

Лекция 2 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»

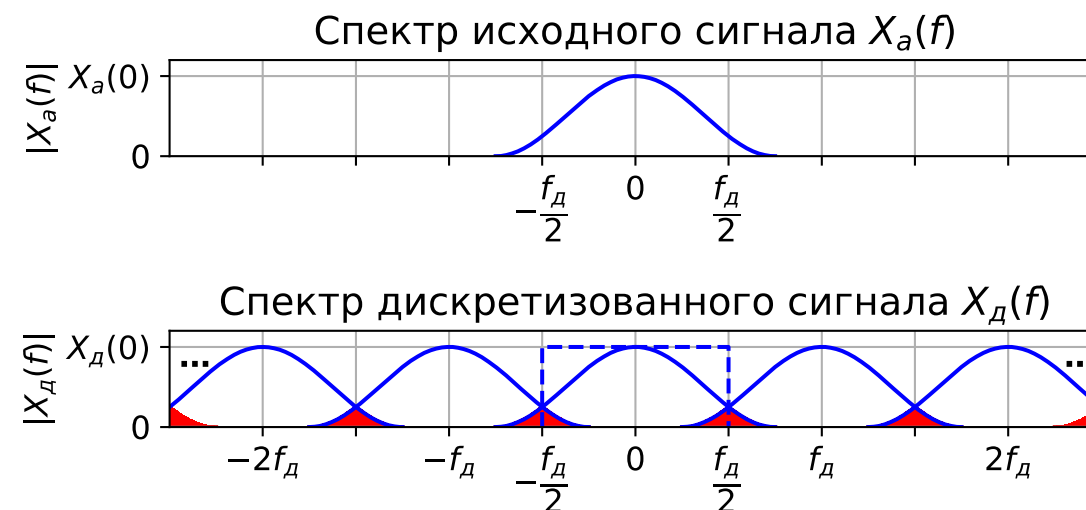
9 сентября 2023 г.

1.3. Дискретизация взятием отсчетов.

Спектр дискретизованного сигнала. Эффект наложения. Теорема Котельникова во временной области. Теорема отсчетов в частотной области. Особенности дискретизации синусоидальных сигналов.

1.4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Оценка спектра сигналов по последовательности его отсчетов. Четыре формы записи ДВПФ. Сходимость ДВПФ. Свойства ДВПФ.



1.3. Дискретизация взятием отсчетов.

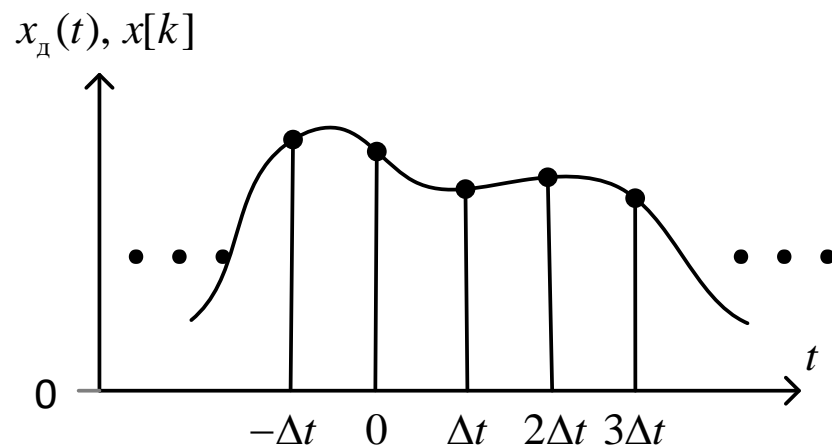
Способы описания дискретных сигналов

1) Функция дискретного времени k .

Это описание в виде последовательности отсчетов $x[k]$ в заданные моменты времени $k\Delta t$, $k \in \mathbb{Z}$, где Δt — шаг дискретизации:

$$x[k] = Tx(k\Delta t), T \in \{1; \Delta t\}$$

где T — константа с размерностью времени, равная единице или Δt .

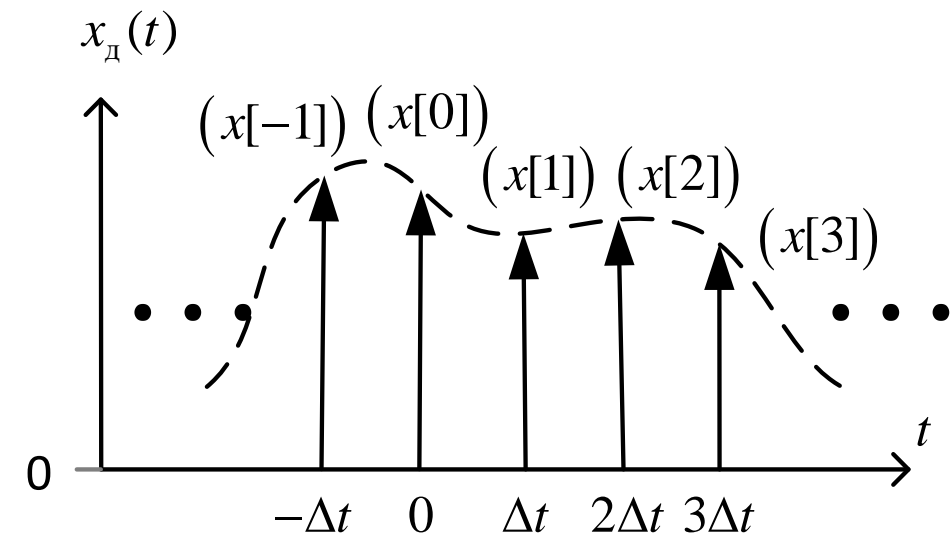


k	-1	0	1	2	3
$x[k]$	$x[-1]$	$x[0]$	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$

2) Функция непрерывного времени t (континуальная запись).

$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t).$$

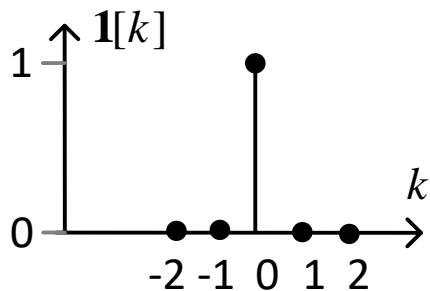
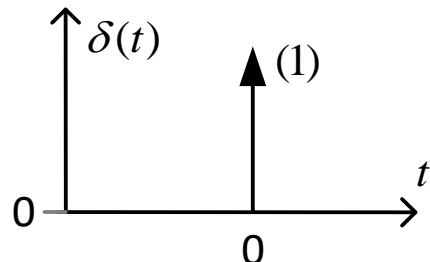
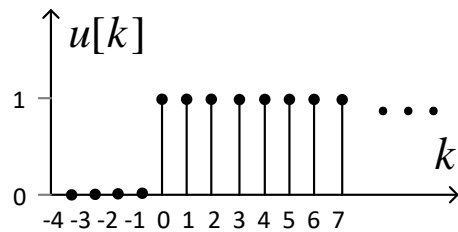
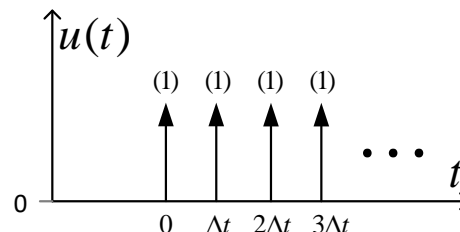
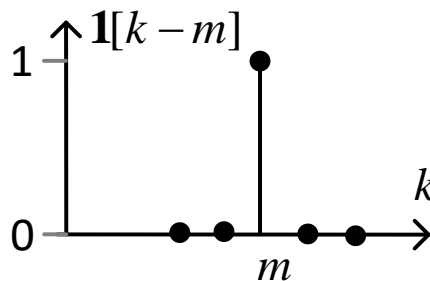
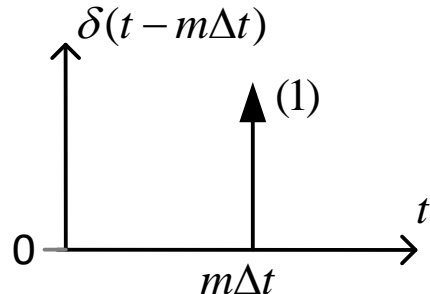
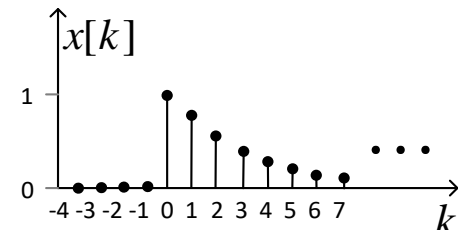
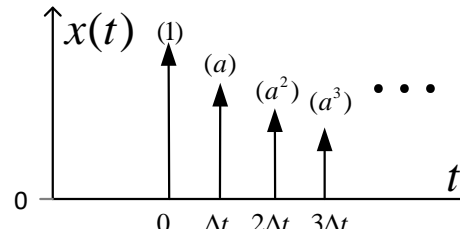
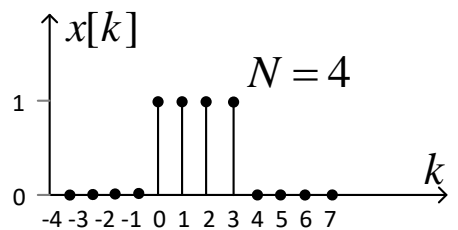
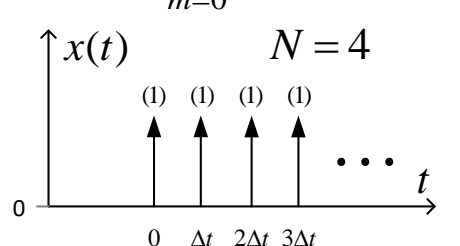
В этой записи дискретный сигнал представляет собой последовательность дельта-функций с площадями $x[k]$.



$$x_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Tx(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t).$$

В такой форме сигнал можно подставить в преобразование Фурье.

1.3. Дискретизация взятием отсчетов.

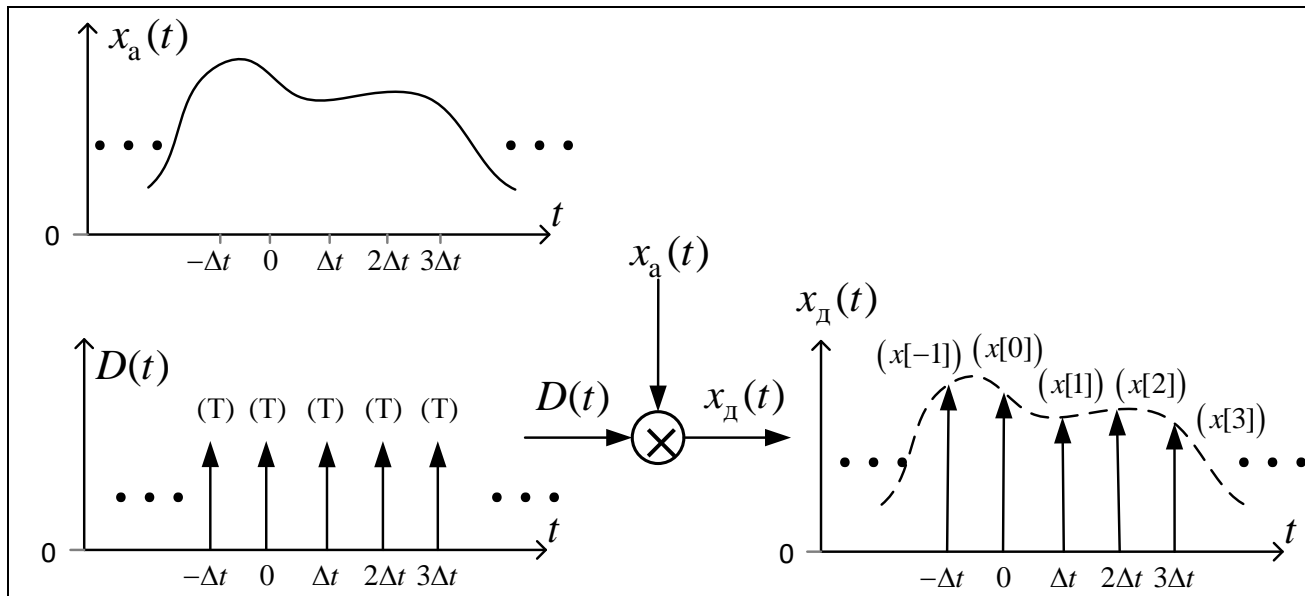
Дискретный сигнал	Описание в виде функции дискретного времени	Описание в виде функции непрерывного времени	Дискретная функция включения		
единичный импульс	$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$ 	$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака 	$u[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$ 	$\sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - m\Delta t)$ 	
Единичный импульс в точке m	$\mathbf{1}[k - m] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m. \end{cases}$ 	$\delta(t - m\Delta t)$ 	$x[k] = \begin{cases} a^k, & \text{при } k \geq 0, \\ 0, & \text{при } k < 0. \end{cases}$  <p>случай $0 < a < 1$</p>	$\sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta(t - m\Delta t)$ 	
Последовательность из N единичных импульсов	$x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m]$  <p>$N = 4$</p>	$x(t) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(t - m\Delta t)$  <p>$N = 4$</p>			

Спектр дискретизованного сигнала.

Спектр дискретизованного сигнала $X_d(f)$

Континуальная форма записи дискретизованного сигнала

$$x_d(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) = D(t)x_a(t)$$



Идеальная функция дискретизации

$$D(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t).$$

$D(t)$ — периодическая последовательность дельта-функций с периодом Δt и весами T .

Ряд Фурье для $D(t)$

$$D(t) = C_m \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t),$$

коэффициенты Фурье

$$C_m = \frac{T}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t) dt = \frac{T}{\Delta t}.$$

В итоге

$$x_d(t) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t) \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t).$$

По теореме смещения для преобразования Фурье если $x_a(t) \xleftrightarrow{FT} X_a(f)$, то $x_a(t) \exp(jm \frac{2\pi}{\Delta t} t) \xleftrightarrow{FT} X_a(f - mf_d)$.

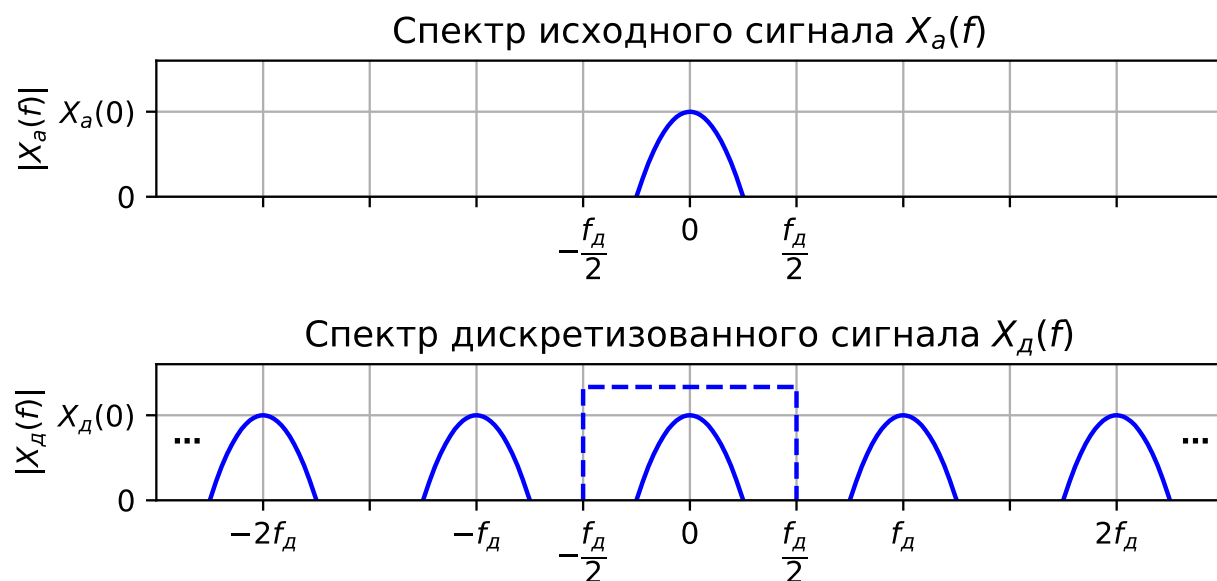
Тогда

$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d).$$

Эффект наложения.

$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d).$$

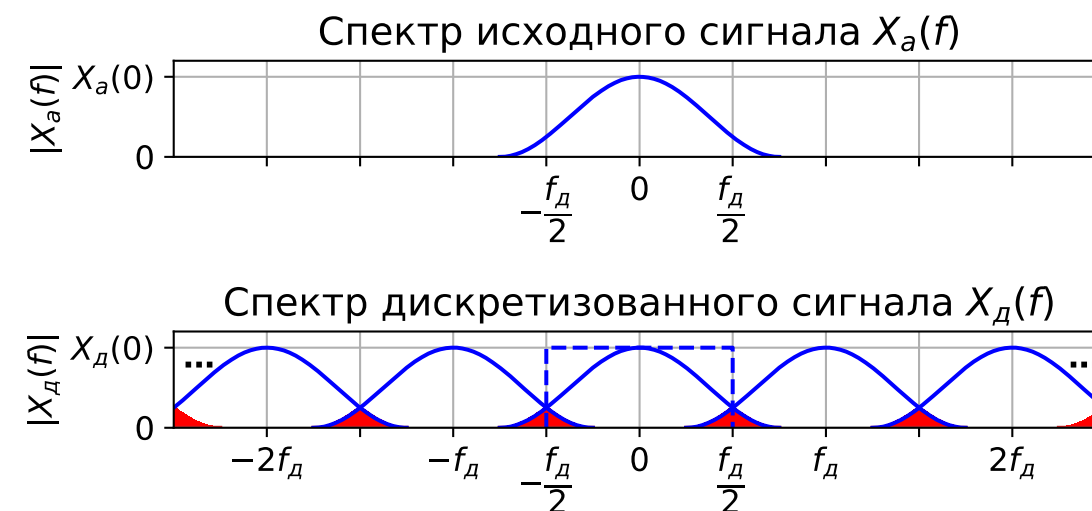
$T = 1$ $x[k] = x(k\Delta t)$	спектр перед периодическим повторением масштабируется
$T = \Delta t$ $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$	$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d)$ спектр периодически повторяется



Эффект наложения

Если спектр аналогового сигнала до дискретизации не был ограничен интервалом $[-f_d/2, f_d/2]$, то возникает эффект наложения (англ. aliasing): спектр аналогового и дискретизованного на этом интервале не совпадают.

Частично устранить этот эффект можно применением фильтра нижних частот с частотой среза $f_c = f_d/2$, при этом информация о высокочастотных спектральных компонентах $|f| > f_c$ не сохраняется.



Теорема Котельникова во временной области.

№2 Теорема Котельникова во временной области.

Пусть f_B — верхняя граничная частота в спектре сигнала.

Теорема отсчетов для сигнала с финитным спектром (Котельников 1933 г., Шеннон 1949 г.). Если сигнал $x(t)$

имеет спектр, ограниченный интервалом $[-f_B, f_B]$, и не содержит гармонических компонент на частотах $\pm f_B$ ¹, то он представим с помощью своих дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$,

взятых с шагом $\Delta t = \frac{1}{2f_B}$:

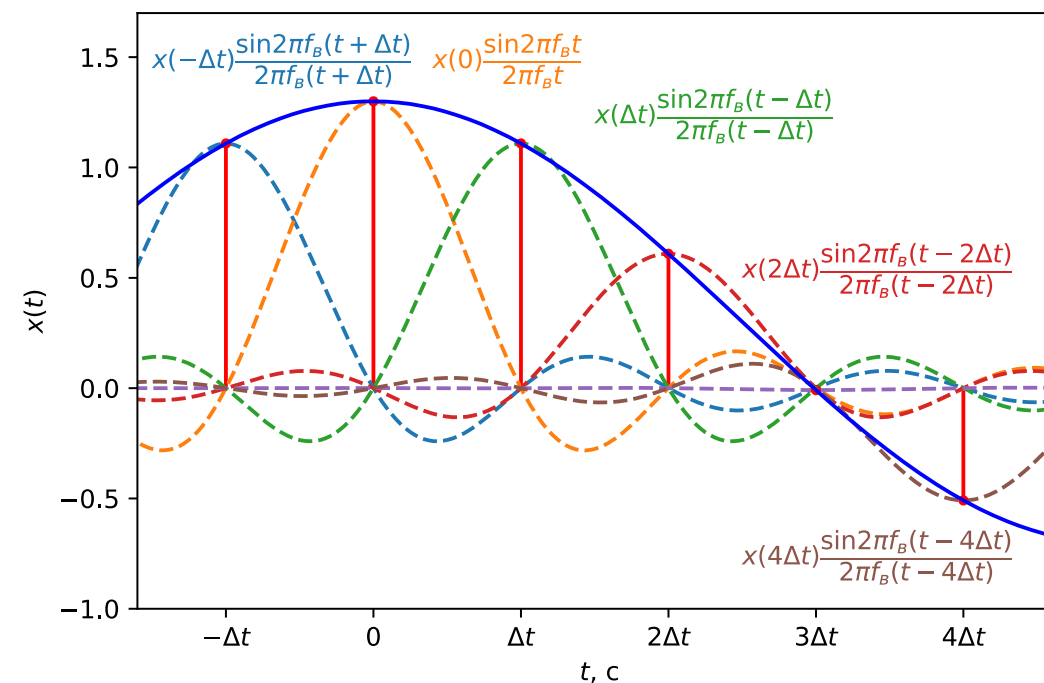
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}.$$

Интерпретация. Если сигнал $x(t)$ дискретизован с частотой f_d , а его спектр ограничен интервалом $[-f_d/2, f_d/2]$, его можно представить с помощью дискретных отсчетов $x(k\Delta t)$.

¹ Без этой оговорки теорема Котельникова не выполняется, например, для случая дискретизации сигнала

$$x(t) = \sin(2\pi f_B t) \text{ с шагом } \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

Частота $f_d/2$, равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста.



В пространстве сигналов из $L_2(-\infty, \infty)$ с спектром, ограниченным интервалом $[-f_d/2, f_d/2]$, система функций отсчетов $\{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, таких, что

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}, \Delta t = \frac{1}{2f_B},$$

полна и ортогональна.

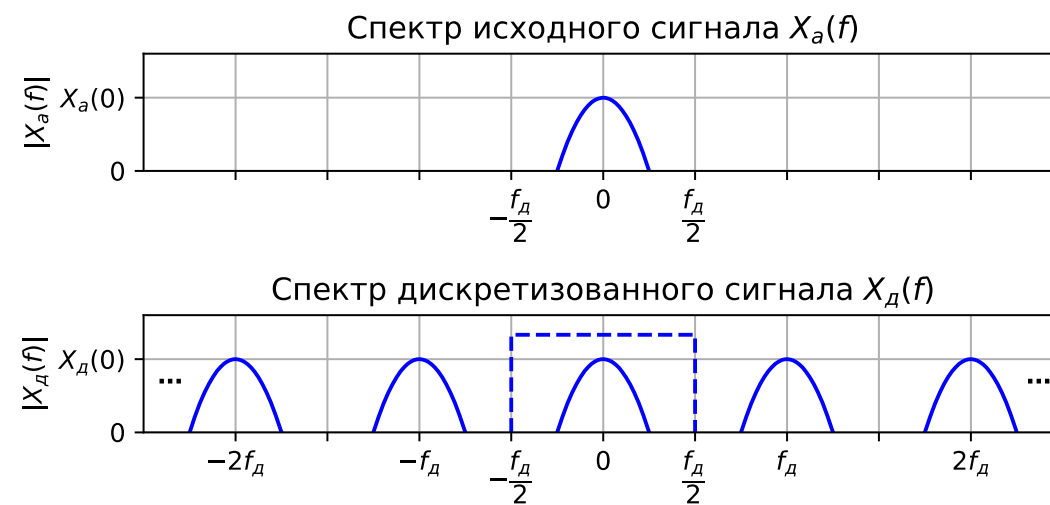
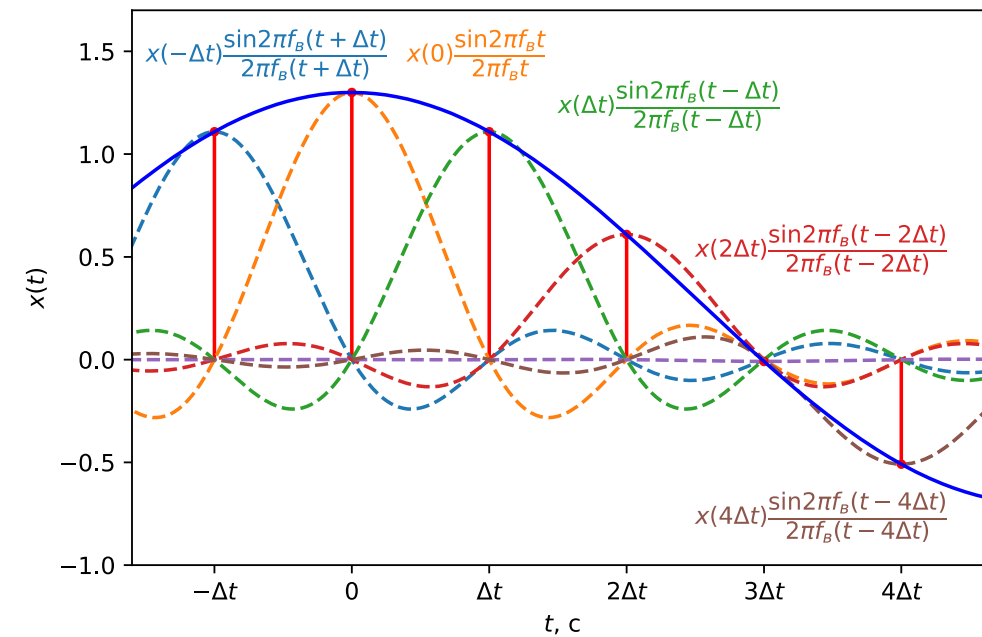
Теорема Котельникова во временной области.

Алгоритм передачи непрерывного сигнала с помощью его отсчетов.

- Взять отсчеты $x(k\Delta t)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- Передать величины этих отсчетов.
- На приемном конце сформировать короткие импульсы с площадями $\Delta t x(k\Delta t)$.
- Восстановить сообщение с помощью фильтра нижних частот с полосой пропускания $[-f_b, f_b]$, подавая на вход сформированные короткие импульсы

Недостатки подхода.

- Спектры реальных сигналов ограничены по частоте приближено.
- Невозможно измерить отсчеты сигнала за бесконечно малый промежуток времени.
- Реальные фильтры восстановления отличаются от идеального фильтра нижних частот.
- Короткие импульсы отличны от дельта-функций.



Особенности дискретизации синусоидальных сигналов.

Особенности дискретизации синусоидальных сигналов.

Пусть сигнал $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ дискретизируется с частотой дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.

Тогда

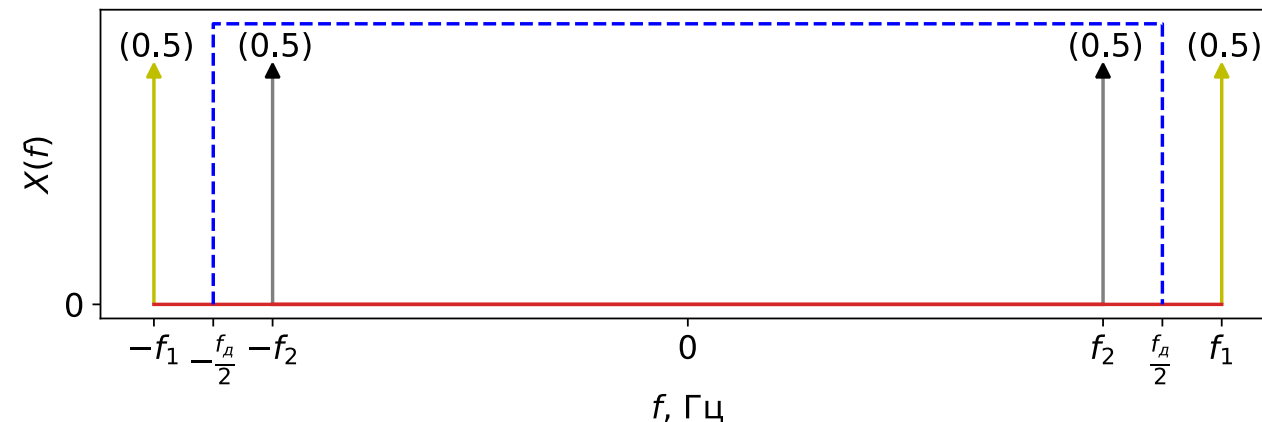
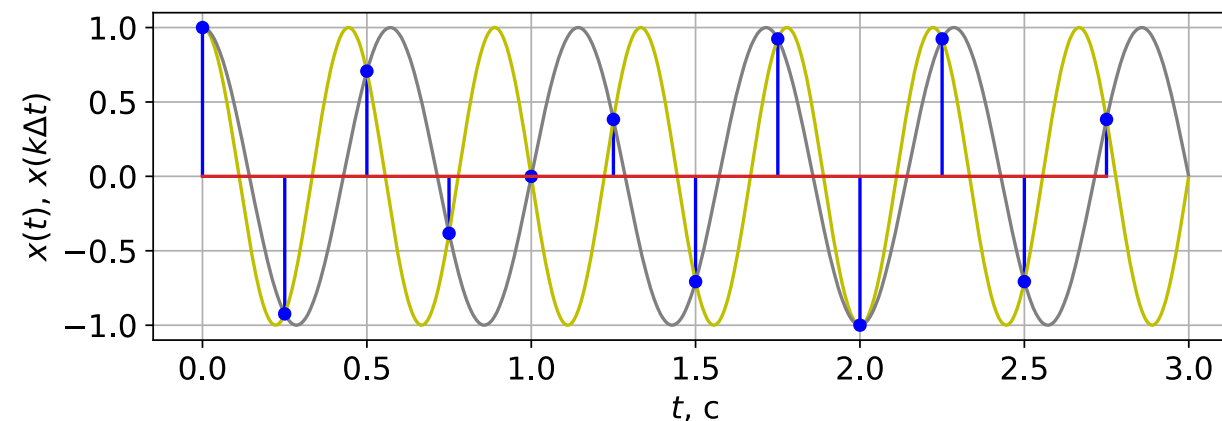
$$\begin{aligned} x[k] &= \sin(2\pi f_0 k \Delta t) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{n}{\Delta t}\right)k\Delta t\right) = \\ &= \sin(2\pi(f_0 + n f_d)k\Delta t). \end{aligned}$$

Следовательно, гармонические сигналы с частотами f_0 и $f_0 + n f_d$ дают одинаковый результат.

Последовательность цифровых отсчетов $x[k]$, представляющая синусоиду с частотой f_0 , точно так же представляет синусоиды с другими частотами $f_0 + n f_d$.

Причина заключается в эффекте наложения спектров.

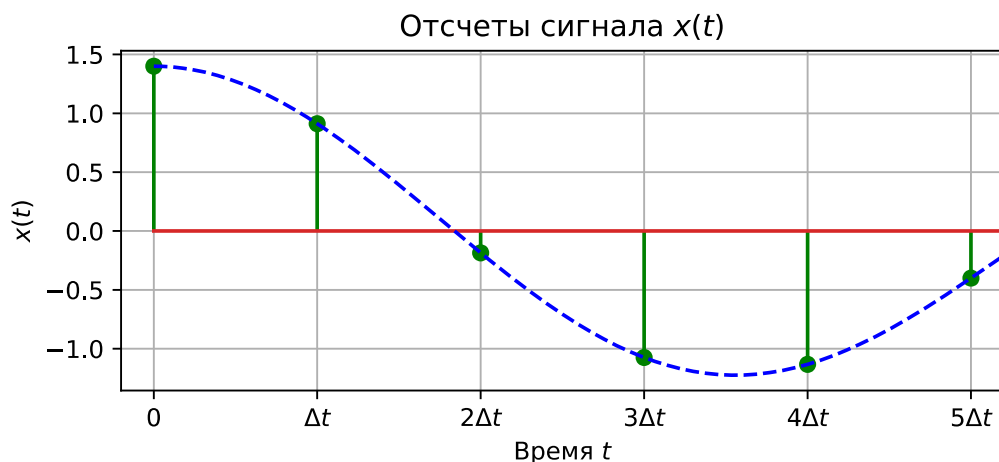
Пример. Дискретизованные косинусоиды с частотами $f_1 = 2,25$ Гц и $f_2 = 1,75$ Гц не различимы при частоте дискретизации $f_d = 4$ Гц.



1.4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

1.4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

Оценка спектра сигнала по последовательности его отсчетов



Пусть есть последовательность выборок $x(k\Delta t)$, некоторого аналогового сигнала $x(t)$, где Δt — шаг дискретизации — интервал времени между каждой парой соседних эквидистантных отсчетов, $k \in \mathbb{Z}$ — номер отсчета.

$f_d = 1/\Delta t$ — частота дискретизации — величина, обратная шагу дискретизации (размерность [Гц]=[с⁻¹]). Будем считать, что спектр исходного аналогового сигнала ограничен

интервалом $[-f_d/2; f_d/2]$, а соответственно при дискретизации не наблюдается эффект наложения спектров ($f_d > 2f_b$).

Рассмотрим последовательность отсчетов (дискретный сигнал) $x[k]$, которую будем определять через выборки следующим образом

$$x[k] = T x(k\Delta t),$$

где $T = \Delta t$. Как ранее было установлено, при $T = \Delta t$ спектр дискретизованного сигнала $x[k]$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X_a(f)$ аналогового сигнала $x(t)$ с периодом, равным частоте дискретизации f_d :

$$X_d(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - nf_d).$$

Необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $[-f_d/2; f_d/2]$. Теперь оценим спектр исходного сигнала по его выборкам в этой полосе.

1.4. Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Континуальная запись дискретного сигнала $x[k]$ в данном случае

$$x_{\text{д}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t).$$

Вычислим его спектр (преобразование Фурье)

$$\begin{aligned} X_{\text{д}}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{д}}(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \exp(-j2\pi f t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t), \end{aligned}$$

Таким образом, спектр дискретного сигнала определяется через его отсчёты по формуле

$$X_{\text{д}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t). \quad (1)$$

Эта формула определяет прямое дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Учитывая, что (1) представляет собой ряд Фурье для периодической функции

$X_{\text{д}}(f)^2$, получаем, что отсчётные значения дискретного сигнала соответствуют коэффициентам Фурье в этом ряде:

$$x[k] = c_{-k} = \frac{1}{f_{\text{д}} - f_{\text{а}}/2} \int_{f_{\text{а}}/2}^{f_{\text{а}}/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df. \quad (2)$$

В итоге получаем пару формул (1) и (2), определяющих прямое и обратное дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). ДВПФ в свою очередь показывает, каким является спектр дискретного сигнала $x[k]$, который на отрезке оси частот $[-f_{\text{д}}/2; f_{\text{д}}/2]$ в отсутствии наложения совпадает со спектром исходного аналогового сигнала. При этом важно помнить, что в данном случае выборки аналогового сигнала связаны с дискретной последовательностью как $x[k] = \Delta t x(k\Delta t)$.

² Напоминание. Для $2l$ -периодической функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на интервале $(-l; l)$ ряд Фурье по системе функций $\phi_m(x) = \exp(jm \frac{\pi}{l} x)$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(jm \frac{\pi}{l} x), \text{ где коэффициенты Фурье } c_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \exp(-jm \frac{\pi}{l} x) dx.$$

Различные формы записи ДВПФ

Различные формы записи ДВПФ

Итак, мы установили, что пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$
$$x[k] = \frac{1}{f_D} \int_{-f_D/2}^{f_D/2} X(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f / f_D = f \Delta t$. Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi \nu k),$$
$$x[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi \nu k) d\nu.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с $\omega_D = 2\pi / \Delta t$, то

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\omega k \Delta t),$$
$$x[k] = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_D/2}^{\omega_D/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega.$$

Приняв $\theta = 2\pi \nu$ (нормированный угол в радианах), получаем

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j\theta k),$$
$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) \exp(j\theta k) d\theta.$$

Частотная переменная	Размерность	Период повторения спектра	
f	Гц	$f_D = 1 / \Delta t$	$[-f_D / 2; f_D / 2]$
$\omega = 2\pi f$	рад/с	$\omega_D = 2\pi / \Delta t$	$[-\omega_D / 2; \omega_D / 2]$
$\nu = f / f_D$	безразмерная	1	$[-0,5; 0,5]$
$\theta = 2\pi f / f_D$	рад	2π	$[-\pi; \pi]$

Различные формы записи ДВПФ

Пример. Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов

$$x[k] = \mathbf{1}[k+1] + \mathbf{1}[k] + \mathbf{1}[k-1],$$

где $\mathbf{1}[k]$ — единичный импульс, определяемый как

$$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

ДВПФ $x[k]$ в нормированных частотах ν

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=-1}^1 x[k] e^{-j2\pi\nu k} = \\ &= x[-1]e^{j2\pi\nu} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi\nu} = \\ &= \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu). \end{aligned}$$

Аналогично для частот в герцах (f)

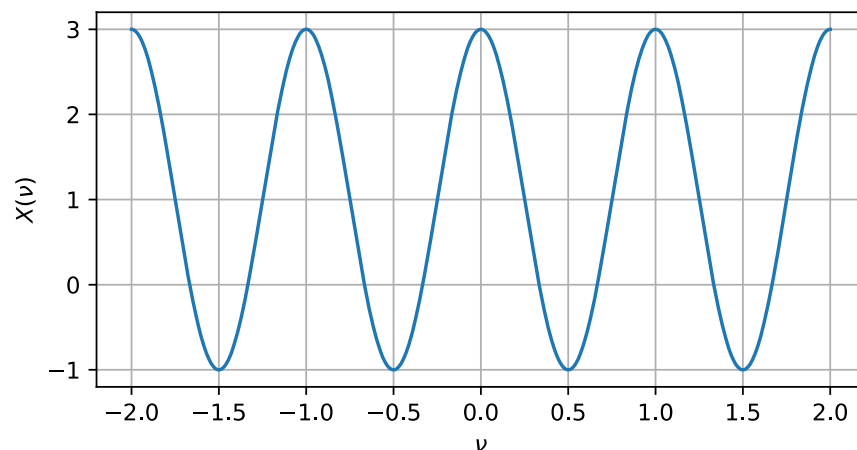
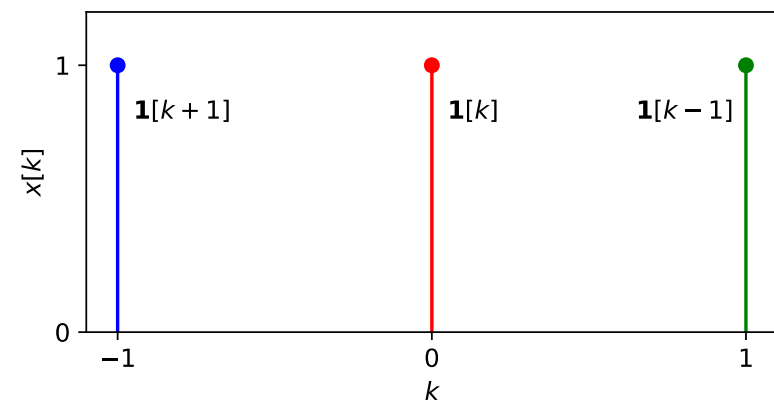
$$X(f) = 1 + 2\cos(2\pi f \Delta t),$$

для частот в рад/с ($\omega = 2\pi f$)

$$X(\omega) = 1 + 2\cos(\omega \Delta t),$$

для $\theta = 2\pi\nu$

$$X(\theta) = 1 + 2\cos(\theta).$$



Функция $X(\nu)$ периодическая и в силу четной симметрии $x[k]$ относительно нуля действительная.

Различные формы записи ДВПФ

Свойства ДВПФ

1) Линейность

Если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(v)$ и $y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(v)$, то

$\alpha x[k] + \beta y[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \alpha X(v) + \beta Y(v)$, где α, β — фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

2) Теорема запаздывания

Если

$$x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(v), \text{ то } x[k-l] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(v) \exp(-j2\pi vl).$$

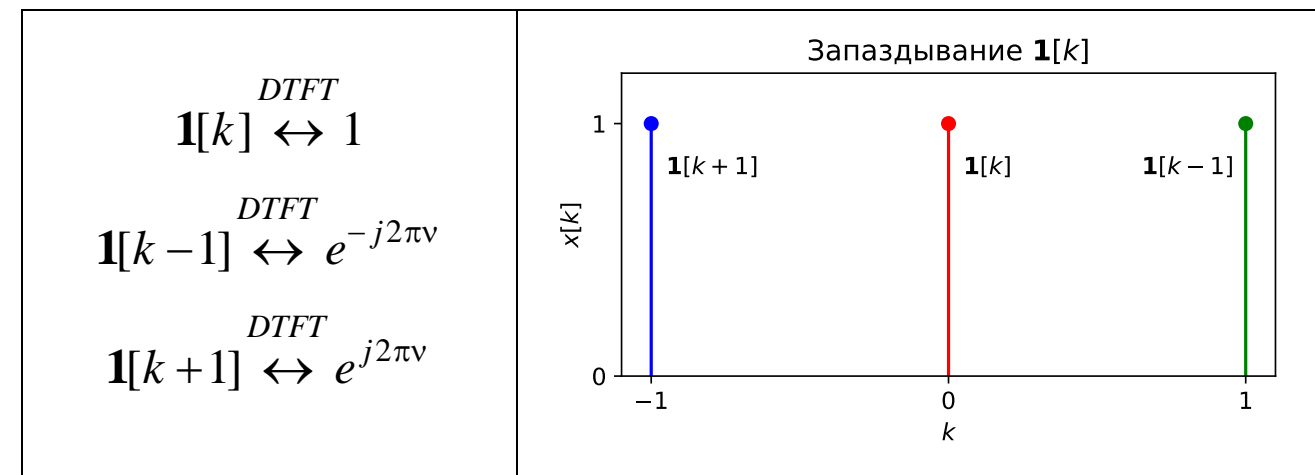
где $x[k-l]$ — это сигнал, запаздывающий по времени относительно сигнала $x[k]$ на l отсчетов в случае $l > 0$ и опережающий сигнал $x[k]$ на $-l$ отсчетов в случае $l < 0$.

Стоит отметить, что $|X(v)|$ для запаздывающего и исходного сигнала одинаков.

Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(v) \exp(-j2\pi vl) \exp(j2\pi vk) dv = \\ = \int_{-1/2}^{1/2} X(v) \exp(j2\pi v(k-l)) dv = x[k-l].$$

Пример



Различные формы записи ДВПФ

3) Теорема сдвига

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)$, то $x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0)$.

Умножение сигнала на комплексную экспоненту вида $\exp(j2\pi\nu_0 k)$, $\nu_0 \in R$ приводит к сдвигу спектральной функции вдоль оси частот на ν_0 вправо в случае $\nu_0 > 0$ и на $-\nu_0$ влево в случае $\nu_0 < 0$.

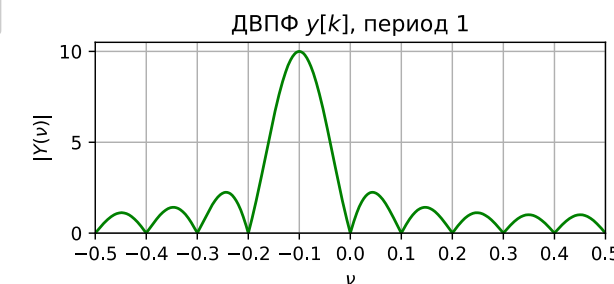
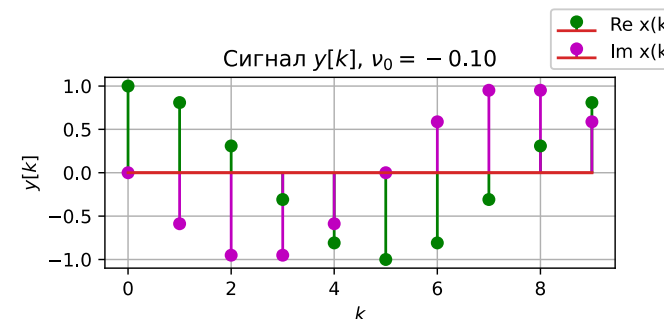
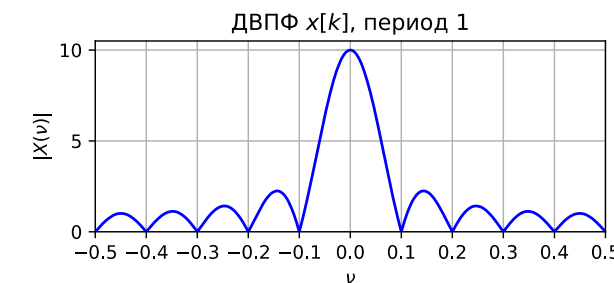
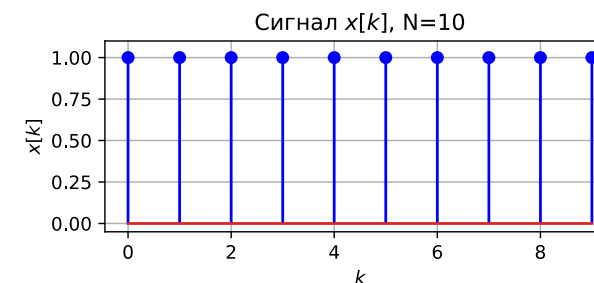
Пример.

$$y[k] = x[k] \exp(j2\pi\nu_0 k), \text{ где } x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m].$$

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} = \\ &= \frac{2j e^{-j\pi\nu N} (e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{2j e^{-j\pi\nu} (e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$

$$Y(\nu) = X(\nu - \nu_0) = \frac{\sin(N\pi(\nu - \nu_0))}{\sin(\pi(\nu - \nu_0))} \exp(-j(N-1)\pi(\nu - \nu_0))$$



Различные формы записи ДВПФ

4) Равенство Парсеваля

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} X(v)Y^*(v)dv$$

Пример.

Предположим, что имеется финитная последовательность

$x[k] = \{1; 1; 1\}$. Тогда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = 3$. При этом

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j2\pi vk} = x[-1]e^{j2\pi v} + x[0]e^0 + x[1]e^{-j2\pi v} = \\ = \exp(j2\pi v) + 1 + \exp(-j2\pi v) = 1 + 2\cos(2\pi v).$$

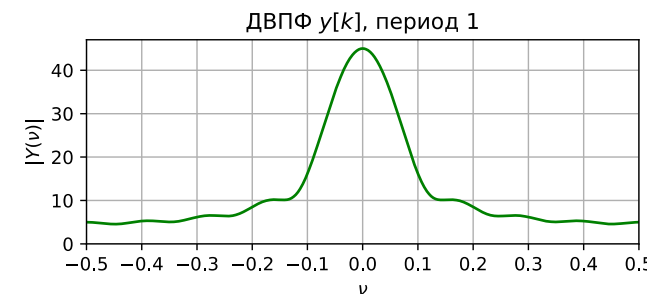
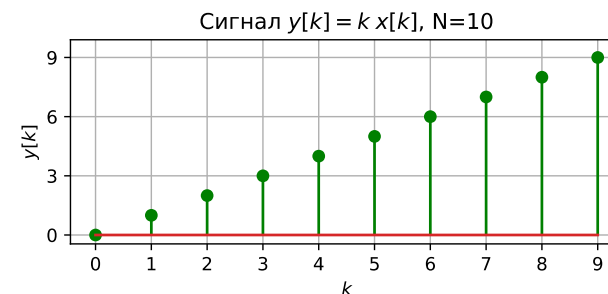
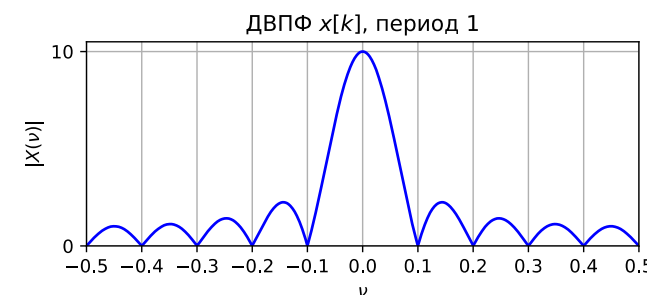
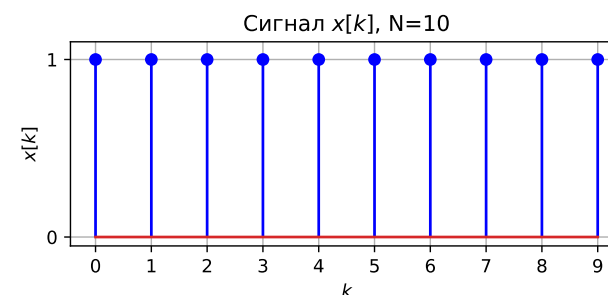
$$\int_{-1/2}^{1/2} |X(v)|^2 dv = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2\cos(2\pi v)|^2 dv = 3.$$

5) Умножение на k и дифференцирование по частоте

$$\text{Если } x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v), \text{ то } y[k] = kx[k] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{j}{2\pi} \frac{dX(v)}{dv}.$$

Пример.

$$x[k] = \sum_{m=0}^9 \mathbf{1}[k-m].$$



Различные формы записи ДВПФ

6) Изменение масштаба

Если $x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(v)$, то $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \xleftrightarrow{DTFT} X(vL)$.

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi vk) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \exp(-j2\pi vk) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j2\pi(vL)m) = X(vL). \end{aligned}$$

Пример

Рассмотрим последовательность из 10 единичных

импульсов. $x[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k - m]$.

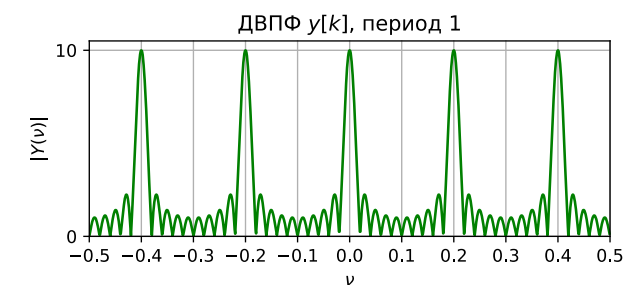
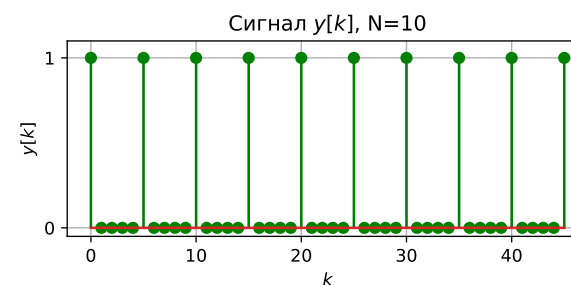
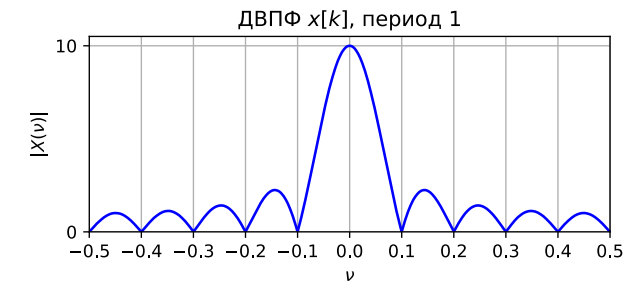
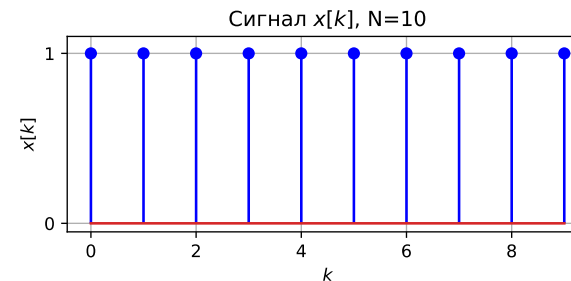
$$\begin{aligned} X(v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi vk) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi vk) = \\ &= \frac{1 - \exp(-j2\pi vN)}{1 - \exp(-j2\pi v)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-j\pi vN}}{e^{-j\pi v}} \frac{(e^{j\pi vN} - e^{-j\pi vN})}{(e^{j\pi v} - e^{-j\pi v})} = \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \exp(-j(N-1)\pi v).$$

$$|X(v)| = \left| \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)} \right|.$$

Между каждой парой отсчетов добавим $L-1$ нулевой отсчет. Тогда модуль ДВПФ получившейся последовательности

$$|X_L(v)| = \left| \frac{\sin(10\pi vL)}{\sin(\pi vL)} \right|.$$

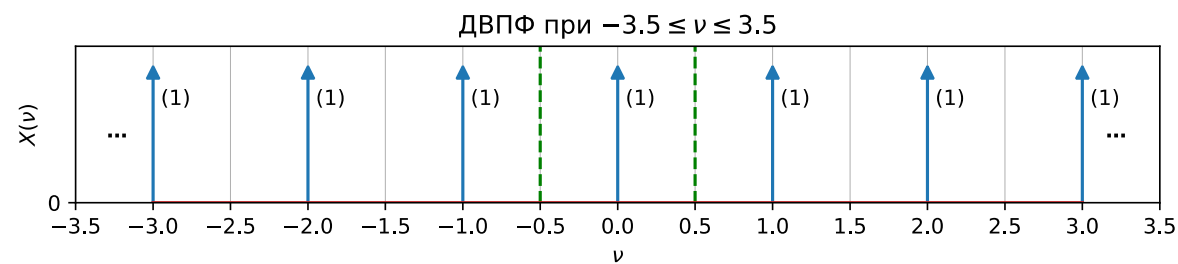
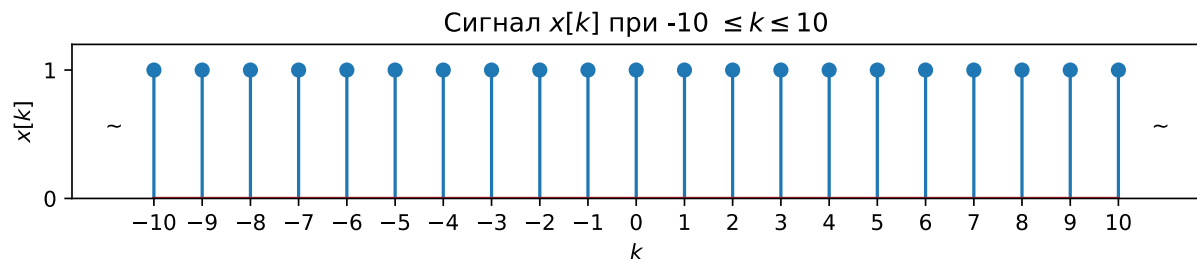


Различные формы записи ДВПФ

7) ДВПФ периодических последовательностей

а) последовательность единичных импульсов с периодом 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n)$$



Вычислим ДВПФ для последовательности $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]$.

$$X(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi vk) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \right) \exp(-j2\pi vk) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \exp(-j2\pi vk).$$

$$X(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi vm).$$

Заметим, что $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi vm)$ — это ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ -функций с периодом 1

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi vm),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(v) \exp(j2\pi vm) dv = e^0 = 1.$$

Тогда получаем, что

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v-n).$$

Различные формы записи ДВПФ

б) Периодическая последовательность единичных импульсов с периодом L .

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{L}\right)$$

Найдем ДВПФ для последовательности $x[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL]$.

Используя свойство об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(vL),$$

из

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - m] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - n)$$

получаем

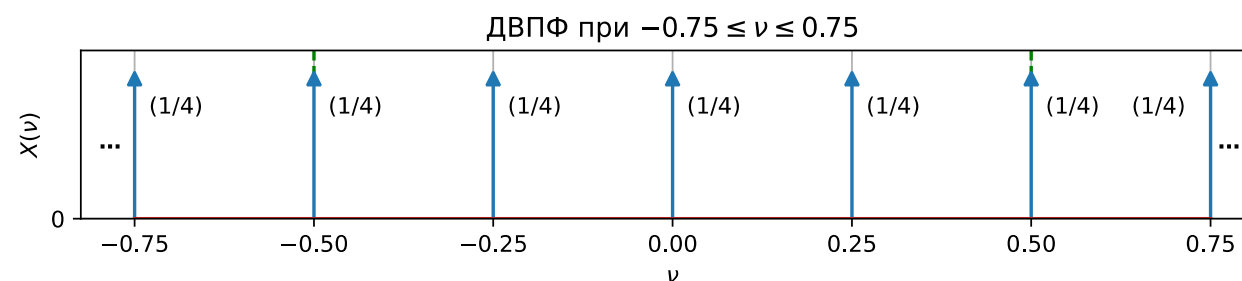
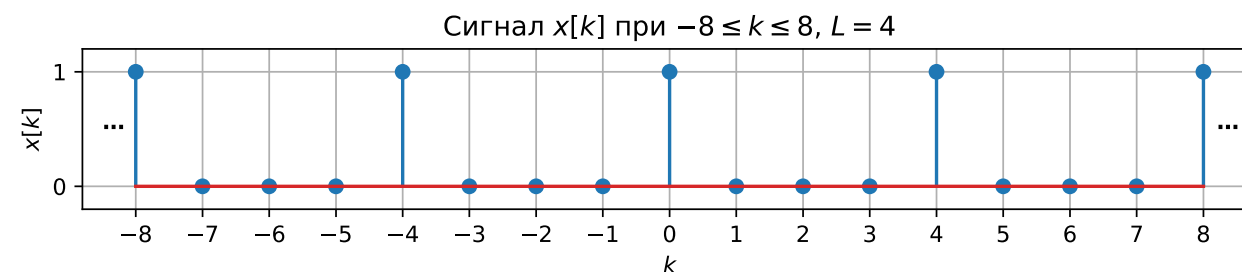
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(vL - n)$$

Воспользовавшись свойством δ -функции

$$\delta(av - b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(v - \frac{b}{a}\right),$$

получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k - mL] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{n}{L}\right)$$

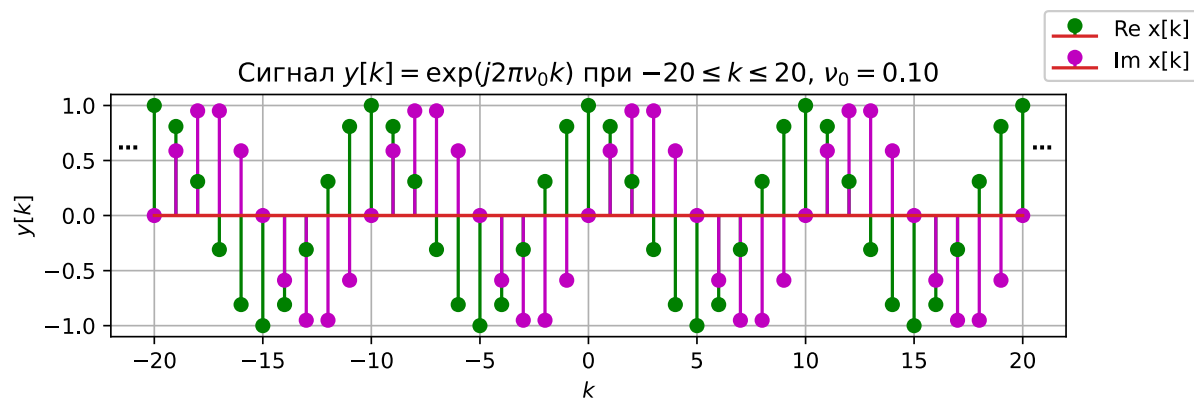


Различные формы записи ДВПФ

в) Гармонические сигналы

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

$$y[k] = \exp(j2\pi\nu_0 k)$$



$$\text{Если } x[k] \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu), \text{ то } x[k]\exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} X(\nu - \nu_0).$$

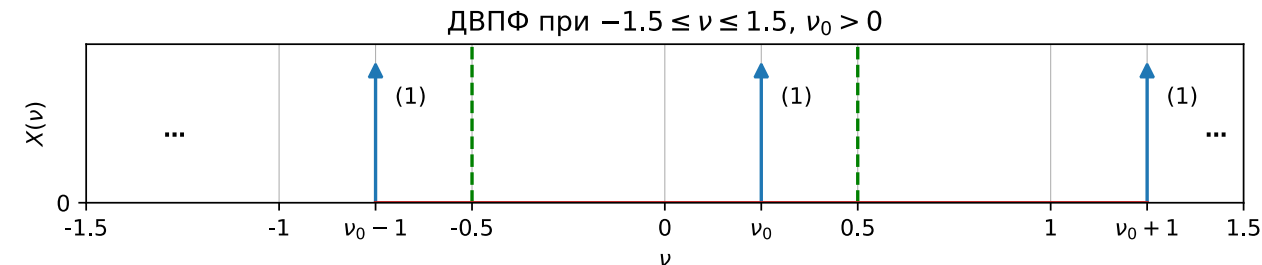
(теорема смещения для ДВПФ). При этом

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m] \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n).$$

Получаем, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}[k-m]\exp(j2\pi\nu_0 k) \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n).$$



8) Теорема о свертке во временной области.

$$\begin{aligned} \text{Если } x[k] &\xleftrightarrow{DTFT} X(\nu) \text{ и } y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\nu), \\ \text{то } \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[k-m] &\xleftrightarrow{DTFT} X(\nu)Y(\nu). \end{aligned}$$

В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

9) Теорема о свертке в частотной области

$$\begin{aligned} \text{Если } x[k] &\xleftrightarrow{DTFT} X(\nu) \text{ и } y[k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\nu), \\ \text{то } x[k]y[k] &\xleftrightarrow{DTFT} \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{\nu})Y(\nu - \tilde{\nu})d\tilde{\nu}. \end{aligned}$$

В левой части стоит произведение сигналов, в правой -- циклическая свертка спектров.

Задачи для самостоятельного решения

с лекции 9 сентября 2024 г.

№1. Найти ДВПФ 16 - точечных последовательностей

а) $x[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m],$

б) $y_1[k] = x[k] \cos(2\pi k 5 / 16),$

в) $y_2[k] = x[k] \sin(2\pi k 5 / 16).$

Для п. а) изобразить график модуля ДВПФ.

№2.

а) Определить для $N = 16$ ДВПФ окна Блэкмана

$$w_B[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos\left(2\pi \frac{1}{N} k\right) + 0,08 \cos\left(2\pi \frac{2}{N} k\right), \\ \text{при } k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ 0, \text{ при других } k. \end{cases}$$

б) Найти ДВПФ 16 - точечной последовательности

$y[k] = w_B[k] \cos(2\pi k 5 / 16),$ где $w_B[k]$ — окно Блэкмана длиной в 16 отсчетов.

№3. Гармонический сигнал $x(t) = \cos 2\pi f_0 t, f_0 = 17$ Гц, дискретизован с частотой $f_d = 170$ Гц. Найти ДВПФ $X(v)$ (в нормированных частотах) последовательности отчетов этого сигнала $x[k] = x(k\Delta t)$. Построить график $X(v)$ для значений нормированных частот $v \in [-2,5; 2,5]$.

№4. Определить, будут ли различимы синусоиды с частотами $f_1 = 20$ кГц и $f_2 = 80$ кГц при их дискретизации с частотой $f_d = 60$ кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения при дискретизации каждого из этих сигналов?

Теорема отсчетов в частотной области

Реально все сигналы наблюдаются в течение конечного интервала времени, например, $[-T, T]$. Поэтому можно считать, что $x(t)$ является финитной функцией. Спектр такого сигнала имеет бесконечную протяжённость и записывается в виде

$$X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Для периодического продолжения $x(t)$ с периодом $2T$ (без наложения) справедливо представление рядом Фурье:

$$x_{\Pi}(t) = \sum_n c_n \exp(j2\pi n \Delta f t),$$

где $\Delta f = 1/2T$ и коэффициенты Фурье

$$c_n = (1/2T) \int_{-T}^T x(t) \exp(-j2\pi n \Delta f t) dt = \Delta f X(n\Delta f).$$

Для спектральной функции можем записать

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-T}^T \left[\sum_n \Delta f X(n\Delta f) \exp(j2\pi n \Delta f t) \right] \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= \Delta f \sum_n X(n\Delta f) \int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) dt &= \frac{1}{j2\pi(n\Delta f - f)} \exp(j2\pi(n\Delta f - f)t) \Big|_{-T}^T = \\ &= \frac{2 \sin 2\pi T(n\Delta f - f)}{2\pi(n\Delta f - f)}. \end{aligned}$$

Для $X(f)$ окончательно получаем

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta f) \frac{\sin 2\pi T(f - n\Delta f)}{2\pi T(f - n\Delta f)}; \quad \Delta f = 1/2T.$$

Это интерполяционная формула Котельникова (теорема отсчётов) в частотной области. Функция $X(f)$ на любой частоте f однозначно представляется последовательностью своих отсчётов, взятых через равные интервалы $\Delta f = 1/2T$.

Дискретизация спектральной функции с шагом $\Delta f = 1/2T$ приводит к периодическому повторению сигнала по оси времени с периодом $2T$. При этом эффекта наложения отдельных периодов друг на друга не будет, поскольку шаг дискретизации по частоте выбран в соответствии с теоремой отсчётов в спектральной области.