Лекция 7 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»

14 октября 2024 г.

4. Основы цифровой фильтрации.

4.1. Дискретные линейные стационарные системы (LTI).

Импульсная характеристика, частотная, амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики.

Каузальность и физическая реализуемость.

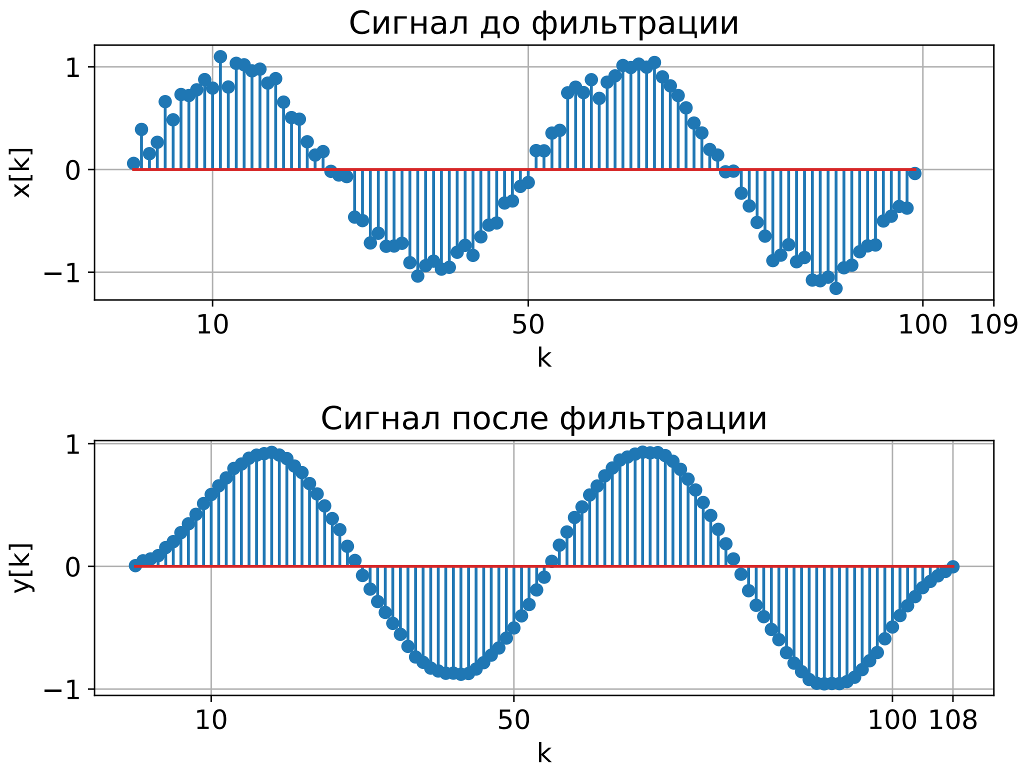
Устойчивость (BIBO).

Разностное уравнение дискретной LTI системы.

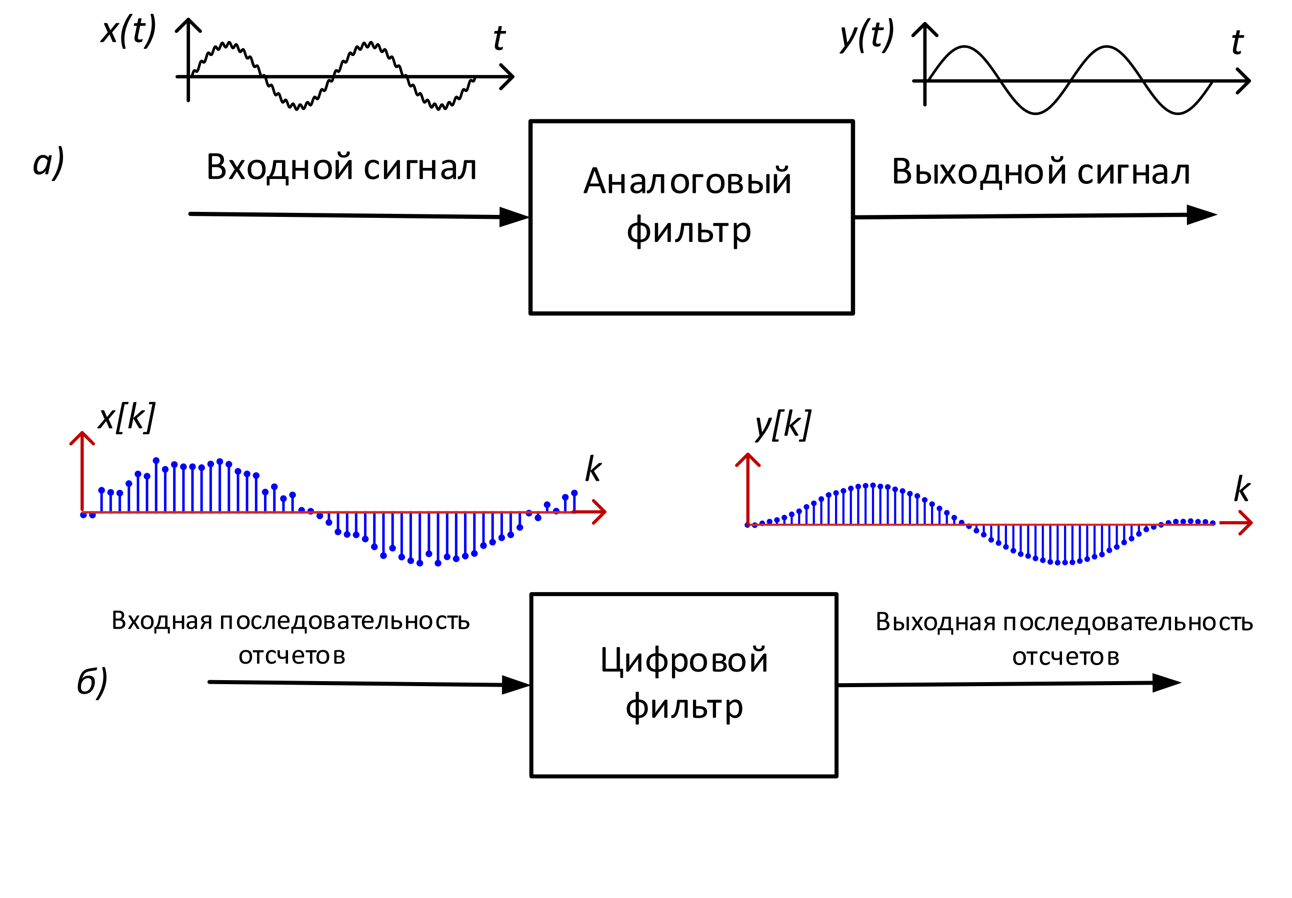
Описание в виде блок-схемы.

4.2. Идеальные частотно-избирательные цифровые фильтры.

Каузальная аппроксимация идеального фильтра нижних частот способом усечения импульсной характеристики и явление Гиббса.



4. Основы цифровой фильтрации.



(a) аналоговый фильтр, на входе которого зашумленный тоновый сигнал, а на выходе – тон, очищенный от шума; (b) цифровой эквивалент аналогового фильтра

Лекции блока 2 посвящены цифровой фильтрации.

- Цифровой фильтр преобразует входной цифровой сигнал $x[k]$ в выходной цифровой сигнал $y[k]$ по некоторому алгоритму:

$$y[k] = F(x[k]),$$

где под $y[k]$ и $x[k]$ символически обозначены все отсчеты этих сигналов.

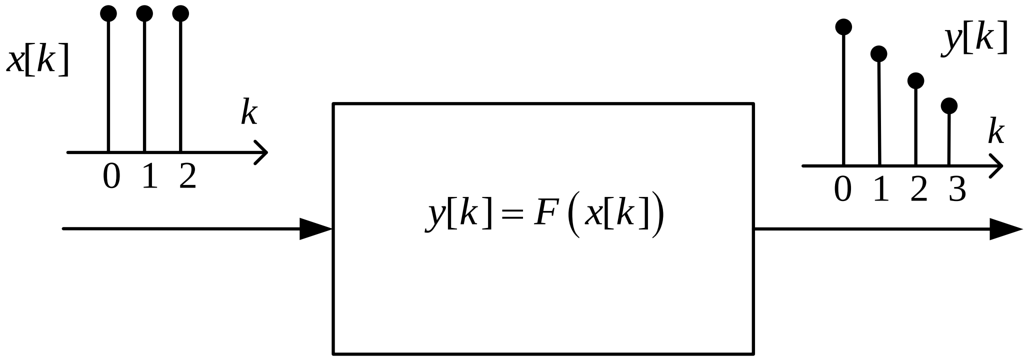
- Примеры способов реализации цифровых фильтров:
  - аппаратная реализация на цифровой интегральной микросхеме,
  - программно-аппаратная реализация на программируемой логической интегральной схеме (ПЛИС),
  - программная реализация — в виде программы для компьютера или микропроцессора.

Понятие линейной стационарной дискретной системы

4.1 Линейные стационарные дискретные системы (LTI)

Понятие линейной стационарной дискретной системы

Под ***дискретной системой*** будем понимать некоторый объект, преобразующий входной дискретный сигнал $x[k]$ в отклик системы $y[k]$. Мы будем рассматривать только одномерные дискретные системы.

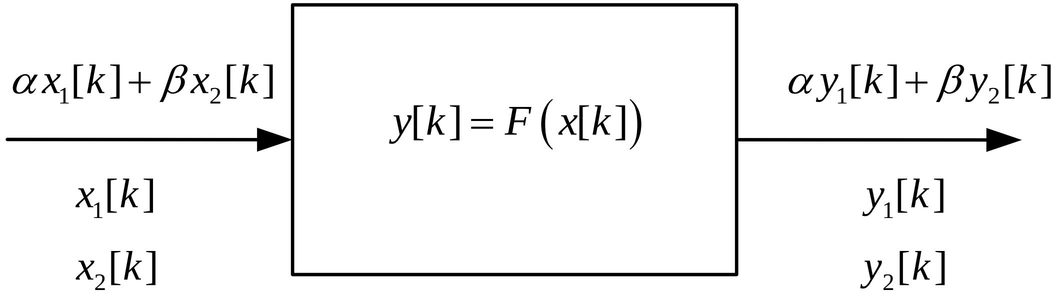


По наличию памяти дискретные системы классифицируются на **статические** и **динамические.** Если в каждый момент времени m выход $y[m]$ системы полностью определяется через входное воздействие в тот же момент времени $x[m]$, то система называется статической, в противном случае — динамической.

Пример статической системы — $y[k]=\sqrt{|x[k]|}$, динамической системы — $y[k]=\sqrt{|x[k]+x[k-1]|}$.

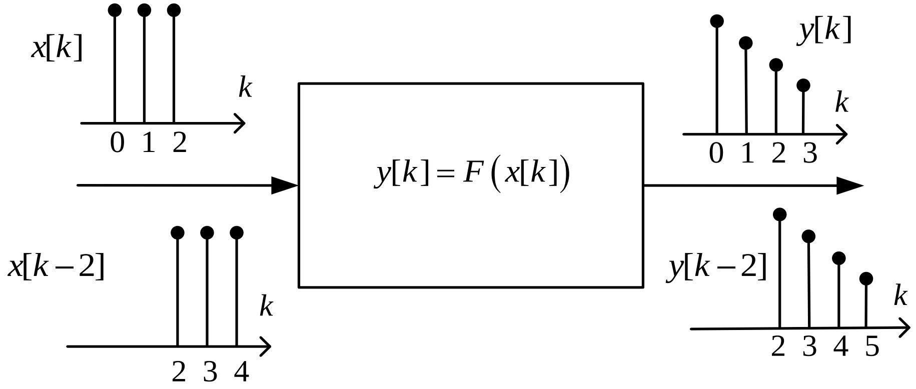
Линейной дискретной системой называется такая дискретная система $y[k]=F(x[k])$, для которой выполнено свойство линейности (***принцип суперпозиции***): если для произвольных входных воздействий $x_1[k]$ и $x_2[k]$, а также чисел α и β выполнено $y_1(k)=F(x_1[k])$ и $y_2[k]=F(x_2[k])$, то

$$F(\alpha x_1[k]+\beta x_2[k])=\alpha y_1[k]+\beta y_2[k].$$



Понятие линейной стационарной дискретной системы

Дискретная система $y[k]=F\left(x[k]\right)$ называется ***стационарной (инвариантной во времени)***, если для любого входного воздействия $x[k]$, соответствующего ему выхода $y[k]=F(x[k])$ и любого целого числа m выполняется $y[k-m]=F(x[k-m])$. В противном случае система называется ***нестационарной***.



Далее будем рассматривать в основном линейные дискретные стационарные системы (**LTI** - Linear time-invariant system).

Пример. Рассмотрим систему, заданную уравнением $y[k]=kx[k]$.

Она является линейной, но при этом система нестационарная.

Вход	Выход
$x_1[k]=\mathbf{1}[k-1]$	$y_1[k]=\mathbf{1}[k-1]$
$x_2[k]=\mathbf{1}[k-2]$	$y_2[k]=2\cdot\mathbf{1}[k-2]$

Пример. Рассмотрим пример нелинейной системы $y[k]=\sqrt{|x[k]|}$. Покажем, что это нелинейная система.

Возьмем (используя обозначения из определения) $\alpha=2$, $\beta=3$, $x_1[k]=x_2[k]=\mathbf{1}[k]$. Тогда

$$\alpha x_1[k]+\beta x_2[k]=5\cdot\mathbf{1}[k].$$

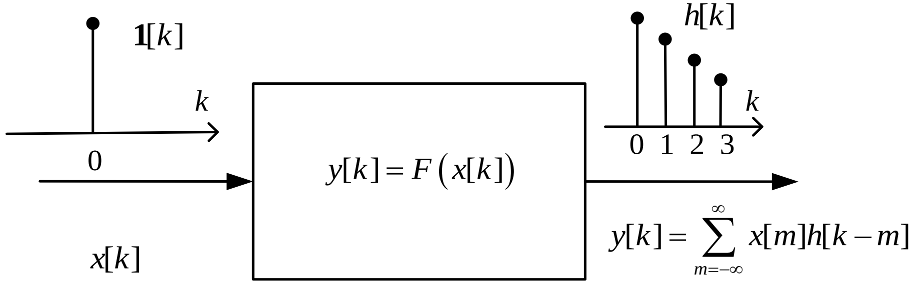
Но при этом $F(\alpha x_1[k]+\beta x_2[k])=\sqrt{5}\cdot\mathbf{1}[k]$, а значит

$$F(\alpha x_1[k]+\beta x_2[k])\neq\alpha y_1[k]+\beta y_2[k].$$

Заметим, что при этом система является стационарной.

Импульсная характеристика дискретной LTI системы, КИХ- и БИХ-фильтры

Импульсная характеристика дискретной LTI системы



Обозначим как $h_m[k]$ реакцию дискретной LTI системы на входное воздействие $\mathbf{1}[k-m]$. Далее будем считать, что используется инициализация выхода системы для отрицательных моментов времени нулевым значением, т.е. $y[k]=0,\ k<0$.

Произвольное входное воздействие $x[k]$ может быть представлено в виде $x[k]=\sum_m x[m]\mathbf{1}[k-m]$.

Тогда выход системы в силу ее линейности представим в виде $y[k]=\sum_m x[m]h_m[k]$.

В силу стационарности системы $h_m[k]=h_0[k-m]$. Тогда

$$y[k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_0[k-m].$$

В итоге выход LTI системы может быть получен с помощью знания ее реакции на единичный импульс в нулевой момент времени $\mathbf{1}[k]$ **—** ***импульсной характеристики*** $h[k]$**.** Как правило, индекс $_0$ не используется:

$$y[k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[k-m].$$

Таким образом, выход LTI системы является дискретной сверткой входного воздействия с импульсной характеристикой.

LTI системы-фильтры, для которых импульсная характеристика $h[k]$ является финитная функция, называются фильтрами с конечной импульсной характеристикой (***КИХ - фильтрами***, в англоязычной литературе FIR - Finite impulse response filter).

Если импульсная характеристика $h[k]$ нефинитная функция, то такие системы называются фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (***БИХ - фильтрами***, в англоязычной литературе IIR - Infinite impulse response filter).

Частотная характеристика дискретной LTI системы

Частотная характеристика дискретной LTI системы

Пусть $x[k] \overset{\text{ДВПФ}}{\leftrightarrow} X(\nu)$, $y[k] \overset{\text{ДВПФ}}{\leftrightarrow} Y(\nu)$, $h[k] \overset{\text{ДВПФ}}{\leftrightarrow} H(\nu)$.

По теореме о свертке во временной области для ДВПФ:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[k-m] \overset{\text{ДВПФ}}{\leftrightarrow} X(\nu)H(\nu).$$

Тогда $Y(\nu) = X(\nu)H(\nu)$. Функция $H(\nu)$ также позволяет полностью описать выход LTI системы и называется ***частотной характеристикой***, которая представляет собой ДВПФ импульсной характеристики:

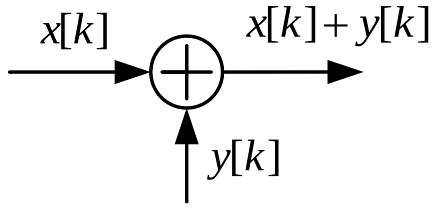
$$H(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j2\pi\nu k}.$$

Функция $H(\nu)$ принимает комплексные значения, а значит ее можно переделить с помощью ***амплитудно-частотной*** $A(\nu) = |H(\nu)|$ (АЧХ) и ***фазочастотной*** (ФЧХ) $\varphi(\nu) = \angle H(\nu)$ характеристик: $H(\nu) = A(\nu)\exp\left(j\varphi(\nu)\right)$, $\varphi(\nu) = \angle H(\nu)$,

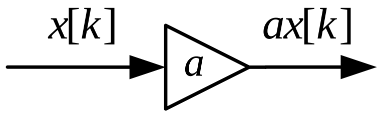
$$\operatorname{tg}\varphi(\nu) = \frac{\operatorname{Im}(H(\nu))}{\operatorname{Re}(H(\nu))}.$$

Заметим, что функция $H(\nu)$ будет периодична с периодом, равным частоте дискретизации. Если рассматривать нормированные частоты $\nu = f / f_{\text{д}}$, то период равен 1. Если в качестве частотной переменной взять нормированный угол в радианах $\theta = 2\pi\nu$, то период равен 2π.

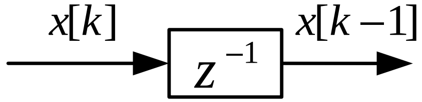
Описание в виде блок–схем



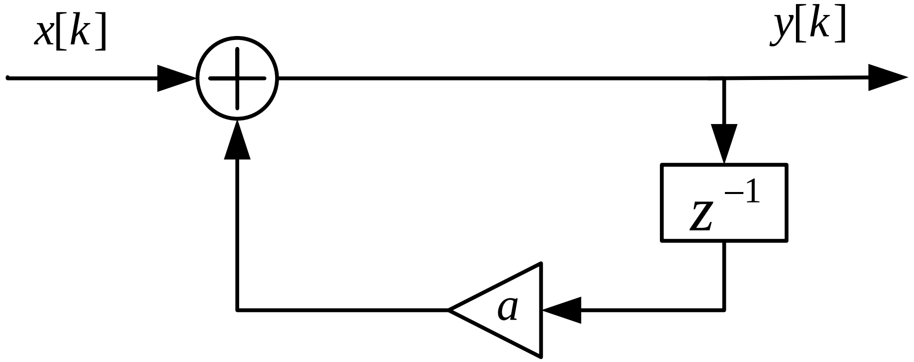
сложение сигналов



усиление сигнала



задержка на такт



$$y[k] = a\,y[k-1] + x[k].$$

Пример. Фильтр скользящего среднего.

Пример. Фильтр скользящего среднего.

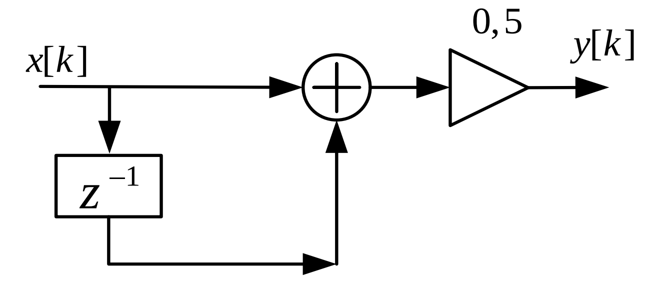
Рассмотрим систему, заданную разностным уравнением

$$y[k]=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}x[k-m].$$

Это фильтр скользящего среднего.

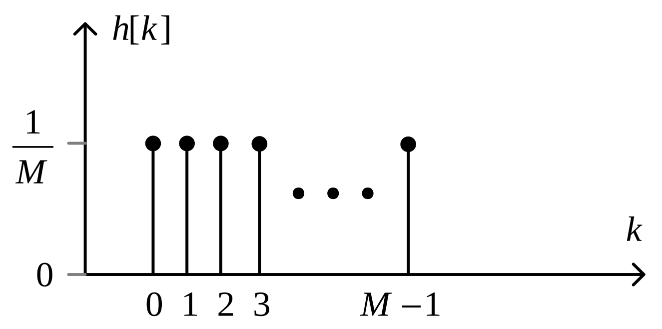
Для $M=2$

$$y[k]=\frac{x[k]+x[k-1]}{2}.$$



Импульсная характеристика такой системы

$$h[k]=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\mathbf{1}[k-m].$$



КИХ-фильтр

Частотная характеристика фильтра.

$$H(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\exp(-j2\pi\nu k)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\exp(-j2\pi\nu k)=$$

$$=\frac{1}{M}\frac{1-\exp(-j2\pi\nu M)}{1-\exp(-j2\pi\nu)}=\frac{1}{M}\frac{2j}{2j}\frac{e^{-j\pi\nu M}}{e^{-j\pi\nu}}\frac{(e^{j\pi\nu M}-e^{-j\pi\nu M})}{(e^{j\pi\nu}-e^{-j\pi\nu})}=$$

$$=\frac{1}{M}\frac{\sin(M\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\exp(-j(M-1)\pi\nu)$$

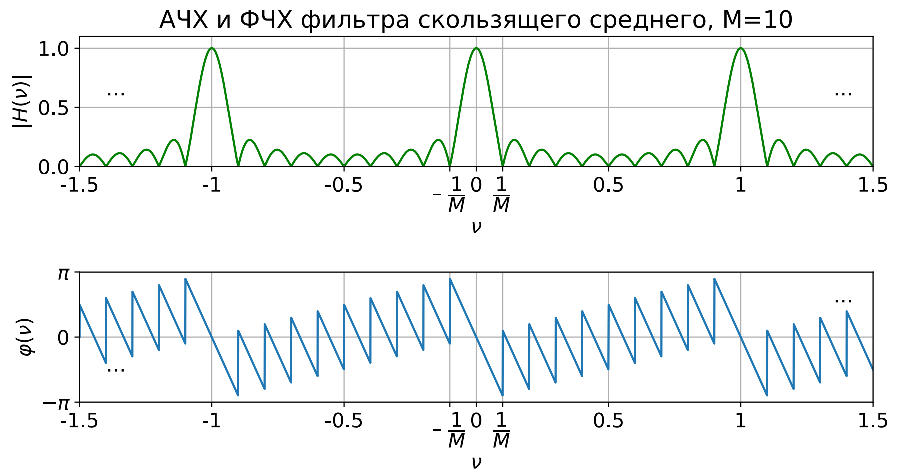
$$H(\nu)=\frac{1}{M}\exp\big(-j(M-1)\pi\nu\big)\frac{\sin(M\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)},$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$A(\nu)=|H(\nu)|=\frac{1}{M}\left|\frac{\sin(M\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\right|.$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) , как видно из $H(\nu)=A(\nu)\exp\big(j\varphi(\nu)\big)$,

$$\varphi(\nu)=-(M-1)\pi\nu \ \text{ при } \ -1/M<\nu<1/M .$$



Пример. Фильтр скользящего среднего.

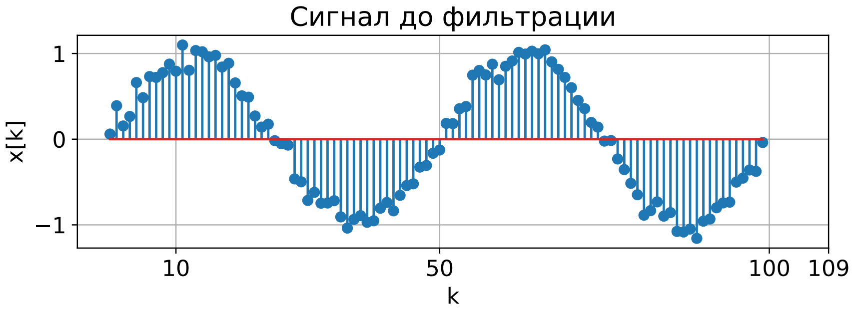
На графике приведен пример фильтрации сигнала

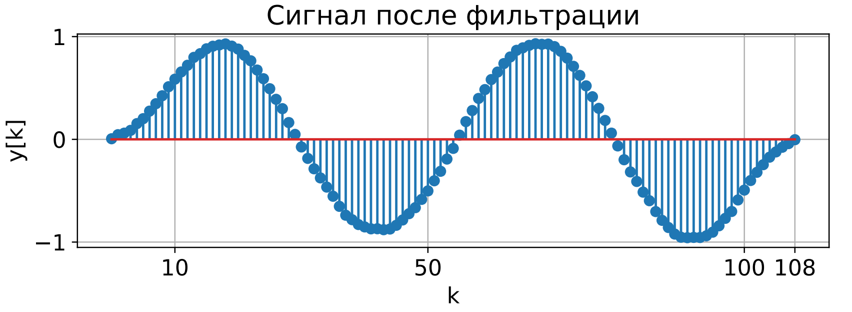
$$x[k]=\sin(2\pi 0.02k)+\varepsilon[k],\quad 0\le k\le 99,$$

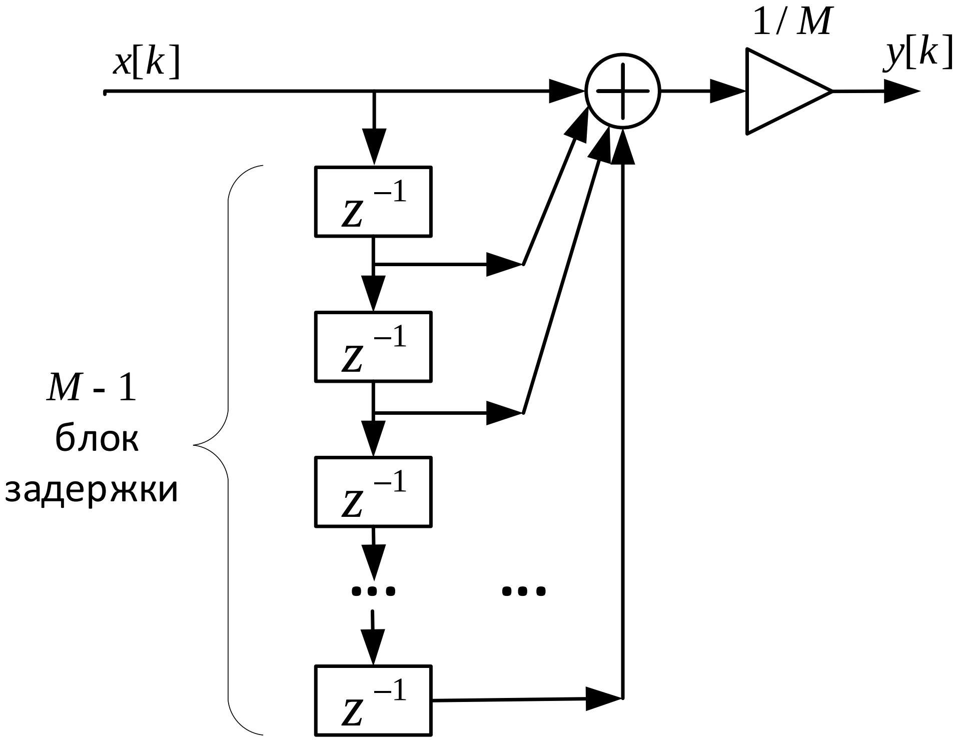
где $\varepsilon[k]$ — аддитивный[1] белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $\sigma=0.1$.

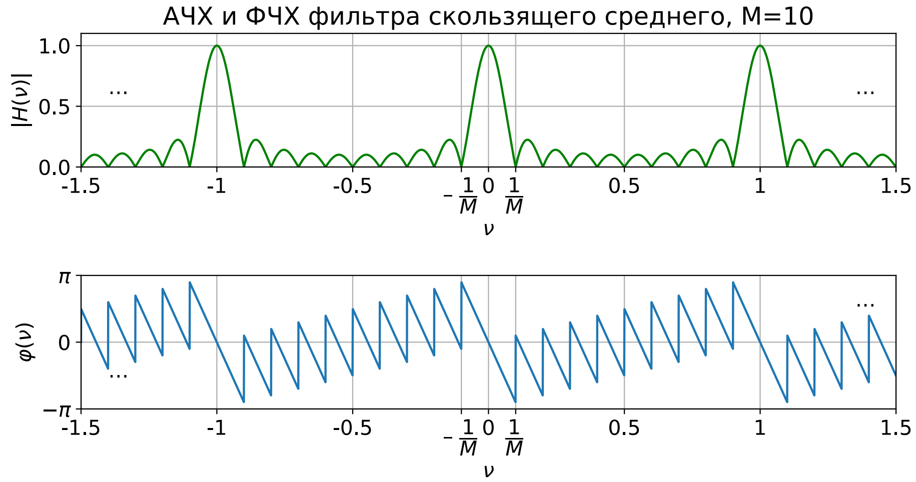
Использовался фильтр скользящего среднего с $M=10$

$$y[k]=\frac{1}{10}\sum_{m=0}^{M-1}x[k-m].$$









[1] В данном контексте шум аддитивный, поскольку суммируется с основным сигналом.

№9 **Каузальность и физическая реализуемость.**

Система называется ***каузальной***, если ее выходное воздействие зависит только от значений входного воздействия в предшествующие моменты времени, т.е. выход $y[k]$ системы может быть определен через вход $x[k]$ с помощью некоторой функции G так, что $y[k]=G\{x[k],x[k-1],x[k-2],\ldots\}$. В противном случае система некаузальная. Каузальность необходима для ***физической реализуемости дискретной системы***.

Критерий каузальности. LTI система каузальна тогда и только тогда, когда ее импульсная характеристика $h[k]$ тождественно равна нулю при $k<0$.

Докажем это.

Как мы установили ранее, отклик $y[k]$ LTI системы определяется через ее входное воздействие $x[k]$ с помощью дискретной свертки:

$$y[k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[k-m]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]x[k-m]=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{-1}h[m]x[k-m]+\sum_{m=0}^{\infty}h[m]x[k-m].$$

Если импульсная характеристика каузальна, то выход системы зависит только от сигнала на входе в предшествующие моменты времени $x[k]$, $x[k-1]$, $x[k-2]$, $x[k-3]$, …, а значит и сама система каузальна.

Если система каузальна, то ее выход зависит от значений на входе только в предшествующие моменты времени $x[k]$, $x[k-1]$, $x[k-2]$, $x[k-3]$, … Эти значения могут быть произвольные. Значит $h[k]$ тождественно равна нулю при $k<0$.

Пример. Фильтр скользящего среднего

$$y[k]=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}x[k-m]$$

является каузальным, т.к. выход системы зависит только от значения сигнала на входе в текущий и предыдущие моменты времени. Он реализуем в реальном времени. Его импульсная характеристика также каузальна.

Устойчивость по входу (BIBO)

Для дискретных систем вводится понятие устойчивости по входу (BIBO - bounded-input bounded-output). Система называется ***устойчивой*** тогда и только тогда, когда из того, что $\exists M_x :| x[k]|\le M_x < \infty\ \forall k$, следует, что $\exists M_y :| y[k]|\le M_y < \infty\ \forall k$. В противном случае система называется неустойчивой. Иными словами, для устойчивой системы отклик на любое ограниченное по величине входное воздействие является ограниченным. Пример неустойчивой системы: $y[k]=k$.

Критерий устойчивости LTI системы. Для того, чтобы LTI система была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы ее импульсной характеристика была абсолютно суммируемой: $\sum_k |h[k]|<\infty$.

Доказательство.

Достаточность. Если для входа системы $x[k]$ выполнено $| x[k]|\le M_x$, то для ее выхода $y[k]$

$$| y[k]|=\left|\sum_m h[m]x[k-m]\right| \le \sum_m \left|h[m]x[k-m]\right| =$$

$$=\sum_m \left|h[m]\right| \ \left|x[k-m]\right| \le M_x \sum_m \left|h[m]\right|$$

Необходимость. Покажем, что абсолютная суммируемость импульсной характеристики необходима для того, чтобы LTI система была устойчивой. Предположим, что $\sum_m |h[m]|=\infty$.

Подадим на вход такой системы входное воздействие $x[m]=\operatorname{sing}(h[-m])$. Тогда для выхода в нулевой момент времени

$$y[0]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[-m]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[-m]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|h[m]\right|=\infty.$$

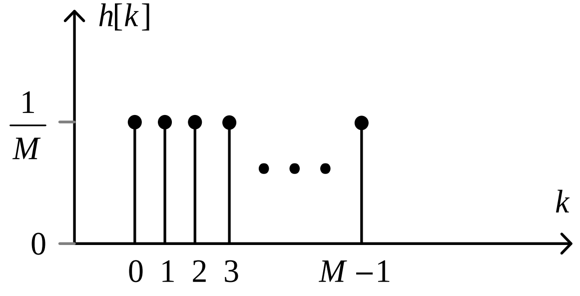
Значит, такая система будет неустойчива.

Заметим, что КИХ-фильтры всегда устойчивы.

Пример. Фильтр скользящего среднего

$$h[k]=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\mathbf{1}[k-m],$$

$$\sum_k \left|h[k]\right| = 1$$

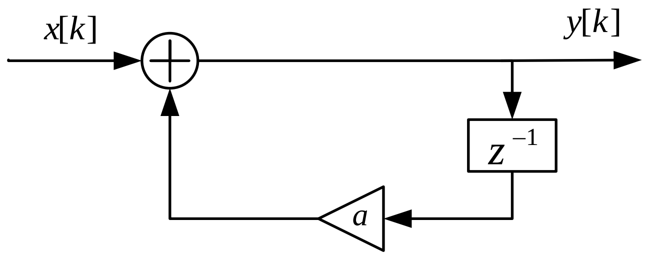


Пример. Рекурсивный фильтр первого порядка.

Пример. Рекурсивный фильтр первого порядка.

Рассмотрим в качестве примера LTI систему с разностным уравнением

$$y[k]=a\,y[k-1]+x[k].$$



Подав на вход единичный импульс, нетрудно увидеть, что она имеет импульсную характеристику $h[k]=a^k u[k]$, где $u[k]$ - дискретная функция включения

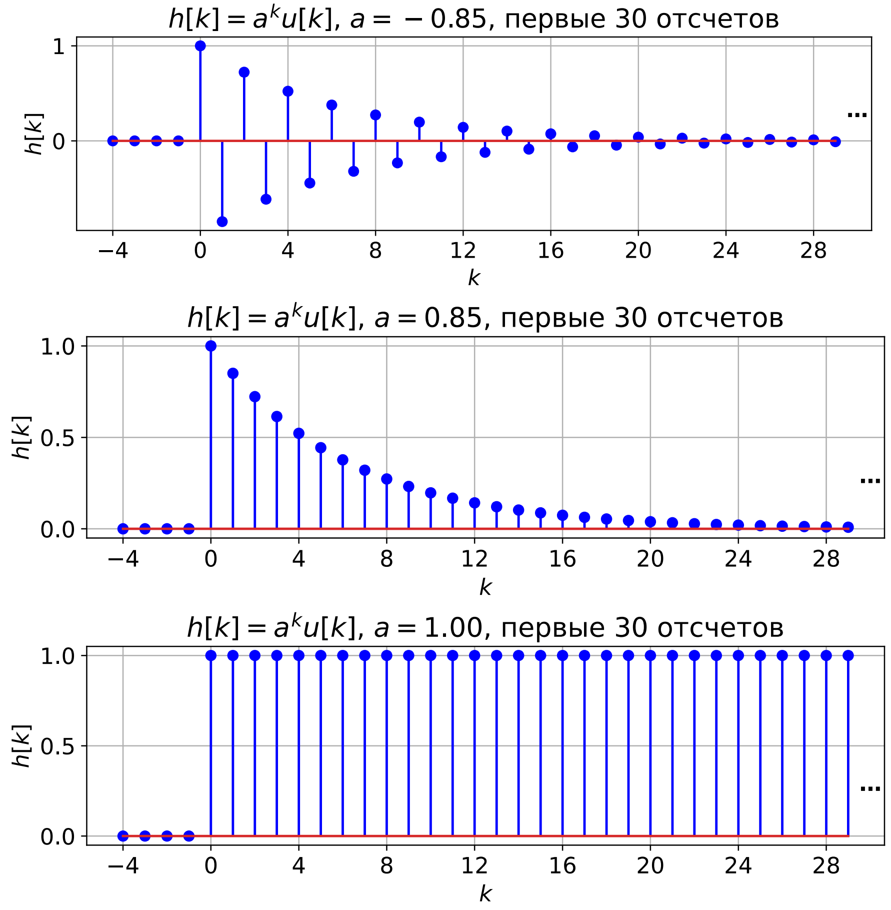
$$u[k]=\begin{cases}1,\ k\geq 0;\\ 0,\ k<0.\end{cases}$$

Для всех $a\neq 0$ это фильтр с бесконечной импульсной характеристикой. Частотная характеристика

$$H(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u[k]e^{-j2\pi\nu k}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k e^{-j2\pi\nu k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(ae^{-j2\pi\nu}\right)^k$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-j2\pi\nu}}$$ при $|a|<1$.

Заметим, что условие $|a|<1$ также является критерием абсолютной суммируемости $h[k]$, и, следовательно, устойчивости такой системы.

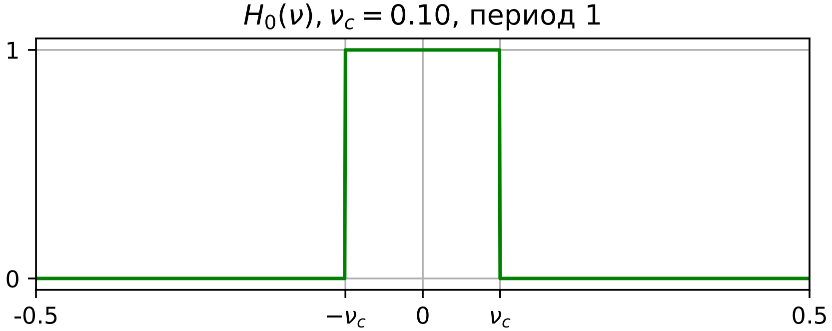


4.2. Идеальные частотно-избирательные цифровые фильтры

Идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ)

Рассмотрим идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ), частотная характеристика которого по переменной ν периодическая с периодом 1 и равна на промежутке $[-0.5; 0.5]$

$$H_0(\nu) = \begin{cases} 1, & |\nu| \le \nu_c, \\ 0, & \nu_c < |\nu| \le 0.5, \end{cases} \quad \text{при } |\nu| \le 0.5.$$



Частота ν_c называется частотой среза, полоса частот $[-\nu_c, \nu_c]$ называется полосой пропускания (по этой причине в англоязычной литературе ФНЧ называется lowpass filter). Это фильтр с нулевой фазочастотной характеристикой, т.е. $\varphi_0(\nu) = 0$, а значит, он не вносит никаких задержек во входной сигнал. Импульсная характеристика ИФНЧ

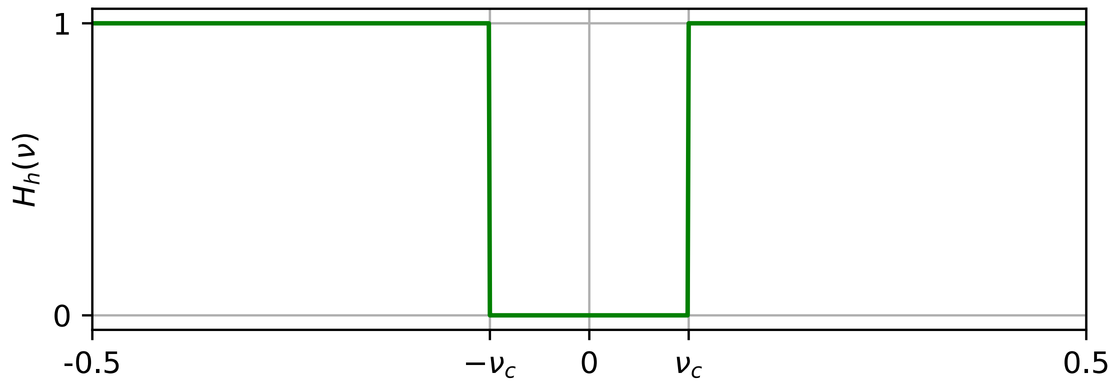
$$h_l[k] = \int_{-1/2}^{1/2} H_0(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu = \int_{-\nu_c}^{\nu_c} e^{j2\pi\nu k} d\nu = \int_{-\nu_c}^{\nu_c} \frac{e^{j2\pi\nu k} d(j2\pi k\nu)}{j2\pi k} =$$

$$= \frac{1}{\pi k} \frac{e^{j2\pi\nu_c k} - e^{-j2\pi\nu_c k}}{2j} = \frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k}.$$

Заметим, что $h_l[k]$ некаузальна (не обращается тождественно в нуль при $k < 0$). Это означает, что идеальный фильтр нижних частот физически не реализуем в системе реального времени. Последовательность $h_l[k]$ не является абсолютно суммируемой, члены последовательности стремятся к нулю не быстрее, чем $1/k$. А это означает, что ИФНЧ неустойчив по входу.

Идеальный фильтр верхних частот, идеальный полосовой фильтр

Идеальный фильтр верхних частот



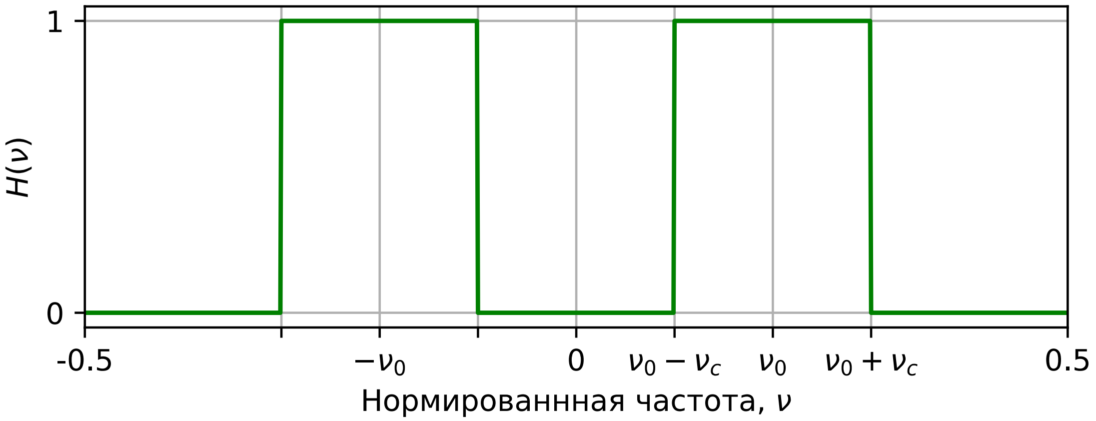
Для идеального фильтра верхних частот полоса $[-\nu_c,\nu_c]$ называется полосой задерживания (по этой причине в англоязычной литературе ФВЧ называется highpass filter). Частотная характеристика равна на промежутке $[-0.5;0.5]$

$$H_h(\nu)=\begin{cases}0, |\nu|\le\nu_c,\\ 1, \nu_c<|\nu|\le 0.5,\end{cases} \quad \text{при } |\nu|\le 0.5.$$

Поскольку $H_h(\nu)=1-H_0(\nu)$, импульсная характеристика такого фильтра

$$h_h[k]=\mathbf{1}[k]-h_l[k]=\mathbf{1}[k]-\frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k}.$$

Идеальный полосовой фильтр



Для идеального полосового фильтра некоторый диапазон частот $[\nu_1,\nu_2]\subset[0,0.5]$ является полосой пропускания (bandpass filter). Пусть $[\nu_1,\nu_2]=[\nu_0-\nu\ ,\nu_0+\nu\ ]$. Тогда частотная характеристика равна на промежутке $[-0.5;0.5]$

$$H_{bp}(\nu)=\begin{cases}1, |\nu\pm\nu_0|\le\nu_c,\\ 0, |\nu\pm\nu_0|>\nu_c,,\end{cases} \quad \text{при } |\nu|\le 0.5.$$

В итоге $H_{bp}(\nu)=H_0(\nu-\nu_0)+H_0(\nu+\nu_0)$. Используя свойства ДВПФ, получаем выражение для импульсной характеристики такого фильтра

$$h_h[k]=2\cos(2\pi\nu_0 k)h_l[k]=2\cos(2\pi\nu_0 k)\frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k}.$$

Идеальный режекторный фильтр, каузальная аппроксимация ИФНЧ

Для идеального режекторного фильтра некоторый диапазон частот $[\nu_1,\nu_2]\subset[0,0.5]$ является полосой задерживания (bandstop filter). Пусть $[\nu_1,\nu_2]=[\nu_0-\nu\ ,\nu_0+\nu\ ]$. Тогда частотная характеристика равна на промежутке $[-0.5;0.5]$

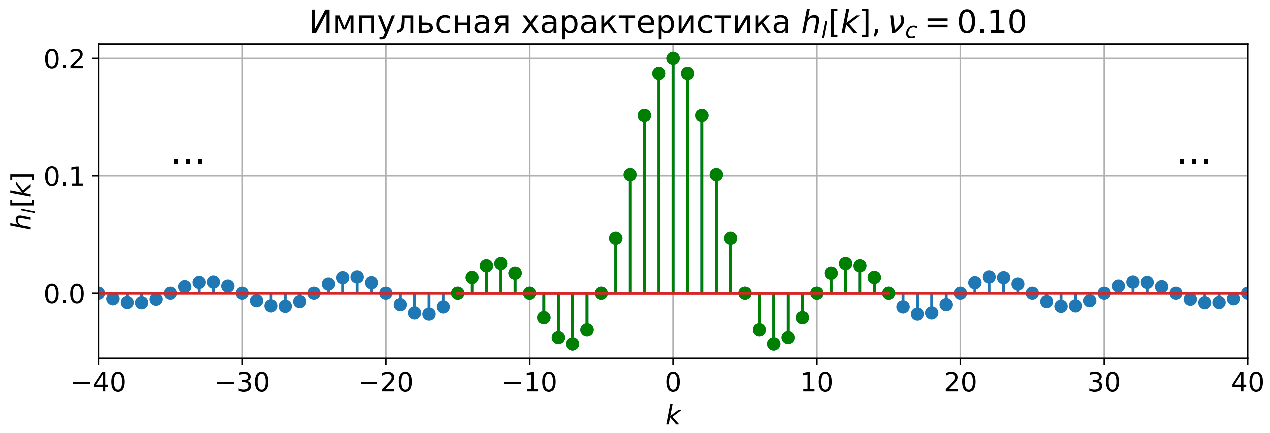
$$H_{bs}(\nu)=\begin{cases}0, |\nu\pm\nu_0|\le\nu_c,\\ 1, |\nu\pm\nu_0|>\nu_c,,\end{cases}\quad \text{при } |\nu|\le 0.5.$$

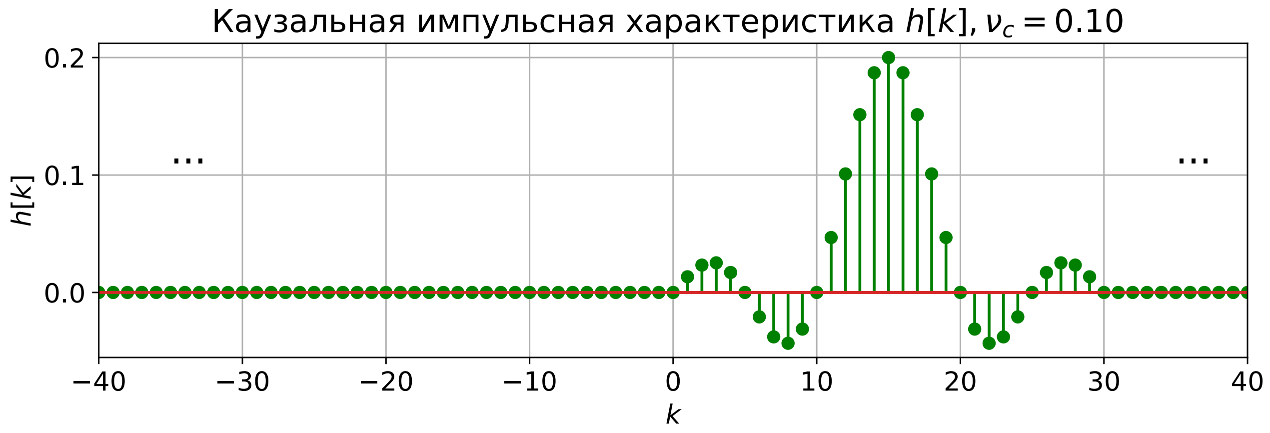
Реализация каузальной аппроксимации ИФНЧ

Возьмём из импульсной характеристики лишь $2N+1$ отсчет (от $-N$ до N), и двинем ее на N вправо. Мы получим импульсную характеристику

$$h[k]=\begin{cases}\dfrac{\sin(2\pi\nu_c(k-N))}{\pi(k-N)}, & \text{при } |k-N|\ \le N,\\ 0, & \text{при } |k-N|\ >N,\end{cases}$$

которая соответствует КИХ-фильтру (он будет устойчив и реализуем).





Явление Гиббса

Частотная характеристика: сходимость в среднеквадратичном и явление Гиббса

Частотная характеристика усеченного ФНЧ **до введения задержки** определяется как ДВПФ от импульсной характеристики

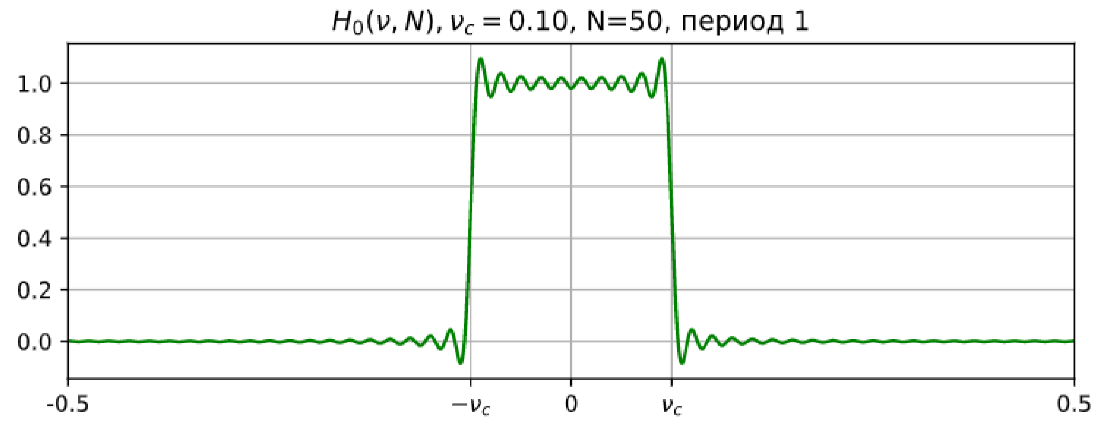
$$H_0(\nu, N) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k} e^{-j2\pi\nu k}.$$

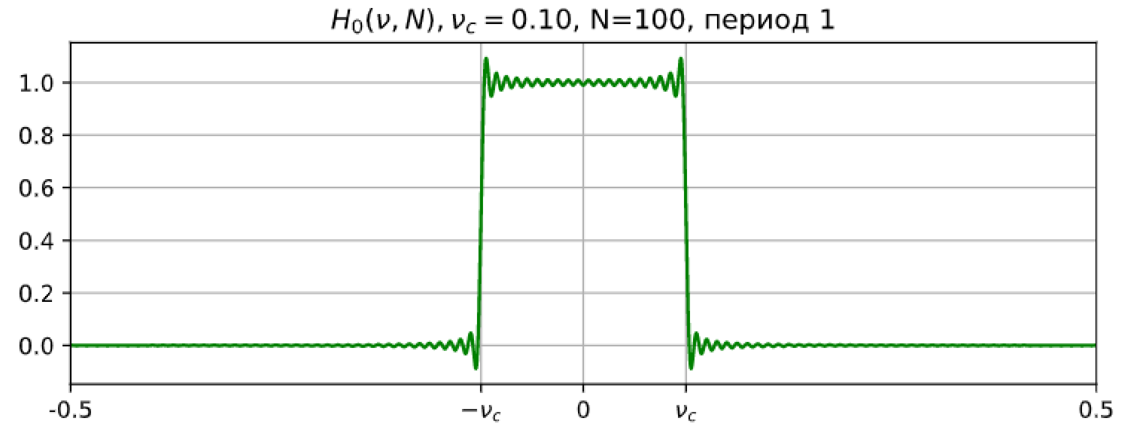
В силу симметрии исходной импульсной характеристики относительно нуля, $H_0(\nu, N)$ принимает лишь действительные значения. В соответствии с теоремой запаздывания частотная характеристика $H(\nu)$ рассматриваемого каузального фильтра отличается от $H_0(\nu, N)$ лишь фазовой частью: $H(\nu) = H_0(\nu, N)e^{-j2\pi\nu N}$.

$$H_0(\nu, N) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k} e^{-j2\pi\nu k}.$$

$H_0(\nu, N)$ сходится к $H_0(\nu)$ в среднеквадратичном:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \left|H_0(\nu) - H_0(\nu, N)\right|^2 d\nu = 0.$$

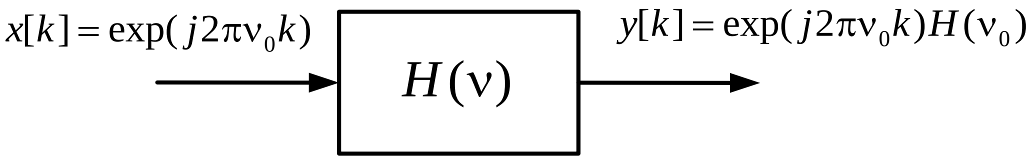




Даже достаточно больших N мы наблюдаем пульсации вблизи точек разрыва $H_0(\nu)$, причем они принципиально не устранимы с ростом N. Этот эффект называется явлением Гиббса.

Фильтрация гармонических сигналов идеальными фильтрами

Фильтрация гармонических сигналов идеальными фильтрами



$$y[k]=\exp(j2\pi\nu_0 k)\otimes h[k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[k-m]=$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\exp(j2\pi\nu_0(k-m))=$$

$$=\exp(j2\pi\nu_0 k)\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\exp(-j2\pi\nu_0 m)=\exp(j2\pi\nu_0 k)H(\nu_0)$$

Пусть $H(\nu_0)=|H(\nu_0)|\exp(j\theta)=A\exp(j\theta)$.

Изменение амплитуды

- при $A>1$происходит усиление сигнала,
- при $0\le A<1$ происходит ослабление.

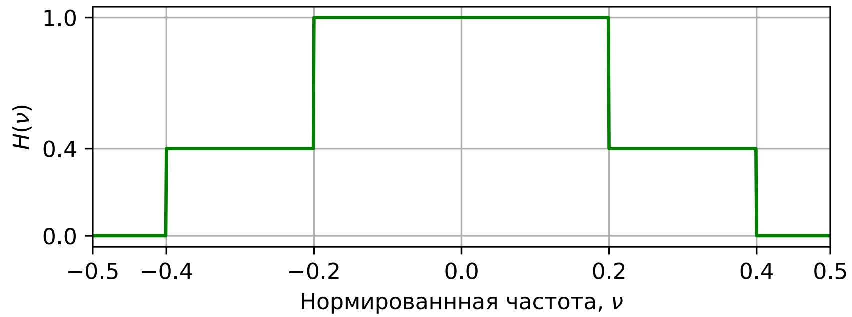
Изменение фазы

- при $\theta<0$ происходит задержка по фазе,
- при $\theta=0$ задежки нет.

Реальные фильтры – каузальные системы, а значит обрабатывают каузальные сигналы.

Пример. Найдем отклик фильтра частотной характеристикой $H(\nu)$ на входное воздействие

$$x[k]=\cos(2\pi\nu_1 k)+\cos(2\pi\nu_2 k), \nu_1=0.1, \nu_2=0.3.$$



Используя вывод, полученный выше, получаем

$$y[k]=H(\nu_1)\cos(2\pi\nu_1 k)+H(\nu_2)\cos(2\pi\nu_2 k)=$$
$$=\cos(2\pi\nu_1 k)+0,4\cos(2\pi\nu_2 k)$$

С другой стороны, спектр входного сигнала:

$$X(\nu)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\delta(\nu-\nu_1+m)+\frac{1}{2}\delta(\nu+\nu_1+m)+$$
$$+\frac{1}{2}\delta(\nu-\nu_2+m)+\frac{1}{2}\delta(\nu+\nu_2+m)$$

Фильтрация гармонических сигналов идеальными фильтрами

Спектр выходного сигнала (отклика) равен произведению спектра входного и частотной характеристики фильтра

$$Y(\nu)=X(\nu)H(\nu)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[k-m] \overset{\text{ДВПФ}}{\longleftrightarrow} X(\nu)H(\nu).$$

$$Y(\nu)=X(\nu)H(\nu)$$

Спектр сигнала на выходе системы:

$$Y(\nu)=X(\nu)H(\nu)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} H(\nu_1)\frac{1}{2}\delta(\nu-\nu_1+m)+H(-\nu_1)\frac{1}{2}\delta(\nu+\nu_1+m)+$$

$$+H(\nu_2)\frac{1}{2}\delta(\nu-\nu_2+m)+H(-\nu_2)\frac{1}{2}\delta(\nu+\nu_2+m)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} 0{,}5\ \delta(\nu-\nu_1+m)+0{,}5\ \delta(\nu+\nu_1+m)+$$

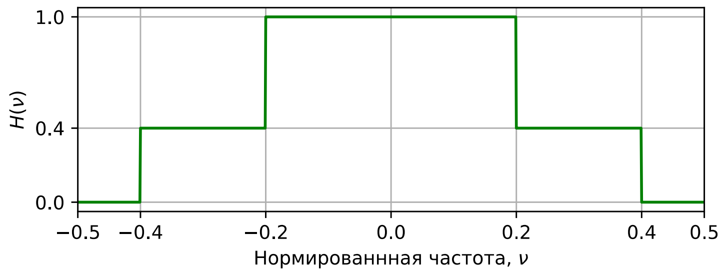
$$+0{,}2\ \delta(\nu-\nu_2+m)+0{,}2\ \delta(\nu+\nu_2+m)$$

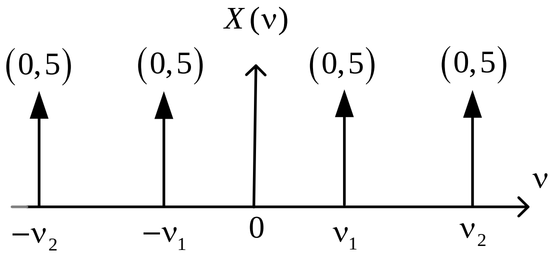
Используя свойство

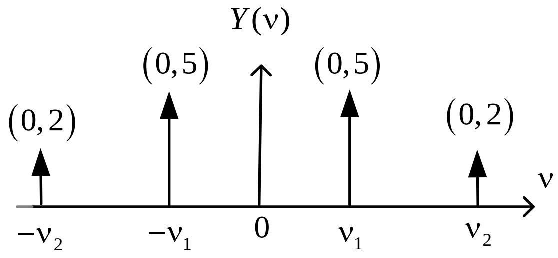
$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right), -\infty<k<+\infty \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu-\nu_0-n\right),$$

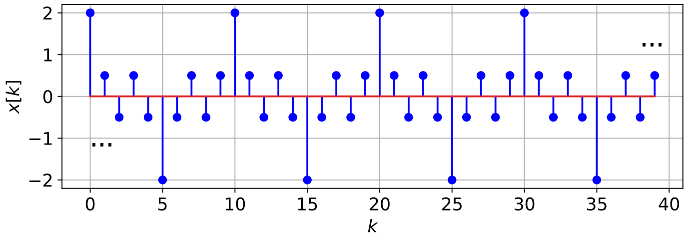
обратным ДВПФ получаем отклик системы

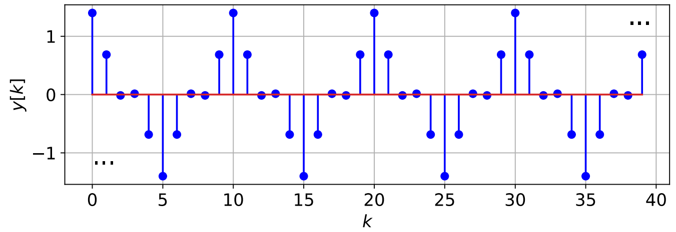
$$y[k]=\cos(2\pi\nu_1 k)+0{,}4\cos(2\pi\nu_2 k)$$











Задачи для самостоятельного решения

с лекции 14 октября 2024 г.

№1. Используя теорему о свертке во временной области для ДВПФ, определите линейную дискретную свертку последовательностей

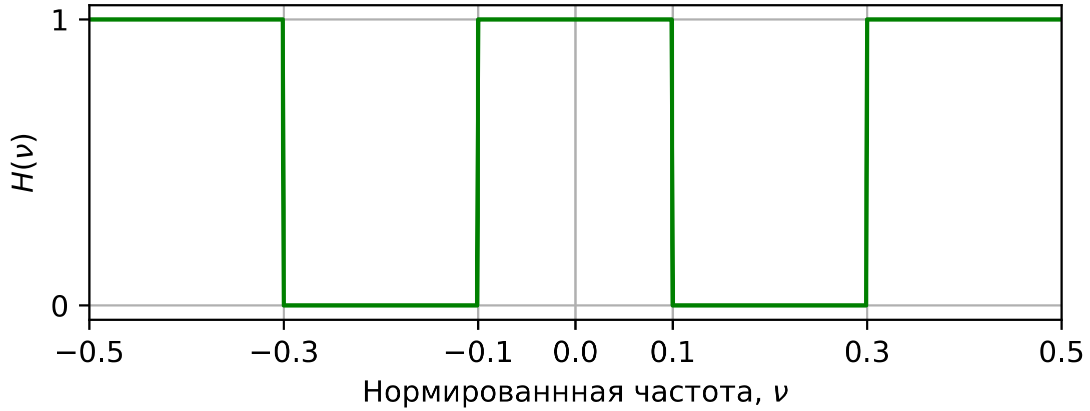
$$h[k] = \frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k}, \nu_c = 0.2,$$

$$x[k] = \cos(2\pi\nu_1 k) + \cos(2\pi\nu_2 k), \nu_1 = 0.1, \nu_2 = 0.3.$$

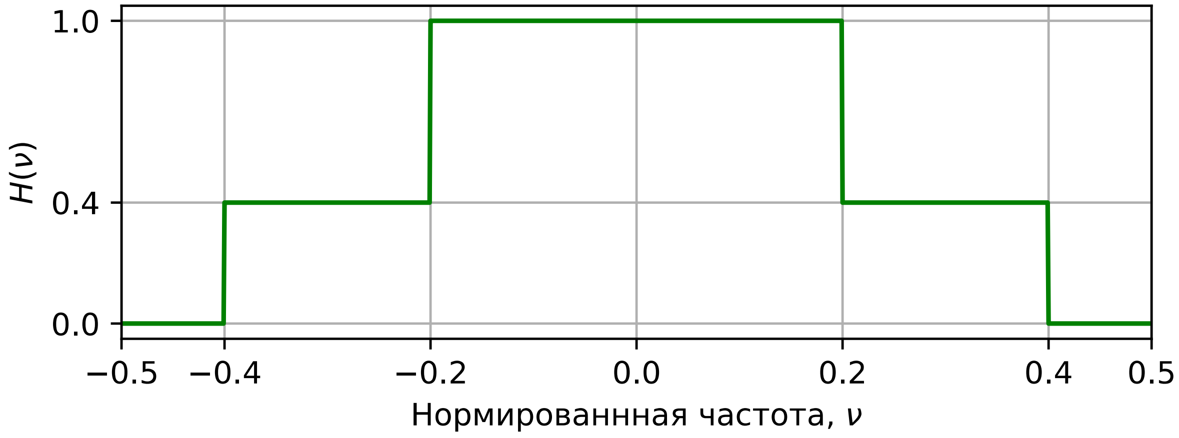
Интерпретируйте результат как прохождения сигнала $x[k]$ через фильтр с импульсной характеристикой $h[k]$. Является ли такой фильтр $h[k]$ физически реализуемым в реальном времени?

№2. Запишите импульсные характеристики перечисленных ниже фильтров. Являются ли такие фильтры физически реализуемыми в реальном времени?

а) Идеальный режекторный фильтр, частотная характеристика которого изображена на рисунке.



б) Идеальный фильтр с нулевой фазовой задержкой, частотная характеристика которого изображена на рисунке.



Задачи с лекции

№3. Определить реакцию на входное воздействие

$$x[k]=\cos(2\pi\nu_1 k)+\cos(2\pi\nu_2 k), \nu_1=0.1, \nu_2=0.3.$$

системы с нулевой фазовой задержкой и амплитудно-частотной характеристикой, изображённой на рисунке (частотная характеристика принимает неотрицательные значения).