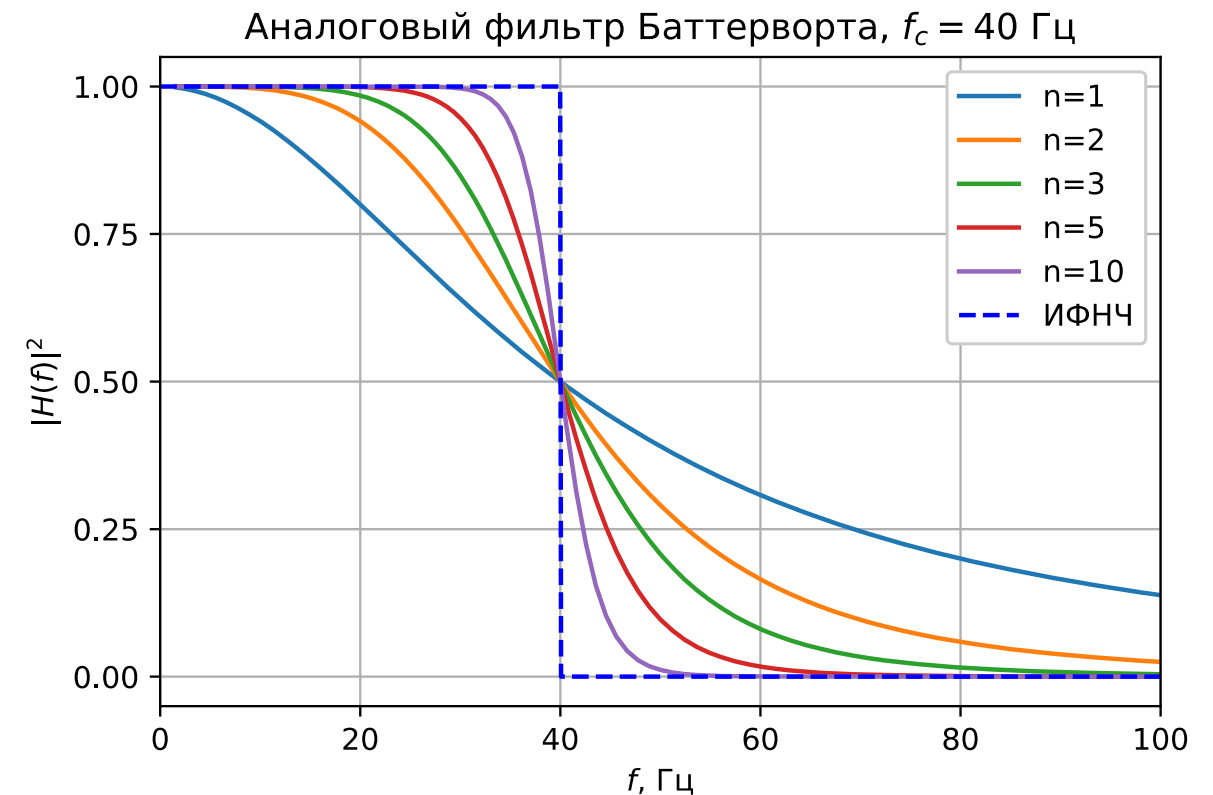


Лекция 4 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»

23 сентября 2024 г.

2. Интерфейс ввода систем ЦОС реального времени.

- Цифровая обработка сигналов в системах реального времени.
- Эффект наложения спектров. Фильтры нижних частот для защиты от наложения спектров. Аналоговые фильтры Баттерворта и Чебышева 1-рода.
- Аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Шум квантования n – разрядного АЦП.
- Иллюстрация взаимосвязи между разрешающей способностью АЦП и параметрами аналогового фильтра против наложения.



Цифровая обработка сигналов (ЦОС) в системах реального времени.

Большинство информационных сигналов, получаемых от различных датчиков, являются по своей форме аналоговыми, что означает непрерывное изменение во времени физических величин, например, напряжения, тока.

Сигналы, применяемые в ЦОС, обычно получают из аналоговых, дискретизованных через равные интервалы времени и преобразованных в цифровой вид.



Основные преимущества ЦОС

- *Гарантированная точность.* Точность определяется только числом задействованных битов в представлении сигналов и характеристик систем.
- *Совершенная воспроизводимость.* Цифровые записи можно копировать или воспроизводить многократно без ухудшения качества сигнала.
- *Большая гибкость.* Системы ЦОС можно запрограммировать и перепрограммировать на выполнение различных функций без изменения оборудования.
- *Превосходная производительность.*
- *Практически отсутствует зависимость характеристик от температуры и старения.*

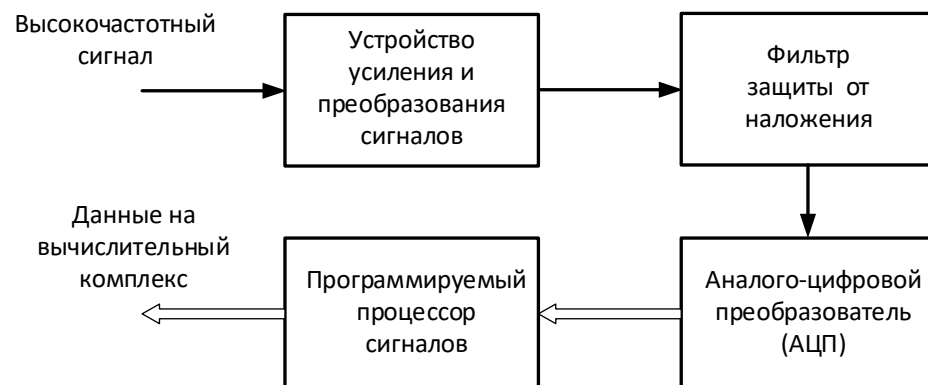
Возможные трудности использования систем ЦОС

- *Соотношение скорости и стоимости.*
- *Конечная разрядность.*
- *Время разработки.*

Примеры областей применения систем ЦОС реального времени:

- телекоммуникационные системы,
- радиолокация,
- спутниковая навигация,
- цифровое медицинское оборудование,
- звукозапись,
- космические аппараты,
- исследовательское оборудование.

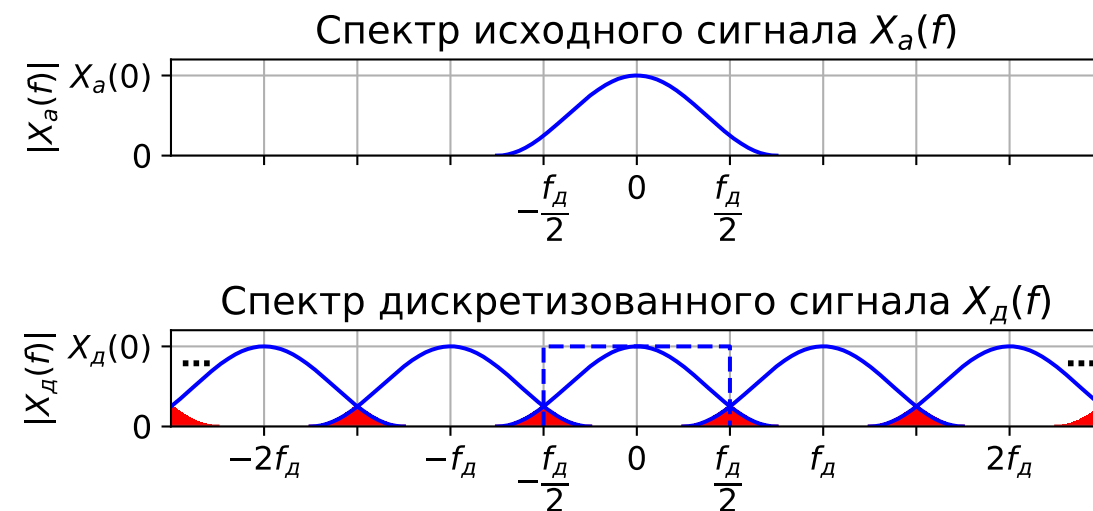
Блок-схема устройства обработки сигналов



Эффект наложения спектров

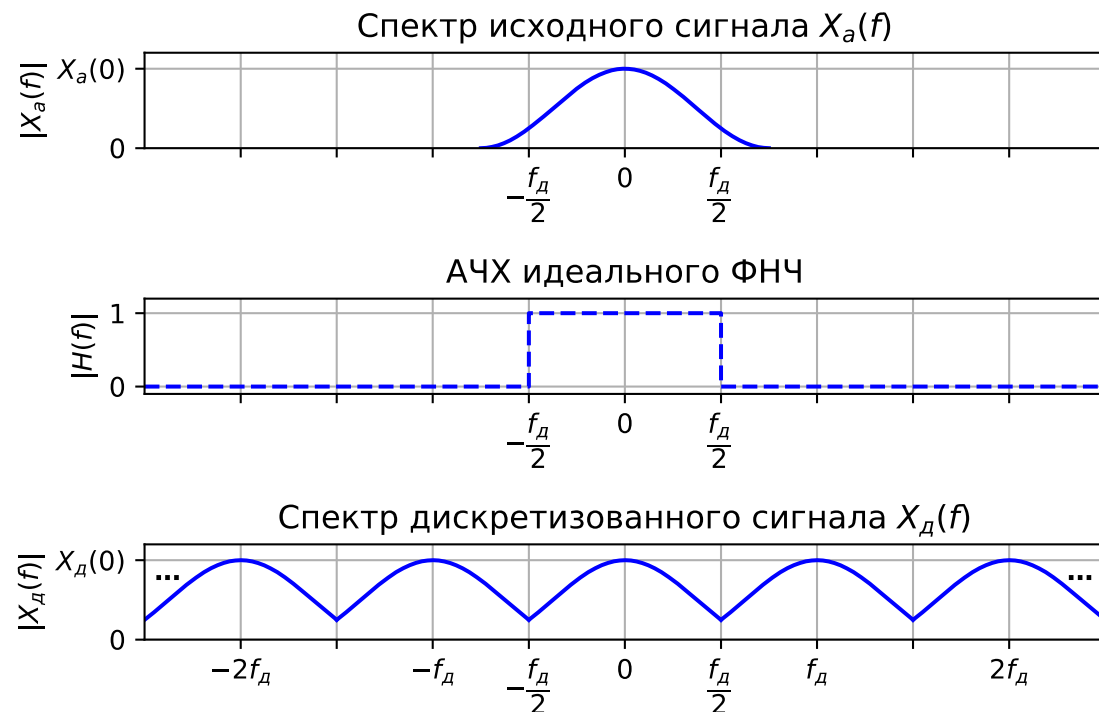
Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом $[-f_d/2, f_d/2]$, то возникает эффект наложения (англ. aliasing): спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают.

Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза $f_c = f_d/2$, при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах $|f| > f_c$ не сохраняется.



Аналоговые фильтры нижних частот защиты от наложения спектров

Аналоговые фильтры нижних частот защиты от наложения спектров



Импульсной характеристикой линейного аналогового фильтра $h(t)$ называется ее реакция на дельта-функцию $\delta(t)$. Отклик $y(t)$ линейного аналогового фильтра определяется свёрткой входного воздействия $x(t)$ с импульсной характеристикой $h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau.$$

Пусть $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)$, $y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f)$, $h(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} H(f)$. Тогда из свойств преобразования Фурье следует, что

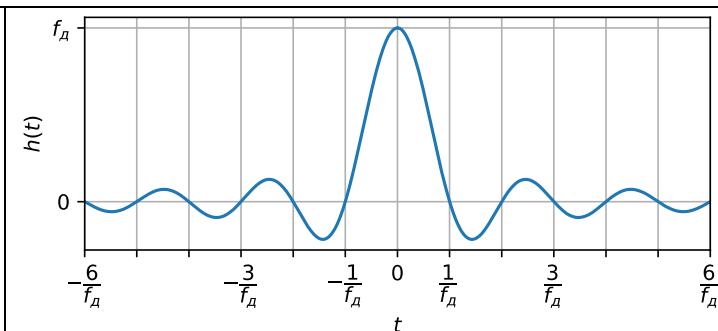
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f)H(f);$$
$$Y(f) = X(f)H(f).$$

- $H(f)$ — частотная характеристика фильтра,
- $|H(f)|$ — амплитудно-частотная характеристика фильтра (АЧХ).

Для идеального фильтра нижних частот (ФНЧ):

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{если } |f| \leq f_d / 2; \\ 0, & \text{если } |f| > f_d / 2; \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{\sin(\pi f_d t)}{\pi t}.$$



Импульсная характеристика физически реализуемых в реальном времени фильтров каузальна: $h(t) \equiv 0$ для $t < 0$.

Идеальный фильтр нижних частот физически не реализуем из-за некаузальности его импульсной характеристики.

Аналоговые фильтры нижних частот защиты от наложения спектров

В связи с этим используются аналоговые фильтры, частотная характеристика которых близка к идеальной. Рассмотрим примеры таких фильтров. Обычно их можно реализовать в виде каскадного соединения RLC-звеньев.

Рассмотрим физически реализуемые фильтры нижних частот. Будем рассматривать в качестве характеристики таких фильтров квадрат модуля частотной характеристики — коэффициент передачи мощности.

$$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f)$$

Эта характеристика всегда вещественна и потому удобна для задания исходных данных к синтезу фильтров. Для характеристик в децибелах (дБ)

$$10\lg |H(f)|^2 = 20\lg |H(f)|.$$

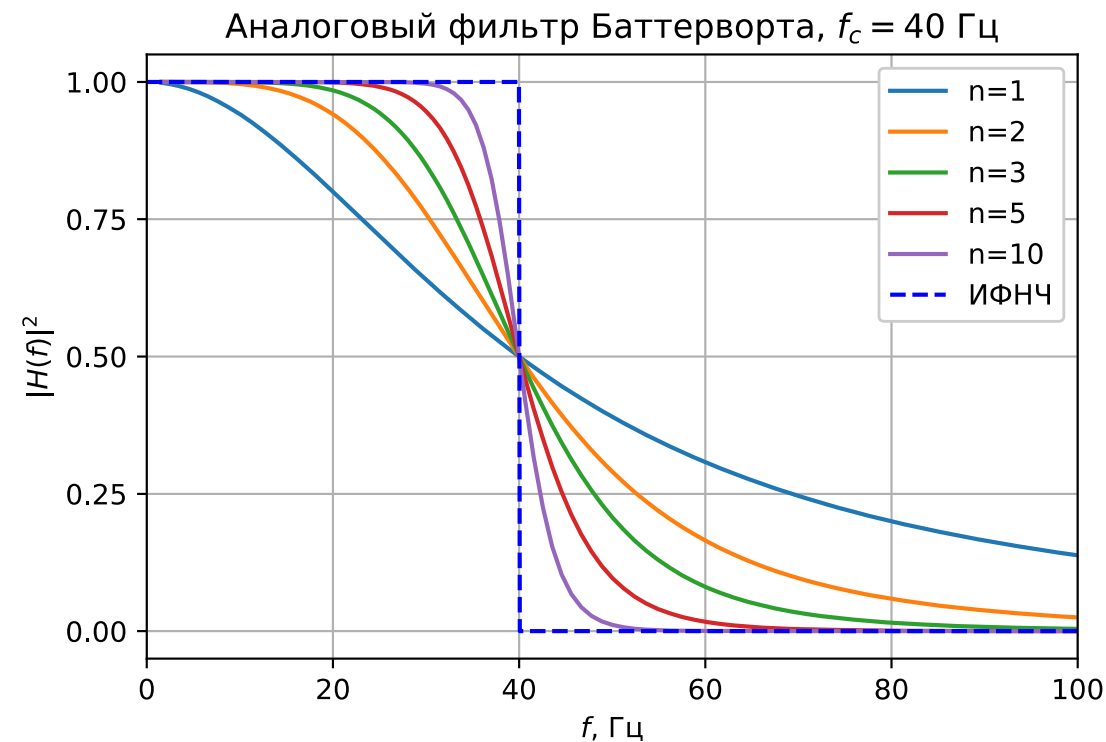
Фильтр Баттерворта

Частотой среза f_c реального фильтра нижних частот обычно¹ называют такую частоту, что $|H(f_c)|^2 = 1/2$. Соответственно, $|H(f_c)| = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$. Компоненты с более высокими

частотами должны существенно подавляться. Обычно частота среза согласовывается с частотой дискретизации. Для фильтра Баттерворта коэффициент передачи мощности

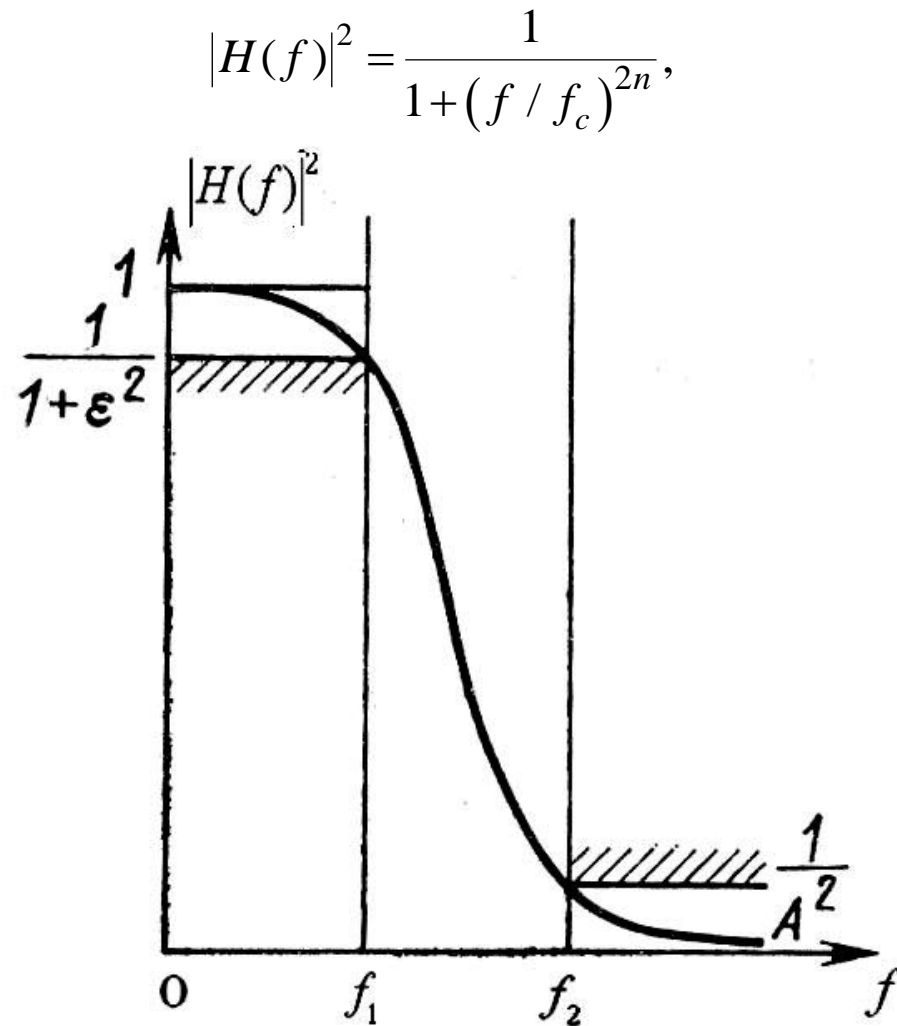
$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f / f_c)^{2n}},$$

где n — целое число, определяющее порядок фильтра



¹ Для фильтров Чебышёва определение f_c отличается (см. далее).

Аналоговые фильтры нижних частот защиты от наложения спектров



Параметры фильтра f_c и n рассчитываются следующим образом. Сначала запишем два условия для границ переходной полосы

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{f_1}{f_c}\right)^{2n}};$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{f_2}{f_c}\right)^{2n}}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{f_1}{f_c}\right)^{2n} = \varepsilon^2; \quad \left(\frac{f_2}{f_c}\right)^{2n} = A^2 - 1; \quad \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{2n} = \frac{\varepsilon^2}{A^2 - 1}.$$

Из этих соотношений получаем:

для частоты среза

$$f_c = \frac{f_1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}.$$

для порядка фильтра n (используется округление вверх, англ. *ceil*)

$$n = \left\lceil \frac{\lg \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}}{\lg \left(\frac{f_1}{f_2}\right)} \right\rceil.$$

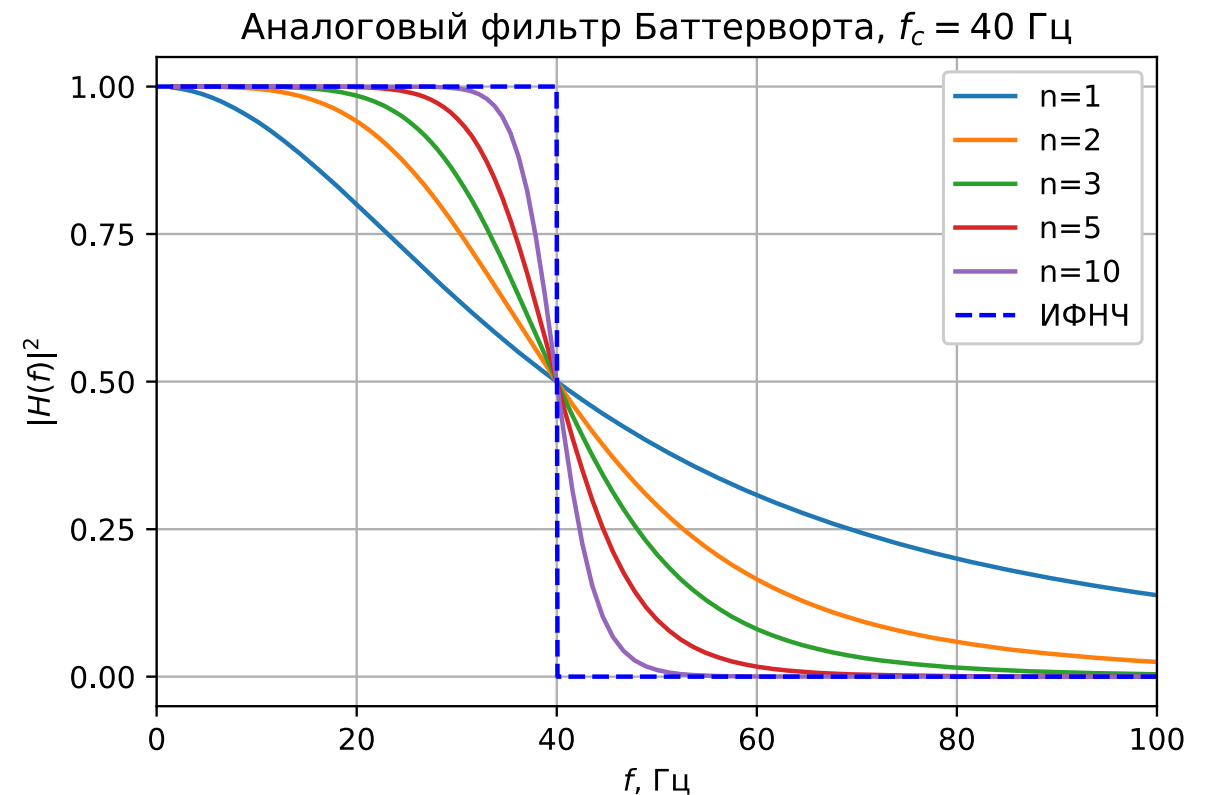
Таким образом, все параметры функции $|H(f)|^2$ определены по заданным ослаблениям $\frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ и $\frac{1}{A^2}$ на границах переходной полосы $[f_1, f_2]$.

Аналоговые фильтры нижних частот защиты от наложения спектров

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f / f_c)^{2n}},$$

Основные свойства фильтра Баттерворта:

- на частоте среза $f = f_c$ ослабление, вносимое фильтром, составляет $10\lg 0,5 = -3\text{дБ}$ и не зависит от порядка фильтра n ;
- функция $|H(f)|^2$ монотонно убывает с ростом f и имеет максимальное значение, равное единице при $f = 0$;
- первые $(2n - 1)$ производных функции $|H(f)|^2$ равны нулю при $f = 0$; по этой причине фильтры Баттерворта называют фильтрами с максимально плоскими частотными характеристиками;
- чем больше n , тем точнее аппроксимируется идеальная форма частотной характеристики ФНЧ.



Аналоговые фильтры нижних частот защиты от наложения спектров

Фильтр Чебышёва I рода

Коэффициент передачи мощности ФНЧ Чебышева первого рода для частоты $\nu = f / f_c$, нормированной на частоту среза фильтра, даётся выражением

$$|H(\nu)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\nu)}.$$

Здесь $\varepsilon \leq 1$ – коэффициент, задающий неравномерность в полосе пропускания, а $T_n(\nu)$ – полином Чебышева n -го порядка, определяемый соотношениями

$$T_n(\nu) = \begin{cases} \cos(n \arccos \nu), & |\nu| \leq 1, \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} \nu), & |\nu| > 1. \end{cases}$$

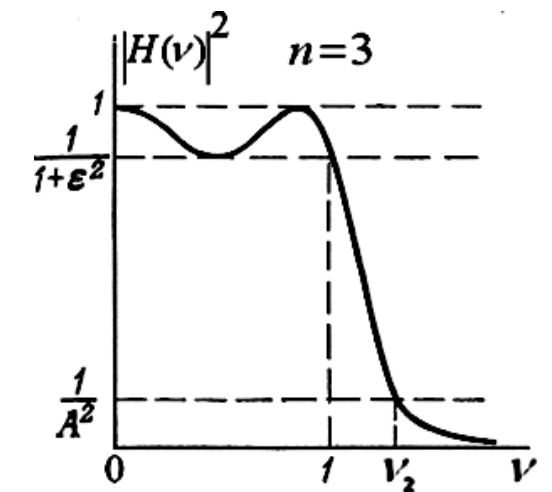
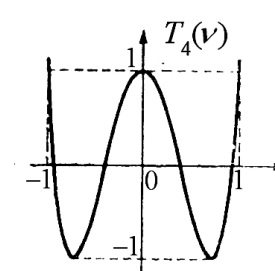
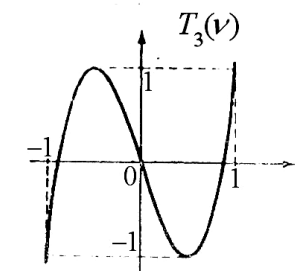
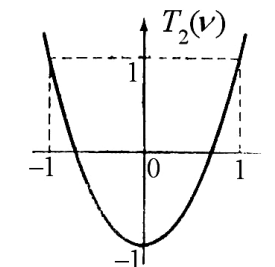
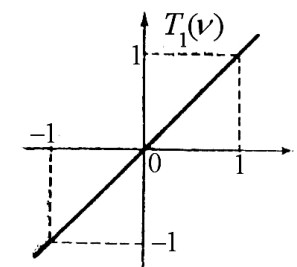
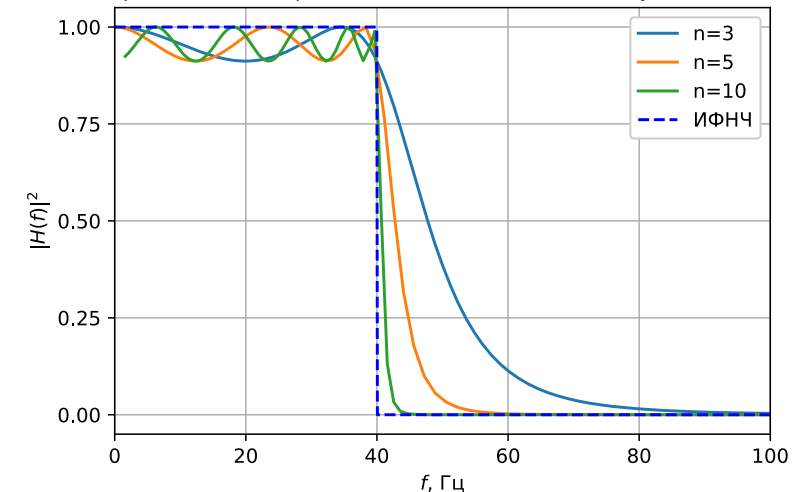
Для полиномов Чебышева имеет место рекуррентное соотношение

$$T_n(\nu) = 2\nu T_{n-1}(\nu) - T_{n-2}(\nu), \quad n \geq 2,$$

причём $T_0(\nu) \equiv 1$ и $T_1(\nu) = \nu$.

Для фильтра Чебышева I рода в качестве частоты среза берётся граничная частота полосы пропускания.

Фильтр Чебышёва I рода, $f_c = 40$ Гц, величина пульсаций 0.4 дБ



Аналоговые фильтры нижних частот защиты от наложения спектров

Пример. Фильтр с чебышевской характеристикой 3-го порядка и частотой среза $f_c = 40$ Гц имеет величину пульсаций 0,4 дБ. Определить ослабление, вносимое этим фильтром на частоте $3f_c$.

Решение

На частоте среза $\nu = 1$ и $T_n(1) = 1$ при любом n . Поэтому

$$10 \lg \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(1)} = -0,4 \text{ дБ}.$$

Максимальная величина относительного затухания (по мощности) в полосе пропускания по условию составляет 0,4 дБ. Следовательно, колебательный параметр ε^2 определяется как

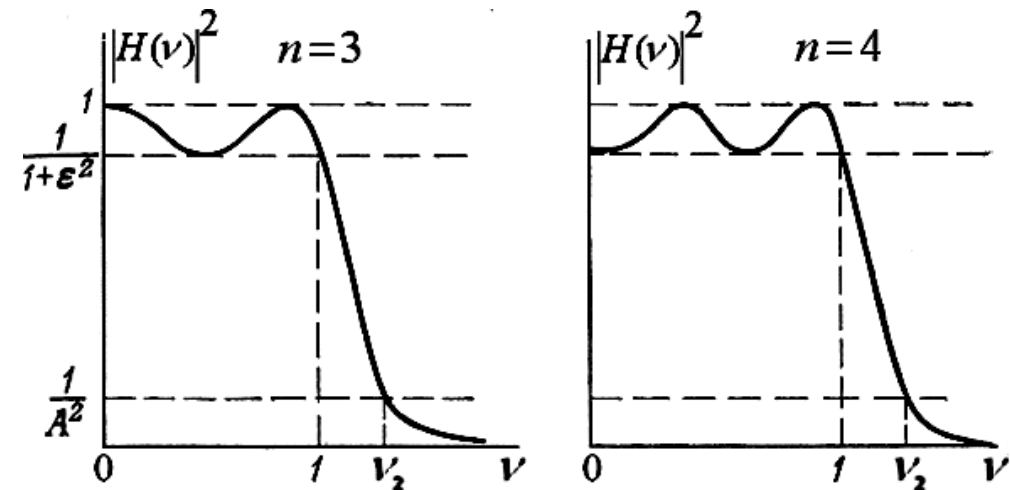
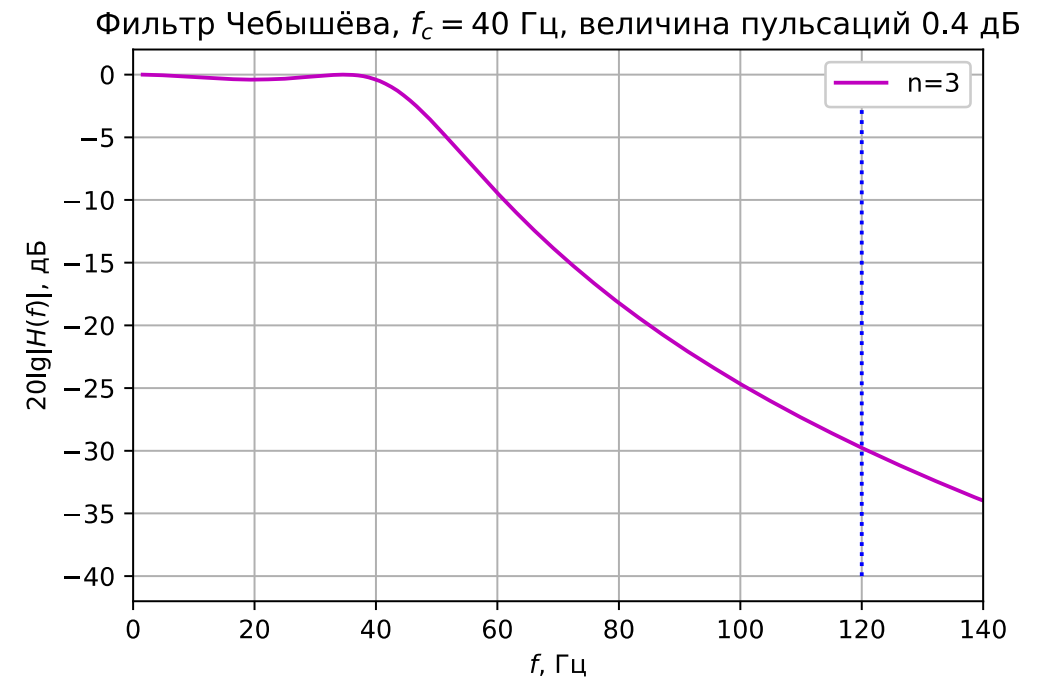
$$\varepsilon^2 = 10^{0,04} - 1.$$

Многочлен Чебышёва 3-го порядка будет иметь вид

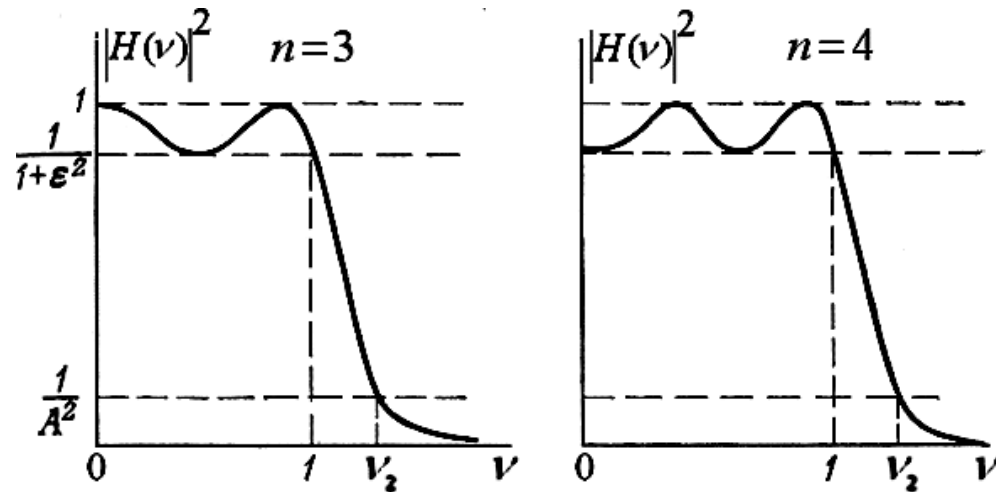
$$T_3(\nu) = 2\nu T_2(\nu) - T_1(\nu) = 2\nu[2\nu T_1(\nu) - T_0(\nu)] - T_1(\nu) = 4\nu^3 - 3\nu.$$

На частоте $\nu = 3$, $T_3(\nu) = 99$. Ослабление, вносимое фильтром на частоте $\nu = 3$, составит

$$-10 \lg [1 / (1 + (10^{0,04} - 1) 99^2)] \approx 30 \text{ дБ}.$$



Аналоговые фильтры нижних частот защиты от наложения спектров



На рисунке демонстрируется колебательный характер полиномов Чебышёва в интервале $-1 \leq v \leq 1$. При $v > 1$ имеет быстрый рост $T_n(v)$. Асимптотически для $v \gg 1$ имеем $T_n(v) \approx 2^{n-1}v^n$.

Характерной особенностью этих полиномов является то, что среди всех полиномов степени n с одинаковым коэффициентом при старшем члене функция $T_n(v)$ имеет наименьшее отклонение от нуля на интервале $-1 \leq v \leq 1$. На границе полосы пропускания при $v = 1$ ($f = f_c$) $T_n(1) = 1$ для всех n .

С ростом n крутизна спада частотной характеристики ФНЧ с чебышевской аппроксимацией на частотах выше граничной увеличивается значительно.

Примечание. Задача определения степени близости реального ФНЧ к идеальному возникает постоянно. Для этого может быть использован метод наименьших квадратов. Другой критерий близости – критерий Чебышёва, который в качестве меры расстояния между двумя кривыми использует максимальное расстояние между ними. При приближении по Чебышёву параметры подбираются таким образом, чтобы сделать максимальную ошибку как можно меньше, т. е. минимизируется максимальная ошибка. Поэтому этот процесс часто называют минимаксной стратегией приближения. Для фильтров Чебышёва минимаксный критерий является основным.

Примечание. Мы рассмотрели аналоговые фильтры Баттерворта и Чебышёва I рода, которые применяются для фильтрации аналогового сигнала. У них также есть цифровые реализации, предназначенные для фильтрации цифровых сигналов. Их мы рассмотрим в дальнейшем.

Аналого-цифровой преобразователь (АЦП).



Процесс преобразования аналогового сигнала в цифровой состоит из дискретизации и квантования, которые осуществляются аналого-цифровым преобразователем (АЦП).

В результате дискретизации взятием отсчетов мы получаем выборки аналогового сигнала $x_a(t)$:

$$x[k] = x_a(k\Delta t),$$

где Δt — шаг дискретизации.

После квантования по уровню, мы получаем цифровой сигнал:

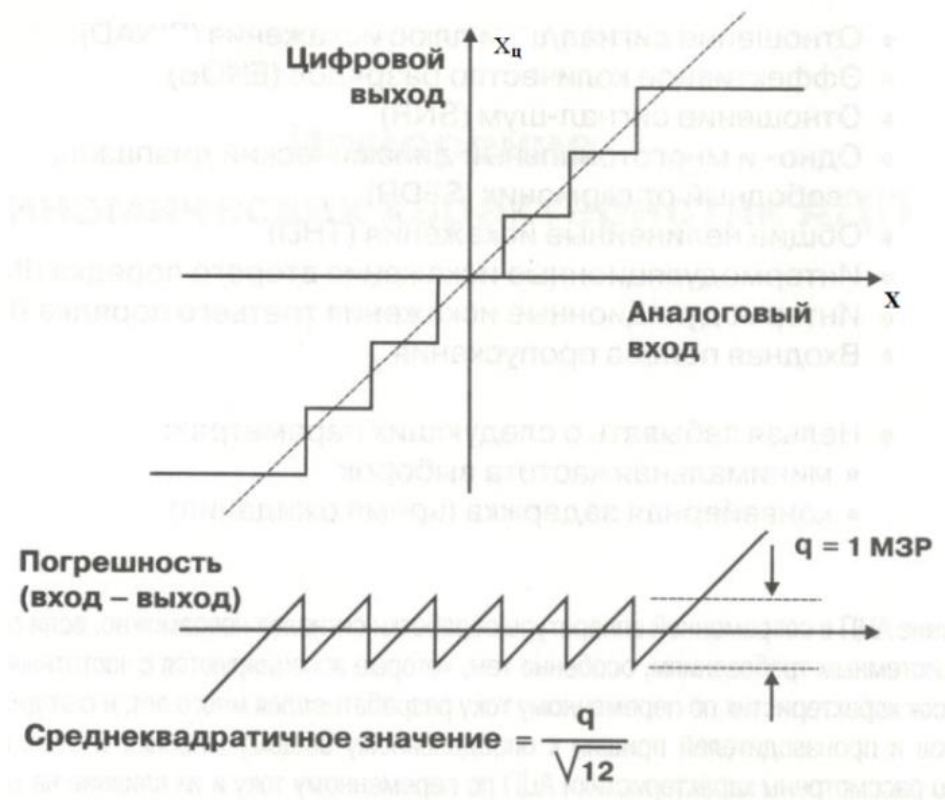
$$x_{\text{ц}}[k] = x[k] - e[k],$$

где $e[k] = x[k] - x_{\text{ц}}[k]$ — это погрешность квантования — некоторая реализацию шума квантования. Обычно число уровней квантования 2^n , где n — разрядность АЦП.

Пример. Звукозапись в виде .wav –файла с глубиной кодирования 16 бит представляет собой цифровой сигнал с $2^{16} = 65536$ уровнями квантования.

Пример. АЦП осциллографа PV6501 8 битное (восьмиразрядное). Каждый отсчет в буфере описывается одним из $2^8 = 256$ состояний.

Шум квантования n-разрядного АЦП



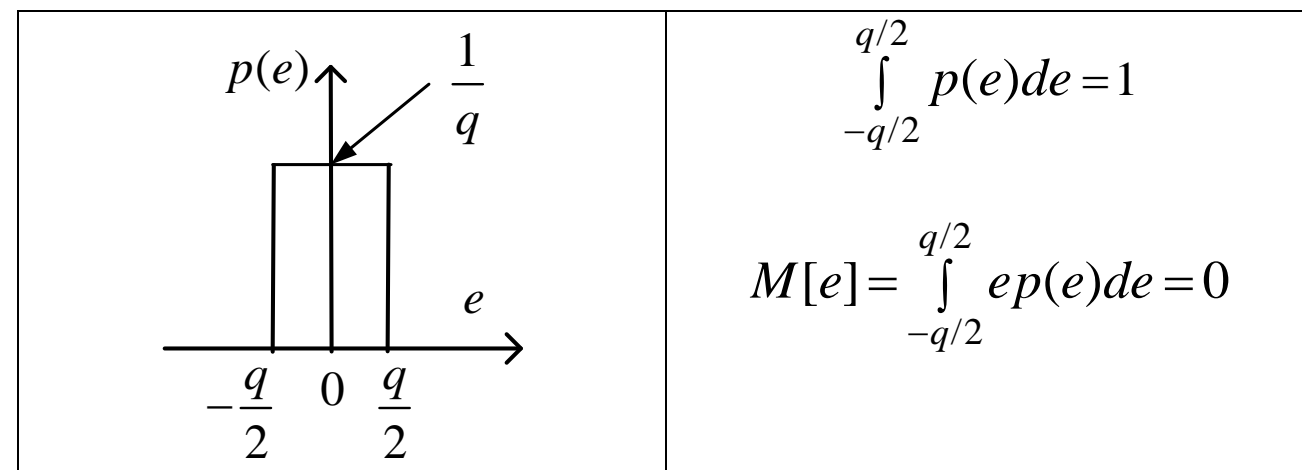
Рассмотрим погрешность квантования для стандартного АЦП

$$e[k] = x[k] - x_{ц}[k].$$

Максимальная по модулю погрешность квантования составляет половину единицы младшего значащего разряда (МЗР) q (шага квантования):

$$-\frac{q}{2} \leq e[k] \leq \frac{q}{2}$$

Заметим, что для каждого момента времени все возможные значения погрешности равновероятны. Шум квантования не коррелирован с входным сигналом и имеет равномерное распределение на отрезке. Плотность вероятности $p(e)$ ошибки квантования изображена на рисунке.



Ошибка квантования имеет нулевое среднее и дисперсию

$$\sigma_e^2 = M[e^2] - (M[e])^2 = \int_{-q/2}^{q/2} e^2 p(e)de = \frac{1}{q} \int_{-q/2}^{q/2} e^2 de = \frac{q^2}{12}.$$

Среднеквадратичное значение шума квантования

$$\sigma_e = \frac{q}{\sqrt{12}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}.$$

АЦП и фильтр защиты от наложения

Заметим, что пилообразная погрешность создаёт гармоники, лежащие дальше полосы $[0, f_d/2]$. Однако все высшие гармоники должны переноситься (эффект наложения) в эту полосу и, затем суммируясь, произвести шум с действующим

$$\text{значением } \sigma_e = \frac{q}{\sqrt{12}} = \frac{q}{2\sqrt{3}}.$$

Пусть на входе АЦП с диапазоном напряжения входного

$$\text{сигнала } \left[-\frac{q \cdot 2^n}{2}, \frac{q \cdot 2^n}{2} \right]$$

действует полномасштабная синусоида

$$x(t) = \frac{q \cdot 2^n}{2} \sin 2\pi f t.$$

Среднеквадратичное значение входного сигнала

$$\sigma_x = \frac{q \cdot 2^n}{2\sqrt{2}}.$$

Отношение «сигнал/шум» (SNR — Signal to Noise Ratio)

$$SNR = 20 \lg \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_e} \right) = 20 \lg \left(\frac{q \cdot 2^n / 2\sqrt{2}}{q / 2\sqrt{3}} \right) = 20 \lg 2^n + 20 \lg \sqrt{2/3}$$
$$SNR = 6,02n + 1,76 \text{ (дБ)}$$

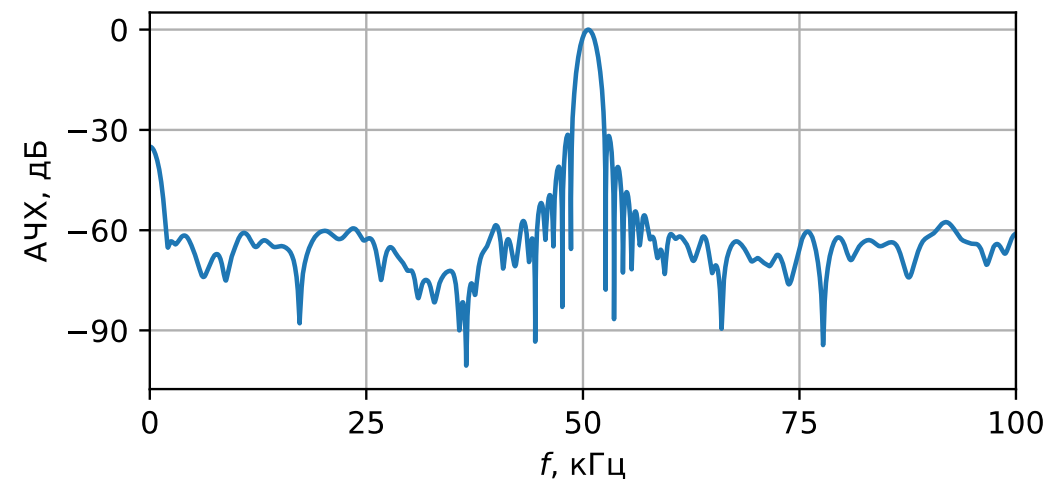
Относительный уровень шума квантования

$$\gamma = 20 \lg \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_x} \right) = 20 \lg \left(\frac{q / 2\sqrt{3}}{q \cdot 2^n / 2\sqrt{2}} \right) = 20 \lg \frac{1}{2^n \sqrt{1,5}}$$
$$\gamma = -6,02n - 1,76 \text{ (дБ)}$$

Пример. На рисунке приведена оценка спектра сигнала, состоящего из отрезка синусоиды, полученная цифровым осциллографом PV6501 с $n = 8$ битным АЦП с использованием окна Ханна. Относительный уровень шума квантования в дБ будет

$$\gamma = -(6,02n + 1,76) \text{ дБ} \approx -50 \text{ дБ}.$$

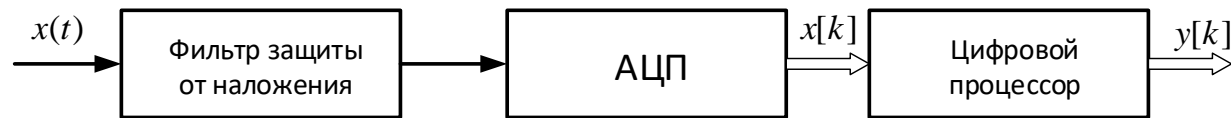
Проводить измерения сигналов и их спектров ниже этого уровня бессмысленно.



АЦП и фильтр защиты от наложения

Иллюстрация взаимосвязи между разрешающей способностью АЦП и параметрами аналогового фильтра против наложения [1]

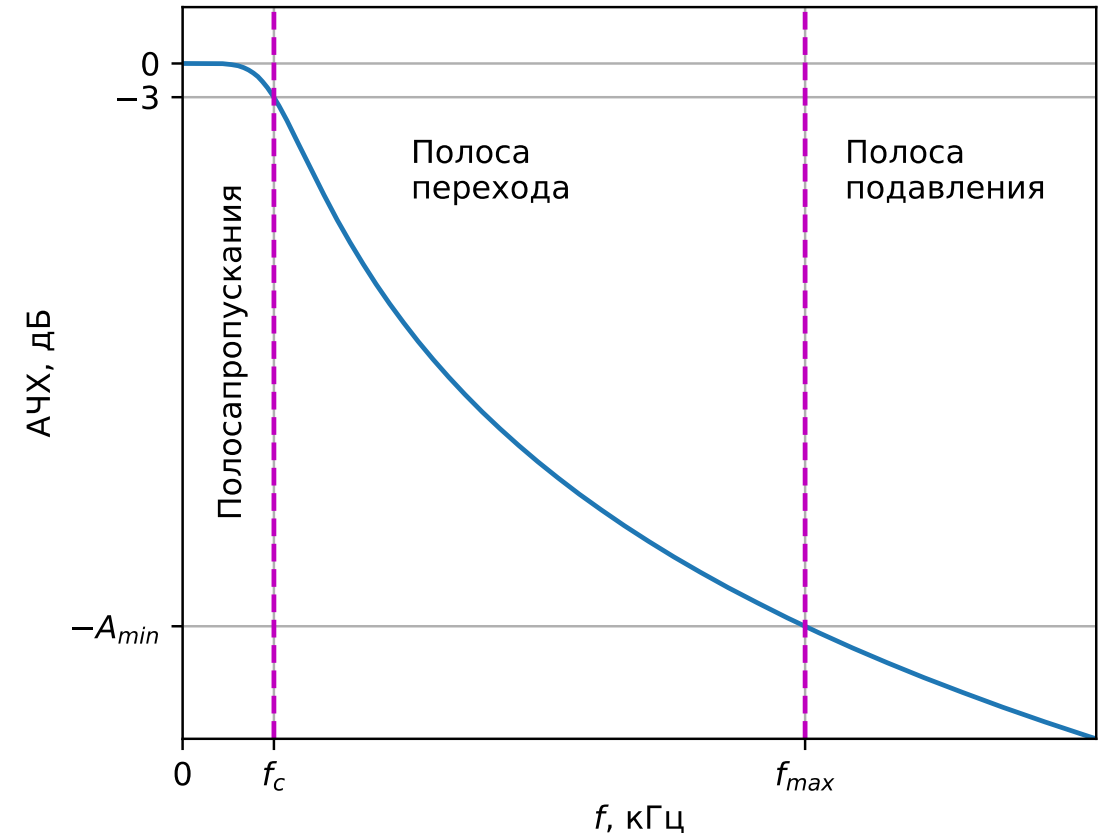
На рисунке в качестве примера изображено устройство цифровой обработки системы ЦОС реального времени.



Предположим, что интересующая нас полоса частот $[0, 4 \text{ кГц}]$ и что используются 8-разрядный биполярный АЦП и фильтр Баттерворта третьего порядка с амплитудно-частотной характеристикой

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f / f_c)^6}}.$$

Считаем, что на входе действует широкополосный сигнал, АЧХ которого примерно постоянно в полосах пропускания и перехода фильтра.



Оценить

- 1) минимальное затухание в полосе подавления A_{\min} для фильтра защиты от наложения;
- 2) минимальную частоту дискретизации $f_{\text{д min}}$.

АЦП и фильтр защиты от наложения

Решение. Относительный уровень шумов квантования АЦП

$$\gamma = -6,02n - 1,76 \text{ (дБ)} \approx -50 \text{ дБ}$$

Ниже этого уровня производить обработку сигнала не имеет смысла. Тогда минимальное затухание в полосе подавления фильтра защиты от наложения нужно выбрать

$$A_{\min} = 50 \text{ дБ}.$$

Частота среза ограничивает полосу пропускания фильтра. Поэтому она зависит от границы нужного нам диапазона частот ($[0, 4 \text{ кГц}]$). Тогда $f_c = 4 \text{ кГц}$

Воспользуемся формулой зависимости коэффициента передачи мощности от частоты (квадрат АЧХ), чтобы определить граничную частоту между полосой перехода и полосой подавления f_{\max} :

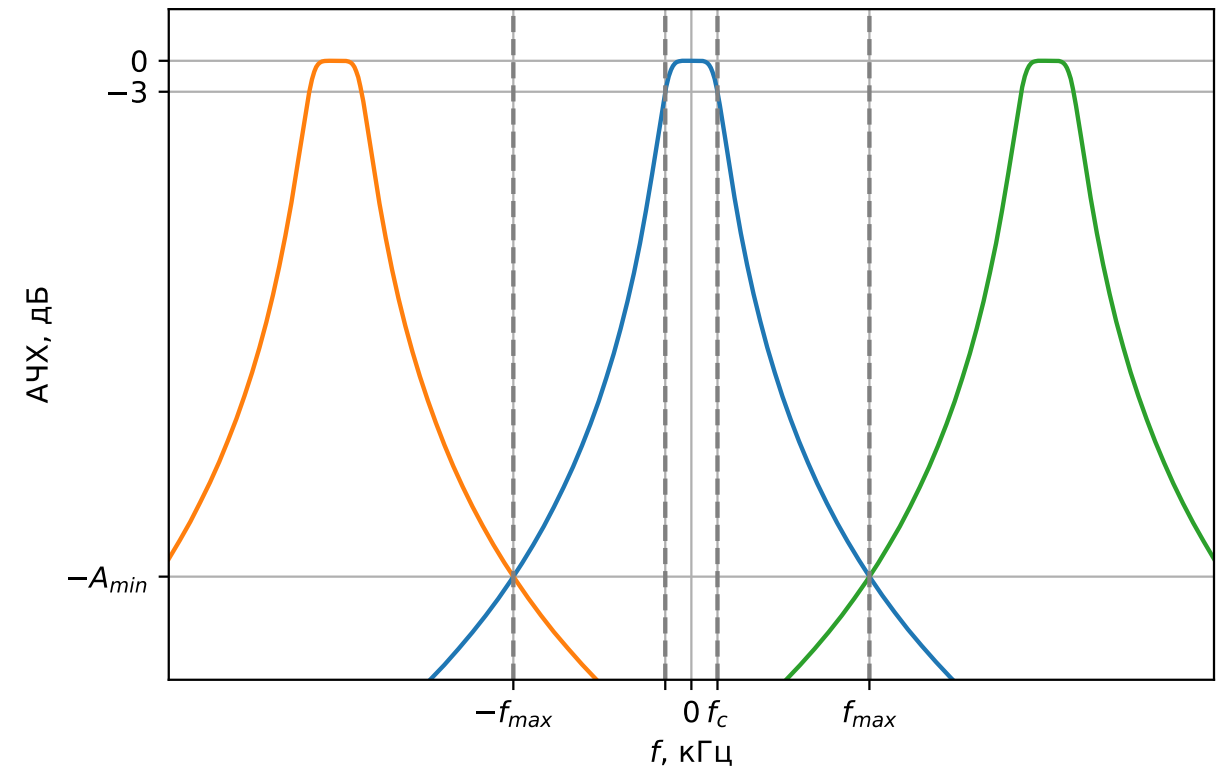
$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f / f_c)^6},$$

$$10 \lg |H(f_{\max})|^2 = -A_{\min}.$$

Отсюда находим, что

$$(f_{\max} / f_c)^6 = 10^5 - 1.$$

Откуда $f_{\max} = 27,25 \text{ кГц}$.



Как видно из рисунка выше, для того, чтобы избежать дополнительных искажений, при периодическом повторении спектра при дискретизации не должно быть перекрытия хвостов выше уровня A_{\min} . Получаем, что

$$f_{\text{д}} / 2 \geq f_{\max}$$

Минимальная частота дискретизации

$$f_{\text{д min}} = 2f_{\max} = 54,5 \text{ кГц}.$$

Задачи для самостоятельного решения с лекции 23 сентября 2024 г.

№1. На рисунке в качестве примера изображено устройство цифровой обработки видеосигнала системы ЦОС реального времени.



Предположим, что используются 16-разрядный биполярный АЦП и фильтр Баттерворта третьего порядка с частотой среза $f_c = 10$ кГц и амплитудно-частотной характеристикой

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f / f_c)^6}}.$$

Предположим, что входной сигнал является широкополосным. Оценить минимальное затухание в полосе подавления A_{\min} для фильтра защиты от наложения. Оценить минимальную частоту дискретизации f_d .

№2. Аналоговый фильтр Чебышёва I рода 3-го порядка с частотой среза $f_c = 40$ Гц имеет величину пульсаций 0,5 дБ. Определить ослабление, вносимое этим фильтром на частоте $2f_c$.

№3. Имеется одноканальная (моно) аудиозапись с битовой глубиной 16 бит на отсчёт (разрядность АЦП равна 16), представленная в виде .wav файла. Частота дискретизации 44100 Гц. Определите число уровней квантования АЦП и шаг дискретизации Δt . Оцените длительность сигнала, если объем файла составляет 280 КБ и никакое дополнительное сжатие не производится.

Примечание. Файл доступен по ссылке

<https://freesound.org/people/xserra/sounds/219759/>

Список литературы

[1] Цифровая обработка сигналов. Практический подход / Эммануил Айфичер, Барри Джервис ; [пер. с англ. И. Ю. Дорошенко, А. В. Назаренко]. - 2-е изд. – М.: Вильямс, 2008