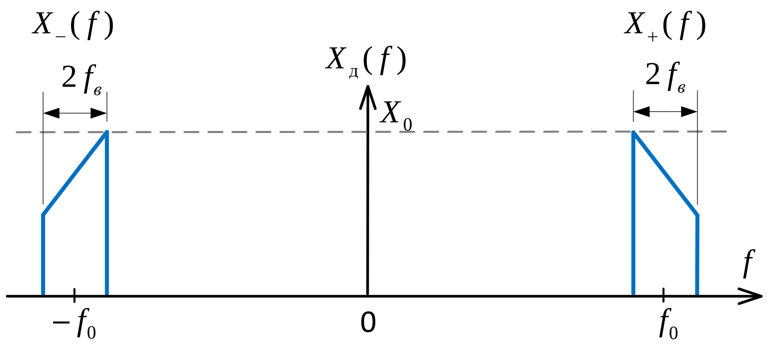
Лекция 10 по курсу «Цифровая обработка сигналов»

7 апреля 2025 г.

7. Методы преобразования узкополосных радиосигналов из аналоговой формы в цифровую.

7.1. Квадратурная дискретизация.

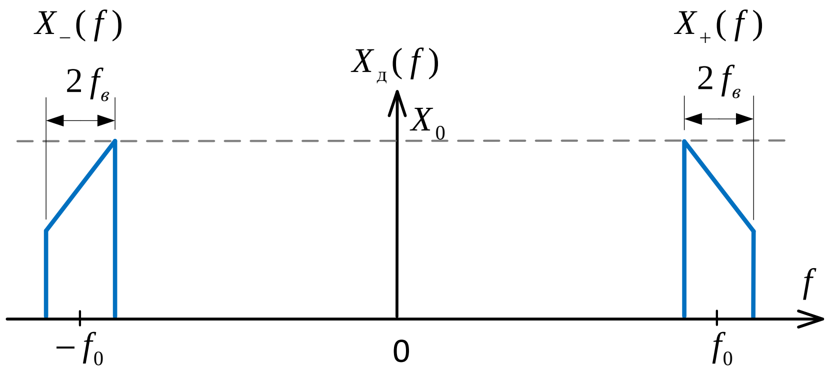
Синфазная и квадратурные компоненты сигнала и метод их получения. Комплексная огибающая и ее спектр. Дискретизация квадратурных компонент. Формирование отсчетов квадратур из отсчетов полосового колебания.



Дискретизация узкополосных радиосигналов

7. Методы преобразования узкополосных радиосигналов из аналоговой формы в цифровую.

Рассмотрим *действительный* полосовой сигнал $x(t)$ со спектром, изображенным на рисунке.



- Характерна чётная симметрия амплитудного спектра относительно оси ординат.
- Компонента $X_+(f)$ носит название прямого спектра, а компонента $X_-(f)$ – инверсного.
- Для такого сигнала требуемая в соответствии с теоремой отсчетов частота дискретизации $f_д = 2(f_0 + f_в)$ может оказаться очень высокой, находящейся за пределами быстродействия АЦП.

- Для узкополосных радиосигналов ($f_0 \gg f_в$) существуют методы дискретизации с частотой $f_д < 2(f_0 + f_в)$, позволяющие сохранить информацию, необходимую для восстановления исходного сигнала.
- Примерами таких методов являются
  - квадратурная дискретизация,
  - дискретизация аналитического сигнала,
  - субдискретизация.

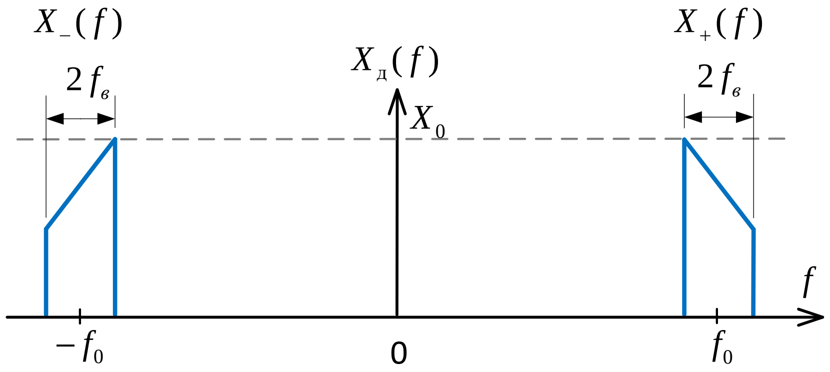
Пример. В глобальной системе спутниковой навигации ГЛОНАСС один из сигналов узкополосный и имеет несущую частоту L1 = 1600 МГц, аналогичная частота для GPS L1=1575,42 МГц.

Квадратурная дискретизация

7.1. Квадратурная дискретизация.

Метод квадратурной дискретизации основан на представлении исходного узкополосного сигнала $x(t)$ с помощью низкочастотных функций $x_c(t)$ и $x_s(t)$— синфазной и квадратурной компоненты сигнала. В случае $f_0 \gg f_в$, минимальная частота дискретизации этих компонент существенно ниже значения $2(f_0 + f_в)$.

Синфазная и квадратурная компоненты сигнала



Рассмотрим узкополосный радиосигнал $f_0 \gg f_в$, у которого спектр ограничен полосой частот $|f| \in [f_0 - f_в,\ f_0 + f_в]$, причем $f_0 \gg 2f_в$.

Наиболее общая форма записи такого сигнала

$$x(t) = A(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t)\right), \tag{1}$$

где $A(t)$ и $\varphi(t)$ – медленно меняющиеся по сравнению с циклическим множителем функции времени. Гармонический сигнал (косинусоида с постоянной частотой f_0 и начальной фазой φ_0) подвергается одновременно амплитудной и фазовой модуляции.

Представим сигнал (1) в виде

$$x(t) = x_c(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right) - x_s(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right). \tag{2}$$

где $x_c(t)$ – синфазная компонента сигнала,

$$x_c(t) = A(t)\cos\varphi(t), \tag{3}$$

$x_s(t)$ – квадратурная компонента сигнала,

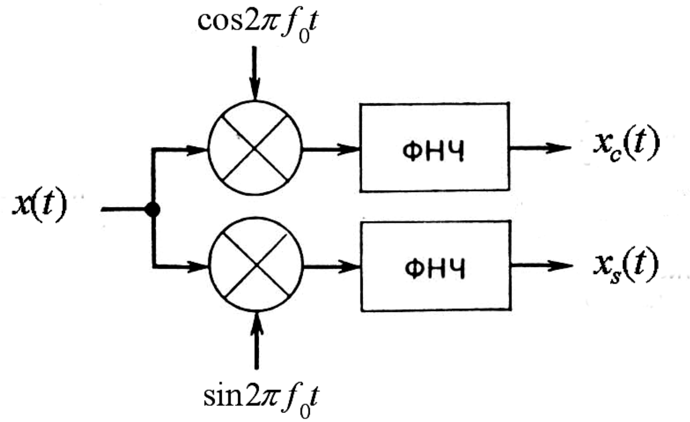
$$x_s(t) = A(t)\sin\varphi(t). \tag{4}$$

Квадратурные составляющие $x_c(t)$ и $x_s(t)$ являются низкочастотными действительными функциями и несут всю информацию о сигнале, кроме несущей частоты f_0. Спектры этих функций сконцентрированы возле начала координат в полосе $2f_в$. Необходимая частота дискретизации этих компонент $2f_в$.

Квадратурная дискретизация

Метод получения квадратурных компонент сигнала

Квадратурные компоненты могут быть получены в следующей схеме.



После умножения на сигнал когерентного гетеродина в верхнем канале имеем

$$x(t)\cos 2\pi f_0 t = \left(x_c(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right) - x_s(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right)\right)\cos\left(2\pi f_0 t\right) =$$

$$= x_c(t)\cos^2\left(2\pi f_0 t\right) - x_s(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right)\cos 2\pi f_0 t =$$

$$= \frac{1}{2}x_c(t)\cos\left(4\pi f_0 t\right) - \frac{1}{2}x_s(t)\sin\left(4\pi f_0 t\right) + \frac{1}{2}x_c(t).$$

Первые два слагаемых — высокочастотные составляющие вблизи частоты $2f_0$ — подавляются фильтром нижних частот (ФНЧ) и на выходе верхнего канала остается синфазная компонента $x_c(t)$.

Аналогично в нижнем канале выделяется квадратурная компонента $x_s(t)$.

$$x(t)\sin 2\pi f_0 t = \left(x_c(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right) - x_s(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right)\right)\sin 2\pi f_0 t =$$

$$= \frac{1}{2}x_c(t)\sin\left(4\pi f_0 t\right) - x_s(t)\sin^2\left(2\pi f_0 t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x_c(t)\sin\left(4\pi f_0 t\right) + \frac{1}{2}x_s(t)\cos\left(4\pi f_0 t\right) - \frac{1}{2}x_s(t).$$

Перенос спектра сигнала $x(t)$ с частоты f_0 на нулевую частоту и традиционно реализуется аналоговым способом, с применением аналоговых умножителей и ФНЧ. Принципиальный недостаток аналоговых способов формирования $x_\text{c}(t)$ и $x_\text{s}(t)$ – трудность реализации квадратурных каналов с идентичными и стабильными характеристиками. В реальных формирователях квадратур предъявляются очень высокие требования к идентичности, линейности и стабильности амплитудных характеристик каналов, а также к точному соблюдению 90° сдвига фаз между гармоническими колебаниями когерентного гетеродина.

Комплексная огибающая

Амплитудную и фазовую модуляции сигнала $x(t)$ можно определить с помощью квадратурных компонент. По формулам (3) и (4) $x_c(t) = A(t)\cos\varphi(t)$, $x_s(t) = A(t)\sin\varphi(t)$,

$$A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}, \qquad (5)$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}\frac{x_s(t)}{x_c(t)}.$$

Ветвь арктангенса выбирается таким образом, чтобы $\varphi(t)$ была непрерывной функцией времени. Введём комплексную огибающую

$$\gamma(t) = x_c(t) + jx_s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}. \qquad (6)$$

Комплексная огибающая $\gamma(t)$ содержит всю обусловленную модуляцией информацию. При этом физическая огибающая равна

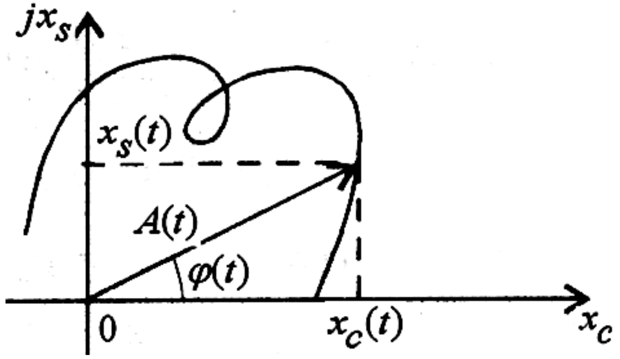
$$A(t) = |\gamma(t)|.$$

Полная фаза узкополосного колебания

$$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t),$$

а мгновенная частота определяется как производная по времени от полной фазы, нормированная на 2π:

$$f(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{x_s}{x_c} = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{x_s' x_c - x_c' x_s}{x_c^2 + x_s^2}.$$



Комплексную огибающую можно представить на комплексной плоскости вектором, который совершает некоторое сложное движение, изменяясь как по модулю, так и по направлению.

Исходный действительный сигнал $x(t)$ связан с комплексной огибающей $\gamma(t)$ соотношением

$$x(t) = \operatorname{Re}\left(\gamma(t)e^{j2\pi f_0 t}\right). \qquad (7)$$

Таким образом, понятие комплексной огибающей обобщает понятие комплексной амплитуды на случай узкополосных радиосигналов.

Квадратурная дискретизация

Спектр комплексной огибающей

Рассмотрим спектр $\Gamma(f)$ комплексной огибающей $\gamma(t)$

$$\Gamma(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Поскольку $\gamma(t)$ — комплексный сигнал, то амплитудная и фазовая часть $\Gamma(f)$ могут быть несимметричными относительно нуля частот. Из формул (1) и (6)

$$\gamma(t) = A(t) e^{j\varphi(t)},$$

$$x(t) = A(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi(t)\right) = \frac{1}{2} A(t)\left(e^{j2\pi f_0 t + j\varphi(t)} + e^{-j2\pi f_0 t - j\varphi(t)}\right).$$

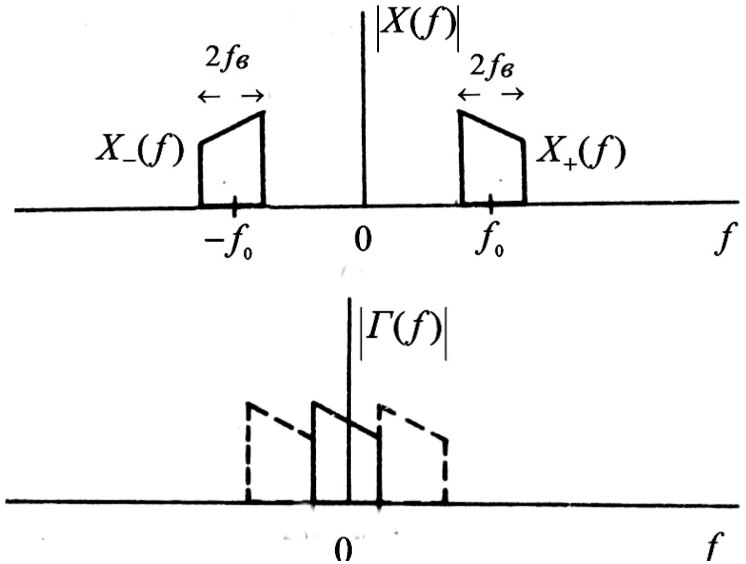
По теореме смещения для преобразования Фурье умножение $\gamma(t)$ на $e^{j2\pi f_0 t}$ означает смещение спектра $\gamma(t)$ вправо на величину f_0. Получаем, что

$$X(f) = \frac{1}{2}\Gamma(f - f_0) + \frac{1}{2}\Gamma^*\left(-(f + f_0)\right). \qquad (8)$$

В силу того, что $\Gamma(f)$ лежит в полосе $[-f_в;\ f_в]$, прямой и инверсный спектры

$$X_+(f) = \frac{1}{2}\Gamma(f - f_0), \qquad (9)$$

$$X_-(f) = \frac{1}{2}\Gamma^*\left(-(f + f_0)\right). \qquad (10)$$



Заметим, что при дискретизации $\gamma(t)$ с частотой $2f_в$ ее спектр повторяется без наложения (повторенный спектр показан штриховой линей). При этом

$$\gamma(t) = x_c(t) + jx_s(t).$$

Квадратурная дискретизация

Дискретизация квадратурных компонент

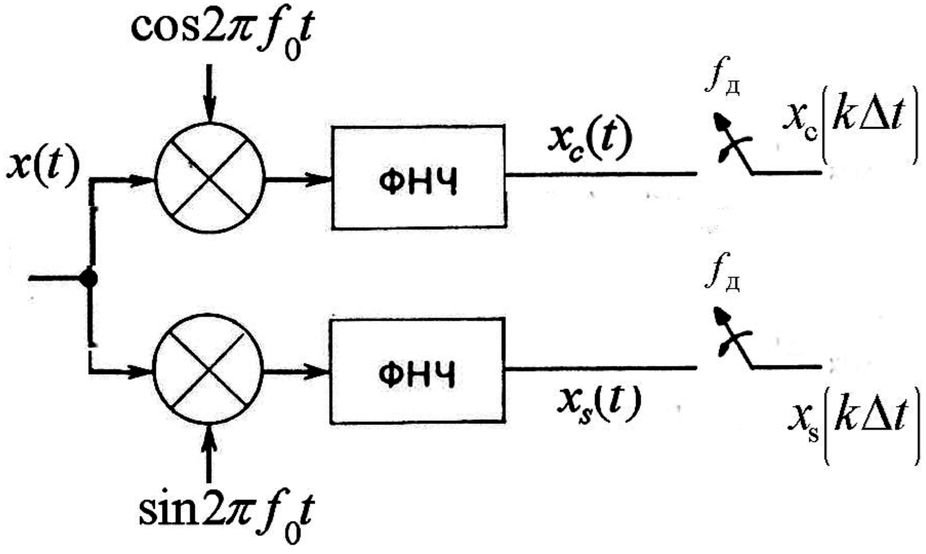
Поскольку квадратурные компоненты $x_c(t)=A(t)\cos\varphi(t)$ и $x_s(t)=A(t)\sin\varphi(t)$ представляют собой низкочастотные сигналы со спектром, ограниченным полосой $2f_в$, то они полностью определяются последовательностями отсчетов $\{x_c(k\Delta t)\}$ и $\{x_s(k\Delta t)\}$, где $\Delta t=1/2f_в$. При этом

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_c(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi f_в(t-k\Delta t)}{2\pi f_в(t-k\Delta t)}\cos 2\pi f_0 t-$$
$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_s(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi f_в(t-k\Delta t)}{2\pi f_в(t-k\Delta t)}\sin 2\pi f_0 t. \quad (11)$$

Через квадратурные компоненты определяется комплексная огибающая радиосигнала

$$\gamma(t)=x_c(t)+jx_s(t)=A(t)e^{j\varphi(t)}.$$

Эта функция содержит всю обусловленную модуляцией информацию. Таким образом, в этом методе сначала осуществляется двухканальное синхронное детектирование, а затем дискретизация квадратурных компонент.



Дискретизация квадратурных компонент выполняется с частотой $f_д=2f_в$ отсчетов в секунду. Эта величина значительно меньше частоты $f_д=2(f_0+f_в)$, необходимой для дискретизации действительного узкополосного сигнала при прямом применении теоремы отсчетов.

Квадратурная дискретизация

Формирование отсчетов квадратур из отсчетов полосового колебания

Наличие быстродействующих АЦП, допускающих работу с частотой дискретизации 500 МГц и выше, делает возможным получить цифровые отсчеты высокочастотных колебаний на выходах многих радиоприемных устройств. Рассмотрим способ формирования отсчетов квадратурных компонент непосредственно из отсчетов колебания $x(t)$. Выберем шаг дискретизации $x(t)$ равным

$$\Delta t = \frac{2n+1}{4f_0} \qquad (12)$$

где f_0 – промежуточная частота, n – четное число, $n = 2, 4, 6, \ldots$. В соответствии с (12) шаг дискретизации $x(t)$ выбирается нечетно-кратным четверти периода колебания промежуточной частоты f_0. Выборки можно описать формулой

$$x(k\Delta t) = x_c(k\Delta t)\cos(2\pi f_0 k\Delta t) - x_s(k\Delta t)\sin(2\pi f_0 k\Delta t) =$$
$$= x_c(k\Delta t)\cos(\pi k(n+1/2)) - x_s(k\Delta t)\sin(\pi k(n+1/2)).$$

Для четных k, получаем ($k = 2m$)

$$x(k\Delta t) = x(2m\Delta t) =$$
$$= x_c(2m\Delta t)\cos(\pi 2m(n+1/2)) - x_s(2m\Delta t)\sin(\pi 2m(n+1/2)) =$$
$$x_c(2m\Delta t)\cos(\pi m) - x_s(2m\Delta t)\sin(\pi m)$$
$$x(2m\Delta t) = x_c(2m\Delta t)(-1)^m$$

$x(k\Delta t) = x_c(k\Delta t)(-1)^{k/2}$, при четных k.

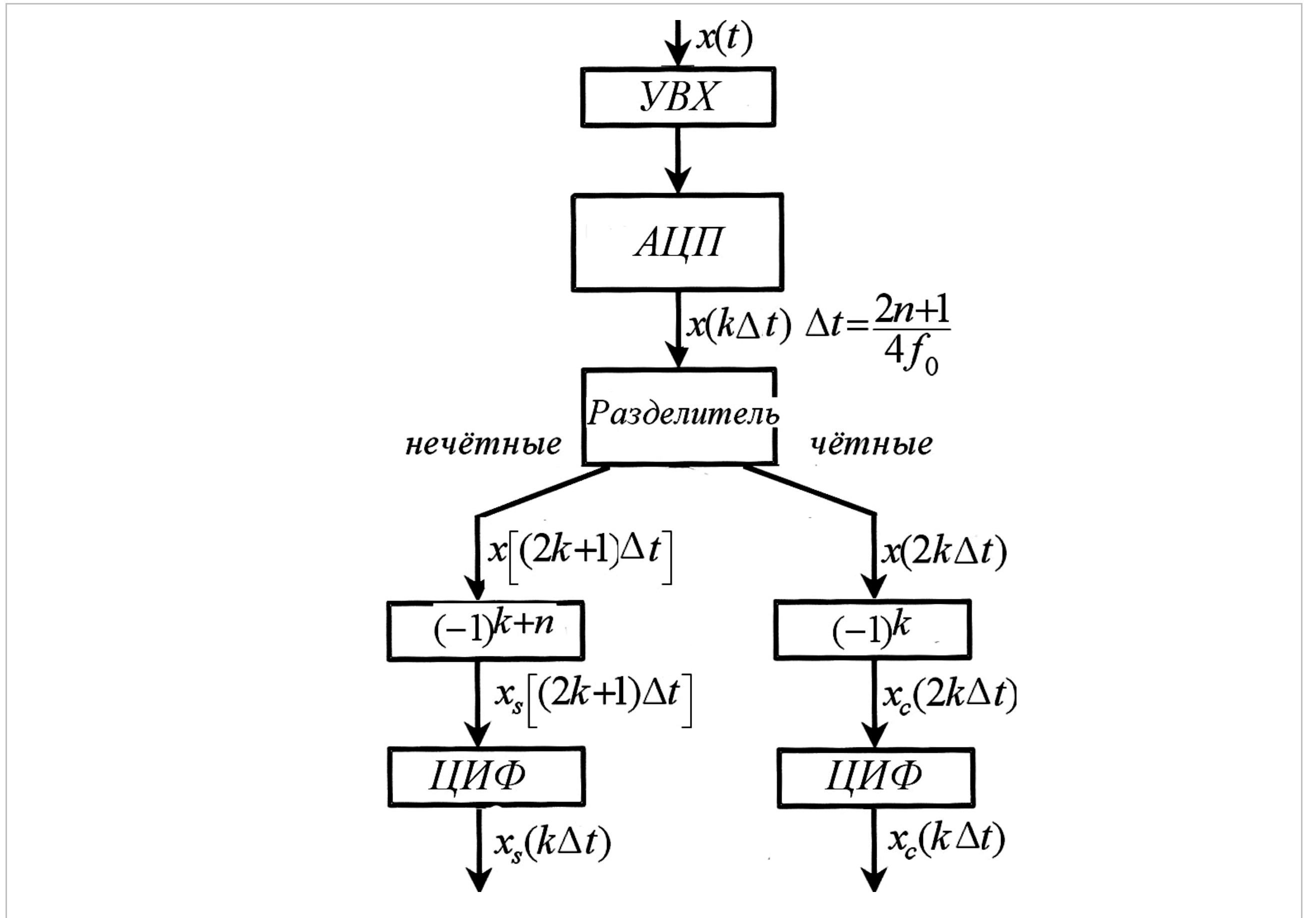
Для нечетных k, получаем ($k = 2m+1$)

$$x(k\Delta t) = x((2m+1)\Delta t) =$$
$$= x_c(k\Delta t)\cos(\pi(2m+1)(n+1/2)) - x_s(k\Delta t)\sin(\pi(2m+1)(n+1/2)) =$$
$$= x_c(k\Delta t)\cos\left(2\pi mn + \pi n + \pi m + \frac{\pi}{2}\right) -$$
$$-x_s(k\Delta t)\sin\left(2\pi mn + \pi n + \pi m + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= -x_c(k\Delta t)\sin(\pi m) - x_s(k\Delta t)\cos(\pi m) = (-1)^{m+1} x_s((2m+1)\Delta t)$$

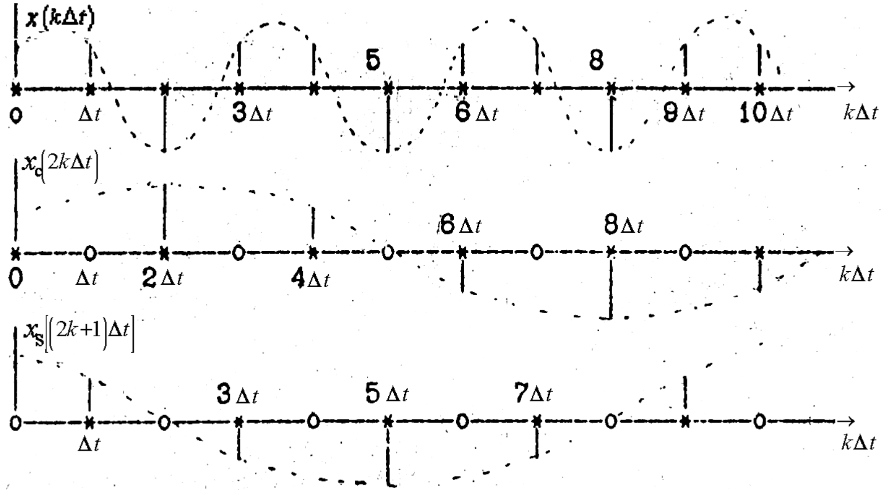
$x(k\Delta t) = (-1)^{(k+1)/2} x_s(k\Delta t)$, при нечетных k.

Квадратурная дискретизация

Таким образом, для формирования отсчетов квадратурных компонент достаточно разделить отсчеты сигнала $x(k\Delta t)$ на чётные и нечётные и в полученных подпоследовательностях инвертировать знак каждого второго отсчета.



Функциональная схема, реализующая рассмотренный метод формирования отсчетов квадратур



Узкополосный сигнал $x(t)$ дискретизуется с шагом $\Delta t = (2n+1)/4f_0$ устройством выборки-хранения (УВХ). Отсчёты $x(k\Delta t)$ после квантования в аналого-цифровом преобразователе (АЦП) разделяются на чётные и нечётные. Полученные подпоследовательности после знаковой модуляции поступают на цифровые интерполирующие фильтры (ЦИФ). Один АЦП обслуживает оба квадратурных канала. Для обработки в каждый момент необходимы обе квадратурные компоненты. Недостающие отсчеты квадратур (на рисунке — нули) можно получить путем интерполяции с помощью цифровых интерполирующих фильтров (ЦИФ).

Квадратурная дискретизация

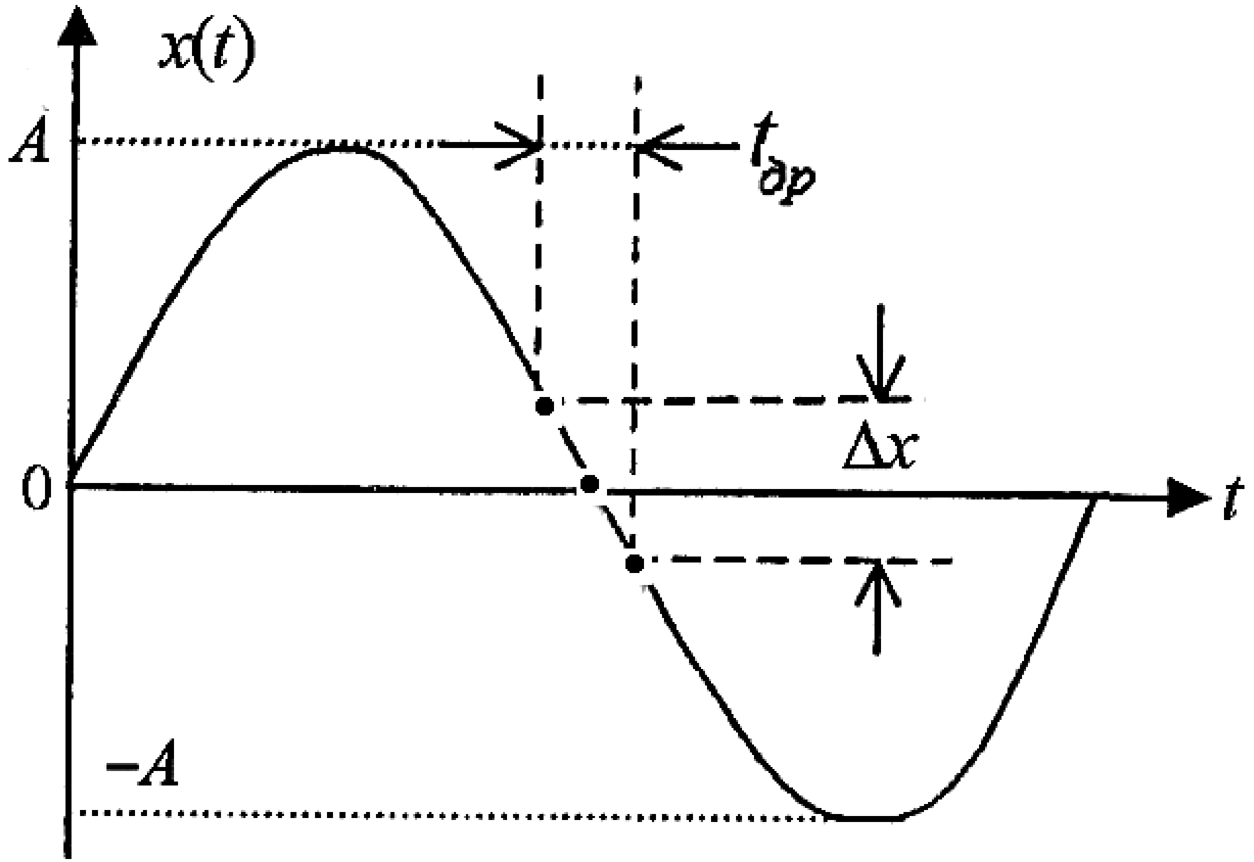
Примечание. *Требования к апертурной дрожи* моментов выборок в рассматриваемом методе остаются высокими и соответствуют требованиям при дискретизации сигналов с верхней частотой спектра

$$f_{1в} = f_0 + \frac{\Delta f}{2} \approx f_0.$$

Допустимая величина апертурной дрожи рассчитывается из условия, что изменения самой высокочастотной компоненты входного сигнала за это время не должно превышать единицы младшего разряда АЦП: $x' t_{др} < 1/N$. В точке максимальной крутизны $\sin 2\pi f_{1в} t \approx 2\pi f_{1в} t$, поэтому

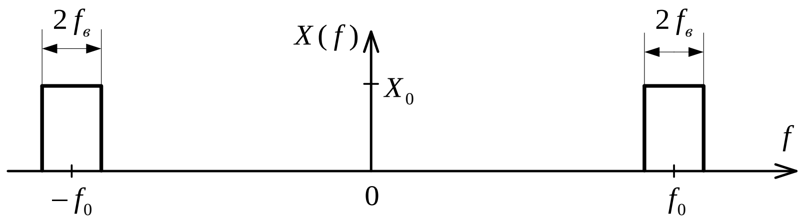
$$t_{др} < \frac{1}{N \pi f_{1в}},$$

где N – число уровней квантования в АЦП. Максимальная величина шума, обусловленного дрожью моментов выборок, при этом не будет превышать максимальной величины шума квантования.



Квадратурная дискретизация

Пример 1. Спектр $X(f)$ некоторого сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже (f_0 - несущая частота, $f_0 \gg 2f_в$).



Определить исходный сигнал $x(t)$ и условие на выбор частоты дискретизации $f_{д1}$ в соответствии с теоремой отсчетов.

Решение.

Исходный сигнал можно найти, например, воспользовавшись обратным преобразованием Фурье для его спектра $X(f)$:

$$x(t) = X_0 \int_{-f_0-f_в}^{-f_0+f_в} e^{j2\pi ft} df + X_0 \int_{f_0-f_в}^{f_0+f_в} e^{j2\pi ft} df =$$

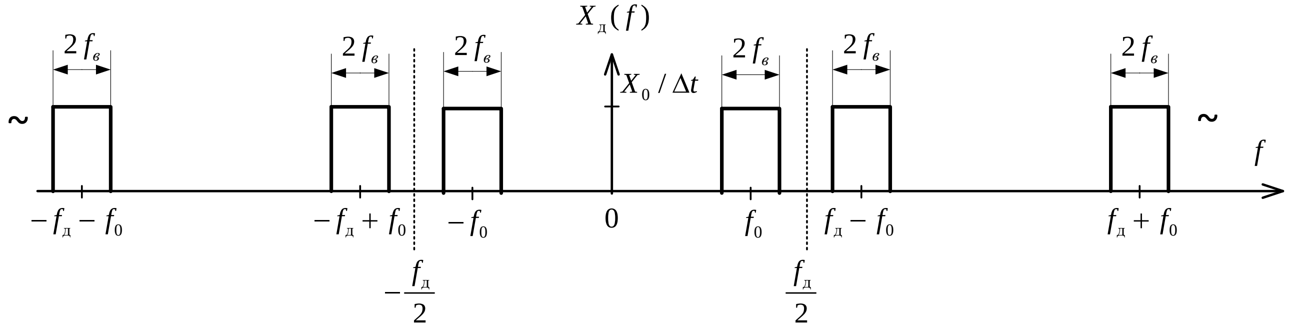
$$= \frac{X_0 e^{j2\pi ft}}{2j\pi t}\Bigg|_{-f_0-f_в}^{-f_0+f_в} + \frac{X_0 e^{j2\pi ft}}{2j\pi t}\Bigg|_{f_0-f_в}^{f_0+f_в} =$$

$$= \frac{X_0}{\pi t} e^{-j2\pi f_0 t} \sin(2\pi f_в t) + \frac{X_0}{\pi t} e^{j2\pi f_0 t} \sin(2\pi f_в t) =$$

$$= \frac{2X_0}{\pi t} \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_в t)$$

При дискретизации аналогового сигнала его спектр периодически повторяется вдоль оси частот с периодом, равным частоте дискретизации:

$$X_д(f) = \frac{1\,с}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_д).$$

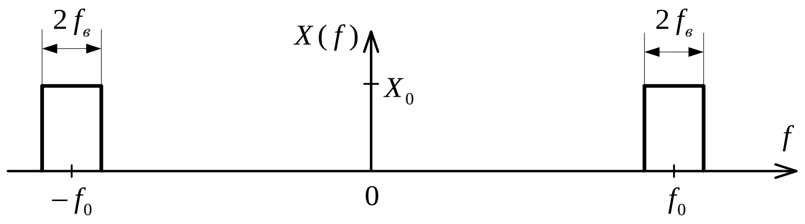


Как видно из рисунка, для того, чтобы эффект наложения спектров не проявился, необходимо, чтобы $\frac{f_д}{2} \ge f_0 + f_в$, а значит $f_д \ge 2(f_0 + f_в)$.

Частота дискретизации должна быть как минимум в два раза больше верхней граничной частоте спектра, которая в данном случае равна $f_0 + f_в$, что соответствует условию теоремы отсчетов.

Квадратурная дискретизация

Пример 2. Спектр $X(f)$ некоторого сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже (f_0 - несущая частота, $f_0 \gg 2f_в$).



Определить синфазную и квадратурную компоненты сигнала и условие на необходимую частоту дискретизации для них $f_{д2}$.

Решение.

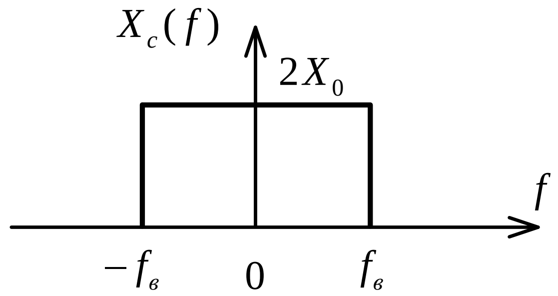
Представим сигнал $x(t) = \dfrac{2X_0}{\pi t}\cos\left(2\pi f_0 t\right)\sin\left(2\pi f_в t\right)$ в виде

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t).$$

где $x_c(t) = A(t)\cos\varphi(t)$ и $x_s(t) = A(t)\sin\varphi(t)$.

Тогда $x_s(t) \equiv 0$, $x_c(t) = \dfrac{2X_0}{\pi t}\sin\left(2\pi f_в t\right)$.

На рисунке ниже изображен график спектра синфазной компоненты сигнала.



Спектр синфазной и квадратурной компоненты являются низкочастотными по сравнению со спектром исходного узкополосного сигнала. Условие на необходимую частоту дискретизации квадратурных компонент:

$$f_{д2} \geq 2f_в.$$

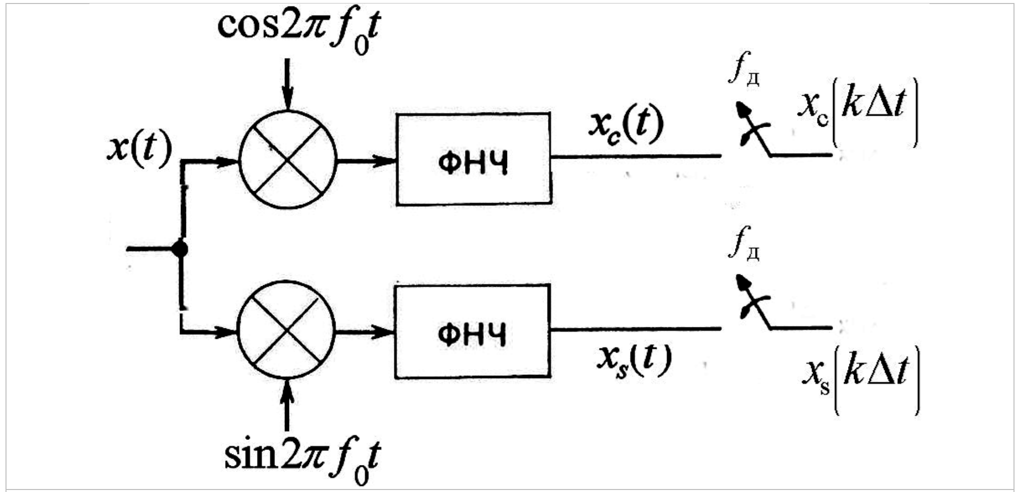
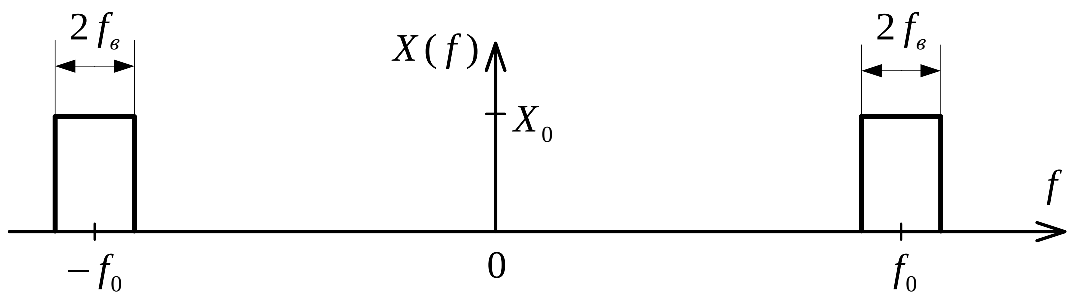


Схема квадратурной дискретизации

Квадратурная дискретизация

Приведем для данного полосового радиосигнала сравнение разных способов дискретизации.



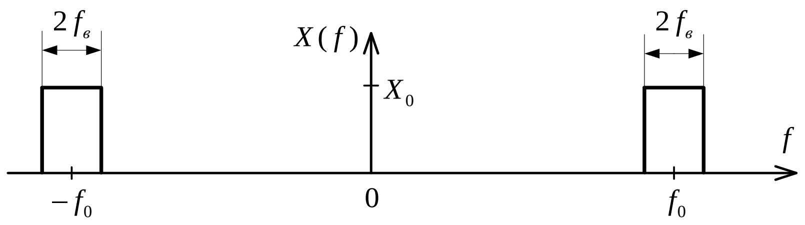
Способ дискретизации	**Требования на частоту дискретизации**	**Чем представим сигнал**
взятие отсчетов $x(t)$	$f_д \geq 2(f_0 + f_в)$	выборками $x(k\Delta t)$, $\Delta t = 1/f_д$
дискретизация квадратурных компонент $x_c(t)$ и $x_s(t)$	в данной задаче $f_{д2} \geq 2f_в$.	выборками $x_c(k\Delta t_2)$ и $x_s(k\Delta t_2)$, $\Delta t = 1/f_{д2}$, и несущей частотой f_0

Задачи с лекции

Задача для самостоятельного решения

№1. Для сигнала $x(t) = A\sin\left(2\pi f_0 t \cdot \operatorname{sgn} t\right)$ написать выражение для комплексной огибающей.

№2. *(на доказательство, без теста в LMS).* Спектр $X(f)$ некоторого сигнала $x(t)$ изображен на рисунке ниже (f_0 - несущая частота, $f_0 \gg 2f_в$).



Реализуется дискретизация квадратурных компонент с шагом $\Delta t = \dfrac{2n+1}{4f_0}$, где n — четное натуральное число.

Доказать для данного примера, что четные отсчеты синфазной $x_c(t)$ компоненты могут быть получены из отсчетов исходного сигнала $x(t)$, взятых с шагом Δt, с изменением знака каждого второго отсчета:

$$x_c(k\Delta t) = x(k\Delta t)\cdot(-1)^{k/2},$$

где k — четные натуральные числа.

Список литературы.

[1] Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1. М.: МФТИ, 2007.

2.8 «Дискретизация полосовых радиосигналов».

[2] Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов М.: Высшая школа, 2005, 466 с.

5.3 «Узкополосные сигналы», 5.4 «Аналитический сигнал и преобразование Гильберта».

[3] Кестер У. Проектирование систем цифровой и смешанной обработки сигналов. М.: Техносфера. 2010.