \leq f(x_0). \text{ тогда это точка локального } \max \\ f(x) \geq f(x_0). \text{ тогда это точка локального } \min \end{cases}$

Теорема Ферма: Пусть f определена в окрестности точки x_0 и дифф-ма в т. x_0 . Предположим, что x_0 - точка локального экстремума f

Тогда $f'(x_0) = 0$

46 Теорема Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема Ролля: $f \in C[a, b]$, f - дифф-ма на (a, b) , $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Теорема Лагранжа: $f \in C[a, b]$, f - дифф-ма на (a, b) , тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Теорема Коши о среднем значении: Пусть $f, g \in C[a, b]$ и дифф-мы на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

47 Следствие т. Лагранжа (о монотонности, о равномерной непрерывности)

1. Если f - дифф-ма на (a, b) и $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то f строго возрастает на (a, b) .
2. Если f - дифф-ма на (a, b) и $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то f строго убывает на (a, b)
3. $f' \geq 0 \implies f$ - нестрого возрастает

4. $f' \leq 0 \implies f$ - нестрого убывает
5. $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b) \implies f = \text{const}$
6. f - n раз дифф-ма и $f^{(n)}(x) = 0 \forall x \in (a, b) \implies f$ - многочлен степени $\leq n - 1$
7. Если f - дифф-ма на (a, b) , причём $\exists M < \infty : \forall x \in (a, b) \quad |f'(x)| < M$, тогда f - равномерно непрерывна на (a, b)

48 Теорема Дарбу

Пусть f - дифф-ма на $[a, b]$. Тогда f' принимает каждое значение из промежутка от $f'(a)$ до $f'(b)$.

49 Правило Лопиталя

Пусть f, g - дифф-мы на (a, b) , причём $g' \neq 0$ на (a, b) .

Предположим, что $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \vee \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

50 Неравенства: обобщённое Бернулли, Юнга, Гёльдера, Минковского

1. $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad \forall x > -1, x \neq 0$
3. Обобщённое неравенство Бернулли: $\forall t > -1 \begin{cases} (1+t)^\alpha \leq 1 + \alpha t, & \forall \alpha \in (0, 1) \\ (1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t, & \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus (0, 1) \end{cases}$ z
4. Неравенство Юнга: если $a, b > 0; \quad p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$
5. Неравенство Гёльдера: $p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad x_j, y_j \geq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

6. Неравенст Коши-Буняковского-Шварца (КБШ):

$$\sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

7. Неравенст Минковского: $x_j, y_j > 0; \quad p > 1$

$$\left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n y_j^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

51 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Пусть f n раз дифф-ма в т. x_0 . Тогда:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

52 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$f \in C^n < a, b >$ и $n + 1$ раз дифф-ма на (a, b) ; $x_0, x \in < a, b >$.

Тогда $\exists \xi$ между x_0 и x ; $x_0 \neq x$

$$R_{n,x_0,f}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j + R_{n,x_0,f}(x) \quad x \rightarrow x_0$$

53 Иррациональность числа e

Теорема: число e иррациональное.

54

Тебе попался гроб. F

55 Выпуклость. Лемма о трёх хордах

$f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$. f называется выпуклой (вниз) на $< a, b >$, если $\forall \alpha, \beta \in < a, b >$ часть графика $y = f(x)$ между α и β лежит не выше хорды, соединяющей точки графика $(\alpha; f(\alpha))$ и $(\beta; f(\beta))$

Лемма о трёх хордах: $f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$ - выпукла на $< a, b >$ и $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$. Тогда:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

56 Односторонняя дифференцируемость выпуклой функции

$f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$, f - выпуклая (вниз). Тогда:

$$\forall x \in (a, b) \quad \exists f'_-(x), f'_+(x) \in \mathbb{R} \wedge f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

57 Выпуклость и касательная. Опорная прямая

$f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$. Предположим, что f - дифф-ма на $< a, b >$. Тогда:

$$\forall x, x_0 \in < a, b > \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$f : < a, b > \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in < a, b >$. Прямая $y = kx + b$ называется опорной прямой к функции f в т. x_0 , если

1. $f(x_0) = kx_0 + b$
2. $f(x) \geq kx + b \quad \forall x \in (a, b)$

58 Критерий выпуклости в терминах производных

Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$; $f \in C((a, b))$

- если f дифф-ма на (a, b) , то f - выпукла на $(a, b) \iff f'$ нестрого возр. на (a, b)
- если f дважды дифф-ма на (a, b) , то f - выпукла на $(a, b) \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

59 Неравенство Йенсена

Пусть f - выпукла на (a, b) ; $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$. Тогда:

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j)$$

где $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 1 \dots n$ и $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$.