Лекция 9 по курсу «Цифровая обработка сигналов»

31 марта 2025 г.

6. Многоскоростная обработка сигналов.

6.1. Система однократной интерполяции.

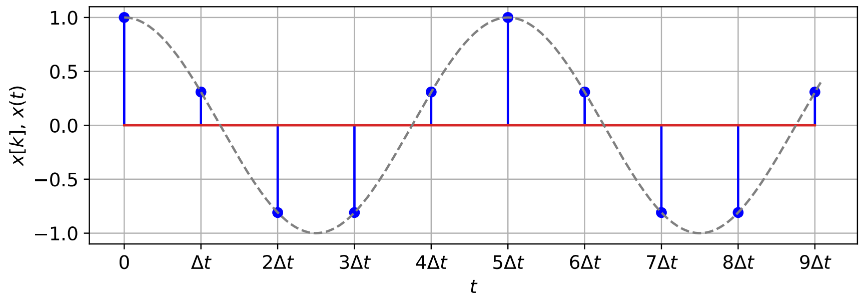
Интерпретация процедуры интерполяции во временной и в частотной области.

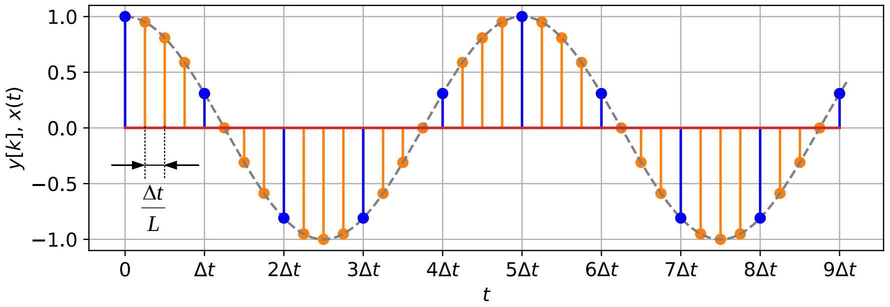
6.2. Система однократной децимации.

Эффект наложения при децимации. Интерпретация процедуры децимации в частотной и во временной области.

6.3. Система однократной передискретизации.

Интерполяция с рациональным шагом.





6. Многоскоростная обработка сигналов.

Многоскоростными называют системы ЦОС, в которых различные этапы обработки сигнала выполняются на разных частотах дискретизации — разных скоростях поступления отсчетов. В таких системах необходима "стыковка" соответствующих этапов цифровой обработки, которая сводится к преобразованию частоты дискретизации.

Многоскоростные системы находят применение в связи, при обработке речи, спектральном анализе, в радиолокационных системах и антенных системах, в цифровой аудиотехнике, при сжатии изображений.

Преобразование частоты дискретизации в многоскоростных системах выполняется в одном из следующих вариантов.

1) Повышение частоты дискретизации в целое число раз L, называемое ***интерполяцией*** (в англоязычной литературе upsampling, expansion или interpolation) и выполняемое системой интерполяции с коэффициентом интерполяции L, равным:

$$L = \frac{\tilde{f}_д}{f_д}, \qquad (1)$$

где $f_д$ и $\tilde{f}_д$ — частоты дискретизации сигналов на входе и выходе системы интерполяции соответственно.

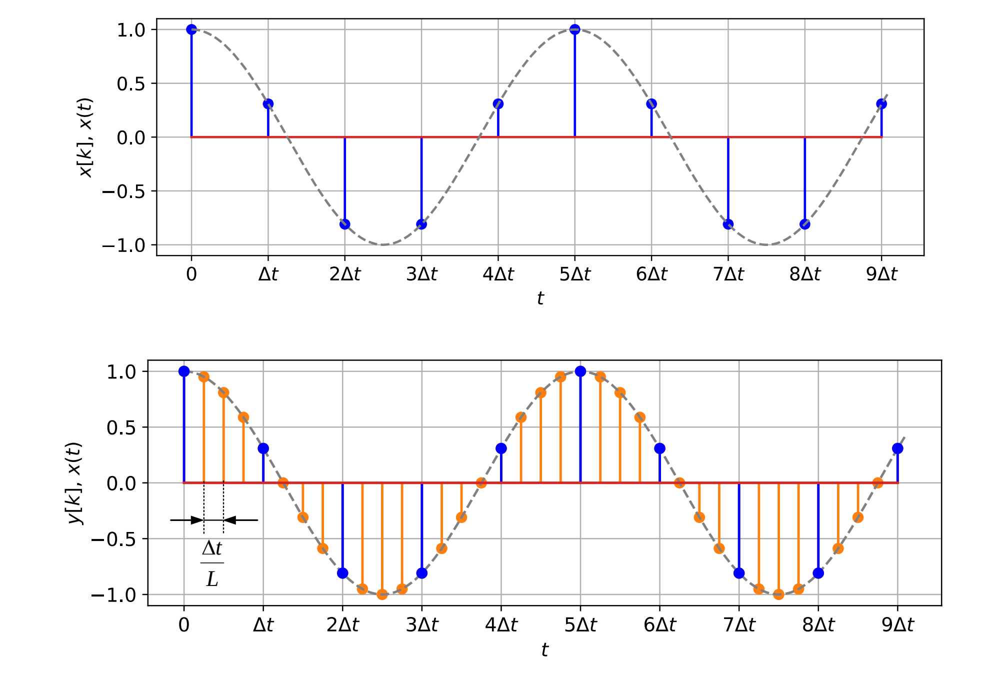


Рис. 6.1. Интерполяция сигнала с $L = 4$.

На рис. 6.1 приведен пример интерполяции с коэффициентом $L = 4$. Шаг дискретизации исходного сигнала $\Delta t = 1/f_д$, после интерполяции в L раз меньше:

$$\frac{1}{\tilde{f}_д} = \frac{\Delta t}{L} = \frac{1}{Lf_д}. \qquad (2)$$

Новая частота дискретизации в L раз больше: $\tilde{f}_д = Lf_д$.

Многоскоростная обработка сигналов

2) Понижение частоты дискретизации в целое число раз M, называемое ***децимацией или прореживанием*** (в англоязычной литературе downsampling, compression или decimation) и выполняемое системой децимации с коэффициентом децимации M, равным:

$$M = \frac{f_д}{\tilde{f}_д}, \qquad (3)$$

где $f_д$ и $\tilde{f}_д$ — частоты дискретизации сигналов на входе и выходе системы децимации соответственно.

На рис. 6.2 приведен пример прореживания сигнала с коэффициентом $M = 4$. Шаг дискретизации исходного сигнала $\Delta t = 1/f_д$, после интерполяции в L раз больше:

$$\frac{1}{\tilde{f}_д} = M\Delta t = \frac{M}{f_д}. \qquad (4)$$

Новая частота дискретизации в M раз меньше: $\tilde{f}_д = f_д / M$.

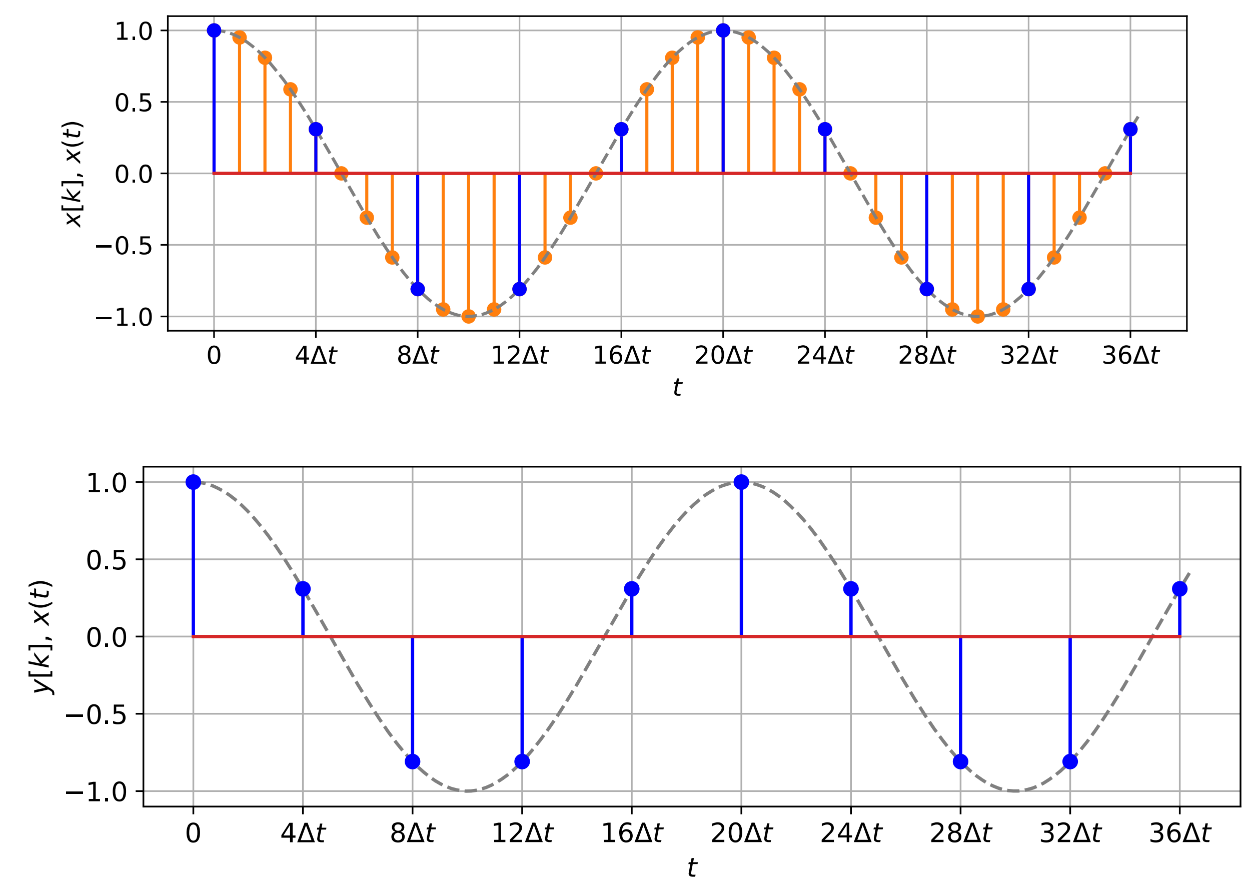


Рис. 6.2. Прореживание сигнала с коэффициентом $M = 4$.

Многоскоростная обработка сигналов

3) Повышение или понижение частоты дискретизации на рациональный коэффициент L/M, называемое ***передискретизацией*** (resampling), реализуется каскадным соединением систем интерполяции с коэффициентом L и децимации с коэффициентом M.

Пример приведен на рис. 6.3.

Системы преобразования частоты называют *однократными*, если увеличение (уменьшение) частоты дискретизации выполняется за один прием — однократно; многократными называют системы, образованные каскадным соединением однократных систем, что оправдано при больших значениях L и M, т. к. требования к однократным системам существенно менее жесткие.

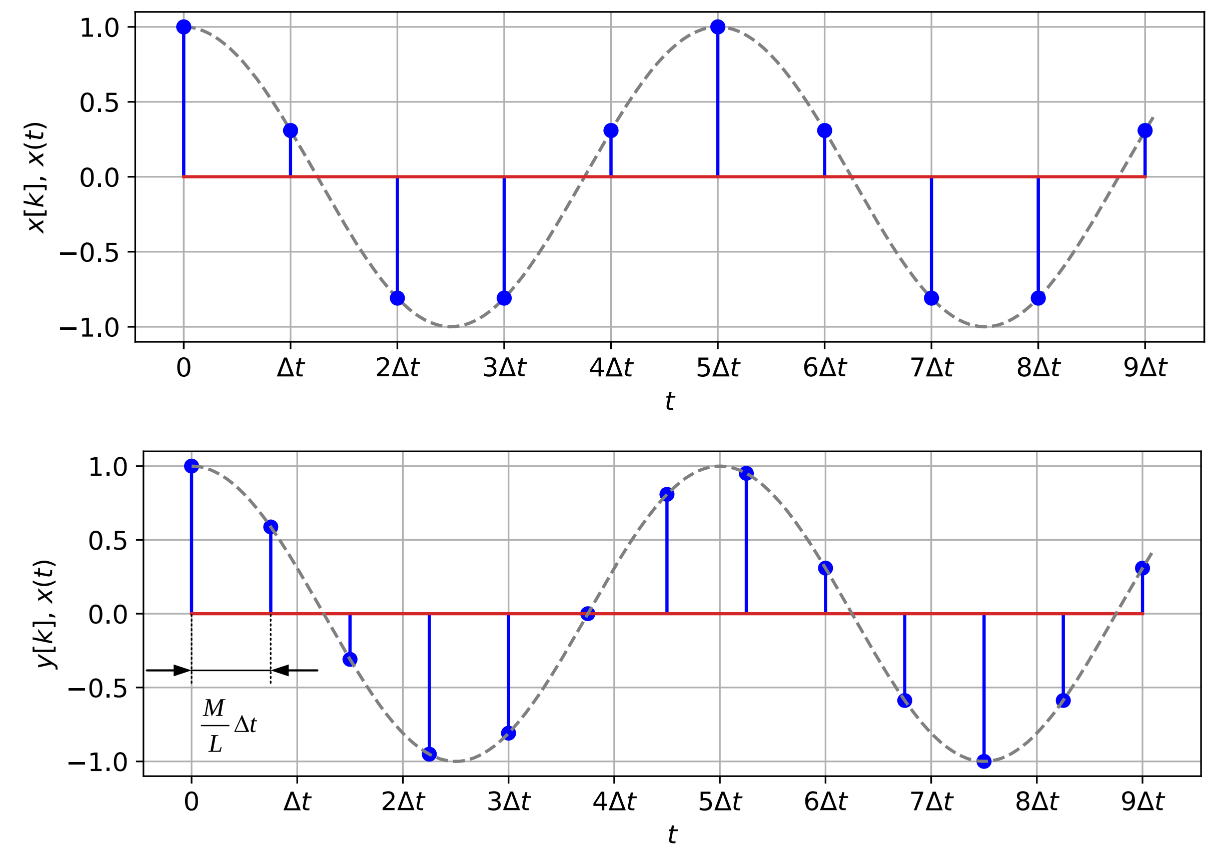


Рис. 6.3. Передискретизация сигнала с коэффициентом $L/M = 4/3$.

6.1. Система однократной интерполяции.

Система однократной интерполяции с целым коэффициентом L может быть построена так, как показано на рис 6.4.

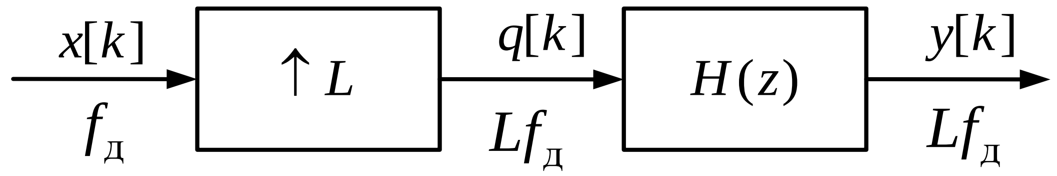


Рис. 6.4. Система однократной интерполяции

Входной сигнал $x[k]$ с частотой дискретизации $f_д$ поступает на блок $\uparrow L$ (экспандер), который формирует сигнал $q[k]$ с частотой дискретизации $\tilde{f}_д = Lf_д$:

$$q[k] = \begin{cases} x[k/L], k = Lm, m \in Z; \\ 0, k \neq Lm, m \in Z. \end{cases} \qquad (5)$$

Построение последовательности $q[k]$ эквивалентно добавлению $L-1$ нулевого отсчета между каждой парой отсчетов $x[k]$.

Затем сигнал $q[k]$ поступает на цифровой фильтр нижних частот с передаточной функцией $H(z)$.

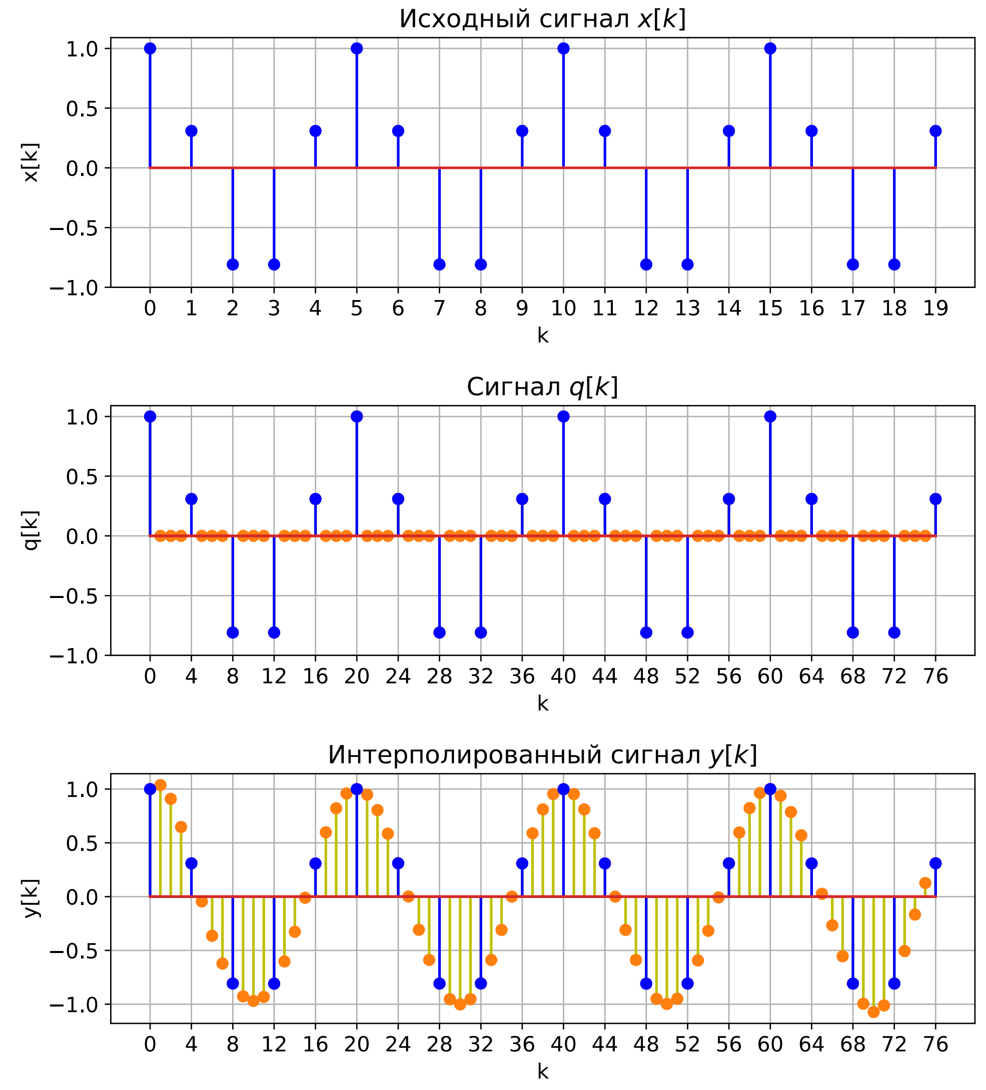


Рис. 6.5. Интерпретация процедуры однократной интерполяции с коэффициентом $L=4$ во временной области

Система однократной интерполяции

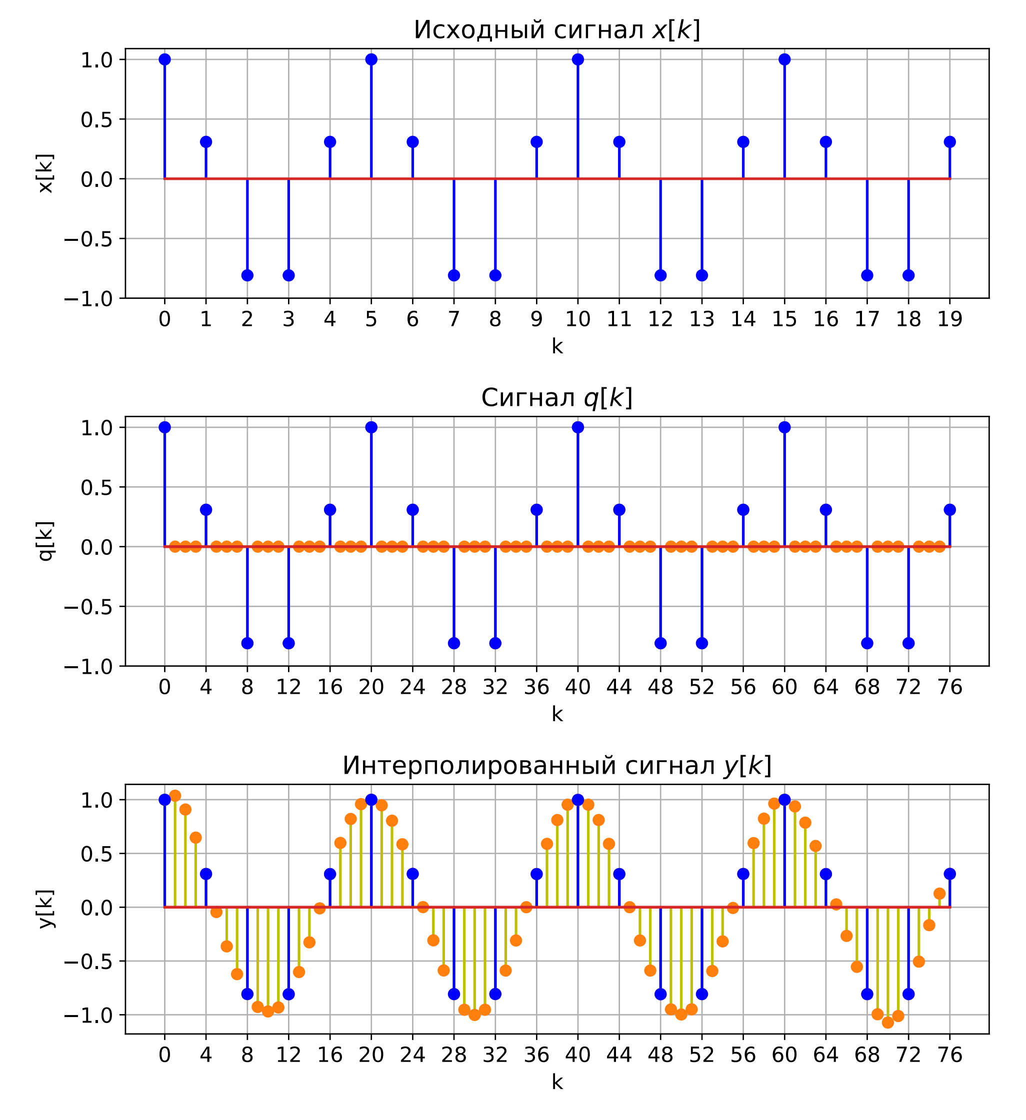


Рис. 6.5. Интерпретация процедуры однократной интерполяции с коэффициентом $L=4$ во временной области.

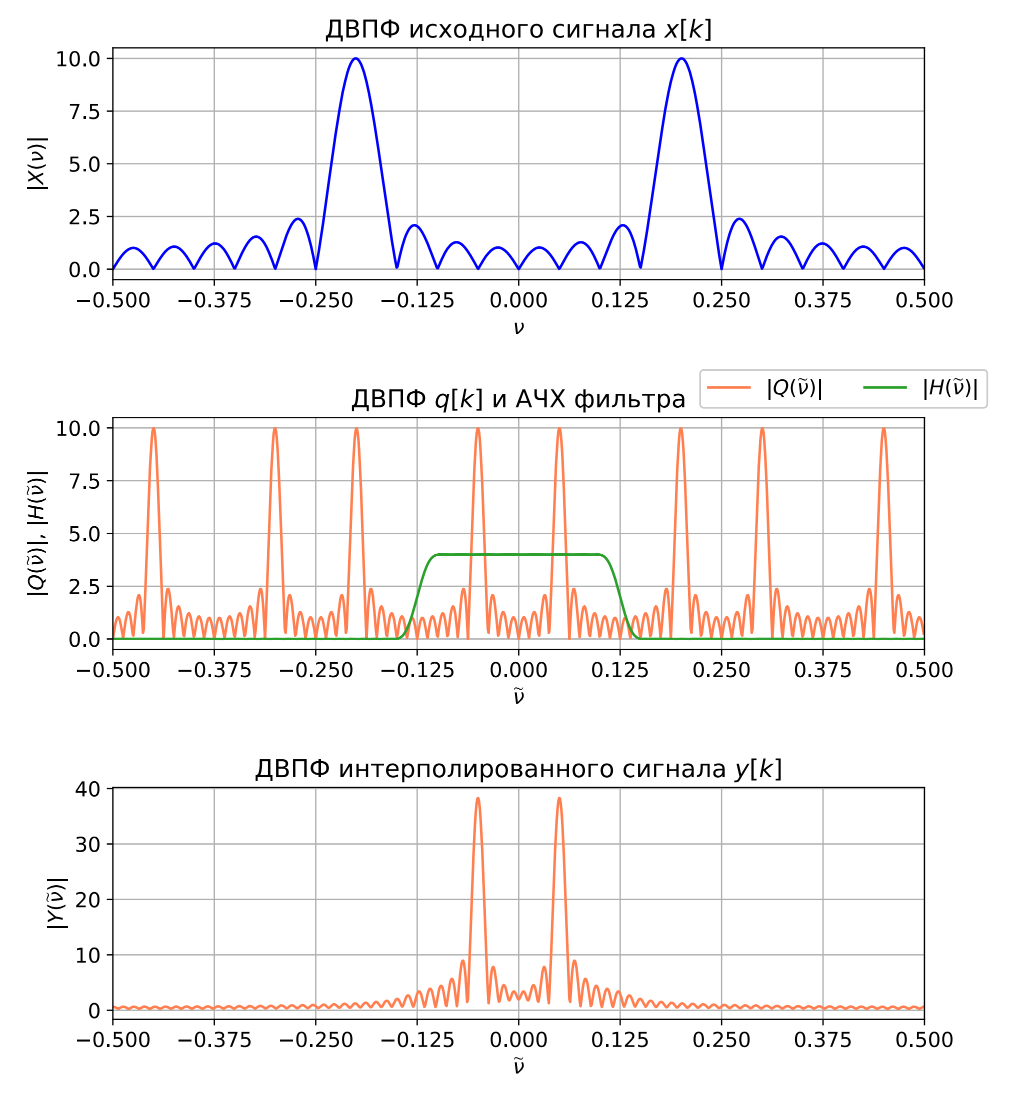


Рис. 6.6. Интерпретация процедуры однократной интерполяции с коэффициентом $L=4$ в частотной области.

Система однократной интерполяции

Напомним, что по **свойству ДВПФ** если $x[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu)$, то

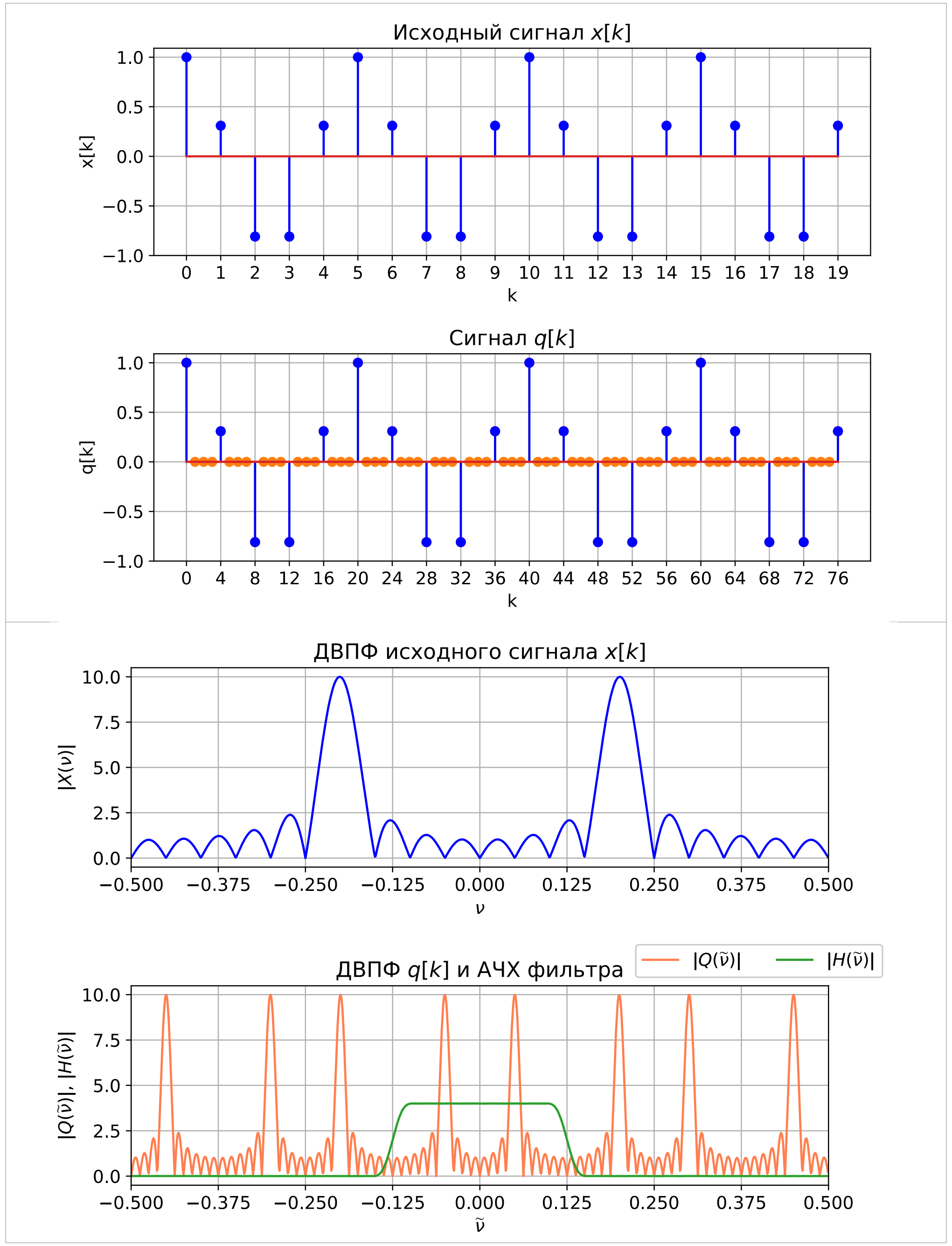
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(\nu L).$$

Последовательность $q[k]$ образуется путем добавления $L-1$ нулевого отсчета между каждой парой соседних отсчетов последовательности $x[k]$:

$$q[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathbf{1}[k-mL], \qquad \mathbf{1}[k-mL] = \begin{cases} 1, & k = mL; \\ 0, & k \neq mL. \end{cases}$$

Пусть $q[k] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Q(\nu)$. Тогда $Q(\nu) = X(\nu L)$,т.е. функция $Q(\nu)$ образуется путем сжатия $X(\nu)$вдоль оси частот в L раз. В нашем случае у сигнала на выходе блока $\uparrow L$ частота дискретизации $\tilde{f}_{д} = Lf_{д}$, нормированная частота $\tilde{\nu} = f / \tilde{f}_{д} = f\Delta t / L$.

При сжатии периодической функции $X(\nu)$ вдоль оси частот в L на отрезке оси частот $\tilde{\nu} \in [-0,5; 0,5]$ помимо основных составляющих спектра (на частотах $\tilde{\nu} \in [-1/2L; 1/2L]$) появляются их копии. Задача цифрового фильтра в системе однократной интерполяции заключается в ослаблении компонент спектра, соответствующих этим копиям.



Система однократной интерполяции

АЧХ фильтра в идеальном случае на основном периоде определяется как

$$\left|H_{\text{ид}}(\tilde{\nu})\right| = \begin{cases} L, \ |\tilde{\nu}| \le \dfrac{1}{2L}; \\ 0, \text{при других } \tilde{\nu} \in [-0.5, 0.5]. \end{cases} \quad (6)$$

$\tilde{\nu}$ — частота, нормированная на величину $\tilde{f}_{\text{д}} = L / \Delta t$. В результате получается последовательность $y[k]$, которая является результатом интерполяции сигнала $x[k]$. Усиление фильтра L в полосе пропускания в (6) необходимо для того, чтобы обеспечить соответствие амплитуд в $x[k]$ и $q[k]$, поскольку длина последовательности $q[k]$ больше $x[k]$ L раз.

В силу невозможности физической реализации идеального фильтра нижних частот, используется фильтр нижних частот, частотная характеристика которого с некоторой точностью приближена к идеальной. Отметим, что и фазовая характеристика реального фильтра не будет нулевой на всех частотах. Выход реальной системы однократной системы интерполяции будет следовать с некоторой задержкой, зависящей от используемого фильтра. Для сохранения формы исходного сигнала (исключения влияния фазовых искажений) в качестве ФНЧ выбирают КИХ-фильтр с линейной ФЧХ, либо с ФЧХ, приближенной к линейной в полосе пропускания.

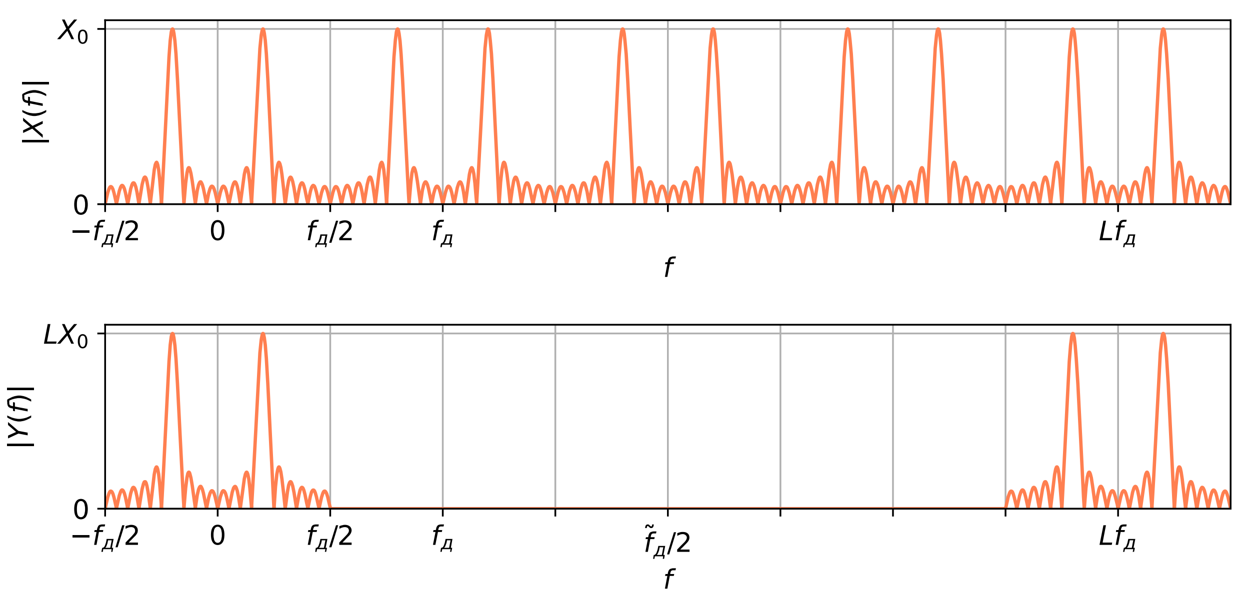


Рис. 6.7. ДВПФ последовательностей $x[k]$ и $y[k]$ в случае идеального фильтра нижних частот.

Система однократной интерполяции

Покажем, что коэффициент усиления фильтра (6) в полосе пропускания должен быть равен L. Предположим, что аналоговый сигнал $x(t)$ был дискретизован с шагом дискретизации Δt, в результате чего получается последовательность $x[k]=x(k\Delta t)$. Связь между спектром аналогового сигнала $X_a(f)$ и ДВПФ $X(f)$ последовательности $x[k]$ имеет вид:

$$X(f)=\frac{1\,\text{c}}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f+mf_{\text{д}}). \tag{7}$$

В тоже время, если $x(t)$ дискретизовать с шагом $\Delta t / L$ и получить последовательность $y[k]=x(k\Delta t / L)$, то связь между $X_a(f)$ и её ДВПФ $Y(f)$ имеет вид ($\tilde{f}_{\text{д}}=f_{\text{д}}L$)

$$Y(f)=\frac{1\,\text{c}}{\Delta t / L}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f+m\tilde{f}_{\text{д}}). \tag{8}$$

В идеальной ситуации, когда эффект наложения при дискретизации в обоих случаях отсутствует, связь между $X(f)$ и $Y(f)$ на отрезке $f\in[-f_{\text{д}}/2;\, f_{\text{д}}/2]$ имеет вид $Y_{\text{д}}(f)=L\,X_{\text{д}}(f)$. Это означает, что коэффициент усиления идеального фильтра в полосе пропускания равен L.

Описание системы однократной интерполяции в z-плоскости.

Пусть $X(z)$, $Q(z)$ и $Y(z)$ — z-образы последовательностей $x[k]$, $q[k]$ и $y[k]$. Соотношение вход/выход системы интерполяции в z-плоскости имеет вид:

$$Y(z)=Q(z)H(z)=X(z^L)H(z). \tag{9}$$

Второе равенство в (9) следует из того, что

$$Q(z)=\sum_{k=0}^{\infty} q[k]\,z^{-k}=\sum_{k=0,\,L,\,2L,\,\ldots}^{\infty} x\left[\frac{k}{L}\right] z^{-k}=\sum_{m=0}^{\infty} x[m]\,z^{-Lm}=X(z^L). \tag{10}$$

Система однократной децимации

6.2. Система однократной децимации.

Система однократной децимации (прореживания) с целым коэффициентом M может быть построена так, как показано на рис 6.8.

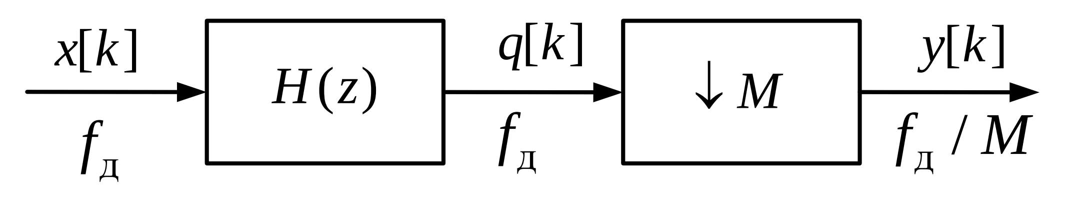


Рис. 6.8. Система однократной децимации.

Входной сигнал $x[k]$ поступает на цифровой фильтр нижних частот с передаточной функцией с передаточной функцией $H(z)$. Его АЧХ в идеальном случае на основном периоде определяется как

$$\left|H_{ид}(\nu)\right| = \begin{cases} 1, \ |\nu| \le \dfrac{1}{2M}; \\ 0, \text{при других } \nu \in [-0.5, 0.5]. \end{cases} \qquad (11)$$

Здесь ν — частота, нормированная на величину $f_д = 1/\Delta t$.

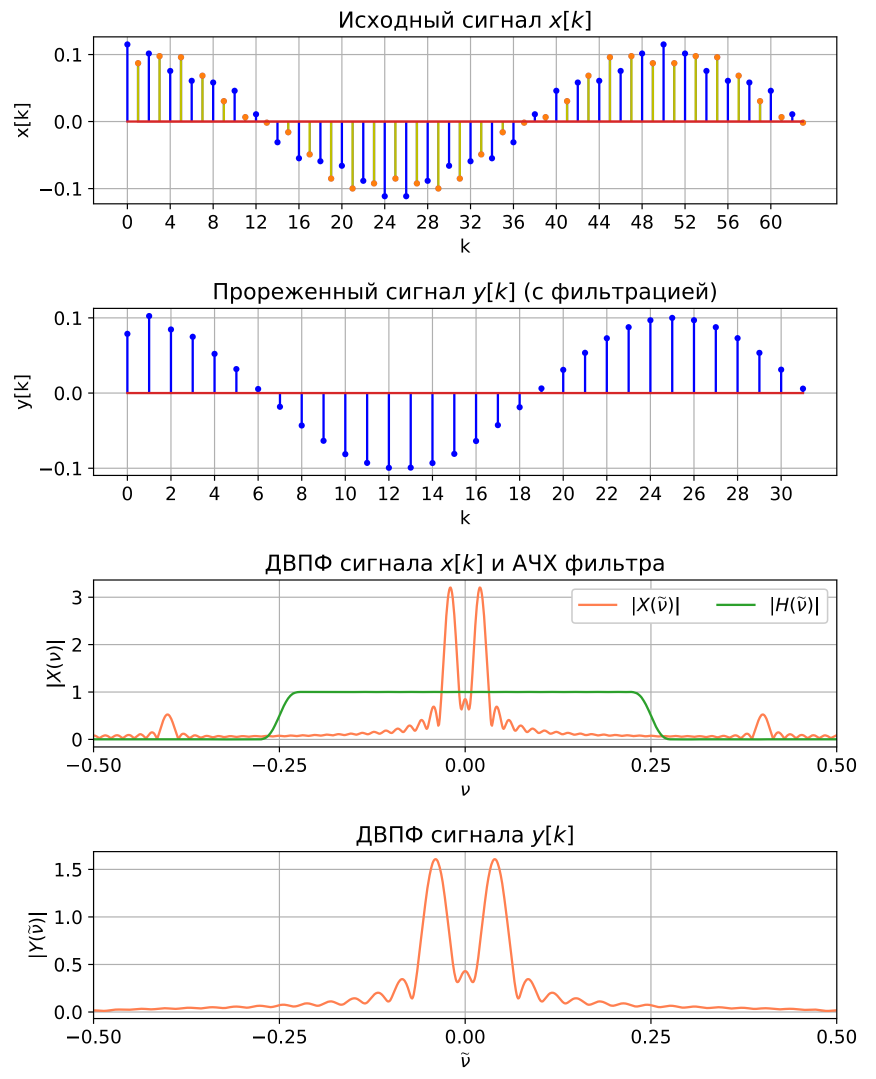


Рис. 6.9. Интерпретации процедуры однократной децимации с коэффициентом $M = 2$ во временной области и в частотной области.

Система однократной децимации

Цифровой фильтр позволяет ослабить (в идеальном случае — устранить) эффект наложения высокочастотных компонент при изменении частоты дискретизации. Сигнал $q[k]$ с выхода фильтра поступает на блок $\downarrow M$ (компрессор). Компрессор оставляет в сигнале $q[k]$ каждый M-й отсчет:

$$y[k]=\begin{cases} q[m],\ m=Mk; \\ 0,\ m\neq Mk. \end{cases}$$

Как и в случае системы однократной интерполяции из-за невозможности физической реализации идеального фильтра нижних частот используют некоторую его каузальную аппроксимацию.

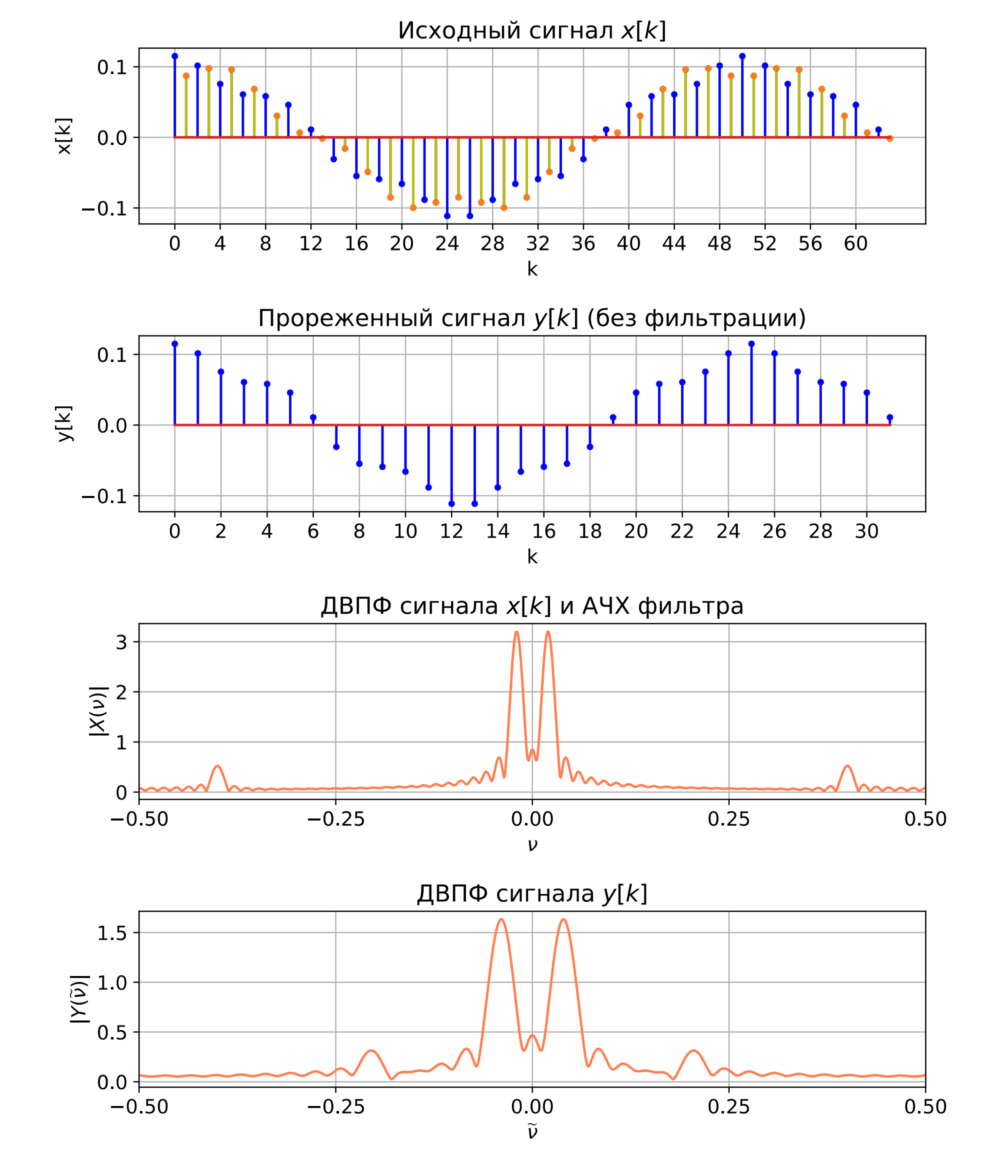


Рис. 6.10. Эффект наложения при прореживании сигнала с коэффициентом $M=2$.

6.3. Система однократной передискретизации.

Система однократной передискретизации представлена на рис. 6.11. Повышение или понижение частоты дискретизации на коэффициент передискретизации в виде рациональной дроби L/M реализуется каскадным соединением систем интерполяции с коэффициентом L и децимации с коэффициентом M (рис. 6.11а).

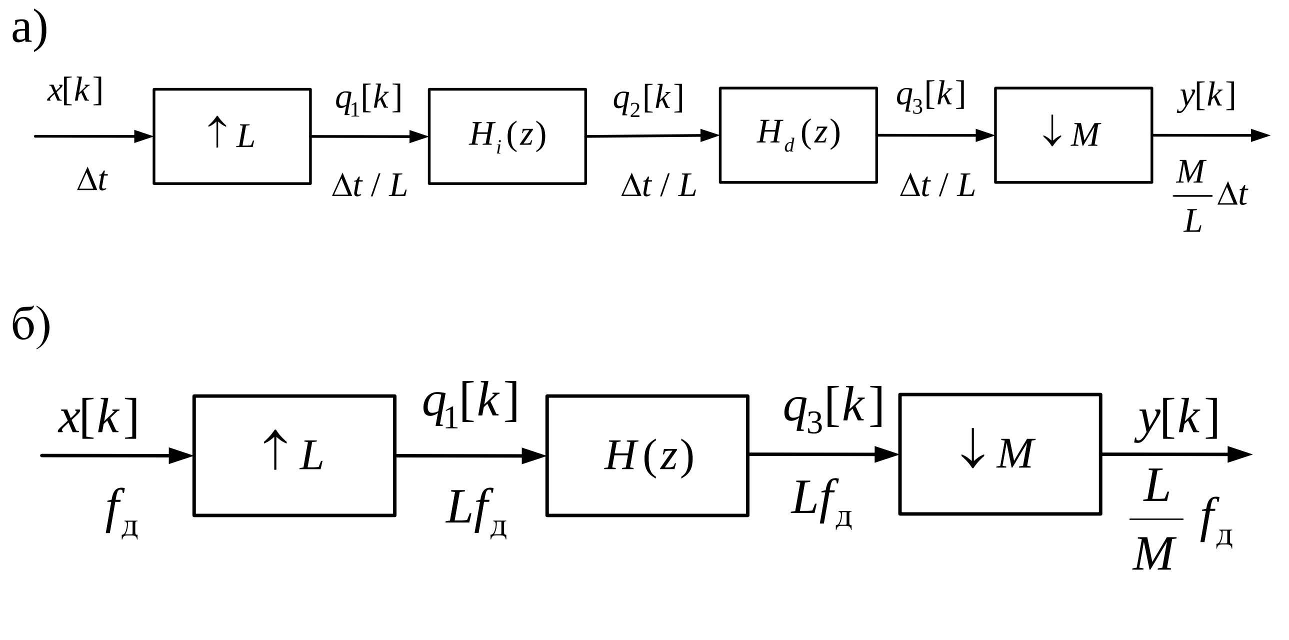


Рис. 6.11. Система однократной децимации.

На рис. 6.11а цифровой фильтр с передаточной функцией $H_i(z)$ относится к блоку однократной интерполяции (АЧХ определяется формулой (6)). Цифровой фильтр с передаточной функцией $H_d(z)$ относится к блоку однократной децимации (АЧХ (11)). Оба фильтра работают на одной частоте дискретизации $\tilde{f}_{д} = L/\Delta t$. Это обстоятельство позволяет объединить два фильтра в один с передаточной функцией

$$H(z) = H_i(z) H_d(z). \qquad (12)$$

АЧХ такого фильтра в идеальном случае на основном периоде определяется как

$$\left|H_{ид}(\tilde{\nu})\right| = \begin{cases} L, \ |\tilde{\nu}| \le \min\left\{\dfrac{1}{2L}; \dfrac{1}{2M}\right\}; \\ 0, \text{при других } \tilde{\nu} \in [-0.5, 0.5]. \end{cases} \qquad (13)$$

Здесь $\tilde{\nu}$ — частота, нормированная на величину $\tilde{f}_{д} = L/\Delta t$.

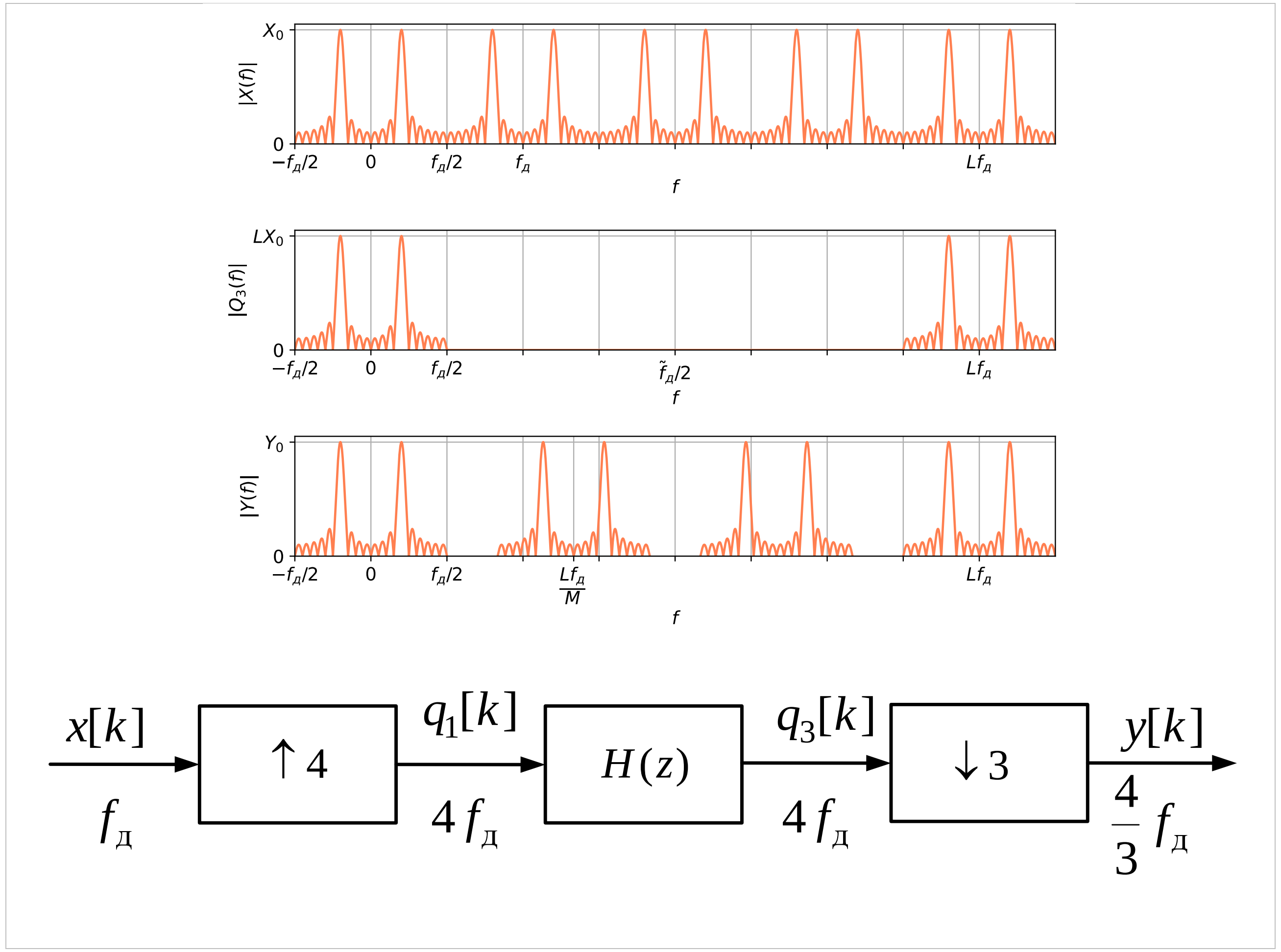
Частота дискретизации на выходе системы

$$\bar{f}_{д} = \frac{L}{M\Delta t}. \qquad (14)$$

Иногда систему передискретизации в случае $L/M > 1$ называют системой интерполяции с рациональным

Система однократной передискретизации

коэффициентом L/M, а в случае $L/M<1$ — децимации с рациональным коэффициентом M/L.



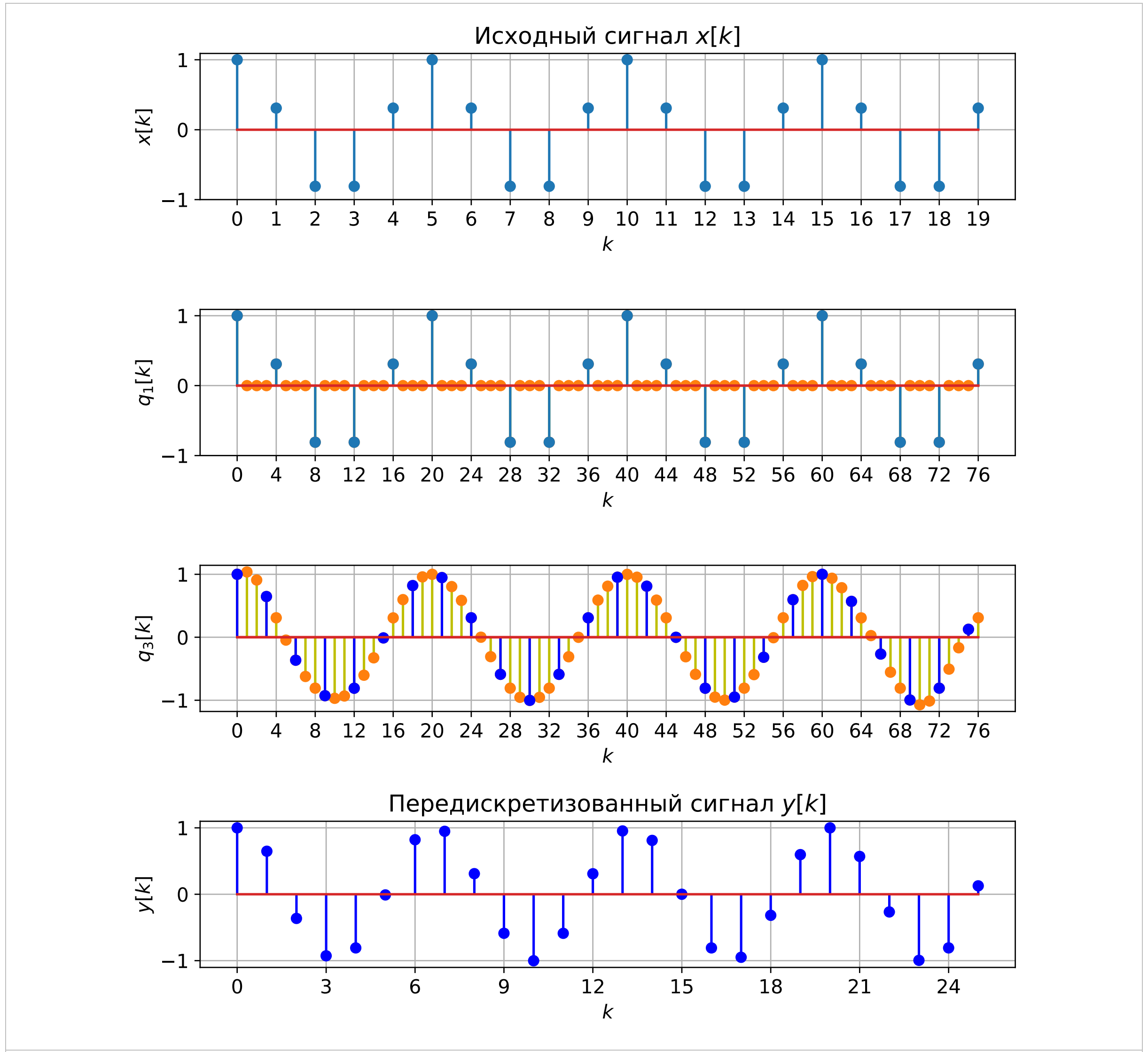


Рис. 6.12. Интерпретация процедуры однократной передискретизации с коэффициентом $L/M=4/3$ во временной области.

Система однократной передискретизации

На рис. 6.12 приведена интерпретация процедуры однократной передискретизации с коэффициентом $L/M = 4/3$ во временной и в частотной области. АЧХ фильтра идеального ФНЧ системы однократной передискретизации в данном случае

$$\left|H_{\text{ид}}(\tilde{\nu})\right| = \begin{cases} 4, \ |\tilde{\nu}| \le 1/8 \\ 0, \text{ при других } \tilde{\nu} \in [-0.5, 0.5]. \end{cases}$$

Спектральная функция $Q_3(f)$ периодична с периодом $\tilde{f}_\text{д} = Lf_\text{д}$, а спектр $Y(f)$ выходного сигнала имеет период $\bar{f}_\text{д} = f_\text{д}L/M$.

Примечание. На практике данный подход не всегда реализуется в системах однократной передискретизации. Например, для перехода от частоты дискретизации $f_{s1} = 44100$ Гц (CD) к $f_{s2} = 48000$ Гц (DVD) шаг передискретизации

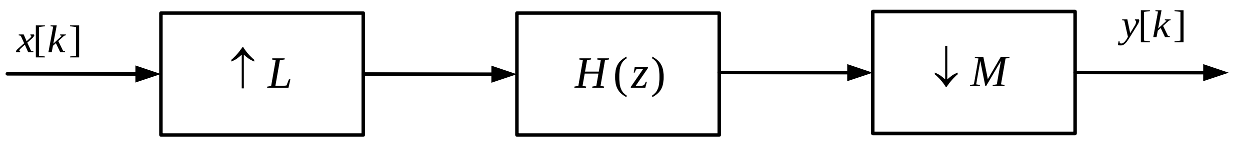
$$\frac{L}{M} = \frac{f_{s2}}{f_{s1}} = \frac{48000}{44100} = \frac{160}{147} = \frac{2^5 \times 5}{3 \times 7^2}.$$

Производить дополнение нулями с последующим прореживанием в таком случае не рационально, и используется локальная Лагранжева интерполяция, см. [3]

Задачи с лекции

Задачи для самостоятельного решения

№1. На рисунке приведена блок-схема системы однократной передискретизации с рациональным шагом L/M.

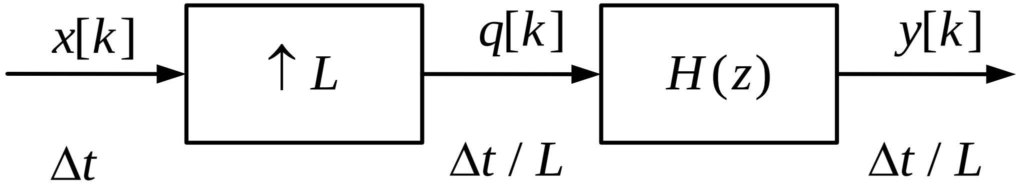


Постройте график для АЧХ идеального фильтра в данной системе однократной передискретизации для следующих случаев:

а) $L=5$ и $M=2$;

б) $L=2$ и $M=5$.

№2. На рисунке приведена блок-схема системы однократной интерполяции с целым коэффициентом $L=2$.



Предположим, что входной сигнал $x[k]$ имеет вид

$x[k]=w[k]\cos\left(2\pi\frac{1}{8}k\right)$, где $w[k]$ – прямоугольное окно длиной $N=16$ отсчетов

$$w[k]=\begin{cases}1, \text{ при } 0\le k<16;\\ 0, \text{ при других } k.\end{cases}$$

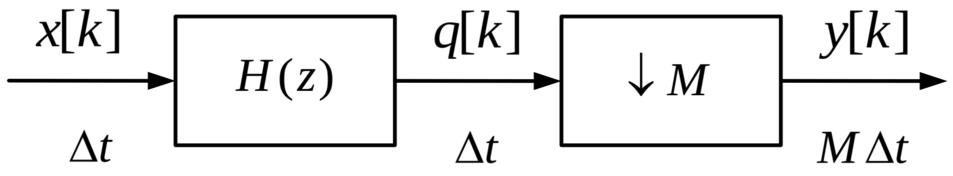
Построить графики:

а) последовательностей $x[k]$ и $q[k]$;

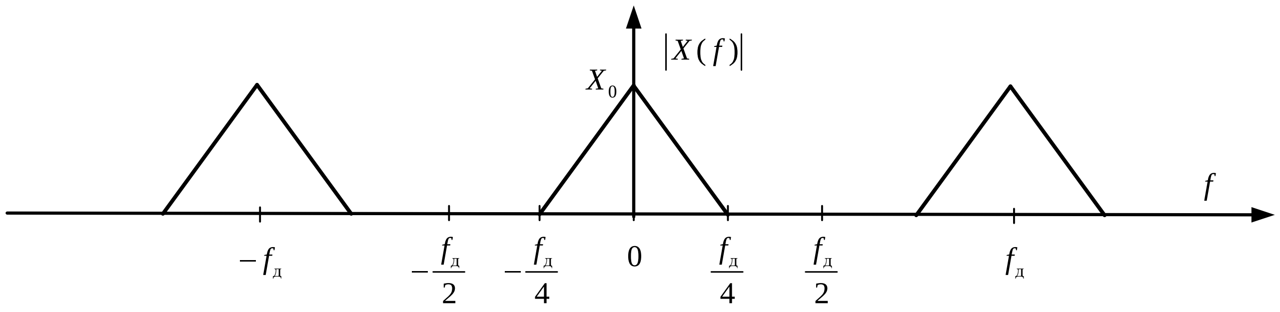
б) модуля ДВПФ последовательностей $x[k]$ и $q[k]$ в нормированных частотах;

в) модуля ДВПФ последовательности $y[k]$ в нормированных частотах при условии, что $q[k]$ поступает на вход идеального фильтра нижних частот системы однократной интерполяции.

№3. Предположим, что используется система однократной децимации с целым коэффициентом M с идеальным ФНЧ.



Модуль ДВПФ входной последовательности $x[k]$ изображен на рисунке ниже, ее частота дискретизации $f_д$.



Рассмотреть случаи $M=2$ и $M=4$.

Построить для частот $f \in [-1{,}5 f_д; -1{,}5 f_д]$ (в Гц) графики модуля ДВПФ последовательностей $q[k]$ (на выходе фильтра) и $y[k]$ (на выходе системы), а также АЧХ фильтра.

Литература

1) Солонина, А. И. Цифровая обработка сигналов и MATLAB: учеб. пособие / А. И. Солонина, Д. М. Клионский, Т. В. Меркучева, С. Н. Перов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2013. — 512 с.: ил.— (Учебная литература для вузов)

2) Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: пер. с англ. 2008.

3) Prandoni P., Vetterli M. Signal processing for communications. –Lausanne : EFPL Press, 2008.

4) Ричард Л. Цифровая обработка сигналов: пер с англ //М.: ООО «Бином-Пресс. – 2006.

5) Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале MATLAB: учеб. пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2021. — 560 с.: ил.

Задачи с лекции

Перечень контрольных вопросов по теме «Многоскоростная обработка сигналов» для подготовки к экзамену.

1. Какие системы называют многоскоростными?
2. Какие блоки включает в себя система
   а) однократной интерполяции с целым коэффициентом L;
   б) однократной децимации с целым коэффициентом M;
   в) однократной передискретизации с коэффициентом в виде рациональной дроби L/M?
   Какую задачу выполняет каждый из блоков? Выразите значения частоты дискретизации на выходе каждого из блоков через частоту дискретизации $f_{\text{д}}$ исходного сигнала, поступающего на вход системы.
3. Какой вид имеет идеальная АЧХ фильтра для системы однократной интерполяции с целым коэффициентом L?
4. Какой вид имеет идеальная АЧХ фильтра для системы однократной децимации с целым коэффициентом M?
5. Приведите интерпретацию процедуры однократной интерполяции с целым коэффициентом L во временной и в частотной областях.
6. Приведите интерпретацию процедуры однократной децимации с целым коэффициентом M во временной и в частотной областях.