Математический анализ, I курс

Кирилл Ступаков

Осень 2020

Содержание

1 **Аксиоматика вещественных чисел** **5**

2 **Индуктивные множества. Натуральные числа. Метод математической индукции** **5**

3 **Метод мат. индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона** **6**

4 **Максимум и минимум. Супремум и инфимум** **6**

5 **Теорема о целой части. Принцип Архимеда.** **6**

6 **Плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$** **6**

7 **Лемма Кантора о вложенных отрезках. Лемма о стягивающихся отрезках** **6**

8 **Лемма Гейне-Бореля** **6**

9 **Точка сгущения. Лемма Больцано–Вейерштрасса.** **7**

10 **Равномощные множества. Счётные множества. Их свойства.** **7**

11 **Теорема Кантора о несчётности множества точек отрезка** **7**

12 **Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.** **7**

13 **Арифметические действия над сходящимися последовательностями** **7**

14 **Теорема о сжатой последовательности** **8**

15 **Предельный переход в неравенстве** **8**

16 **Предел монотонной последовательности** **8**

17 **Определение числа e** **8**

18 **Верхние и нижние пределы. Характеристика верхнего предела** **8**

19 **Фундаментальность последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.** **8**

20 **Подпоследовательность. Частичный предел. Теорема о верхнем и нижнем пределе последовательности** **9**

21 **Предел последовательности в широком смысле. Расширенный вариант теоремы о монотонной последовательности.** **9**

22 **Предел функции. Определение предела по Коши и по Гейне. Их эквивалентность.** **10**

23 **Критерий Коши для предела функций** **10**

24 **Предел функции и арифметические операции. Предельный переход в неравенстве** **10**

25 Первый замечательный предел **10**

26 Односторонние пределы. Предел монотонной функции **10**

27 Существование и единственность корня степени n **11**

28 Арифметические действия и предел. Единственность предела **11**

29 Определение показательной функции (леммы) **11**

30 Логарифм. Степенная функция. **11**

31 Второй замечательный предел **11**

32 Символы Ландау: О-большое, о-малое, эквивалентность. Их свойства **11**

33 Эквивалентные бесконечно малые. Замена на эквивалентное при вычислении пределов **12**

34 Непрерывность. точки разрыва (их классификация). Примеры **12**

35 Локальные свойства непрерывных функций **13**

36 Теорема о промежуточном значении непрерывной функциии (Больцано-Коши). Т.о сохранении промежутка **13**

37 Теорема Вейерштрасса о функции, непрерывной на отрезке **13**

38 Равномерная непрерывность. Примеры. Теорема Кантора **14**

39 Теорема о монотонности обратимой непрерывной функции **14**

40 Критерий непрерывности монотонной функции **14**

41 Производная. Дифференциал. Односторонняя производная. Непрерывность деффирицируемой функции. **14**

42 Правила дифференцирования. Дифференцирование обратной функции. Дифференцирование композиции **14**

43 Интерполяционный многочлен Лагранжа **15**

44 Производные высших порядков. Правило Лейбница **15**

45 Локальный экстремум. Теорема Ферма **15**

46 Теорема Ролля, Лагранжа, Коши **16**

47 Следствие т. Лагранжа (о монотонности, о равномерной непрерывности) **16**

48 Теорема Дарбу **16**

49 Правило Лопиталя **16**

50 Неравенства: обобщённое Бернулли, Юнга, Гёльдера, Минковского **16**

51 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано **17**

52 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа **17**

53 Иррациональность числа e **17**

54 **17**

55 Выпуклость. Лемма о трёх хордах **17**

56 Односторонняя дифференцируемость выпуклой функции **18**

57 Выпуклость и касательная. Опорная прямая **18**

58 Критерий выпуклости в терминах производных **18**

59 Неравенство Йенсена **18**

$$1 = |\langle \text{virgin}|\text{me}\rangle|^2$$

$$\sin x = x$$

$$\pi = e = 3$$

$$\mathbb{QED} \quad \square$$

1 Аксиоматика вещественных чисел

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ существуют две бинарные операции:

1. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
2. $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Аксиомы $\mathbb{R}$:

1. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \;\; x + 0 = 0 + x = x$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists(-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \;\; x + (y + z) = (x + y) + z$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; x + y = y + x$
5. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \forall x \in \mathbb{R} \;\; x * 1 = 1 * x = x$
6. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\; \exists x^{-1} : x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \;\; x * (y * z) = (x * y) * z$
8. $\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; x * y = y * x$
9. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \;\; (x + y) * z = xz + yz$
10. $x \leq x$
11. $x \leq y \land y \leq x \implies x = y$
12. $x \leq y \lor y \leq x$
13. $x \leq y \implies x + z \leq y + z$
14. $x \geq 0 \land y \geq 0 \implies xy \geq 0$
15. $X, Y \subset \mathbb{R} : \forall x \in X \;\; \forall y \in Y \;\; x \leq y \implies \exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in X \;\; \forall y \in Y \;\; x \leq c \leq y$

2 Индуктивные множества. Натуральные числа. Метод математической индукции

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называют **индуктивным**, если $1 \in X$ и $\forall x \in X \implies x + 1 \in X$
Множество натуральных чисел: $\mathbb{N} = \bigcap\limits_{X \subset \mathbb{R}} X$, где X - индуктивное множество.

$\mathcal{P}(n)$ - некоторое утверждение, является верным или неверным в зависимости от n.
Принцип математической индукции: если $\mathcal{P}(1)$ - верно, и $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$, тогда $\mathcal{P}(n)$ - верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

3 Метод мат. индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона

Неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx \ \ \forall x > -1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Причём равенство достигается только при $n=1$ или $x=0$.

Бином Ньютона: $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$.

4 Максимум и минимум. Супремум и инфимум

$\max X = a \iff a \in X \wedge \forall x \in X \ \ x \leq a$
$\min X = a \iff a \in X \wedge \forall x \in X \ \ x \geq a$
Если max и min существуют, то они единственные.

$\sup X = \min\{c \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ \ x \leq c\} = a \iff (\forall x \in X \ \ x \leq a) \wedge (\forall r < a \ \ \exists x' \in X : r < x')$
Любое непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет sup
$\inf X = \max\{c \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ \ x \geq c\} = a \iff (\forall x \in X \ \ x \geq a) \wedge (\forall r > a \ \ \exists x' \in X : r > x')$

Каждое ограниченное подмножество $E \subset \mathbb{N}$ имеет максимум. Множество $\mathbb{N}$ неограниченно сверху.

5 Теорема о целой части. Принцип Архимеда.

Теорема о целой части: $\forall x \in \mathbb{R} \ \ \exists! k \in \mathbb{Z} : k \leq x < k+1$.
Принцип Архимеда: $\forall \varepsilon > 0, A > 0 \ \ \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > A$.

6 Плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$

Плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$: $\forall (a,b) \subset \mathbb{R} \ \ \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.
Плотность $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$: $\forall (a,b) \subset \mathbb{R} \ \ \exists t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < t < b$.

7 Лемма Кантора о вложенных отрезках. Лемма о стягивающихся отрезках

Лемма Кантора о вложенных отрезках: Каждая система вложенных отрезков имеет непустое перемечение.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset \ldots \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Для вложенных интервалов она не работает!
Лемма о стягивающихся отрезках: если в условиях леммы о вложенных отрезках $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$, то в пересечении $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ лежит ровно одна точка.

8 Лемма Гейне-Бореля

Говорят, что система множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ покрывает множество $X \in \mathbb{R}$, если $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$.
Лемма Гейне-Бореля: из любого покрытия отрезка открытыми интервалами можно выде-

лить конечное подпокрытие. Если $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где $I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$ покрывает $[c,d]$, то

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A : [c,d] \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_{\alpha_j}$$

9 Точка сгущения. Лемма Больцано–Вейерштрасса.

Интервал $V_\delta(x) = (x-\delta, x+\delta)$ называется δ-окрестностью точки x.
$\dot{V}_\delta(x) = V_\delta(x) \setminus \{x\}$ называют проколотой окрестностью.
Точка $a \in \mathbb{R}$ называется точкой сгущения множества $X \subset \mathbb{R}$, если любая её проколотая окрестность содержит точку из множества X.
Лемма Больцано–Вейерштрасса: каждое бесконечное ограниченное множество $X \in \mathbb{R}$ имеет точку сгущения $a \in \mathbb{R}$.

10 Равномощные множества. Счётные множества. Их свойства.

Множество X называется конечным, если существует биекция между X и множеством $1, 2, \cdots, n$. При этом n - количество элементов X. $n := \#X$.
Множества X и Y называются равномощными, если между ними можно установить биекцию.
Множество X называется счётным, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.
Каждое бесконечное подмножество $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ счётно. Свойства счётных множеств:

1. Если X и Y - счётные множества, то и $X \times Y$ - тоже счётное.
2. Пусть $X_{m_1}, X_{m_2}, \ldots, X_{m_n}, \ldots$ - счётное семейство свётных множеств. Тогда $\mathbb{X} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_m$ - счётно.

11 Теорема Кантора о несчётности множества точек отрезка

$X = [0,1]$ не является счётным.
Говорят, что множество X имеет мощность континуум, если X равномощно $[0,1]$.

12 Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.

Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $A \in \mathbb{R}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \ |a_n - A| < \varepsilon$.
Если последовательность имет предел, то говорят, что она сходится. Иначе, расходится.
Теорема: если предел существует, то он единственный.
Теорема: сходящаяся последовательность ограничена.

13 Арифметические действия над сходящимися последовательностями

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n * y_n) = ab$
3. если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

14 Теорема о сжатой последовательности

Теорема "о двух милиционерах": если $x_n \leq c_n \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда c_n тоже сходится, причём $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

15 Предельный переход в неравенстве

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $\exists N : \forall n > N \ \ x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

16 Предел монотонной последовательности

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - называется неубывающей, если $\forall n \ \ x_n \leq x_{n+1}$
Теорема о монотонной последовательности: любая неубывающай ограниченная сверху последовательность имеет придел, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : x \in \mathbb{N}\}$

17 Определение числа e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

18 Верхние и нижние пределы. Характеристика верхнего предела

Пусть $\{x_n\}$ ограничена сверху и снизу.
Верхняя огибающая: $\overline{x}_n := \sup\limits_{m \geq n} x_m$.
Нижняя огибающая: $\underline{x}_n := \inf\limits_{m \geq n} x_m$.

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \overline{x_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m \geq n} x_m$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \underline{x_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m \geq n} x_m$$

Характеристика верхнего предела:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = A \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \forall n \geq N \ \ x_n < A + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \forall N : \exists n > N : x_n > A - \varepsilon \end{cases}$$

19 Фундаментальность последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (или сходящейся в себе, или последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \forall m, n \geq N \ \ |x_n - x_m| < \epsilon$$

Теорема Коши: последовательность $\{x_n\}, x_n \in \mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

20 Подпоследовательность. Частичный предел. Теорема о верхнем и нижнем пределе последовательности

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbb{R}$. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} : n_k \in \mathbb{N}, \forall k \;\; n_k < n_k + 1$.
Тогда последовательность $\{n_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Лемма: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к A: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = A$

Число $a \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$.

Теорема о верхнем и нижнем пределе последовательности: $\{x_n\} : x_n \in \mathbb{R}$. Тогда:

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ равен наибольшему из всех частичных пределов.
2. последовательность x_n сходится $\iff \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

21 Предел последовательности в широком смысле. Расширенный вариант теоремы о монотонной последовательности.

Расширенная числовая прямая: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$.
Некоторые арифметические операции:

1. $a + (+\infty) = +\infty$
2. $a + (-\infty) = -\infty$
3. $+\infty + (+\infty) = +\infty$
4. $-\infty + (-\infty) = -\infty$
5. $a * (+\infty) = +\infty$
6. $a * (-\infty) = -\infty$
7. $(+\infty) * (+\infty) = +\infty$
8. $(-\infty) * (-\infty) = +\infty$
9. $(+\infty) * (-\infty) = -\infty$

Бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall M > 0 \;\; \exists N : \forall n \geq N \;\; x_n > M$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall M < 0 \;\; \exists N : \forall n \geq N \;\; x_n < M$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall M > 0 \;\; \exists N : \forall n \geq N \;\; |x_n| > M$$

Расширенная теорема о монотонной последовательности: любая монотонная последовательность имеет предел (конечный или бесконечный).

22 Предел функции. Определение предела по Коши и по Гейне. Их эквивалентность.

$E \in \mathbb{R}$
$f : E \to \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$ - точка сгущения E. Предел по Коши:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 : \forall x \in \dot{\mathbf{V}}_\delta(a) \cap E \ \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Эквивалентная переформулировка через окрестности:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall \mathbf{V}_\varepsilon(L) \ \exists \dot{\mathbf{V}}_\delta(a) : x \in \dot{\mathbf{V}}_\delta(a) \implies f(x) \in \mathbf{V}_\varepsilon(L)$$

Определение предела по Гейне:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in E \setminus \{a\} \ \ x_n \to A \implies f(x_n) \to L$$

Теорема: определения по Коши и Гейне равносильны.

23 Критерий Коши для предела функций

$$\exists \lim_{x\to a} f(X) \in \mathbb{R} \iff \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \dot{\mathbf{V}}_\delta(a) \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

24 Предел функции и арифметические операции. Предельный переход в неравенстве

$f, g : E \to \mathbb{R}$; a - точка сгущения E.
Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда:

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = A + B$$

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = AB$$

$$\forall x \in E \ \ B \neq 0, g(x) \neq 0 \implies \lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$$

25 Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

26 Односторонние пределы. Предел монотонной функции

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^{+0}} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - a < \delta \ \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Теорема о пределе монотонной функции: если $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ не убывает, тогда:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f$$

27 Существование и единственность корня степени n

Пусть $n \in \mathbb{N}; a > 0$. Тогда $\exists! \ \xi > 0 : \xi^n = a$

28 Арифметические действия и предел. Единственность предела

Уже было

29 Определение показательной функции (леммы)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists k \in \mathbb{N} : -\varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon$$

$$\lim_{\mathbb{Q} \ni t \to r} a^t = a^r, r \in \mathbb{Q}$$

30 Логарифм. Степенная функция.

Теорема о существовании log: пусть $a > 1$. $\forall y \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists t : a^t = y$. $t := \log_a y$
Определение степенной функции: пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$

31 Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Следствия:

$$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1 + t)}{t} = \lim_{t \to 0} \lg(1 + t)^{\frac{1}{t}} = 1$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{e^s - 1}{s} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha)} = 1$$

32 Символы Ландау: О-большое, о-малое, эквивалентность. Их свойства

$$f(x) = o(g(x)) \iff \exists \alpha : f(x) = \alpha(x) g(x), \alpha \text{ - бесконечно малая при } x \to a$$

$$f(x) = O(g(x)) \iff \exists U_a, \exists \varphi \text{ - огранич. на } \dot{U}_a : f(x) = \alpha(x) g(x)$$

$$f \sim g \ \ (x \to a) \iff \exists \psi : f(x) = \psi(x) g(x), \psi(x) \to 1$$

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$$

$$\alpha = o(\beta) \implies \alpha = O(\beta)$$

$$o(\alpha) \pm o(\alpha) = o(\alpha)$$

$$const * o(\beta) = o(\beta)$$

$$o(\alpha) o(\beta) = o(\alpha \beta)$$

33 Эквивалентные бесконечно малые. Замена на эквивалентное при вычислении пределов

$\alpha \to 0$. Тогда:

$$\sin\alpha \sim \alpha$$
$$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$$
$$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$$
$$(1+\alpha)^{a} - 1 \sim \alpha a$$
$$\tan\alpha \sim \alpha$$
$$1 - \cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$$
$$\arcsin\alpha \sim \alpha$$
$$\arctan\alpha \sim \alpha$$

Теорема о замене на эквивалентное при вычислении пределов:
Пусть $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$, и a - предельная точка E;
$\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$ при $x \to a$
Тогда:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x)\beta(x) = \lim_{x\to a} \tilde{\alpha}(x)\tilde{\beta}(x)$$
$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}$$

34 Непрерывность. точки разрыва (их классификация). Примеры

Определение непрерывности:

$$f \text{ непрерывна в точке } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Классификация точек разрыва:

1. Разрывы I рода

   (a) $\exists$ конечный придел $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ (или $f(a)$ не существует). Это называется устранимым разрывом
   Устранение разрыва - переопределение или доопределение функции до непрерывной.

   $$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), \forall x \neq a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), x = a \end{cases}$$

   - $f(x) = \mathrm{sign}^2(x)$
   - $f(x) = \frac{x^2}{x}$

   (b) $\exists$ конечные односторонние пределы, но они не совпадают.

   - $f(x) = \lfloor x \rfloor$
   - $f(x) = \{x\}$

2. Все остальные

   (a) бесконечные пределы

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \tan x$

(b) нет предела в т. a

- $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
- $f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$

- Функция Дирихле

$$\mathbf{D}(x) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q} \\ 1, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

- Функция Римана

$$\mathbf{R}(x) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

35 Локальные свойства непрерывных функций

1. Локальная ограниченность
Если f - непрерывна в т. a, то $\exists U_a; \exists M > 0 : \forall x \in U_a \ \ |f(x)| \leq M$

2. Локальное сохранение знака
Если $f(a) \neq 0$, то $\exists U_a : \forall x \in U_a$ знак $f(x)$ совпадает со знаком $f(a)$.

3. Непрерывность суммы и произведения
$f, g : E \to \mathbb{R}$; f, g - непр. в т. a, тогда $f + g$ и fg непрерывны в т. a, и если $\exists U_a : g(x) \neq 0 \ \ \forall x \in U_a$, то $\frac{f}{g}$ - непр. в т. a.

4. Непрерывность композиции
$f : X \to Y; g : Y \to \mathbb{R}$
f - непр. в т. $a \in X \implies g \circ f$ - непр. в т. a.

36 Теорема о промежуточном значении непрерывной функциии (Больцано-Коши). Т.о сохранении промежутка

$$C(E) := \{f : E \to \mathbb{R}, f \text{ - непр. на } E\}$$

$$f \in C(E) \iff \forall x_0 \in E \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Теорема Больцано-Коши: Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$.
Теорема о промежуточном значении непрерывной функции: Пусть $f \in C[a, b]; f(a) = A; f(b) = B \neq A$. Тогда $\forall C$, лежащего между A и B $\exists c \in (a, b) : f(c) = C$.
Теорема: непрерывный образ промежутка - промежуток.
$f \in C < a, b > \implies f(< a, b >) =< m, M >$.

37 Теорема Вейерштрасса о функции, непрерывной на отрезке

Непрерывная функция на отрезке ограничена и достигает своего min и max

38 Равномерная непрерывность. Примеры. Теорема Кантора

$f : E \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E \ \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

- $f(x) = x^2$ не является равномерно непр на $\mathbb{R}$
- $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не является равномерно непр. на $(0, 1)$
- $f(x) = \sqrt{x}$ является равномерно непрерывной на $[0, 1]$

Теорема Кантора: непрерывная функция на отрезке является на нём равномерно непрерывной.

Модуль непрерывности:

$$\omega_f(E, \delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E, |x - y| < \delta\}$$

39 Теорема о монотонности обратимой непрерывной функции

Пусть $f : X \to Y$ - биекция f - строго монотонна.
Тогда $\exists f^{-1} : Y \to X$, f^{-1} строго монотонна, причём знак монотонности сохраняется.

40 Критерий непрерывности монотонной функции

Если f - монотонная функция на $[a, b]$, то

$$f(x) \in C([a, b]) \iff f([a, b]) = [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$$

41 Производная. Дифференциал. Односторонняя производная. Непрерывность деффирицируемой функции.

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =: \frac{df}{dx}$$

Дефференциал $df = f'(x_0)dx$. $df : dx \mapsto f'(x_0)dx$

Односторонняя производная:

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Если f - дифф.-ма в т. x_0, то она непрерывна в т. x_0.

42 Правила дифференцирования. Дифференцирование обратной функции. Дифференцирование композиции

Пусть $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in (a, b)$. Тогда:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $g(x) \neq 0 \implies \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Теорема о дифференцировании обратной функции:
$f : (a, b) \to \mathbb{R}$; $f \in C(a, b)$ и монотонна.
f - дифф-ма в т. $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) \neq 0$
Тогда обратная функция f^{-1} дифф-ма в т. $f(x_0) =: y_0$, причём $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Теорема о дифф-ии композиции:
Пусть $f(x_0)$ - дифф-ма в т. x_0, а $g(y)$ дифф-ма в т. $y_0 = f(x_0)$
Тогда $g \circ f$ - дифф-ма в т. x_0, причём

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

43 Интерполяционный многочлен Лагранжа

$M_k(x_k, y_k), 0 \leq k \leq n, x_k \neq x_j \;\; \forall k \neq j$
Задача: найти многочлен степени $\leq n$, такой, что $\forall k \;\; P(x_k) = y_k$.

$$Q(x) := \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

$$P(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{Q(x)}{(x - x_i)Q'(x_i)} y_i = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \prod_{j=1 j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$P(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{Q(x)}{(x - x_i)Q'(x_i)} y_i, & x \neq x_i \\ y_i, & x = x_i \end{cases}$$

44 Производные высших порядков. Правило Лейбница

$$f''(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} =: \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

Если $f^{(n)}$ определена в окрестности т. x_0, то говорят, что f - $(n+1)$-дифф-ма, если $\exists (f^{(n)})'(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)$

Правило Лейбница:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$$

45 Локальный экстремум. Теорема Ферма

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$. $x_0 \in (a, b)$ называется точкой локального экстремума, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0)$ $\begin{cases} f(x) \leq f(x_0). \text{ тогда это точка локального } \max \\ f(x) \geq f(x_0). \text{ тогда это точка локального } \min \end{cases}$

Теорема Ферма: Пусть f определена в окрестности точки x_0 и дифф-ма в т. x_0. Предположим, что x_0 - точка локального экстремума f
Тогда $f'(x_0) = 0$

46 Теорема Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема Ролля: $f \in C[a,b]$, f - дифф-ма на (a,b), $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$
Теорема Лагранжа: $f \in C[a,b]$, f - дифф-ма на (a,b), тогда $\exists c \in (a,b) : f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Теорема Коши о среднем значении: Пусть $f, g \in C[a,b]$ и дифф-мы на (a,b). Тогда $\exists c \in (a,b) : \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

47 Следствие т. Лагранжа (о монотонности, о равномерной непрерывности)

1. Если f - дифф-ма на (a,b) и $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$, то f строго возрастает на (a,b).
2. Если f - дифф-ма на (a,b) и $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$, то f строго убывает на (a,b)
3. $f' \geq 0 \implies f$ - нестрого возрастает
4. $f' \leq 0 \implies f$ - нестрого убывает
5. $f'(x) = 0 \forall x \in (a,b) \implies f = const$
6. f - n раз дифф-ма и $f^{(n)}(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f$ - многочлен степени $\leq n-1$
7. Если f - дифф-ма на $<a,b>$, причём $\exists M < \infty : \forall x \in <a,b> \quad |f'(x)| < M$, тогда f - равномерно непрерывна на $<a,b>$

48 Теорема Дарбу

Пусть f - дифф-ма на $[a,b]$. Тогда f' принимает каждое значение из промежутка от $f'(a)$ до $f'(b)$.

49 Правило Лопиталя

Пусть f, g - дифф-мы на (a,b), причём $g' \neq 0$ на (a,b).
Предположим, что $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0 \vee \infty$ и $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Тогда $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

50 Неравенства: обобщённое Бернулли, Юнга, Гёльдера, Минковского

1. $\dfrac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x, \ \ \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \ \ \forall x > -1, x \neq 0$
3. Обобщённое неравенство Бернулли: $\forall t > -1 \begin{cases} (1+t)^\alpha \leq 1 + \alpha t, & \forall \alpha \in (0,1) \\ (1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t, & \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \end{cases}$ z
4. Неравенсво Юнга: если $a, b > 0; \ \ p, q > 1 : \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$

5. Неравенство Гёльдера: $p, q > 1 : \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1;\ \ x_j, y_j \geq 0\ \ \forall 1 \leq j \leq n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

6. Неравенст Коши-Буняковского-Шварца (КБШ):

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$$

7. Неравенст Минковского: $x_j, y_j > 0;\ \ p > 1$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

51 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Пусть f n раз дифф-ма в т. x_0. Тогда:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j + o((x - x_0)^n),\ \ x \to x_0$$

52 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$f \in C^n < a, b >$ и $n + 1$ раз дифф-ма на (a, b); $x_0, x \in < a, b >$.
Тогда $\exists \xi$ между x_0 и x; $x_0 \neq x$

$$R_{n,x_0,f}(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$
$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \cdot (x - x_0)^j + R_{n,x_0,f}(x)\ \ x \to x_0$$

53 Иррациональность числа e

Теорема: число e иррациональное.

54

Тебе попался гроб. F

55 Выпуклость. Лемма о трёх хордах

$f :< a, b > \to \mathbb{R}$. f называется выпуклой (вниз) на $< a, b >$, если $\forall \alpha, \beta \in < a, b >$ часть графика $y = f(x)$ между α и β лежит не выше хорды, соединяющей точки графика $(\alpha; f(\alpha))$ и $(\beta; f(\beta))$

Лемма о трёх хордах: $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ - выпукла на $< a, b >$ и $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$. Тогда:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

56 Односторонняя дифференцируемость выпуклой функции

$f :< a, b >\to \mathbb{R}$, f - выпуклая (вниз). Тогда:

$$\forall x \in (a, b)\ \ \exists f'_-(x), f'_+(x) \in \mathbb{R} \land f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

57 Выпуклость и касательная. Опорная прямая

$f :< a, b >\to \mathbb{R}$. Предположим, что f - дифф-ма на $< a, b >$. Тогда:

$$\forall x, x_0 \in < a, b > \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$f :< a, b >\to \mathbb{R}$, $x_0 \in < a, b >$. Прямая $y = kx + b$ называется опорной прямой к функции f в т. x_0, если

1. $f(x_0) = kx_0 + b$
2. $f(x) \geq kx + b\ \ \forall x \in < a, b >$

58 Критерий выпуклости в терминах производных

Пусть $f :< a, b >\to \mathbb{R}$; $f \in C(< a, b >)$

- если f дифф-ма на (a, b), то f - выпукла на $< a, b > \iff f'$ нестрого возр. на (a, b)
- если f дважды дифф-ма на (a, b), то f - выпукла на $< a, b > \iff f''(x) \geq 0\ \ \forall x \in (a, b)$

59 Неравенство Йенсена

Пусть f - выпукла на $< a, b >$; $x_1, \ldots, x_n \in < a, b >$. Тогда:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

где $\lambda_j \geq 0\ \ \forall j = 1 \ldots n$ и $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.