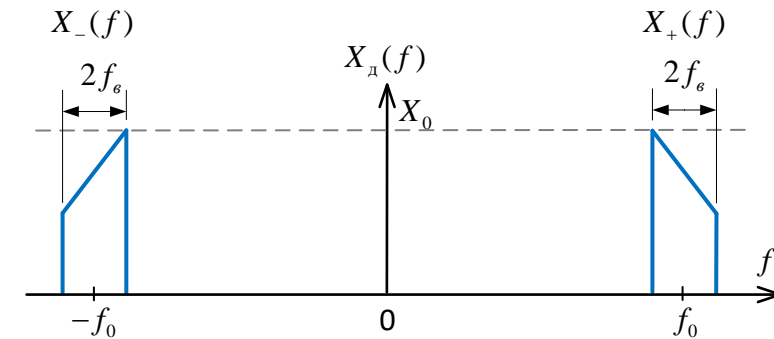


Лекция 11 по курсу «Цифровая обработка сигналов»

14 апреля 2025 г.

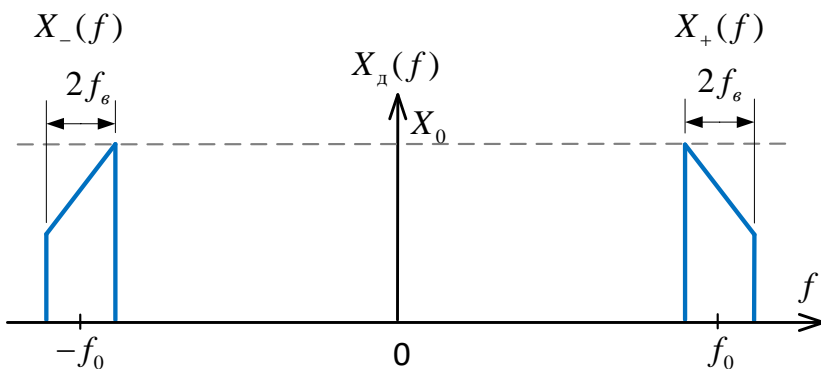
7.2. Дискретизация аналитического сигнала.

Аналитический сигнал. Преобразование Гильберта. Схема дискретизации аналитического сигнала. Повторение спектра при дискретизации аналитического сигнала. Идеальные восстанавливающие фильтры. Сложности реализации преобразователя Гильберта. Примеры вычисления преобразования Гильберта. Ряд Котельникова для узкополосного сигнала.



7. Методы преобразования узкополосных радиосигналов из аналоговой формы в цифровую.

Рассмотрим *действительный* полосовой сигнал $x(t)$ со спектром, изображенным на рисунке.



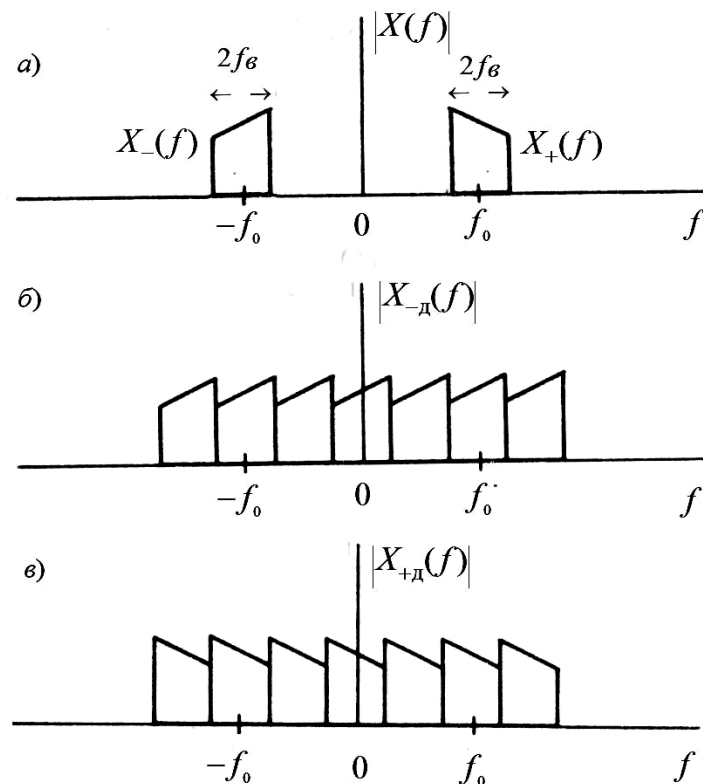
- Характерна чётная симметрия амплитудного спектра относительно оси ординат.
- Компонента $X_+(f)$ носит название прямого спектра, а компонента $X_-(f)$ — инверсного.
- Для такого сигнала требуемая в соответствии с теоремой отсчетов частота дискретизации $f_d = 2(f_0 + f_\epsilon)$ может оказаться очень высокой, находящейся за пределами быстродействия АЦП.

- Для узкополосных радиосигналов ($f_0 \gg f_\epsilon$) существуют методы дискретизации с частотой $f_d < 2(f_0 + f_\epsilon)$, позволяющие сохранить информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала.

- Примерами таких методов являются
 - квадратурная дискретизация,
 - дискретизация аналитического сигнала,
 - субдискретизация.

Пример. В глобальной системе спутниковой навигации ГЛОНАСС один из сигналов узкополосный и имеет несущую частоту $L1 = 1600$ МГц, аналогичная частота для GPS $L1 = 1575,42$ МГц.

7.1. Дискретизация аналитического сигнала.



Заметим, что спектр $X(f)$ действительного сигнала $x(t)$ обладает свойством симметрии:

$$X(f) = X^*(-f).$$

В силу этого для узкополосного сигнала и прямой $X_+(f)$, и инверсный спектр $X_-(f)$ содержат всю информацию о сигнале.

При этом их периодическое повторение при дискретизации с частотой $2f_0$ происходит без перекрытия отдельных копий. На этом основан метод дискретизации аналитического сигнала.

Аналитический сигнал

Аналитический сигнал $x_A(t)$ для действительного сигнала $x(t)$ определяется как комплексный сигнал, спектр которого

$$X_A(f) = \begin{cases} 2X_+(f), & f \geq 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Формулу (1) можно записать в виде

$$X_A(f) = X(f) + X(f)\operatorname{sgn} f, \quad (2)$$

где

$$\operatorname{sgn} f = \begin{cases} 1, & f \geq 0, \\ -1, & f < 0. \end{cases} \quad (3)$$

При этом $j/\pi t \xleftrightarrow{FT} \operatorname{sgn} f$. Тогда из (2) получаем, что

$$x_A(t) = x(t) + j(x(t) \otimes (1/\pi t)). \quad (4)$$

Преобразование Гильберта

Преобразование Гильберта

Для аналитического сигнала мы получили формулу

$$x_A(t) = x(t) + j(x(t) \otimes (1/\pi t)). \quad (5)$$

Свёртка в формуле (5)

$$x_G(t) = x(t) \otimes (1/\pi t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (6)$$

по определению является преобразованием Гильберта для функции $x(t)$.

Далее обозначим сопряженный по Гильберту сигнал $x_G(t)$, а его спектр как $X_G(f)$. Из (5) и (6) получаем, что

$$x_A(t) = x(t) + jx_G(t). \quad (7)$$

Тогда спектр сигнала $x_G(t)$

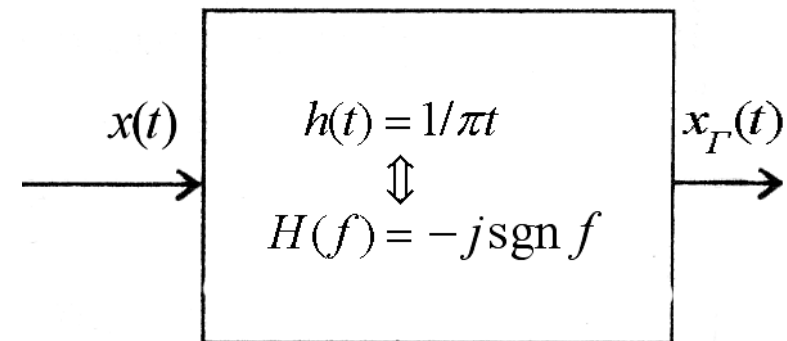
$$X_G(f) = -jX(f)\operatorname{sgn} f. \quad (8)$$

Используя (8), получаем

$$X(f) = jX_G(f)\operatorname{sgn} f, \quad (9)$$

и обратное преобразование Гильберта:

$$x(t) = x_G(t) \otimes (-1/\pi t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_G(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (10)$$



Преобразователь Гильберта

Отметим, что преобразование Гильберта обладает свойством линейности в силу линейности интеграла в (6).

Выражению (6) можно дать следующую интерпретацию: преобразованный по Гильберту сигнал получается пропусканием исходного действительного сигнала через фильтр с частотной характеристикой $-j \operatorname{sgn} f$. Фильтр осуществляет сдвиг по фазе всех гармонических компонент сигнала в сторону отставания на 90° .

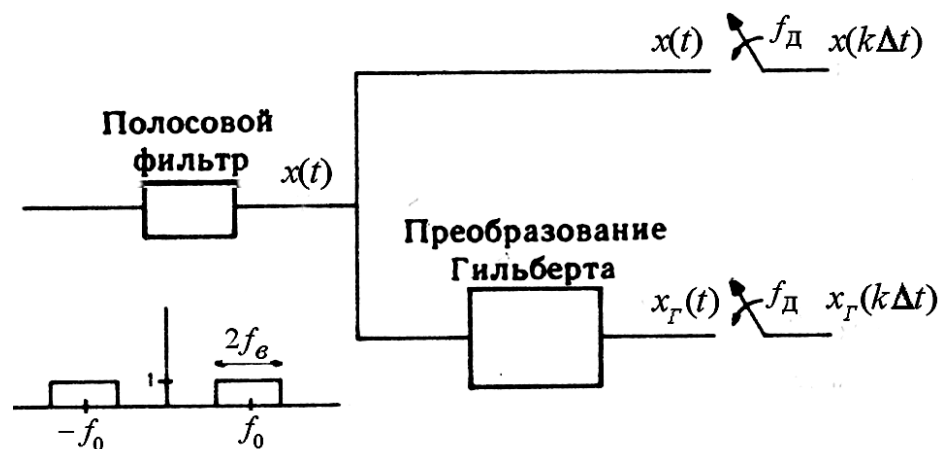
Значение формулы (7) заключается в том, что для действительного сигнала $x(t)$, сопряженного по Гильберту $x_G(t)$ и аналитического $x_A(t)$ справедливы соотношения:

$$x(t) = \operatorname{Re}(x_A(t)), \quad (11)$$

$$x_G(t) = \operatorname{Im}(x_A(t)). \quad (12)$$

Дискретизация аналитического сигнала

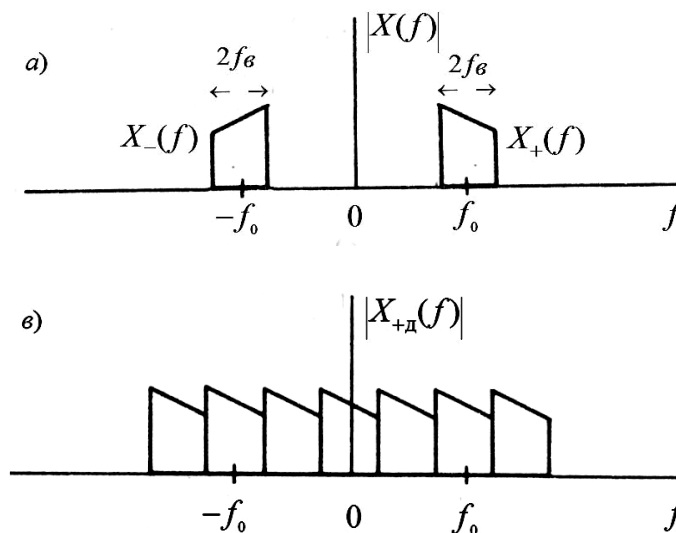
Схема дискретизации аналитического сигнала



Исходный сигнал $x(t)$ предварительно фильтруется полосовым фильтром. Это требуется для ослабления эффекта наложения частичных спектров при дискретизации. В схеме действуют два синхронно работающих АЦП, обслуживающих соответственно действительный и мнимый каналы обработки.

$$x_A(k\Delta t) = x(k\Delta t) + jx_H(k\Delta t).$$

Повторение спектра при дискретизации аналитического сигнала



Спектр аналитического сигнала односторонний и будет содержать составляющие только с положительными частотами: $X_A(f) = 2X_+(f)$. При дискретизации аналитического сигнала $x_A(t)$ с $f_D = 2f_0$ его спектр преобразуется в периодическое продолжение $2X_+(f)$ с периодом $2f_0$. Так как частичные спектры $2X_+(f \pm nf_D)$ не перекрываются, возможно точное восстановление $x_A(t)$ по выборкам $x_A(k\Delta t)$.

Идеальные восстанавливающие фильтры

Идеальные восстанавливающие фильтры

Для восстановления $x_A(t)$ по выборкам $x_A(k\Delta t)$ необходим полосовой фильтр с частотной характеристикой

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{при } f_0 - f_\epsilon \leq f \leq f_0 + f_\epsilon, \\ 0, & \text{при других } f. \end{cases}$$

Комплексная импульсная характеристика этого фильтра имеет вид

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi f_\epsilon t}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t}.$$

При этом предполагается, что $f_0/(2f_\epsilon) = m$, где m — целое число. Это условие можно выполнить либо выбором f_0 , либо дополнительным смещением по частоте (гетеродинированием сигнала).

Аналогично, исключив составляющие $X_+(f)$, можно сформировать сопряжённый аналитический сигнал $x_A^*(t) = x(t) - jx_I(t)$.

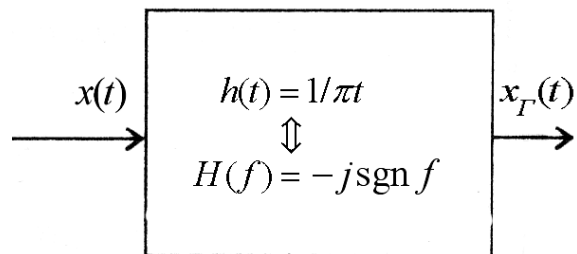
При дискретизации аналитического сигнала $x_A^*(t)$ с шагом $\Delta t = 1/2f_\epsilon$ его спектр преобразуется в периодическое продолжение $2X_-(f)$ с периодом $f_d = 2f_\epsilon$.

Для восстановления $x_A^*(t)$ по выборкам $x_A^*(k\Delta t)$ необходим полосовой фильтр с импульсной характеристикой

$$h^*(t) = \frac{\sin 2\pi f_\epsilon t}{\pi t} e^{-j2\pi f_0 t}.$$

Сложности реализации преобразователя Гильберта

Сложности реализации преобразователя Гильберта



$$x_T(t) = x(t) \otimes (1/\pi t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

- Для произвольных сигналов преобразователь Гильберта нереализуем, т. к. его импульсная характеристика не является каузальной:

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}.$$

- Однако его можно реализовать приближённо с некоторой задержкой t_0 , если отбросить ветви $h(t)$ левее точки $t = -t_0$ и правее точки $t = t_0$ и сдвинуть $h(t)$ вправо на t_0 :

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(t - t_0)}, & 0 \leq t \leq 2t_0. \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Погрешности преобразования, связанные с таким усечением импульсной характеристики, могут быть значительными.

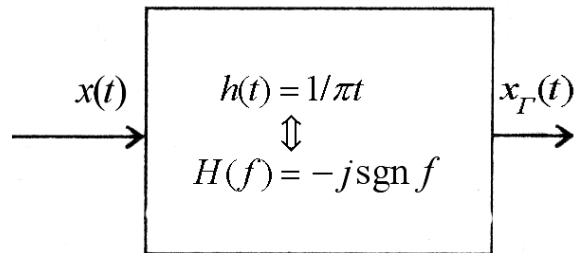
- Кроме того, задержка сигнала на t_0 должна быть учтена при работе преобразователя с другими устройствами.
- Нереализуемость преобразователя Гильберта объяснить можно также тем, что сдвиг фаз на $-\pi/2$ всех компонент сигнала практически не может быть выполнен точно. Для узкополосных радиосигналов такая операция выполняется тем точнее, чем уже полоса, т. е. чем сильнее неравенство $f_0 \gg 2f_g$

Замечание. Выражение под интегралами (6) и (10) имеет особую точку при $\tau = t$, поэтому интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{t - \tau} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{x(\tau) d\tau}{t - \tau} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{t - \tau} \right].$$

Примеры вычисления преобразования Гильберта

Примеры вычисления преобразования Гильберта



$$x_G(t) = x(t) \otimes (1/\pi t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (13)$$

1) Преобразование для $x(t) = \text{const}$.

Ядро преобразования Гильберта является нечётной функцией аргумента τ относительно точки $\tau = t$. Следовательно, сигнал, сопряжённый к константе, тождественно равен нулю:

$$x_G(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{const}}{t - \tau} d\tau = 0.$$

В частности, если сигнал $x(\tau)$ достигает экстремума при $\tau = t$ и в окрестности экстремума сигнал является чётной функцией, то в окрестности этой точки сопряжённый сигнал $x_G(t)$ проходит через нуль.

2) Преобразование Гильберта для гармонических сигналов.

В частотной области преобразование Гильберта можно представить как работу фильтра с частотной характеристикой $H(f) = -j \operatorname{sgn} f$.

Для сигнала $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ спектр

$$X(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0).$$

Спектр преобразованного по Гильберту сигнала

$$X_G(f) = X(f)H(f) = \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0).$$

Аналогично для $x(t) = \sin 2\pi f_0 t$ имеем $x_G(t) = -\cos 2\pi f_0 t$.

Следовательно, если

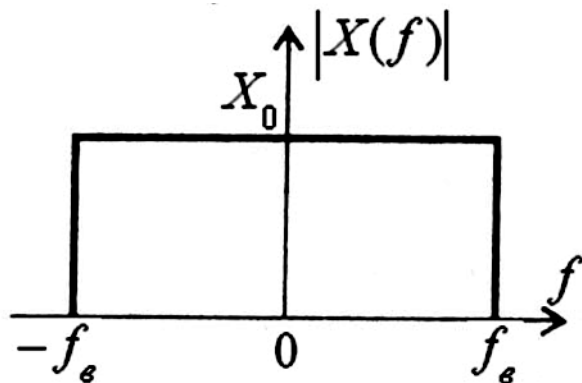
$$x(t) = \sum_n (a_n \cos 2\pi f_n t + b_n \sin 2\pi f_n t),$$

то

$$x_G(t) = \sum_n (a_n \sin 2\pi f_n t - b_n \cos 2\pi f_n t).$$

Примеры вычисления преобразования Гильберта

3) Преобразование Гильберта для видеосигнала с прямоугольным спектром. Рассмотрим действительный низкочастотный сигнал $x(t)$ со спектром $X(f)$, показанным на рисунке.



Фазовая часть спектра нулевая. Соответствующий аналитический сигнал имеет спектр

$$X_A(f) = \begin{cases} 2X_+(f), & f > 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases}$$

поэтому

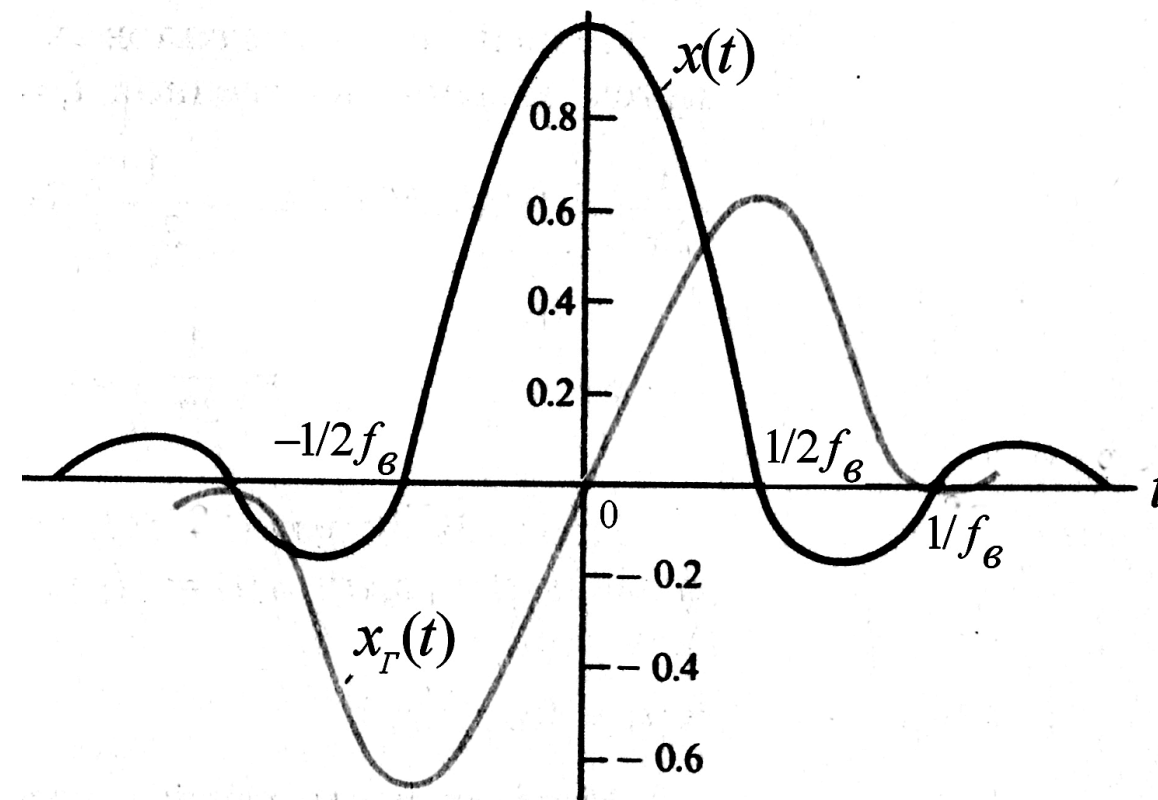
$$x_A(t) = 2X_0 \int_0^{f_\epsilon} e^{j2\pi ft} df = \frac{X_0}{j\pi t} (e^{j2\pi f_\epsilon t} - 1).$$

Отсюда

$$x(t) = \operatorname{Re}[x_A(t)] = X_0 2f_\epsilon \sin 2\pi f_\epsilon t / 2\pi f_\epsilon t,$$

$$x_G(t) = \operatorname{Im}[x_A(t)] = X_0 2f_\epsilon \sin^2(\pi f_\epsilon t) / (\pi f_\epsilon t).$$

Следует отметить, что сопряжённый сигнал обращается в нуль в точке, где исходный сигнал достигает максимального значения.



Исходный и сопряжённый сигналы

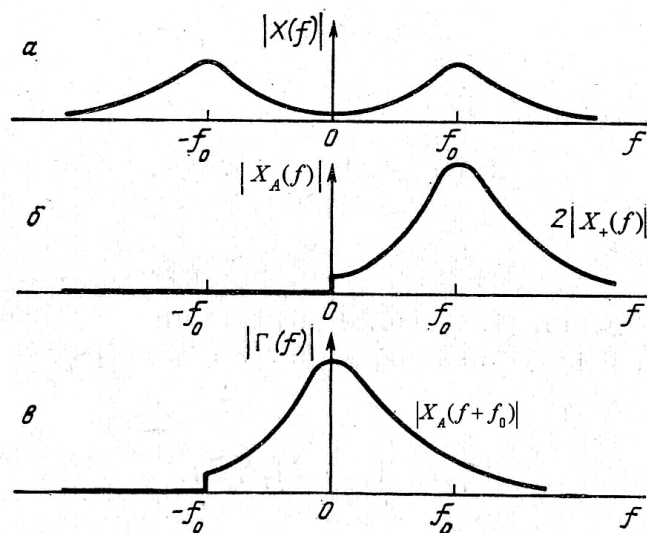
Примеры вычисления преобразования Гильберта

4) Преобразование Гильберта для узкополосного радиосигнала

$$x(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)),$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся по сравнению с циклическим множителем функции времени. Возьмём спектр аналитического сигнала и сдвинем его так, чтобы он оказался сконцентрированным около нулевой частоты:

$$\Gamma(f) = X_A(f + f_0). \quad (14)$$



Этому спектру соответствует сигнал

$$\gamma(t) = x_A(t) \exp(-j2\pi f_0 t).$$

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t) = \operatorname{Re} x_a(t) = \operatorname{Re}(\gamma(t) e^{j2\pi f_0 t}).$$

Умножение $\gamma(t)$ на $e^{j2\pi f_0 t}$ означает перенос спектра $\gamma(t)$ вправо на величину f_0 .

При достаточной узкополосности сигнал $\gamma(t) e^{j2\pi f_0 t}$ будет иметь односторонний спектр с положительными частотами и может рассматриваться как аналитический. В таком случае $\gamma(t)$ будет комплексной огибающей сигнала. Поэтому сопряжённый по Гильберту сигнал

$$\begin{aligned} x_{\Gamma}(t) &= \operatorname{Im}[\gamma(t) e^{j2\pi f_0 t}] = x_c(t) \sin 2\pi f_0 t + x_s(t) \cos 2\pi f_0 t = \\ &= x_c(t) \cos(2\pi f_0 t - \pi/2) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t - \pi/2). \end{aligned}$$

Сравнивая выражения для $x(t)$ и $x_{\Gamma}(t)$, видим, что при $f_0 \gg 2f_{\text{с}}$ преобразование Гильберта выполняется над $\cos 2\pi f_0 t$ и $\sin 2\pi f_0 t$, а квадратурные компоненты $x_c(t)$ и $x_s(t)$ остаются неизменными.

Ряд Котельникова для полосового радиосигнала

Примечание. Выбор частоты f_0 .

Во многих случаях частоту f_0 выбрать нетрудно. Например, для узкополосного сигнала за f_0 принимается частота немодулированного несущего колебания. В этом случае

$$|x_A(t)| = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$$

при достаточной узкополосности совпадает с

$$A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}.$$

В других случаях f_0 выбирается так, чтобы минимизировать ширину полосы $\Gamma(f)$. Один из способов состоит в выборе f_0 «центра тяжести» положительной функции $|X_A(f)|^2$. Такое f_0 минимизирует величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f - f_0)^2 |X_A(f)|^2 df.$$

Ряд Котельникова для полосового радиосигнала

Комплексная огибающая $\gamma(t)$ полосового радиосигнала с полосой $2f_\epsilon$ может быть представлена рядом Котельникова

$$\gamma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k\Delta t) \cdot \frac{\sin 2\pi f_\epsilon(t - k\Delta t)}{2\pi f_\epsilon(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_\epsilon}. \quad (15)$$

Коэффициенты ряда определяются как

$$\gamma(k\Delta t) = A(k\Delta t)e^{j\varphi(k\Delta t)}. \quad (16)$$

При этом $x(t) = \text{Re}[\gamma(t)e^{j2\pi f_0 t}]$.

Тогда для узкополосного сигнала при $\Delta t = \frac{1}{2f_\epsilon}$

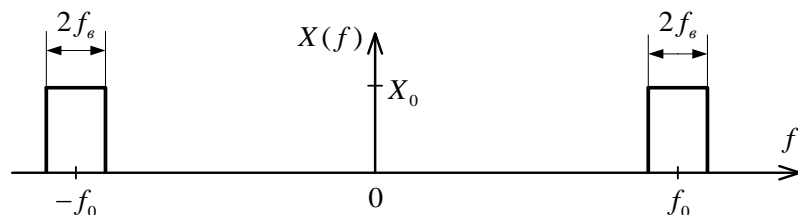
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(k\Delta t) \cdot \frac{\sin 2\pi f_\epsilon(t - k\Delta t)}{2\pi f_\epsilon(t - k\Delta t)} \cos(2\pi f_0 t + \varphi(k\Delta t)). \quad (17)$$

Выражение (17) представляет ряд Котельникова для узкополосного сигнала. Этот ряд включает слагаемые, которые имеют вид модулированных колебаний с несущей частотой f_0 , фазой $\varphi(k\Delta t)$ и огибающей

$$A(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_\epsilon(t - k\Delta t)}{2\pi f_\epsilon(t - k\Delta t)}. \quad (18)$$

Способы дискретизации полосового сигнала (примеры).

Пример 1а (повтор). Спектр $X(f)$ некоторого сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже (f_0 - несущая частота, $f_0 \gg 2f_\epsilon$).



а) Определить исходный сигнал $x(t)$ и условие на выбор частоты дискретизации $f_{д1}$ в соответствии с теоремой отсчетов.

Решение п. а).

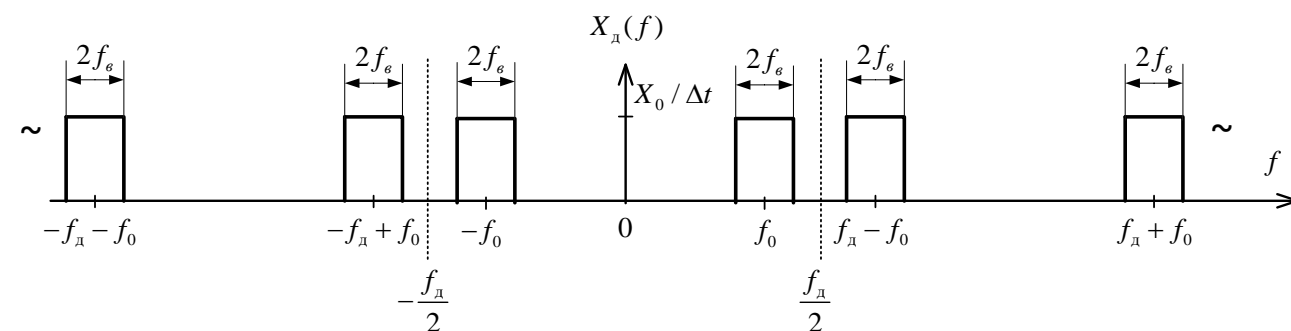
Исходный сигнал можно найти, например, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье для его спектра $X(f)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 \int_{-f_0-f_\epsilon}^{-f_0+f_\epsilon} e^{j2\pi f t} df + X_0 \int_{f_0-f_\epsilon}^{f_0+f_\epsilon} e^{j2\pi f t} df = \\ &= \frac{X_0 e^{j2\pi f t}}{2j\pi t} \Big|_{-f_0-f_\epsilon}^{-f_0+f_\epsilon} + \frac{X_0 e^{j2\pi f t}}{2j\pi t} \Big|_{f_0-f_\epsilon}^{f_0+f_\epsilon} = \\ &= \frac{X_0}{\pi t} e^{-j2\pi f_0 t} \sin(2\pi f_\epsilon t) + \frac{X_0}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t} \sin(2\pi f_\epsilon t) = \end{aligned}$$

$$= \frac{2X_0}{\pi t} \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_\epsilon t)$$

При дискретизации аналогового сигнала его спектр периодически повторяется вдоль оси частот с периодом, равным частоте дискретизации:

$$X_{д}(f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_{д}).$$

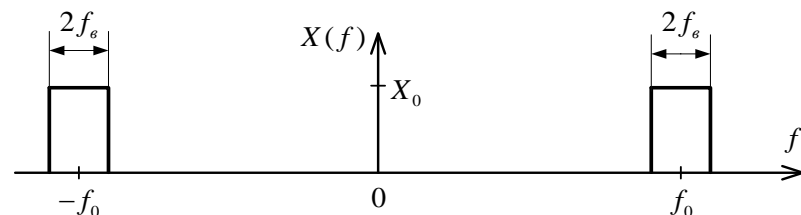


Как видно из рисунка, для того, чтобы эффект наложения спектров не проявился, необходимо, чтобы $\frac{f_{д}}{2} \geq f_0 + f_\epsilon$, а значит $f_{д} \geq 2(f_0 + f_\epsilon)$.

Частота дискретизации должна быть как минимум в два раза больше верхней граничной частоте спектра, которая в данном случае равна $f_0 + f_\epsilon$, что соответствует условию теоремы отсчетов.

Способы дискретизации полосового сигнала (примеры).

Пример 16 (повтор). Спектр $X(f)$ некоторого сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже (f_0 - несущая частота, $f_0 \gg 2f_\epsilon$).

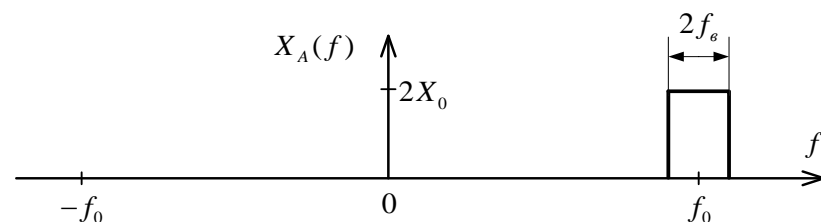


б) Определить аналитический сигнал $x_A(t)$, спектр аналитического сигнала $X_A(f)$ и условие на выбор частоты дискретизации $f_{д1}$, при котором при дискретизации аналитического сигнала нет перекрытия отдельных копий спектра.

Решение п. б).

Спектр аналитического сигнала можно найти, используя соотношение:

$$X_A(f) = \begin{cases} 2X_+(f), & f > 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$



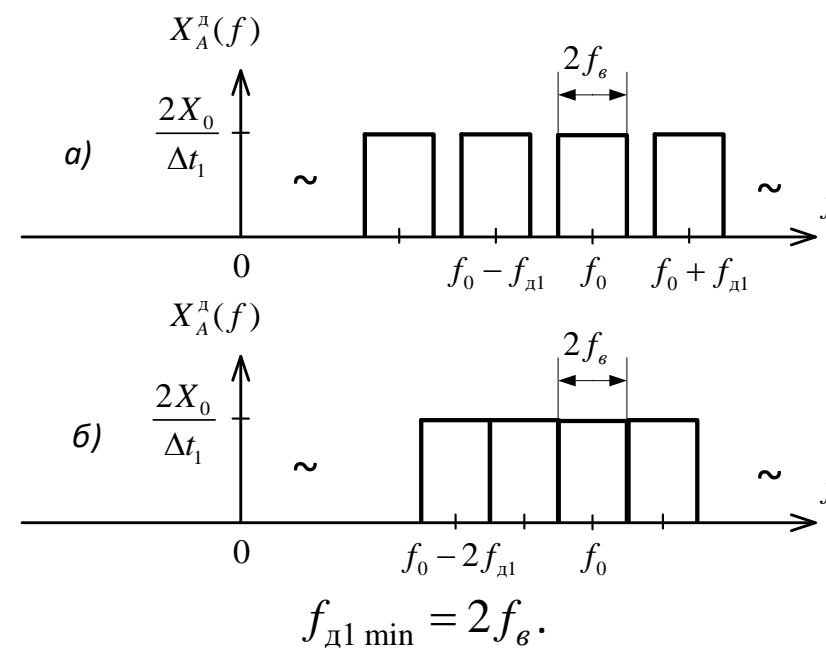
$x_A(t)$ находим обратным преобразованием Фурье:

$$x_A(t) = 2X_0 \int_{f_0-f_\epsilon}^{f_0+f_\epsilon} e^{j2\pi ft} df = \frac{2X_0 e^{j2\pi ft}}{2j\pi t} \Big|_{f_0-f_\epsilon}^{f_0+f_\epsilon} = \frac{2X_0}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t} \sin(2\pi f_\epsilon t).$$

$$\text{Заметим, что } x(t) = \text{Re}\{x_A(t)\} = \frac{2X_0}{\pi t} \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_\epsilon t).$$

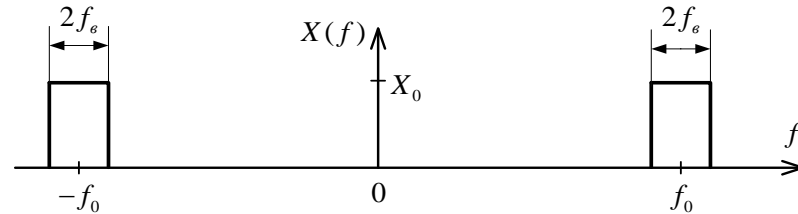
Отдельные копии спектра аналитического сигнала не будут перекрываться, если его дискретизовать с частотой дискретизации $f_{д1} \geq 2f_\epsilon$.

На рисунке ниже показаны спектры аналитического сигнала в частном (а) и в предельном (б) случаях.



Способы дискретизации полосового сигнала (примеры).

Пример 1в. Спектр $X(f)$ некоторого сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже (f_0 - несущая частота, $f_0 \gg 2f_\epsilon$).



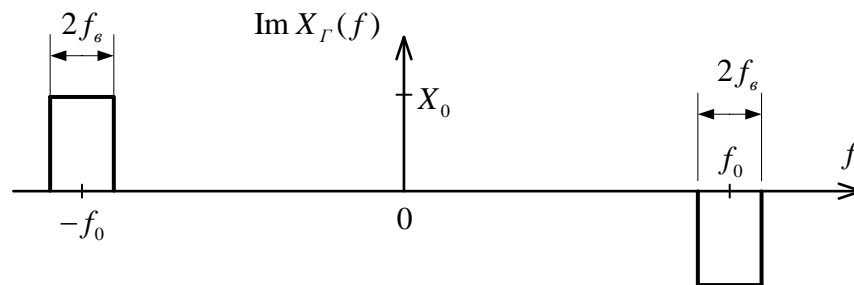
в) Определить сопряженный по Гильберту сигнал $x_\Gamma(t)$ и его спектр $X_\Gamma(f)$, и выборки аналитического сигнала $x_A(k\Delta t_1)$.

Решение п. в).

Спектр сопряженного по Гильберту сигнала $x_\Gamma(t)$

$$X_\Gamma(f) = -jX(f)\text{sign } f.$$

Для нашего случая получаем, что $\text{Re } X_\Gamma(f) \equiv 0$. Мнимая часть спектра сопряжённого по Гильберту сигнала изображена на рисунке



В данной задаче нет необходимости вычислять сопряженный по Гильберту сигнал по формуле

$$x_\Gamma(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

Достаточно воспользоваться соотношением

$$x_A(t) = x(t) + jx_\Gamma(t),$$

откуда:

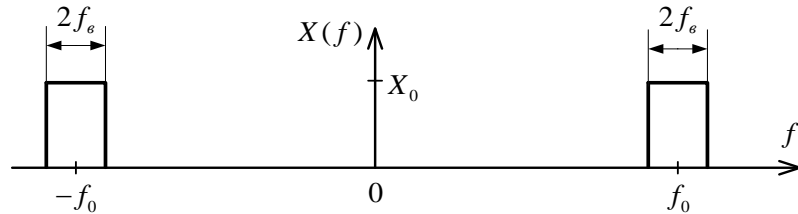
$$x_\Gamma(t) = \text{Im}\{x_A(t)\} = \text{Im}\left\{\frac{2X_0}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t} \sin(2\pi f_\epsilon t)\right\}$$

$$x_\Gamma(t) = \frac{2X_0}{\pi t} \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_\epsilon t)$$

Тот же результат можно получить при применении обратного преобразования Фурье для $X_\Gamma(f)$.

Способы дискретизации полосового сигнала (примеры).

Пример 1г. Спектр $X(f)$ некоторого сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже (f_0 - несущая частота, $f_0 \gg 2f_\epsilon$).

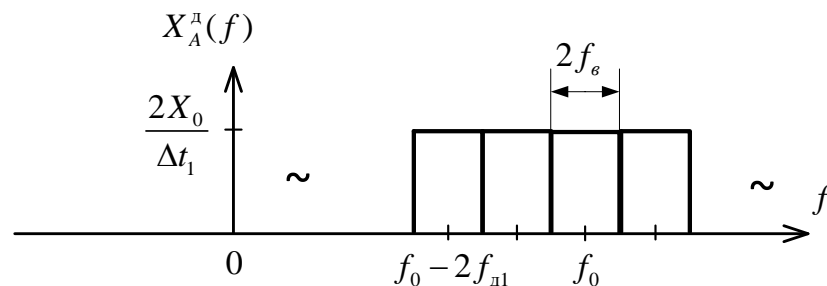


г) Определить выборки аналитического сигнала $x_A(k\Delta t_1)$ для минимально возможно значения $f_{д1}$ ($\Delta t = 1 / f_{д1}$).

Решение п. г).

Аналитический сигнал

$$x_A(t) = \frac{2X_0}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t} \sin(2\pi f_\epsilon t).$$



В предельном случае $f_{д1} = f_{д1\min} = 2f_\epsilon$, шаг дискретизации $\Delta t_1 = 1 / (2f_\epsilon)$. Спектр дискретизованного сигнала будет

$$X_A^д(f) = 2X_0 / \Delta t_1 = 2X_0 f_{д1} = 4X_0 f_\epsilon.$$

Обратным ДВПФ находим выборки аналитического сигнала:

$$x_A(k\Delta t_1) = 4X_0 f_\epsilon \mathbf{1}[k].$$

С другой стороны, подстановкой $t = k\Delta t_1$ в $x_A(t)$ получаем

$$x_A(k\Delta t_1) = \frac{2X_0}{\pi k \Delta t_1} e^{j2\pi f_0 k \Delta t_1} \sin(2\pi f_\epsilon k \Delta t_1) = \frac{4X_0 f_\epsilon}{\pi k} \sin(\pi k) e^{j\pi k f_0 / f_\epsilon}$$

Для всех ненулевых целых значений k эта функция равна нулю, а в точке нуль – неопределённость:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{4X_0 f_\epsilon}{\pi k} \sin(\pi k) e^{j\pi k f_0 / f_\epsilon} = 4X_0 f_\epsilon.$$

Тогда $x_A(k\Delta t_1) = 4X_0 f_\epsilon \mathbf{1}[k]$.

Однако $x_A(t)$ — комплексный, поэтому отдельно дискретизируется его действительная составляющая и мнимая составляющая.

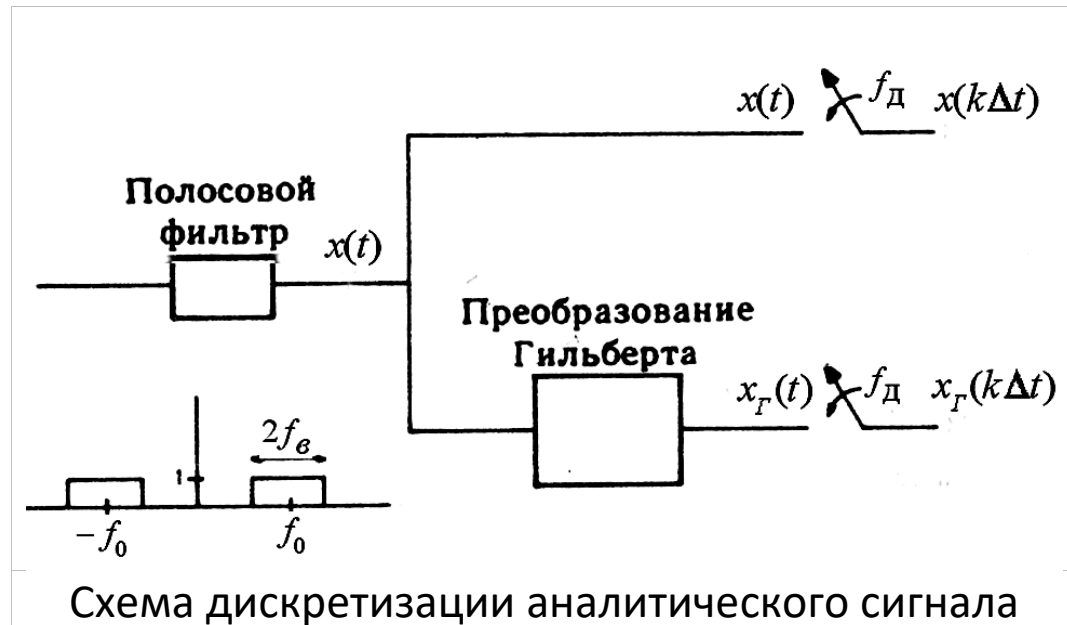
$$x_A(t) = x(t) + jx_I(t),$$

Способы дискретизации полосового сигнала (примеры).

$$x_A(t) = x(t) + jx_I(t),$$

$$x_A(k\Delta t_1) = x(k\Delta t_1) + jx_I(k\Delta t_1).$$

Мнимую и действительную часть отсчетов аналитического сигнала можно получить путем дискретизации сигнала $x(t)$ и сопряженного по Гильберту сигнала $x_I(t)$.



$$x(t) = \frac{2X_0}{\pi t} \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_e t)$$

$$x_I(t) = \frac{2X_0}{\pi t} \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_e t)$$

$$\operatorname{Re} x_A(k\Delta t_1) = x(k\Delta t_1) = 4X_0 f_e \mathbf{1}[k].$$

$$\operatorname{Im} x_A(k\Delta t_1) = x_I(k\Delta t_1) \equiv 0.$$

Получаем то же результат:

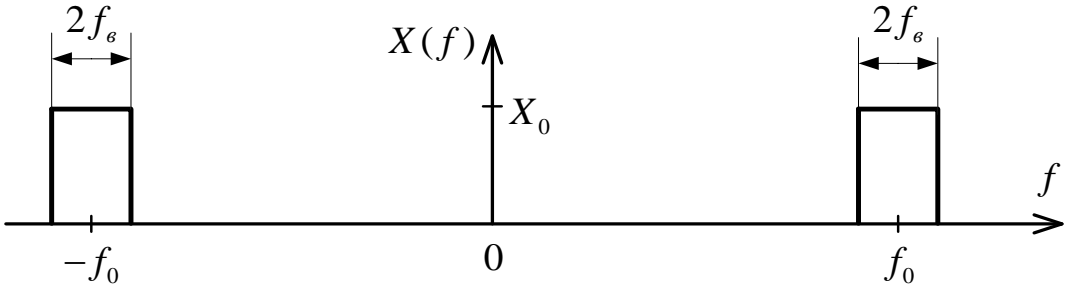
$$x_A(k\Delta t_1) = 4X_0 f_e \mathbf{1}[k].$$

Способы дискретизации полосового сигнала (примеры).

Укажем для данного полосового радиосигнала четыре основных способа дискретизации.

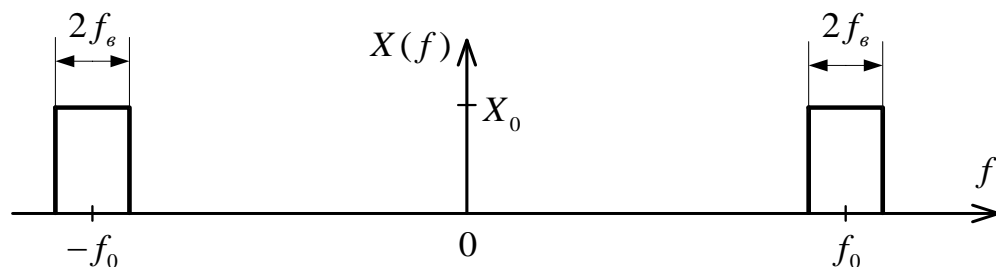
Способ дискретизации	Требования на частоту дискретизации	Чем представим сигнал
взятие отсчетов $x(t)$	$f_d \geq 2(f_0 + f_\epsilon)$	выборками $x(k\Delta t)$, $\Delta t = 1 / f_d$
дискретизация аналитического сигнала $x_A(t)$	$f_{d1} \geq 2f_\epsilon$	выборками $x_A(k\Delta t_1)$ либо выборками $x(k\Delta t_1)$ и $x_I(k\Delta t_1)$, $\Delta t = 1 / f_{d2}$, и несущей частотой f_0
дискретизация квадратурных компонент $x_c(t)$ и $x_s(t)$	в данной задаче $f_{d2} \geq 2f_\epsilon$.	выборками $x_c(k\Delta t_2)$ и $x_s(k\Delta t_2)$, $\Delta t = 1 / f_{d2}$, и несущей частотой f_0

субдискретизация $x(t)$ (будет рассмотрена в следующей лекции)	$\frac{2(f_0 + f_\epsilon)}{m+1} < f_d$, $f_d < \frac{2(f_0 - f_\epsilon)}{m}$, при этом всегда $f_d \geq 4f_\epsilon$.	выборками $x(k\Delta t)$, $\Delta t = 1 / f_d$ и порядком субдискретизации m
---	--	--



Задачи для самостоятельного решения

№1. Спектр $X(f)$ некоторого узкополосного радиосигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже (f_0 — несущая частота, $f_0 \gg 2f_e$).



Определить:

а) исходный сигнал $x(t)$ и условие на выбор частоты дискретизации f_d в соответствии с теоремой отсчетов;

б) аналитический сигнал $x_A(t)$ для исходного сигнала, спектр аналитического сигнала $X_A(f)$ и условие на выбор частоты дискретизации f_{d1} , при котором при дискретизации аналитического сигнала нет перекрытия отдельных копий спектра;

в) сопряженный по Гильберту сигнал $x_\Gamma(t)$, его спектр $X_\Gamma(f)$, и выборки аналитического сигнала $x_A(k\Delta t_1)$ для минимально возможного значения f_{d1} ($\Delta t_1 = 1/f_{d1}$);

г) синфазную и квадратурную компоненты сигнала и условие на необходимую частоту дискретизации f_{d2} для них (для реализации квадратурной дискретизации);

д) выборки синфазной и квадратурной компоненты $x_c(k\Delta t_2)$ и $x_s(k\Delta t_2)$ для минимально возможного значения f_{d2} ($\Delta t_2 = 1/f_{d2}$).

№2. Пусть $x_\Gamma(t)$ — преобразованный по Гильберту действительный сигнал $x(t)$. Показать, что $x_\Gamma(t)$ и $x(t)$ ортогональны, т. е.

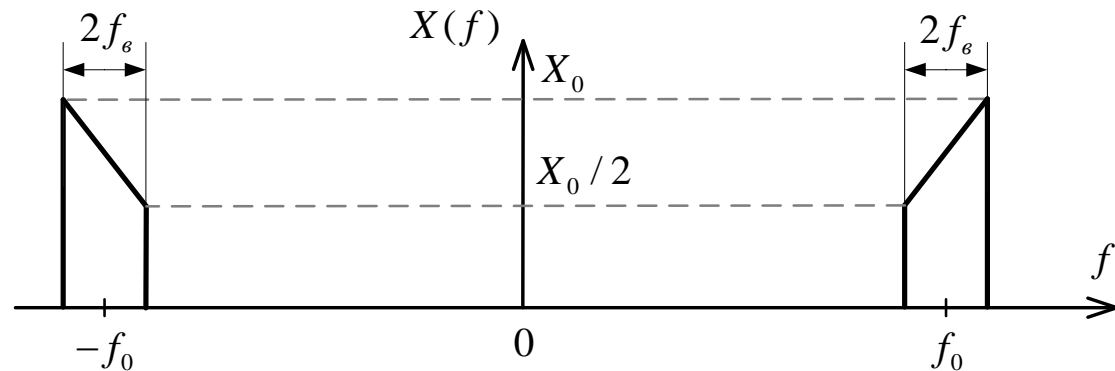
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_\Gamma^*(t)dt = 0.$$

№3. Показать, что при условии $f_0 \gg 2f_g$ преобразование Гильберта для полосового сигнала

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t = \operatorname{Re}[\gamma(t) e^{j2\pi f_0 t}]$$

выполняется над $\cos 2\pi f_0 t$ и $\sin 2\pi f_0 t$, а квадратурные компоненты $x_c(t)$ и $x_s(t)$ остаются неизменными.

№4. Спектр $X(f)$ некоторого узкополосного радиосигнала $x(t)$ изображен на рисунке, f_0 — несущая частота, $f_0 \gg 2f_g$, $2f_g = 10$ кГц, $f_0 = 45$ кГц.



а) Для случая дискретизации исходного сигнала в соответствии с теоремой отсчетов определить условие на выбор частоты дискретизации f_d и изобразить спектр сигнала, дискретизованного с минимально возможным значением f_d .

б) Для случая дискретизации аналитического сигнала определить условие на выбор частоты дискретизации f_{d1} и изобразить спектр сигнала, получаемого после дискретизации аналитического сигнала с минимально возможным значением f_{d1} .

Список литературы.

[1] Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. М.: МФТИ, 2007.

2.8 «Дискретизация полосовых радиосигналов».

[2] Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов М.: Высшая школа, 2005, 466 с.

5.3 «Узкополосные сигналы», 5.4 «Аналитический сигнал и преобразование Гильберта».

[3] Кестер У. Проектирование систем цифровой и смешанной обработки сигналов. М.: Техносфера. 2010.