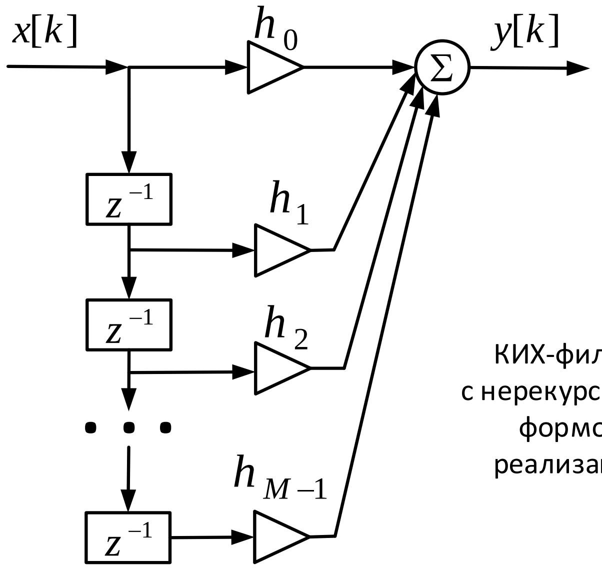
Лекция 13 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»

25 ноября 2024 г.

4.7. Цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры)

- КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой.
- Нерекурсивный способ реализации КИХ-фильтров.
- Рекурсивный способ реализации КИХ–фильтров. Метод частотной выборки.
- Примеры КИХ-фильтров.

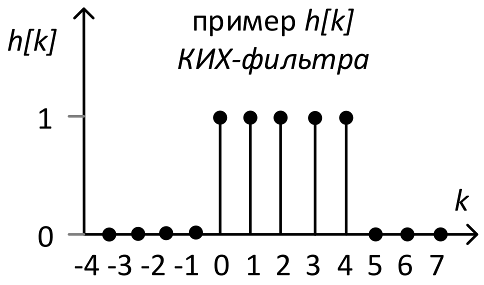


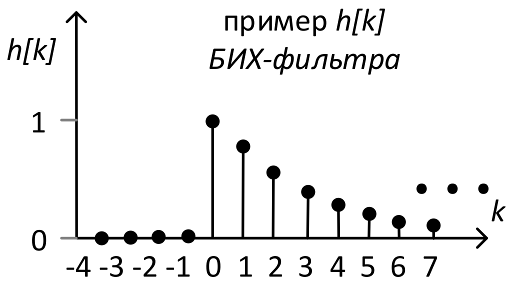
КИХ-фильтр
с нерекурсивной
формой
реализации

КИХ-фильтры. Введение.

4.7. Цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры)

Цифровой фильтр, у которого импульсная характеристика $h[k]$ содержит конечное число ненулевых отсчетов, называется цифровым фильтром с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтром).





Передаточную функцию КИХ-фильтра, импульсная характеристика которого содержит N ненулевых отсчетов, можно представить в виде полинома

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \ldots + h_{N-1} z^{-(N-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] z^{-k} \qquad (1)$$

Частотная характеристика (подстановка $z = e^{j\omega\Delta t} = e^{j\theta}$)

$$H\left(e^{j\theta}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \exp\left(-j\theta k\right). \qquad (2)$$

БИХ–фильтры	КИХ–фильтры
Могут быть неустойчивыми по входу	Всегда устойчивые по входу
Линейная ФЧХ невозможна	Линейность ФЧХ гарантирована при (анти)симметричной $h[k]$
Возможна только рекурсивная реализация	Допустима рекурсивная и нерекурсивная реализации

Заметим, что θ – набег фазы (в радианах) колебания с частотой ω за время Δt. Функция $H(\theta)$ также является ДВПФ от $h[k]$, а значит это периодическая функция с периодом 2π. При этом

$$H(e^{j\theta}) = A(\theta) \exp\left(j\varphi(\theta)\right), \qquad (3)$$

где $A(\theta) = \left|H(e^{j\theta})\right|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), $\varphi(\theta) = \arg H(e^{j\theta})$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ). Это также 2π-периодические функции.

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

№16 **КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой**

При прохождении сигнала через фильтр изменяется амплитуда и/или фаза сигнала. Удобной мерой изменения фазовой характеристики сигнала является *фазовая* или *групповая* задержка фильтра. Предположим, что сигнал состоит из совокупности частотных компонент (например, речевой или модулированный сигнал).

Фазовая задержка фильтра – это величина временной задержки, которую испытывает каждый частотный компонент сигнала в полосе $[-\pi, \pi]$ при прохождении через фильтр:

$$\tau_{ф}(\theta) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} = -\frac{\varphi(\theta)}{\theta}\Delta t. \qquad (4)$$

Групповая задержка – средняя временная задержка составного сигнала:

$$\tau_{гр}(\theta) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t. \qquad (5)$$

- Фильтр с нелинейной фазовой характеристикой будет искажать фазу сигнала, проходящего через фильтр.
- Частотные компоненты сигнала будут задерживается на величину, не пропорциональную частоте, нарушая тем самым их гармоническую связь.
- Для сигналов с амплитудной модуляцией (АМ) постоянная групповая задержка позволяет сохранить форму огибающей, несущей информацию о модулирующем сигнале.
- Нелинейная ФЧХ приводит к искажению звукового сигнала, восстановленного из амплитудно-модулированного несущего сигнала, приводит к смазыванию границ телевизионных изображений, размывает крутые фронты радиолокационных импульсов и повышает вероятность ошибки в цифровых системах связи.

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

Линейность ФЧХ (с точности до скачков фазы на π) обеспечивается при выполнении условия симметрии импульсной характеристики

$$h[k] = h[N-1-k] \qquad (6)$$

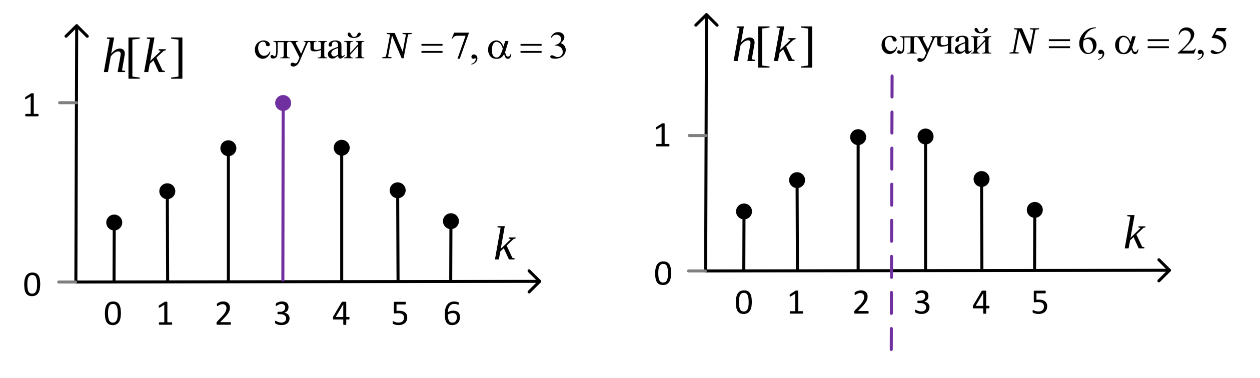
либо антисимметрии

$$h[k] = -h[N-1-k], \qquad (7)$$

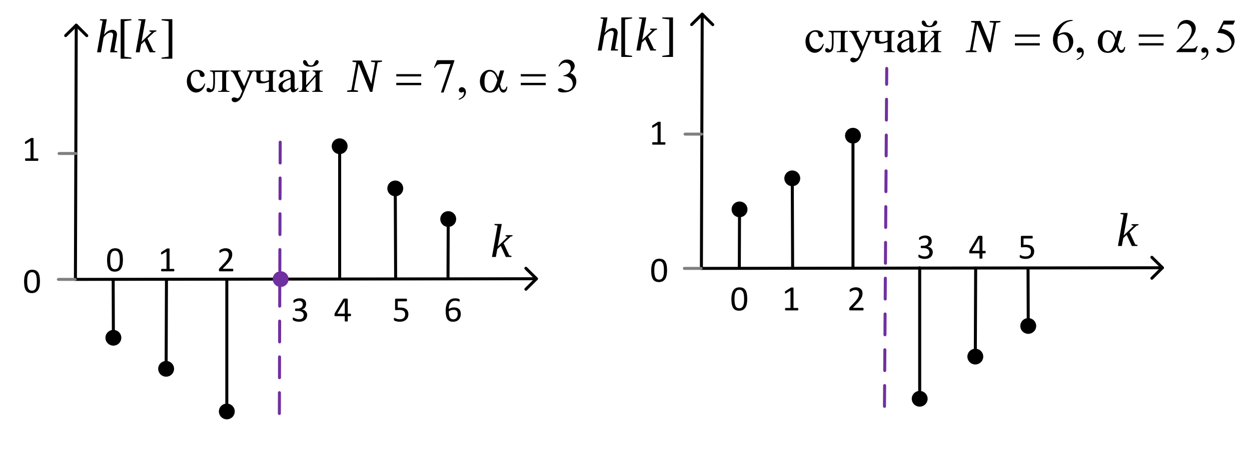
где N – это число ненулевых отсчетов импульсной характеристики фильтра. В значимости от четности N и симметрии/антисимметрии импульсной характеристики $h[k]$ обычно выделяют четыре типа КИХ фильтров с кусочно-линейной ФЧХ.

	$h[k]$ на $[0, N-1]$ симметрична	$h[k]$ на $[0, N-1]$ антисимметрична
N нечетный	Тип 1.	Тип 3.
N четный	Тип 2.	Тип 4.

Рассмотрим их отдельно.



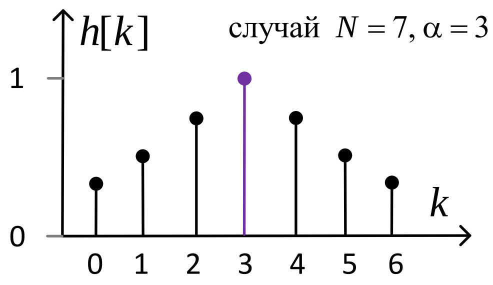
Примеры импульсных характеристик с четной симметрией на интервале N
а) нечетное N, б) четное N.



Примеры импульсных характеристик с антисимметрией (нечетной симметрией) на интервале N.
а) нечетное N, б) четное N.

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

Тип 1. КИХ-фильтры с симметричной $h[k]$ с нечетным N.



Отсчеты первой половины периода $k = 0, \ldots, (N-3)/2$ симметричны второй половине периода:

$$h[k] = h[N-1-k].$$

Ось симметрии проходит через $k = \alpha = \dfrac{N-1}{2}$

Частотная характеристика такого фильтра может быть представлена в виде:

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^{(N-3)/2} h[k]\exp\left(-j\theta k\right) + h\left[\frac{N-1}{2}\right]\exp\left(-j\theta\frac{N-1}{2}\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{(N-3)/2} h[k]\exp\left(-j\theta(N-1-k)\right)$$

Во всех слагаемых вынесем множитель $e^{-j\theta\frac{N-1}{2}}$ за скобки:

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta\frac{N-1}{2}} \times$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{(N-3)/2} h[k]e^{-j\theta\left(k-\frac{N-1}{2}\right)} + h\left[\frac{N-1}{2}\right] + \sum_{k=0}^{(N-3)/2} h[k]e^{j\theta\left(k-\frac{N-1}{2}\right)}\right).$$

$$H(e^{j\theta}) = \exp\left(-j\theta\frac{N-1}{2}\right)B(e^{j\theta}),$$

$$B(e^{j\theta}) = h\left[\frac{N-1}{2}\right] + \sum_{k=0}^{(N-3)/2} 2h[k]\cos\left(\theta\left(\frac{N-1}{2}-k\right)\right).$$

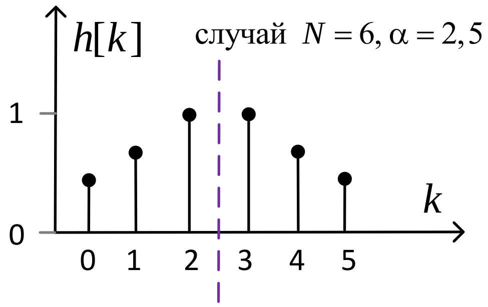
АЧХ фильтра $A(\theta) = \left|B(e^{j\theta})\right|$. ФЧХ фильтра с точностью до скачков фазы на π определяется выражением

$$\varphi(\theta) = -\theta\frac{N-1}{2} + \pi m = -\theta\alpha + \pi m,$$

где $m \in Z$ зависит от θ: точками скачков фазы являются такие значения переменой θ, в которых $B(e^{j\theta})$ меняет знак. Групповая задержка такого фильтра будет постоянной на всем интервале $\theta \in [-\pi;\pi]$ и равна $\tau_{\text{гр}}(\theta) = -\dfrac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t = \alpha\Delta t$, фазовая задержка постоянна для тех частот, где фазовая характеристика определяется при $m = 0$.

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

Тип 2. КИХ-фильтры с симметричной $h[k]$ с четным N.



Отсчеты первой половины периода $k=0,\ldots,(N/2)-1$ симметричны второй половине периода:

$$h[k]=h[N-1-k].$$

Ось симметрии проходит через $\alpha=\dfrac{N-1}{2}$, которое не является целым числом. Аналогичными вычислениями можно получить, что частотная характеристика такого фильтра

$$H(e^{j\theta})=\exp\left(-j\theta\frac{N-1}{2}\right)\sum_{k=0}^{(N-1)/2}2h[k]\cos\left(\theta\left(\frac{N-1}{2}-k\right)\right).$$

АЧХ фильтра

$$A(\theta)=\left|\sum_{k=0}^{(N-1)/2}2h[k]\cos\left(\theta\left(\frac{N-1}{2}-k\right)\right)\right|.$$

ФЧХ фильтра с точностью до скачков фазы на π также определяется выражением

$$\varphi(\theta)=-\theta\frac{N-1}{2}+\pi m=-\theta\alpha+\pi m,\ \ m\in Z,$$

где выбор m зависит от θ.

Групповая задержка такого фильтра будет постоянной на всем интервале $\theta\in[-\pi;\pi]$:

$$\tau_{\text{гр}}(\theta)=-\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t=\alpha\Delta t.$$

Фазовая задержка постоянна для тех частот, где фазовая характеристика определяется при $m=0$:

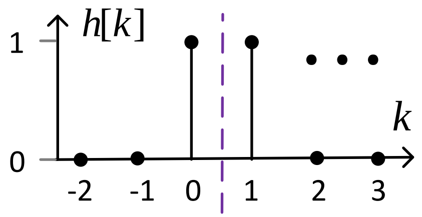
$$\tau_{\text{ф}}(\theta)=-\frac{\varphi(\theta)}{\theta}\Delta t=\alpha\Delta t \text{ при } m=0.$$

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

Пример фильтра второго типа первого порядка.

Рассмотрим фильтр с разностным уравнением

$$y[k] = x[k] + x[k-1].$$

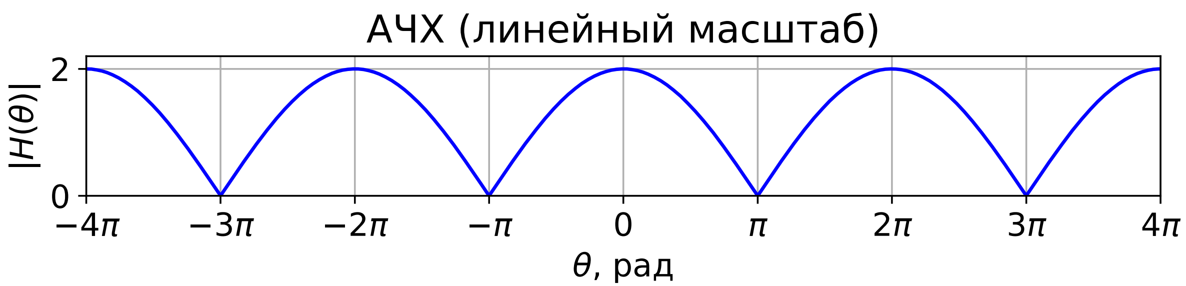


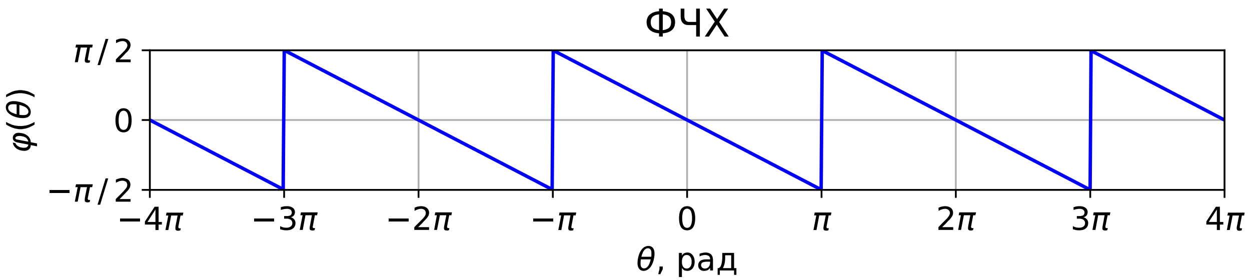
Импульсная характеристика имеет симметрию на интервале $[0, N-1]$. Частотная характеристика фильтра

$$H(\theta) = 1 + \exp(-j\theta) = 2\exp\left(-j\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = |H(\theta)|\exp(-j\varphi(\theta)).$$

На интервале $[-\pi;\ \pi]$ ФЧХ имеет вид

$$\varphi(\theta) = -\theta/2,\ \theta \in [-\pi;\ \pi].$$





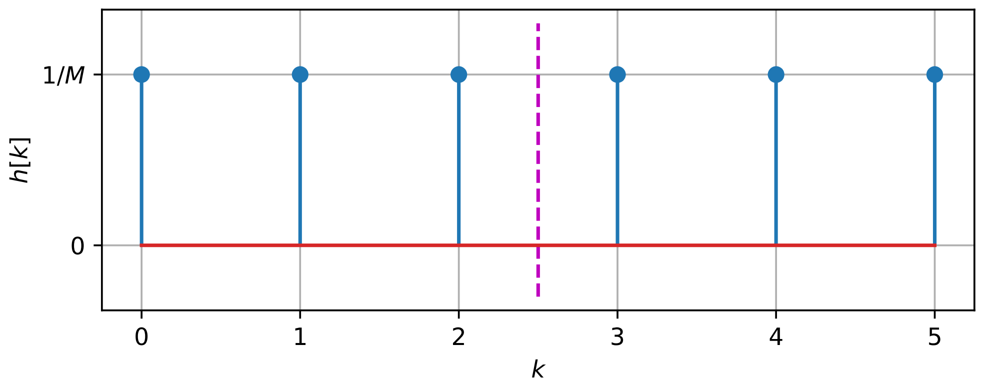
Из вида ФЧХ такого фильтра видно, что и фазовая задержка, и групповая задержка такого фильтра является постоянными и равны половине такта дискретизации:

$$\tau_{\text{ф}}(\theta) = -\frac{\varphi(\theta)}{\theta}\Delta t = \frac{\Delta t}{2}, \quad \text{при } \theta \in [-\pi;\ \pi],$$

$$\tau_{\text{гр}}(\theta) = -\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t = \frac{\Delta t}{2}.$$

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

Пример. Фильтр скользящего среднего (фильтр 2-ого типа).



Рассмотрим фильтр скользящего среднего

$$y[k]=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}x[k-m],\quad M=6.$$

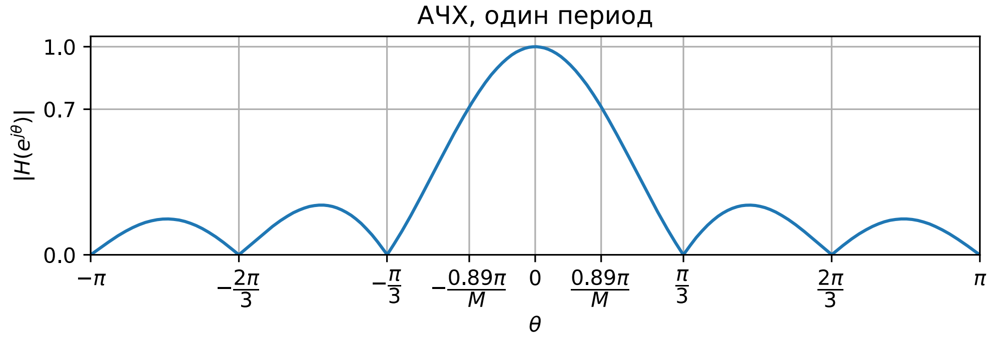
Импульсная характеристика такой системы

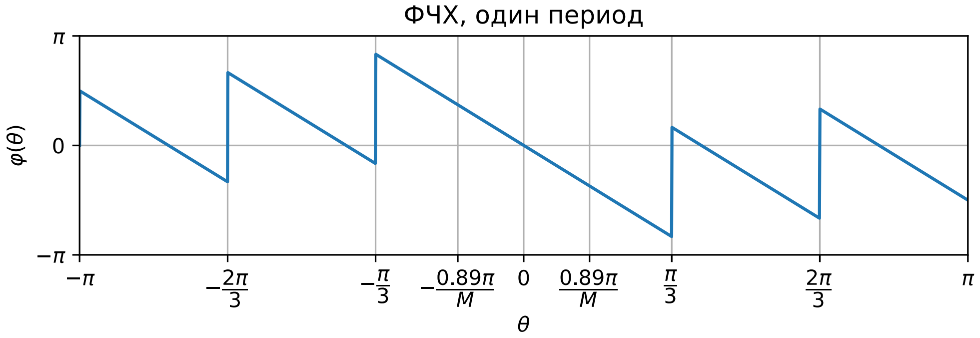
$$h[k]=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\mathbf{1}[k-m].$$

Это фильтр 2 типа. Частотная характеристика фильтра:

$$H(e^{j\theta})=\frac{1}{M}\frac{\sin(M\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\exp(-j(M-1)\theta/2).$$

АЧХ имеет вид $\quad A(\theta)=|H(e^{j\theta})|=\frac{1}{M}\left|\frac{\sin(M\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right|.$





Будем читать полосой пропускания этого фильтра полосу по уровню -3дБ (0,707): $\theta=[-0{,}89\pi/M, 0{,}89\pi/M]$. В этом диапазоне ФЧХ $\varphi(\theta)=-\frac{M-1}{2}\theta$,

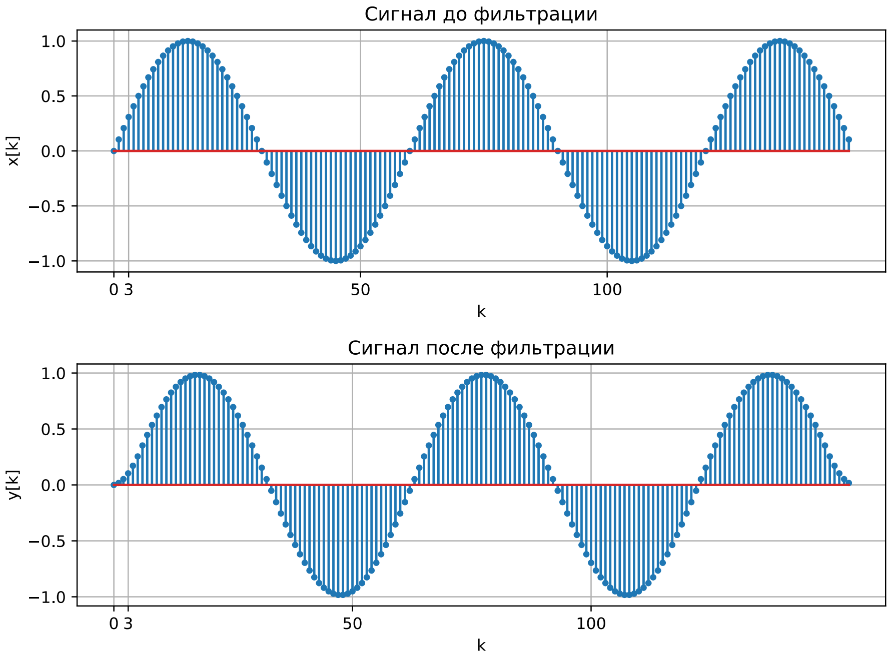
фазовая задержка $\tau_{\text{ф}}(\theta)=-\frac{\varphi(\theta)}{\theta}\Delta t=\frac{M-1}{2}\Delta t=2{,}5\Delta t$,

групповая задержка $\tau_{\text{гр}}(\theta)=-\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t=\frac{M-1}{2}\Delta t=2{,}5\Delta t$.

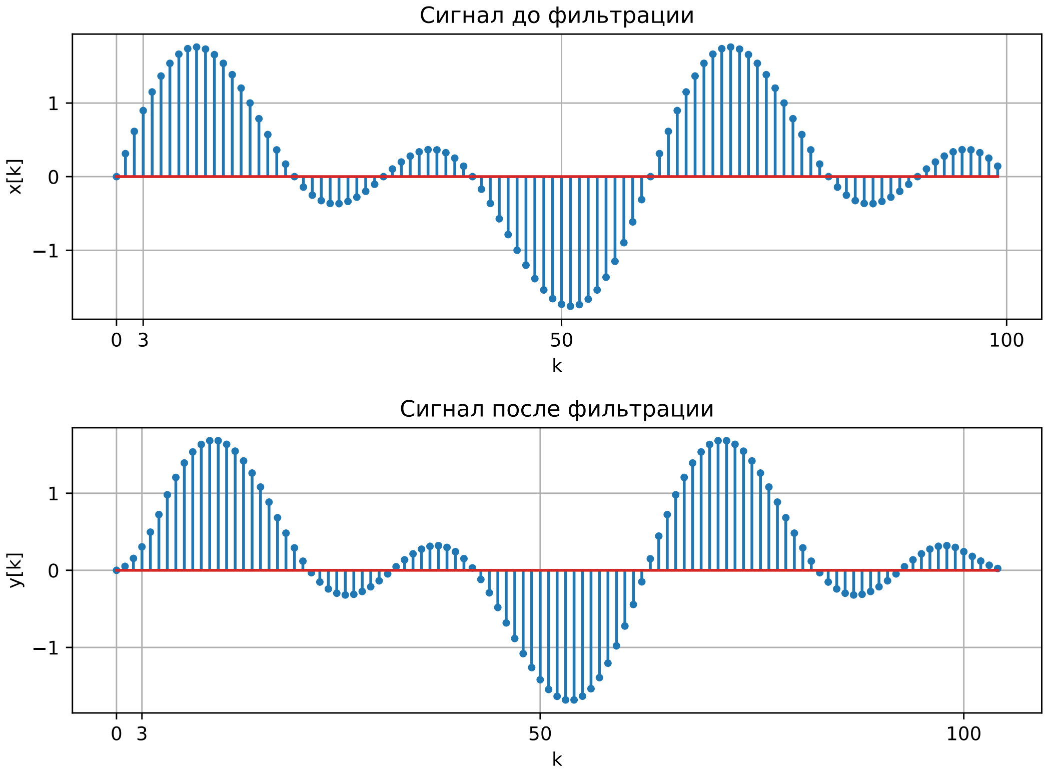
В итоге для рабочего интервала частот фазовая задержка и групповая задержка постоянны.

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

Рассмотрим, в чем же заключается практическое значение постоянства фазовой задержки. Пропустим через этот фильтр сигнал $x[k] = \cos(0,2\pi k / M)$, $k = 0,1\ldots,149$. Относительная частота синусоиды лежит внутри рабочего диапазона частот. Результат фильтрации показан на рисунке ниже. Видно, что выходной сигнал «отстает» от исходного на время $2,5\Delta t$. Выход системы, начиная с 3 такта, повторяет форму входного сигнала. При этом это время задержки не зависит от частоты косинусоиды.

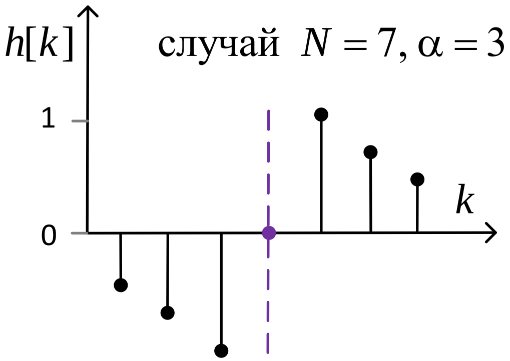


Теперь пропустим через тот же фильтр сигнал $x[k] = \cos(0,2\pi k / M) + \cos(0,4\pi k / M)$, $k = 0,1\ldots,99$. Относительная частота одной из синусоид здесь в два раза больше другой. Однако время задержки снова $2,5\Delta t$. При этом за счет постоянства фазовой задержки фильтра $\tau_{ф}$ в рабочем диапазоне форма <u>составного</u> сигнала на выходе не претерпевает заметных искажений.



КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

Тип 3. КИХ-фильтры с антисимметричной $h[k]$ с нечетным N.



Средний отсчет импульсной характеристики должен быть равен нулю: $h\left[\dfrac{N-1}{2}\right]=0.$

Отсчеты первой половины периода $k=0,\ldots,(N-3)/2$ антисимметричны второй половине периода:
$h[k]=-h[N-1-k].$

Для частотной характеристики фильтра третьего типа:

$$H\left(e^{j\theta}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}h[k]\exp\left(-j\theta k\right).$$

$$H(e^{j\theta})=\exp\left(-j\theta\frac{N-1}{2}\right)\times.$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{(N-3)/2}h[k]\exp\left(-j\theta\left(k-\frac{N-1}{2}\right)\right)-\sum_{k=0}^{(N-3)/2}h[k]\exp\left(j\theta\left(k-\frac{N-1}{2}\right)\right)\right).$$

Применяя тождество $j=\exp(j\pi/2)$, получаем

$$H(e^{j\theta})=\exp\left(j\left(\frac{\pi}{2}-\theta\frac{N-1}{2}\right)\right)\sum_{k=0}^{(N-3)/2}2h[k]\sin\left(\theta\left(\frac{N-1}{2}-k\right)\right)$$

ФЧХ фильтра с точностью до скачков на фазы π определяется выражением

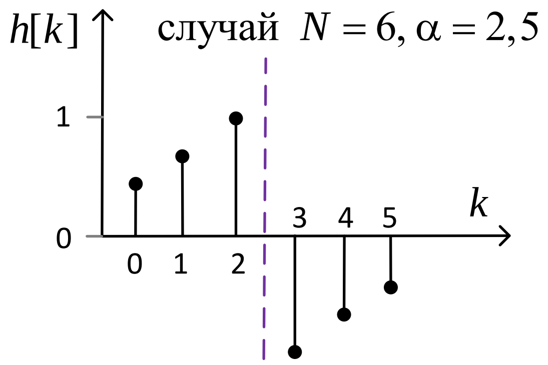
$$\varphi(\theta)=\frac{\pi}{2}-\theta\frac{N-1}{2}+\pi m,\ \ m\in Z\,.$$

Такой фильтр не будет обладать постоянной фазовой задержкой на каком-либо интервале частот, однако групповая задержка такого фильтра будет постоянной на всем интервале $\theta\in[-\pi;\pi]$:

$$\tau_{\text{гр}}(\theta)=-\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t=\frac{N-1}{2}\Delta t$$

КИХ-фильтры с линейной фазовой характеристикой

Тип 4. КИХ-фильтры с антисимметричной $h[k]$ с четным N.



Для частотной характеристики фильтра четвертого типа аналогичные вычисления приводят к частотной характеристике вида

$$H(e^{j\theta}) = \exp\left(j\left(\frac{\pi}{2} - \theta\frac{N-1}{2}\right)\right)\sum_{k=0}^{(N-1)/2} 2h[k]\sin\left(\theta\left(\frac{N-1}{2} - k\right)\right).$$

Здесь также ФЧХ фильтра с точностью до скачков на фазы π определяется выражением

$$\varphi(\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta\frac{N-1}{2} + \pi m, \;\; m \in Z,$$

где выбор $m \in Z$ зависит от θ.

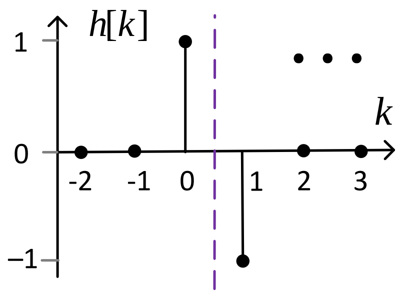
Фильтр не будет обладать постоянной фазовой задержкой $\tau_{\text{ф}}(\theta) = -\dfrac{\varphi(\theta)}{\theta}\Delta t$ на каком-либо интервале частот.

Однако групповая задержка такого фильтра будет постоянной на всем интервале $\theta \in [-\pi; \pi]$:

$$\tau_{\text{гр}}(\theta) = -\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t = \frac{N-1}{2}\Delta t.$$

Заметим, что для фильтров 3 и 4 типа АЧХ всегда равна нулю при $\theta = 0$. Это означает, что они не могут быть фильтрами нижних частот или режекторными фильтрами.

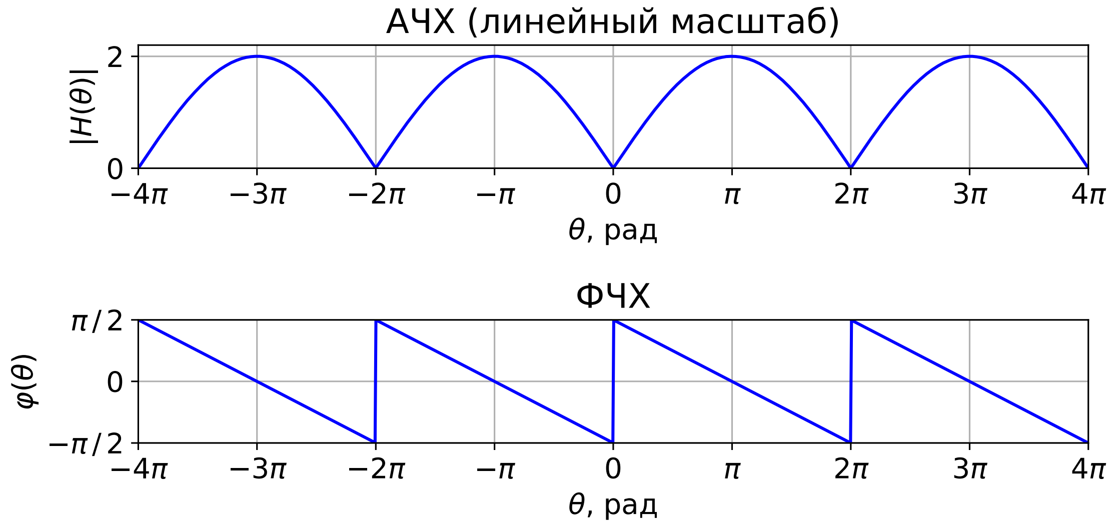
Пример. Дискретный дифференциатор (фильтр 4-ого типа).



Для фильтра с разностным уравнением

$$y[k] = x[k] - x[k-1]$$

импульсная характеристика антисимметрична на $[0, N-1]$.



$$H(\theta) = 1 - \exp(-j\theta) = \exp\left(-j\frac{\theta}{2}\right)\left(\exp\left(j\frac{\theta}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{\theta}{2}\right)\right) =$$

$$= 2j\exp\left(-j\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\exp\left(j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$|H(\theta)| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

Учитывая изменение знака синуса в точке $\theta = 0$ ($\exp(j\pi) = -1$), получаем ФЧХ фильтра на интервале $[-\pi; \pi]$

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}, & 0 < \theta \le \pi, \\ -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}, & -\pi < \theta < 0. \end{cases}$$

Из вида ФЧХ такого фильтра видно, что фазовая задержка постоянной не является. При этом групповая задержка такого фильтра является постоянной на всем интервале $[-\pi; \pi]$ и равна половине такта дискретизации:

$$\tau_{\text{гр}}(\theta) = -\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Delta t = \frac{\Delta t}{2}.$$

№17 **Нерекурсивный способ реализации КИХ–фильтров**

Сопоставим передаточной функции КИХ–фильтра

$$H(z)=\sum_{m=0}^{N-1} h_m z^{-m} \quad .$$

разностное уравнение

$$y[k]=\sum_{m=0}^{N-1} h_m\, x[k-m]. \qquad (8)$$

Такой фильтр имеет отклик, зависящий только от входных отсчетов (текущего и предыдущих) и является *нерекурсивным (трансверсальным)*. h_m – отсчеты импульсной характеристики.

еще и начало лекции!

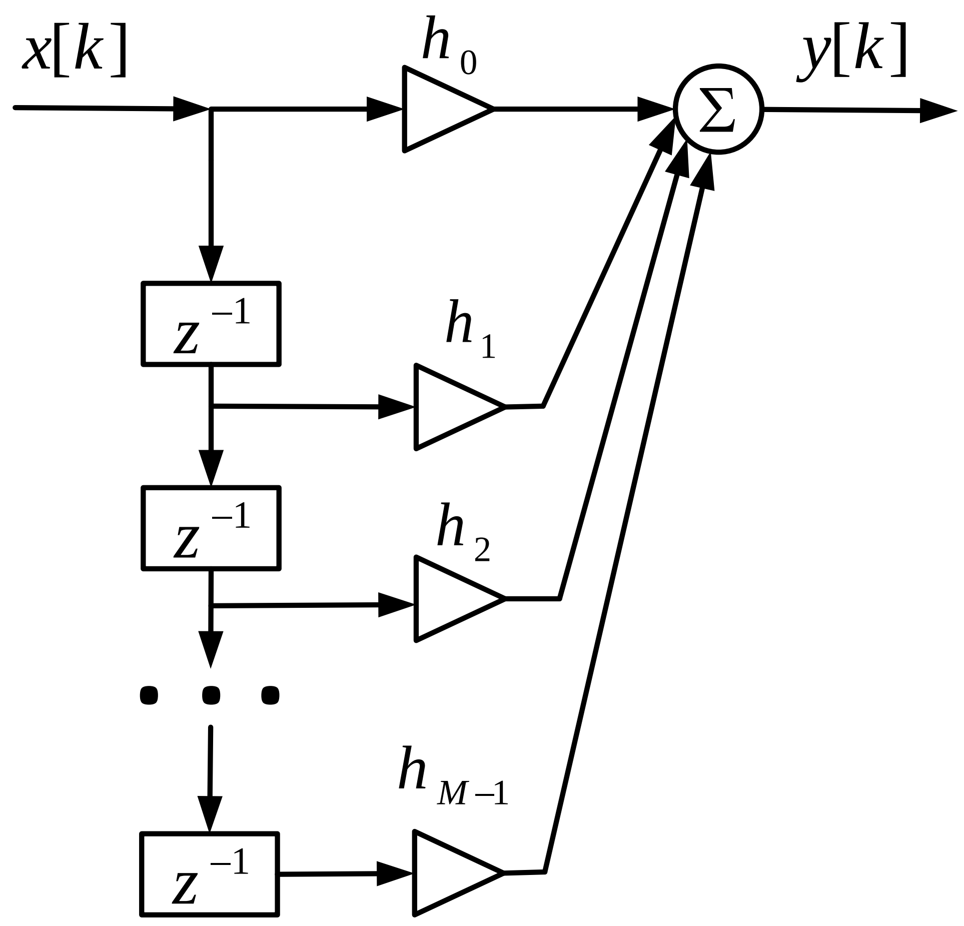
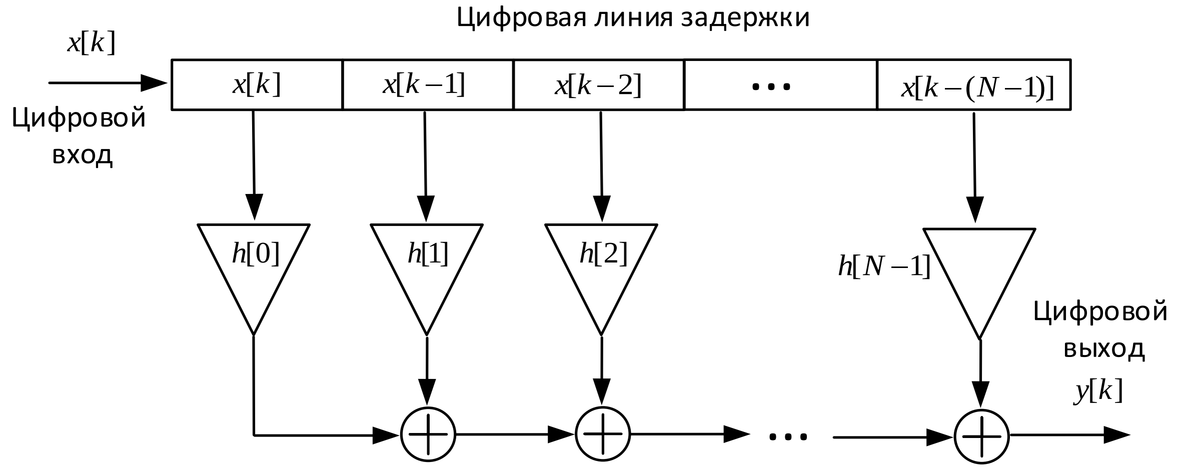


Схема нерекурсивного КИХ–фильтра

Нерекурсивный способ реализации КИХ–фильтров

Возможна цифровая реализация линейного трансверсального фильтра с использованием цифровой линии задержки.

$$y[k] = \sum_{m=0}^{N-1} h_m x[k-m].$$



- Последовательность отсчётов $x(k\Delta t)$ (обычно в двоичном коде) поступает на N-каскадную линию задержки (регистр сдвига), где числа сдвигаются на один каскад каждые Δt секунд под воздействием тактового импульса.
- С отводов регистра отсчёты $x[k-m]$, поступающие с отводов регистра, умножаются на весовые коэффициенты фильтра h_m сумматорами формируются выходные отсчёты $y[k]$.
- Следует отметить, что фильтр может обрабатывать бесконечный поток входных данных, при этом отклик $y[k]$ в момент $t = k\Delta t$ будет определяться содержимым его регистра в этот момент, т. е. отсчётами входного сигнала

$$x[k-N+1],\ x[k-N+2], \ldots, x[k].$$

__Замечание.__ При цифровой реализации погрешность квантования входных отсчётов $x(k\Delta t)$ и коэффициентов фильтра h_m, а также ошибки округления при умножении приводят к погрешностям при формировании отклика фильтра $y[k]$. Здесь эти погрешности не рассматриваются.

Рекурсивный способ реализации КИХ–фильтров. Метод частотной выборки.

Рассмотрим пример рекурсивного способа реализации, основанный на задании коэффициентов ДПФ $H[n]$ $n = 0,\ 1, \ldots, N-1$ импульсной характеристики $h[k]$.

Обратное ДПФ для $h[k]$

$$h[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H[n]\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

Заметим, что на этапе синтеза фильтра, когда $h[k]$ неизвестна, коэффициенты ДПФ могут быть получены как значения частотной характеристики $H\left(e^{j\theta}\right)$, взятые с шагом $\Delta\theta = 2\pi / N$:

$$H[n] = H\left(e^{j\theta}\right)\Big|_{\theta=2\pi n/N}.$$

Метод частотной выборки для синтеза КИХ-фильтров основан на том, что эти значения заранее задаются и определяется импульсная характеристика соответствующего КИХ-фильтра.

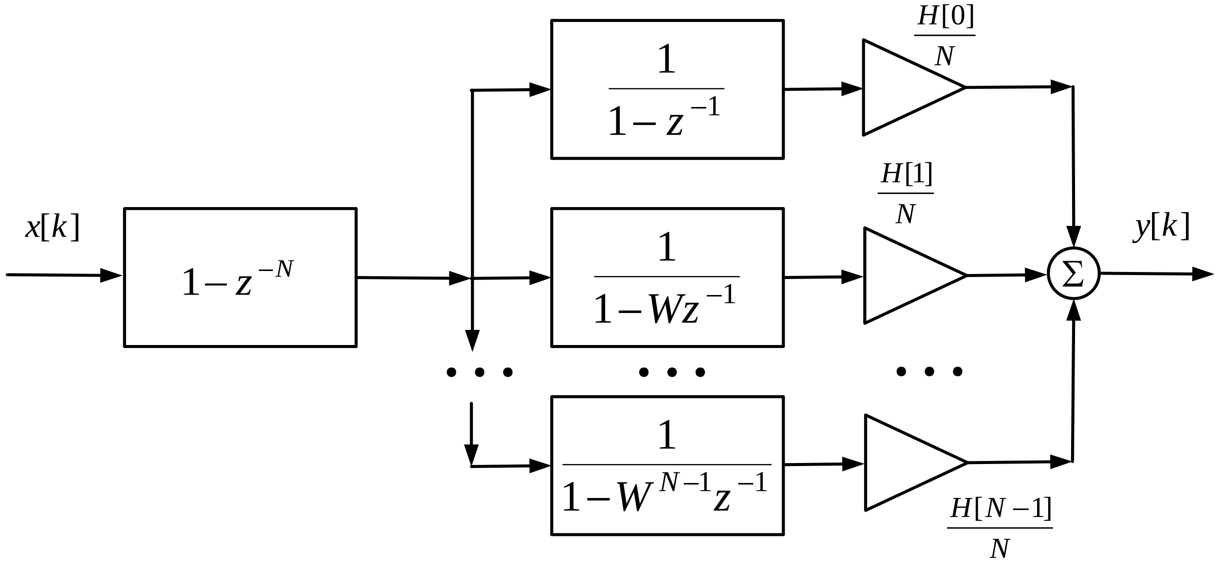
Передаточная функция фильтра

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]z^{-k} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{H[n]}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

Обозначим $W = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}\right)$.

Воспользовавшись формулой суммы геометрической прогрессии, запишем передаточную функцию в виде

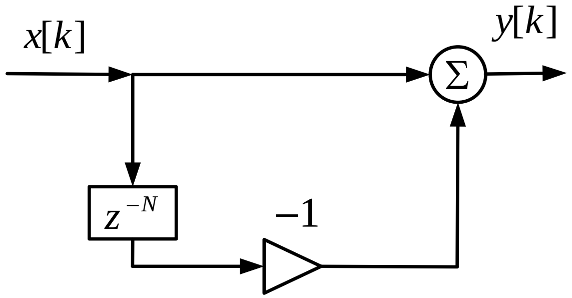
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{H[n]}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}\exp(j\frac{2\pi}{N}n)} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{H[n]}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W^n z^{-1}}$$



Рекурсивный способ реализации КИХ–фильтров

Рассмотрим отдельно составные блоки в этой реализации.

Блок $H_{\text{гр}}(z) = 1 - z^{-N}$ **(гребенчатый фильтр).**



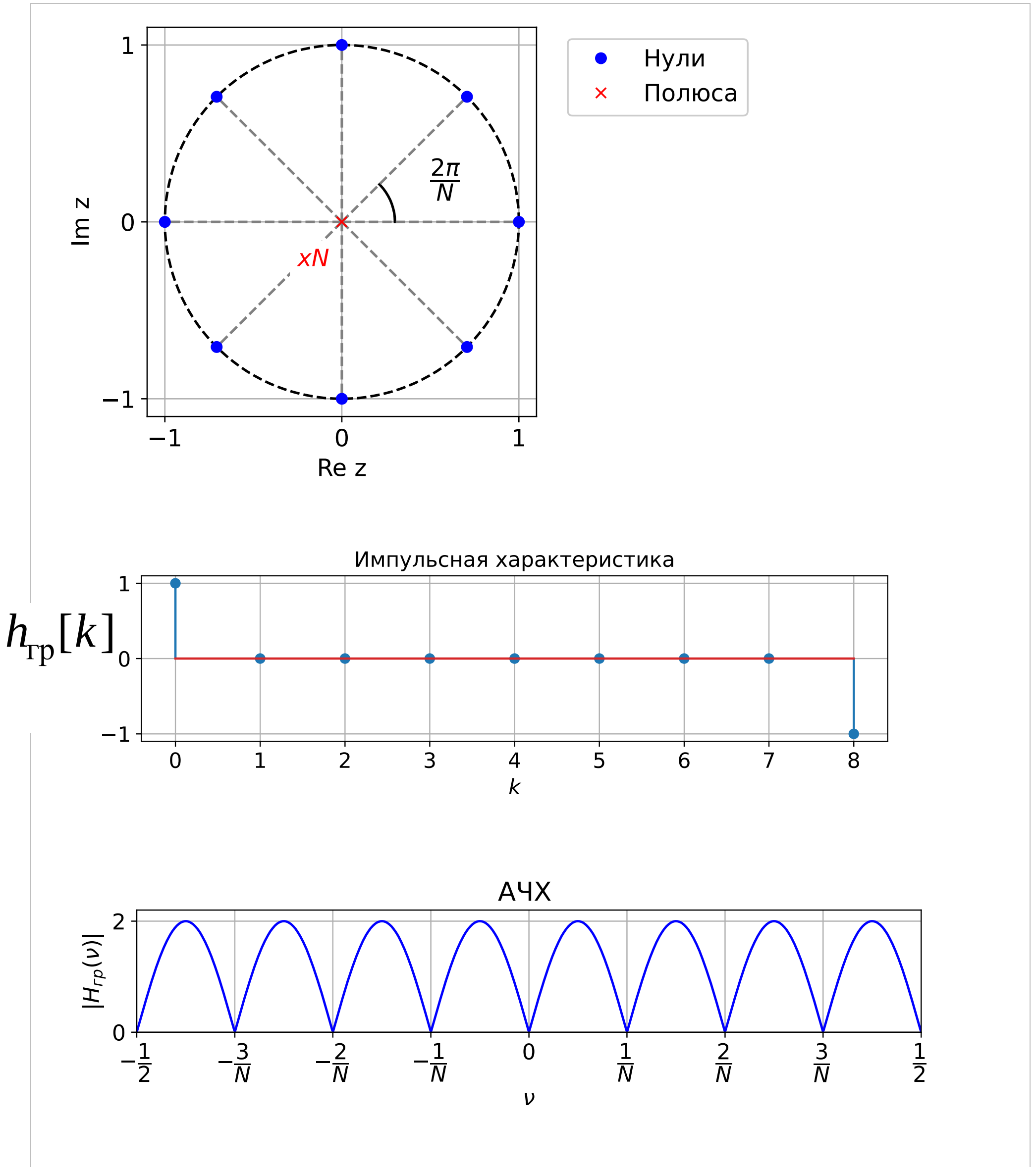
Разностное уравнение этого фильтра

$$y[k] = x[k] - x[k-N].$$

Из вида передаточной функции этого блока видно, $H_{\text{гр}}(z)$ имеет N нулей, равномерно расположенных на единичной окружности:

$$H_{\text{гр}}(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}.$$

АЧХ такого фильтра имеет гребенчатую структуру.



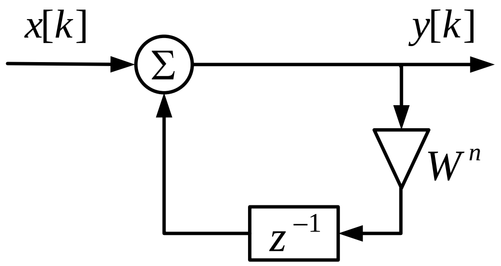
Нуль-полюсная диаграмма, $h[k]$ *и АЧХ гребенчатого фильтра для* $N = 8$

Рекурсивный способ реализации КИХ–фильтров

Блок $H_{\text{рез}}(z) = \dfrac{1}{1 - W^n z^{-1}}$ **(комплексный резонатор).**

Это рекурсивный блок первого порядка с разностным уравнением

$$y[k] = x[k] + W^n y[k-1],\ y[-1] = 0.$$



Его импульсная характеристика имеет вид каузальной комплексной экспоненты:

$$h_{\text{рез}}[k] = (W^n)^k u[k] = \exp\left(j\frac{2\pi}{N} nk \right) u[k].$$

Комплексный резонатор – БИХ-фильтр.

Однако в результате последовательного соединения гребенчатого фильтра и комплексного резонатора получится фильтр с конечной импульсной характеристикой:

$$h[k] = h_{\text{гр}}[k] \otimes h_{\text{рез}}[k] = h_{\text{рез}}[k] - h_{\text{рез}}[k-N].$$

$$h[k] = h_{\text{гр}}[k] \otimes h_{\text{рез}}[k] =$$

$$= \exp\left(j\frac{2\pi}{N} nk \right) u[k] - \exp\left(j\frac{2\pi}{N} n(k-N) \right) u[k-N] =$$

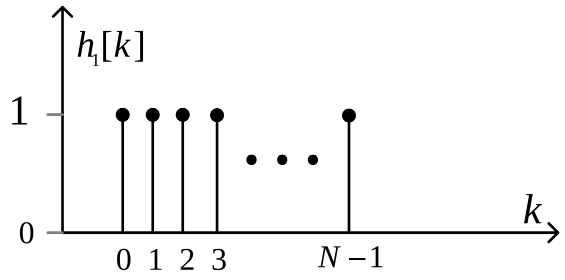
$$= \exp\left(j\frac{2\pi}{N} nk \right) u[k] - \exp\left(j\frac{2\pi}{N} nk \right) u[k-N].$$

CIC-фильтр

Пример. Фильтр со структурой «интегратор – гребенчатый фильтр» (CIC-фильтр).

Рассмотрим фильтр, вычисляющий скользящую сумму N отсчетов сигнала. Импульсная характеристика такого фильтра (независимо от реализации) имеет вид

$$h_1[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$



От фильтра скользящего среднего он отличается отсутствием нормировки $1/N$. Из записи передаточной функции в виде

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-(N-1)}$$

можно получить разностное уравнение для нерекурсивной реализации такого фильтра

$$y[k] = \sum_{m=0}^{N-1} x[k-m].$$

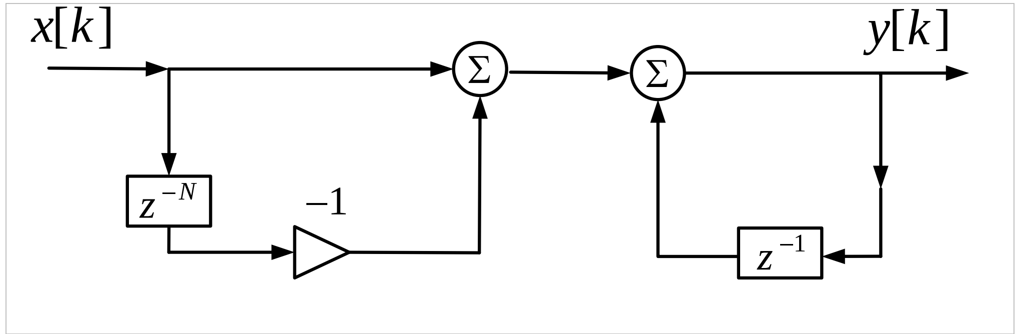
Теперь воспользуемся для $H_1(z)$ формулой суммы геометрической прогрессии

$$H_1(z) = \sum_{m=0}^{N-1} h_m z^{-m} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots z^{-(N-1)} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}. \qquad (9)$$

Передаточная функция имеет *N* нулей, равномерно распределенных на единичной окружности. Разностное уравнение

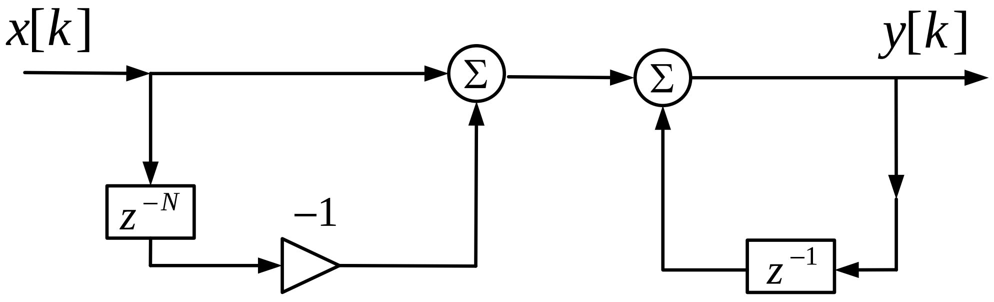
$$y[k] = y[k-1] + x[k] - x[k-N] \qquad (10)$$

содержит только три слагаемых.



Блок–схема CIC-фильтра в прямой форме

CIC-фильтр



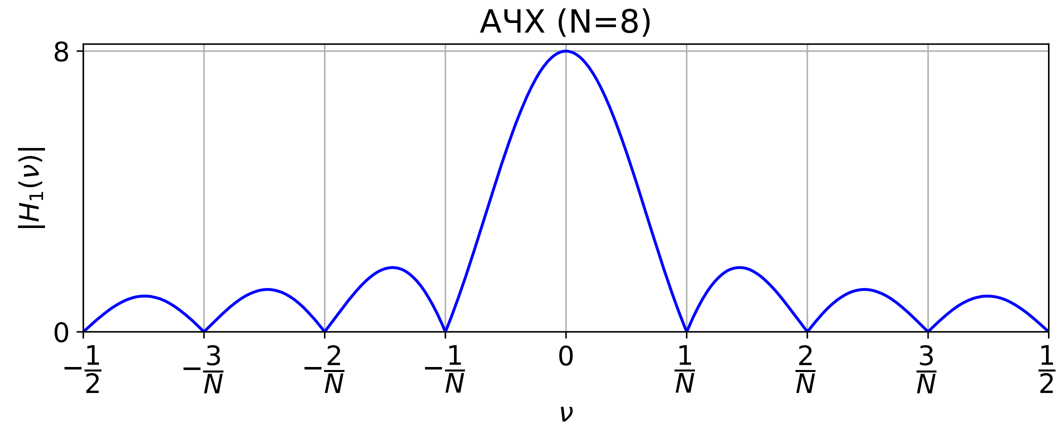
Рекурсивная часть — цифровой накопитель, который выполняет суммирование с накоплением.

Нерекурсивная часть — *гребенчатый фильтр(comb filter).*

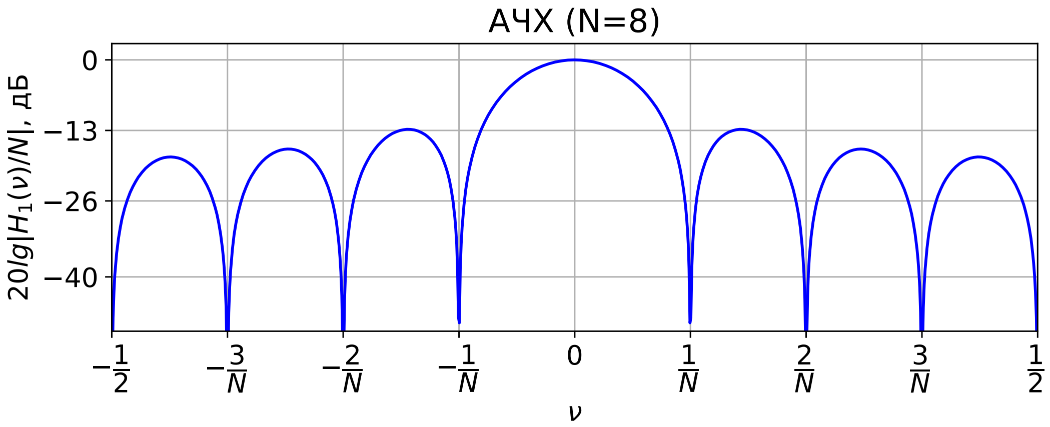
Поэтому такие структуры обозначаются английской аббревиатурой *CIC (Cascaded Integrator–comb filter,* каскадированные интегратор и гребенчатый фильтр.

Частотная характеристика этого фильтра получается подстановкой $z = e^{j\theta}$ в (9):

$$H_1(\theta) = \frac{1 - e^{-j\theta N}}{1 - e^{-j\theta}} = \exp\left(-j\theta\frac{N-1}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\theta N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad (11)$$



АЧХ CIC-фильтра при $N = 8$.



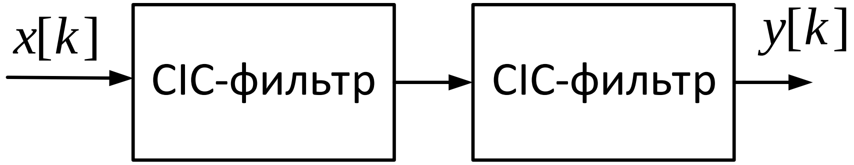
АЧХ CIC-фильтра при $N = 8$

(нормировано на $|H_1(0)|$*)*

CIC-фильтр

- У АЧХ однокаскадного CIC-фильтра достаточно высокий максимальный уровень боковых лепестков, по сравнению с главным разница в уровнях примерно 13 дБ (как у прямоугольного окна).
- Последовательно соединив несколько таких фильтров можно уменьшить уровень боковых лепестков.

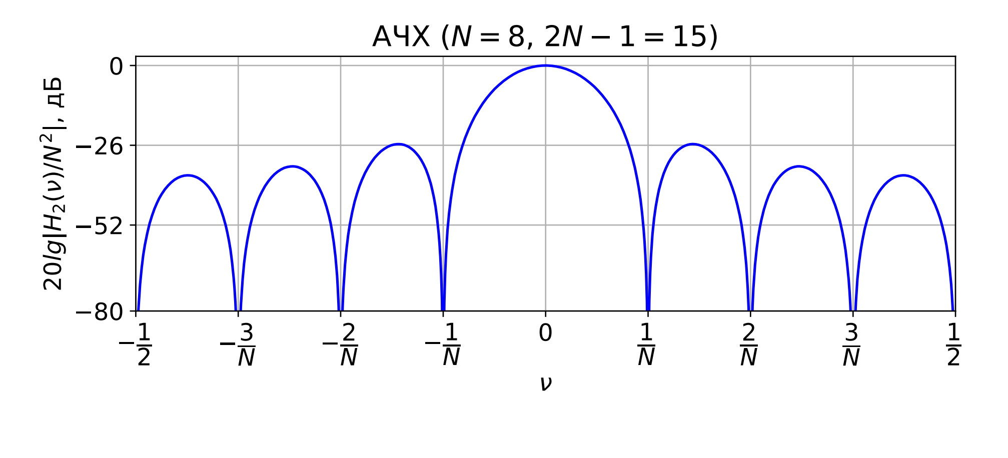
Рассмотрим в качестве примера два последовательно соединенных фильтра с передаточной функцией $H_1(z)$.



Передаточная функция такого фильтра

$$H_2(z) = (H_1(z))^2 = \left(\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\right)^2.$$

АЧХ этого фильтра $|H_2(\theta)| = \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\theta N}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.



АЧХ CIC-фильтра при $N = 8$
(нормировано на $|H_2(0)|$)

Разница максимальных уровней главного и боковых лепестков уже примерно 26 дБ, что значительно лучше.

CIC-фильтр

Теперь сравним импульсные характеристики фильтров с передаточными функциями $H_1(z)$ и $H_2(z)$.

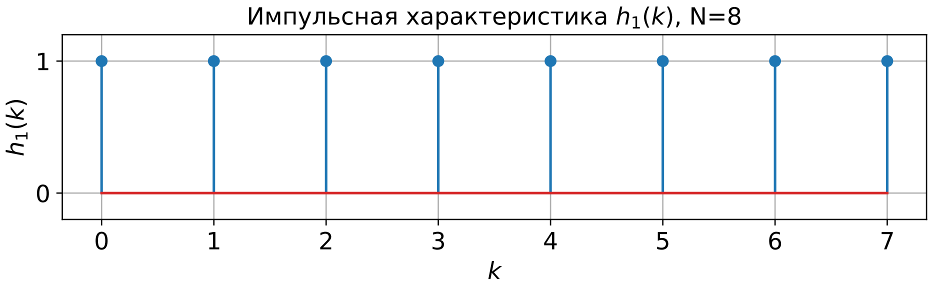
$$h_1[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}[k-m].$$

Из того, что $H_2(z) = \left(H_1(z)\right)^2$ по теореме о свертке следует, что

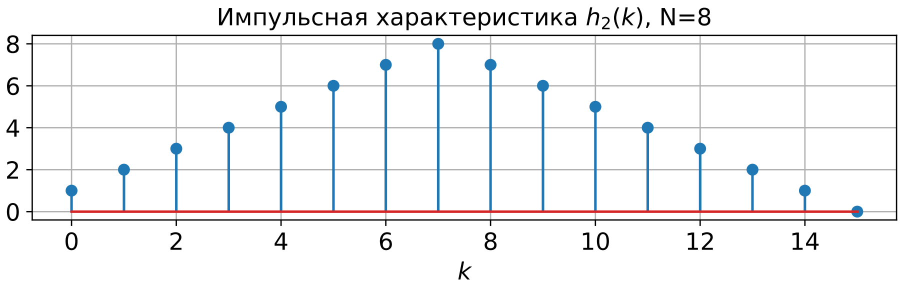
$$h_2[k] = h_1[k] \otimes h_1[k],$$

$$h_2[k] = \begin{cases} 1 - \dfrac{2|k - M/2|}{M}, & k = 0, 1, 2, \ldots, M-1,\ M = 2N-1. \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

$h_1[k]$



$h_2[k]$

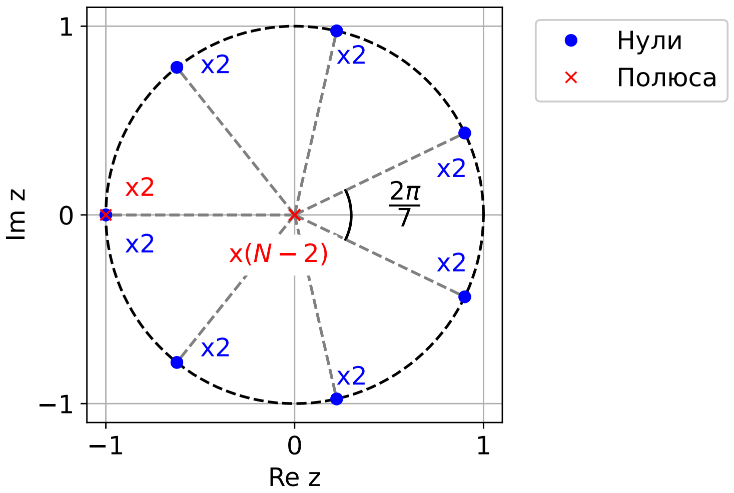


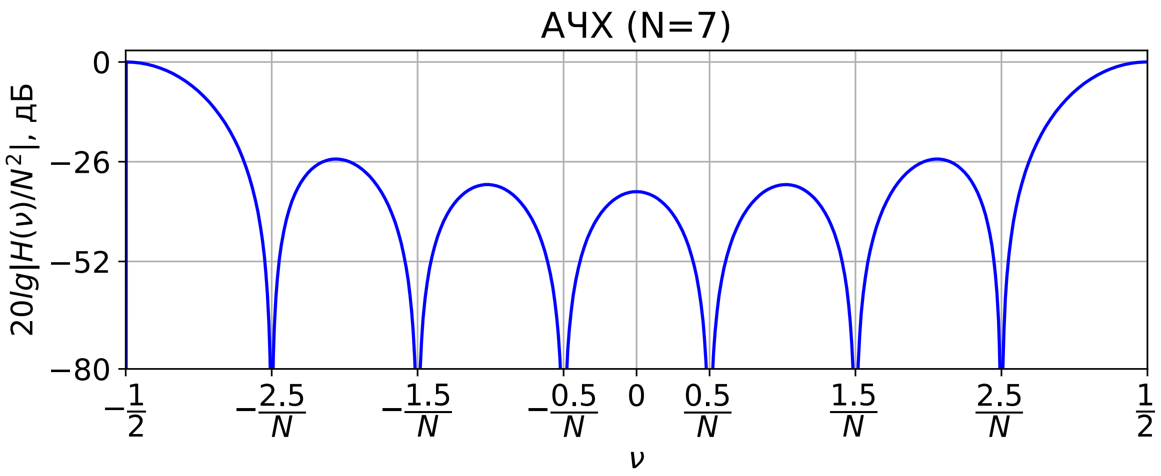
Импульсная характеристика $h_2[k]$ является линейной дискретной сверкой и содержит $2N-1$ ненулевых отсчетов. Линейной дискретной сверкой двух последовательностей единичных импульсов будет треугольный импульс.

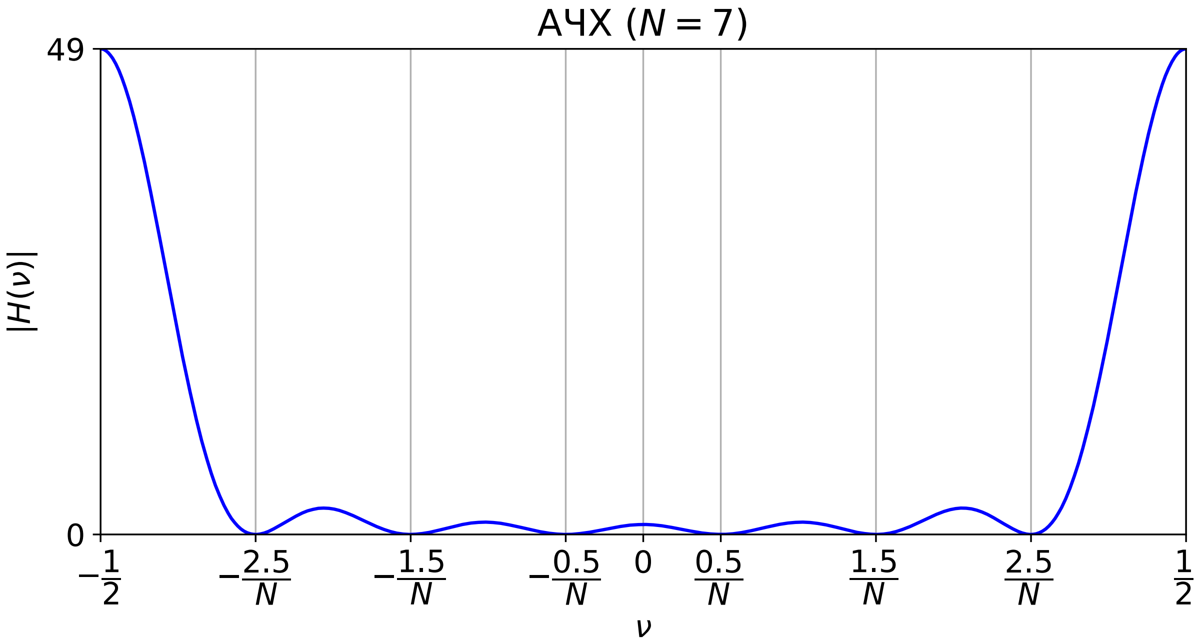
Кроме того, видно, что АЧХ фильтров соответствуют модулям ДВПФ прямоугольного и треугольного окон (для ДПФ). По этой причине разницы максимальных уровней главного и боковых лепестков такие же, как у соответствующих окон — примерно 13 дБ и 26 дБ.

Пример. Фильтры верхних частот

Равномерное размещение нулей вдоль единичной окружности с последующим устранением одного из них введением совпадающего с ним полюса в точке $z=-1$ приводит к фильтрам верхних частот.







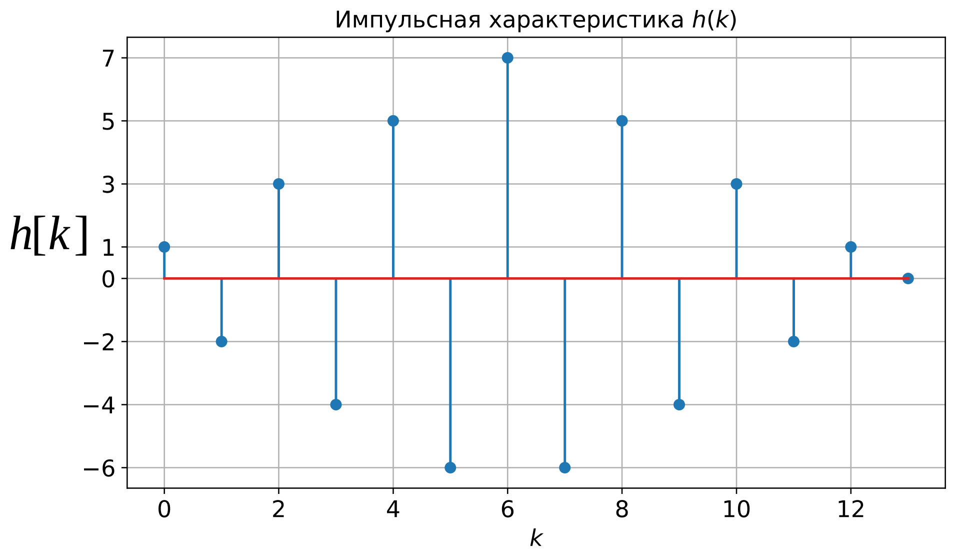
В качестве примера рассмотрим передаточную функцию

$$H(z)=\frac{\left(1+z^{-7}\right)^2}{\left(1+z^{-1}\right)^2}=\frac{1+2z^{-7}+z^{-14}}{1+2z^{-1}+z^{-2}}. \qquad (12)$$

Соответствующее разностное уравнение

$$y[k]=-2y[k-1]-y[k-2]+x[k]+2x[k-7]+x[k-14] \qquad (13)$$

Пример. Фильтры верхних частот



Это фильтр верхних частот, максимальный уровень боковых лепестков отличается от главного на 26 дБ.

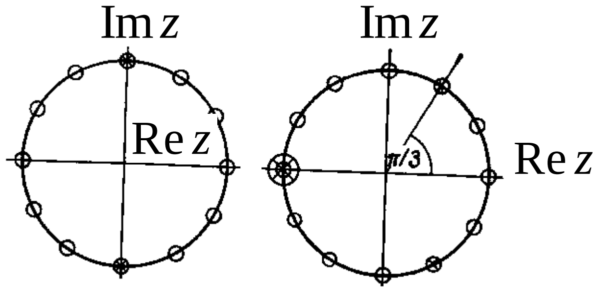
Если требуется, чтобы у фильтра высоких частот нуль передачи был на нулевой частоте, числитель $H(z)$ должен иметь вид $(1+z^{-n})^k$, где $n-$ четное целое число

Примечание. Если ввести полюса, устраняющие нули в точках $z=\pm j$, получим полосовой фильтр с центральной частотой $\theta_0=\pi/2$ (четверть частоты дискретизации).

Для построения полосовых фильтров с центральными частотами $\theta_0=\pi/3$ или $\theta_0=2\pi/3$ следует ввести на единичной окружности три равноудаленных друг от друга полюса, один из которых затем компенсируется при добавлении нулей:

$$H(z)=\frac{(1+z^{-12})}{(1+z^{-2})} \quad ; \qquad H(z)=\frac{(1-z^{-12})(1+z^{-1})}{(1+z^{-3})}.$$

а) $\theta_0=\pi/2$ **б)** $\theta_0=\pi/3$



Расположение нулей и полюсов для двух полосовых фильтров

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения с лекции 25 ноября 2024 г.

№1. Для нерекурсивного фильтра первого порядка, заданного разностным уравнением

$$y[k]=x[k]+ax[k-1]$$

найти значения $a \neq 0$, при которых

а) для всех частот одинаковая фазовая задержка

$$\tau_{\text{ф}}(\theta)=const,$$

б) для всех частот одинаковая групповая задержка

$$\tau_{\text{гр}}(\theta)=const.$$

Изобразить ФЧХ для этих случаев на отрезке $\theta \in [-\pi;\ \pi]$.

№2. Определить АЧХ и ФЧХ гребенчатого фильтра

$$y[k]=x[k]-x[k-N].$$

Является ли ФЧХ кусочно-линейной?

№3. Определить ФЧХ CIC–фильтра с передаточной функцией

$$H_2(z)=\left(\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\right)^2.$$

Будет ли ФЧХ такого фильтра кусочно-линейной на $\theta \in [-\pi;\ \pi]$? Как это соотносится с видом импульсной характеристики такого фильтра?

Контрольная работа №2

Контрольная работа №2 по материалам блока 2 «Основы цифровой фильтрации» пройдет на лекции 2 декабря 2024 г. Формат совпадет с контрольной работой №1.

Список литературы

1) Солонина А. И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 560 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

2) В.П. Васильев и др. Основы теории и расчета цифровых фильтров. Москва, ИНФРА-М, 2020

3) Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. — 3-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 768 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

4) Цифровая обработка сигналов/В.И. Гадзиковский— М.:СОЛОН-ПРЕСС, 2013

5) Введение в цифровую фильтрацию. Пер. с англ./Под ред. Р. Богнера и А. Константинидиса. — М.: Мир, 1976.

Учебные пособия [1], [2] и [3] есть в библиотеке МФТИ.

Задачи с лекции

Дополнение к разделу «Метод частотной выборки».

Рассмотрим также частотную характеристику, соответствующую передаточной функции. Для этого выполним постановку в $H(z)$ в виде $z = \exp(j2\pi f\Delta t)$.

$$H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H[n]}{N} \frac{1-\exp(-j2\pi fN\Delta t)}{1-\exp\left[j2\pi\left(\frac{n}{N} - f\Delta t\right)\right]} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H[n]}{N} \frac{1-\exp(j2\pi n)\exp(-j2\pi fN\Delta t)}{1-\exp\left[j2\pi\left(\frac{n}{N} - f\Delta t\right)\right]} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H[n]}{N} \frac{1-\exp\left[j2\pi(n - fN\Delta t)\right]}{1-\exp\left[j2\pi\left(\frac{n}{N} - f\Delta t\right)\right]} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H[n]}{N} \frac{1-\exp\left[-j2\pi N\Delta t(f - \frac{n}{N\Delta})\right]}{1-\exp\left[-j2\pi\Delta t\left(f - \frac{n}{N\Delta t}\right)\right]} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H[n]}{N} \exp\left[-j2\pi\frac{N-1}{2}(f - f_n)\Delta t\right] \frac{\sin\left[\pi(f - f_n)N\Delta t\right]}{\sin\pi(f - f_n)\Delta t},$$

где $f_n = \dfrac{n}{N\Delta t}$.

Система обладает линейной фазовой характеристикой и задержкой $\dfrac{N-1}{2}\Delta t$. $H(f)$ можно интерпретировать следующим образом: частотный отклик КИХ-фильтра есть сумма частотных откликов вида $\dfrac{\sin Nx}{\sin x}$, каждый из которых имеет комплексный вес и центральную частоту $f_n = \dfrac{n}{N\Delta t}$, где $n = 0,\ 1, \ldots, N-1$.