Лекция 8 по курсу «Основы цифровой обработки сигналов»

21 октября 2024 г.

4.3. *z*-преобразование в дискретных системах.

Переход от преобразования Лапласа к *z*-преобразованию.

Свойства *z*-преобразования.

z-преобразование тестовых сигналов.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

Методы вычисления обратного z-преобразования:

разложение на простые дроби,

контурное интегрирование (на основе теоремы Коши о вычетах),

разложение в степенной ряд,

деление числителя *z*-формы на ее знаменатель,

использование таблицы соответствий.

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{k-1} dz$$

Приложение. Преобразование Лапласа.

4.3. *z*-преобразование в дискретных системах. Переход от преобразования Лапласа к *z*-преобразованию.

Преобразование Лапласа можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье на случай комплексных частот $p = \beta + j\omega$, где β – положительная константа, выбираемая так, чтобы сигнал $x(t)e^{-\beta t}$ был абсолютно интегрируемым при $t \geq 0$:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \qquad (1)$$

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\beta - j\infty}^{\beta + j\infty} X(p) e^{pt} dp. \qquad (2)$$

Это есть пара преобразования Лапласа. Обратное преобразование (2) совершается путем интегрирования в комплексной плоскости p вдоль вертикальной прямой $\beta = const$. Преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа, в котором достаточно p заменить на $j\omega$, т. е. положить $\beta = 0$.

Пусть теперь $x(t)$ дискретизуется с шагом Δt. Подставим в (1) вместо $x(t)$ модель дискретизованного сигнала

$$x[k] = \Delta t\, x(k\Delta t),$$

$$x_д(t) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\delta(t - k\Delta t),$$

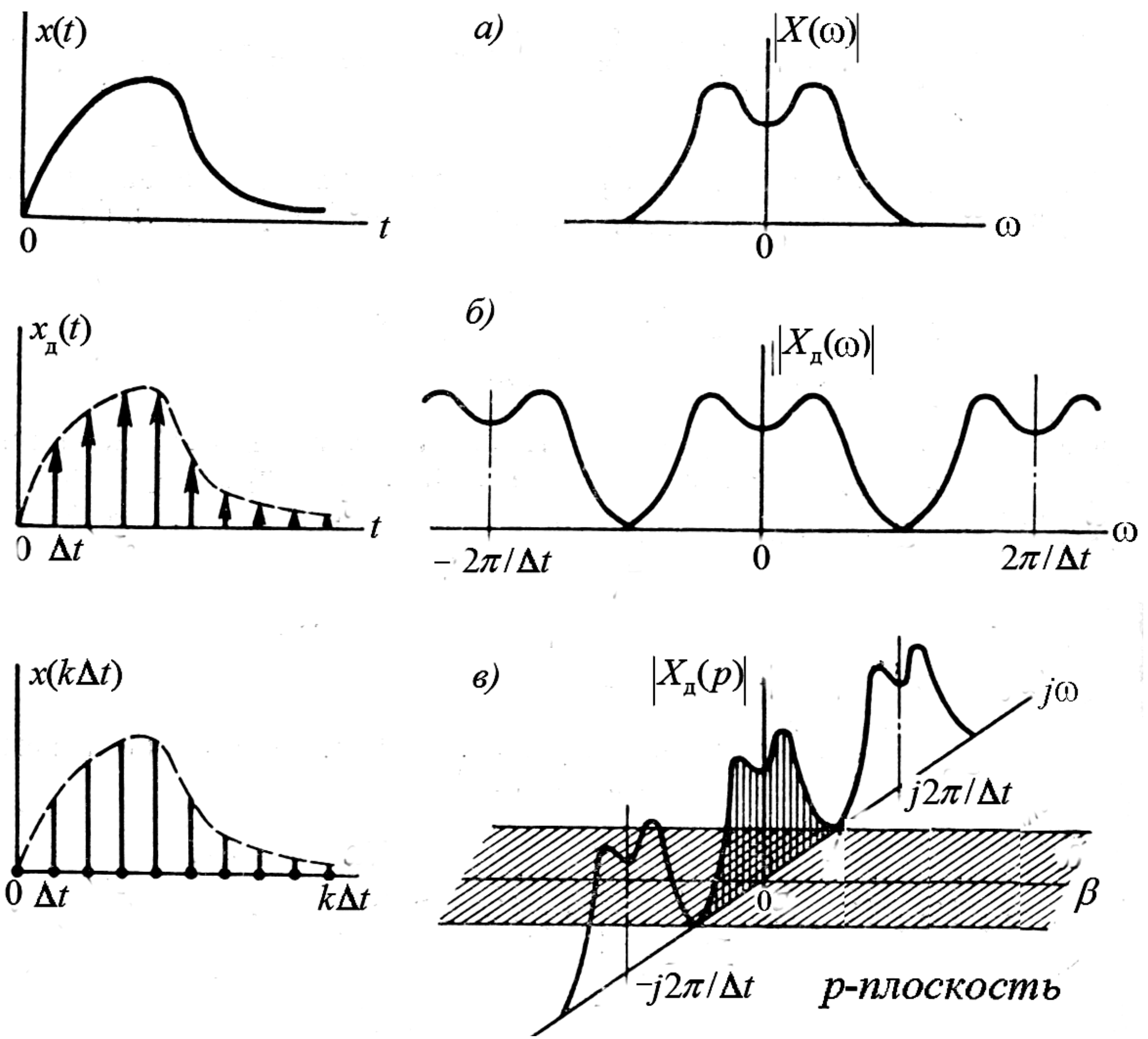
а в (2) перейдем от t к $k\Delta t$. Учитывая, что вдоль линии, параллельной оси $j\omega$, изображение $X_д(p)$ является периодической функцией с периодом, равным частоте дискретизации $\omega_д = 2\pi / \Delta t$, получаем

$$X_д(p) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t)\; e^{-pk\Delta t}, \qquad (3)$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\beta - j\pi/\Delta t}^{\beta + j\pi/\Delta t} X_д(p) e^{pk\Delta t} dp. \qquad (4)$$

Представление (3) и (4) широко используется при анализе дискретных сигналов. Часто его применяют в модифицированном виде, носящем название *z*-преобразования. Для этого перейдем к новой переменной $z = \exp(p\Delta t)$.

Переход от преобразования Лапласа к *z*-преобразованию



$$z = \exp\left(p\Delta t\right).$$

Учитывая, что $dz = \Delta t \exp\left(p\Delta t\right)dp$ и $dp = dz / z\Delta t$, получаем

$$X(z) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) z^{-k},$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{j2\pi\Delta t} \oint_C X(z) z^{k-1} dz,$$

и с учетом того, что $x[k] = \Delta t\, x\left(k\Delta t\right)$,

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}, \qquad (5)$$

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{k-1} dz, \qquad (6)$$

где C – замкнутый контур в плоскости z, охватывающий все полюса подынтегральной функции $X(z)z^{k-1}$. Выражения (5) и (6) определяют <u>одностороннее прямое и обратное z – преобразование</u> соответственно.

Здесь $x[k]$ – дискретный сигнал, определенный на бесконечном интервале $[0,\ \infty)$, а $X(z)$ является комплексной функцией непрерывного комплексного аргумента z.

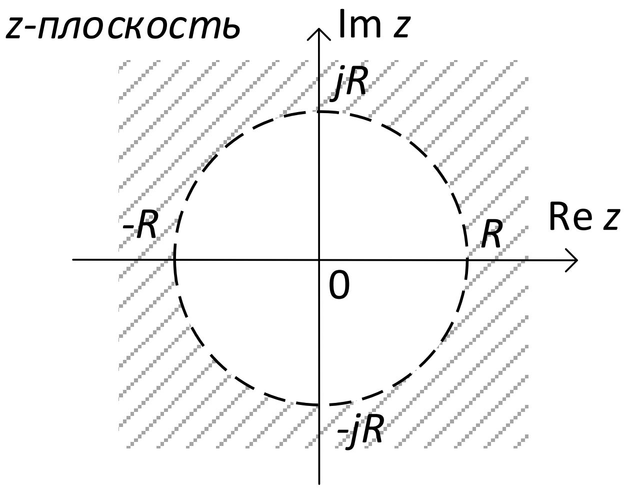
Переход от преобразования Лапласа к z-преобразованию

Из теории функций комплексного переменного известно, что ряд (5) будет сходиться, если коэффициенты ряда удовлетворяют условию

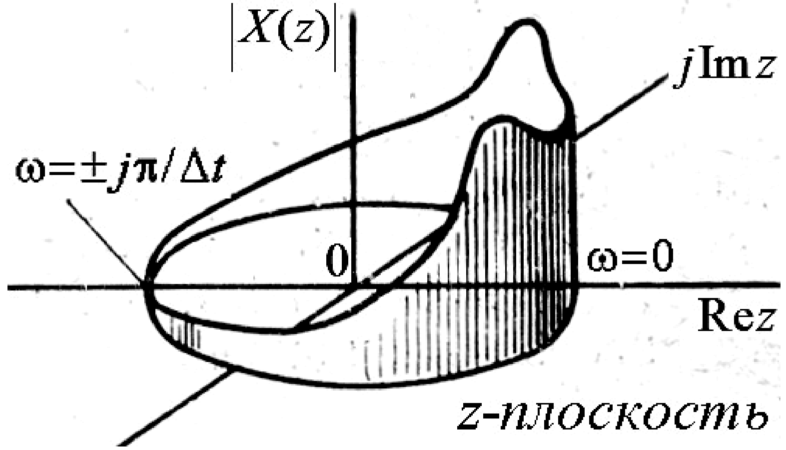
$$\left|x[k]\right| < M \cdot R^k,$$

где $M > 0$ и $R > 0$ – постоянные вещественные числа.

Ряд (5) будет сходиться при всех z, таких, что $|z| > R$. В этой области $X(z)$ представляет собой аналитическую функцию z, не имеющую ни полюсов, ни существенно особых точек. Область сходимости $|z| > R \geq 0$.



Функция $X_д(p)$ отображается в функцию $X(z)$ так, что одному периоду $X_д(p)$ соответствует один оборот по окружности в плоскости z.



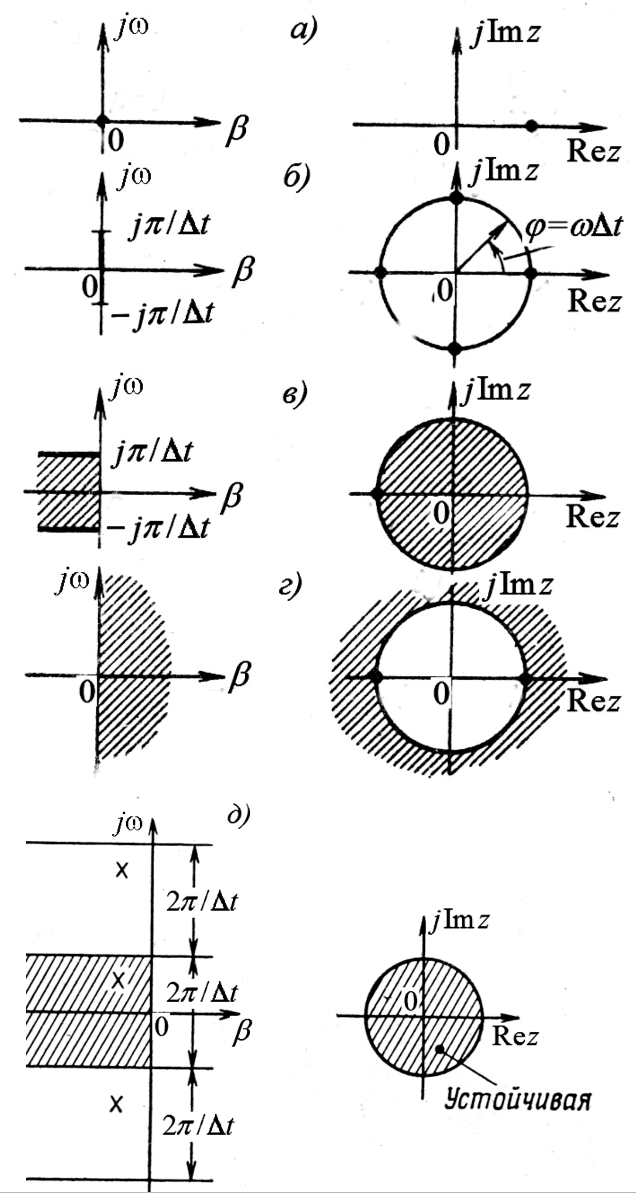
Отметим еще, что $e^{-p\Delta t}$ соответствует задержке на один такт дискретизации в $p-$плоскости в то время как z^{-1} означает такую же задержку в $z-$плоскости.

Переход от преобразования Лапласа к z-преобразованию

Поскольку $z = e^{p\Delta t} = e^{(\beta + j\omega)\Delta t}$, то $|z| = e^{\beta\Delta t}$ и $\arg z = \omega\Delta t$.

Переход от переменной p к переменной z соответствует отображению плоскости p на плоскость z, в результате которого линии, параллельные оси $j\omega$, отображаются в концентрические окружности с центром в начале координат. Сама ось $j\omega$ отображается в единичную окружность, причем, когда ω меняется от $-\pi/\Delta t$ до $\pi/\Delta t$, отображающая точка совершает один оборот на единичной окружности (рис. б). Полоса шириной $\omega_д = 2\pi/\Delta t$ левой полуплоскости p отображается внутрь круга единичного радиуса в плоскости z (рис. в). Правая полуплоскость p преобразуется во всю z-плоскость, исключая единичный круг (рис. г).

Все полюсы функции $X(p)$, которые расположены в плоскости p на одной вертикали с интервалом $\omega_д = 2\pi/\Delta t$, отображаются в единственный полюс $X(z)$ в плоскости z (рис. д).



Отображение p-плоскости в z-плоскость $z = \exp(p\Delta t)$.

Свойства *z*-преобразования

Пару z-преобразования будем обозначать $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$, где по-прежнему $x[k]$ – каузальный сигнал, т. е. $x[k]=0$ при $k<0$.

Линейность. Если $x_1[k] \xleftrightarrow{z} X_1(z)$ и $x_2[k] \xleftrightarrow{z} X_2(z)$, то

$$ax_1[k]+bx_2[k] \xleftrightarrow{z} aX_1(z)+bX_2(z). \quad (7)$$

Теорема запаздывания. Если $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$, то

$$x[k-m] \xleftrightarrow{z} z^{-m}X(z). \quad (8)$$

Доказательство

$$\sum_{k=0}^{\infty} x[k-m]z^{-k} = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x[k-m]z^{-(k-m)} =$$

$$= z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} x[l]z^{-l} = z^{-m}X(z).$$

В последнем равенстве проведена замена $l=k-m$ и использовано свойство каузальности сигнала $x[l]$, т. е. $x[l]=0$ при $l=k-m<0$.

Теорема о свертке. Если $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$ и $h[k] \xleftrightarrow{z} H(z)$, то последовательность

$$y[k]=\sum_{m=0}^{k} x[m]\,h[k-m] \quad (9)$$

имеет *z*-образ

$$Y(z)=X(z)H(z), \quad (10)$$

т. е. *z*-образ линейной свертки двух последовательностей равно произведению их *z*-образов.

Доказательство

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty} y[k]\,z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} x[m]\,h[k-m]\,z^{-k}.$$

Сделаем замену $k-m=l$. В результате получим

$$Y(z)=\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} h[l]z^{-l} = X(z)H(z),$$

что и требовалось доказать.

Свойства z-преобразования

Умножение сигнала на k.

Если $x[k] \xleftrightarrow{z} X(z)$, то

$$kx[k] \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz}.$$

Доказательство

Продифференцируем по z обе части формулы

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}.$$

Получаем

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-k)\,x[k]\,z^{-k-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $-z$:

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,x[k]\,z^{-k}.$$

Отсюда

$$kx[k] \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz}. \qquad (11)$$

Умножение на экспоненту.

Умножим последовательность $x[k]$ на экспоненту $e^{\pm ak\Delta t}$

(a в общем случае комплексное).

z-преобразование такой последовательности

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{\pm ak\Delta t}x[k]\ z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\left(e^{\mp a\Delta t}z\right)^{-k} = X(ze^{\mp a\Delta t}).$$

Таким образом,

$$x[k]e^{\pm ak\Delta t} \xleftrightarrow{z} X\left(ze^{\mp a\Delta t}\right). \qquad (12)$$

Это теорема смещения для z-преобразования.

Теорема опережающего сдвига.

Для <u>каузального</u> сигнала $x[k]$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \ldots$$

Для упреждающего сигнала $x[k+1]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x[k+1]\,z^{-k} = x[1] + x[2]z^{-1} + x[3]z^{-2} + \ldots = z\left[X(z) - x[0]\right].$$

Таким образом,

$$x[k+1] \xleftrightarrow{z} z\left[X(z) - x[0]\right]. \qquad (13)$$

z-преобразование тестовых сигналов

z-преобразование тестовых сигналов

$x[k]$ – единичный импульс, т. е.

$$x[k] = \mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \qquad (14)$$

$X(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} = 1$ на всей z-плоскости.

$u[k]$ – единичный скачок

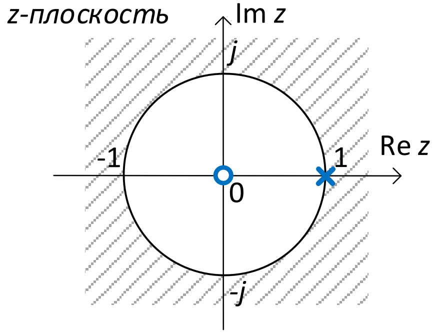
$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases} \qquad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}.$$

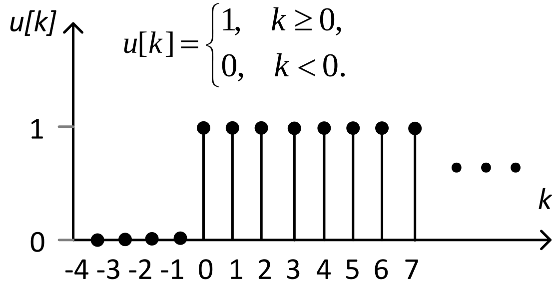
Очевидно, что $u[k] - u[k-1] = \mathbf{1}[k]$. z-образ этого уравнения

$$U(z) - U(z)\ z^{-1} = 1.$$

Отсюда

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \qquad (15)$$





Функция $U(z)$ имеет нуль при $z = 0$ и полюс в точке $z = 1$.

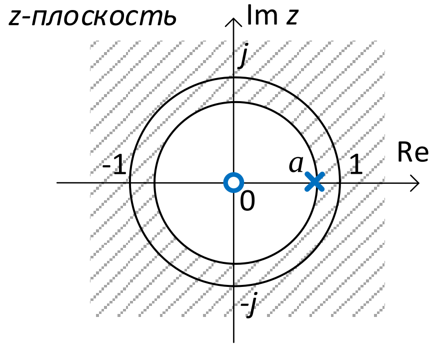
Сходится при $|z| > 1$.

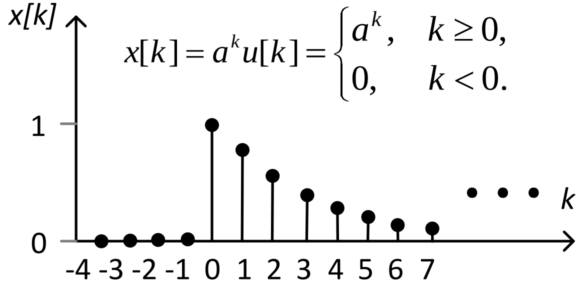
$x[k]$ – действительная экспонента, т. е. $x[k] = a^k u[k]$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a z^{-1}\right)^k.$$

Это сумма бесконечной геометрической прогрессии

(знаменатель прогрессии $q = a z^{-1}$).





случай 0<a<1

Ряд сходится к

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \qquad (16)$$

если $\left|a z^{-1}\right| < 1$ или $|z| > |a|$. Функция $X(z)$ имеет нуль при $z = 0$ и полюс при $z = a$ на окружности, ограничивающей область сходимости.

z-преобразование тестовых сигналов

$x[k] = k\, a^k u[k]$

Ранее мы установили, что

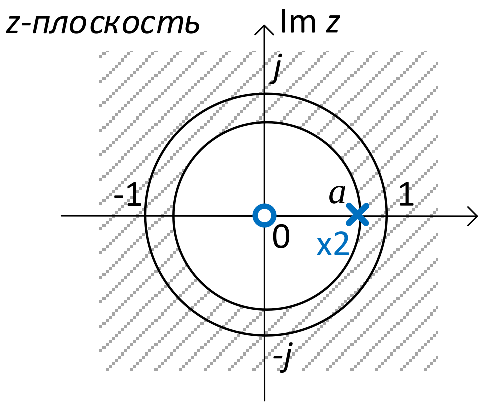
$$a^k u[k] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}},$$

По свойствам z-преобразования если $x[k] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$, то

$$kx[k] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}.$$

В итоге

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}.$$



Функция $X(z)$ имеет двойной полюс при $z = a$.

z-преобразования тестовых последовательностей		
	тестовая последовательность	z-образ
1	$\mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$	$X(z) = 1$
2	$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$	$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$, сходится при $\lvert z \rvert > 1$
3	$x[k] = a^k u[k]$	$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$, сходится при $\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$.
4	$x[k] = k\, a^k u[k]$	$X(z) = \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$, сходится при $\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$.

Вычисление обратного *z*-преобразования

Ранее мы установили, что пара z-преобразования записывается в виде

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k},$$

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{k-1} dz.$$

Выражение для $x[k]$ позволяет найти каузальную последовательность по ее *z*–изображению $X(z)$.

В качестве контура интегрирования C можно взять любой замкнутый контур в *z*–плоскости, охватывающий все полюсы подинтегральной функции $X(z) z^{k-1}$ и начало координат.

Обратное *z*–преобразование существует только для таких функций которые могут иметь лишь конечное число изолированных полюсов, причем особенность в каждой из них является устранимой.

Основными задачами, решаемыми с помощью обратного *z*-преобразования, являются:

- определение по *z*–изображению последовательности $x[k]$, например, отклика фильтра;
- нахождение импульсной характеристики $h[k]$ по заданной передаточной функции фильтра $H(z)$.

Существуют различные способы вычисления обратного *z*-преобразования на основе

- теоремы Коши о вычетах;
- разложения *z*-изображения на простые дроби;
- деления числителя *z*-изображения на ее знаменатель;
- разложения *z*-изображения в ряд по степеням z^{-1};
- таблицы соответствий.

Вычисление обратного *z*-преобразования

№11

Метод разложения на простые дроби

Эффективный способ вычисления обратного z-преобразования аналогичен способу разложения на простейшие дроби в теореме Хевисайда.

Форму разложения $X(z)$ на простейшие дроби выбираем так, чтобы были слагаемые вида $1/(1-az^{-1})$, которые можно поставить в соответствие тестовой последовательности $a^k u[k]$.

Пример 1. Найдем обратное *z*-преобразование функции

$$X(z)=\frac{1}{1-0,25z^{-1}-0,375z^{-2}}$$

Решение.

Представим $X(z)$ суммой элементарных дробей :

$$X(z)=\frac{1}{(1+0,5z^{-1})(1-0,75z^{-1})}=\frac{A}{(1+0,5z^{-1})}+\frac{B}{(1-0,75z^{-1})}.$$

Коэффициенты каждой дроби мы определим по методу неопределенных коэффициентов.

$$X(z)=\frac{A(1-0,75z^{-1})+B(1+0,5z^{-1})}{(1+0,5z^{-1})(1-0,75z^{-1})}.$$

$$\begin{cases} A+B=1; \\ 0,5B-0,75A=0. \end{cases}$$

Решение этой системы дает: $A=0,4$ и $B=0,6$.

$$X(z)=\frac{0,4}{(1+0,5z^{-1})}+\frac{0,6}{(1-0,75z^{-1})}.$$

Используя соответствие для тестовой последовательности

$$a^k u[k] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}},$$

получаем

$$x[k]=0,4(-0,5)^k u[k]+0,6(0,75)^k u[k].$$

№12

Метод контурного интегрирования

При вычислении интеграла

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{k-1} dz.$$

можно воспользоваться теоремой Коши о вычетах, по которой $x[k]$ равно сумме вычетов подынтегральной функции $Y(z) = X(z) z^{k-1}$ в особых точках (в данном случае – в полюсах z_p), охватываемых контуром интегрирования C:

$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C Y(z) dz = \sum_p \operatorname*{Res}_{z_p} Y(z), \quad k \geq 0 \tag{17}$$

Для нахождения вычетов используются следующие формулы:

- в случае простого (однократного) полюса, т. е. полюса первого порядка

$$\operatorname*{Res}_{z_p} Y(z) = \lim_{z \to z_p} Y(z)(z - z_p); \tag{18}$$

- в случае m-кратного полюса, т. е. полюса m-го порядка

$$\operatorname*{Res}_{z_p} Y(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_p} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[Y(z)(z - z_p)^m \right]. \tag{19}$$

Пример 2. Найти последовательность $x[k]$, если ее z-образ

$$X(z) = \frac{z(1-e^a)}{(z - e^a)(z-1)}.$$

Решение.

Подыинтегральное выражение обратного z-преобразования

$$Y(z) = X(z) z^{k-1} = \frac{z^k (1-e^a)}{(z - e^a)(z-1)}.$$

Функция $Y(z)$ имеет два простых полюса: $z_1 = e^a$ и $z_2 = 1$.

$$x[k] = \operatorname*{Res}_{z_1} Y(z) + \operatorname*{Res}_{z_2} Y(z) = \lim_{z \to e^a} \frac{z^k (1-e^a)}{(z - e^a)(z-1)} (z - e^a) +$$

$$+ \lim_{z \to 1} \frac{z^k (1-e^a)}{(z - e^a)(z-1)} (z-1) = (1 - e^{ak}), \quad k \geq 0.$$

Заметим, что в силу каузальности последовательности $x[k] = 0 \;\; k < 0.$

Ответ. $x[k] = (1 - e^{ak}) u[k]$, где $u[k]$ — дискретная функция включения.

Вычисление обратного *z*-преобразования

Пример 3. Найти последовательность $x[k]$, если ее *z*-образ

$$X(z)=\frac{z\,e^{a}}{\left(z-e^{a}\right)^{2}}.$$

Решение.

Подыинтегральное выражение обратного *z*-преобразования

$$Y(z)=X(z)z^{k-1}=\frac{z^{k}e^{a}}{\left(z-e^{a}\right)^{2}}.$$

Функция $Y(z)$ имеет один двукратный полюс $z_1=e^{a}$.

$$x[k]=\operatorname*{Res}_{z_1} Y(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to e^{a}}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^{k}e^{a}}{\left(z-e^{a}\right)^{2}}(z-e^{a})^{2}\right]=$$

$$=\lim_{z\to e^{a}} z^{k-1}e^{a}k=ke^{ak},\quad k\ge 0.$$

Ответ. $x[k]=ke^{ak}u[k]$, где $u[k]$ — дискретная функция включения.

Метод разложения в степенной ряд

Из формулы прямого *z*-преобразования

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}$$

получаем

$$X(z)=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\ldots+x[k]z^{-k}+\ldots$$

Следовательно, коэффициенты ряда по степеням z^{-1} соответствуют значениям $x[k]$. Заметим, что *z*-форма также представляется полиномом, но посредством ее разложения в ряд, например, в ряд Маклорена:

$$X(z^{-1})=X(0)+\frac{X'(0)}{1!}z^{-1}-\frac{X''(0)}{2!}z^{-2}+\ldots$$

Тогда искомая последовательность записывается в виде

$$x[k]=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k}}{d(z^{-1})^{k}}X(z^{-1})\right]_{z^{-1}=0}$$

Метод деления числителя *z*-формы на ее знаменатель

Смысл метода заключается в том, что передаточную функцию представить полиномом по степеням z^{-1}.

Из формулы прямого z-преобразования $X(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$

получаем

$$X(z)=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\ldots+x[k]z^{-k}+\ldots$$

Следовательно, коэффициенты ряда по степеням z^{-1} соответствуют значениям $x[k]$.

Пример 4. Найдем обратное z-преобразование функции:

$$X(z)=\frac{1}{1-0,25z^{-1}-0,375z^{-2}}.$$

Разделим ее числитель на знаменатель

$$\begin{array}{l|l} -\;1 & 1-0,25z^{-1}-0,375z^{-2} \\ \;1-0,25z^{-1}-0,375z^{-2} & \hline 1+0,25z^{-1}+0,437z^{-2}+0,203z^{-3}+\ldots \\ \hline \quad -\;0,25z^{-1}+0,375z^{-2} & \\ \quad \;0,25z^{-1}-0,0625z^{-2}-0,09375z^{-3} & \\ \hline \qquad\qquad 0,4375z^{-2}+0,09375z^{-3} & \\ \qquad\qquad\quad \bullet\;\bullet\;\bullet & \end{array}$$

Первые значения $x[k]$ представлены таблицей

k	0	1	2	3
$x[k]$	1	0,250	0,437	0,203

Ограниченность рассмотренного способа заключается в том, что в ряде случаев мы не можем получить все $x[k]$.

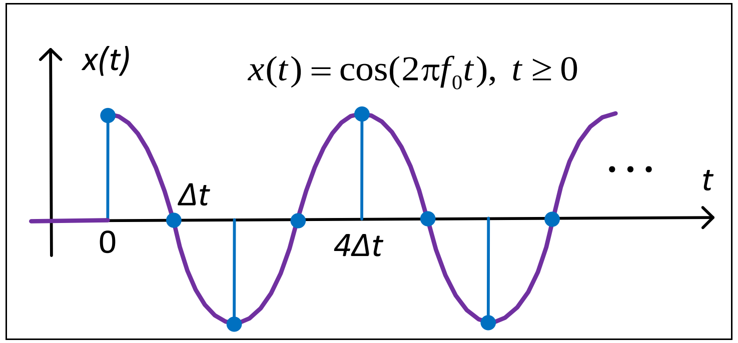
Пример 5. $$X(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)}.$$

Делением числителя на знаменатель получаем

$$X(z)=1-z^{-2}+z^{-4}-z^{-6}\ldots$$

Следовательно, $x[k]=\cos(k\pi/2)u[k]$.

Эта последовательность получается дискретизацией сигнала $x(t)=\cos(2\pi f_0 t),\ t\geq 0,$ так, что имеется 4 отсчета на периоде, т. е. $\Delta t=1/4f_0$.



Вычисление обратного *z*-преобразования

Вычисление обратного *z*–преобразования с использованием таблицы соответствий		
	тестовая последовательность	*z*-образ
1	$\mathbf{1}[k]=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$	$X(z)=1$
2	$\mathbf{1}[k-m]=\begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m,\end{cases}\quad m>0$	$X(z)=z^{-m}$
3	$u[k]=\begin{cases}1, & k\geq 0,\\ 0, & k<0,\end{cases}$	$U(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$, сходится при $\lvert z\rvert>1$
4	$u[k-m]=\begin{cases}1, & k\geq m,\\ 0, & k<m,\end{cases}\quad m>0$	$\dfrac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$, сходится при $\lvert z\rvert>1$
5	$x[k]=a^k u[k]$	$X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}$, сходится при $\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$.
6	$x[k]=k\,a^k u[k]$	$X(z)=\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}=\dfrac{az}{(z-a)^2}$, сходится при $\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$.
7	$x[k]=r^k\dfrac{\sin(k+1)\theta_0}{\sin\theta_0}u[k]$	$X(z)=\dfrac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$, $a_1=-2r\cos\theta_0,,\ a_2=r^2$
8	$x[k]=r^k\sin(\theta_0 k)u[k]$	$X(z)=\dfrac{b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$, $a_1=-2r\cos\theta_0,\ a_2=r^2,$ $b_1=r\sin\theta_0$
9	$x[k]=r^k\cos(\theta_0 k)u[k]$	$X(z)=\dfrac{1-b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$, $a_1=-2r\cos\theta_0,\ a_2=r^2,$ $b_1=r\cos\theta_0$

Вычисление обратного z-преобразования

П. 1-6 для таблицы соответствий были получены на лекции. Рассмотрим вопрос о том, как получить п. 9.

Пример 6. Найдем *z*–преобразование последовательности

$$x[k] = r^k \cos(\theta_0 k) u[k]\ ,\ \theta_0 = \omega_0 \Delta t\,.$$

Решение.

Запишем $x[k]$ в виде

$$x[k] = \frac{1}{2}\left(r^k e^{j\theta_0}\right)^k u[k] + \frac{1}{2}\left(r^k e^{-j\theta_0}\right)^k u[k].$$

По таблице соответствий $u[k] \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{1}{1-z^{-1}}$. Тогда

$$\frac{1}{2}\left(r^k e^{j\theta_0}\right)^k u[k] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1/2}{1-re^{j\theta_0}z^{-1}}, \quad \text{сходится при } |z| > r,$$

$$\frac{1}{2}\left(r^k e^{-j\theta_0}\right)^k u[k] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1/2}{1-re^{-j\theta_0}z^{-1}}, \quad \text{сходится при } |z| > r.$$

Тогда по свойству линейности

$$X(z) = \frac{1/2}{1-re^{j\theta_0}z^{-1}} + \frac{1/2}{1-re^{-j\theta_0}z^{-1}} = \frac{1-rz^{-1}\cos\theta_0}{1-2rz^{-1}\cos\theta_0 + r^2 z^2},$$

сходится при $|z| > r$.

Пример 7. Найти последовательность $x[k]$ по известному *z*-изображению

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Решение. Числитель $X(z)$ –многочлен ненулевой степени, поэтому $X(z)$ следует представить в виде суммы дробей

$$X(z) = \frac{b_0}{1-a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1-a_1 z^{-1}}.$$

В таблице соответствий находится z-изображение с таким же знаменателем и записывается соответствие

$$a^k u[k] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-a_1 z^{-1}}. \qquad (20)$$

Используя теорему о задержке и соответствие (20), получаем последовательность

$$x[k] = b_0 a^k u[k] + b_1 a^{k-1} u[k-1].$$

Задачи для самостоятельного решения с лекции 21 октября 2024 г.

№1. Пусть

$$X(z)=\frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}.$$

а) Найти обратное *z*–преобразование функции $X(z)$ методом разложения на простые дроби.

б) Определить последовательность $x[k]$, если $a=0,5+j0,5$ и $b=a^{*}=0,5-j0,5$.

№2. Используя основную теорему о вычетах, найти обратное *z*–преобразование функции

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+0,25z^{-2}}.$$

№3. Методом разложения на простые дроби найти последовательность $x[k]$ по известному *z*-образу

$$X(z)=\frac{1}{1-0,5z^{-1}+0,06z^{-2}}.$$

Литература

1. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. Москва. 2007г.

2. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 560 с.: ил.

3. Васильев, В. П. Основы теории и расчета цифровых фильтров: учебное пособие / В. П. Васильев, Э. Л. Муро, С. М. Смольский ; под ред. С. М. Смольского .— 2-е изд., стереотип. — Москва : ИНФРА-М, 2020

4. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: пер. с англ. / под ред. С.Ф. Боева. — 3-е изд., испр. — М.: Техносфера, 2019.

Книги [1-3] *есть в библиотеке МФТИ (см. http://ruslanlib.phystech.edu/pwb/), книга* [4] *доступна из сети МФТИ по ссылке https://reader.lanbook.com/book/73524*

Дополнительные примеры решения задач

Пример 8. Используя *z*-преобразование, найти линейную дискретную свертку

$$s[k]=x_1[k]\otimes x_2[k],\quad \text{где}\ x_1[k]=a^k u[k],\quad x_2[k]=u[k],$$

где $u[k]$ – дискретная функция включения, $|a|<1$.

Решение. Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находим *z*-образы $x_1[k]$ и $x_2[k]$

$$X_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>a,$$

$$X_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}=\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z|>1.$$

По теореме о свертке (с учетом $|a|<1$)

$$S(z)=X_1(z)X_2(z)=\frac{1}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)},\ |z|>1.$$

Чтобы определить последовательность $s[k]$, нужно найти обратное *z*-преобразование для функции $S(z)$. Сделаем это двумя способами.

Способ 1. Разложение на простые дроби.

$$S(z)=\frac{A}{\left(1-az^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-z^{-1}\right)},\ |z|>1, \qquad (21)$$

Коэффициенты каждой дроби мы определим по методу неопределенных коэффициентов. Для этого приведем правую часть (21) к общему знаменателю и получившийся полином в числителе приравняем к полиному числителя левой части:

$$\begin{cases} A+B=1; \\ aB+A=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{a}{1-a}; \\ B=\dfrac{1}{1-a}. \end{cases}$$

$$S(z)=-\left(\frac{a}{1-a}\right)\frac{1}{(1-az^{-1})}+\left(\frac{1}{1-a}\right)\frac{1}{(1-z^{-1})}.$$

Используя соответствие

$$b^k u[k]\xleftrightarrow{z}\frac{1}{(1-bz^{-1})},$$

получаем

$$s[k]=\left(\frac{a}{a-1}\cdot a^k+\frac{1}{1-a}\right)u[k]=\left(\frac{1}{1-a}+\frac{a^{k+1}}{a-1}\right)u[k]=\frac{1-a^{k+1}}{1-a}u[k]$$

Способ 2. Интегрирование по контуру.

$$S(z)=X_1(z)X_2(z)=\frac{1}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}=\frac{z^2}{(z-a)(z-1)},\ |z|>1$$

$$s[k]=\frac{1}{j2\pi}\oint_C S(z)z^{k-1}dz.$$

Подынтегральное выражение обратного z–преобразования

$$Y(z)=S(z)z^{k-1}=\frac{z^{k+1}}{(z-a)(z-1)}.$$

При $k\geq 0$ $Y(z)$ имеет два полюса первого порядка. Используя теорему Коши о вычетах, получаем

$$s[k]=\operatorname*{Res}_{z_1} Y(z)+\operatorname*{Res}_{z_2} Y(z)=$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{z^{k+1}}{(z-a)(z-1)}(z-a)+\lim_{z\to 1}\frac{z^{k+1}}{(z-a)(z-1)}(z-1)=$$

$$=\frac{a^{k+1}}{a-1}+\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-a}-\frac{a^{k+1}}{1-a}=\frac{1-a^{k+1}}{1-a},\quad k\geq 0.$$

Ответ.

$$s[k]=\frac{1-a^{k+1}}{1-a}u[k].$$

Пример 9. Определить при $\alpha>0$ обратное z-преобразование функции

$$X(z)=\frac{\left(1-e^{-\alpha\Delta t}\right)z}{z^2-(1+e^{-\alpha\Delta t})z+e^{-\alpha\Delta t}}=\frac{\left(1-e^{-\alpha\Delta t}\right)\ z}{(z-1)\ \left(z-e^{-\alpha\Delta t}\right)}.$$

Способ 1. Метод деления числителя на знаменатель.

Последовательное деление (столбиком) числителя на знаменатель даёт

$$X(z)=(1-e^{-\alpha\Delta t})z^{-1}+(1-e^{-2\alpha\Delta t})z^{-2}+\ldots(1-e^{-k\alpha\Delta t})z^{-k}+\ldots$$

Легко видеть, что

$$x[k]=\left(1-e^{-\alpha k\Delta t}\right)u[k]$$

Способ 2. Интегрирование по контуру.

$$x[k]=\frac{1}{j2\pi}\oint_c\frac{\left(1-e^{-\alpha\Delta t}\right)z^k}{(z-1)\left(z-e^{-\alpha\Delta t}\right)}\,dz,$$

где c – замкнутый контур интегрирования, включающий начало координат и полюса $z_{p_1}=1$ и $z_{p_2}=e^{-\alpha\Delta t}$.

Дополнительные примеры решения задач

$$x[k]=\frac{1}{j2\pi}\oint_{c}\frac{\left(1-e^{-\alpha\Delta t}\right)z^{k}}{(z-1)\left(z-e^{-\alpha\Delta t}\right)}\,dz.$$

Согласно теореме Коши о вычетах

$$x[k]=\sum_{i}\operatorname{Res}X(z)\,z^{k-1}\Big|_{z=z_{p_i}}=$$

$$=\operatorname{Res}\left.\frac{\left(1-e^{-\alpha\Delta t}\right)z^{k}}{(z-1)\left(z-e^{-\alpha\Delta t}\right)}\right|_{z=1}+\operatorname{Res}\left.\frac{\left(1-e^{-\alpha\Delta t}\right)z^{k}}{(z-1)\left(z-e^{-\alpha\Delta t}\right)}\right|_{z=e^{-\alpha\Delta t}}=$$

$$=u[k](1-e^{-\alpha k\Delta t}),$$

Ответ.

$$x[k]=\left(1-e^{-\alpha k\Delta t}\right)u[k].$$