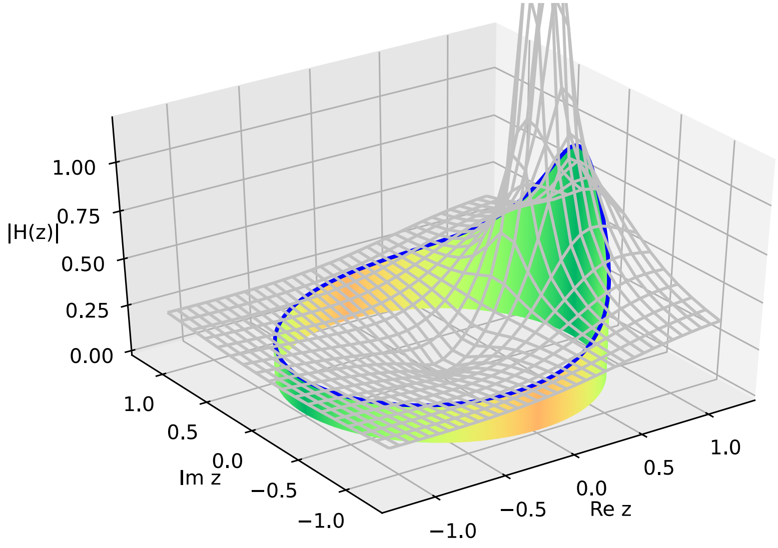
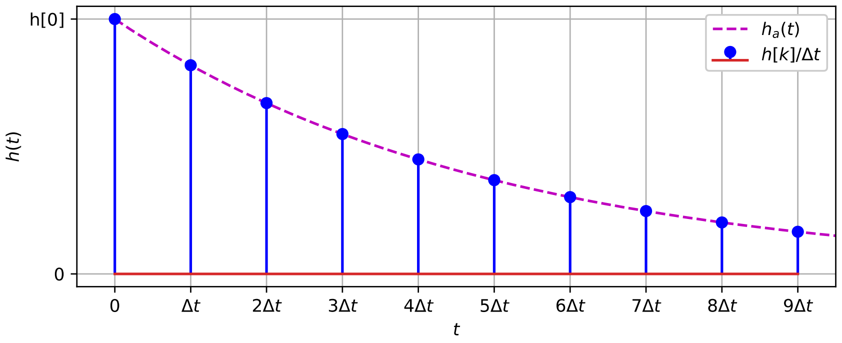
Лекция 11 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»
11 ноября 2024 г. (часть 2)

4.6. Синтез БИХ–фильтров

- Метод размещения нулей и полюсов
- Метод инвариантной импульсной характеристики
- Метод билинейного z-преобразования





Метод размещения нулей и полюсов.

В этом разделе на примерах проиллюстрировано влияние расположения нулей и полюсов на АЧХ цифровых фильтров.

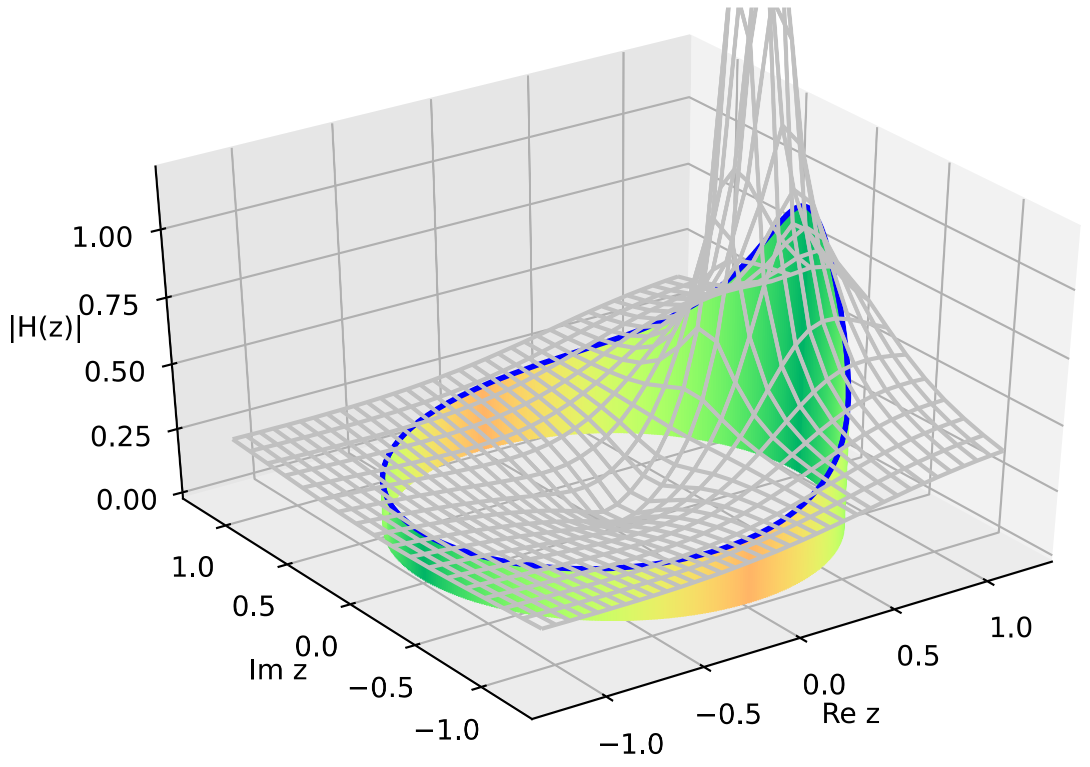
Пример. Квазиинтегратор.

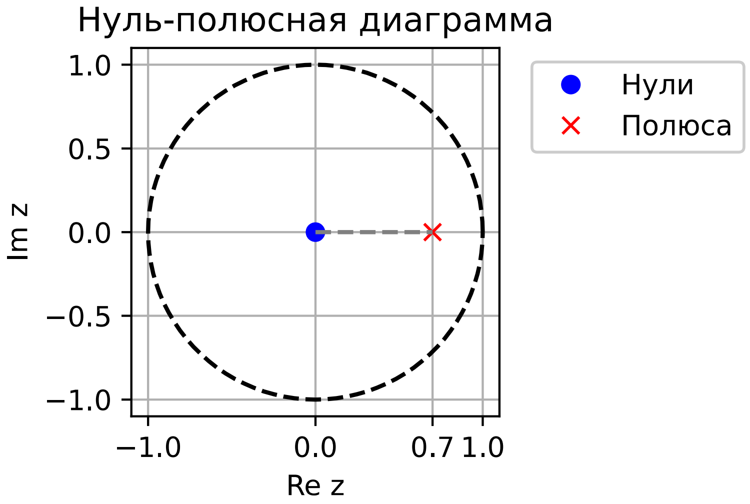
Рассмотрим рекурсивный фильтр, заданный разностным уравнением

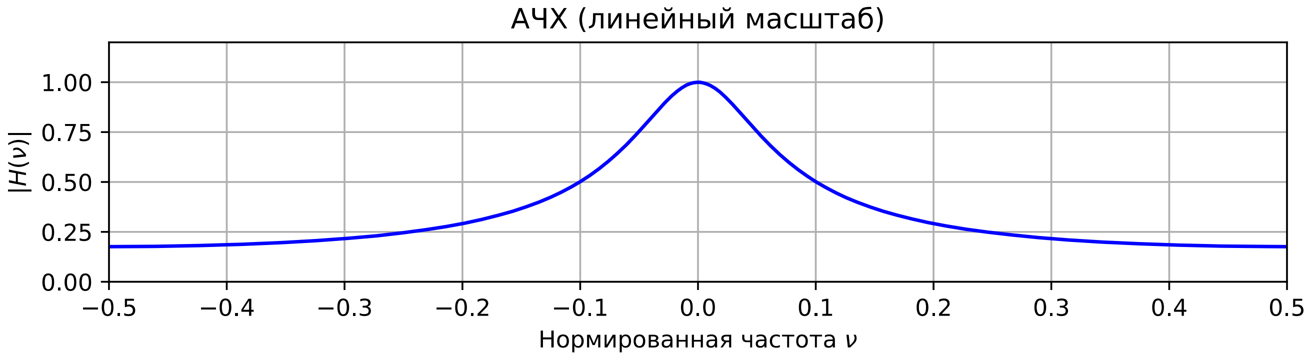
$$y[k]=(1-A)x[k]+Ay[k-1],\ y[-1]=0.$$

При $0<A<1$ эта система является квазиинтегратором (leaky integrator).

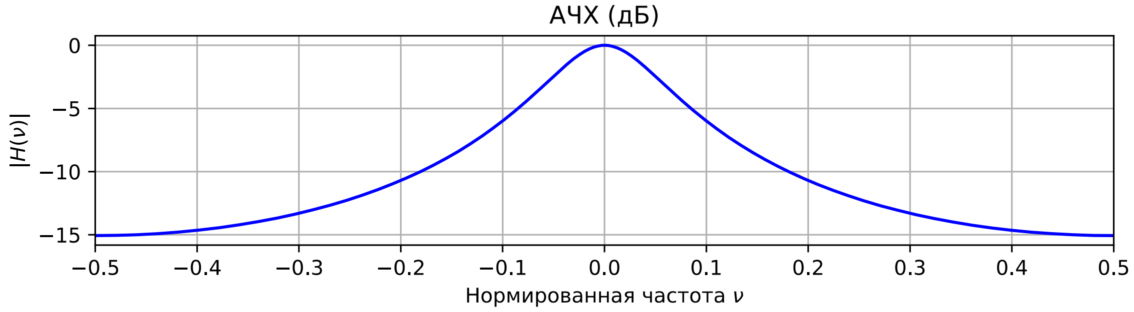
$$H(z)=\frac{1-A}{1-A\,z^{-1}}=\frac{(1-A)z}{z-A}$$

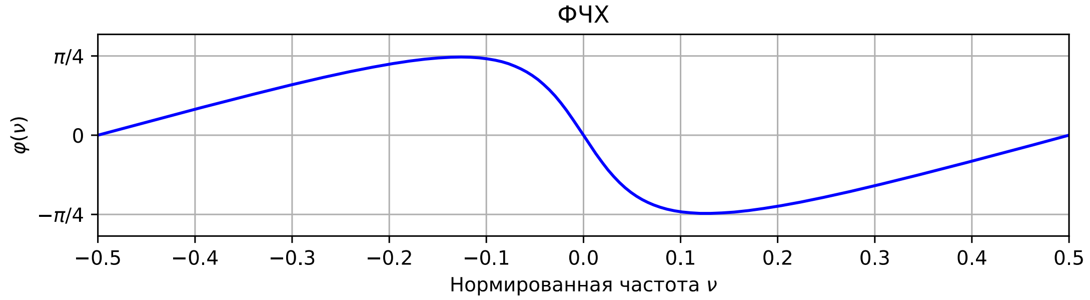






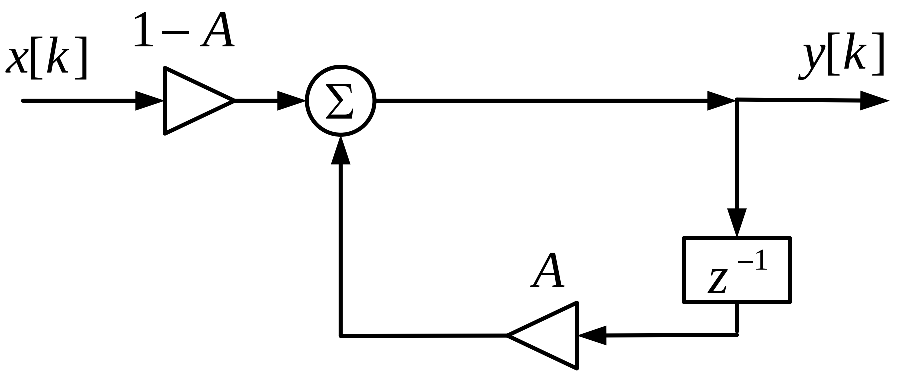
Метод размещения нулей и полюсов





$$y[k]=(1-A)x[k]+Ay[k-1],\ y[-1]=0.$$

$$H(z)=\frac{1-A}{1-A\,z^{-1}}=\frac{(1-A)z}{z-A}$$



Импульсная характеристика может быть получена как с помощью вычисления отклика на $\mathbf{1}[k]$ при $y[-1]=0$, так и с помощью обратного z–преобразования для $H(z)$.

Определение импульсной характеристики	
постановкой $x[k]=\mathbf{1}[k]$, $y[-1]=0$ в разностное уравнение	вычислением обратного z-преобразования для $H(z)$
$h[0]=1-A$ $h[1]=(1-A)A$ $h[2]=(1-A)A^2$ $h[k]=(1-A)A^k u[k]$	Используя соответствие $a\,b^k u[k] \xleftrightarrow{z} \dfrac{a}{(1-bz^{-1})}$, получаем $h[k]=(1-A)A^k u[k]$.

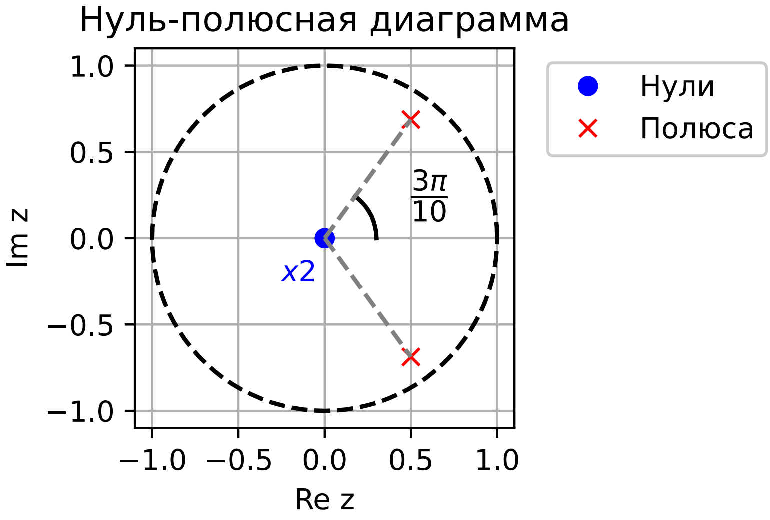
ФЧХ фильтра в полосе пропускания близка к линейной, но не является такой. Общее свойство БИХ-фильтров — невозможность получения кусочно-линейной ФЧХ.

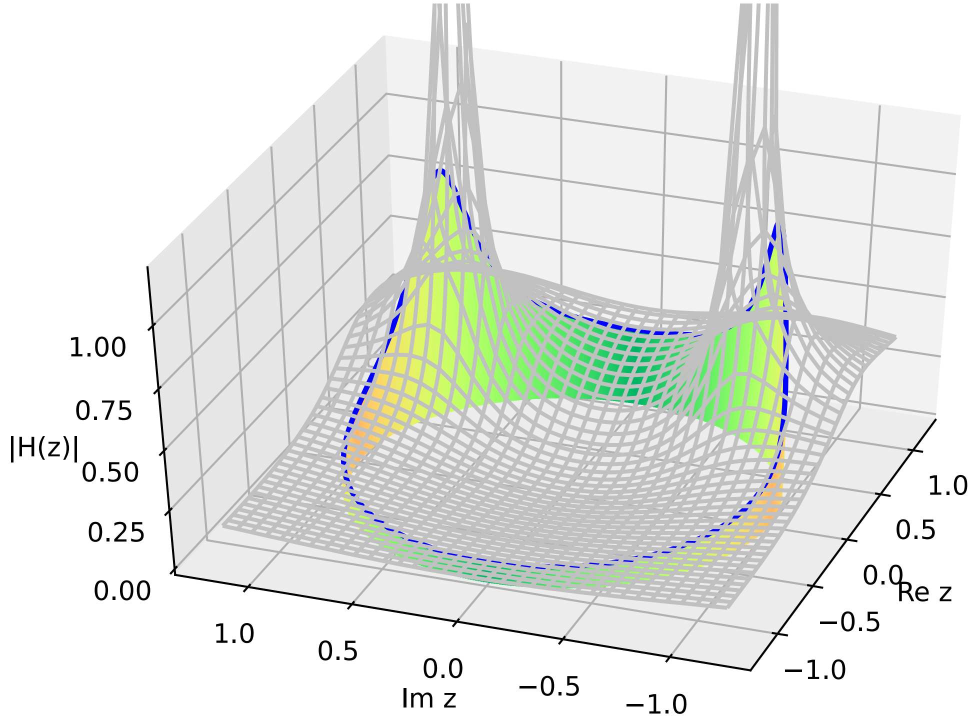
Пример. Простейший цифровой резонатор

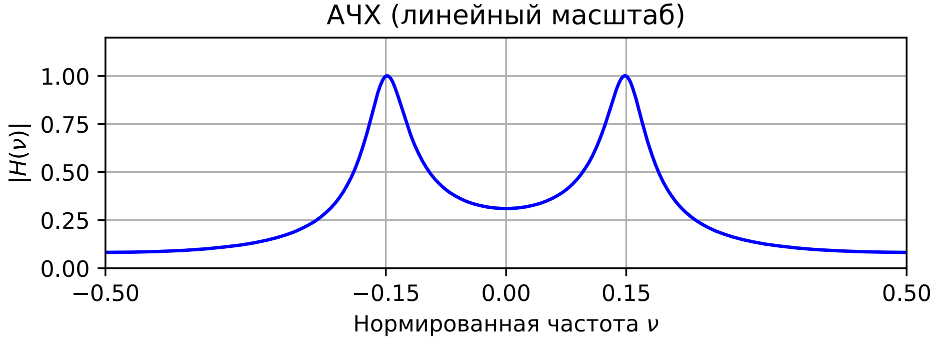
$$H(z)=\frac{G_0 z^2}{(z-\alpha e^{-j2\pi\nu_0})(z-\alpha e^{j2\pi\nu_0})}=\frac{G_0}{1-2\alpha\cos(2\pi\nu_0)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$$

Создадим резонатор с помощью размещения нулей и полюсов. Для примера $\alpha=0.85,\ \nu_0=0.15(\theta_0=2\pi\nu_0=\frac{3\pi}{10})$.

- Нам нужен фильтр с максимумами АЧХ в точках $-\nu_0$ и ν_0.
- Для этого в близи точек $z-$плоскости $e^{-j2\pi\nu_0}$ и $e^{j2\pi\nu_0}$ поместим полюса.
- Чтобы фильтр был устойчивый, они должны лежать внутри единичной окружности. Поэтому поместим их в точках $p_1=\alpha e^{-j2\pi\nu_0}$ и $p_2=\alpha e^{j2\pi\nu_0}$, $0<\alpha<1$.

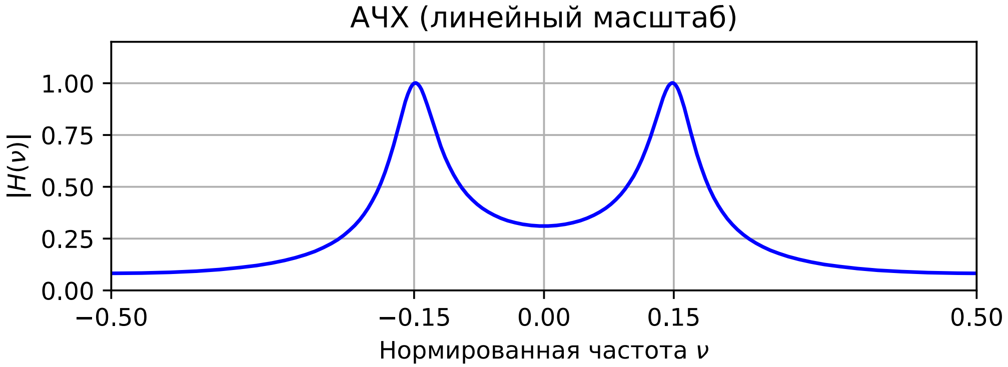






Метод размещения нулей и полюсов

Масштабирующий коэффициент G_0 определим из условия $|H(z=e^{\pm j2\pi\nu_0})|=1.$



$$H(z)=\frac{G_0}{1-2\alpha\cos(2\pi\nu_0)z^{-1}+\alpha^2z^{-2}}$$

$$|G_0|=|1-2\alpha\cos(2\pi\nu_0)e^{j2\pi\nu_0}+\alpha^2e^{j4\pi\nu_0}|=(1-\alpha)\,|1-\alpha e^{j4\pi\nu_0}|$$

Выберем $G_0=(1-\alpha)\,|1-\alpha e^{j4\pi\nu_0}|$.

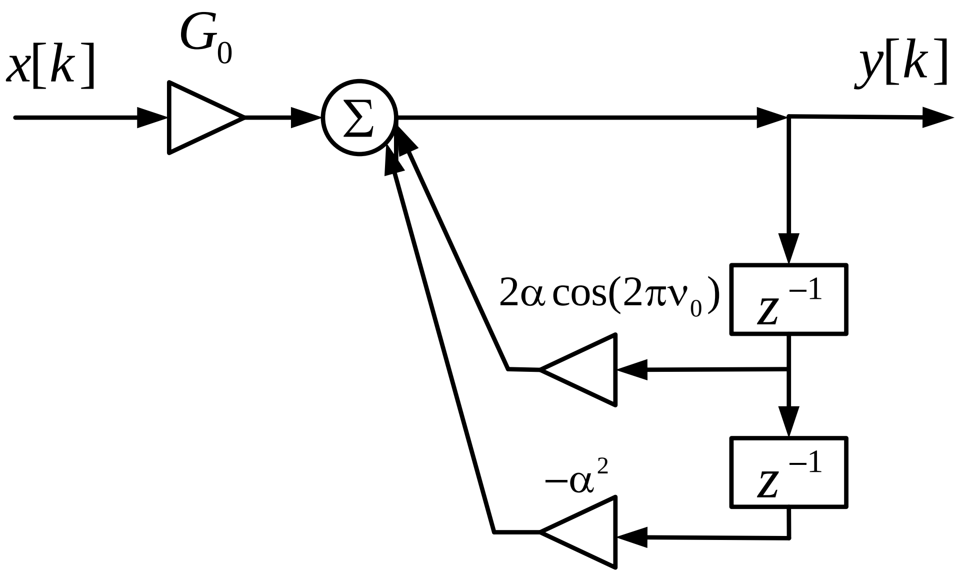
Разностное уравнение

$$y[k]-2\alpha\cos(2\pi\nu_0)y[k-1]+\alpha^2y[k-2]=G_0x[k]$$

$$y[k]=G_0x[k]+2\alpha\cos(2\pi\nu_0)y[k-1]-\alpha^2y[k-2]$$

$$y[k]=(1-\alpha)\,|1-\alpha e^{j4\pi\nu_0}|\,x[k]+2\alpha\cos(2\pi\nu_0)y[k-1]-\alpha^2y[k-2]$$

Инициализация выхода $y[k-2]=0$, $y[k-1]=0$.

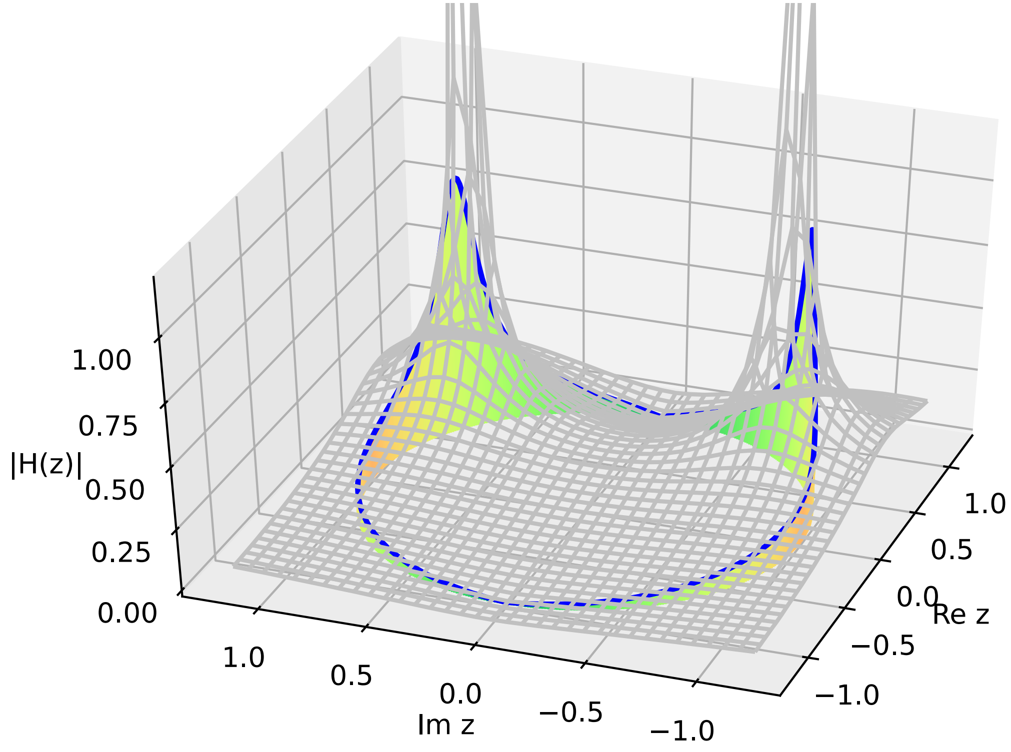


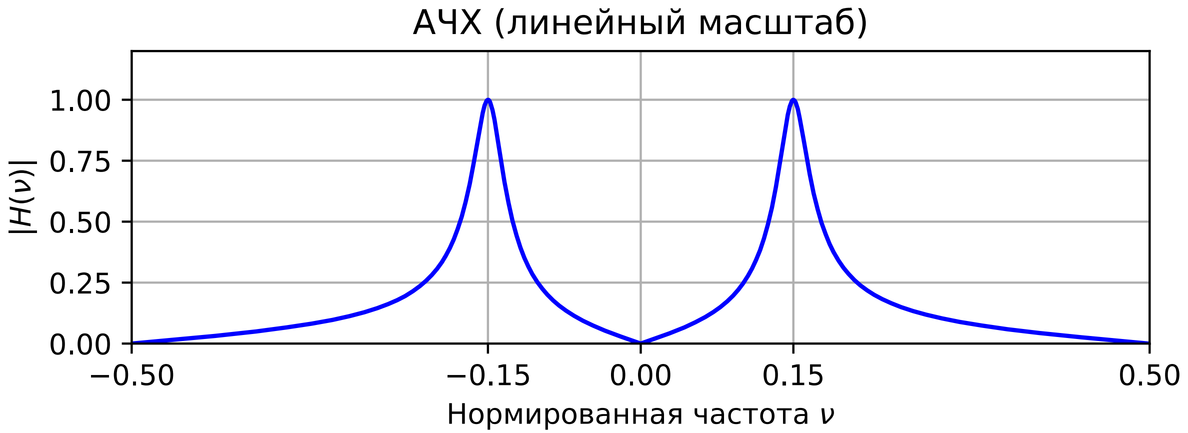
Пример. Цифровой резонатор

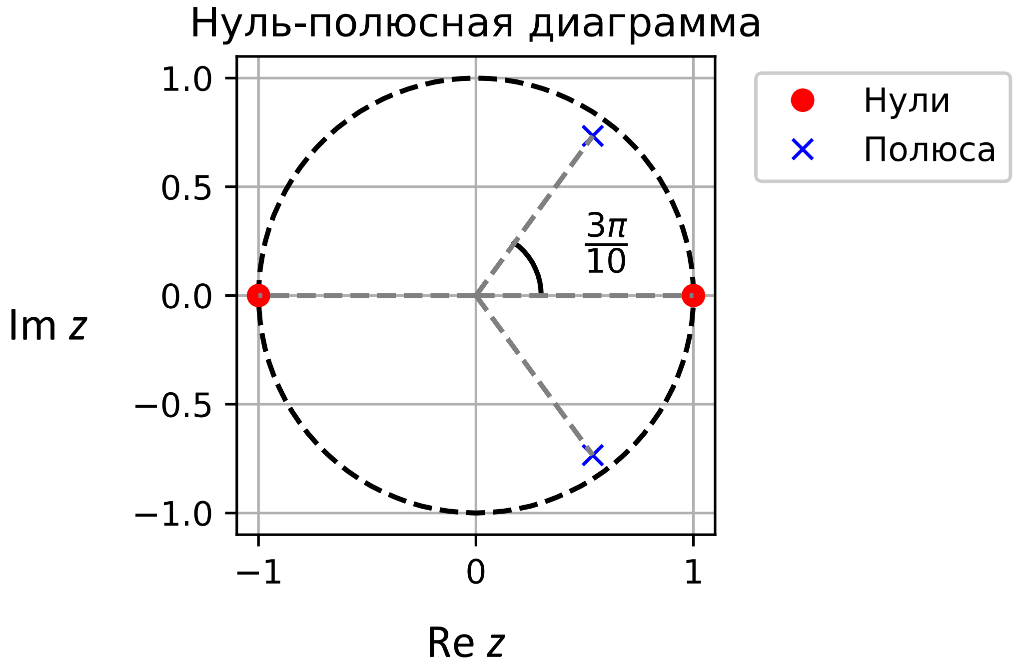
Добавим в $H(z)$ простейшего резонатора нули в точках $z=\pm 1$, убрав кратный нуль в $z=0$.

$$H(z)=\frac{G_0(z-1)(z+1)}{(z-\alpha e^{-j2\pi\nu_0})(z-\alpha e^{j2\pi\nu_0})}$$

Коэффициент G_0 определим из условия $|H(z=e^{\pm j2\pi\nu_0})|=1$



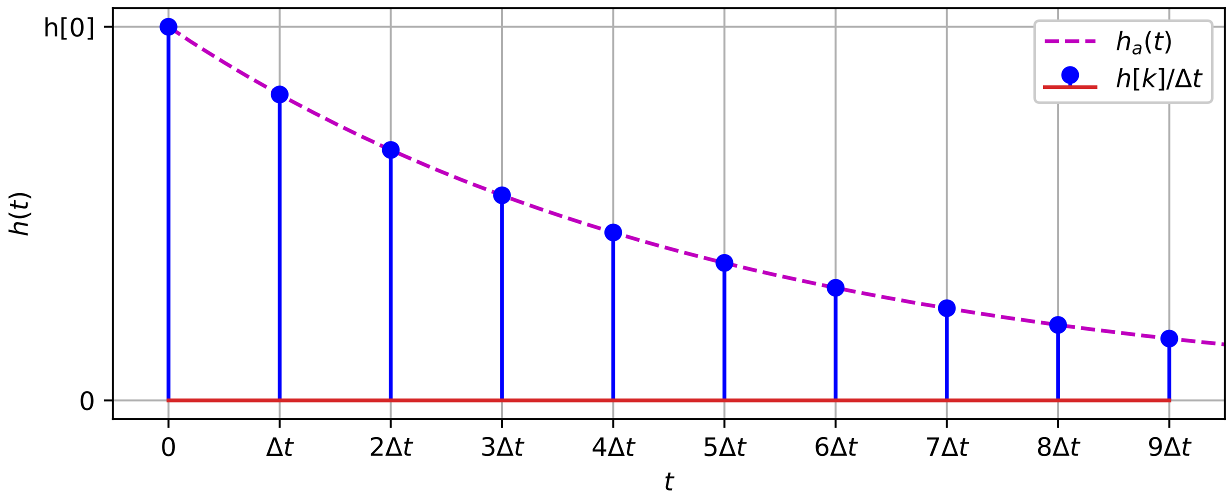




№22 **Метод инвариантной импульсной характеристики**

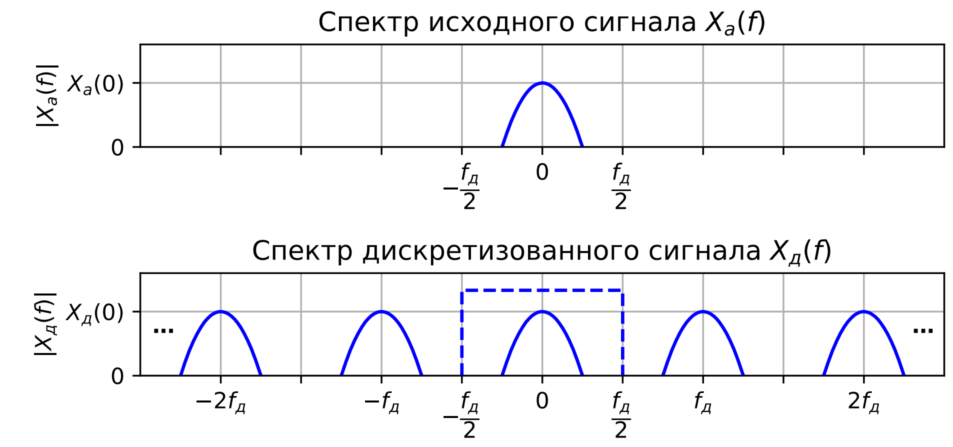
Метод инвариантной импульсной характеристики относится к методам синтеза БИХ-фильтров на основе аналогового фильтра-прототипа.

- Он заключается в том, что импульсная характеристика аналогового фильтра $h_a(t)$ (реакция на дельта-функцию) дискретизуется с шагом Δt, в результате чего получается импульсная характеристика цифрового фильтра: $h[k] = \Delta t\, h_a(k\Delta t)$

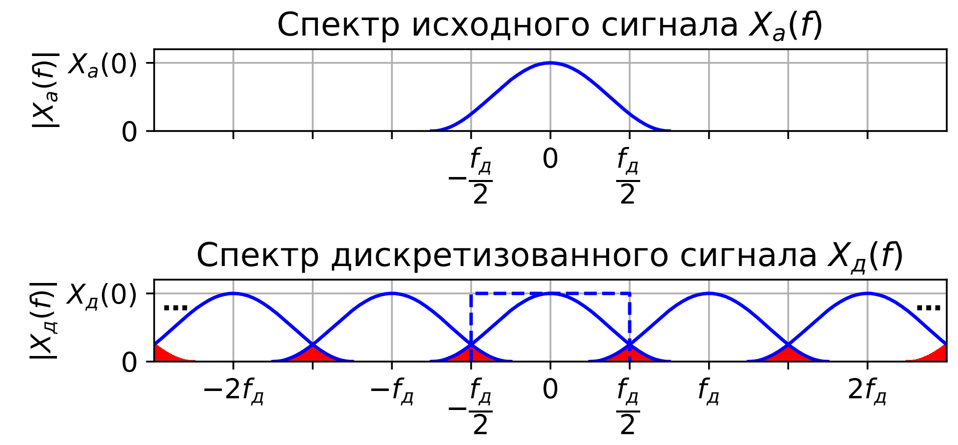


- Пусть $H(f)$ – частотная характеристика цифрового фильтра, $H_a(f)$ – аналогового. Тогда в силу $h[k] = \Delta t\, h_a(k\Delta t)$ справедливо соотношение

$$H(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(f + mf_д).$$



Идеальный случай



Реальный случай (эффект наложения)

Метод инвариантной импульсной характеристики

- Передаточная функция цифрового фильтра $H(z)$ будет определяться как z-образ $h[k]$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] z^{-k}.$$

- Возникает вопрос о том, как определить коэффициенты в разностном уравнении (БИХ—фильтр, бесконечное число слагаемых).
- Передаточную функцию $H_a(p)$ исходного аналогового фильтра представим в виде суммы простых дробей. Предположим, что $H_a(p)$ не имеет кратных полюсов, тогда по теореме разложения Хевисайда

$$H_a(p) = \sum_{m=1}^{M} \frac{A_m}{p - p_m},$$

где M – порядок передаточной функции, p_m – её полюса, а A_m — заданные числа, которые можно определить с помощью метода неопределённых коэффициентов, $m = 1, \ldots, M$.

- При этом импульсная характеристика $h_a(t)$ аналогового фильтра может быть найдена с помощью обратного преобразования Лапласа для $H_a(p)$.
- Обозначим одно слагаемое суммы как

$$V_m(p) = \frac{A_m}{p - p_m}.$$

Обратное преобразование Лапласа для $V_m(p)$ может быть вычислено следующим образом[1]:

$$v_m(t) = \frac{1}{j2\pi} \oint_C V_m(p) e^{pt} dp = \operatorname*{Res}_{p_m} \frac{A_m e^{pt}}{p - p_m} = A_m \exp(p_m t), \quad t \geq 0.$$

Здесь контур C охватывает все полюса подынтегральной функции.

- В силу линейности преобразования Лапласа

$$h_a(t) = \sum_{m=1}^{M} v_m(t) = \sum_{m=1}^{M} A_m \exp(p_m t), \quad t \geq 0.$$

[1] См. формулу (3) приложения к лекции 24 октября 2022 г. «Преобразование Лапласа в линейных системах».

Метод инвариантной импульсной характеристики

- $h_a(t) = \sum_{m=1}^{M} A_m \exp(p_m t), \quad t \geq 0.$
- Импульсная характеристика дискретной системы

$$h[k] = \Delta t \; h_a(k\Delta t).$$

$$h[k] = \Delta t \sum_{m=1}^{M} A_m \exp(p_m k\Delta t), \quad k \geq 0.$$

- Наконец, передаточную функцию цифрового фильтра получим с помощью прямого *z*-преобразования $h[k]$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] z^{-k},$$

$$H(z) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M} A_m \exp(p_m k\Delta t) z^{-k} = \Delta t \sum_{m=1}^{M} A_m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\exp(p_m k\Delta t) z^{-1}\right)^k =$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \frac{A_m \Delta t}{1 - \exp(p_m \Delta t) z^{-1}}, \quad \left|\exp(p_m \Delta t) z^{-1}\right| < 1.$$

Мы получили запись передаточной функции в виде суммы простых дробей.

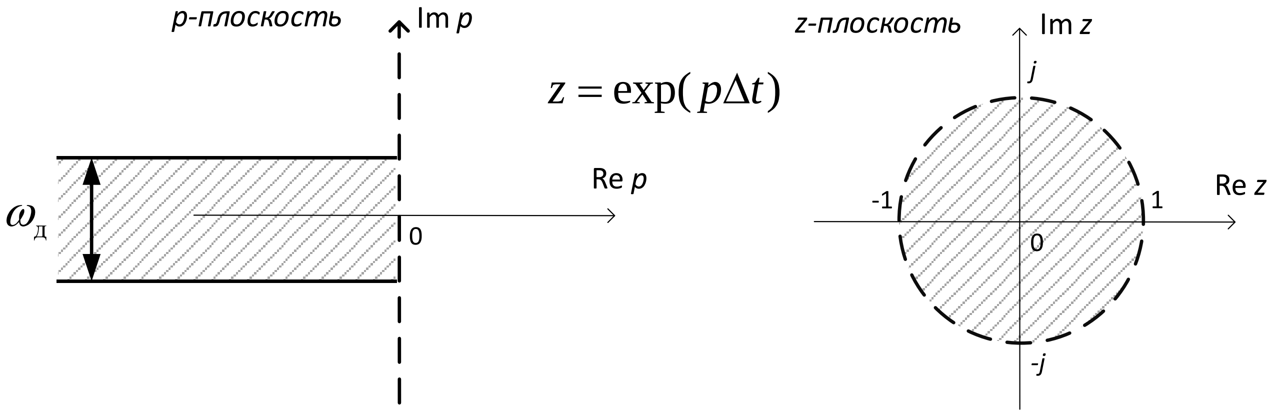
- Если какой-либо из полюсов p_m не является действительным, то для него существует комплексно сопряженный p_m^* и система может быть реализована с действительными коэффициентами разностного уравнения, например, в виде параллельного соединения блоков второго и первого порядков.

Заметим, что в методе инвариантной импульсной характеристики полюса передаточных функций аналогового фильтра p_m и цифрового z_m связаны соотношением $z_m = \exp(p_m \Delta t)$:

$$H_a(p) = \sum_{m=1}^{M} \frac{A_m}{p - p_m},$$

$$H(z) = \sum_{m=1}^{M} \frac{A_m \Delta t}{1 - \exp(p_m \Delta t) z^{-1}}.$$

Метод инвариантной импульсной характеристики

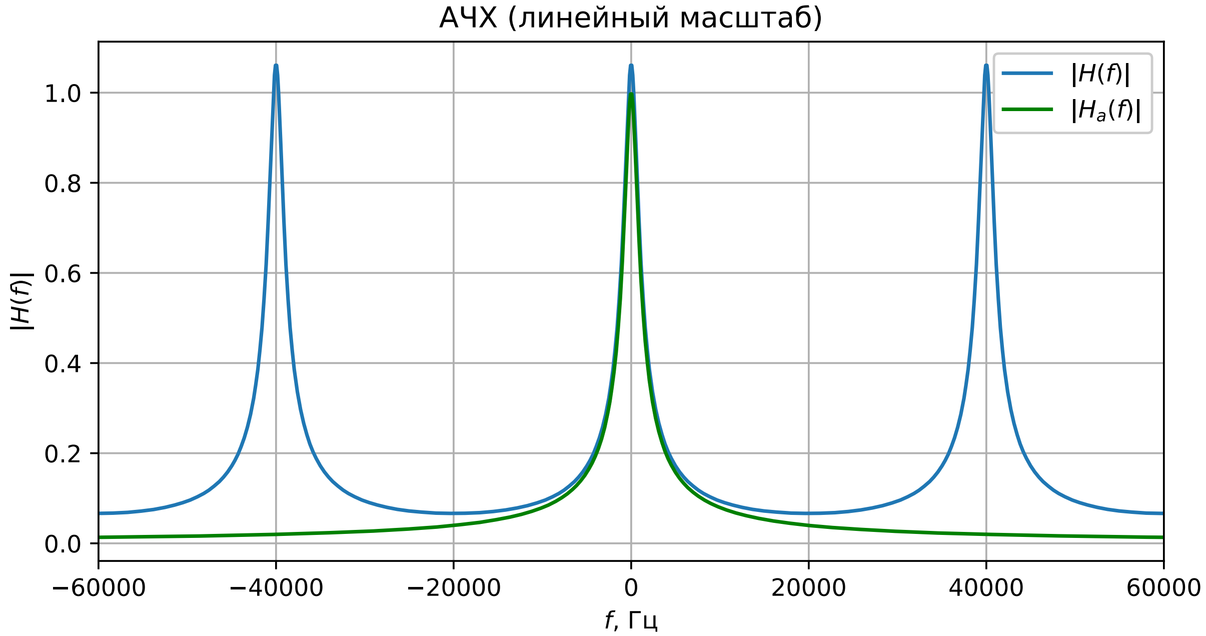


- Любая полоса шириной $\omega_д = 2\pi / \Delta t$ в левой полуплоскости (не включая границу вдоль мнимой оси) p–плоскости отображается с помощью $z = \exp(p\Delta t)$ во внутрь единичного круга в *z*-плоскости.
- У физически реализуемого устойчивого аналогового фильтра все полюса $H_a(p)$ лежат в строго левой полуплоскости p–плоскости.
- Тогда для цифрового фильтра, полученного методом инвариантной импульсной характеристики, все полюса $H(z)$ лежат внутри единичного круга.
- В силу этого, если аналоговый фильтр-прототип был устойчив, то и цифровой фильтр будет также устойчив.

Частотная характеристика цифрового фильтра представляет собой периодически повторенную частотную характеристику аналогового фильтра-прототипа,

$$H(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(f + mf_д).$$

При этом появляется эффект наложения (элайзинг/алиасинг).

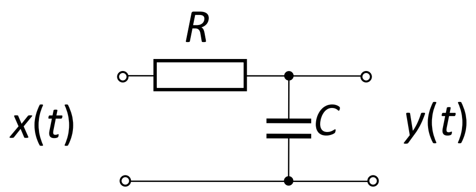


На частотах $f \in [-f_д / 2; f_д / 2]$ наблюдаем совпадение (с точности до эффекта наложения) АЧХ аналогового и цифрового фильтров.

Метод инвариантной импульсной характеристики

Пример. Цифровой аналог RC–цепочки

Построим цифровой аналог RC–цепочки интегрирующего типа. Пусть входное напряжение $x(t)$, выходное $y(t)$.



- Ток, текущий через резистор, выражается через изменение напряжения на конденсаторе как $i(t)=C\dfrac{dy(t)}{dt}$.
- Из закона Ома $i(t)R+y(t)=x(t)$.

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t).$$

Пусть $x(t)\xleftrightarrow{L}X(p)$, $y(t)\xleftrightarrow{L}Y(p)$. Тогда по свойствам преобразования Лапласа

$$\frac{dy(t)}{dt}\xleftrightarrow{L}pY(p)-y(0)$$

Пусть в начальный момент времени $y(0)=0$.

$$RCpY(p)+Y(p)=X(p).$$

- Передаточная функция аналогового фильтра

$$H_a(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{1}{1+RCp}=\frac{1}{RC\left(p+\frac{1}{RC}\right)}=\frac{A_1}{p-p_1}.$$

Тогда $A_1=\dfrac{1}{RC}$, $p_1=-\dfrac{1}{RC}$.

Получаем передаточную функцию цифрового фильтра

$$H(z)=\frac{A_m\Delta t}{1-\exp(p_m\Delta t)z^{-1}}=\frac{\frac{\Delta t}{RC}z}{z-\exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right)}=\frac{\frac{\Delta t}{RC}}{1-z^{-1}\exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right)}.$$

Заметим, что если $\exp\left(-\dfrac{\Delta t}{RC}\right)<1$, то фильтр устойчивый.

Поскольку $\dfrac{\Delta t}{RC}>0$, фильтр устойчив всегда. Разностное уравнение цифрового аналога:

$$y[k]=\frac{\Delta t}{RC}x[k]+\exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right)y[k-1]$$

Метод инвариантной импульсной характеристики

- Теперь сравним импульсные характеристики аналогового и цифрового фильтров.
- Для аналогового фильтра импульсная характеристика может быть найдена с помощью обратного преобразования Лапласа для $H_a(p)$:

$$h_a(t)=\frac{1}{j2\pi}\oint_C H_a(p)e^{pt}dp=\operatorname*{Res}_{-1/RC}\frac{e^{pt}}{RC\left(p+\frac{1}{RC}\right)}=$$

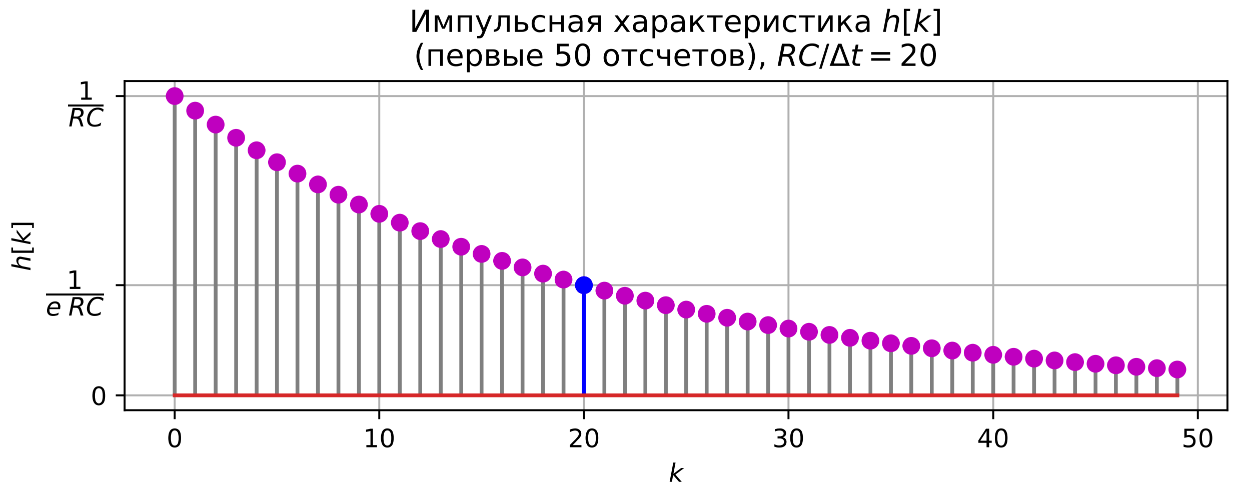
$$=\frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right), t\geq 0.$$

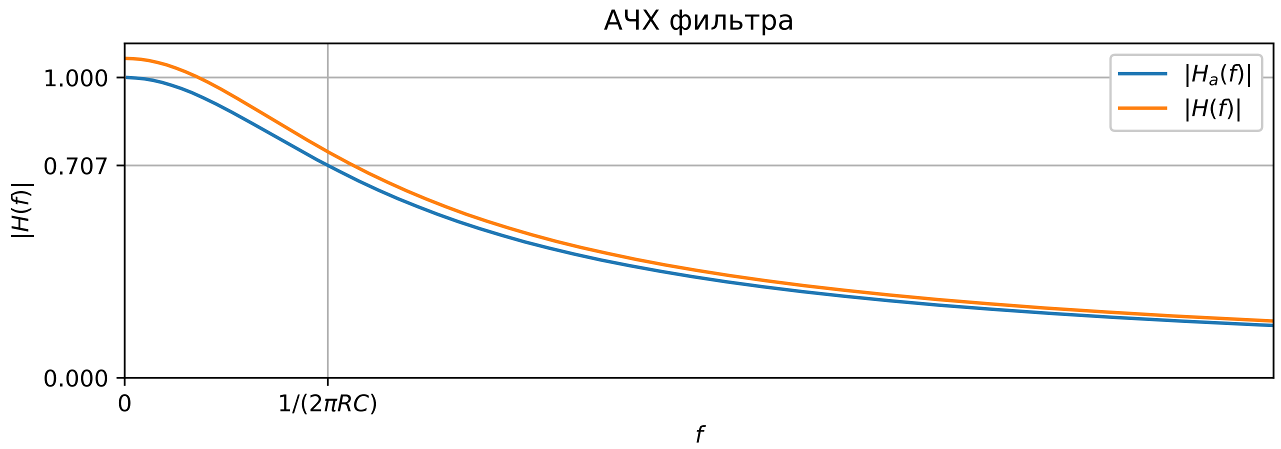
- Для цифрового фильтра импульсная характеристика находится с помощью обратного z-преобразования для передаточной функции

$$h[k]=\frac{1}{j2\pi}\oint_C H(z)z^{k-1}dz=\operatorname*{Res}_{\exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right)}\left(\frac{\frac{\Delta t}{RC}z^k}{z-\exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right)}\right)=$$

$$=\frac{\Delta t}{RC}\exp\left(-\frac{k\Delta t}{RC}\right),\ k\geq 0.$$

Как видно из приведенных выше формул, $h[k]=\Delta t\, h_a(k\Delta t)$, т.е. импульсная характеристика дискретизуется с шагом Δt.





Метод инвариантной импульсной характеристики

Пример. Цифровой фильтр 2-го порядка, эквивалентный колебательному контуру

Синтез фильтра

- Импульсная характеристика колебательного контура определяется как

$$h_a(t) = A\exp(-\alpha t)\cos\omega_0 t, \quad t \geq 0.$$

где A — размерный множитель. Переходя к дискретному времени $t = k\Delta t$ и запишем импульсную характеристику соответствующего цифрового фильтра

$$h[k] = \Delta t A \exp(-\alpha k \Delta t)\cos\omega_0 k \Delta t, \quad k \geq 0.$$

$$h[k] = A\frac{\Delta t}{2}\left(e^{-\alpha k\Delta t + j\omega_0 k\Delta t} + e^{-\alpha k\Delta t - j\omega_0 k\Delta t}\right), \quad k \geq 0.$$

- Передаточную функцию фильтра найдем как z-преобразование от импульсной характеристики:

$$H(z) = \frac{A\Delta t}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha\Delta t + j\omega_0\Delta t}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-\alpha\Delta t - j\omega_0\Delta t}z^{-1}}\right) =$$

$$= A\Delta t\frac{1-e^{-\alpha\Delta t}e^{-j\omega_0\Delta t}z^{-1} + 1 - e^{-\alpha\Delta t}e^{+j\omega_0\Delta t}z^{-1}}{2\left(1-e^{-\alpha\Delta t}e^{+j\omega_0\Delta t}z^{-1} - e^{-\alpha\Delta t}e^{-j\omega_0\Delta t}z^{-1} + e^{-2\alpha\Delta t}z^{-2}\right)} =$$

$$= A\Delta t\frac{1-\exp(-\alpha\Delta t)\left(\cos\omega_0\Delta t\right)z^{-1}}{1-2\exp(-\alpha\Delta t)\left(\cos\omega_0\Delta t\right)z^{-1} + \exp(-2\alpha\Delta t)z^{-2}}$$

- Разностное уравнение фильтра

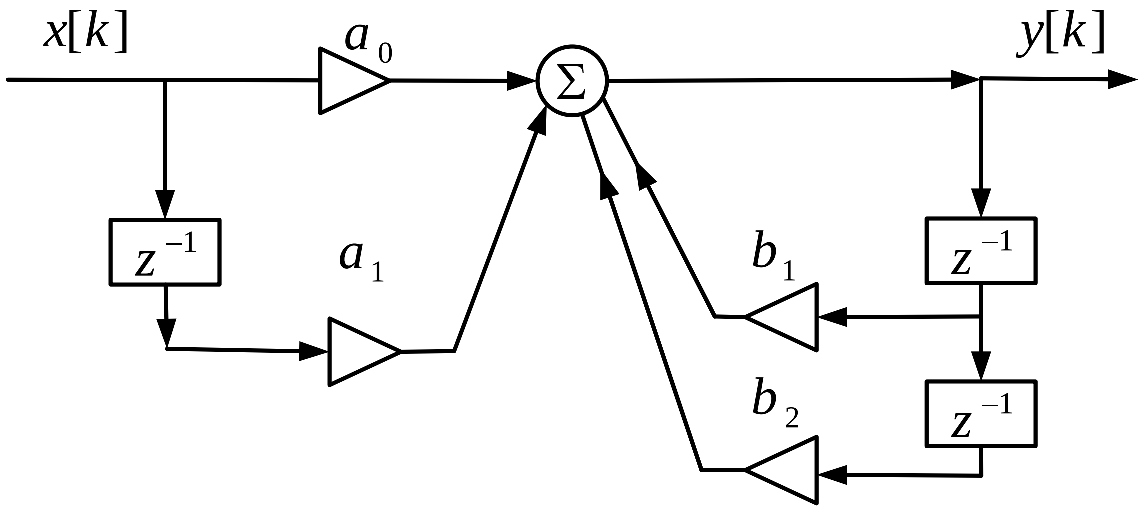
$$y[k] = x[k] + a_1 x[k-1] + b_1 y[k-1] + b_2 y[k-2],$$

$$a_0 = A\Delta t; \quad a_1 = -A\Delta t\exp(-\alpha\Delta t)\cos\omega_0\Delta t;$$

$$b_1 = 2\exp(-\alpha\Delta t)\cos\omega_0\Delta t; \quad b_2 = -\exp(-2\alpha\Delta t).$$

Инициализация $y[k-1] = y[k-2] = 0.$

Константа A определяется из условия $|H(z = e^{j\omega_0\Delta t})| = 1.$



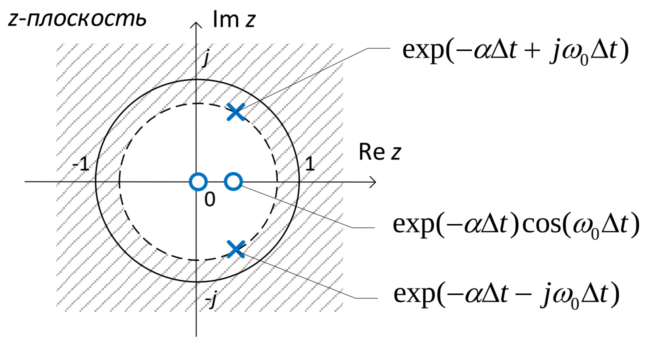
Анализ фильтра

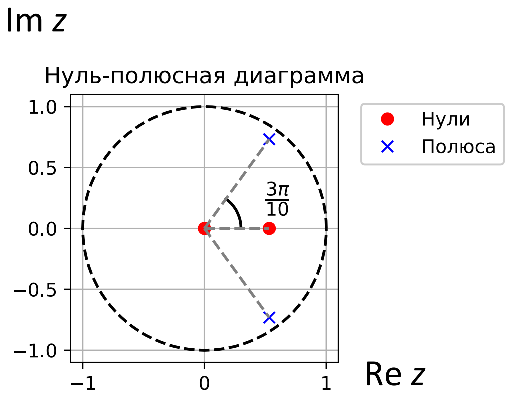
$$H(z) = A\Delta t\frac{z\left(z-\exp(-\alpha\Delta t)\left(\cos\omega_0\Delta t\right)\right)}{z^2 - 2\exp(-\alpha\Delta t)\left(\cos\omega_0\Delta t\right)z + \exp(-2\alpha\Delta t)}.$$

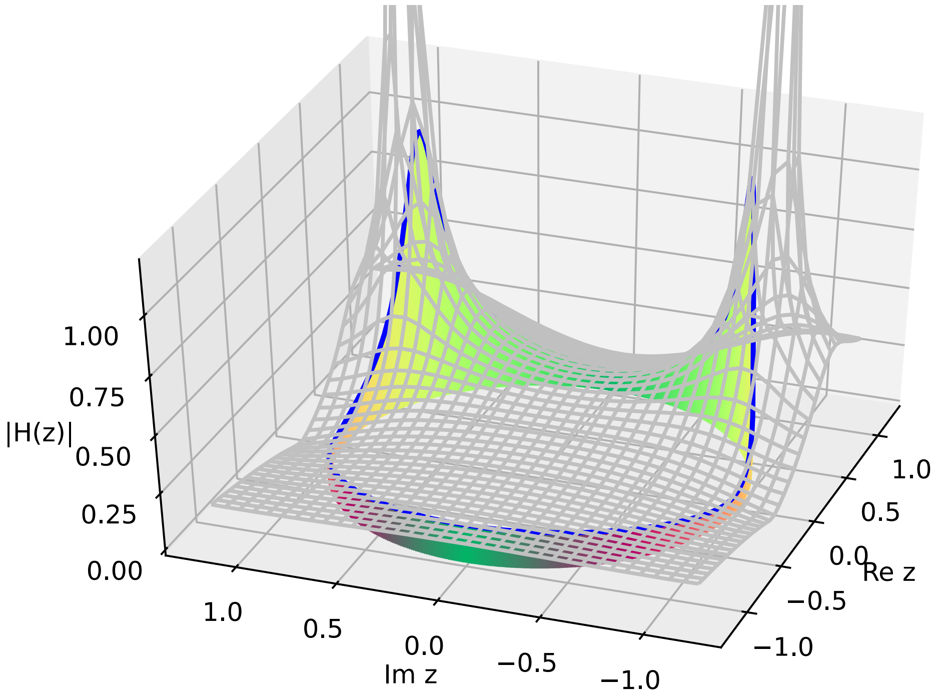
Метод инвариантной импульсной характеристики

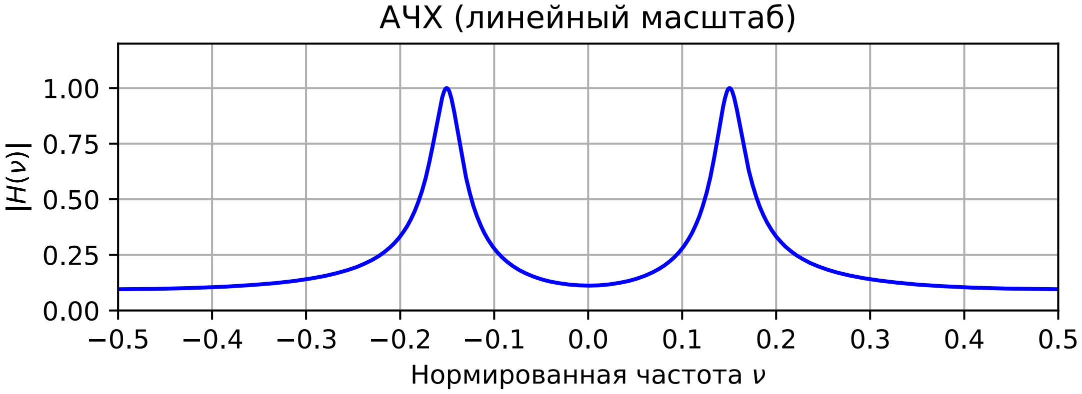
$$H(z) = A\Delta t \frac{z\left(z - \exp(-\alpha\Delta t)\left(\cos\omega_0\Delta t\right)\right)}{z^2 - 2\exp(-\alpha\Delta t)\left(\cos\omega_0\Delta t\right)z + \exp(-2\alpha\Delta t)}$$

где полюса $z_{1,2} = e^{-\alpha\Delta t \pm j\omega_0\Delta t}$.









- Анализ передаточной функции показывает, что она имеет два нуля при $z = \exp(-\alpha\Delta t)\cos\omega_0\Delta t$ и $z = 0$, а также два полюса: при $z = \exp(-\alpha\Delta t + j\omega_0\Delta t)$ и при $z = \exp(-\alpha\Delta t - j\omega_0\Delta t)$.
- С ростом добротности колебательного контура, соответствующего данному цифровому фильтру, величина коэффициента затухания α уменьшается, $\exp(-\alpha\Delta t)$ стремится к единице и полюса приближаются к единичной окружности.

Метод билинейного *z*-преобразования

Метод билинейного *z*-преобразования для синтеза БИХ-фильтров №23

В методе инвариантной импульсной характеристики при переходе из p−плоскости в z−плоскость использовалась связь $z=\exp(p\Delta t)$, откуда

$$p=\frac{1}{\Delta t}\ln z=\frac{2}{\Delta t}\left(\frac{z-1}{z+1}+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\cdots\right).$$

Ограничимся только первым слагаемым ряда, тогда

$$p=\frac{2}{\Delta t}\cdot\frac{z-1}{z+1}=\frac{2}{\Delta t}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}},\qquad z=\frac{2/\Delta t+p}{2/\Delta t-p}.$$

Метод билинейного *z*- преобразования заключается в подстановке полученной зависимости в передаточную функцию аналогового фильтра $H_a(p)$, в результате чего получается передаточная функция цифрового фильтра $H(z)$.

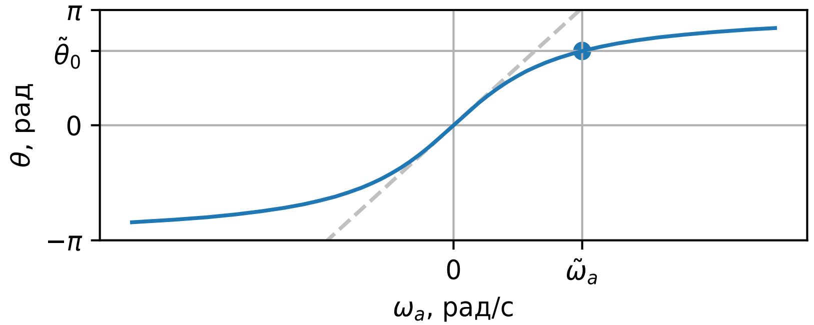
- Зависимость между частотами цифрового и аналогового фильтров *нелинейная.* Частоте f_a в частотной характеристике соответствует точка p−плоскости $p_a=j\omega_a=j2\pi f_a$. При переходе на единичную окружность в z−плоскости

$$z=\frac{2/\Delta t+j2\pi f_a}{2/\Delta t-j2\pi f_a}=\frac{2/\Delta t+j\omega_a}{2/\Delta t-j\omega_a}=\exp(j2\pi f_0\Delta t)=\exp(j\theta_0).$$

Используя $\left(\dfrac{2/\Delta t+j\omega_a}{2/\Delta t-j\omega_a}\right)^2=\exp(j2\theta_0)$, получаем

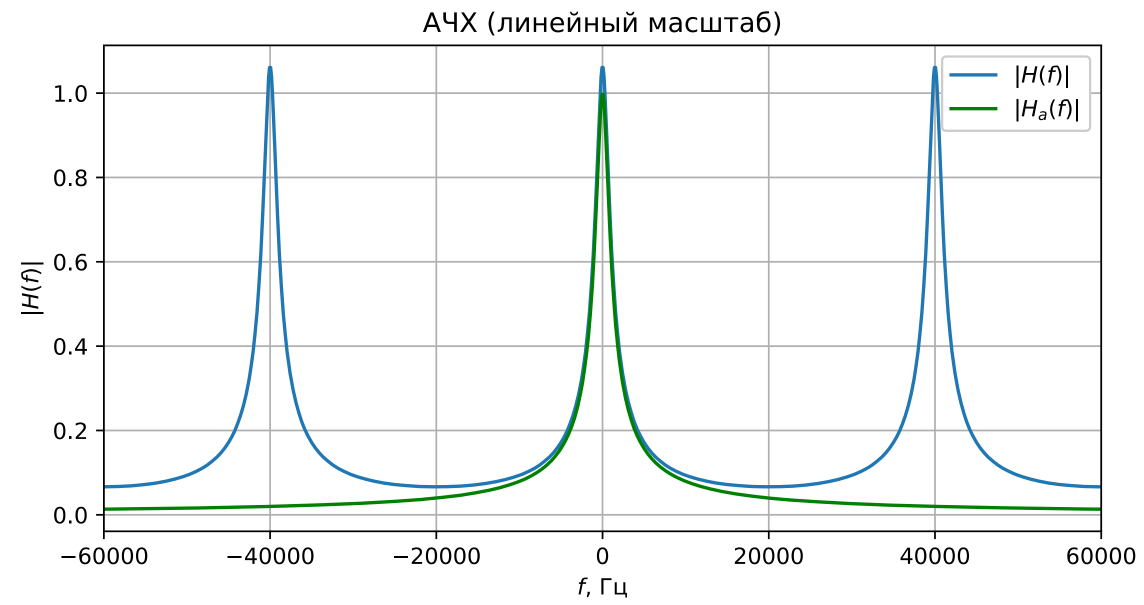
$$\operatorname{tg}(\theta_0/2)=\frac{\omega_a\Delta t}{2},$$

$$\theta_0=2\operatorname{acrtg}\left(\frac{\omega_a\Delta t}{2}\right)+2\pi n,\ n\in Z.$$



- Нелинейную зависимость частот необходимо учитывать, например, при пересчете граничных частот полосы пропускания и полосы задерживания. Однако при этом не возникает эффект наложения за счет линейной деформации частотной оси.

Метод билинейного *z*-преобразования

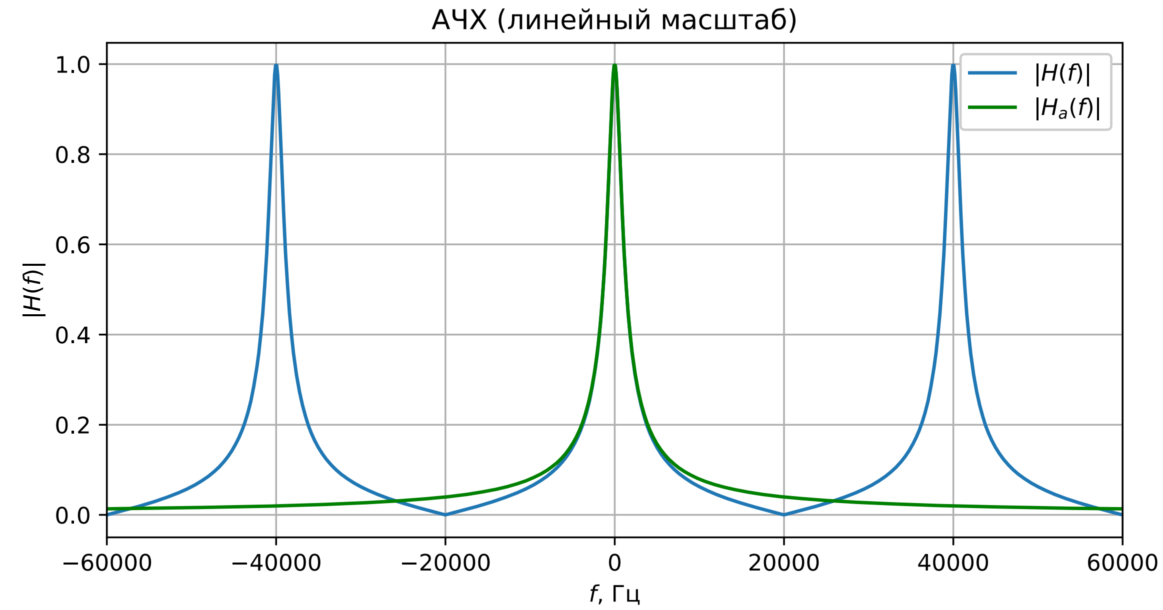


Метод инвариантной импульсной характеристики

На частотах $f \in [-f_д/2; f_д/2]$ наблюдаем совпадение (с точности до эффекта наложения) АЧХ аналогового и цифрового фильтров.

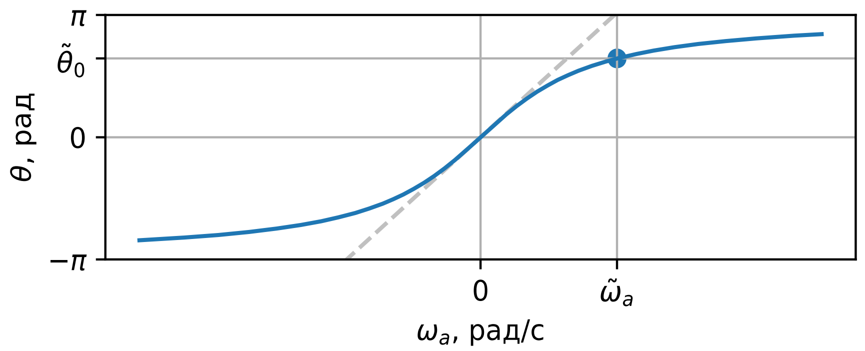
При периодическом повторении спектра возникает эффект наложения

$$H(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(f + mf_д).$$



Метод билинейного *z*-преобразования

Происходит нелинейная деформация частотной оси. Вблизи частоты Найквиста искажения проявляются сильнее, чем в рабочем диапазоне частот.



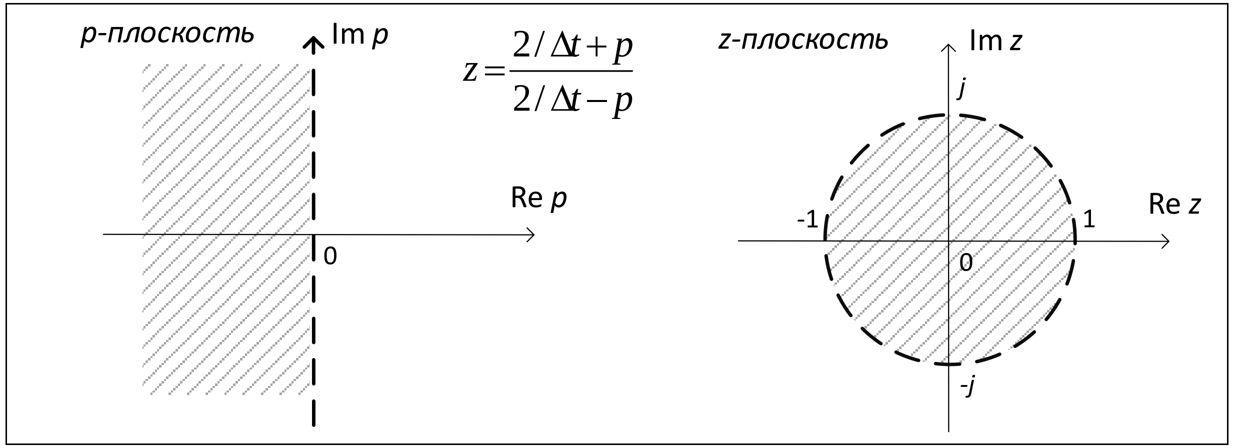
Метод билинейного *z*-преобразования

В методе билинейного *z*-преобразования гарантируется (как и в методе инвариантной импульсной характеристики) устойчивость БИХ-фильтра при устойчивом аналоговом фильтре-прототипе.

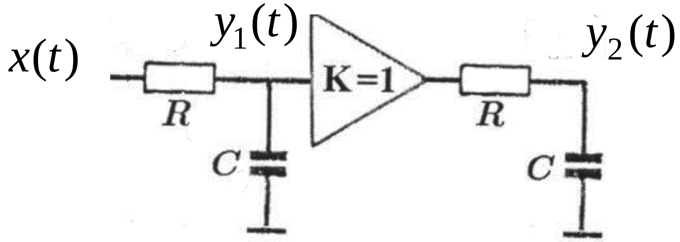
Левая полуплоскость при билинейном z–преобразовании отображается во внутрь единичного круга. Убедимся в этом. Возьмем в p– плоскости точку $p_a = \sigma_a + j\omega_a$. Ей будет соответствовать точка z–плоскости

$$z_0 = \frac{2/\Delta t + \sigma_a + j\omega_a}{2/\Delta t - \sigma_a - j\omega_a}$$

причем при $\sigma_a < 0$ $\quad |z_0| = \sqrt{\frac{(2/\Delta t + \sigma_a)^2 + \omega_a{}^2}{(2/\Delta t - \sigma_a)^2 + \omega_a{}^2}} < 1.$



Пример. Цифровой аналог каскада из двух RC–цепочек интегрирующего типа.



На этом рисунке между двумя RC-цепочками имеется развязывающий повторитель, у которого большое входное и малое выходное сопротивление. Это необходимо для устранения влияния цепочек друг на друга.

Уравнение для одного RC-каскада:

$$RC\frac{dy}{dt} + y_1(t) = x(t)$$

Пусть $y_1(0) = 0$. Тогда преобразование Лапласа для него

$$RCpY_1(p) + Y_1(p) = X(p)$$

Передаточная функция

$$H_1(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + RCp}.$$

Метод билинейного *z*-преобразования

Для двух последовательно соединенных RC-фильтров первого порядка

$$H_2(p) = H_1(p)H_1(p) = \frac{1}{(RC)^2 p^2 + 2RCp + 1}.$$

Передаточную функцию $H(z)$ для соответствующего цифрового фильтра можно получить методом билинейного $z-$преобразования.

Получаем передаточную функцию цифрового фильтра $H(z)$.

$$H(z) = \frac{1}{(RC)^2\left(\frac{2}{\Delta t}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 2RC\left(\frac{2}{\Delta t}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 1}$$

Преобразуем:

$$H(z) =$$

$$= \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{4(RC/\Delta t)^2(1-2z^{-1}+z^{-2}) + 4(RC/\Delta t)(1-z^{-2}) + (1+2z^{-1}+z^{-2})}$$

Обозначим $\alpha = RC/\Delta t = RCf_{д}$

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{(4\alpha^2+4\alpha+1) + (2-8\alpha^2)z^{-1} + (4\alpha^2-4\alpha+1)z^{-2}}$$

Разностное уравнение:

$$x[k] + 2x[k-1] + x[k-2] =$$

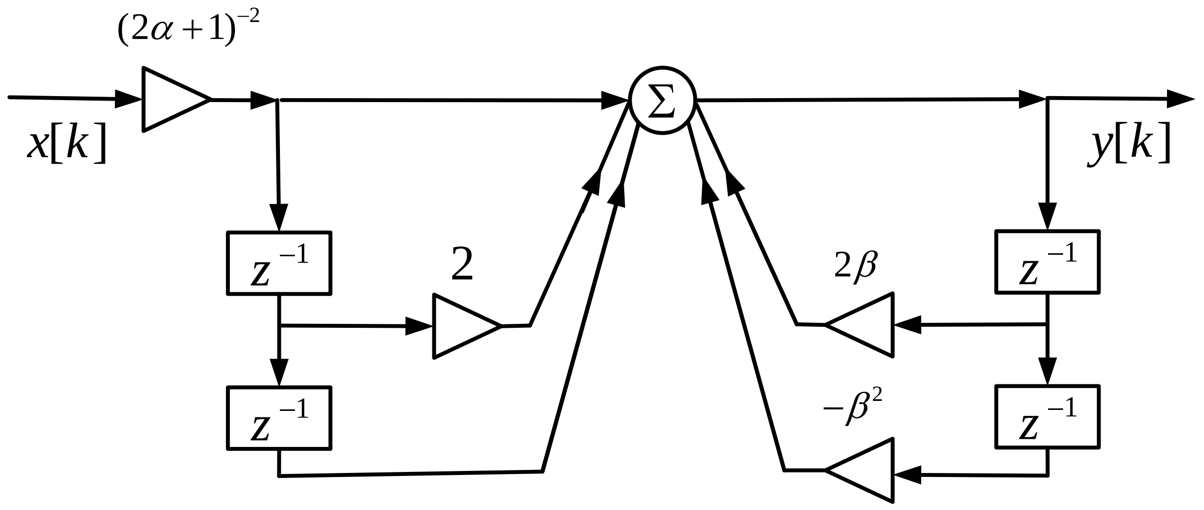
$$= (4\alpha^2+4\alpha+1)y[k] + (2-8\alpha^2)y[k-1] + (4\alpha^2-4\alpha+1)y[k-2]$$

$$y[k] = \frac{1}{(2\alpha+1)^2}x[k] + \frac{2}{(2\alpha+1)^2}x[k-1] + \frac{1}{(2\alpha+1)^2}x[k-2] +$$

$$+ \frac{2(2\alpha-1)}{(2\alpha+1)}y[k-1] - \frac{(2\alpha-1)^2}{(2\alpha+1)^2}y[k-2]$$

$$y[k] = \frac{x[k]+2x[k-1]+x[k-2]}{(2\alpha+1)^2} + 2\beta y[k-1] - \beta^2 y[k-2]$$

где $\beta = \frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}$, $y[k-1] = y[k-2] = 0.$



Метод билинейного *z*-преобразования

Пример. Синтез на основе аналоговых фильтров-прототипов.

Расчет реализуется с помощью компьютерного моделирования.

Получим методом билинейного *z*-преобразования БИХ-фильтры нижних частот со следующими характеристиками:

1) частота дискретизации $f_д = 2000$ Гц

2) граничная частота полосы пропускания $f_1 = 450$ Гц,

3) граничная частота полосы задерживания $f_2 = 550$ Гц,

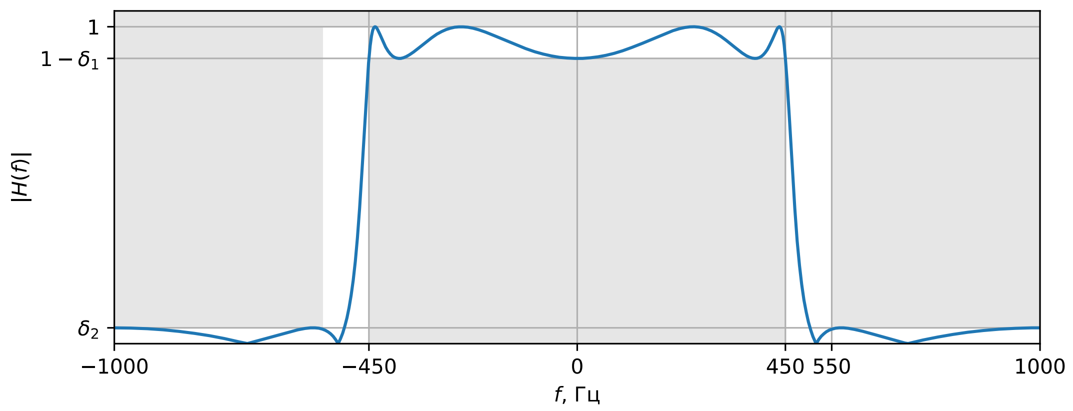
4) максимальное допустимое затухание в полосе пропускания $a_{max} = 0.9151$ дБ ($\delta_1 = 0.1$),

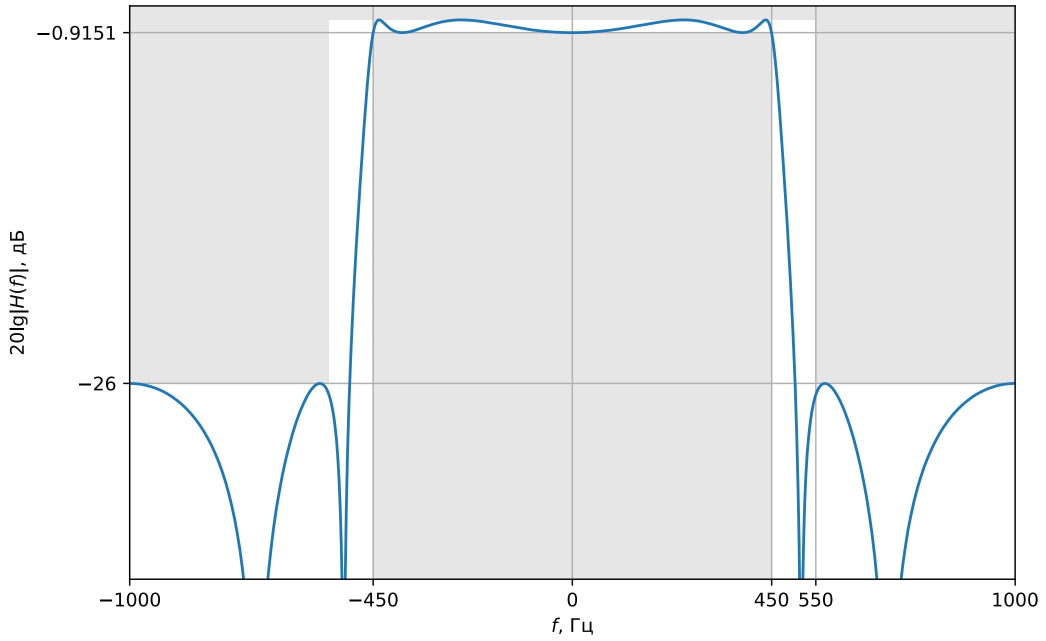
5) минимальное допустимое затухание в полосе задерживания $a_{min} = 26$ дБ ($\delta_2 = 0.05$).

$$20\log_{10}|H(f)| = 10\log_{10}|H(f)|^2$$

$$-a_{max} = 20\log_{10}(1-\delta_1) = 20\log_{10}(1-0.1) = -0.9151 (\text{дБ})$$

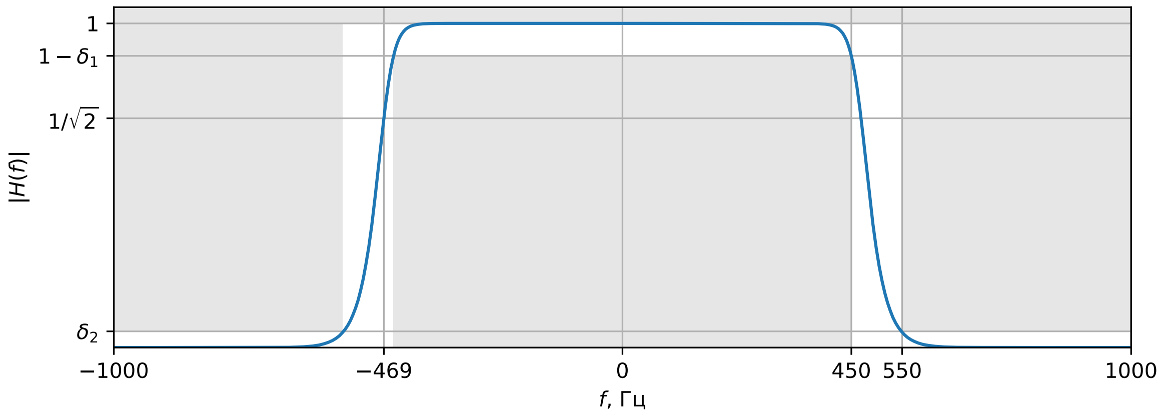
$$-a_{min} = 20\log_{10}(\delta_2) = 20\log_{10}(0.05) = -26 (\text{дБ})$$





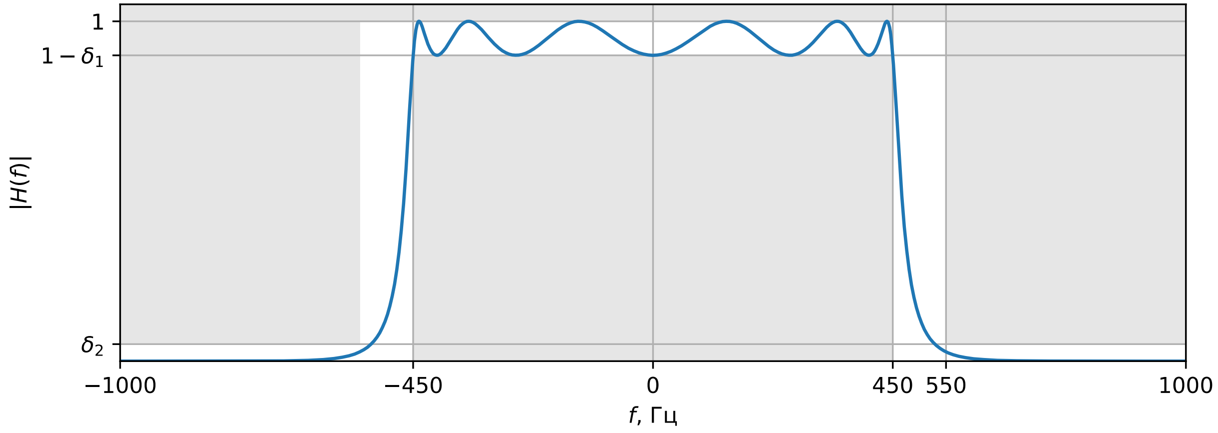
Метод билинейного z-преобразования

1) Фильтр Баттерворта (12 порядка)



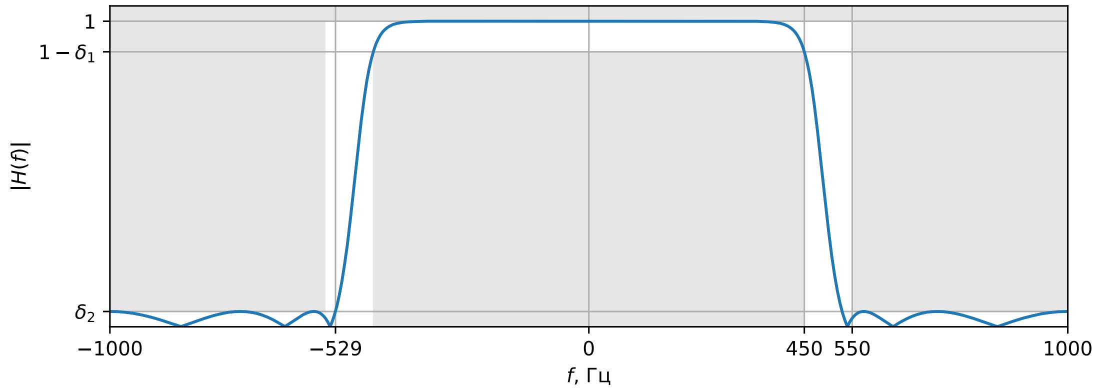
Параметры: порядок N, частота среза f_c.

2) Фильтр Чебышёва 1 рода (6 порядка)



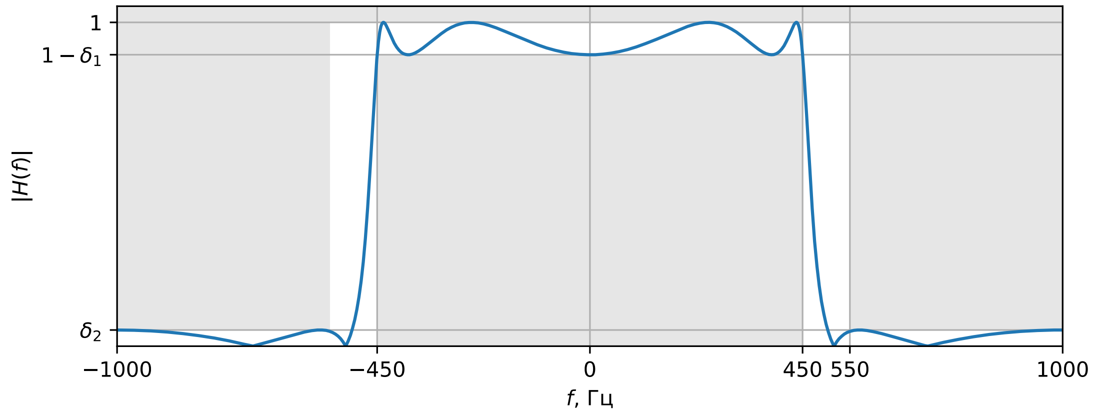
Параметры: порядок N, частота среза f_c, величина пульсаций в полосе пропускания.

3) Фильтр Чебышёва 2 рода (6 порядка)



Параметры: порядок N, частота среза f_c, величина пульсаций в полосе задерживания.

4) Фильтр Золотарёва—Кауэра (4 порядка)



Параметры: порядок N, частота среза f_c, величины пульсаций в полосах задерживания и пропускания.

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения
с лекции 11 ноября 2024 г. (часть 2).

№1. Методом инвариантной импульсной характеристики получить цифровой аналог каскада из двух RC–цепочек интегрирующего типа. Записать разностное уравнение, передаточную функцию и построить блок схему одной из реализаций получившегося фильтра.

№2. Методом билинейного *z*–преобразования получить цифровой аналог RC–цепочки интегрирующего типа. Записать разностное уравнение, передаточную функцию, изобразить нуль-полюсную диаграмму и построить блок схему одной из реализаций получившегося фильтра.

№3. Получить выражения для частотной характеристики, АЧХ и ФЧХ фильтра, заданного разностным уравнением

$$y[k]=(1-A)x[k]+Ay[k-1],\ y[-1]=0.$$

где $0<A<1$ (квазиинтегратор).

Список литературы.

[1] Prandoni P., Vetterli M. Signal processing for communications. – Lausanne : EFPL Press, 2008.

[2] Солонина А. И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB. – СПб.:БХВ-Петербург, 2021.

[3] Shenoi B. A. Introduction to digital signal: Processing and filter design. – John Wiley & Sons, 2006.

[4] Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2019.

[5] Романюк Ю. А. Основы цифровой обработки сигналов : учебное пособие : в 3-х ч. Ч. 1: Свойства и преобразования дискретных сигналов. - Изд. 2-е, перераб. –М.: МФТИ, 2007.

Про преобразование Лапласа рекомендуется прочитать по учебнику [5] раздел 1.10 «Преобразование Лапласа в линейных системах» стр. 74-87 либо приложение к лекции «Преобразование Лапласа в линейных системах».
Учебные пособия [2], [4], [5] есть в библиотеке МФТИ.