Лекция 15 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»
9 декабря 2024 г.

Лекция-консультация перед экзаменом/зачетом. Разбор задач.

<table>
<tr><td></td><td>ФРКТ</td><td>ФАКТ</td></tr>
<tr><td>9 семестр (осенний)</td><td>Основы цифровой обработки сигналов
(семестровый)
9 семестр — экзамен</td><td rowspan="2">Цифровая обработка сигналов
(годовой)
9 семестр — зачет
10 семестр — экзамен</td></tr>
<tr><td>10 семестр (весенний)</td><td>Цифровая обработка сигналов
(семестровый)
10 семестр — экзамен</td></tr>
</table>

Зачет и экзамен

«Цифровая обработка сигналов» зачет ФАКТ

16 декабря 2023 г. 12:20 аудитория Актовый зал ЛК

Зачет ФАКТ (недиффиренцированный) состоит из письменной и устной части. Обе части являются обязательными. Устная часть проводится сразу после выполнения письменной работы.

Часть студентов ФАКТ смогут зачесть результат работы в семестре на зачете (если по обеим контрольным работам оценка не ниже хор5).

«Основы цифровой обработки сигналов» экзамен ФРКТ

28 декабря 2024 г. 9:00

аудитория 4.22 УЛК-1 (Физтех.Цифра)

Экзамен ФРКТ состоит из письменной и устной части. Обе части являются обязательными. Устная часть проводится сразу после выполнения письменной работы.

Часть студентов ФРКТ по результатам работы в семестре (список в LMS) смогут сдавать экзамен досрочно *16 декабря 2024 г. в 9:00 в аудитории 4.22 УЛК-1 (Физтех.Цифра).*

Участие в досрочной сдаче не является обязательным и никак не влияет на оценку.

Письменная часть

Проводится по билетам. Содержание билета:

№1. Теоретический вопрос по программе курса.

№2. Задача по темам первой контрольной работы (блок 1 из программы курса)

№3. Задача по темам второй контрольной работы (блок 2 из программы курса)

При проведении письменной части допускается использование студентами конспектов лекций (в том числе в электронном виде), справочной литературы и вычислительной техники.

Устная часть

Устная часть включает в себя ответы на вопросы экзаменатора по письменной работе и по программе курса. Экзаменатору доступны результаты контрольных работ и решения задач с лекций (тестов в LMS).

Зачет и экзамен

Экзамен ФРКТ 28 декабря 2024 г.

Порядок запуска групп на экзамен

9:00	М01-401, М01-402, М01-403, М01-404, инд. план
11:00	М01-405, М01-406, М01-407, С01-919

Зачет и экзамен

Теоретические вопросы билетов.

Блок 1. Дискретные преобразование сигналов, интерфейсы ввода и вывода систем ЦОС реального времени

1) Эффект наложения спектров при дискретизации аналогового сигнала. 2.5

2) Теорема Котельникова во временной области. 2.6

3) Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов, дискретное во времени преобразование Фурье (формулы прямого и обратного преобразования). 2.9

4) Связь между ДПФ и ДВПФ для периодических последовательностей. 3.9

5) Восстановление ДВПФ по коэффициентам ДПФ. Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов в сигнал (Zero Padding). 3.6

6) Частотная ось ДПФ: связь между номером отсчета ДПФ и частотой в спектре дискретизованного сигнала. 3.15

7) Шум квантования *n* – разрядного АЦП. Указать относительные уровни шумов квантования (в дБ) для 8-ми, 12-ти и 16-ти разрядного АЦП. 4.11-12

8) Восстановление сигналов по дискретным отсчётам путём интерполяции: ступенчатая интерполяция, восстановление косинусоидального сигнала с помощью ЦАП. 5.10

Блок 2. Основы цифровой фильтрации.

9) Критерий каузальности и условие физической реализуемости для линейной стационарной дискретной системы. 6.9

10) Два критерия устойчивости физически реализуемого цифрового фильтра (основанный на нуль-полюсной диаграмме и основанный на виде импульсной характеристики). 8.9-10

11) Метод разложения на простые дроби для вычисления обратного *z*-преобразования. 7.11

Зачет и экзамен

12) Метод контурного интегрирования (на основе теоремы Коши о вычетах) для вычисления обратного *z*-преобразования. 7.12

13) Передаточная функция дискретной линейной стационарной системы, ее связь с импульсной характеристикой, разностным уравнением, амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками. 8.7

14) Прямая форма (Direct form I) реализации цифровых фильтров. 9.11.3

15) Прямая каноническая форма (Direct form II) реализации цифровых фильтров. 9.11.4-5

16) КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой. 11.3-12

17) КИХ фильтры: общий вид передаточной функции и разностного уравнения, нерекурсивный способ реализации, устойчивость. 11. 13-14

18) Биквадратный блок. 9.11.13-15

19) Нерекурсивный фильтр 1-го порядка: передаточная функция, разностное уравнение, АЧХ, ФЧХ, импульсная и переходная характеристики. 10.2-7

20) Нерекурсивный фильтр 2-го порядка: передаточная функция, разностное уравнение, АЧХ, ФЧХ, импульсная и переходная характеристики. 10.8-10

21) Реализация цифровых фильтров путем параллельного соединения блоков 1-ого и 2-ого порядка. 9.11.11-12

22) Синтез БИХ-фильтров методом инвариантной импульсной характеристики. 9.12.7-14

23) Синтез БИХ-фильтров методом билинейного *z*-преобразования. 9.12.15-20

24) Реализация цифровых фильтров в виде каскадного соединения блоков первого и второго порядка.

9.11.9-10

Зачет и экзамен

Примеры дополнительных вопросов

Ниже приведены примеры основных вопросов по программе курса.

- В чем заключается эффект наложения спектров при дискретизации аналоговых сигналов?
- К чему приводит эффект растекания спектральных компонент и чем он вызван?
- Какой период (по частоте) у спектра дискретизованного сигнала?
- Приведите определение для частоты дискретизации $f_д$ и частоты Найквиста ($f_д / 2$).
- Сформулируйте теорему Котельникова для сигнала с финитным спектром.
- Запишите формулы анализа и синтеза для преобразования Фурье, ДПФ, ДВПФ, *z*-преобразования. Укажите, в каком пространстве находится аргумент функций, получающихся при анализе и при синтезе (целые числа, действительные числа, комплексные числа).
- Сформулируйте, в чем заключается связь между ДПФ и ДВПФ для случая
  - последовательности конечной длительности;
  - периодической последовательности.
- Чему равно разрешение по частоте при вычислении ДПФ? Как можно улучшить это разрешение без изменения спектра (ДВПФ) последовательности отсчетов. f_g/N
- Определите следующие характеристики дискретной линейной стационарной системы:
  - импульсная характеристика $h[k]$,
  - передаточная функция $H(z)$,
  - переходная характеристика $g[k]$,
  - комплексная частотная характеристика $H(\theta)$, АЧХ $|H(\theta)|$ и ФЧХ $\varphi(\theta)$.
- Запишите два критерия устойчивости по входу дискретной линейной стационарной системы. 6.10
- Определите понятие каузальности дискретной линейной стационарной системы.

Зачет и экзамен

- Как каузальность дискретной линейной стационарной системы связана с ее физической реализуемостью в реальном времени?
- Как по импульсной характеристике дискретной линейной стационарной системы определить, является ли система каузальной?
- Укажите основные отличия БИХ и КИХ фильтров (вид импульсной характеристики, устойчивость, линейность ФЧХ, возможность нерекурсивной реализации). 11.2
- Для фильтра с разностным уравнением

  $$y[k] = x[k] + x[k-1]$$

  найти и изобразить импульсную характеристику, АЧХ и ФЧХ.
- Для фильтра с разностным уравнением

  $$y[k] = x[k] - x[k-1]$$

  найти и изобразить импульсную характеристику, АЧХ и ФЧХ.

Основная литература

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. Москва. 2007г.

2. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Уч. пособие. Москва, 2007г.

Дополнительная литература

3. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 560 с.: ил.

4. Васильев, В. П. Основы теории и расчета цифровых фильтров : учебное пособие / В. П. Васильев, Э. Л. Муро, С. М. Смольский ; под ред. С. М. Смольского .— 2-е изд., стереотип. — Москва : ИНФРА-М, 2020

5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2013 г.

6. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер; пер. с англ. под ред. С. Ф. Боева .— 3-е изд., испр. — М. : Техносфера, 2019 .— 1048 с.

Разбор некоторых задач контрольной работы №2.

1. Применение критерия устойчивости цифрового фильтра.

Критерий устойчивости LTI системы. Для того, чтобы LTI система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы ее импульсной характеристика была абсолютно суммируемой: $\sum\limits_k |h[k]| < \infty.$

В лекции рассматривался пример цифрового фильтра с импульсной характеристикой.

$$h[k] = 2 \cdot \mathbf{1}[k] - 9 \cdot 0{,}5^k u[k] + 8u[k].$$

Поскольку

$$\lim_{k \to +\infty} h[k] = \lim_{k \to +\infty} \left(8 - \frac{9}{2^k} \right) = 8,$$

импульсная характеристика не является абсолютно суммируемой:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| = \infty.$$

Система неустойчива.

При этом если

$$\lim_{k \to +\infty} h[k] = 0,$$

нельзя утверждать, что импульсная характеристика абсолютно суммируема.

Контрпример. Пусть функция $h[k]$ описывает элементы гармонического ряда:

$$h[k] = \frac{1}{k} u[k].$$

Гармонический ряд расходится.

Однако утверждать, что последовательность, описываемая функцией

$$h[k] = a^k u[k]$$

при $|a| < 1$ является абсолютно суммируемой корректно: последовательность в этом случае описывает элементы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Разбор контрольной работы №2

2. Применение таблицы соответствий при вычислении импульсной характеристики рекурсивного фильтра второго порядка.

Вычисление обратного *z*–преобразования с использованием таблицы соответствий		
	тестовая последовательность	*z*-образ
	$x[k]=r^k\dfrac{\sin(k+1)\theta_0}{\sin\theta_0}u[k]$	$X(z)=\dfrac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$, $a_1=-2r\cos\theta_0,,\ a_2=r^2$

Как и указано в таблице, воспользоваться данным соответствием можно лишь в случае, когда существуют действительные r и θ_0, такие, что $a_1=-2r\cos\theta_0,\ a_2=r^2$.

Предположим, что $X(z)$ имеет полюсы z_{p1} и z_{p2}, и допустимо представление этой функции в виде

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-z_{p1}z^{-1}\right)\left(1-z_{p2}z^{-1}\right)}.$$

$$X(z)=\frac{1}{1-(z_{p1}+z_{p2})z^{-1}+z_{p1}z_{p2}z^{-2}}.$$

Если полюса комплексно-сопряженные, то их можно представить в виде

$$z_{p1}=re^{j\theta_0},\ z_{p2}=re^{-j\theta_0}.$$

Тогда

$$-(z_{p1}+z_{p2})=-re^{j\theta_0}-re^{-j\theta_0}=-2r\cos\theta_0,$$

$$z_{p1}z_{p2}=r^2.$$

Тогда для вычисления обратного *z*-преобразования можно воспользоваться данным соответствием.

Для полюса второй кратности формула верная лишь в пределе в силу $\theta_0=0$.

Когда данным соответствием воспользоваться нельзя, то следует использовать другие способы вычисления обратного *z*-преобразования, пример, разложение на простые дроби или контурное интегрирование.

3. Фазовая и групповая задержки у КИХ-фильтра высокого порядка.

Предположим, что цифровой фильтр имеет передаточную функцию вида

$$H(z)=1+3z^{-1}+3z^{-3}+z^{-4}.$$

Определить фазовую задержку и групповую задержку фильтра как функции частоты. Являются ли эти функции одинаковыми по всем частотам?

Простое решение.

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]z^{-k}.$$

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**другие**
***h*[*k*]**	1	3	0	3	1	0

Импульсная характеристика цифрового фильтра является симметричной относительно $k=2=\dfrac{N-1}{2}$, $N=5$. Тогда это КИХ-фильтр с 1 типа с кусочно-линейной ФЧХ. Для таких фильтров частотная характеристика

$$H(e^{j\theta})=\exp\left(-j\theta\frac{N-1}{2}\right)B(e^{j\theta}),$$

$$B(e^{j\theta})=h\left[\frac{N-1}{2}\right]+\sum_{k=0}^{(N-3)/2}2h[k]\cos\left(\theta\left(\frac{N-1}{2}-k\right)\right).$$

АЧХ фильтра $A(\theta)=\left|B(e^{j\theta})\right|$. ФЧХ фильтра с точностью до скачков фазы на π определяется выражением

$$\varphi(\theta)=-\theta\frac{N-1}{2}+\pi m=-\theta\alpha+\pi m,$$

где $m\in Z$ зависит от θ: точками скачков фазы являются такие значения переменой θ, в которых $B(e^{j\theta})$ меняет знак.

Групповая задержка такого фильтра будет постоянной на всем интервале $\theta\in[-\pi;\pi]$ и равна

$$\tau_{\text{гр}}(\theta)=-\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t=\frac{N-1}{2}\Delta t=2\Delta t.$$

Фазовая задержка

$$\tau_{\text{ф}}(\theta)=-\frac{\varphi(\theta)}{\theta}\Delta t=\frac{N-1}{2}\Delta t+m\pi\Delta t=2\Delta t+m\pi\Delta t.$$

постоянна для тех частот, где фазовая характеристика определяется при $m=0$.

Разбор контрольной работы №2

Неполное решение.

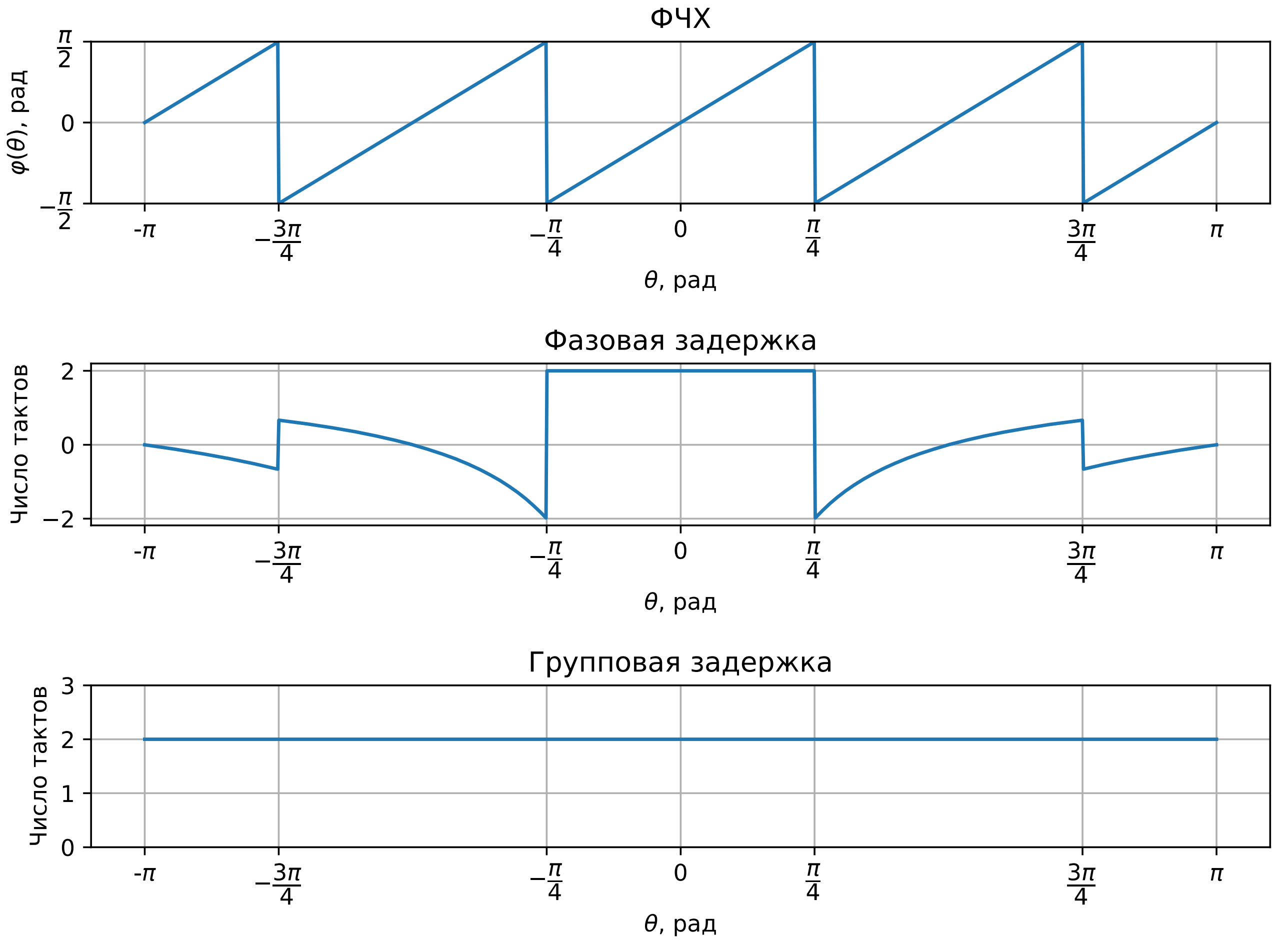
Частотная характеристика получается постановкой $z = \exp(j\theta)$ в передаточную функцию системы

$$H(z) = 1 + 3z^{-1} + 3z^{-3} + z^{-4}:$$

$$H(e^{j\theta}) = 1 + 3e^{-j\theta} + 3e^{-3j\theta} + e^{-4j\theta}.$$

ФЧХ фильтра

$$\varphi(\theta) = -arctg\frac{\operatorname{Im} H(e^{i\theta})}{\operatorname{Re} H(e^{i\theta})} = arctg\frac{3\sin(\theta) + 3\sin(3\theta) + \sin(4\theta)}{1 + 3\cos(\theta) + 3\cos(3\theta) + \cos(4\theta)}.$$



Групповая задержка такого фильтра будет постоянной на всем интервале $\theta \in [-\pi; \pi]$ и равна

$$\tau_{\text{гр}}(\theta) = -\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t = \dots.$$

$$\varphi(\theta) = -\theta\frac{N-1}{2} + \pi m = -\theta\alpha + \pi m.$$

Фазовая задержка

$$\tau_{\text{ф}}(\theta) = -\frac{\varphi(\theta)}{\theta}\Delta t = -\frac{\Delta t}{\theta} arctg\frac{3\sin(\theta) + 3\sin(3\theta) + \sin(4\theta)}{1 + 3\cos(\theta) + 3\cos(3\theta) + \cos(4\theta)}.$$

4. Биквадратный блок.

Передаточная функция

$$H(z)=\frac{\beta_0+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}}{1+\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)}.$$

$$\beta_0 X(z)+\beta_1 X(z)z^{-1}+\beta_2 X(z)z^{-2}=$$

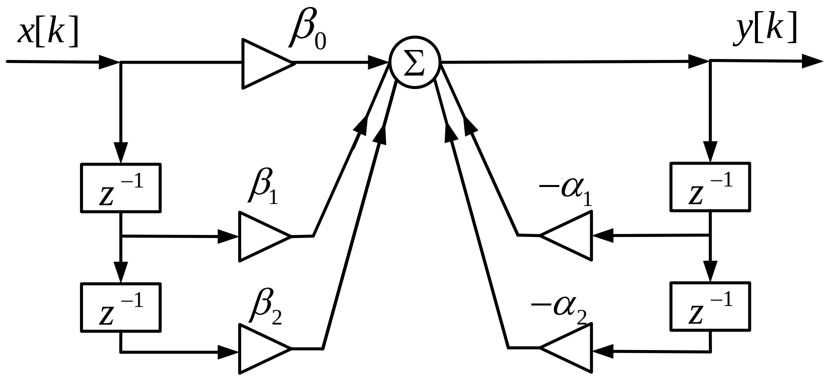
$$=Y(z)+\alpha_1 Y(z)z^{-1}+\alpha_2 Y(z)z^{-2}$$

Разностное уравнение

$$\beta_0 x[k]+\beta_1 x[k-1]+\beta_2 x[k-2]=y[k]+\alpha_1 y[k-1]+\alpha_2 y[k-2]$$

$$y[k]=\beta_0 x[k]+\beta_1 x[k-1]+\beta_2 x[k-2]-\alpha_1 y[k-1]-\alpha_2 y[k-2]$$

Блок-схема реализации в прямой форме.



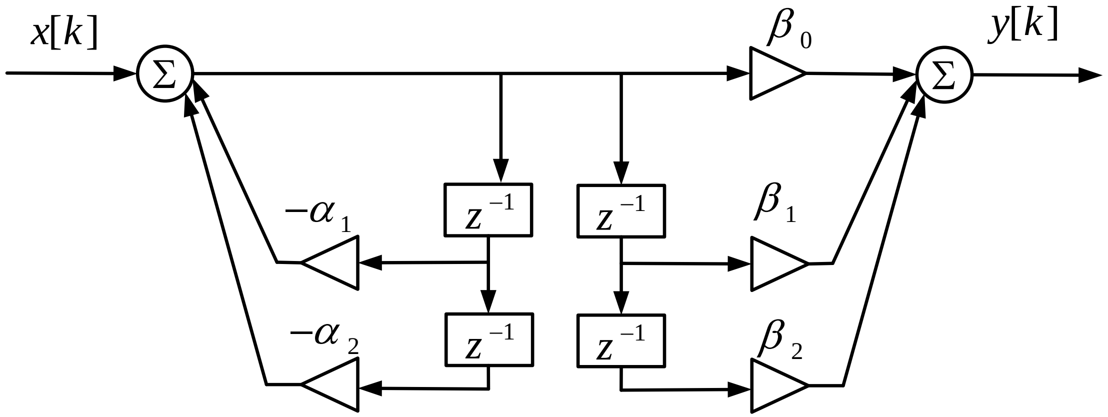
Первые отсчеты импульсной характеристики

$$h[0]=\beta_0\ ,\qquad h[1]=\beta_1-\alpha_1 h[0].$$

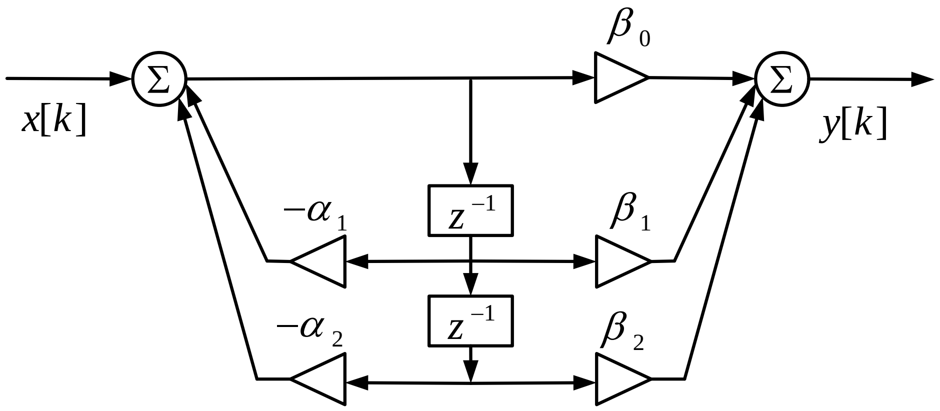
Первые отсчеты переходной характеристики

$$g[0]=\beta_0=h[0],\qquad g[1]=\beta_0+\beta_1-\alpha_1 h[0]=h[0]+h[1].$$

Сократим число блоков задержки: переставим местами рекурсивную и нерекурсивную части фильтра.



Объединяя линии задержки в одну, получаем прямую каноническую форму реализации.



Разбор контрольной работы №2

5. Умножители.

а) Если коэффициент умножителя равен 0, то это означает отсутствие шины данных.

б) Умножители на 1 не требуются, т.к. не изменяют сигнал.

в) Выносом множителя за скобки в некоторых случаях можно сократить число умножителей. При этом меняются коэффициенты умножителей в нерекурсивной части одного из следующих каскадов.

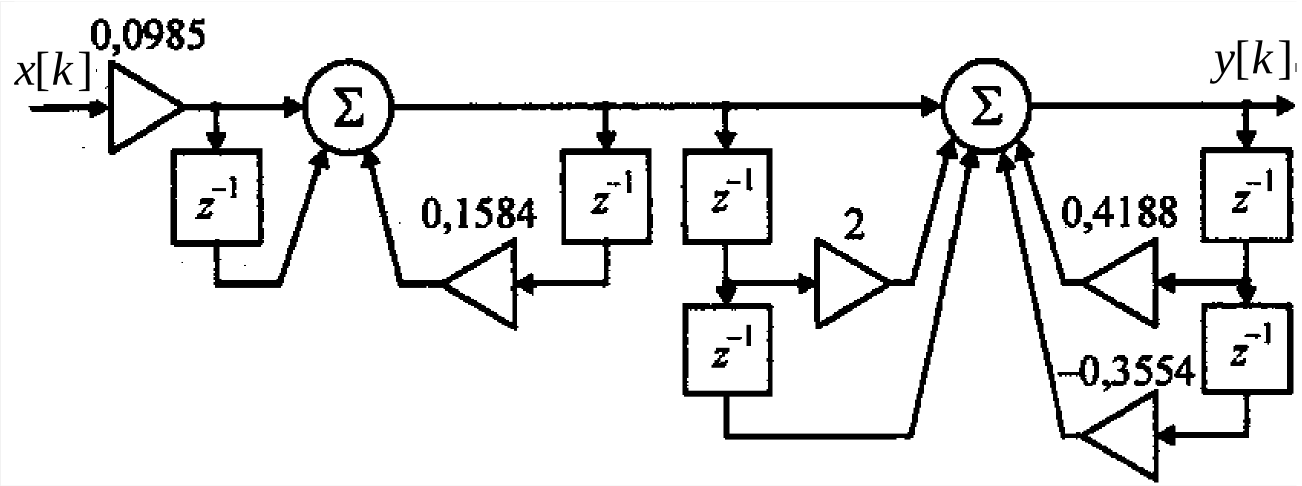
Рассмотрим фильтр Баттерворта нижних частот 3-го порядка с частотой среза, равной 1/5 частоты дискретизации.

$$H(z)=\frac{0,0985+0,2956z^{-1}+0,2956z^{-2}+0,0985z^{-3}}{1-0,5772z^{-1}+0,4218z^{-2}-0,0563z^{-3}}=$$

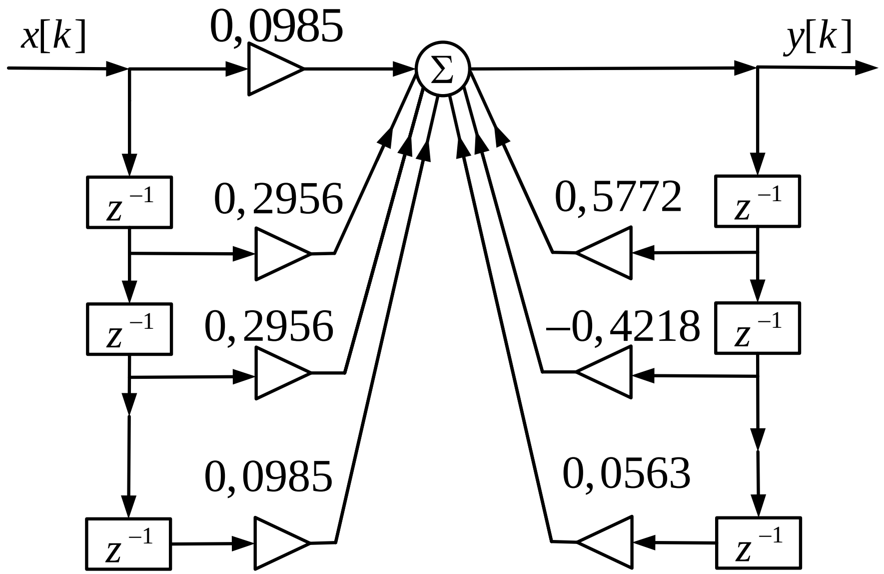
$$=\frac{0,0985+0,0985z^{-1}}{1-0,1584z^{-1}}\cdot\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0,4188z^{-1}+0,3554z^{-2}}=$$

$$=0,0985\frac{1+z^{-1}}{1-0,1584z^{-1}}\cdot\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0,4188z^{-1}+0,3554z^{-2}}.$$

Блок-схема последовательной реализации фильтра.



Блок-схема последовательной реализации фильтра в прямой форме



Разбор контрольной работы №2

6. Фильтр Золотарёва—Кауэра.

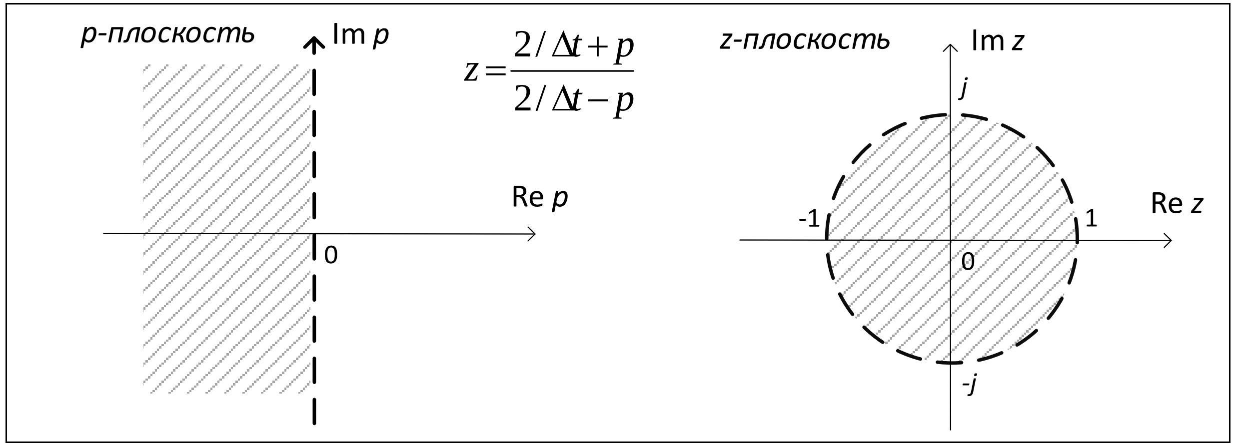
Предположим, что с применением метода билинейного z - преобразования на основе аналогового фильтра нижних частот Золотарёва—Кауэра получен цифровой фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{0,4758 + 0,9160z^{-1} + 0,4758z^{-2}}{1 + 0,8442z^{-1} + 0,3347z^{-2}} \cdot \frac{1 + 1,7074z^{-1} + z^{-2}}{1 + 1,4608z^{-1} + 0,8841z^{-2}}.$$

Известно, что аналоговый фильтр был устойчивым.

Исследовать цифровой фильтр на устойчивость.

Простое решение.



- Если аналоговый фильтр устойчив, то все его полюса лежат в левой полуплоскости.
- Левая полуплоскость при билинейном z–преобразовании отображается во внутрь единичного круга.
- Таким образом, в методе билинейного z-преобразования гарантируется устойчивость БИХ-фильтра при устойчивом аналоговом фильтре-прототипе.

Другое решение.

Решив два квадратных уравнения, можно найти полюса цифрового фильтра.

$$z_{p1} \approx -0,422 + 0,396\,j$$
$$z_{p2} \approx -0,422 - 0,396\,j$$
$$z_{p3} \approx -0,730 + 0,592\,j$$
$$z_{p4} \approx -0,730 - 0,592\,j$$

Полюса лежат внутри единичной окружности, значит цифровой фильтр устойчив.

Заключительные моменты

При подготовке к экзамену рекомендуется.

- Повторить материалы всех лекций и свои решения задач с лекций.
- Продумать ответы на теоретические вопросы билетов (приведены в этой презентации).
- Разобрать примеры дополнительных вопросов, выучить необходимые формулы и формулировки (определений, утверждений, теорем, критериев).
- Подробно рассмотреть примеры решения задач, приведенные в лекциях, а также в конце этой презентации.

В 10 семестре также будут курсы «Цифровая обработка сигналов» и «Лаборатория цифровой обработки сигналов». На лекциях будут рассматриваться вопросы, связанные с цифровым спектральным анализом, передискретизацией и дискретизацией полосовых сигналов.

Уважаемые студенты 5 курса ФРКТ и ФАКТ!

Просьба отправить отзыв о курсе с помощью формы

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdwElbGEgvGPcze6zmtrMn-7s56a1soo0K0paaDjDmVjWqtNA/viewform

Отзыв нужно предоставить в текстовом виде. Отзыв можно отправить анонимно и неограниченное число раз.

Дополнительные примеры решения задач.

Пример 1.

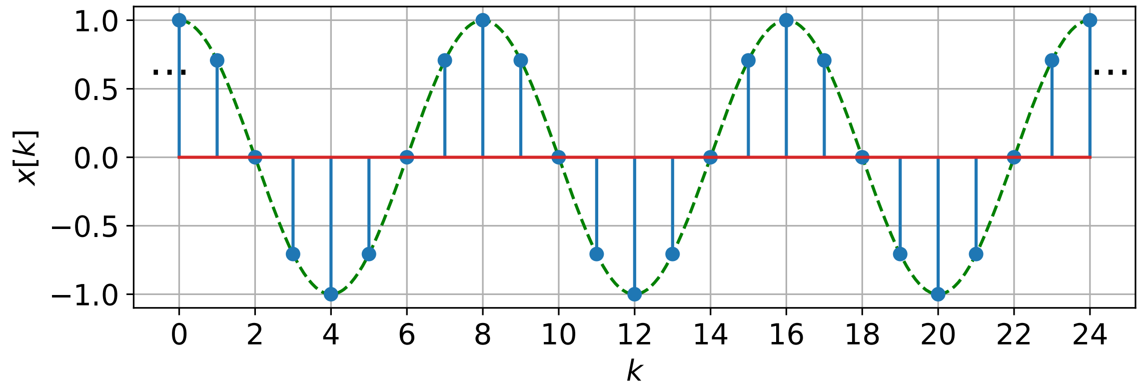
Гармонический сигнал $x(t)=\cos 2\pi f_0 t$ дискретизуется так, что на периоде $[0;\ 1/\ f_0)$ образуется 8 отсчетов $x[k]=x(k\Delta t)$.

а) Изобразить последовательность $x[k]$и ее спектр.

б) Найти и изобразить по модулю ДВПФ и ДПФ последовательности

$$y[k]=\sum_{m=0}^{15} x[m]\mathbf{1}[k-m].$$

Решение.



а) $x[k]=x(k\Delta t)=\cos(2\pi f_0 k\Delta t)=\cos(2\pi\nu_0 k)$, где $\nu_0 = f_0\Delta t = f_0\ /\ f_д$ — частота косинусоиды, нормированная на частоту дискретизации (доли частоты дискретизации).

Период косинусоиды $x(t)$ равен $T_0=1/\ f_0$, а значит $\nu_0=1/8$ и шаг дискретизации

$$\Delta t = T_0\ /\ 8=\frac{1}{8 f_0}.$$

Найдем спектр дискретизованной синусоиды $x[k]=\cos(2\pi\nu_0 k)$.По свойствам ДВПФ

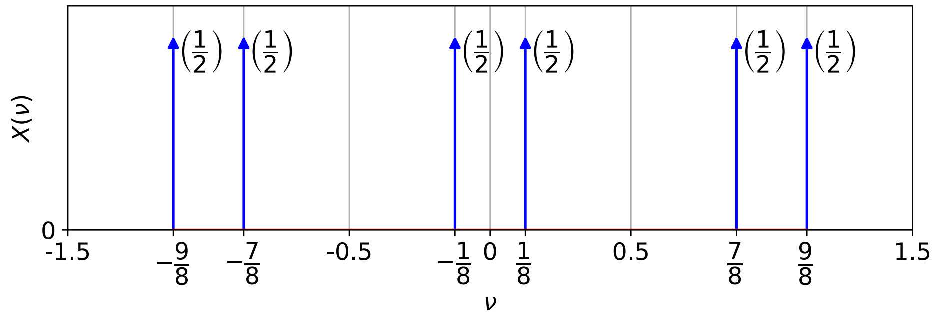
$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right), -\infty<k<+\infty \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu-\nu_0-n\right).$$

Из формулы Эйлера следует, что

$$\cos(2\pi\nu_0 k)=\frac{1}{2}\exp(-2\pi\nu_0 k)+\frac{1}{2}\exp(2\pi\nu_0 k).$$

Получаем, что спектр дискретизованной косинусоиды – две дельта-функции (с весом ½)в точках $\pm\nu_0$, повторяющиеся с периодом 1:

$$\cos(2\pi\nu_0 k), \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu-\nu_0-n\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu+\nu_0-n\right).$$



Дополнительные примеры решения задач

б) Заметим, что

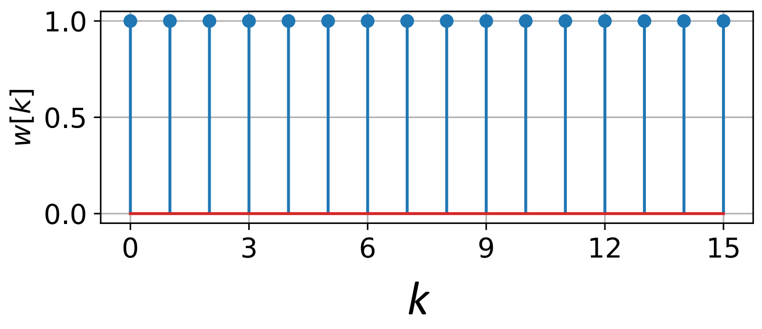
$$y[k]=\sum_{m=0}^{15}x[m]\mathbf{1}[k-m]=x[k]\sum_{m=0}^{15}\mathbf{1}[k-m].$$

Это означает, что $y[k]$ получается перемножением последовательности $x[k]$ на прямоугольное окно длиной в 16 отсчетов:

$$w[k]=\sum_{m=0}^{15}\mathbf{1}[k-m].$$

В итоге последовательность $y[k]$ представляет собой отрезок из двух периодов косинусоиды.

Найдем спектр оконной функции $w[k]=\sum_{m=0}^{15}\mathbf{1}[k-m]$.

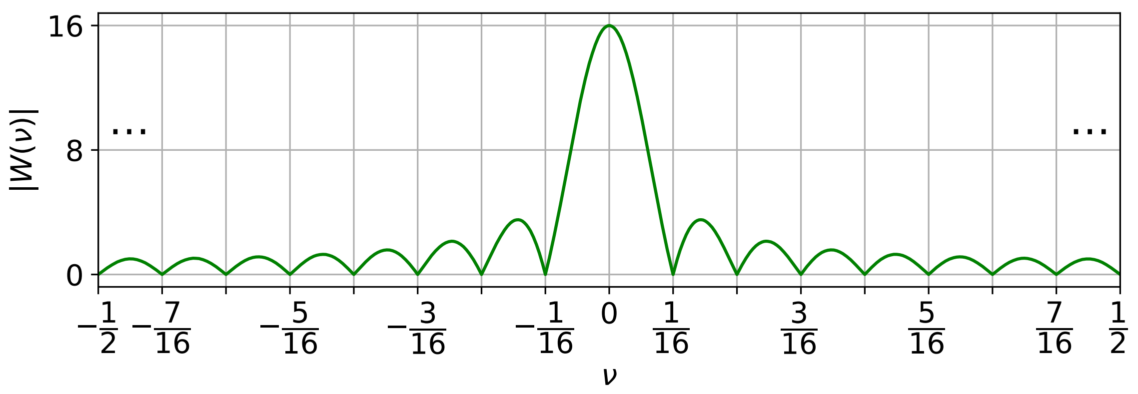


$$W(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}w[k]\exp(-j2\pi\nu k)=\sum_{k=0}^{N-1}\exp(-j2\pi\nu k)=$$

$$=\frac{1-\exp(-j2\pi\nu N)}{1-\exp(-j2\pi\nu)}=$$

$$=\frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}}\frac{(e^{j\pi\nu N}-e^{-j\pi\nu N})}{(e^{j\pi\nu}-e^{-j\pi\nu})}=\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\exp(-j(N-1)\pi\nu),\ \text{где } N=16.$$

Модуль ДВПФ этой последовательности изображен на рисунке ниже.



Дополнительные примеры решения задач

Заметим, что

$$y[k]=\cos(2\pi\nu_0 k)w[k]=\frac{1}{2}\exp(-2\pi\nu_0 k)w[k]+\frac{1}{2}\exp(2\pi\nu_0 k)w[k].$$

Тогда, используя теорему смещения, получаем ДВПФ $y[k]$

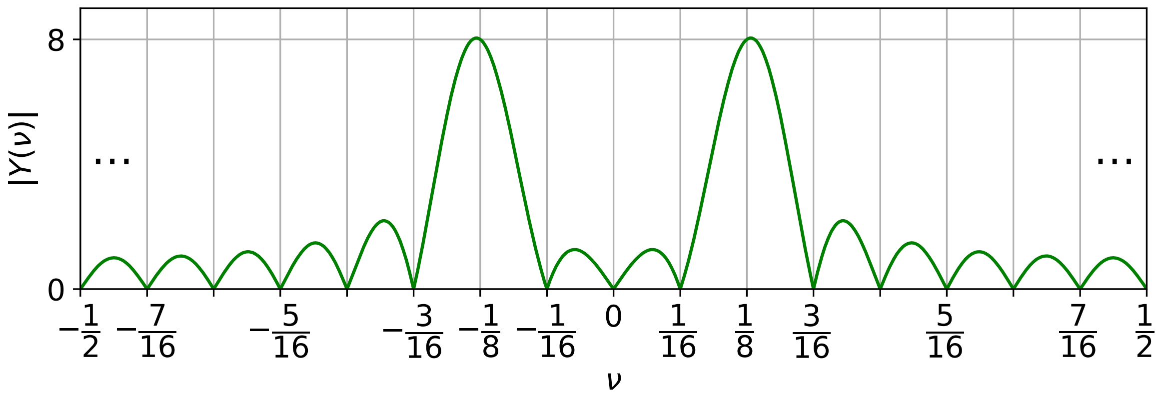
$$Y(\nu)=\frac{1}{2}W\left(\nu-\nu_0\right)+\frac{1}{2}W\left(\nu+\nu_0\right)$$

$$Y(\nu)=\frac{1}{2}\frac{\sin(N\pi(\nu-\nu_0))}{\sin(\pi(\nu-\nu_0))}\exp(-j(N-1)\pi(\nu-\nu_0))+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\sin(N\pi(\nu+\nu_0))}{\sin(\pi(\nu+\nu_0))}\exp(-j(N-1)\pi(\nu+\nu_0)),$$

$$Y(\nu)=\frac{1}{2}\frac{\sin(N\pi(\nu-1/8))}{\sin(\pi(\nu-1/8))}\exp(-j(N-1)\pi(\nu-1/8))+$$

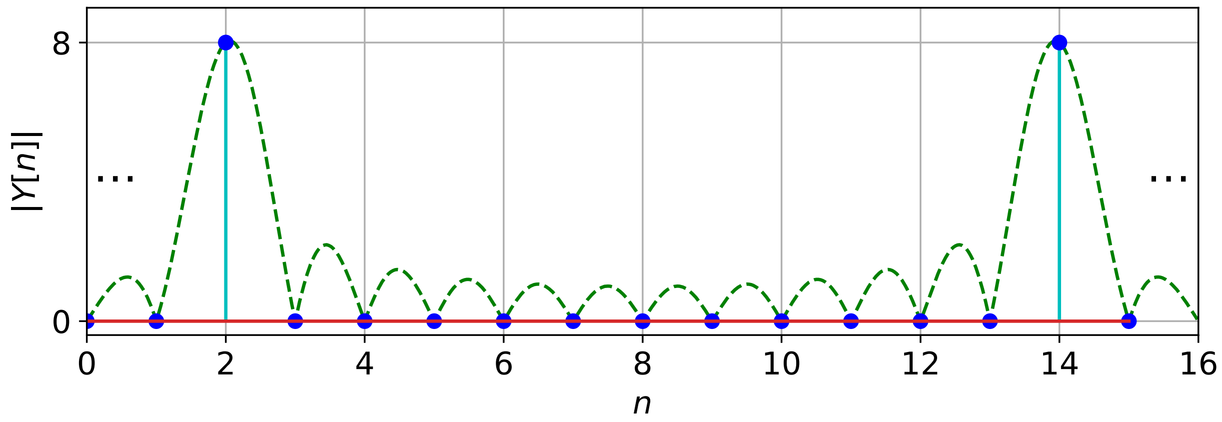
$$+\frac{1}{2}\frac{\sin(N\pi(\nu+1/8))}{\sin(\pi(\nu+1/8))}\exp(-j(N-1)\pi(\nu+1/8)),$$



Коэффициенты ДПФ последовательности $y[k]$ можно получить, используя связь между ДПФ и ДВПФ

$$Y\left(\nu=\frac{n}{N}\right)=Y[n].$$

Тогда на одном периоде все коэффициенты ДПФ будут равны нулю, кроме $X[2]=8$ и $X[14]=8$, которым соответствуют значения ДВПФ на частотах $\nu=1/8$ и $\nu=7/8$.



Дополнительные примеры решения задач

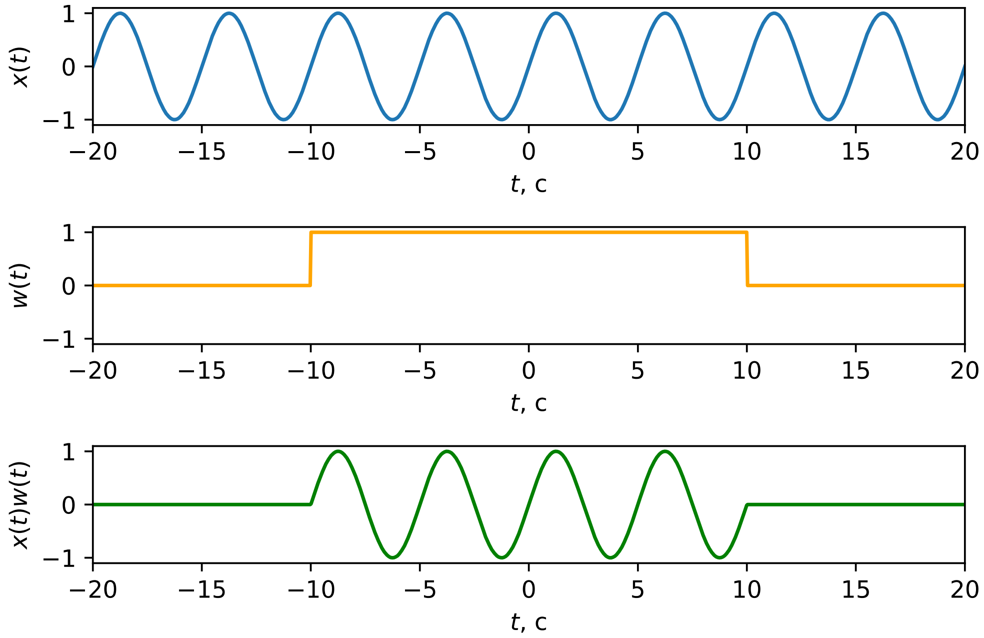
Пример 2.

Эффект растекания спектральных компонент при ограничении длительности сигнала

Гармонический сигнал $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$$

где $f_1 = 100$ Гц, $f_2 = 200$ Гц. Определить, какой вид будет иметь спектр сигнал $x(t)w(t)$, где $w(t)$ — некоторая оконная функция со спектром $W(f)$.



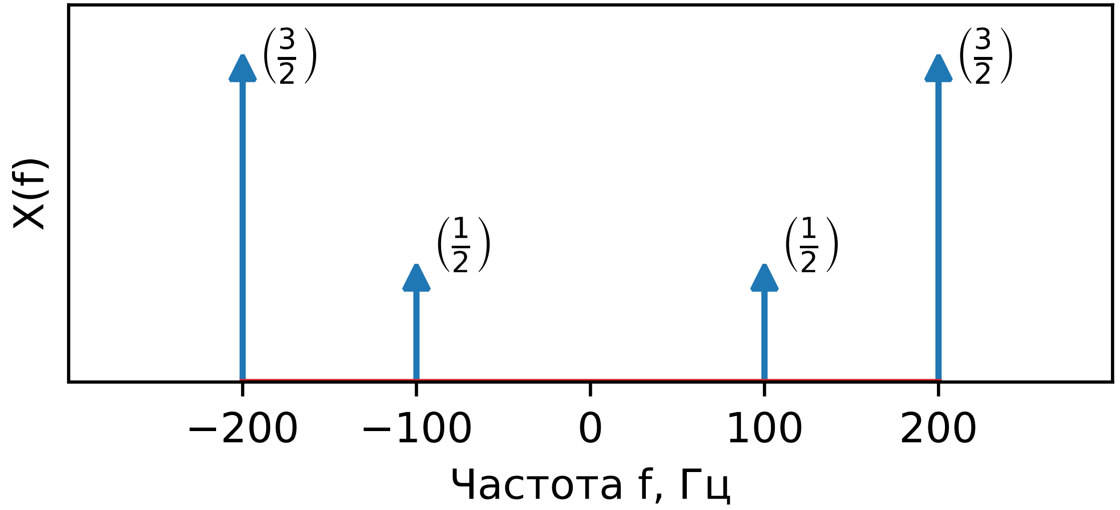
Решение

По свойствам преобразования Фурье

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0).$$

Тогда по свойству линейности преобразования Фурье

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_1) + \frac{1}{2}\delta(f + f_1) + \frac{3}{2}\delta(f - f_2) + \frac{3}{2}\delta(f + f_2)$$



Ограничение сигнала по длительности эквивалентно умножению на прямоугольную оконную функцию:

$$y(t) = w(t)x(t).$$

Дополнительные примеры решения задач

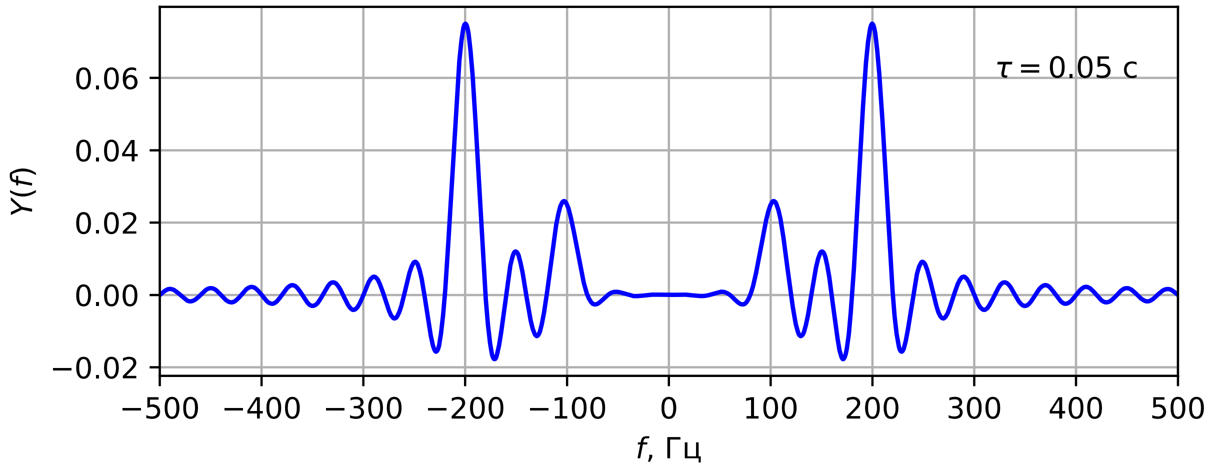
$$y(t) = w(t)x(t).$$

Пусть $x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(f),\ w(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} W(f),\ y(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(f)$. Тогда по теореме о свертке для преобразования Фурье

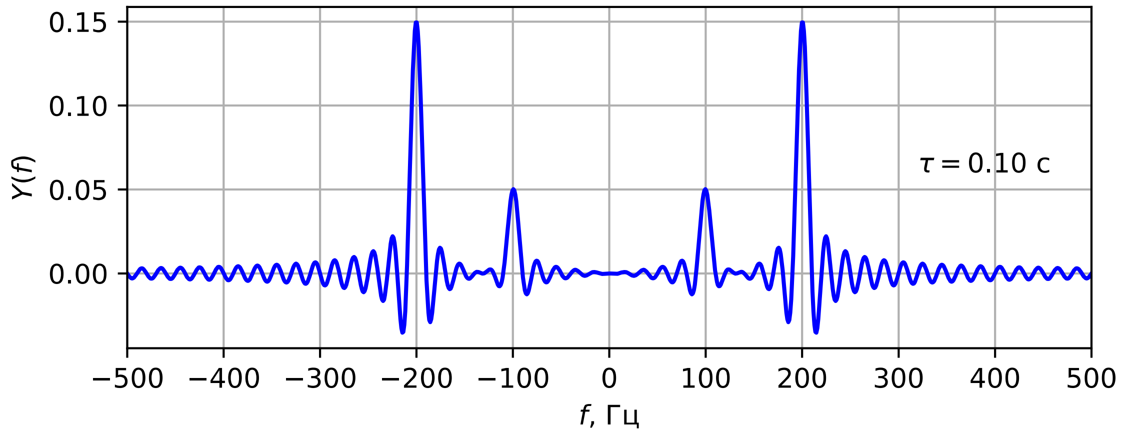
$$w(t)x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tilde{f})X(f-\tilde{f})d\tilde{f}.$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}W(f-f_1) + \frac{1}{2}W(f+f_1) + \frac{3}{2}W(f-f_2) + \frac{3}{2}W(f+f_2).$$

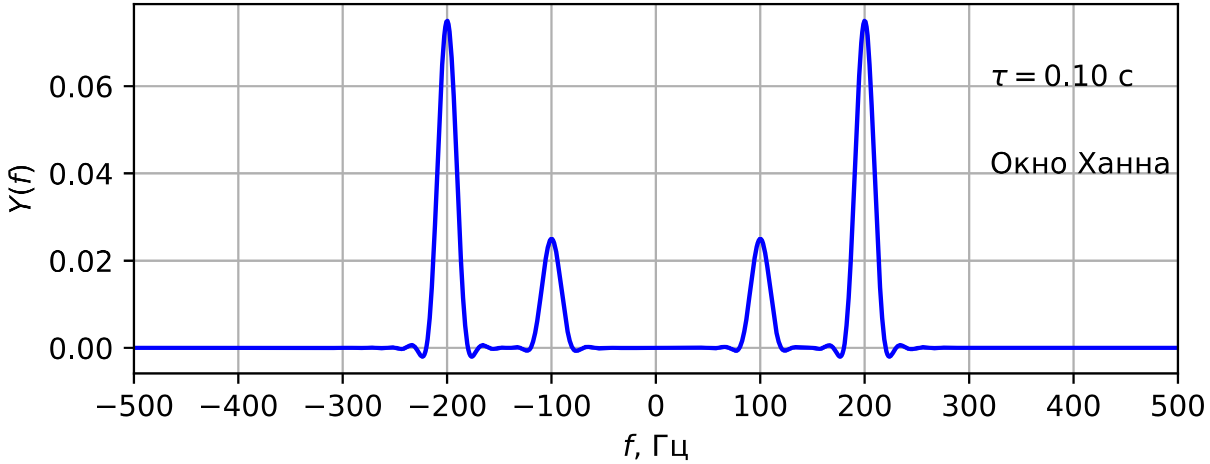
$w(t)$ - прямоугольное окно длиной $\tau = 0{,}05\ c.$



$w(t)$ - прямоугольное окно длиной $\tau = 0{,}1\ c.$



$w(t)$ - окно Ханна длиной $\tau = 0{,}1\ c.$



Дополнительные примеры решения задач

Пример 3. *Частотная ось ДПФ.*

Рассмотрим для $f_0 = 5$ Гц сигнал длительностью 1 с вида

$$x_a(t) = \sin\left(2\pi f_0 t\right),\ 0 \le t < 1.$$

Выберем частоту дискретизации $f_д = 20$ Гц ($\Delta t = 0{,}05$ с).

Каким частотам в спектре аналогового сигнала будут соответствовать коэффициенты ДПФ $n_1 = 8$ и $n_2 = 20$?

Решение. Последовательность отсчетов дискретизованного сигнала

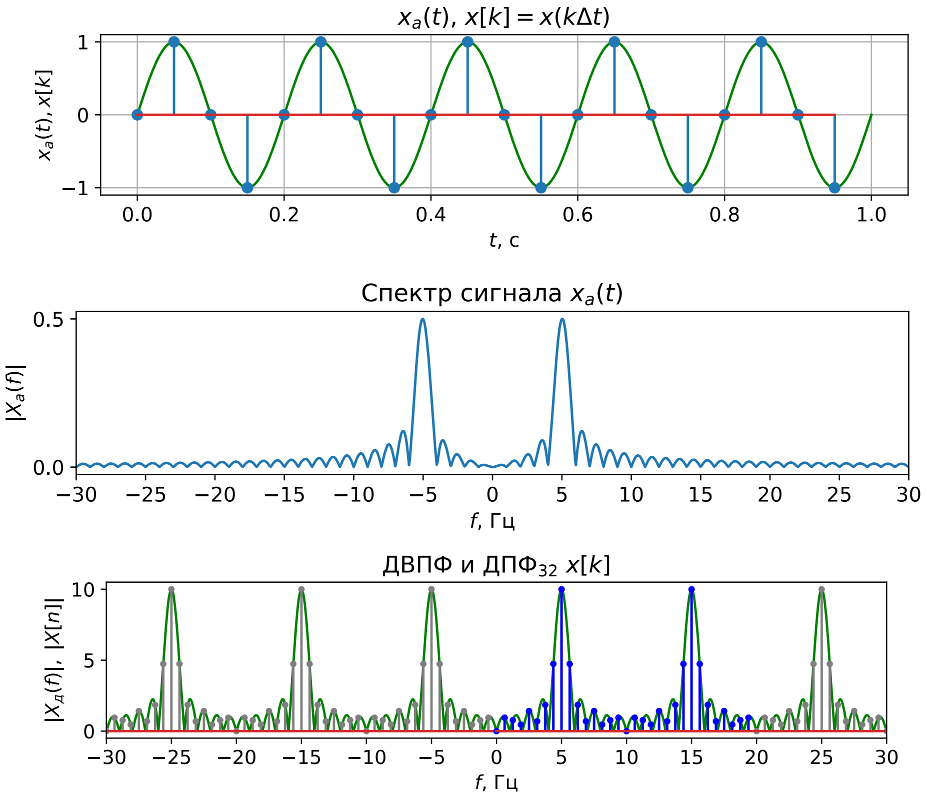
$$x[k] = x_a(k\Delta t) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_д} k\right).$$

Спектр $X_д(f)$ дискретизованного сигнала связан со спектром $X_a(f)$ аналогового сигнала соотношением

$$X_д(f) = \frac{\mathrm{T}}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_а(f - m f_д).$$

где T определено соотношением $x[k] = \mathrm{T} x_a(k\Delta t)$.
Если бы эффекта наложения не было, то $X_д(f)$ и $X_a(f)$ совпадали бы на интервале $\left[-f_д/2,\ f_д/2\right]$, т.е. от -10 Гц до 10 Гц.

Заметим, что отсчеты ДПФ размерности $N = 32$ для $n = 0, 1, \ldots, N-1$ находятся на полуинтервале $[0,\ f_д)$.



Отчету $n_1 = 8$ из первой половины периода соответствует частота $f_1 = \dfrac{n_1}{N} f_д = 5$ Гц, а отсчету $n_2 = 20$ из второй полоны периода $f_2 = \dfrac{n_2}{N} f_д - f_д = -7{,}5$ Гц

Дополнительные примеры решения задач

Пример 4.

Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_в$ = 10 кГц ($f_в$ – верхняя граничная частота) дискретизуется с минимально возможной частотой дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов. В результате получается последовательность $x[k]$. Обозначим через $X[n]$ 1000-точечное ДПФ последовательности $x[k]$.

а) Каким частотам (в Гц) в ДВПФ последовательности $x[k]$ соответствуют отсчеты ДПФ с номерами $n_1 = 200$ и $n_2 = 900$?

б) Каким частотам (в Гц) в спектре исходного сигнала $x(t)$ соответствуют индексы $n_1 = 200$ и $n_2 = 900$ в последовательности $X[n]$?

Решение. Поскольку сигнал $x(t)$ дискретизован в соответствии с теоремой отсчетов, минимально возможная частота дискретизации $f_д = 2f_в = 10$ кГц.

а) Заметим, что из связи ДВПФ и ДПФ для последовательностей конечной длительности отсчету ДПФ с номером n_0 соответствует значение ДВПФ в точке $f_0 = \frac{n_0}{N} f_д$, при этом оно также равно (в силу периодичности ДВПФ) значениям в точках $f_0 + mf_д,\ \ m \in Z$.

Тогда отсчетам n_1 и n_2 соответствуют частоты (можно также указать одну частоту при $m = 0$)

$$f_1 = \frac{n_1}{N} f_д + mf_д = 10(0,2 + m) \text{ кГц},$$

$$f_2 = \frac{n_2}{N} f_д + mf_д = 10(0,9 + m) \text{ кГц}.$$

б) Так как сигнал $x(t)$ дискретизован в соответствии с теоремой отсчетов, его спектр ограничен диапазоном $[-f_д/2;\ f_д/2]$. В этот диапазон из перечисленных выше попадают лишь значения $f_1 = 2$ кГц и $f_2 = -1$ кГц, которые соответствуют коэффициентам ДПФ с номерами n_1 и n_2.

Дополнительные примеры решения задач

Пример 5.

Последовательность $x[k]$ из 1000 элементов получена в результате дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$ с частотой $f_д = 20480$ Гц. Обозначим через $X[n]$ 1024-точечное ДПФ последовательности $x[k]$ (дополненной нулевыми отсчетами). Определить расстояние (в Гц) между непрерывными частотами, которые соответствуют соседним отсчетам ДПФ.

Решение. Число отсчетов дополненной последовательности и число коэффициентов ДПФ равно 1024. ДВПФ дополненной последовательности – периодическое повторение спектра исходного сигнала с периодом $f_д = 20480$ Гц. Этому периоду на частотной оси соответствуют 1024 коэффициента ДПФ $X[n],\, n = 0, 1, 2, \cdots, 1023$. Следовательно шаг сетки частот ДПФ в герцах составляет $\Delta f = \dfrac{20480}{1024} = 20$ Гц. Коэффициенту ДПФ $X[n]$ будет соответствовать отсчет ДВПФ с частотой $n\Delta f = 20n$ Гц.

Дополнительные примеры решения задач

Пример 6.

Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_\text{в}$ = 10 кГц ($f_\text{в}$ – верхняя граничная частота) дискретизуется с шагом Δt . В результате получается последовательность $x[k]=x(k\Delta t)$. Вычисляется N-точечное ДПФ, где $N=2^m$, m – натуральное число. Определить минимальное значение m, при котором анализ возможен, а расстояние между отсчетами ДПФ по оси частот в герцах будет меньше 5 Гц. Для этого значения m определить допустимые пределы для частоты дискретизации $f_{\min} < f_\text{д} < f_{\max}$.

Решение.

Минимальная частота дискретизации должна гарантировать нам отсутствие наложения компонент размноженного спектра исходного сигнала:

$$f_{\text{д}\min} = 10 \text{ кГц}.$$

Вычисляется N–точечное ДПФ, где $N=2^m$, m – натуральное число.

Расстояние между отсчетами ДПФ по оси частот в герцах должно быть меньше 5 Гц в том числе и для минимальной частоты дискретизации. Поэтому можем записать

$$\frac{f_\text{дмин}}{N} < 5 \text{ Гц}.$$

Отсюда должно быть $N > \frac{10000\text{Гц}}{5} = 2000.$

Ближайшее минимальное целое число m , для которого $2^m > 2000$ равно 11. При этом $N = 2^{11} = 2048.$

Дополнительные примеры решения задач

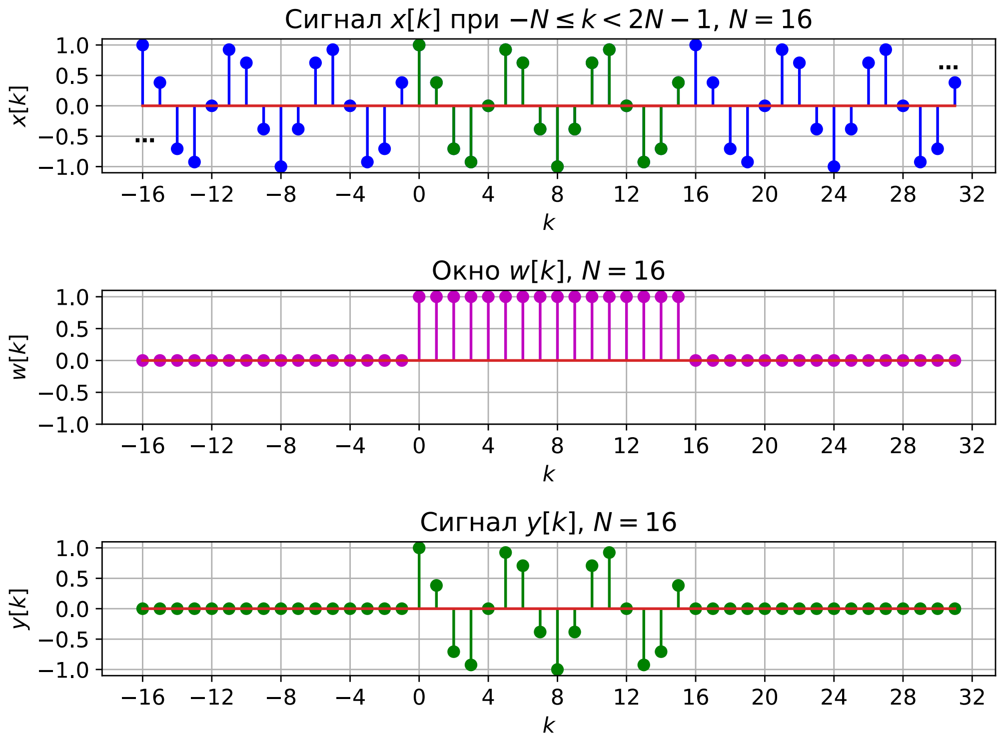
Пример 7.

Предположим, что нужно вычислить ДВПФ последовательности отсчетов $y[k]=x[k]w[k]$, где

$$x[k]=\cos(2\pi\frac{3}{16}k),$$

$w[k]$ — прямоугольное окно длиной $N=16$ отсчетов:

$$w[k]=\sum_{m=0}^{15}\mathbf{1}[k-m].$$



Решение. Заметим, что

$$W(\nu)=e^{-j(N-1)\pi\nu}\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)},$$

$$X(\nu)=0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-\frac{3}{16}-m)+0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\nu+\frac{3}{16}-m).$$

<u>Способ 1.</u> ДВПФ последовательности $Y(\nu)$ может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(\nu)=\int_{-1/2}^{1/2}X(\tilde{\nu})W(\nu-\tilde{\nu})d\tilde{\nu}=\int_{-1/2}^{1/2}W(\tilde{\nu})X(\nu-\tilde{\nu})d\tilde{\nu}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(\nu)\delta(\nu-\nu_1)d\nu=\begin{cases}W(\nu_1),\ a<\nu_1<b,\\ 0.5W(\nu_1),\ (\nu_1=a)\cup(\nu_1=b),\\ 0,\ (\nu_1<a)\cup(\nu_1>b),\end{cases}$$

получаем, что

$$Y(\nu)=0.5W(\nu-\frac{3}{16})+0.5W(\nu+\frac{3}{16}).$$

Способ 2. Аналогично через теорему смещения

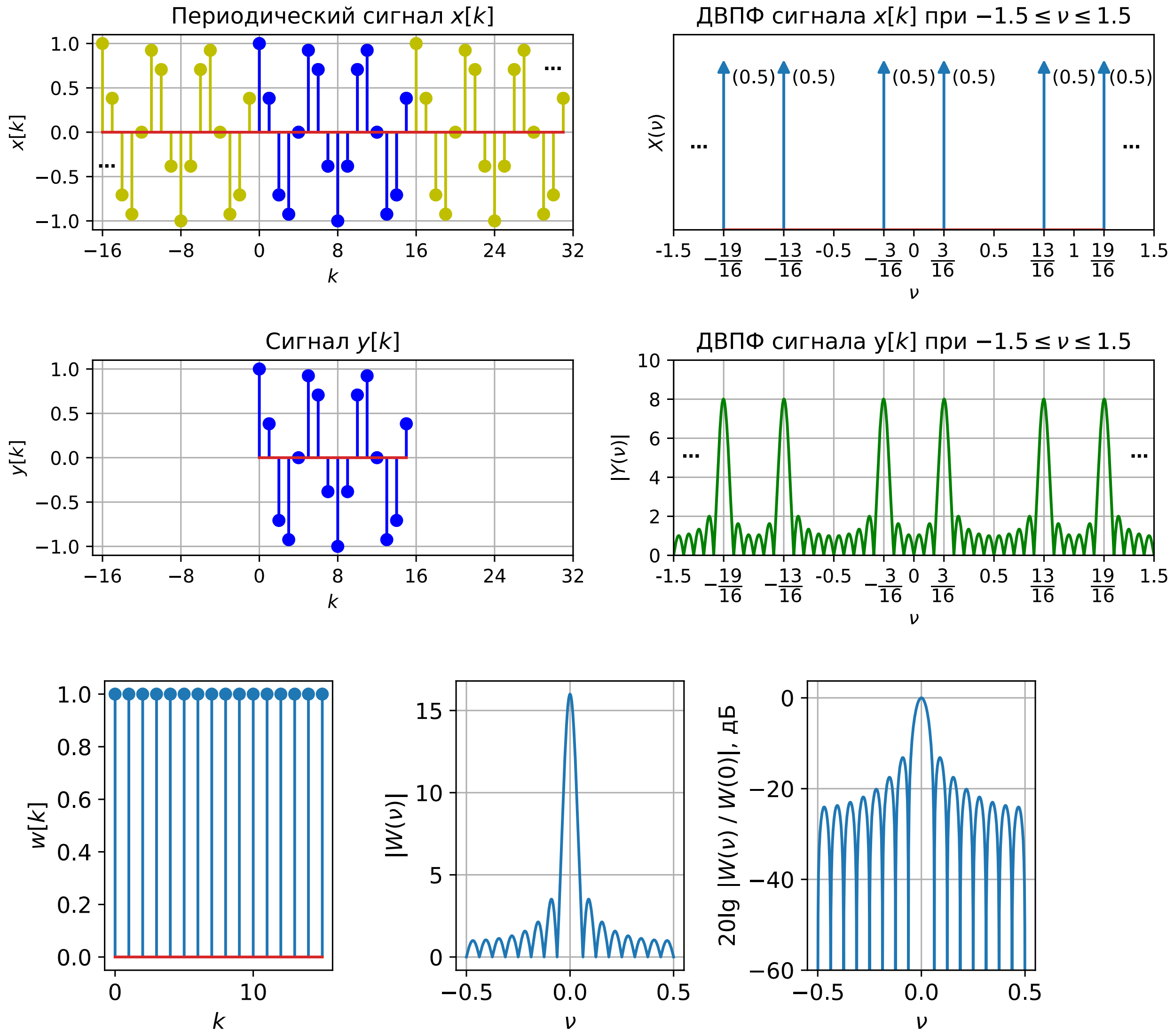
$$y[k]=\left(\frac{1}{2}\exp(j2\pi k\frac{3}{16})+\frac{1}{2}\exp(-j2\pi k\frac{3}{16})\right)w[k],$$

$$Y(\nu)=0.5W(\nu-\frac{3}{16})+0.5W(\nu+\frac{3}{16}).$$

ДПВФ последовательности $y[k]$

$$Y(\nu)=\frac{1}{2}\exp\left(-j(N-1)\pi(\nu-\frac{3}{16})\right)\frac{\sin(N\pi(\nu-\frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu-\frac{3}{16}))}+$$

$$+\frac{1}{2}\exp\left(-j(N-1)\pi(\nu+\frac{3}{16})\right)\frac{\sin(N\pi(\nu+\frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu+\frac{3}{16}))}.$$



Дополнительные примеры решения задач

Пример 8.

Используя теорему Коши о вычетах, определить импульсную характеристику $h[k]$ для физически реализуемого цифрового фильтра с передаточной функцией

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+0,25z^{-2}}.$$

Решение. Заметим, что

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+0,25z^{-2}}=\frac{z}{z^2-z+0,25}=\frac{z}{(z-0,5)^2}.$$

По формуле обратного z–преобразования

$$h[k]=\frac{1}{j2\pi}\oint_C H(z)z^{k-1}dz,$$

где контур C охватывает все полюса подынтегральной функции

$$Y(z)=H(z)z^{k-1}=\frac{z^k}{(z-0,5)^2}.$$

По теореме Коши о вычетах

$$h[k]=\frac{1}{j2\pi}\oint_C Y(z)dz=\sum_p \operatorname*{Res}_{z_p} Y(z), \quad k\geq 0$$

где z_p – полюса функции $Y(z)$.

Для нахождения вычетов используются следующие формулы:

- в случае полюса первого порядка

$$\operatorname*{Res}_{z_p} Y(z)=\lim_{z\to z_p} Y(z)(z-z_p);$$

- в случае полюса m-го порядка ($m>1$)

$$\operatorname*{Res}_{z_p} Y(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_p}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[Y(z)(z-z_p)^m\right].$$

В нашем случае $Y(z)$ имеет один двукратный полюс в точке $z_p=0.5$.

$$h[k]=\lim_{z\to 0,5}\frac{d}{dz}Y(z)(z-0,5)^2=\lim_{z\to 0,5}\frac{d}{dz}z^k=k(0,5)^{k-1}, \quad k\geq 0.$$

Получаем, что $h[k]=k(0,5)^{k-1}u[k]$.

Дополнительные примеры решения задач

Пример 9. Пример биквадратного блока.

Рассмотрим фильтр с передаточной функцией

$$H(z)=\frac{1+0,2z^{-1}-0,35z^{-2}}{1-0,5z^{-1}+0,06z^{-2}}$$

с начальными условиями $y[-1]=y[-2]=0$.

1) *Нули и полюса передаточной функции.*

$$H(z)=\frac{1+0,2z^{-1}-0,35z^{-2}}{1-0,5z^{-1}+0,06z^{-2}}=\frac{(1-0,5z^{-1})(1+0,7z^{-1})}{(1-0,3z^{-1})(1-0,2z^{-1})}=$$

$$=\frac{(z-0,5)(z+0,7)}{(z-0,3)(z-0,2)}$$

$z_{n1}=0,5$, $z_{n2}=-0,7$, $z_{p1}=0,3$, $z_{p2}=0,2$

Все полюса внутри единичного круга, значит фильтр устойчив.

2) *Разностное уравнение для реализации фильтра в прямой форме.*

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+0,2z^{-1}-0,35z^{-2}}{1-0,5z^{-1}+0,06z^{-2}}$$

$$Y(z)\left(1-0,5z^{-1}+0,06z^{-2}\right)=X(z)\left(1+0,2z^{-1}-0,35z^{-2}\right)$$

По теореме запаздывания для $z-$преобразования для целого числа $m>0$

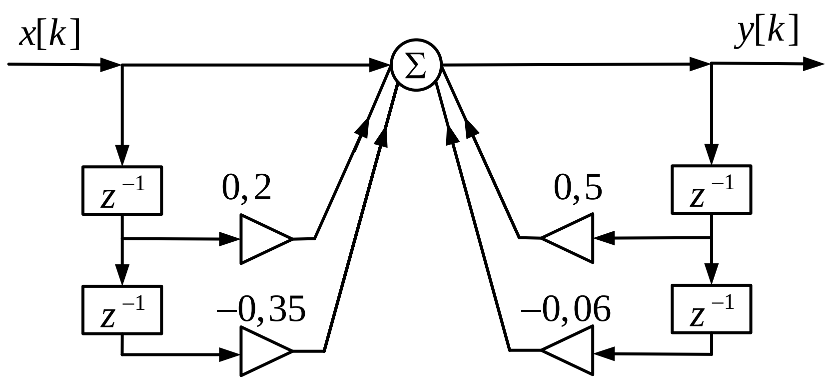
$$x[k-m]\xleftrightarrow{z}X(z)z^{-m}.$$

Тогда разностное уравнение имеет вид

$$y[k]-0,5y[k-1]+0,06y[k-2]=x[k]+0,2x[k-1]-0,35x[k-2]$$

$$y[k]=x[k]+0,2x[k-1]-0,35x[k-2]+0,5y[k-1]-0,06y[k-2]$$

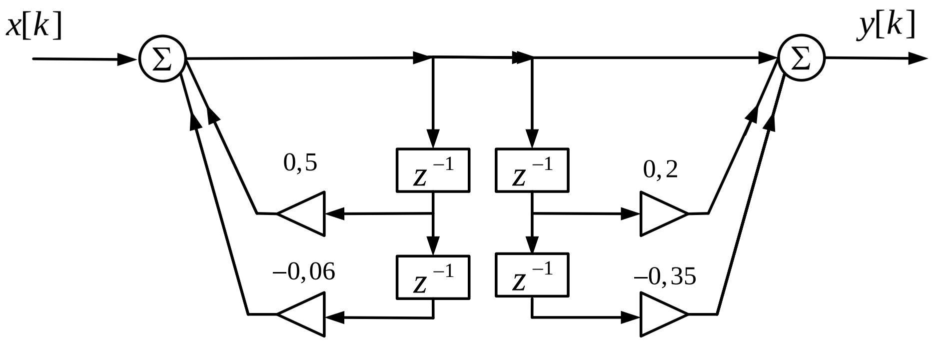
3) *Блок схема для реализации фильтра в прямой форме.*



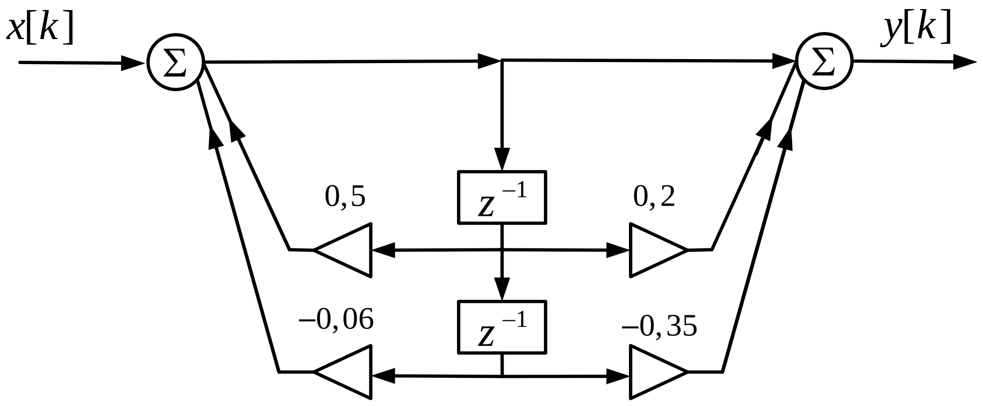
Дополнительные примеры решения задач

4) *Блок-схема реализации в прямой канонической форме.*

Переставим рекурсивную и нерекурсивную часть местами.



Объединим две линии задержки в одну



5) *Импульсная характеристика.*

Определим импульсную характеристику, воспользовавшись методом, основанном на контурном интегрировании с применение теоремы Коши о вычетах.

$$h[k] = \frac{1}{j2\pi}\oint_c H(z)z^{k-1}dz.$$

$$h[k] = \frac{1}{j2\pi}\oint_c \frac{(z-0,5)(z+0,7)}{(z-0,3)(z-0,2)}z^{k-1}dz.$$

При $k=0$ у подынтегрального выражения три полюса: $z_{p1}=0,3,\ z_{p2}=0,2,\ z_{p3}=0$, а при $k\geq 1$ — два : $z_{p1}=0,3,\ z_{p2}=0,2$.

Значение импульсной характеристики в точке $k=0$ можно найти из разностного уравнения системы

$$y[k] = x[k]+0,2x[k-1]-0,35x[k-2]+0,5y[k-1]-0,06y[k-2]$$

$$h[k] = \mathbf{1}[k]+0,2\cdot\mathbf{1}[k-1]-0,35\cdot\mathbf{1}[k-2]+0,5h[k-1]-0,06h[k-2]$$

$$h[0]=1$$

При $k\geq 1$ для интегрирования по контуру воспользуемся теоремой Коши о вычетах.

Дополнительные примеры решения задач

$$h[k]=\frac{1}{j2\pi}\oint_C \frac{(z-0,5)(z+0,7)}{(z-0,3)(z-0,2)}z^{k-1}dz=$$

$$=\operatorname*{Res}_{z=0,3}\frac{(z-0,5)(z+0,7)}{(z-0,3)(z-0,2)}z^{k-1}+\operatorname*{Res}_{z=0,2}\frac{(z-0,5)(z+0,7)}{(z-0,3)(z-0,2)}z^{k-1}=$$

$$=\left.\frac{(z-0,5)(z+0,7)}{(z-0,2)}z^{k-1}\right|_{z=0,3}+\left.\frac{(z-0,5)(z+0,7)}{(z-0,3)}z^{k-1}\right|_{z=0,2}=$$

$$=-2(0,3)^{k-1}+2,7(0,2)^{k-1}=-\frac{20}{3}(0,3)^k+\frac{27}{2}(0,2)^k,\ k\geq 1.$$

Объединим результаты в одну формулу

$$h[k]=\left(-\frac{20}{3}(0,3)^k+\frac{27}{2}(0,2)^k-\frac{35}{6}\mathbf{1}[k]\right)u[k].$$

6) *Частотная характеристика.*

Найдем частотную характеристику, взяв ДВПФ от импульсной характеристики.

$$H(\theta)=-\frac{20}{3}\frac{1}{1-0,3\exp(-j\theta)}+\frac{27}{2}\frac{1}{1-0,2\exp(-j\theta)}-\frac{35}{6}$$

Тот же результат можно получить подстановкой $z^{-1}=\exp(-j\theta)$ в передаточную функцию системы

$$H(z)=\frac{(1-0,5z^{-1})(1+0,7z^{-1})}{(1-0,3z^{-1})(1-0,2z^{-1})}.$$