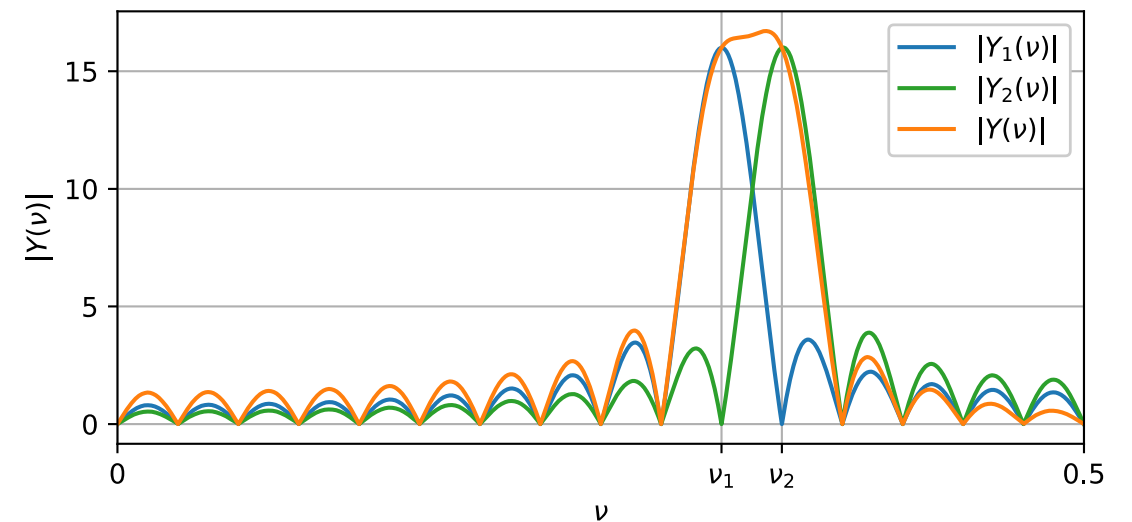


# Лекция 3 по курсу «Цифровая обработка сигналов»

17 февраля 2025 г.

## 5.3. Особенности применения оконных функций в спектральном анализе методом ДПФ.

- Условия различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды
- Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП) оконной функции.
- Когерентное усиление и усиление преобразования в спектральном анализе.
- Пример задачи оценивания параметров сигнала.
- Решение задач: различимость спектральных компонент, маскировка слабой гармоники боковыми лепестками окна.



# Условия различения соседних гармонических компонент

## 5.3. Особенности применения оконных функций в спектральном анализе методом ДПФ.

### Условия различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды

Достаточно близкие спектральные компоненты могут оказаться неразличимыми из-за слияния главных лепестков их максимумов.

Рассмотрим условия, которые позволяют сделать выводы о различении соседних спектральных компонент по заданному расстоянию между их относительными частотами  $\Delta\nu_{1,2}$  и известным характеристикам главного лепестка окна.

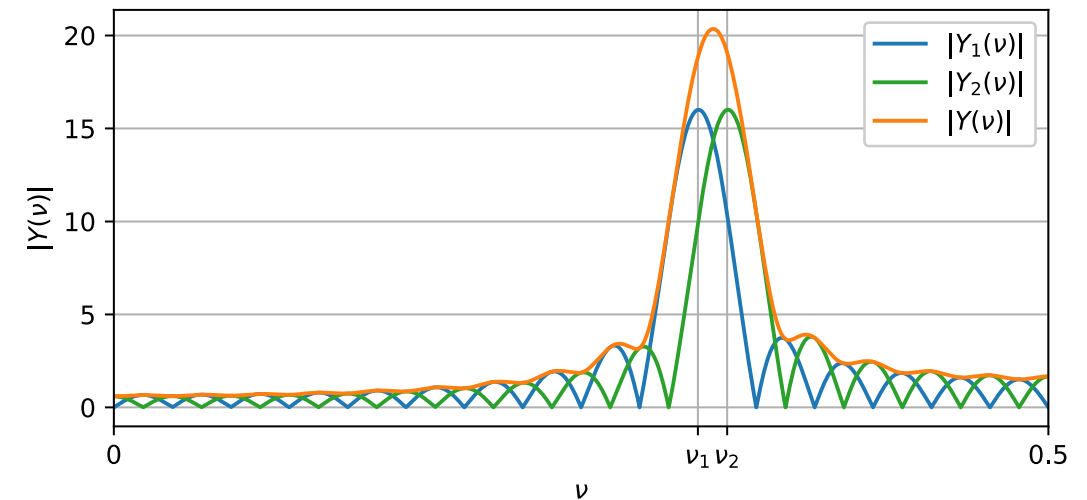
#### а) Слияние компонент при $\Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-3\text{дБ}}$ .

Если  $\Delta\nu_{1,2}$  меньше ширины главного лепестка на уровне половинной мощности  $\Delta\nu_{-3\text{дБ}}$  ( $10\lg(0.5) \approx -3\text{дБ}$ ), то спектральные компоненты, как правило, неразрешимы и спектральные пики сольются в один.

**Пример.** На рисунке приведены ДВПФ  $Y(\nu)$ ,  $Y_1(\nu)$  и  $Y_2(\nu)$

последовательностей  $y_1[k] = \sin\left(2\pi\frac{10}{32}k\right)w[k]$ ,

$y_2[k] = \sin\left(2\pi\frac{10,5}{32}k\right)w[k]$  и их суммы  $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$  для прямоугольного окна  $w[k]$  длиной  $N = 32$ , для которого  $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$  (0,89 бин ДПФ).



Поскольку  $\Delta\nu_{1,2} = 0,5 / N$ , то  $\Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-3\text{дБ}}$  и спектральные максимумы сливаются в один. Две спектральные компоненты неразличимы на графике спектра.

# Условия различения соседних гармонических компонент

## б) Различимость компонент при $\Delta\nu_{1,2} > \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$ .

В ДПФ анализе условием различимости спектральных компонент служит ширина главного лепестка по уровню половинной амплитуды  $\Delta\nu_{-6\text{дБ}}$  ( $20\lg(0.5) \approx -6\text{дБ}$ ).

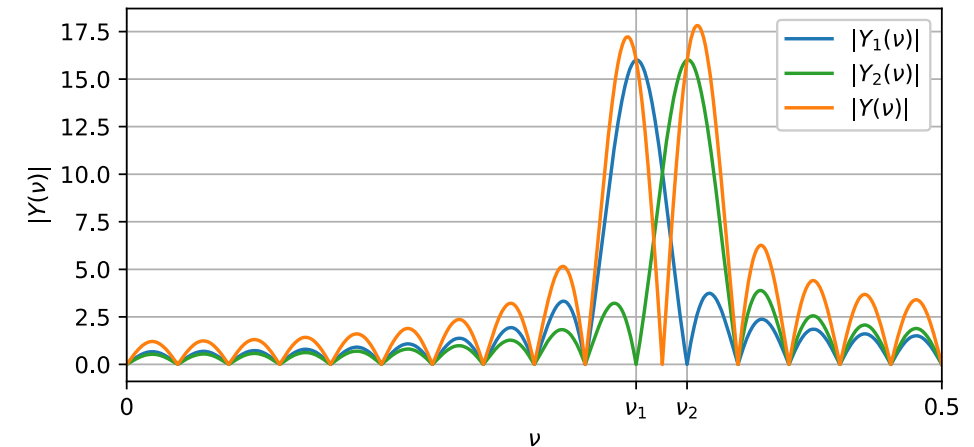
Это связано с тем, что если вклад в когерентное суммирование вносят две спектральные компоненты одной амплитуды, то усиление от каждой компоненты в точке их пересечения не должно превышать 0,5 от их максимумов.

Таким образом, различимость спектральных компонент будет гарантирована при  $\Delta\nu_{1,2} > \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$ .

**Пример.** На рисунке приведены ДВПФ  $Y(\nu)$ ,  $Y_1(\nu)$  и  $Y_2(\nu)$  последовательностей

$$y_1[k] = \sin\left(2\pi\frac{10}{32}k\right)w[k], \quad y_2[k] = \sin\left(2\pi\frac{11}{32}k\right)w[k]$$

и их суммы  $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$  для прямоугольного окна  $w[k]$  длиной  $N = 32$ , для которого  $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$  (0,89 бин),  $\Delta\nu_{-6\text{дБ}} = 1,2 / N$  (1,2 бина).



В этом случае  $\Delta\nu_{1,2} = 1 / N$ , и  $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} < \Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$ .

Две спектральные компоненты оказались различимы на графике спектра, однако, как будет показано далее, гарантировать эту различимость по расстоянию между гармониками нельзя.

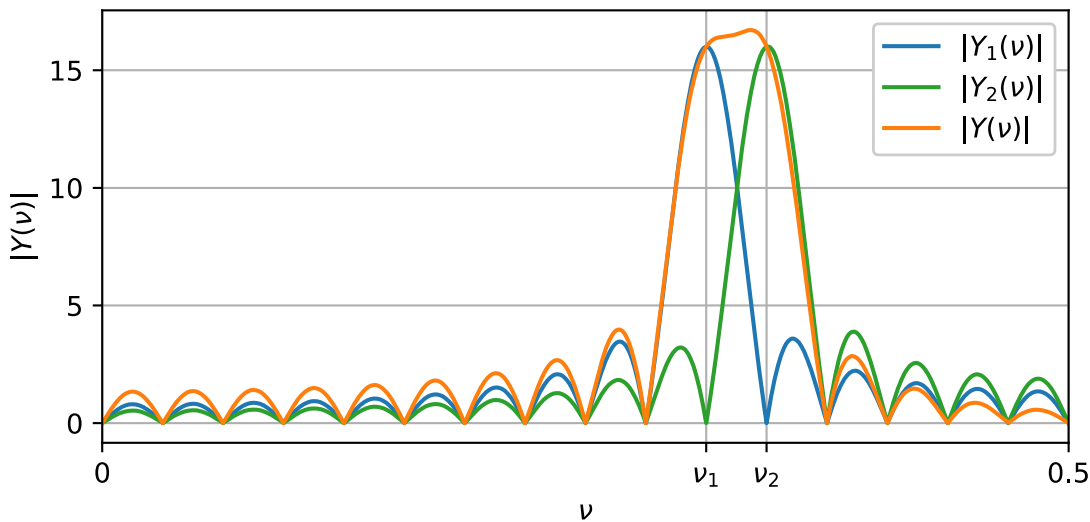
Заметим, что здесь наблюдается значительное смешение максимумов, вызванное влиянием боковых лепестков соседних спектральных компонент. Применение оконных функций, отличных от прямоугольной, могло бы ослабить этот эффект.

# Условия различения соседних гармонических компонент

**Пример.** На рисунке приведены ДВПФ  $Y(\nu), Y_1(\nu)$  и  $Y_2(\nu)$  последовательностей

$$y_1[k] = \sin\left(2\pi\frac{10}{32}k + 0,58\pi\right)w[k], \quad y_2[k] = \sin\left(2\pi\frac{11}{32}k\right)w[k]$$

и их суммы  $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$  для прямоугольного окна  $w[k]$  длиной  $N = 32$ , для которого  $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$  (0,89 бин),  $\Delta\nu_{-6\text{дБ}} = 1,2 / N$  (1,2 бина).



Однако из-за сдвига  $y_1[k]$  по фазе в данном случае действительные и мнимые части спектральных компонент сложились так, что спектральные максимумы не различимы. При этом мы не могли гарантировать их различимость.

Заметим, что, если условие  $\Delta\nu_{1,2} > \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$  выполняется (с некоторым запасом) то мы можем гарантировать различимость спектральных компонент в спектре.

название окна	полоса по уровню –3 дБ (в бинах ДПФ)	полоса по уровню –6 дБ (в бинах ДПФ)
прямоугольное	0,89	1,20
Бартлетта	1,28	1,78
Ханна	1,44	2,00
Хэмминга	1,33	1,82
Блэкмана	1,64	2,30

В этом случае также  $\Delta\nu_{1,2} = 1 / N$ , и  $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} < \Delta\nu_{1,2} < \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$ .

## Когерентное усиление в спектральном анализе

Предположим, что некоторая последовательность анализируется с применением окна  $w[k]$  и имеет вид

$$x[k] = A \exp(j2\pi v_k k) \tag{1}$$

где

- $v_k$  – нормированная частота гармонической компоненты (известна),
- $A$  – ее амплитуда (неизвестна).

Амплитуду  $A$  требуется оценить, используя ДПФ-анализ.

Обозначим

- $W(v)$  – ДВПФ окна  $w[k]$ ,

$$W(v) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k] \exp(-j2\pi v k),$$

- $X_w(v)$  – ДВПФ  $x[k]w[k]$  (взвешенного окном сигнала),

$$X_w(v) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]w[k] \exp(-j2\pi v k).$$

С учетом (1)

$$X_w(v) = A \sum_{k=0}^{N-1} \exp(j2\pi v_k k) w[k] \exp(-j2\pi v k).$$

На частоте  $v_k$

$$X_w(v_k) = A \sum_{k=0}^{N-1} w[k] = A W(0). \tag{2}$$

Из (2) следует, что в отсутствии шума определить неизвестную амплитуду можно по формуле

$$A = X_w(v_k) / W(0). \tag{3}$$

Значение  $W(0)$  отражает величину **когерентного усиления по амплитуде**.

название окна	Когерентное усиление в единицах $W(0) / N$
прямоугольное	1
Бартлетта	0,5
Ханна	0,5
Хэмминга	0,54
Блэкмана	0,42

# Когерентное усиление в спектральном анализе

## Пример. Оценка амплитуд гармоник (случай без шума).

Предположим, что анализируемая последовательность имеет вид

$$x[k] = A \cos(2\pi \nu_k k)$$

где  $\nu_k = 0,2$ ,  $A$  – неизвестная амплитуда, которую нужно оценить. Анализ осуществляется по последовательности  $y[k] = x[k]w[k]$ , где  $w[k]$  – окно Блэкмана длиной  $N = 100$ .

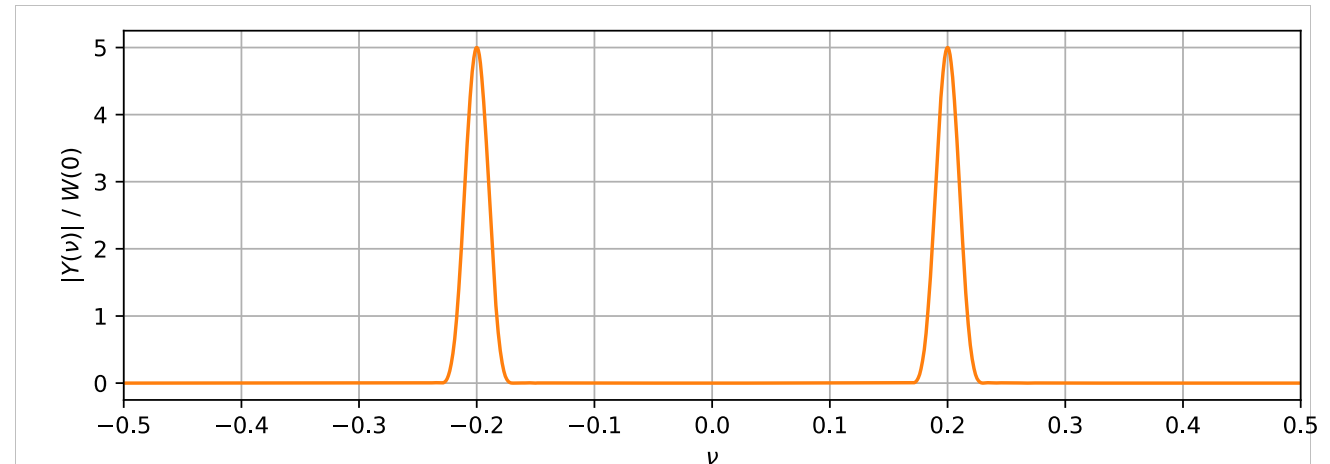
Заметим, что

$$A \cos(2\pi \nu_k k) = \frac{A}{2} \exp(j2\pi \nu_k k) + \frac{A}{2} \exp(-j2\pi \nu_k k)$$

Из предыдущей лекции спектр окна Блэкмана:

$$\begin{aligned} W(\nu) = & 0,42W_{\text{пр}}(\nu) - 0,25W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - 0,25W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right) + \\ & + 0,04W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{2}{N}\right) + 0,04W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{2}{N}\right), \\ W_{\text{пр}}(\nu) = & \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu). \end{aligned}$$

Функция  $W_{\text{пр}}(\nu)$  в точках  $\nu = \pm 1/N$  и  $\nu = \pm 2/N$  равна нулю,  $W_{\text{пр}}(0) = N$  (значение определяется в пределе). Тогда  $W(0) = 0,42N$ .



*ДВПФ последовательности в отсутствии шума.*

На рисунке показан график модуля ДВПФ с нормировкой на величину когерентного усиления  $W(0) = 0,42N$ . По графику можно сделать оценку  $A \approx 10$  ( $A/2 \approx 5$ ).

# Усиление преобразования в спектральном анализе

## Усиление преобразования в спектральном анализе

Предположим, что обрабатываемая последовательность обрабатывается с помощью окна  $w[k]$  и имеет вид

$$x[k] = A \exp(j2\pi v_k k) \quad (4)$$

$$y[k] = x[k] + \varepsilon[k] = A \exp(j2\pi v_k k) + \varepsilon[k], \quad (5)$$

где

- $\varepsilon[k]$  – отсчеты некоторой реализации белого шума с дисперсией  $\sigma^2$ ,
- $v_k$  – нормированная частота гармонической компоненты,
- $A$  – ее амплитуда.

Амплитуда  $A$  неизвестна, ее требуется оценить, используя ДПФ-анализ. Обозначим

$X_w(v)$  – ДВПФ  $x[k]w[k]$  (сигнал без шума),

$Y(v)$  – ДВПФ  $y[k]w[k]$  (сигнал с шумом),

$X_\varepsilon(v)$  – ДВПФ  $\varepsilon[k]w[k]$  (отсчеты шума).

$$W(v) \text{ – ДВПФ окна } w[k], \quad W(v) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k] \exp(-j2\pi v k).$$

Из линейности ДВПФ следует, что спектр исследуемого дискретного сигнала

$$Y(v) = X_w(v) + X_\varepsilon(v). \quad (6)$$

Для составляющей  $X_w(v)$  по формуле (2)

$$X_w(v_k) = A W(0) \quad (7)$$

Для составляющей, отвечающей за реализацию шума  $\varepsilon[k]$  (некогерентной составляющей), можно записать

$$X_\varepsilon(v_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon[k] w[k] \exp(-j2\pi v_k k) \quad (8)$$

Математическое ожидание квадрата модуля  $X_\varepsilon(v_k)$

$$\begin{aligned} E\{|X_\varepsilon(v_k)|^2\} &= E\{X_\varepsilon(v_k) X_\varepsilon^*(v_k)\} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w[k] w[m] E\{\varepsilon[k] \varepsilon^*[m]\} \exp(-j2\pi v_k k) \exp(j2\pi v_k k), \end{aligned}$$

откуда

$$E\{|X_\varepsilon(v_k)|^2\} = \sigma^2 \sum_{k=0}^{N-1} w^2[k]. \quad (9)$$



# Усиление преобразования в спектральном анализе

Обозначим через  $R_{in}$  и  $R_{out}$  отношения мощностей сигнала и шума на входе и выходе ДПФ анализа соответственно. Тогда

$$R_{in} = A^2 / \sigma^2,$$

$$R_{out} = \frac{A^2 W^2(0)}{\sigma^2 \sum_{k=0}^{N-1} w^2[k]}. \quad (10)$$

Величину  $R_{out} / R_{in}$  называют **усилением преобразования** (по мощности). Можно записать

$$R_{out} / R_{in} = \frac{W^2(0)}{\sum_{k=0}^{N-1} w^2[k]} = \frac{1}{\Delta \nu_{ш}}, \quad (11)$$

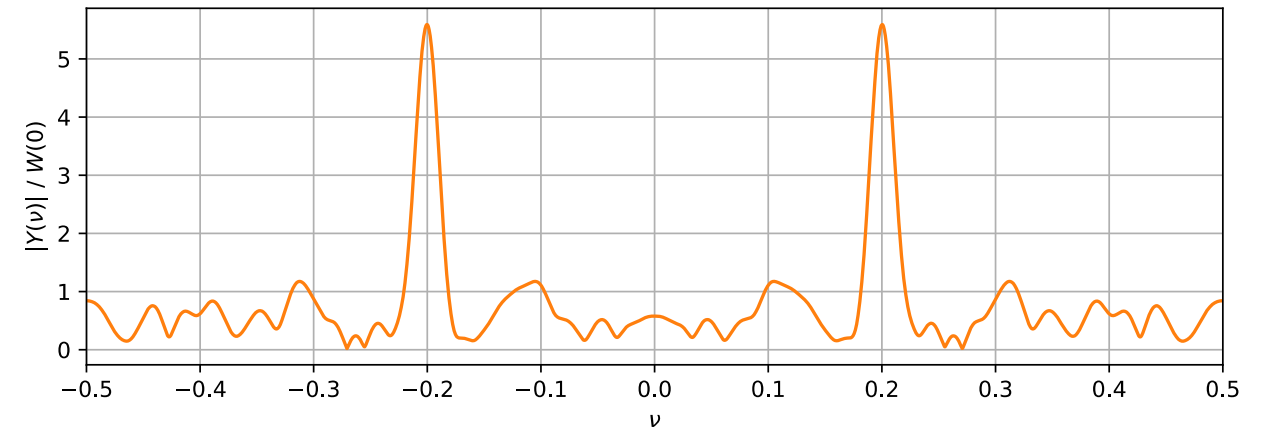
где  $\Delta \nu_{ш}$  — эквивалентная шумовая полоса (ЭШП) оконной функции.

## Пример. Оценка амплитуд гармоник.

Предположим, что анализируемая последовательность имеет вид

$$x[k] = A \cos(2\pi \nu_k k) + \varepsilon[k]$$

где  $\nu_k = 0, 2$ ,  $\varepsilon[k]$  — некоторая реализация дискретного белого шума с дисперсией  $\sigma^2$ ,  $A$  — неизвестная амплитуда, которую нужно оценить.



*ДВПФ последовательности с некоторой реализацией белого шума ( $\sigma = 4$ ).*

Теперь рассмотрим случай, когда реальная амплитуда гармоники та же, но в сигнале присутствует шум  $\varepsilon[k]$  с  $\sigma = 4$ .

В таком случае шумы влияют на оценку амплитуды, смещая ее. Одна из возможных реализаций показана на рисунке.

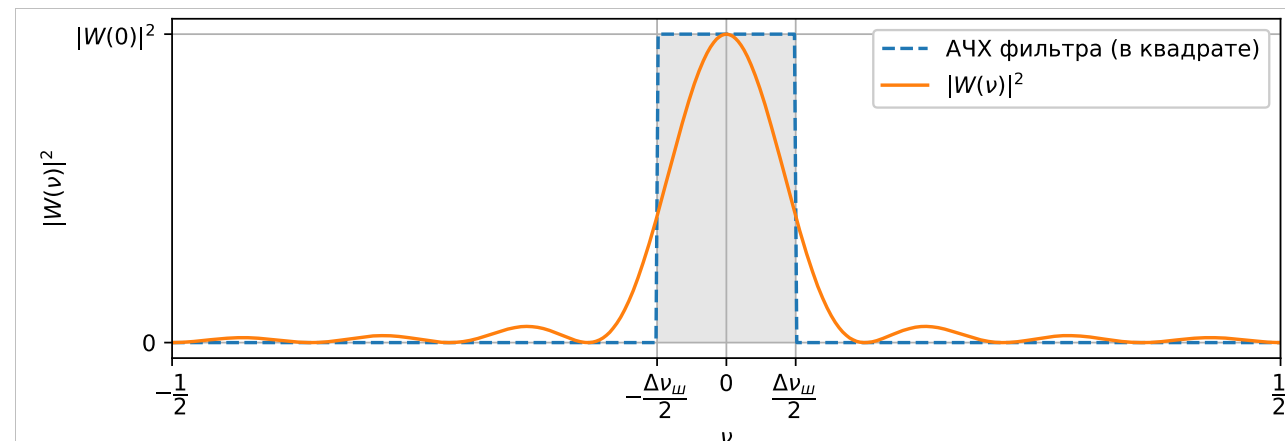
Отметим, что если частота  $\nu_k$  неизвестна, то при ДПФ анализе необходимо учитывать эффект паразитной амплитудной модуляции спектра.



# Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП) оконной функции

## Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП) оконной функции

- Оценка амплитуды гармонической компоненты может оказаться смещенной из-за наличия в сигнале широкополосного шума, попадающего в полосу пропускания окна. В таком случае, действие окна можно представить как фильтр, у которого мощность сигнала на выходе пропорциональна мощности гармоник входного сигнала в полосе пропускания.
- С помощью узкополосного окна можно минимизировать шум. В качестве меры оценки полосы пропускания окна используют эквивалентную шумовую полосу (ЭШП).
- Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП) оконной функции – это ширина полосы идеального ФНЧ, у которого значение АЧХ в полосе пропускания равно максимальному значению модуля ДВПФ оконной функции, а мощность шума на выходе фильтра, равна мощности шума после обработки его оконной функцией.



Определение ЭШП для случая прямоугольного окна длиной  $N$  отсчётов. Площадь закрашенной области  $\sum_{k=0}^{N-1} w^2[k]$ .

ЭШП в нормированных частотах определяется как

$$\Delta v_{\text{ш}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} w^2[k]}{|W(0)|^2}. \quad (12)$$

Пусть  $N$  — число отсчетов окна. Для прямоугольного окна  $\Delta v_{\text{ш}} = 1/N$ , для треугольного  $\Delta v_{\text{ш}} = 1,33/N$ , для окна Хэмминга  $\Delta v_{\text{ш}} = 1,36/N$ . Заметим, что

$$W(0) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k].$$

# Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП) оконной функции

ЭШП оконной функции с  $N$  отсчётами определяется в бинах ДПФ как

$$N\Delta\nu_{ш} = \frac{N \sum_{k=0}^{N-1} w^2[k]}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} w[k]\right)^2} \text{ бин} . \tag{13}$$

Чувствительным показателем качества оконной функции является относительная разность ЭШП и ширины главного лепестка по уровню -3дБ

$$\delta = \frac{\Delta\nu_{ш} - \Delta\nu_{-3дБ}}{\Delta\nu_{-3дБ}} , \tag{14}$$

Считается [4], что для эффективных оконных функций справедливо соотношение  $0,04 \leq \delta \leq 0,055$ .

Из формулы (11) следует, что если обрабатываемая последовательность представляет собой сумму синусоидального сигнала с частотой  $\nu = m / N$ , совпадающей с бином ДПФ, и белого шума, то ЭШП в нормированных частотах показывает, во сколько раз уменьшается отношение сигнал/шум после обработки входной последовательности  $x[k]$  оконной функцией  $w[k]$ .

название окна	ЭШП (в бинах ДПФ)	$\delta = \frac{\Delta\nu_{ш} - \Delta\nu_{-3дБ}}{\Delta\nu_{-3дБ}}$
прямоугольное	1,00	0,124
Бартлетта	1,33	0,039
Ханна	1,50	0,042
Хэмминга	1,36	0,023
Блэкмана	1,73	0,055

# Пример задачи оценивания параметров сигнала

## Пример задачи оценивания параметров сигнала

Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^M A_m \sin(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $A_m$  и  $\varphi_m$  – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих;  $m = 1, 2, \dots, \lfloor 0,5N-1 \rfloor$  – целые числа, определяющие нормированные частоты  $\nu_m = m/N$  гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ. Требуется выразить неизвестные амплитуды  $A_m$  и фазы  $\varphi_m$  через отсчеты ДПФ данной последовательности.

**Решение.**

$$\begin{aligned} \tilde{X}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{m=1}^M A_m \sin(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m) \right) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M A_m \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{1}{2j} e^{j \left( \frac{2\pi}{N} mk + \varphi_m \right)} - \frac{1}{2j} e^{-j \left( \frac{2\pi}{N} mk + \varphi_m \right)} \right) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2} \left( -j \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \left( \frac{2\pi}{N} (m-n)k + \varphi_m \right)} + j \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \left( \frac{2\pi}{N} (m+n)k + \varphi_m \right)} \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим суммы вида

$$S_1 = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \left( \frac{2\pi}{N} (m-n)k + \varphi_m \right)} = e^{j\varphi_m} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (m-n)k} \quad \text{отдельно.}$$

Определим их по формуле суммы геометрической прогрессии  $b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots, b_1 q^{N-1}$ ,

где  $b_1 = e^{j\varphi_m}$  (слагаемое при  $k=0$ ),  $q = e^{j \frac{2\pi}{N} (m-n)}$ . Если  $q \neq 1$ , то

$$S_1 = b_1 \frac{1-q^N}{1-q} = e^{j\varphi_m} \frac{1-e^{j2\pi(m-n)}}{1-e^{j \frac{2\pi}{N} (m-n)}} = 0.$$

Если  $q = 1$  (что выполнено при  $m-n$  кратном  $N$ ):

$$S_1 = b_1 N = N e^{j\varphi_m}.$$

---

Заметим, что при  $n \in \left[ 0, \frac{N}{2} - 1 \right]$  условие  $q = 1$  выполняется

при  $m = n$ . Тогда  $\tilde{X}[m] = \frac{A_m}{2} e^{j(\varphi_m - \pi/2)}$  при  $m \in \left[ 0, \frac{N}{2} - 1 \right]$ .

Отсюда находим неизвестные амплитуды и фазы:

$$A_m = 2 |\tilde{X}[m]|; \quad \varphi_m = \arg \tilde{X}[m] + \pi/2, \quad m \in \left[ 0, \frac{N}{2} - 1 \right].$$

# Пример. Различимость спектральных компонент, маскировка гармоник

## Пример. Различимость спектральных компонент, маскировка слабой гармоник.

Даны три последовательности, каждая из которых состоит из двух косинусоид с разными относительными частотами:

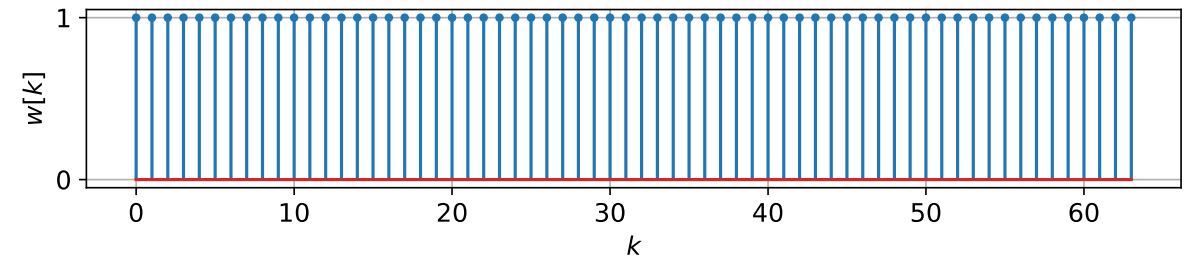
$$\begin{aligned}x_1[k] &= \cos \frac{\pi k}{4} + \cos \frac{17\pi k}{64}, \\x_2[k] &= \cos \frac{\pi k}{4} + 0,8 \cos \frac{21\pi k}{64}, \\x_3[k] &= \cos \frac{\pi k}{4} + 0,008 \cos \frac{21\pi k}{64}.\end{aligned}$$

Спектральная оценка сигнала проводится с помощью ДПФ и прямоугольного окна длиной  $N=64$ . Укажите оценки, которых соседние спектральные максимумы будут различимы.

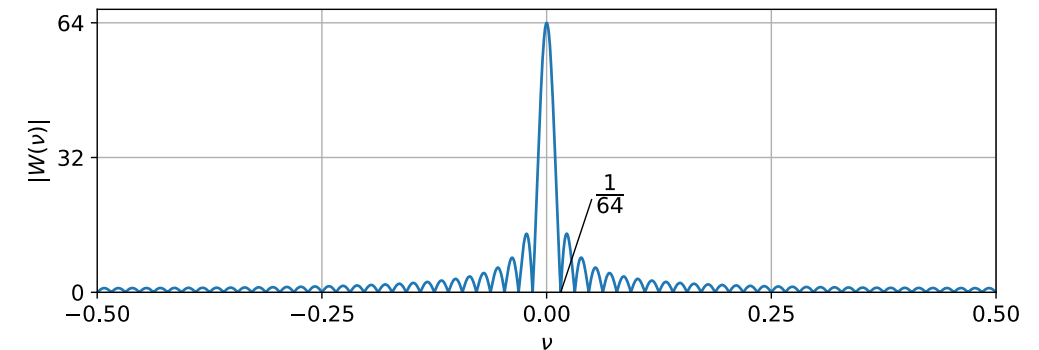
**Решение.** ДВПФ прямоугольного окна

$$W(\nu) = e^{-j\pi\nu(N-1)} \frac{\sin \pi\nu N}{\sin \pi\nu}.$$

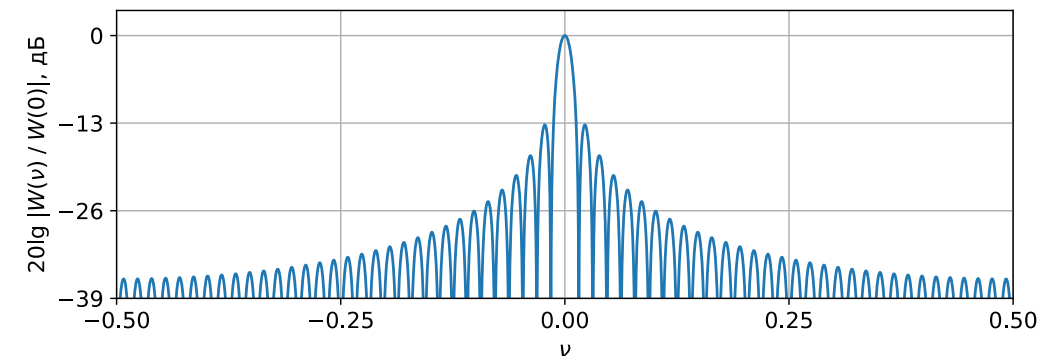
$W(\nu)$  – комплексная, периодическая (с периодом 1) функция частоты. Для прямоугольно окна ширина главного лепестка на нулевом уровне  $\Delta\nu = 1/N$ ,  $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89/N$ ,  $\Delta\nu_{-6\text{дБ}} = 1,2/N$ .



Прямоугольное окно для ДПФ во временной области



АЧХ прямоугольного окна в линейном масштабе



АЧХ окна в децибелах  
(с нормировкой на уровень главного лепестка)

## Пример. Различимость спектральных компонент, маскировка гармоник

Заметим, что последовательности могут быть записаны в виде:

$$x_1[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64}k\right) + \cos\left(2\pi \frac{8,5}{64}k\right),$$

$$x_2[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64}k\right) + 0,8\cos\left(2\pi \frac{10,5}{64}k\right),$$

$$x_3[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64}k\right) + 0,008\cos\left(2\pi \frac{10,5}{64}k\right).$$

По теореме смещения если  $w[k] \leftrightarrow W(\nu)$ , то

$$w[k]\exp(j2\pi\nu_0k) \leftrightarrow W(\nu - \nu_0).$$

Используя теорему смещения, получаем ДВПФ последовательностей после взвешивания прямоугольным окном ( $y_i[k] = x_i[k]w[k]$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

$$Y_1(\nu) = \frac{1}{2}W\left(\nu - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2}W\left(\nu + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2}W\left(\nu - \frac{8,5}{64}\right) + \frac{1}{2}W\left(\nu + \frac{8,5}{64}\right),$$

$$Y_2(\nu) = \frac{1}{2}W\left(\nu - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2}W\left(\nu + \frac{1}{8}\right) + 0,4W\left(\nu - \frac{10,5}{64}\right) + 0,4W\left(\nu + \frac{10,5}{64}\right),$$

$$Y_3(\nu) = \frac{1}{2}W\left(\nu - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2}W\left(\nu + \frac{1}{8}\right) + 0,004W\left(\nu - \frac{10,5}{64}\right) + 0,004W\left(\nu + \frac{10,5}{64}\right).$$

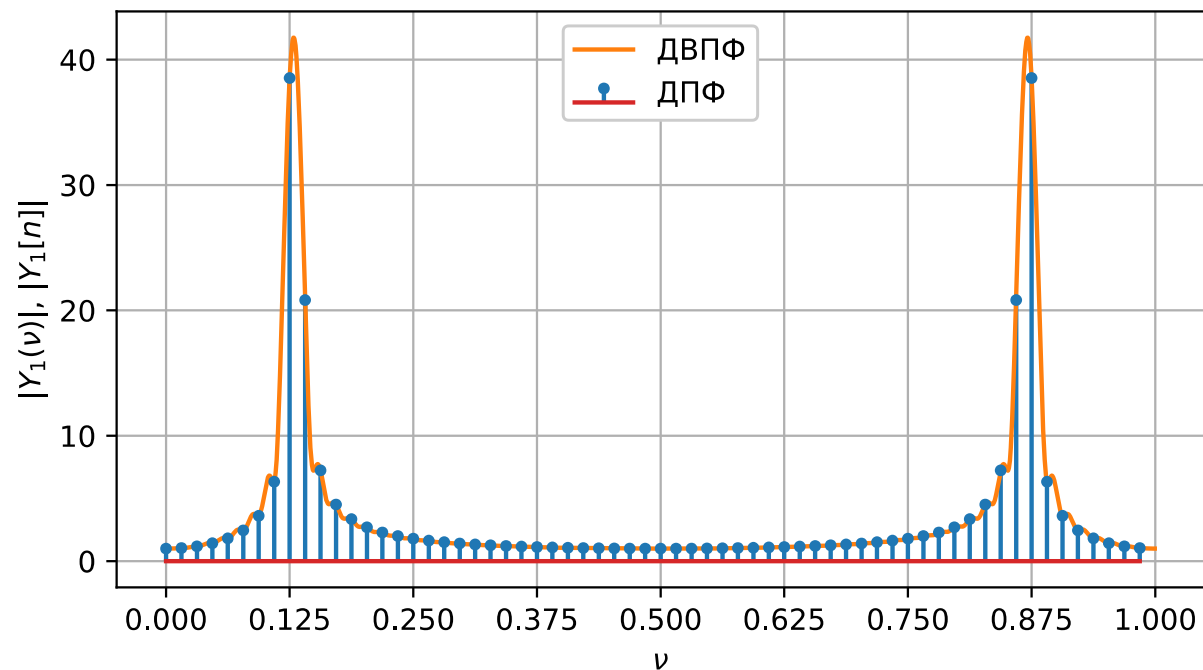
Теперь рассмотрим все три последовательности отдельно. Заметим, что благодаря спаду уровня боковых лепестков на различимость боковых лепестков в основном будет влиять соотношение между значениями функций  $W\left(\nu - \frac{1}{8}\right)$ ,

$$W\left(\nu - \frac{8,5}{64}\right) \text{ и } W\left(\nu - \frac{10,5}{64}\right).$$

# Пример. Различимость спектральных компонент, маскировка гармоник

а) Последовательность

$$x_1[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64} k\right) + \cos\left(2\pi \frac{8,5}{64} k\right)$$



ДВПФ и ДПФ последовательности  $y_1[k] = x_1[k]w[k]$ .

В этом случае расстояние между относительными частотами

$$\text{косинусоид } \Delta\nu_{12} = \frac{8,5}{64} - \frac{8}{64} = \frac{0,5}{64}.$$

Для прямоугольного окна  $\Delta\nu_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$ .

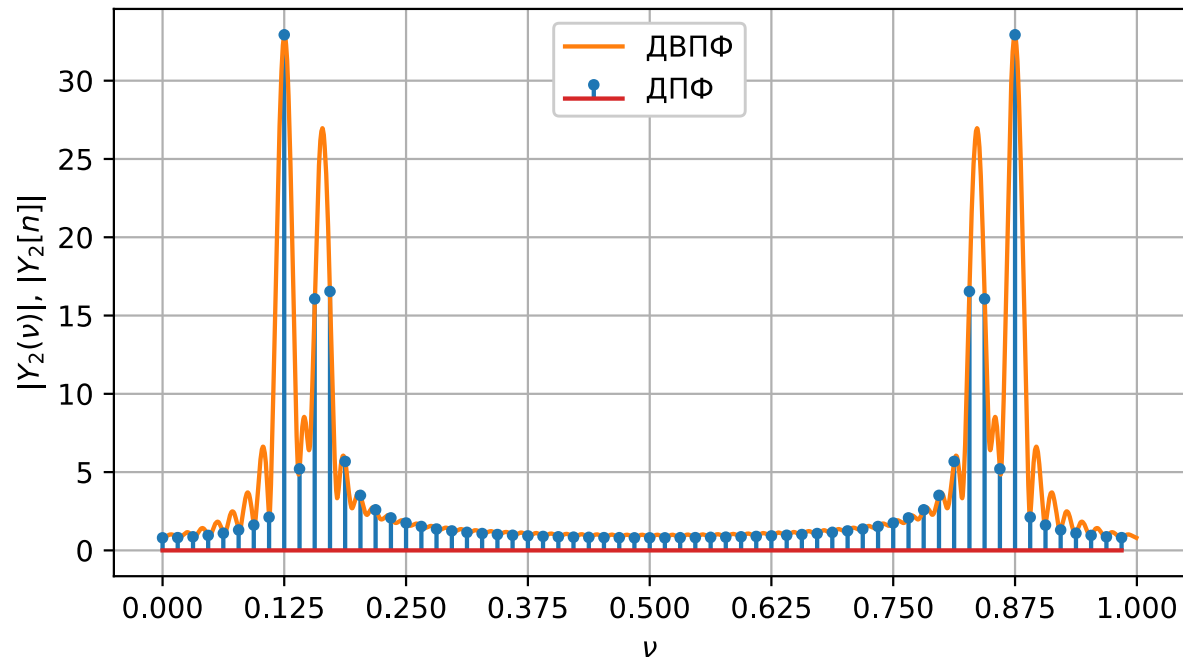
Поскольку  $\Delta\nu_{12} \leq \Delta\nu_{-3\text{дБ}}$ , то два соседних спектральных максимума сливаются в один и становятся неразличимы в ДВПФ.

Отсчеты ДПФ являются выборками ДВПФ в точках  $\nu_n = n / N$ , а значит и в ДПФ они не будут различимы.

# Пример. Различимость спектральных компонент, маскировка гармоник

## б) Последовательность

$$x_2[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64}k\right) + 0,8\cos\left(2\pi \frac{10,5}{64}k\right)$$



ДВПФ и ДПФ последовательности  $y_2[k] = x_2[k]w[k]$ .

Расстояние между относительными частотами косинусоид

$$\Delta\nu_{12} = \frac{10,5}{64} - \frac{8}{64} = \frac{2,5}{64}.$$

Для прямоугольного окна  $\Delta\nu_{-6\text{дБ}} = 1,2 / N$ .

Поскольку  $\Delta\nu_{12} \geq \Delta\nu_{-6\text{дБ}}$ , то при одинаковой амплитуде максимумы были бы различимы.

Для разных амплитуд (1 и 0,8 в примере) нужно оценить, насколько уровень бокового лепестка у слагаемого

$\frac{1}{2}W\left(\nu - \frac{1}{8}\right)$  отличается от  $0,4W\left(\nu - \frac{10,5}{64}\right)$  на частоте  $\nu = \frac{10,5}{64}$ .

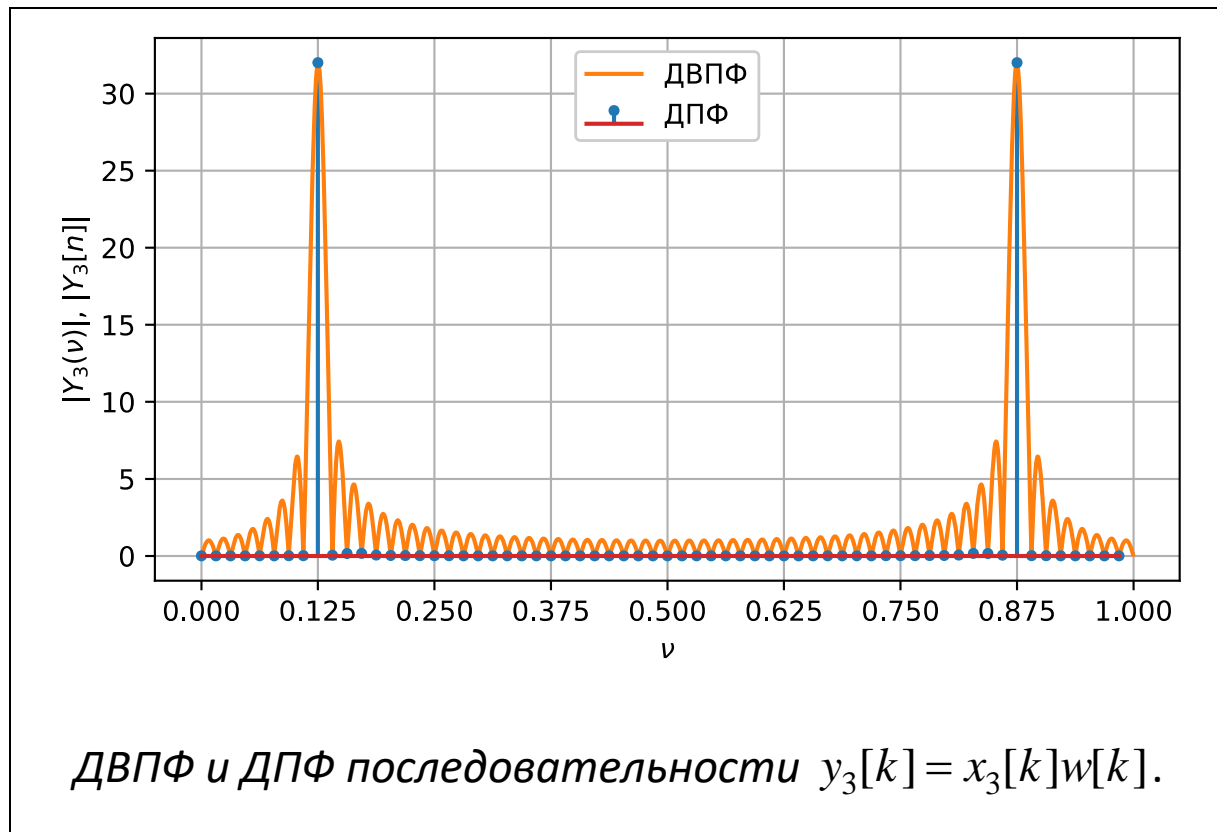
Относительный уровень второго максимума относительно первого  $20\lg(0,4 / 0,5) = 20\lg(0,8) = -1,93\text{дБ}$ . Это заметно больше максимального уровня боковых лепестков окна (-13 дБ), а значит будут видны обе гармонические компоненты.



# Пример. Различимость спектральных компонент, маскировка гармоник

## в) Последовательность

$$x_3[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64} k\right) + 0,008 \cos\left(2\pi \frac{10,5}{64} k\right)$$



Расстояние между относительными частотами косинусоид такое же, как и в предыдущем случае  $\Delta v_{12} = \frac{10,5}{64} - \frac{8}{64} = \frac{2,5}{64}$ .

Однако в этом случае амплитуды гармоник заметно отличаются. Относительный уровень второго максимума относительно первого  $20\lg(0,004 / 0,5) = 20\lg(0,008) = -41,93$  дБ. Это заметно меньше максимального уровня боковых лепестков окна (-13 дБ).

Заметим, что второй максимум попадает примерно на середину второго бокового лепестка  $\frac{1}{2}W\left(v - \frac{1}{8}\right)$ . При этом расстояние между частотами  $1,5 / N$  и  $2,5 / N$  меньше одной октавы, а значит уровень бокового лепестка прямоугольного окна на частоте  $\Delta v_{12} = 2,5 / N$  превышает -19дБ.

Получается, что вторая спектральная компонента при анализе не будет видна на фоне боковых лепестков оконных функций.

## Задачи для самостоятельного решения

**№1.** Даны два сигнала, представленные в виде линейной комбинации двух косинусоид:

$$x_1[k] = \cos(\pi k / 4) + \cos(17\pi k / 64),$$

$$x_2[k] = \cos(\pi k / 4) + \cos(21\pi k / 64).$$

Вычисляется ДВПФ каждого из этих сигналов, умноженных на 64-точечное прямоугольное окно. Определить, будут ли различимы соседние спектральные максимумы в каждом из двух случаев.

**№2.** Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^M A_m \cos(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $A_m$  и  $\varphi_m$  – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих;  $m = 1, 2, \dots, \lfloor 0,5N-1 \rfloor$  – целые числа, определяющие нормированные частоты  $\nu_m = m / N$  гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ.

Выразите неизвестные амплитуды  $A_m$  и фазы  $\varphi_m$  через отсчеты ДПФ данной последовательности.

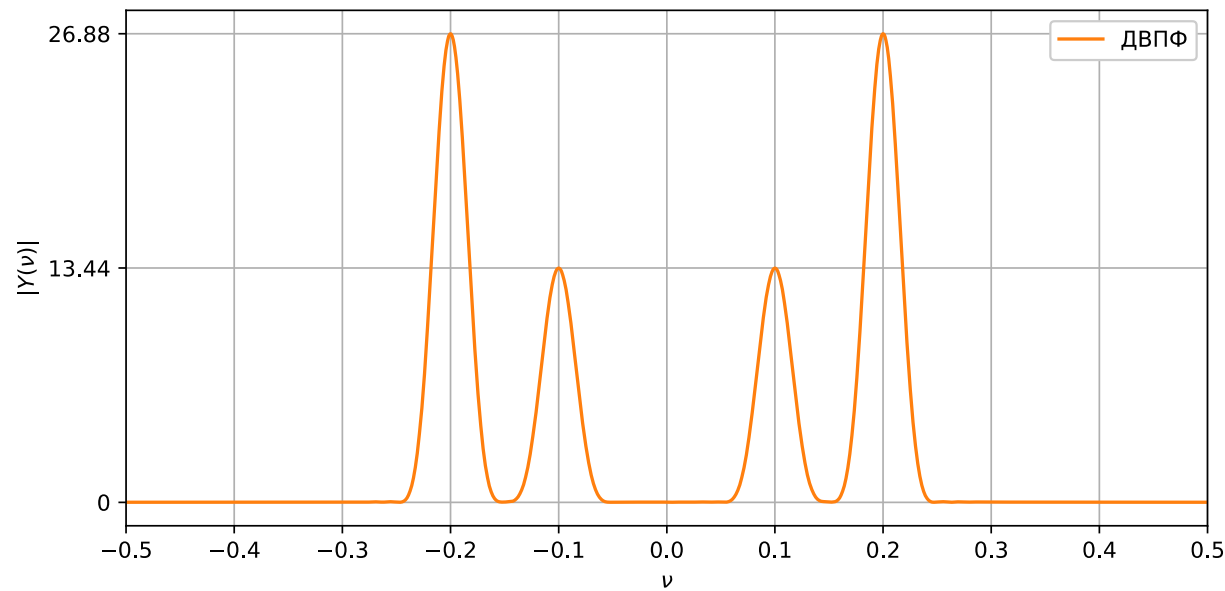
**№3.** Предположим, что нужно вычислить спектральную оценку дискретного сигнала с помощью ДВПФ и окна. При этом необходимо добиться разрешения (различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды) не менее  $\Delta\nu = 0,0075$ , а длина окна фиксирована и равна  $N = 256$ . Используя данные из таблицы приложения к лекции, определить, какие из следующих окон гарантированно позволяют выполнить поставленную задачу: а) прямоугольное, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга, д) Блэкмана.

**№4** на следующем слайде.

**№4.** На рисунке изображен спектр (ДВПФ) последовательности отсчетов

$$x[k] = A_1 \sin(2\pi\nu_1 k) + A_2 \sin(2\pi\nu_2 k), \nu_1 = 0,1, \nu_2 = 0,2,$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — неизвестные амплитуды (положительные числа), взвешенной окном Блэкмана длиной в 64 отсчета. Оцените значения  $A_1$  и  $A_2$  по графику.



**Пример практического применения оценки амплитуд.**

Investigation of the correlations between the field pavement in-place density and the intelligent compaction measure value (ICMV) of asphalt layers

<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.123439>

## Список литературы

1. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.
2. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.
3. Дворкович В. П., Дворкович А. В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016. — 208с.
4. Харрис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. — ТИИЭР, 1978, т. 6, No 1, с. 60 — 96.

Приложение. Сводная таблица основных характеристик оконных функций.

Приложение. Сводная таблица основных характеристик различных оконных функций.

название окна	ширина главного лепестка на нулевом уровне (в бинах ДПФ)	уровень максимального бокового лепестка относительно главного (дБ)	скорость спада боковых лепестков (дБ / октава)	коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}}$ (дБ)
прямоугольное	2	-13,3	6	-3,92
Бартлетта	4	-26,5	12	-1,82
Ханна	4	-32	18	-1,42
Хэмминга	4	-42	6	-1,78
Блэкмана	6	-58,1	18	-1,10
Flattop	10	зависит от длины окна		-0,02

название окна	полоса по уровню -3 дБ (в бинах ДПФ)	полоса по уровню -6 дБ (в бинах ДПФ)	ЭШП (в бинах ДПФ)	$\delta = \frac{\Delta v_{\text{ш}} - \Delta v_{-3\text{дБ}}}{\Delta v_{-3\text{дБ}}}$	Когерентное усиление в единицах $W(0) / N$
прямоугольное	0,89	1,20	1,00	0,124	1
Бартлетта	1,28	1,78	1,33	0,039	0,5
Ханна	1,44	2,00	1,50	0,042	0,5
Хэмминга	1,33	1,82	1,36	0,023	0,54
Блэкмана	1,64	2,30	1,73	0,055	0,42
Flattop	3,74	4,60	3,77	0,008	0,21557895