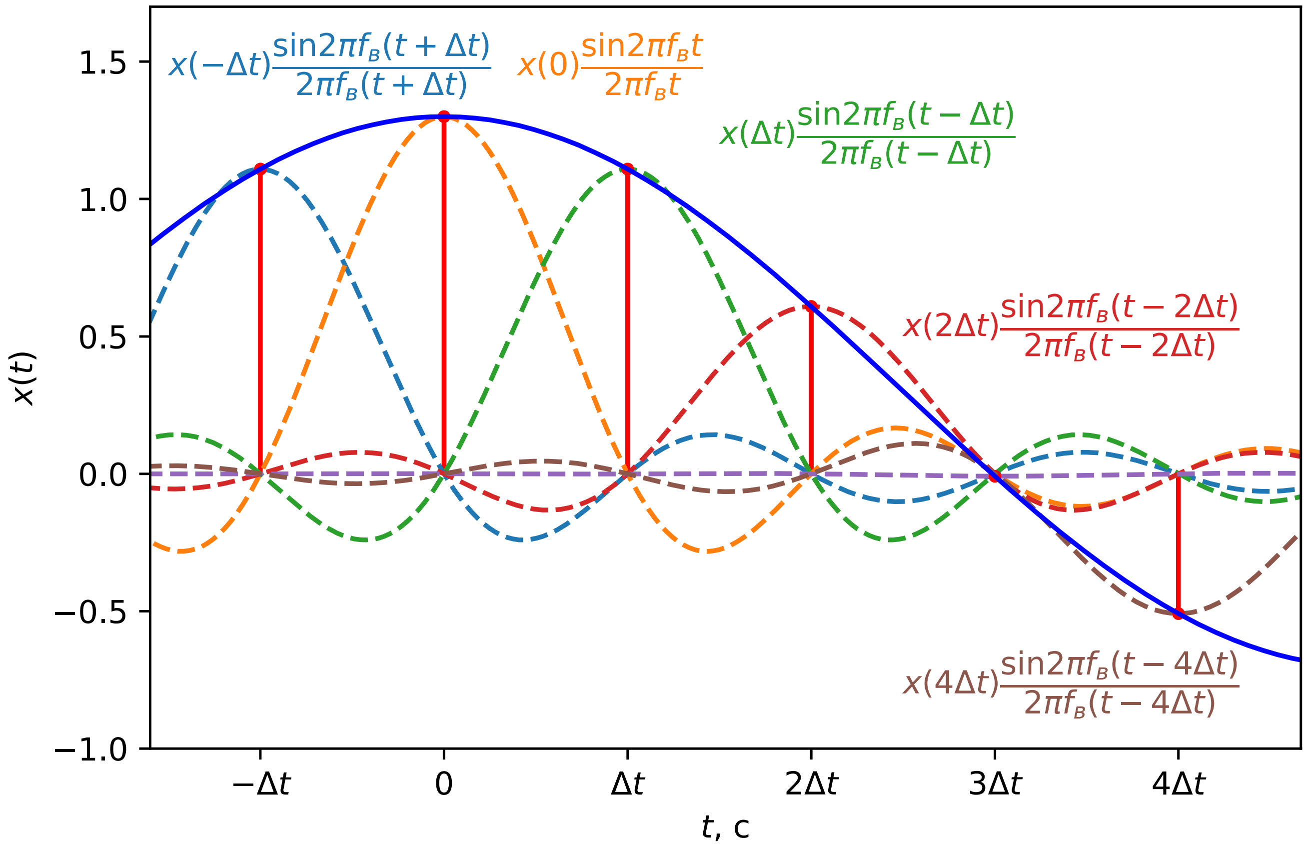
Лекция 5 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»
30 сентября 2024 г.

3. Интерфейс вывода систем ЦОС реального времени.

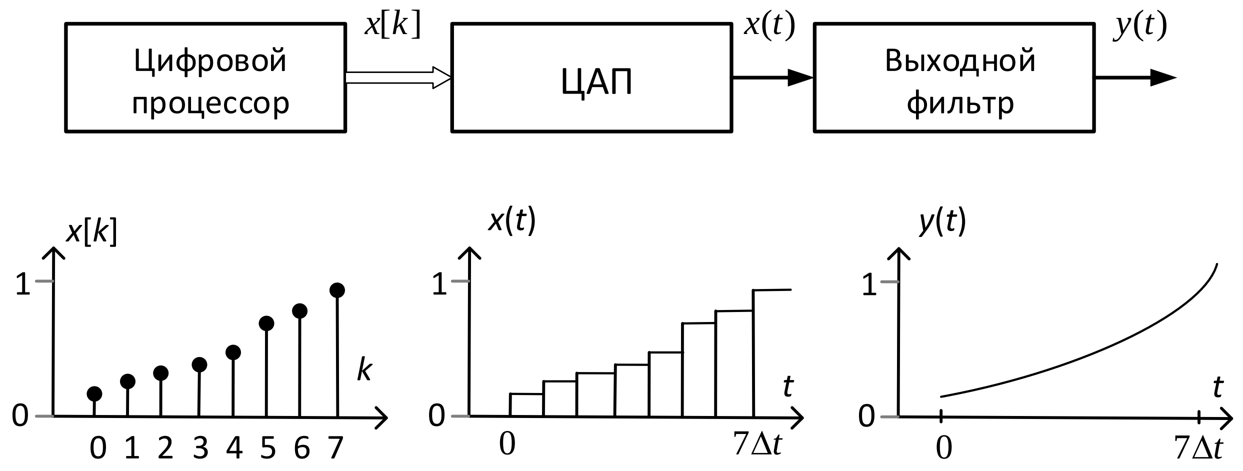
Восстановление сигналов по их отсчётам.

- Идеальная интерполяция сигнала рядом Котельникова, реальные фильтры. Каузальная аппроксимация идеального фильтра нижних частот (аналогового).
- Восстановление сигналов по дискретным отсчётам путём интерполяции.
- Ступенчатая интерполяция, восстановление косинусоидального сигнала с помощью ЦАП.
- Цифроаналоговое преобразование с запасом по частоте.



3. Интерфейс вывода систем ЦОС реального времени. Восстановление сигналов по их отсчётам.

На прошлой лекции мы рассмотрели вопрос об интерфейсе ввода систем ЦОС реального времени. В этой лекции мы рассмотрим интерфейс вывода.



Примеры систем ЦОС реального времени, где задействован аналоговый вывод:

- устройства воспроизведения звука с компьютера,
- телекоммуникационные устройства,
- системы управления двигателем автономных роботов,
- генераторы сигналов методом прямого цифрового синтеза (например, встроенный генератор в осциллографе PV6501).

Задачи преобразования цифрового сигнала в аналоговый решает цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП).

Задача выходного фильтра системы заключается в сглаживании выхода ЦАП и устранении высокочастотных компонент в нем.

Рассмотрим вопрос о восстановлении аналоговых сигналов по их отсчетам.

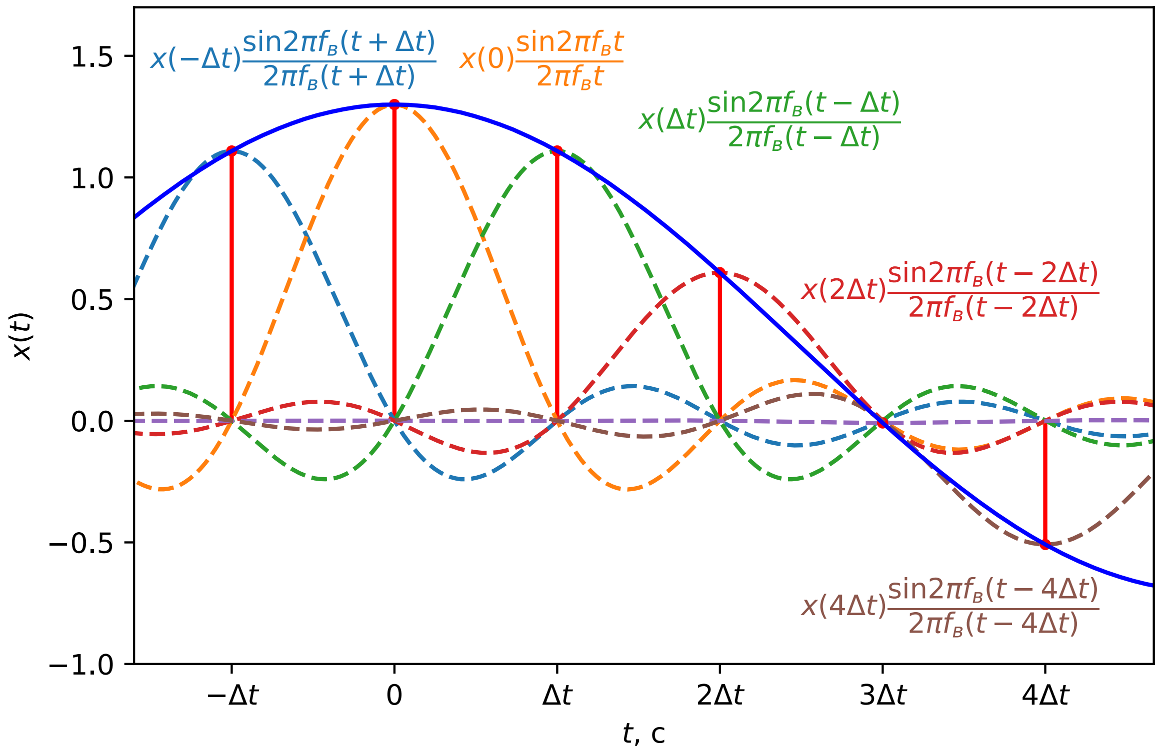
Идеальная интерполяция сигнала рядом Котельникова.

Идеальная интерполяция сигнала рядом Котельникова.

Ряд Котельникова

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi f_в (t-k\Delta t)}{2\pi f_в (t-k\Delta t)}$$

означает, что значения сигнала $x(t)$ с ограниченным спектром между отсчётными точками можно определить по выборкам $x(k\Delta t)$.



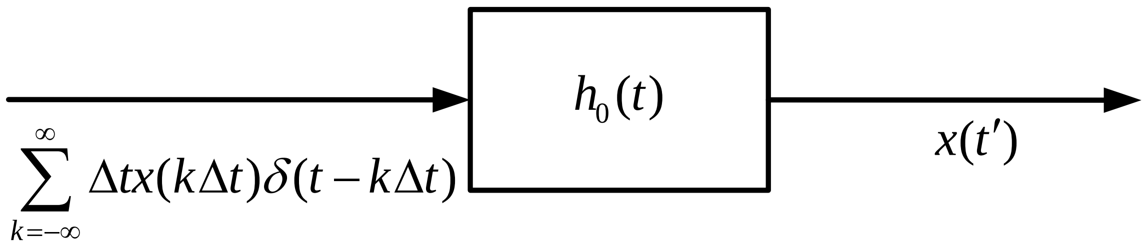
Восстановление исходного аналогового сигнала $x(t)$ по его выборкам возможно было бы с помощью идеального фильтра нижних частот (ИФНЧ) с импульсной реакцией

$$h_0(t)=\frac{1}{\Delta t}\varphi_0(t)=2 f_в \frac{\sin 2\pi f_в t}{2\pi f_в t}.$$

При этом на вход такого фильтра подается последовательность

$$\Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)$$

равноотстоящих δ-импульсов с площадями $\Delta t x(k\Delta t)$.



- Идеальный фильтр нижних частот физически не реализуем из-за некаузальности его импульсной характеристики.
- Бесконечно короткие импульсы не реализуемы.

Идеальная интерполяция сигнала рядом Котельникова.

Интерполяционная формула Котельникова есть по существу результат свертки

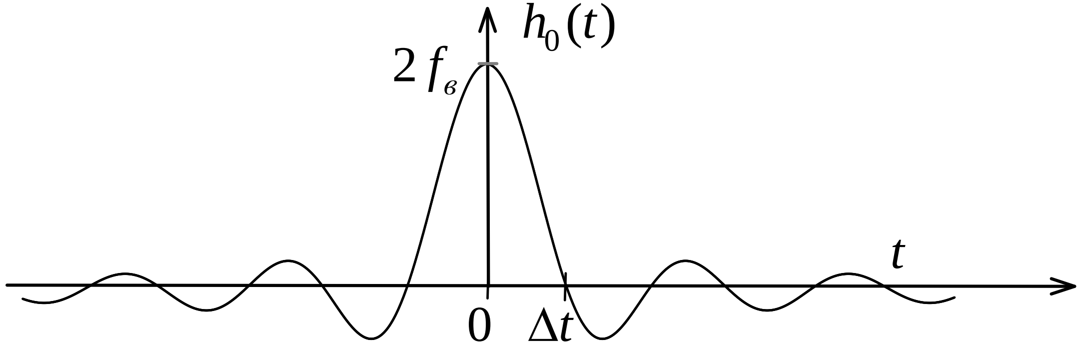
$$x(t') = \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)h_0(t'-t)dt.$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получаем

$$x(t') = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)h_0(t'-k\Delta t) =$$

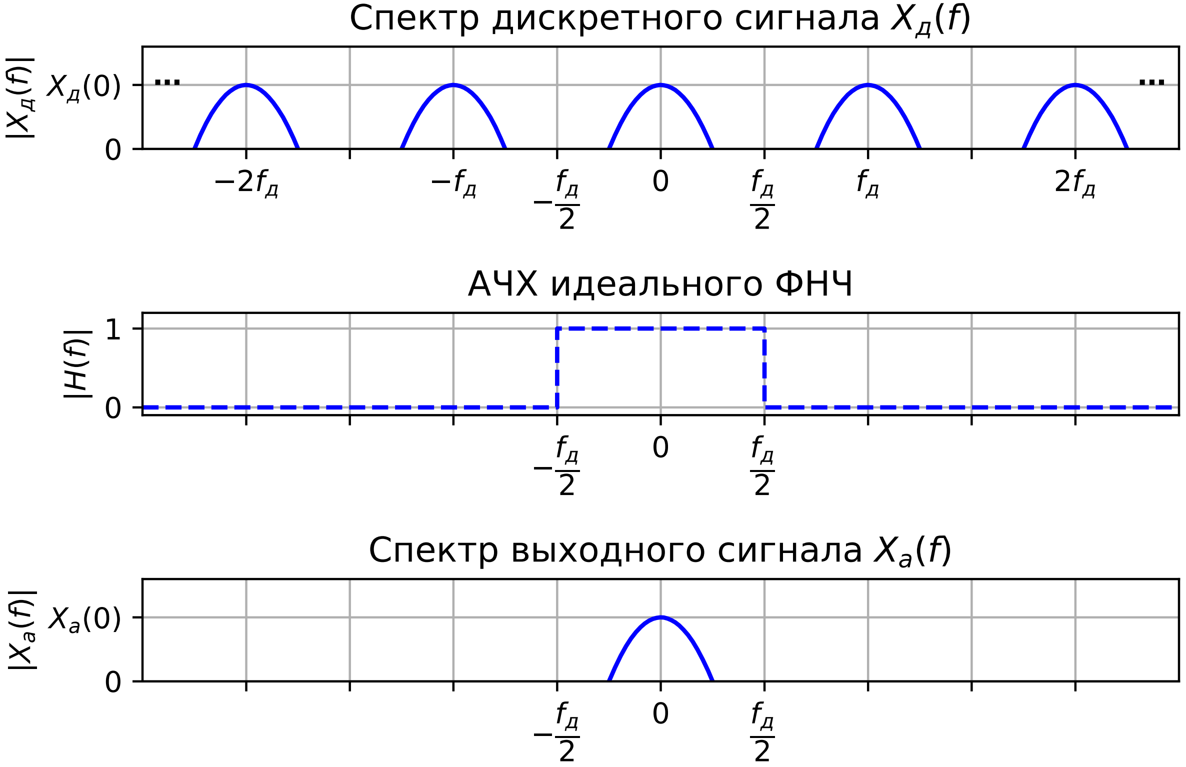
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi f_в(t'-k\Delta t)}{2\pi f_в(t'-k\Delta t)}.$$

Поскольку $h_0(t) \neq 0$ при $t<0$, то ИФНЧ не является каузальным, а потому физически нереализуем. Простым введением задержки эту проблему решить нельзя. Не существует таких значений t_0, для которых $h_0(t-t_0)$ была бы строго равна нулю при $t<0$.



Норберт Винер сказал по этому поводу следующее: *«Ни один из фильтров, отвечающих условию причинности, не может иметь бесконечного затухания в конечной (ненулевой) полосе частот. Идеальный фильтр физически неосуществим из-за самой его сущности, а не по причине отсутствия необходимых технических средств».*

Работа идеального ФНЧ в частотной области показана на рисунке.



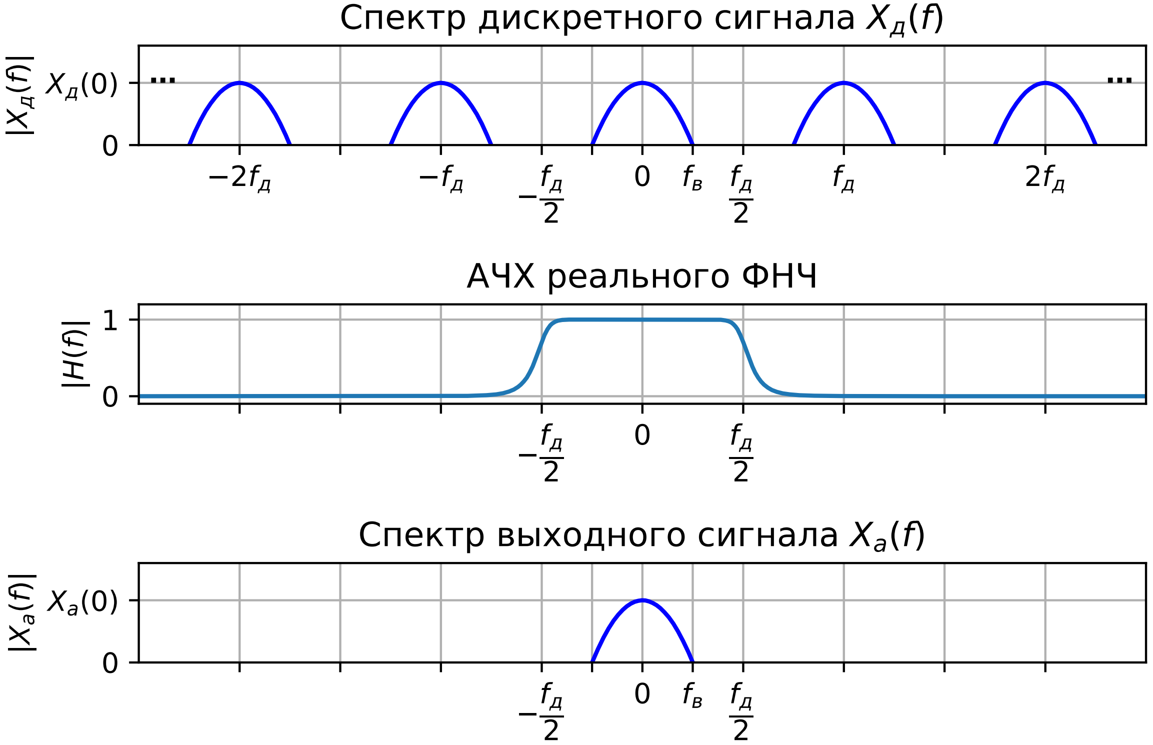
Каузальная аппроксимация ИФНЧ

Реальные восстанавливающие фильтры.

Требования к восстанавливающему фильтру можно существенно ослабить, если выбором Δt обеспечить

$$f_c = f_д / 2 = 1/2\Delta t > f_в.$$

Это условие означает, что верхняя граничная частота в спектре сигнала не должна превышать частоту Найквиста ($f_д / 2$). В этом случае наложения частичных спектров не происходит.



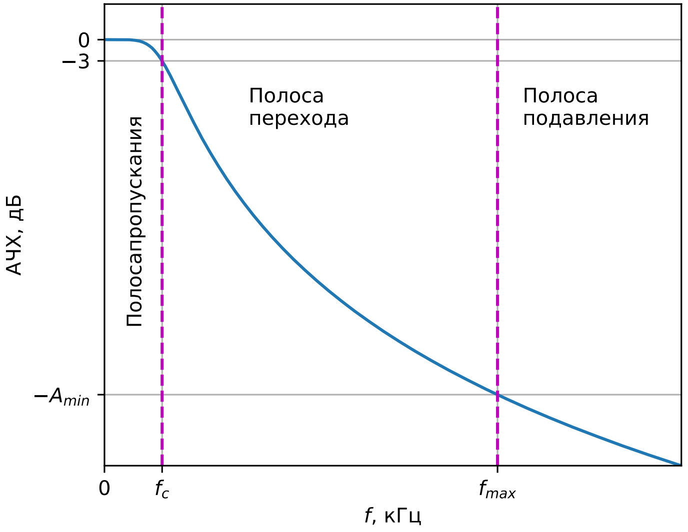
Наличие свободного интервала $(f_в,\ f_д - f_в)$ упрощает реализацию фильтра, устраняется необходимость резкой отсечки в АЧХ реального фильтра $|H(f)|$. По этой причине на практике шаг дискретизации Δt выбирается так, чтобы

$$f_д = (2 \div 5) f_в.$$

Если бы выполнялись условия

$$|H(f)| = \begin{cases} \text{const} & \text{при} \quad |f| \le f_в, \\ \text{произвольная} & \text{при} \quad f_в < |f| \le f_д - f_в, \\ 0 & \text{при} \quad |f| > f_д - f_в, \end{cases}$$

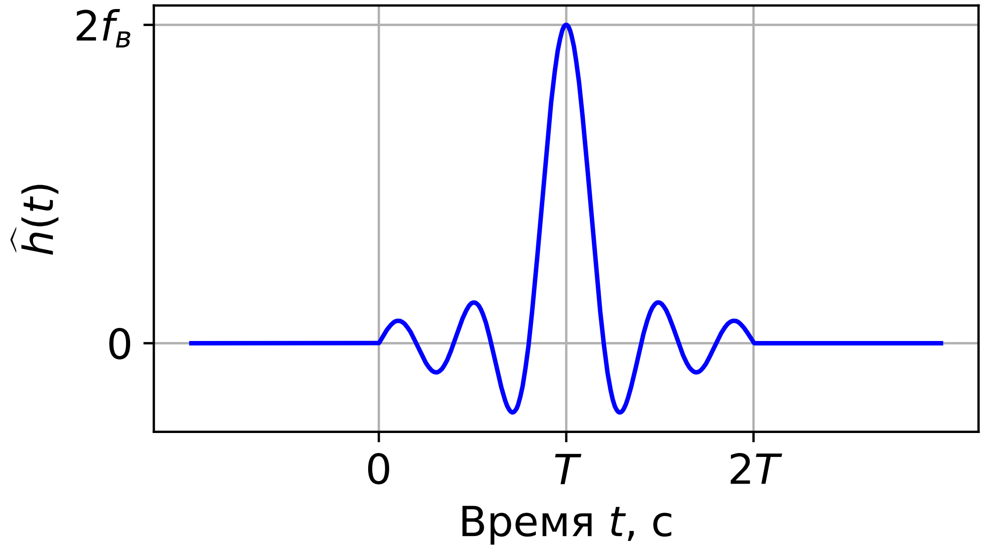
то спектр $X_a(f)$, а потому и сам сигнал $x(t)$, восстанавливается точно. Однако для реальных фильтров первое и третье условие выполнены лишь приближенного.



Каузальная аппроксимация ИФНЧ

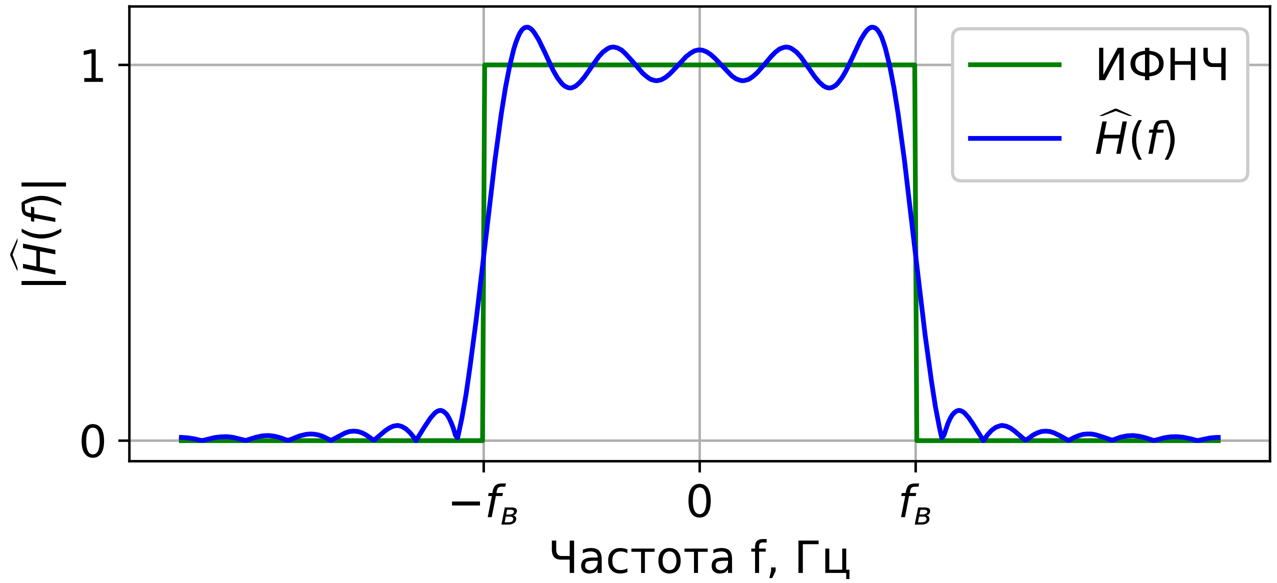
Пример. Рассмотрим симметрично усечённую импульсную характеристику идеального ФНЧ. Аналитическое выражение такой каузальной импульсной характеристики имеет вид

$$\widehat{h}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2\pi f_в (t-T)}{\pi(t-T)}, & 0\le t\le 2T,\\ 0, & \text{для всех других значений } t.\end{cases}$$



Функция $\widehat{h}(t)$ получается стробированием идеальной характеристики $h_0(t)$ прямоугольным окном длительностью $2T$ и последующим сдвигом вправо на T.

Выбирая достаточно большое T и пренебрегая «хвостами» в области отрицательных значений $t<0$, можно с любой наперёд заданной точностью аппроксимировать идеальный ФНЧ. Однако нетрудно показать, что для больших конечных значений T преобразование Фурье $\widehat{H}(f)$ для $\widehat{h}(t)$ приближается по форме к АЧХ идеального ФНЧ, за исключением всплесков конечной амплитуды на границах полосы частот. Площадь под указанными всплесками стремится к нулю при увеличении T. С увеличением T выброс приближается к точке разрыва $f=\pm f_в$ и колебания затухают быстрее.

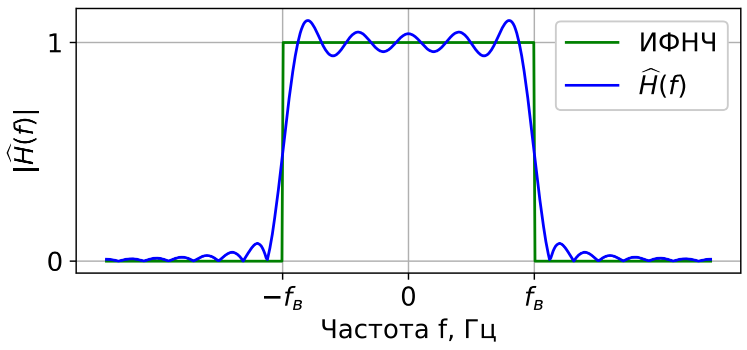


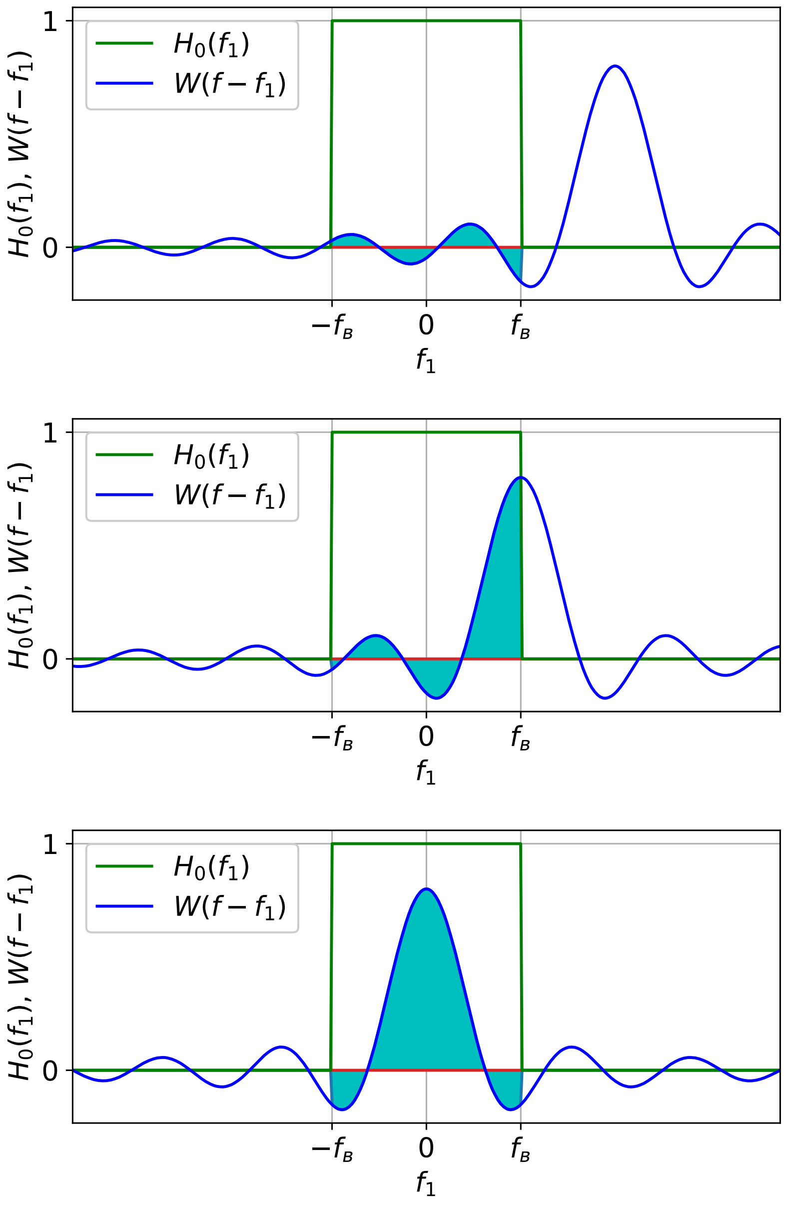
Всплески являются следствием явления Гиббса, которое иллюстрируется на рисунке, где показан процесс получения свёртки частотной характеристики ИФНЧ $H_0(f_1)$ с частотной характеристикой прямоугольного вырезающего окна $W(f_1)$

$$W(f_1) = 2T\frac{\sin 2\pi f_1 T}{2\pi f_1 T}.$$

$$\widehat{H}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0(f_1) W(f - f_1) df_1$$

Функция вида также $W(f_1)$ является ядром Дирихле. Теоретически всплески являются следствием медленного спадания «хвостов» импульсной характеристики $\widehat{h}(t)$, поэтому их можно искусственно подавить, если использовать оконные функции, отличные от прямоугольной.



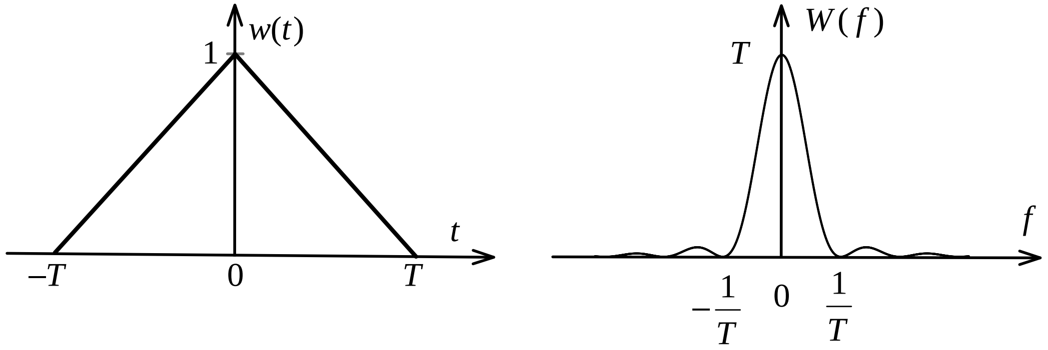


Каузальная аппроксимация ИФНЧ

Пример. Рассмотрим каузальную импульсную характеристику

$$\widehat{h}(t)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{|t-T|}{T}\right)\dfrac{\sin 2\pi f_в (t-T)}{\pi(t-T)}, & 0\le t\le 2T,\\ 0, & \text{для всех других значений } t.\end{cases}$$

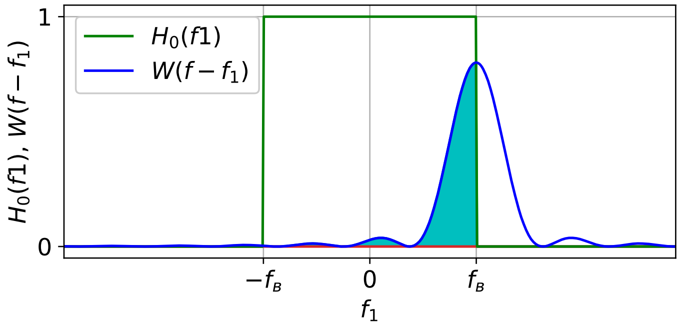
Здесь $h_0(t)$ умножается на оконную функцию $w(t)$ в виде симметричного треугольного импульса со спектром $W(f)$.

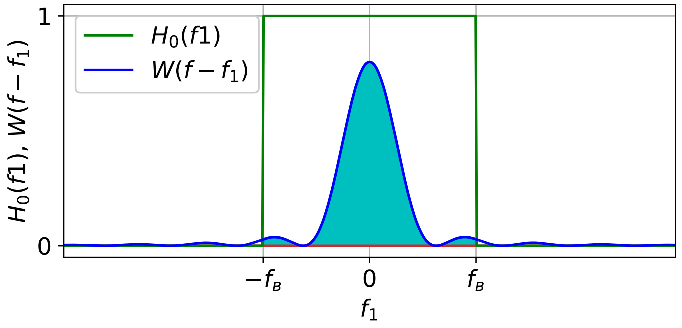


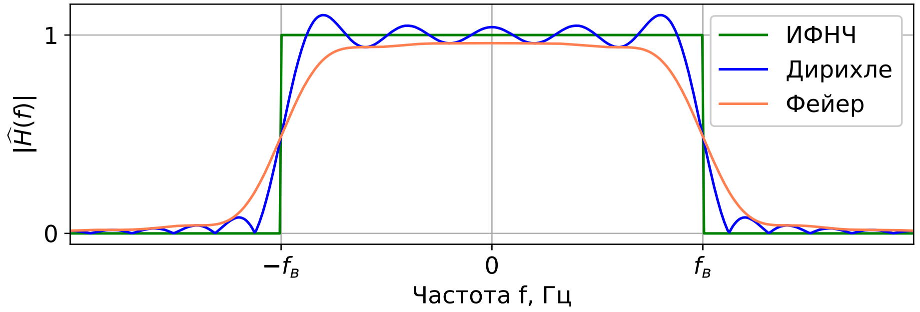
Частотная характеристика треугольного окна

$$W(f)=T\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2$$

носит название ядра Фейера. Как видно из этого рисунка, ядро Фейера по сравнению с ядром Дирихле имеет значительно меньшие боковые лепестки, причём они однополярные. В результате свёртки частотная характеристика $\widehat{H}(f)$ каузального фильтра, соответствующая, будет аппроксимировать частотную характеристику ИФНЧ без заметных всплесков.







Восстановление сигналов по дискретным отсчётам путём интерполяции n-ого порядка

Практический способ восстановления аналогового сигнала основывается на аппроксимации функции $x(t)$ некоторым полиномом, который совпадает с $x(t)$ при $t = k\Delta t, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Например, можно разложить $x(t)$ в ряд между моментами $k\Delta t$ и $(k+1)\Delta t$:

$$x(t) = x(k\Delta t) + x'(k\Delta t)(t - k\Delta t) + \frac{x''(k\Delta t)}{2!}(t - k\Delta t)^2 + \ldots,$$

где производные берутся по времени t.

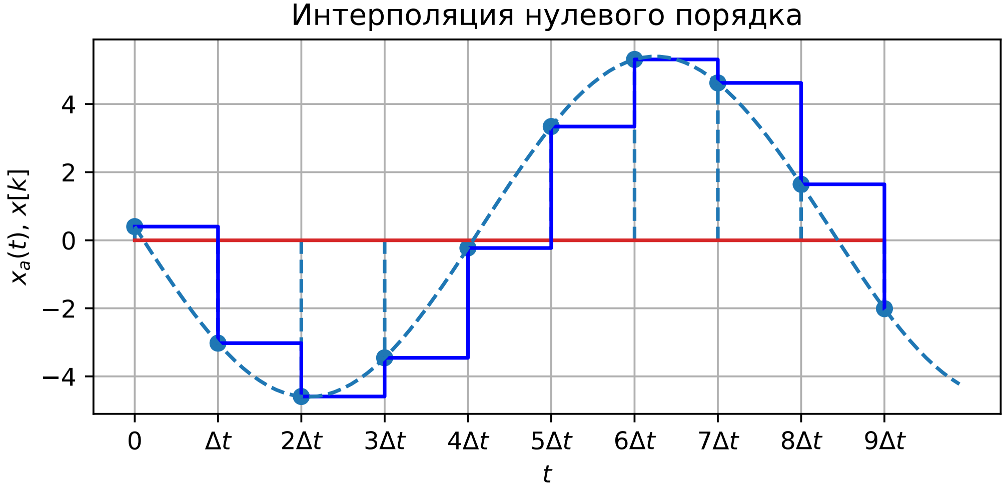
Поскольку единственная информация о $x(t)$– её значения в дискретные моменты времени, то производные должны оцениваться по этим значениям:

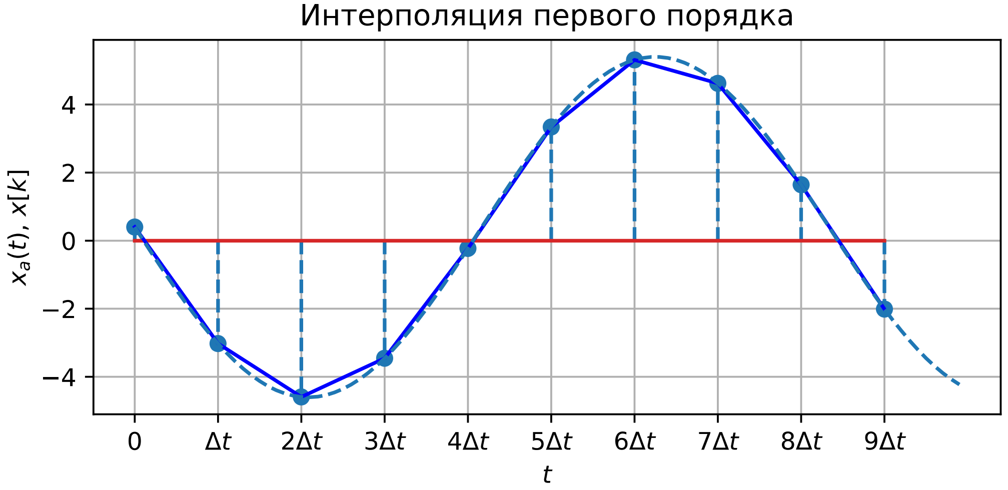
$$\hat{x}'(k\Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t}\left(x(k\Delta t) - x((k-1)\Delta t)\right)$$

$$\hat{x}''(k\Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t}\left(\hat{x}'(k\Delta t) - \hat{x}'((k-1)\Delta t)\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\Delta t^2}\left(x(k\Delta t) - 2x((k-1)\Delta t) + x((k-2)\Delta t)\right).$$

Видно, что чем выше порядок производной, тем большее число предшествующих выборок требуется. Можно легко убедиться, что число предшествующих выборок, необходимых для оценки значения $x^{(n)}(k\Delta t)$, равно n.





Ступенчатая интерполяция

Ступенчатая интерполяция и восстановление косинусоидального сигнала с помощью ЦАП

№8

Ступенчатая интерполяция заключается в сохранении величины выборки в пределах шага дискретизации Δt. В цифровых системах в качестве интерполятора нулевого порядка чаще всего используется цифроаналоговый преобразователь ЦАП. Микросхемы ЦАП отличаются высоким быстродействием и точностью.

Математически сигнал на выходе стандартного ЦАП в идеальном случае можно описать как реакцию фильтра с импульсной характеристикой $h(t)$ в виде прямоугольного импульса длительностью Δt и с началом в точке 0 на входное воздействие вида

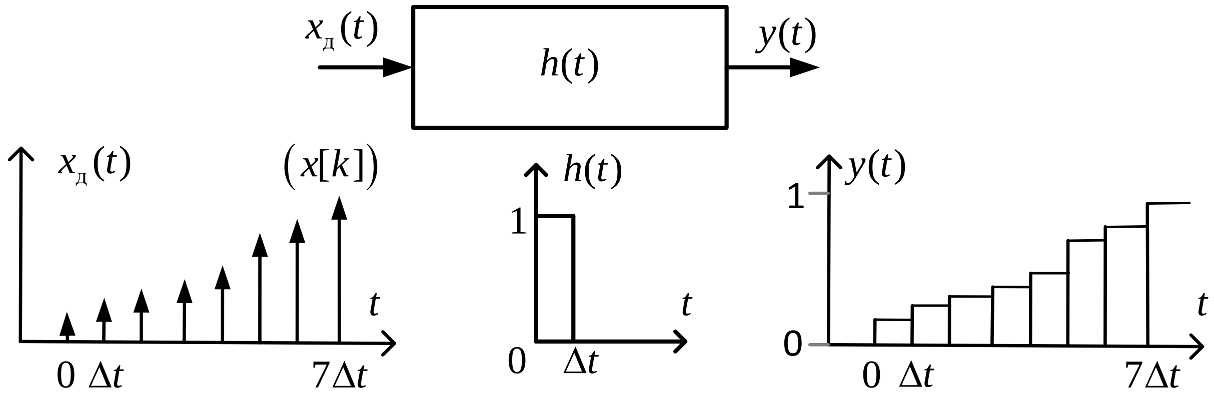
$$x_{\text{д}}(t) = \mathrm{T}\sum_k x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t),\ \mathrm{T} = \Delta t.$$

Частотная характеристика, связанная с импульсной реакцией преобразованием Фурье, будет равна

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-j2\pi ft)dt = \int_{0}^{\Delta t} \exp(-j2\pi ft)dt = \left.\frac{\exp(-j2\pi ft)}{-j2\pi f}\right|_0^{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{\pi f}\frac{\exp(-j\pi f\Delta t)\big(\exp(-j\pi f\Delta t) - \exp(j\pi f\Delta t)\big)}{-2j} =$$

$$= \frac{\sin(\pi f\Delta t)}{\pi f}\exp(-j\pi f\Delta t) = \frac{1}{f_{\text{д}}}\frac{\sin(\pi f / f_{\text{д}})}{\pi f / f_{\text{д}}} e^{-j\pi f / f_{\text{д}}}.$$



Ступенчатая интерполяция

Предположим, что $x(t)=\cos(2\pi f_1 t)$. Тогда

$$X_{\text{д}}(f)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\delta\left(f-f_1+nf_{\text{д}}\right)+\delta\left(f+f_1+nf_{\text{д}}\right)\right)$$

В частотной области выход системы

$$Y(f)=X_{\text{д}}(f)H(f)$$

$$Y(f)=\frac{\Delta t}{2}e^{-j\frac{\pi f}{f_{\text{д}}}}\frac{\sin\frac{\pi f}{f_{\text{д}}}}{\frac{\pi f}{f_{\text{д}}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\delta\left(f-f_1+nf_{\text{д}}\right)+\delta\left(f+f_1+nf_{\text{д}}\right)\right)$$

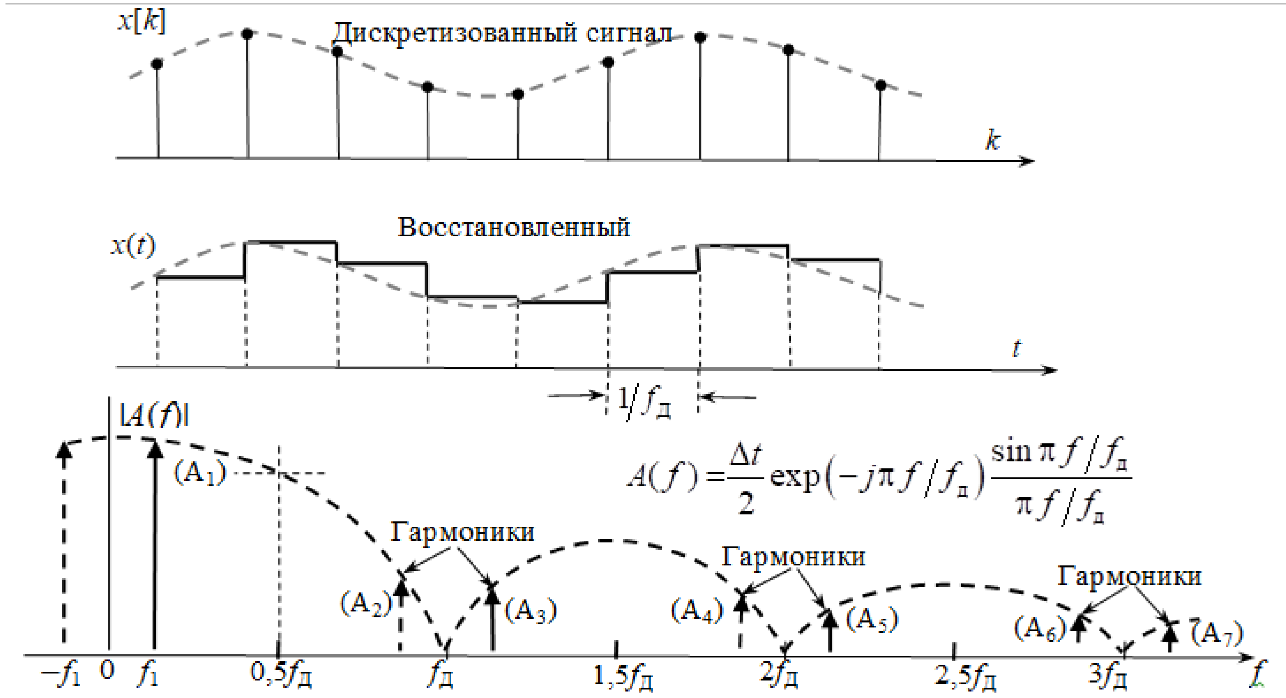
$$Y(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi\left(f_1+nf_{\text{д}}\right)}{f_{\text{д}}}}\frac{\sin\left(\pi\left(f_1/f_{\text{д}}+n\right)\right)}{\pi\left(f_1+nf_{\text{д}}\right)}\delta\left(f-\left(f_1+nf_{\text{д}}\right)\right)+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi\left(f_1+nf_{\text{д}}\right)}{f_{\text{д}}}}\frac{\sin\left(\pi\left(f_1/f_{\text{д}}+n\right)\right)}{\pi\left(f_1+nf_{\text{д}}\right)}\delta\left(f+\left(f_1+nf_{\text{д}}\right)\right)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}Y(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$y(t)=\sum_n\frac{\sin 2\pi\left(f_1+nf_{\text{д}}\right)\frac{\Delta t}{2}}{2\pi\left(f_1+nf_{\text{д}}\right)\frac{\Delta t}{2}}\cos\left[2\pi\left(f_1+nf_{\text{д}}\right)\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)\right]$$

Выходной сигнал есть суперпозиция гармонических компонент со своими частотами, амплитудами и фазами. Лишние компоненты определяют погрешность восстановления и требуют дополнительного подавления.



Если рассматривается не гармонический сигнал, а некоторый реальный (например, достаточно длинный отрезок гармонического сигнала), в спектре появляются очень узкие спектральные компоненты (максимумы).

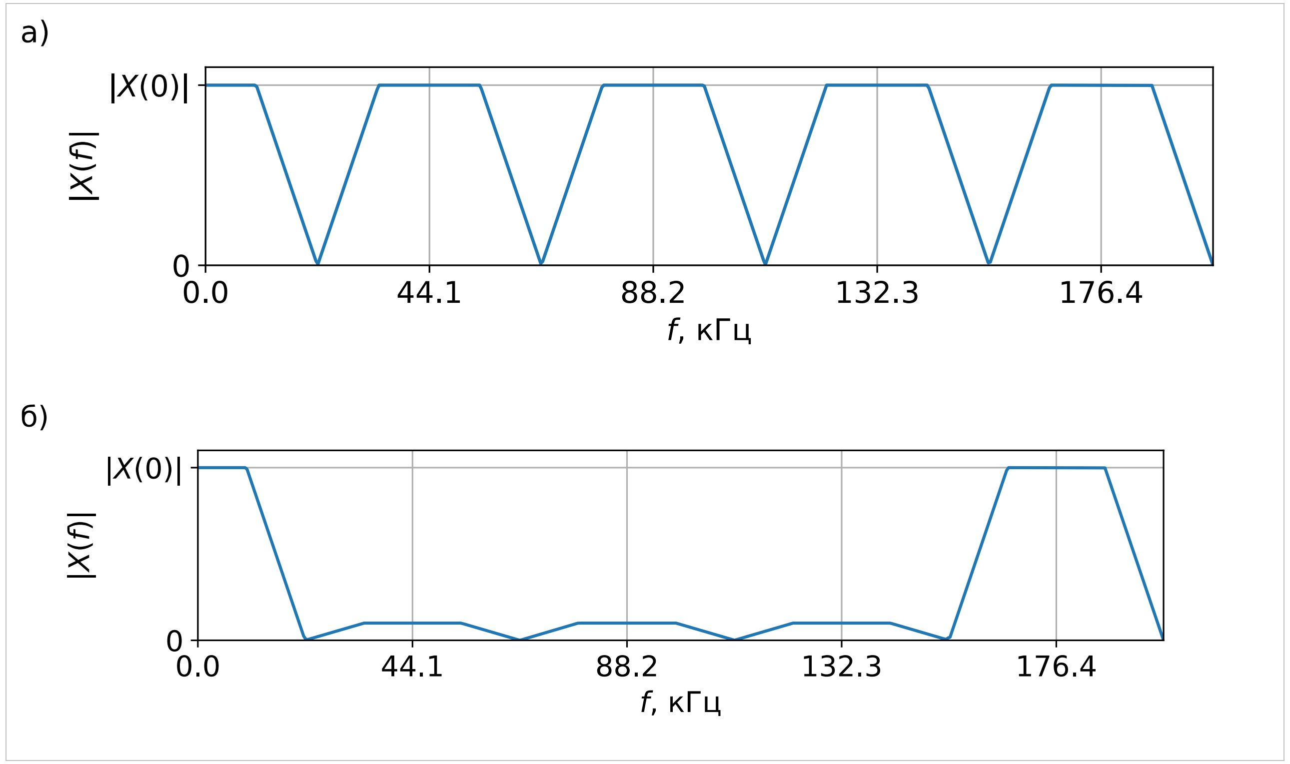
Цифроаналоговое преобразование с запасом по частоте

Цифроаналоговое преобразование с запасом по частоте

Проиллюстрируем принципы цифроаналогового преобразования с запасом по частоте на примере его реализации в некоторых проигрывателях компакт-дисков. Цифровые сигналы, которые считываются с компакт-дисков, имеют вид 16-разрядных слов, передающих звуковую информацию с частотой 44,1 кГц. Если бы цифровые коды непосредственно преобразовывались в аналоговые, то появлялись бы полосы с зеркальными частотами, центрированные в точках, кратных частоте дискретизации 44,1 кГц (рис. а).

Хотя зеркальные частоты не были бы слышны (их частоты превышают границу слышимости 20 кГц), они могли бы привести к перегрузке усилителя или вызвать интермодуляционные искажения. Поэтому зеркальные компоненты должны подавляться, как минимум, на 50 дБ.

Аналоговые фильтры после АЦП, которые могли бы обеспечить такой уровень подавления, достаточно сложны. Поэтому в проигрывателях компакт дисков используют фильтры выборки с запасом по частоте.



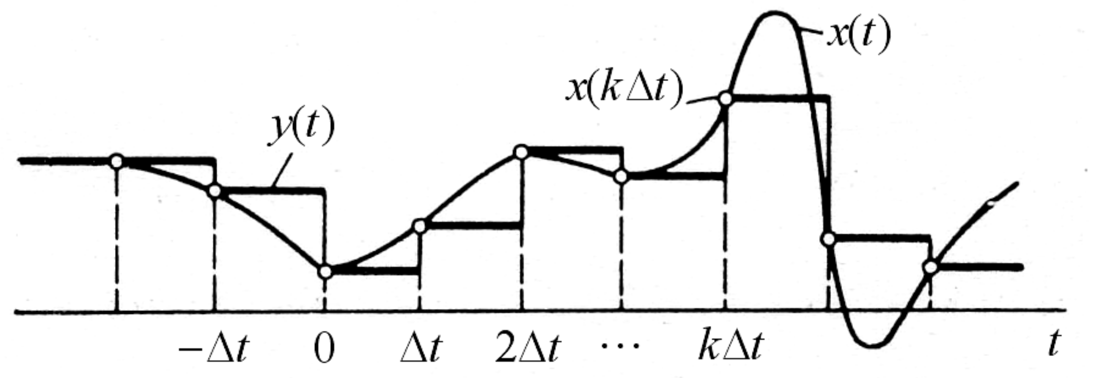
Для реализации соответствующего метода частоту дискретизации перед ЦАП умножают на 4 (с помощью цифрового интерполяционного фильтра), так что цифроаналоговый преобразователь обновляется с частотой 176,4 кГц. Частотный спектр сигнала с четырехкратной перевыборкой показан на рис. б. Требования к фильтру оказываются более слабые, чем при востановлении сигнала с частотой дискретизации 44,1 кГц.

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

с лекции 30 сентября 2024 г.

№1. Рассмотрим сигнал $y(t)$, полученный путём фиксации на время, равное шагу дискретизации Δt, мгновенных значений исходного сигнала $x(t)$.



Пусть $x(t) = \sin 2\pi f_0 t, \quad -\infty < t < \infty$, и шаг дискретизации $\Delta t = \dfrac{1}{10 f_0}$. Получить аналитическое выражение для спектра выходного сигнала фиксатора.

Контрольная работа №1.

На следующей лекции будет проведена контрольная работа №1 по материалам лекций блока 1 «Дискретные преобразование сигналов, интерфейсы ввода и вывода систем ЦОС реального времени» (лекции 1-5).

Во время контрольной работы студенты могут пользоваться конспектами лекций и справочной литературой, в том числе в электронном виде. Не запрещается использование средств компьютерного моделирования, например, в целях проверки своих решений.

Контрольная работа является формой текущего контроля по курсу. Варианты индивидуальные (120). Каждый вариант содержит три задачи.

В случае пропуска контрольной работы по уважительной причине может быть предоставлена возможность написать ее в другой день (необходимо отправить письмо на почту tormagov.ta@mipt.ru **).**