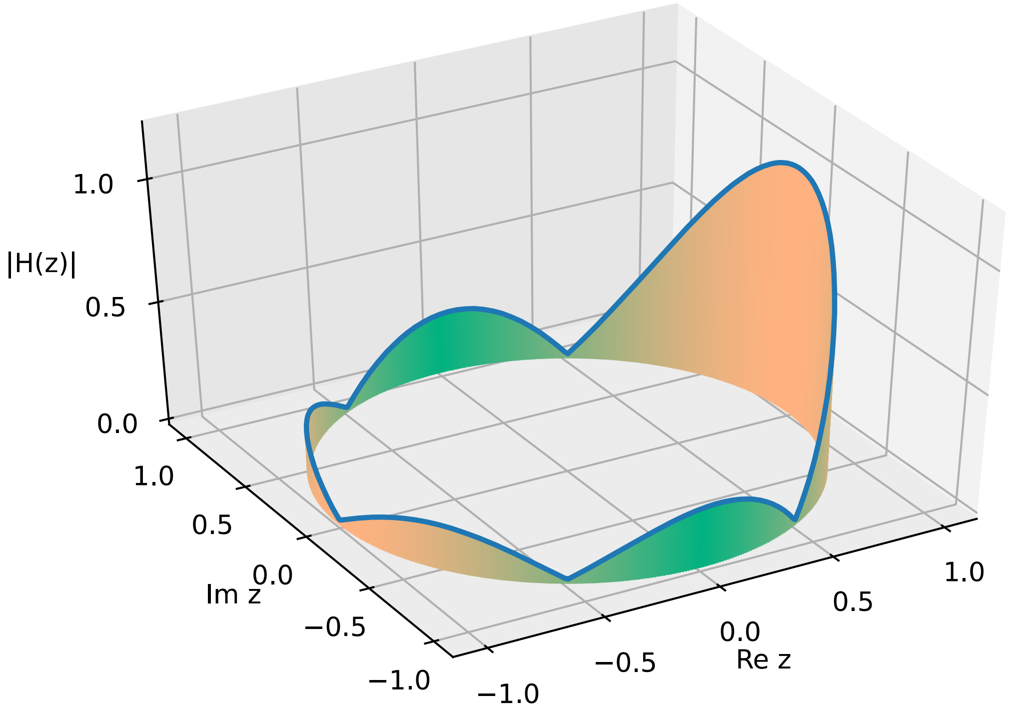
Лекция 9 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»

28 октября 2024 г.

4.4. Применение *z*-преобразования для анализа цифровых фильтров.

- Определение двухстороннего *z*-преобразования
- Передаточная функция дискретной LTI системы
- Связь ДВПФ и *z*-преобразования
- Передаточная функция и частотные характеристики системы
- Передаточная функция и разностное уравнение системы
- Нуль-полюсная диаграмма и критерий устойчивости по входу
- Вычисление АЧХ и ФЧХ методом геометрических построений



Определение двухстороннего *z*-преобразования

Определение двухстороннего *z*-преобразования

Рассмотрим дискретный сигнал $x[k]$, $-\infty < k < \infty$.

В общем виде <u>двухстороннее</u> прямое и обратное *z*-преобразование для сигнала $x[k]$ определяются парой формул:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, z^{-k},$$

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z)\, z^{k-1} dz,$$

где C – замкнутый контур в *z*-плоскости, $z \in \mathbb{C}$, охватывающий все полюса подынтегральной функции $X(z) z^{k-1}$.

Пример. Для сигнала

$$x[k] = \begin{cases} 1, \text{ при } k = -2, -1, 0, 1, 2, \\ 0, \text{ при } k \neq -2, -1, 0, 1, 2; \end{cases}$$

двустороннее *z*-преобразование имеет вид

$$X(z) = z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2$$

Из-за некаузальности сигнала полином $X(z)$ содержит положительные степени z.

Если сигнал $x[k]$ каузальный, т.е. $x[k] \equiv 0$ при $k < 0$, формула прямого *z*-преобразования (<u>одностороннее</u> *z*-преобразование) для него может быть записана в виде

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}.$$

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{k-1} dz.$$

В дальнейшем мы будем использовать именно такую форму *z*-преобразования. Это связано с тем, что мы рассматриваемом в основном системы реального времени.

Пример. Для сигнала

$$x[k] = \begin{cases} 1, \text{ при } k = 0, 1, 2, \\ 0, \text{ при } k \neq 0, 1, 2; \end{cases}$$

и одностороннее, и двустороннее *z*-преобразование имеет вид

$$X(z) = z^{-2} + z^{-1} + 1$$

Полином $X(z)$ не содержит положительных степеней z.

Передаточная функция дискретной LTI системы

Передаточная функция дискретной LTI системы

Выход дискретной LTI системы является дискретной линейной сверткой входного воздействия $x[k]$ с импульсной характеристикой $h[k]$:

$$y[k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[k-m].$$

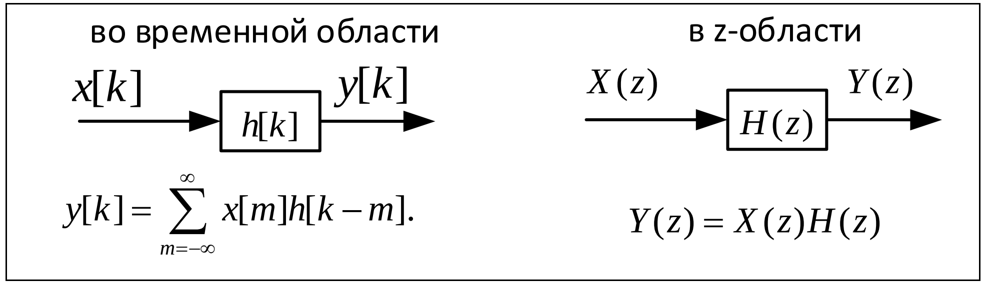
$h[k]$ — это отклик системы на единичный импульс $\mathbf{1}[k]$ при нулевой инициализации выхода для отрицательных моментов времени.

Пусть $x[k]\xleftrightarrow{Z}X(z)$, $y[k]\xleftrightarrow{Z}Y(z)$ и $h[k]\xleftrightarrow{Z}H(z)$.

Воспользовавшись теоремой о свертке для *z*-преобразования, получаем, что

$$Y(z)=X(z)H(z).$$

В итоге выход системы может быть описан с помощью *z*-образа импульсной характеристики — **передаточной функции** $H(z)$.



Заметим, что для непрерывной (во времени) линейной стационарной системы передаточная функция $H(p)$ позволяет преобразовать Лапласов образ входного $X(p)$ воздействия в Лапласов образ выхода системы $Y(p)$:

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}.$$

В свою очередь передаточная функция $H(p)$ является результатом преобразования Лапласа для импульсной характеристики $h(t)$ линейной непрерывной стационарной системы (реакции на дельта-функцию $\delta(t)$):

$$H(p)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-pt}dt.$$

Аналогично для линейной дискретной стационарной системы передаточная функция $H(z)$ позволяет преобразовать *z*–образ входного $X(z)$ воздействия в *z*–образ выхода системы $Y(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Связь ДВПФ и z-преобразования

Связь ДВПФ и *z*-преобразования

Рассмотрим формулу прямого двухстороннего *z*-преобразования

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, z^{-k}.$$

Подставим $z=\exp(j2\pi f\Delta t)$

$$X\left(e^{j2\pi f\Delta t}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp\left(-j2\pi f k\Delta t\right)$$

Получили формулу прямого ДВПФ. Таким образом, значения функции $X(z)$ на единичной окружности определяют ДВПФ последовательности отсчетов $x[k]$.

Если мы подставим $z=\exp(j2\pi\nu)$, $\nu=f\Delta t=f/f_{д}$. Получаем уже привычную нам формулу ДВПФ в нормированных частотах

$$X\left(z=e^{j2\pi\nu}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\ \exp\left(-j2\pi\nu k\right).$$

Передаточная функция и частотные характеристики системы

Из связи ДВПФ и *z*-преобразования видно, что значения передаточной функции $H(z)$, ее модуля $|H(z)|$ и $\angle H(z)$ на единичной окружности $z=\exp(j2\pi\nu)$ задают ее частотную характеристику, АЧХ и ФЧХ. По этой причине в литературе часто используют обозначение $H(e^{j\theta})$, $\theta=2\pi\nu$ для частотной характеристики системы.

$$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k}$$

$$H(e^{j2\pi\nu})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\exp\left(-j2\pi\nu k\right)$$

Частотная характеристика	$H(z)$, при $z=\exp(j2\pi\nu)$
АЧХ	$\lvert H(z)\rvert$, при $z=\exp(j2\pi\nu)$
ФЧХ	$\arg H(z)$, при $z=\exp(j2\pi\nu)$

Пример. Фильтр скользящего среднего.

Пример. Фильтр скользящего среднего.

Рассмотрим фильтр скользящего среднего

$$y[k]=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}x[k-m],\quad M=6.$$

Импульсная характеристика такой системы

$$h[k]=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\mathbf{1}[k-m].$$

z-преобразование импульсной характеристики (передаточная функция)

$$H(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}z^{-k}=\frac{1}{M}\cdot\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}$$

Частотная характеристика фильтра.

$$H(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\exp(-j2\pi\nu k)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\exp(-j2\pi\nu k)=$$

$$=\frac{1}{M}\frac{1-\exp(-j2\pi\nu M)}{1-\exp(-j2\pi\nu)}=\frac{1}{M}\frac{2j}{2j}\frac{e^{-j\pi\nu M}}{e^{-j\pi\nu}}\frac{(e^{j\pi\nu M}-e^{-j\pi\nu M})}{(e^{j\pi\nu}-e^{-j\pi\nu})}=$$

$$=\frac{1}{M}\frac{\sin(M\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\exp(-j(M-1)\pi\nu)$$

$$H(\nu)=\frac{1}{M}\exp\left(-j(M-1)\pi\nu\right)\frac{\sin(M\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)},$$

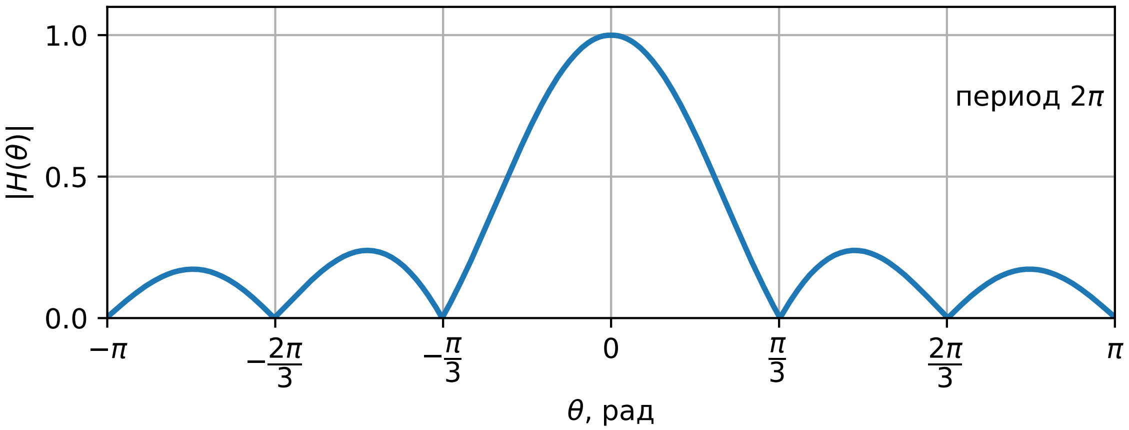
Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$A(\nu)=|H(\nu)|=\frac{1}{M}\left|\frac{\sin(M\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\right|.$$

Аналогично в переменных $\theta=2\pi\nu$ (нормированный угол в радианах).

$$H(\theta)=\frac{1}{M}\frac{\sin(M\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\exp(-j(M-1)\theta/2).$$

$$A(\theta)=|H(\theta)|=\frac{1}{M}\left|\frac{\sin(M\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right|.$$



Пример. Фильтр скользящего среднего.

$$H(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}z^{-k}=\frac{1}{M}\cdot\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}$$

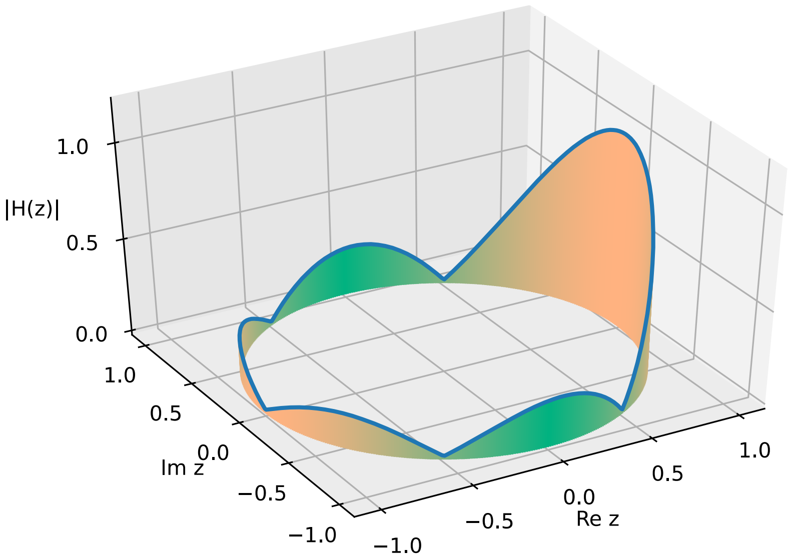
На рисунке приведены:

а) график функции $|H(z)|$ для значений на единичной окружности $z=\exp(j2\pi\nu)$;

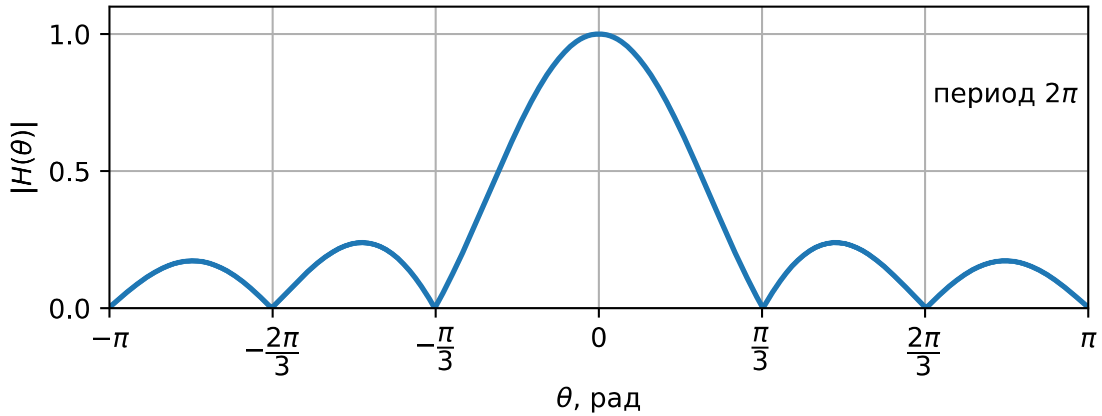
б) ДВПФ $h[k]$ в переменных $\theta=2\pi\nu$ (нормированный угол в радианах);

в) диаграмма нулей функции $H(z)$

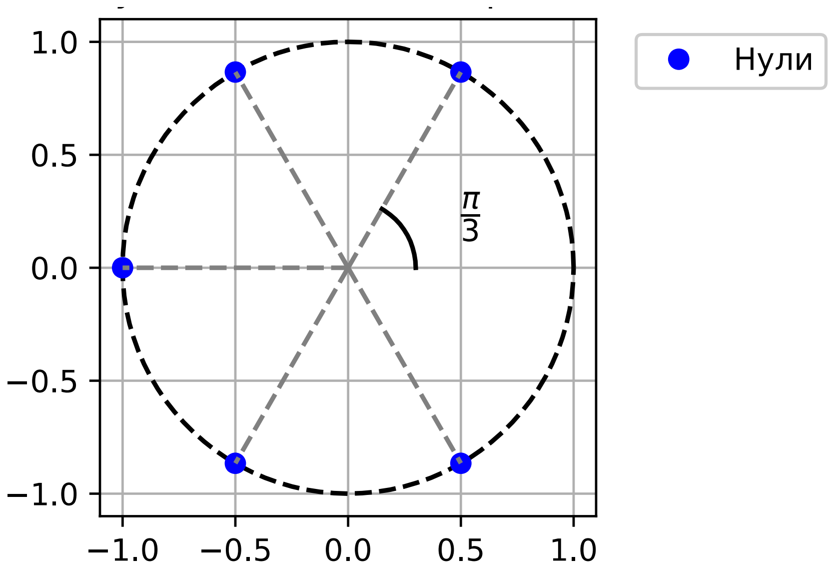
а)



б)



в)



Передаточная функция и разностное уравнение системы

№13

Передаточная функция и разностное уравнение системы

Для физически реализуемой дискретной LTI–системы разностное уравнение может быть записано в виде

$$\sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m y[k-m] = \sum_{m=0}^{N-1} \beta_m x[k-m],$$

где α_m и β_m – заданные коэффициенты, M и N – натуральные числа. Как правило, полагают $\alpha_0 = 1$.

В таком случае разностное уравнение имеет вид

$$y[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \beta_m x[k-m] - \sum_{m=1}^{M-1} \alpha_m y[k-m].$$

Пусть $x[k] \xleftrightarrow{Z} X(z)$, $y[k] \xleftrightarrow{Z} Y(z)$ и $h[k] \xleftrightarrow{Z} H(z)$.

Применим z-преобразование к левой и правой части выражения.

По теореме запаздывания для z–преобразования

$x[k-m] \xleftrightarrow{Z} X(z) z^{-m}$ и $y[k-m] \xleftrightarrow{Z} Y(z) z^{-m}$,

т.е. z^{-1} – оператор задержки на один такт дискретизации.

$$Y(z) \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m z^{-m} = X(z) \sum_{m=0}^{N-1} \beta_m z^{-m}.$$

Передаточная функция системы (комплексный коэффициент передачи)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \beta_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m z^{-m}} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \beta_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} \alpha_m z^{-m}}.$$

Эта наиболее общая форма $H(z)$ является дробно-рациональной функцией z^{-1} и часто используется при анализе и синтезе дискретных и цифровых фильтров. Для физически реализуемых фильтров в $H(z)$ степень полинома в числителе не должна превышать степени полинома в знаменателе.

Отметим, что если разностное уравнение записать в виде

$$y[k] = \sum_{m=0}^{N-1} a_m x[k-m] + \sum_{m=1}^{M-1} b_m y[k-m],$$

то передаточная функция системы

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \beta_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} \alpha_m z^{-m}} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} a_m z^{-m}}{1 - \sum_{m=1}^{M-1} b_m z^{-m}}.$$

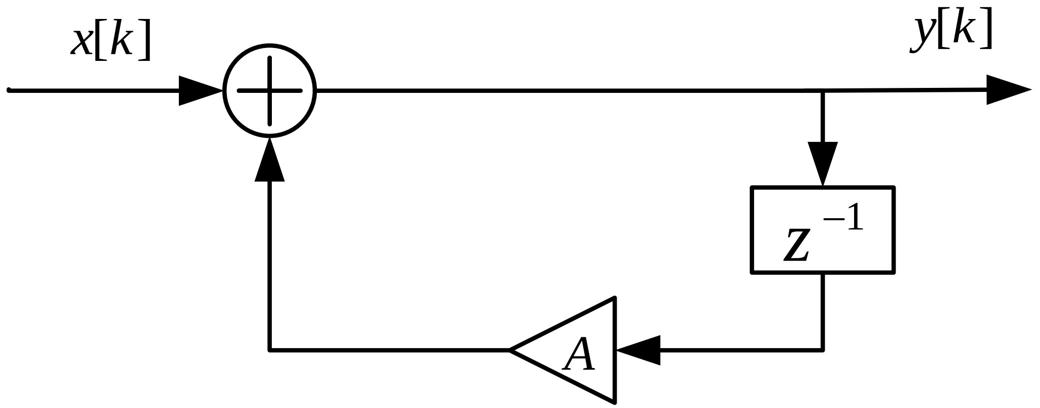
Соответствие между коэффициентами имеет вид

$\beta_m = a_m$, $m \geq 0$ (коэффициенты входного сигнала),

$\alpha_m = -b_m$, $m \geq 1$, $\alpha_0 = 1$ (коэффициенты выходного сигнала).

Передаточная функция и разностное уравнение системы

Пример.



Для системы с разностным уравнением

$$y[k]-Ay[k-1]=x[k],\ \ y[-1]=0$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}\alpha_m y[k-m]=\sum_{m=0}^{N-1}\beta_m x[k-m],$$

передаточная функция будет

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1}\beta_m z^{-m}}{\sum\limits_{m=0}^{M}\alpha_m z^{-m}}=\frac{1}{1-Az^{-1}}.$$

С помощью обратного z-преобразования находим ее импульсную характеристику $h[k]=A^k u[k]$.

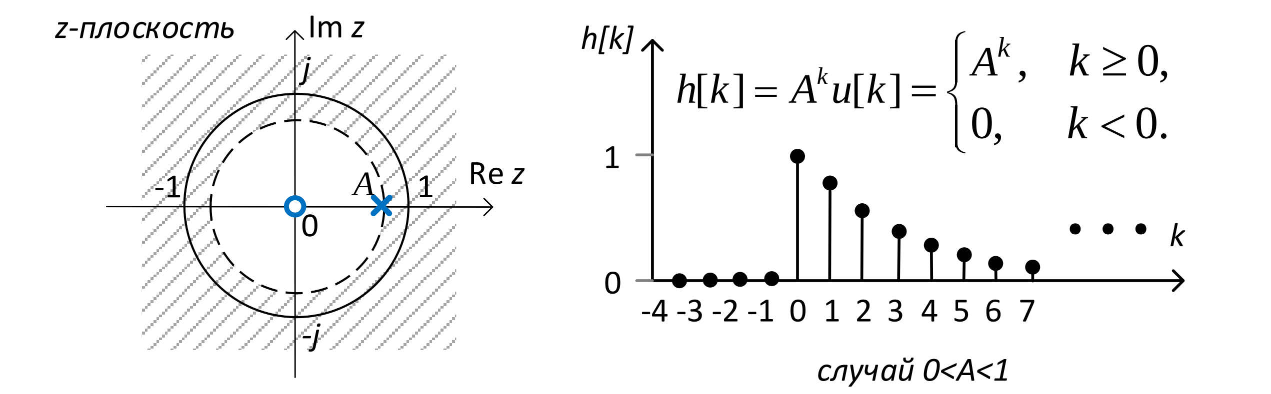
Тот же результат мы получим, если поставим в разностное уравнение

$$y[k]=Ay[k-1]+x[k],\ \ y[-1]=0$$

сигнал $x[k]=\mathbf{1}[k]$ и найдем отсчеты импульсной характеристики $h[k]=y[k]$:

$$h[-1]=0,\quad h[0]=1,\quad h[1]=A,\quad h[2]=A^2,$$

$$h[k]=A^k \text{ при } k\geq 0, \text{ т.е. } h[k]=A^k u[k].$$



Заметим, что условие $|A|<1$ также является критерием абсолютной суммируемости $h[k]$, и, следовательно, устойчивости такой системы. Это эквивалентно тому, что единственный полюс передаточной функции $z_p=A$ находится внутри единичной окружности.

N10

Нуль-полюсная диаграмма и критерий устойчивости по входу

Критерий устойчивости каузальной дискретной LTI системы имеет следующий вид:

Каузальная дискретная LTI система устойчива по входу тогда и только тогда, когда все несократимые полюса ее передаточной функции $H(z)$ лежат строго внутри единичного круга $|z|<1$, т.е. область сходимости $H(z)$ содержит единичную окружность.

Пример. Исследовать на устойчивость дискретный фильтр, заданный разностным уравнением

$$x[k]+2x[k-1]+x[k-2]=y[k]-\frac{3}{2}y[k-1]+\frac{1}{2}y[k-2],$$

$$y[-1]=y[-2]=0.$$

Способ 1 (анализ расположения полюсов $H(z)$).

$$\sum_{m=0}^{M-1}\alpha_m y[k-m]=\sum_{m=0}^{N-1}\beta_m x[k-m],$$

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{N-1}\beta_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^{M}\alpha_m z^{-m}}.$$

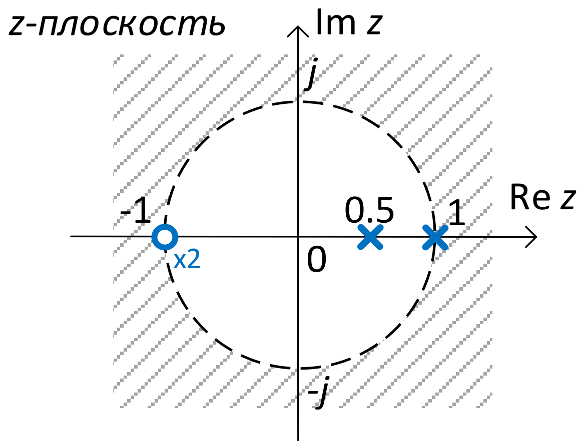
Передаточная функция такого фильтра

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{\left(1+z^{-1}\right)^2}{(1-0,5z^{-1})(1-z^{-1})}.$$

$$H(z)=\frac{\left(1-z_{n1}z^{-1}\right)^2}{(1-z_{p1}z^{-1})(1-z_{p2}z^{-1})}.$$

Она имеет полюса в точках $z_{p1}=0,5$, $z_{p2}=1$ и двукратный нуль $z_{n1}=-1$. Область сходимости определена неравенством $|z|>1$. В область сходимости не входит единичная окружность, а значит система неустойчива.

Нуль-полюсная диаграмма и критерий устойчивости по входу



Способ 2 (проверка абсолютной суммируемости $h[k]$).

Для нахождения импульсной характеристики $h[k]$ применим метод простейших дробей. Кратность полюсов равна 1, поэтому $H(z)$ можно представить в виде:

$$H(z) = B_0 + \frac{A_1}{1-0,5z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}} = B_0 + \frac{A_1(1-z^{-1}) + A_2(1-0,5z^{-1})}{(1-0,5z^{-1})(1-z^{-1})}$$

Константу B_0 ищем делением в столбик:

$$\begin{array}{r|l} -\;z^{-2}+2z^{-1}+1 & 0,5z^{-2}-1,5z^{-1}+1 \\ \underline{z^{-2}-3z^{-1}+2} & \overline{\quad 2 \quad} \\ 5z^{-1}-1 & \end{array}$$

Получаем, что $B_0 = 2$ и

$$H(z) = 2 + \frac{-1+5z^{-1}}{\left(1-0,5z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

Поскольку оба полюса имеют кратность 1, находим коэффициенты A_1 и A_2.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -1, \\ -A_1 - 0,5A_2 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -9, \\ A_2 = 8. \end{cases}$$

Следовательно,

$$H(z) = 2 - \frac{9}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{8}{\left(1-z^{-1}\right)}.$$

$$2 \overset{z}{\longleftrightarrow} 2\cdot\mathbf{1}[k],$$

Нуль-полюсная диаграмма и критерий устойчивости по входу

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \xleftrightarrow{z} 0{,}5^k u[k],$$

$$\frac{1}{1-z^{-1}} \xleftrightarrow{z} u[k].$$

Искомая последовательность

$$h[k] = 2\cdot \mathbf{1}[k] - 9\cdot 0{,}5^k u[k] + 8u[k].$$

Видно, что

$$\lim_{k\to+\infty} h[k] = \lim_{k\to+\infty}\left(8-\frac{9}{2^k}\right) = 8,$$

а значит, импульсная характеристика не является абсолютно суммируемой:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|h[k]\right| = \infty.$$

Система неустойчива.

Пример. Простой дискретный дифференциатор.

Пример. Простой дискретный дифференциатор.

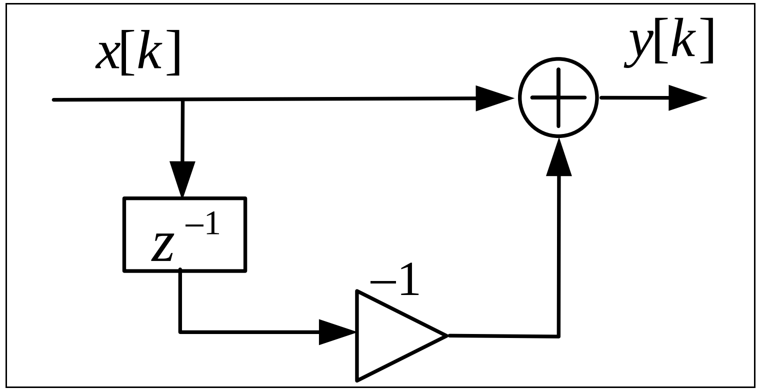
Поскольку единственная информация о сигнале $x(t)$ – его значения в дискретные моменты времени, то производная должна оцениваться по этим значениям:

$$\hat{x}'(k\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}[x(k\Delta t) - x((k-1)\Delta t)].$$

Полагая $\Delta t = 1$, приходим к разностному уравнению простого дифференциатора:

$$y[k] = x[k] - x[k-1],$$

которому соответствует блок-схема на рисунке.



Блок z^{-1} соответствует задержке на один такт дискретизации. Передаточная функция дифференциатора:

$$H(z) = 1 - z^{-1}.$$

Фильтр не имеет ненулевых полюсов, всегда устойчив.

Если $x[k] = \mathbf{1}[k]$, то $y[k] = h[k]$.

Поэтому импульсная характеристика простого дифференциатора имеет вид:

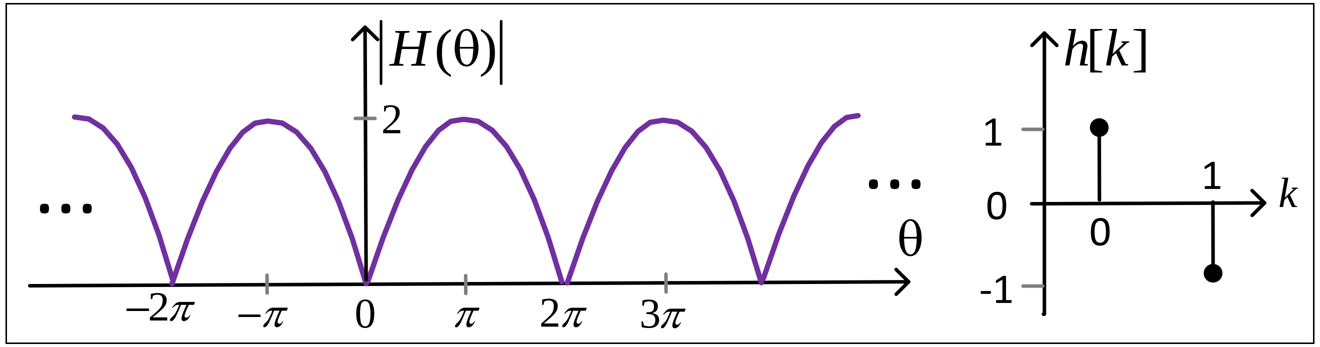
$$h[k] = \mathbf{1}[k] - \mathbf{1}[k-1].$$

Это пример КИХ-фильтра. Его частотная характеристика

$$H(\theta) = 1 - \exp(-j\theta) = 2j\exp\left(-j\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) простого дифференциатора

$$|H(\theta)| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$



Пример. Дискретный накопитель (сумматор).

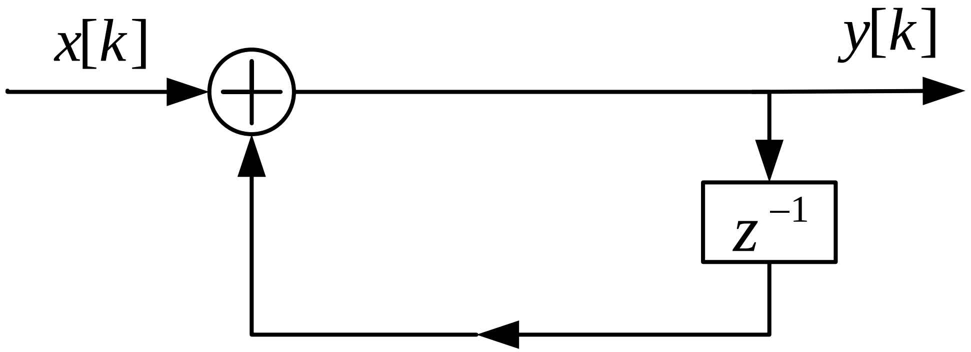
Пример. Дискретный накопитель (сумматор).

Рассмотрим фильтр

$$y[k]=Ay[k-1]+x[k],\ \ y[-1]=0$$

при $A=1$. В каком случае фильтр будет представлять собой рекурсивную реализацию сумматора:

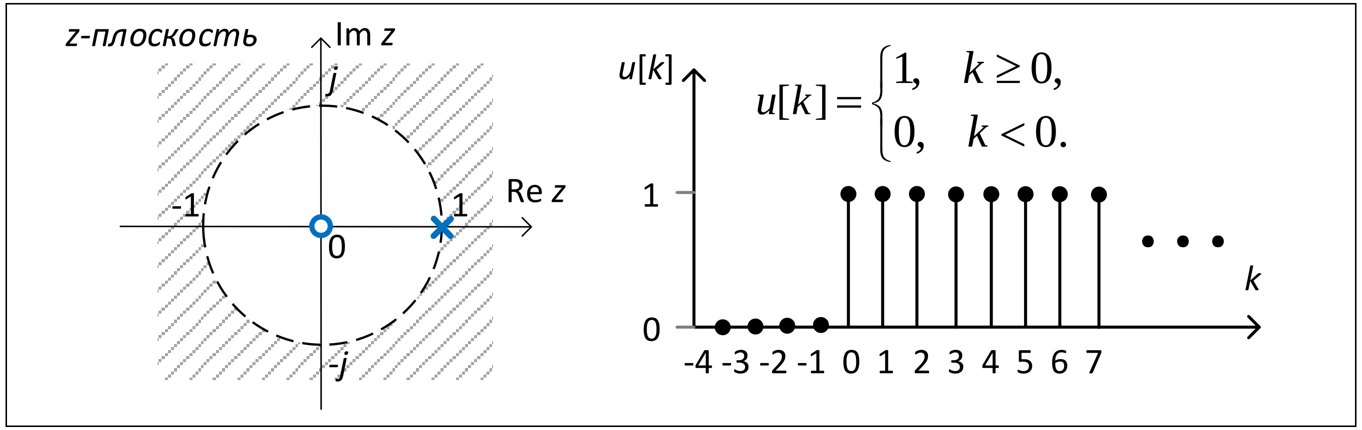
$$y[k]=y[k-1]+x[k],\ \ y[-1]=0.$$



Выходной сигнал в нем равен сумме отсчетов входного сигнала в текущий и предшествующие моменты времени (при условии, что входной сигнал начинает действовать в нулевой момент времени). Импульсная характеристика такой системы

$$h[k]=u[k]=\begin{cases}1, & k\geq 0,\\ 0, & k<0,\end{cases}$$

не является абсолютно суммируемой, и фильтр неустойчив.



Передаточная функция цифрового интегратора

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

имеет полюс в точке $z=1$, фильтр неустойчивый.

Однако цифровой накопитель работоспособен[1] и используется в тех случаях, когда входной сигнал действует в течение ограниченного интервала времени, например, когда $0\leq k\leq N-1$, после чего следует сброс, т. е. восстанавливаются нулевые начальные условия.

[1] Неустойчивый фильтр неработоспособен в том случае, когда входной сигнал действует неограниченно долго, т. к. в конце концов, выходной сигнал перестанет зависеть от входного. Однако он работоспособен и используется в тех случаях, когда входной сигнал действует в течение ограниченного интервала времени.

Рекурсивные и трансверсальные фильтры.

Рекурсивные и трансверсальные фильтры.

Как было показано ранее, разностное уравнение цифрового фильтра имеет вид

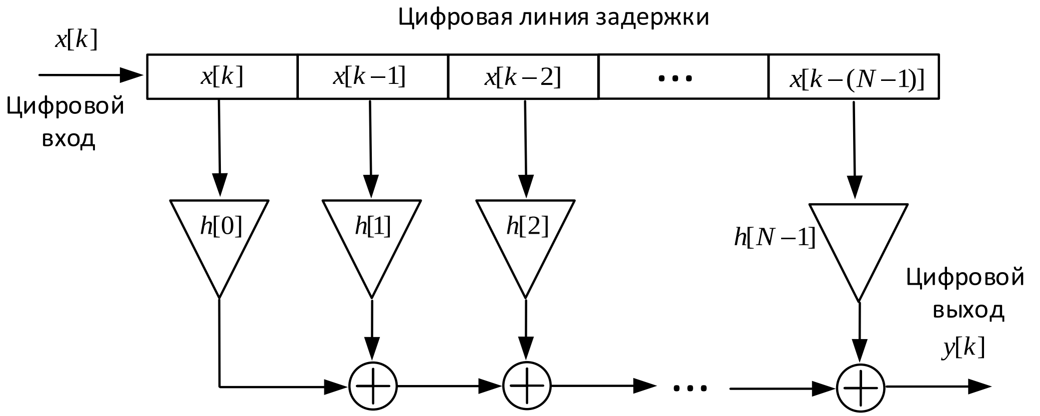
$$y[k]=\sum_{m=0}^{N-1}\beta_m x[k-m]-\sum_{m=1}^{M}\alpha_m y[k-m].$$

Если в разностном уравнении присутствуют значения $\alpha_m,\ m\geq 1$, отличные от нуля, то такой фильтр будет рекурсивным. Иными словами, значение на выходе рекурсивного фильтра определяется значениями на входе и значениями на выходе в предшествующие моменты времени.

Если отклик фильтра зависит только от входных отсчетов (текущего и предыдущих), то фильтр является трансверсальным (нерекурсивным). В таком случае $\alpha_m=0,\ \forall m\geq 1$. Соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$y[k]=\sum_{m=0}^{N-1}\beta_m x[k-m]=\sum_{m=0}^{\infty}h[m]x[k-m].$$

Это означает, что β_m – отсчеты импульсной характеристики, $\beta_m=h[m]$. Трансверсальный фильтр является КИХ-фильтром, однако КИХ-фильтры допускают и рекурсивную реализацию.



Реализация трансверсального фильтра с цифровой линией задержки показана на рисунке. Входной сигнал поступает на N– каскадную линию задержки (регистр сдвига), где числа сдвигаются на один каскад каждые Δt секунд под воздействием тактового импульса. С отводов регистра отсчёты $x[k-m]$, поступающие с отводов регистра, умножаются на весовые коэффициенты фильтра $h[m]$ и после суммирования формируются выходные отсчёты $y[k]$. Следует отметить, что фильтр может обрабатывать бесконечный поток входных данных, при этом отклик $y[k]$ в момент $t=k\Delta t$ будет определяться содержимым его регистра в этот момент, т. е. отсчётами входного сигнала $x[k-N+1],\ x[k-N+2],\ldots,\ x[k]$.

Вычисление АЧХ и ФЧХ методом геометрических построений

Для большинства дискретных систем передаточную функцию можно выразить через ее полюсы и нули. Разлагая полиномы в числителе и знаменателе $H(z)$ на множители, получаем

$$H(z)=K\frac{\prod_{q=0}^{N-1}\left(z-z_{nq}\right)}{\prod_{m=1}^{M}\left(z-z_{pm}\right)},$$

где K – коэффициент усиления, z_{nq} – нули, а z_{pm} – полюса $H(z)$. Если в это выражение подставить $z=\exp\left(j\theta_0\right)$ и обозначить

$$\exp\left(j\theta_0\right)-z_{nq}=L_{nq}\exp\left(j\varphi_{nq}\right),\ L_{nq}\geq 0,\ q=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1;$$

$$\exp\left(j\theta_0\right)-z_{pm}=L_{pm}\exp\left(j\varphi_{pm}\right),\ L_{pm}\geq 0,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ M.$$

то

$$H\left(\theta_0\right)=K\frac{\prod_{q=0}^{N-1}L_{nq}\exp\left(j\varphi_{nq}\right)}{\prod_{m=1}^{M}L_{pm}\exp\left(j\varphi_{pm}\right)}=L\left(\theta_0\right)e^{j\varphi\left(\theta_0\right)},$$

где

$$L\left(\theta_0\right)=K\frac{\prod_{q=0}^{N-1}L_{nq}}{\prod_{m=1}^{M}L_{pm}},\qquad \varphi\left(\theta_0\right)=\sum_{q=0}^{N-1}\varphi_{nq}-\sum_{m=1}^{M}\varphi_{pm}.$$

Для определения амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик дискретного фильтра на плоскости z наносятся положения нулей и полюсов передаточной функции.

Пусть $K>0$. Тогда амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) в точке θ_0 равна

$$\left|H\left(\theta_0\right)\right|=L\left(\theta_0\right)=K\frac{\prod_{q=0}^{N-1}L_{nq}}{\prod_{m=1}^{M}L_{pm}},$$

а фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$$\varphi\left(\theta_0\right)=\sum_{q=0}^{N-1}\varphi_{nq}-\sum_{m=1}^{M}\varphi_{pm}.$$

Пример. Вычисление АЧХ и ФЧХ методом геометрических построений.

Дискретная LTI система имеет передаточную функцию

$$H(z)=\frac{5+5z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}}=\frac{5(z+1)}{z-0{,}5}.$$

Определить значение АЧХ и ФЧХ в точке $\nu_0=\frac{1}{6}$.

Решение.

В данном случае требуется определить значение АЧХ и ФЧХ для частоты $\theta_0=2\pi\nu_0=2\pi\frac{1}{6}=\frac{\pi}{3}$.

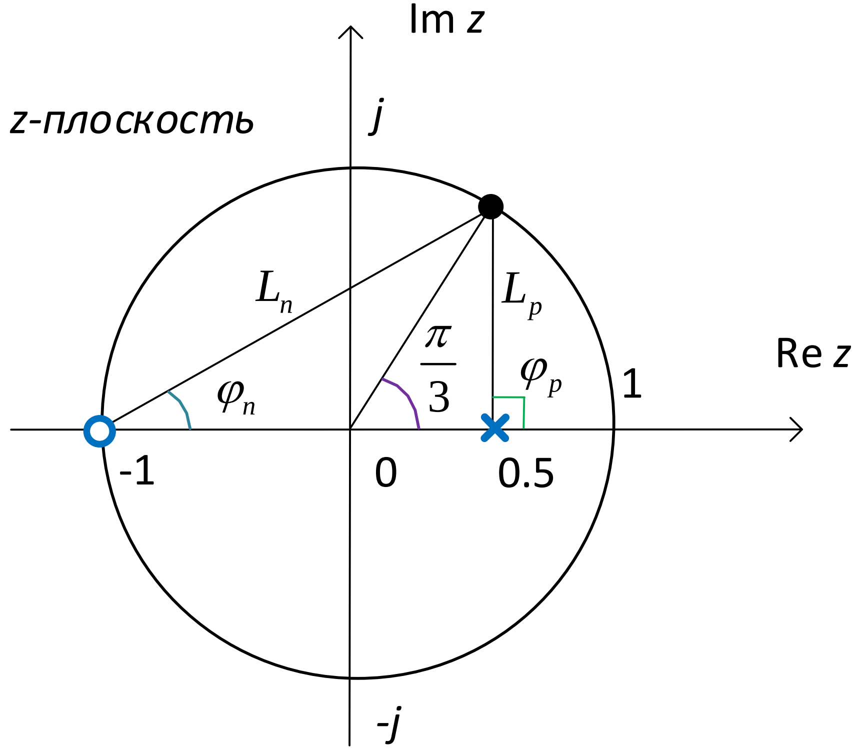
$$H(z)=K\frac{\prod\limits_{q=0}^{N-1}\left(z-z_{nq}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{M}\left(z-z_{pm}\right)},$$

Система имеет один полюс $z_p=0{,}5$ и один нуль $z_n=-1$.

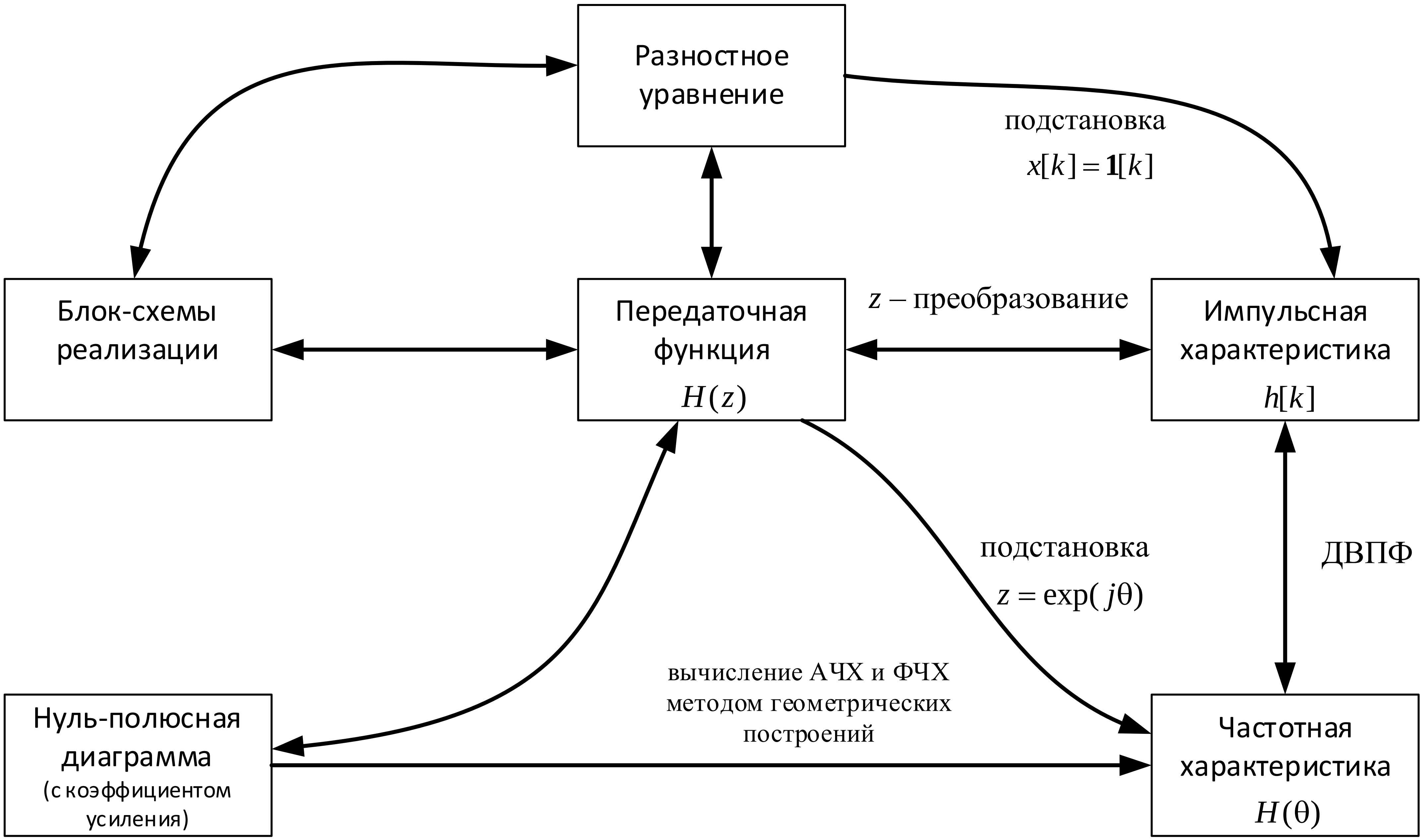
Соответствующий коэффициент усиления $K=5$. Выполним геометрические построения.

$$\varphi(\nu_0)=\varphi_n-\varphi_p=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3},$$

$$\left|H(\nu_0)\right|=K\frac{L_n}{L_p}=5\frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=10.$$



Связи между различными характеристиками и описаниями LTI системы



Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения с лекции 28 октября 2024 г.

№ 1. Пусть двухстороннее z-преобразование дискретного сигнала $x[k]$ имеет вид

$$X(z) = (z^2 + 2z + 1) / z.$$

Найти ненулевые отсчётные значения этого сигнала. Определить, является ли такой сигнал каузальным.

№2. Найти импульсную характеристику $h[k]$ фильтра с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}},$$

воспользовавшись

1) вычислением обратного z-преобразования;

2) реакцией на единичный импульс $\mathbf{1}[k]$ при начальном условии $y[-1] = 0$.

Сравнить результаты. Исследовать фильтр на устойчивость. Методом геометрических построений определить значения АЧХ и ФЧХ фильтра в точке $\nu_0 = \frac{1}{4}$.

№ 3. Рассмотрите рекурсивный фильтр, заданный разностным уравнением

$$y[k] = (1-\lambda)x[k] + \lambda y[k-1],\ y[-1] = 0.$$

При $\lambda \approx 1, \lambda < 1$ эта система является квазиинтегратором (leaky integrator). Определите импульсную характеристику этой системы и исследуйте систему на устойчивость для случаев $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0,9$. Постройте блок-схему для реализации данной системы.