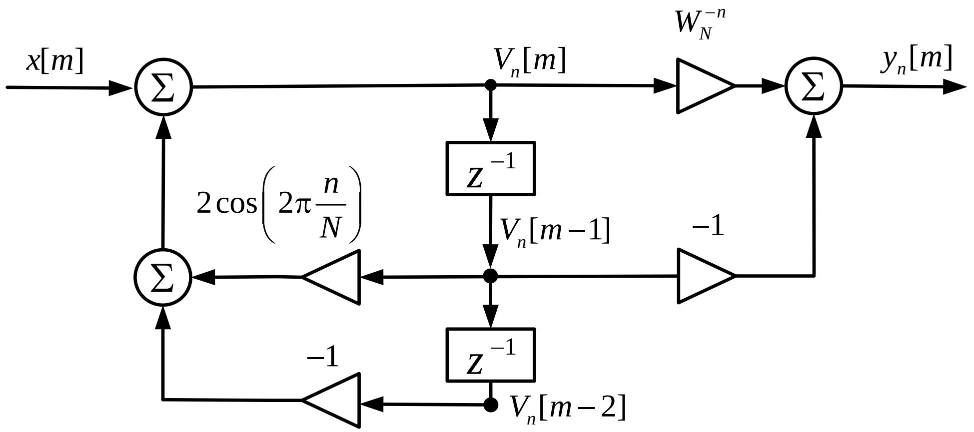
Лекция 5 по курсу «Цифровая обработка сигналов»
3 марта 2025 г.

5.5. Алгоритм Гёрцеля.

Вычисление спектра на некотором подмножестве отсчётов ДПФ. БИХ-фильтр второго порядка для рекурсивного вычисления по алгоритму Гёрцеля.

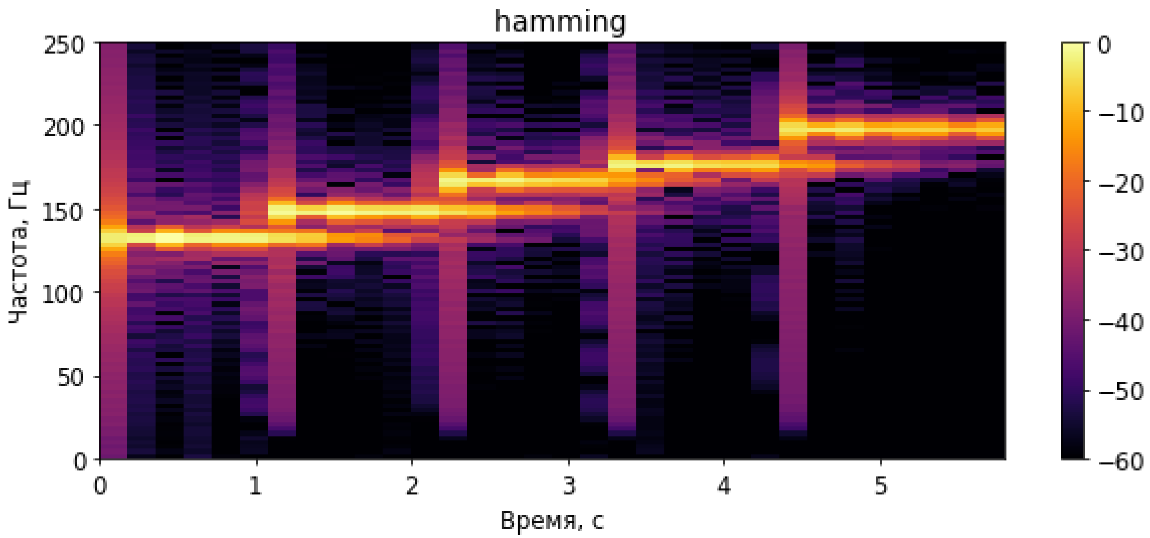


5.6. Скользящий спектральный анализ в точках *z*-плоскости.

КИХ-фильтр для скользящего спектрального анализа в одной точке *z*-плоскости. Структура фильтра однобинового скользящего ДПФ.

5.7. Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT).

Формула анализа. Разрешения по времени и по частоте. Свойство COLA (Constant OverLap-Add).



5.5. Алгоритм Гёрцеля.

БИХ-фильтр первого порядка вычисления ДПФ

Алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) ориентированы на вычисление всех N коэффициентов ДПФ $X[n]$ N-точечной последовательности $x[k]$. Однако имеются приложения, в которых необходимо вычислять спектр на некотором подмножестве отсчётов ДПФ. В таких случаях вычислительно эффективными могут оказаться алгоритмы, предназначенные для вычисления одного или нескольких отсчетов. Примером является алгоритм Гёрцеля.

Предположим, что $x[k]$ – последовательность из N отсчетов. Выражение для n-го коэффициента ДПФ

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]W_N^{nk}, \quad (1)$$

$$W_N^{nk} = \exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N}\right) \quad (2)$$

С учетом $W_N^{-nN} = e^{j(2\pi/N)Nn} = e^{j2\pi n} = 1$ (1) можно записать в виде

$$X[n] = W_N^{-nN}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]W_N^{nk} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]W_N^{-n(N-k)}. \quad (3)$$

Введем последовательность

$$y_n[m] = \sum_{k=0}^{m} x[k]W_N^{-n(m+1-k)} = W_N^{-n}\sum_{k=0}^{m} x[k]W_N^{-n(m-k)}. \quad (4)$$

Тогда

$$X[n] = y_n[m]\big|_{m=N-1}. \quad (5)$$

Формулу (4) можно интерпретировать как отклик на $x[k]$ БИХ-фильтра с импульсной характеристикой $h_n[m]$

$$\frac{h_n[m]}{W_N^{-n}} = \begin{cases} W_N^{-nm}, & m \ge 0, \\ 0, & m < 0. \end{cases} \quad (6)$$

$$y_n[m] = \sum_{k=0}^{m} x[k]W_N^{-n(m+1-k)} = W_N^{-n}\sum_{k=0}^{m} x[k]\,h_n[m-k]. \quad (7)$$

Здесь переменную k будем использовать для индекса отсчета времени в анализируемой последовательности $x[k]$, m — как временную переменную БИХ-фильтра. С помощью z-преобразования $h_n[m]$ получаем передаточную функцию фильтра и разностное уравнение:

$$H_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_n[m]z^{-m} = W_N^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} W_N^{-nm}z^{-m} = \frac{W_N^{-n}}{1-W_N^{-n}z^{-1}}. \quad (8)$$

$$y_n[m] = W_N^{-n}x[m] + W_N^{-n}y_n[m-1], \quad (9)$$

начальное условие $y_n[-1] = 0$.

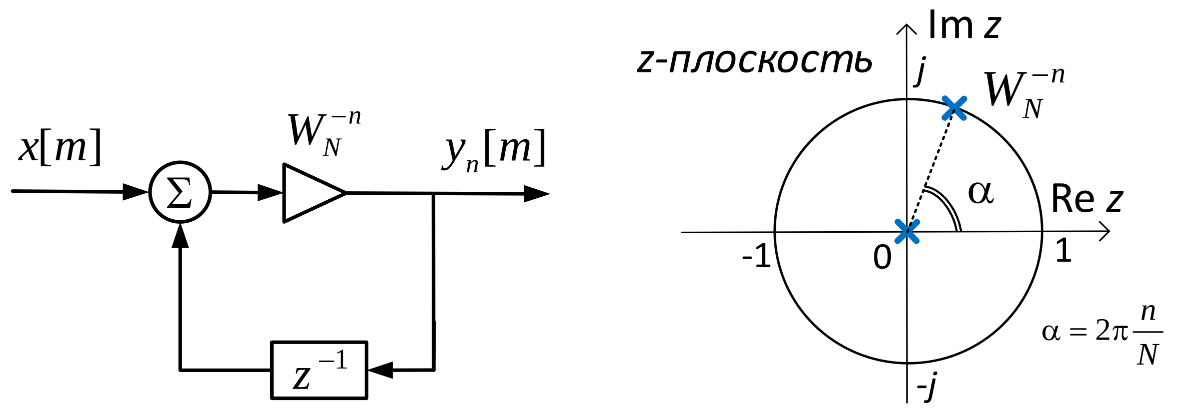
Алгоритм Гёрцеля

$$H_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_n[m] z^{-m} = W_N^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} W_N^{-nm} z^{-m} = \frac{W_N^{-n}}{1 - W_N^{-n} z^{-1}}.$$

$$y_n[m] = W_N^{-n} x[m] + W_N^{-n} y_n[m-1],$$

начальное условие $y_n[-1] = 0$. В силу формулы (5) выход фильтра в момент времени $N-1$ будет равен отсчету ДПФ:

$$X[n] = y_n[N-1]. \qquad (10)$$



БИХ-фильтр первого порядка для вычисления $X[n]$ и его нуль-полюсная диаграмма

Заметим, что в силу того, что один из полюсов лежит на единичной окружности, фильтр неустойчив. Однако входной сигнал действует ограниченное время и выход фильтра для $m = 0, 1, \ldots, N$ будет ограничен. Перед каждым использованием необходимо обеспечить $y_n[-1] = 0$.

- Поскольку коэффициенты фильтра W_N^{-n} – комплексные числа, то вычисление каждого нового значения $y_n[m]$ требует два вещественных умножения и два вещественных сложения, так что в результате для определения одного коэффициента ДПФ $X[n]$ нам нужно $4(N-1)$ умножений и $4N$ сложений вещественных чисел.
- При прямом вычислении по формуле (1) требуется такое же число операций, но при этом отпадает необходимость вычислять и запоминать коэффициенты W_N^{-nk}, т. к. они явно вычисляются рекурсивной процедурой.

БИХ-фильтр второго порядка алгоритма Гёрцеля

Теперь попробуем сократить число операций. Умножим числитель и знаменатель формулы (8) на $(1 - W_N^{n} z^{-1})$:

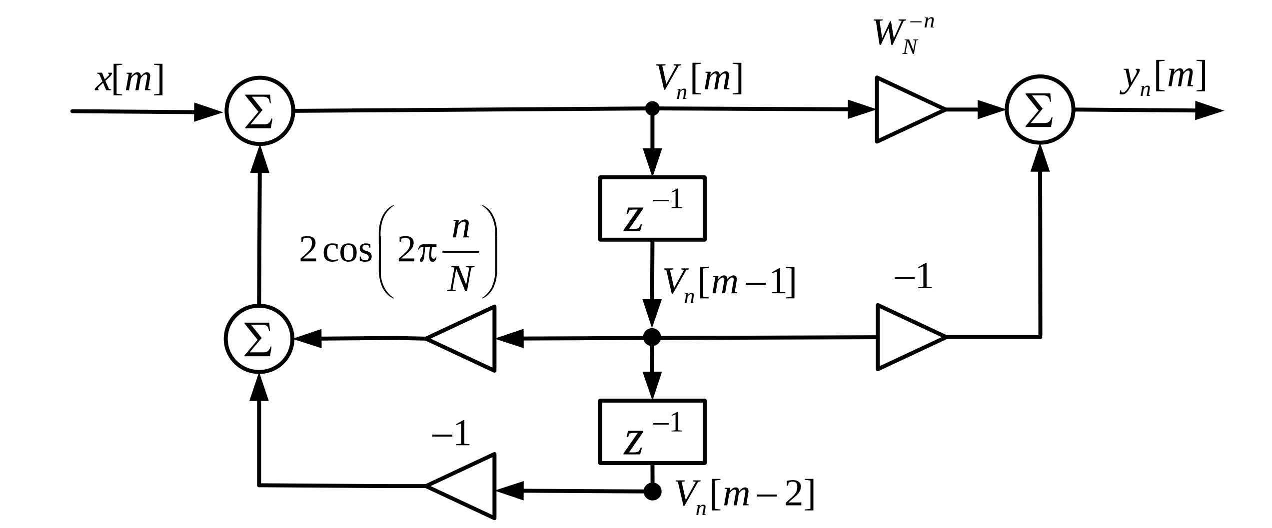
$$H_n(z) = \frac{W_N^{-n}\left(1 - W_N^{n} z^{-1}\right)}{(1 - W_N^{n} z^{-1})(1 - W_N^{-n} z^{-1})} = \frac{W_N^{-n} - z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi n / N) z^{-1} + z^{-2}}. \qquad (11)$$

Алгоритм Гёрцеля

$$H_n(z) = \frac{W_N^{-n}\left(1 - W_N^n z^{-1}\right)}{(1 - W_N^n z^{-1})(1 - W_N^{-n} z^{-1})} = \frac{W_N^{-n} - z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi n / N) z^{-1} + z^{-2}}.$$

Этой записи передаточной функции соответствует разностное уравнение при $y_n[-1] = y_n[-2] = 0$

$$y_n[m] = W_N^{-n} x[m] - x[m-1] + 2\cos(2\pi n / N) y_n[m-1] - y_n[m-2]. \qquad (12)$$



Блок-схема БИХ-фильтра второго порядка для рекурсивного вычисления $X[n]$ по алгоритму Гёрцеля

Из блок-схемы реализации фильтра в канонической форме видно, что поскольку нас интересует только $y_n[N-1]$, то умножение на W_N^{-n} можно производить только в последний момент времени $m = N$. Запишем разностное уравнения для внутренних регистров фильтра (отмечены на схеме точками):

$$V_n[m] = x[m] + 2\cos(2\pi n / N) V_n[m-1] - V_n[m-2], \quad 0 \le m \le N-1, \qquad (13)$$

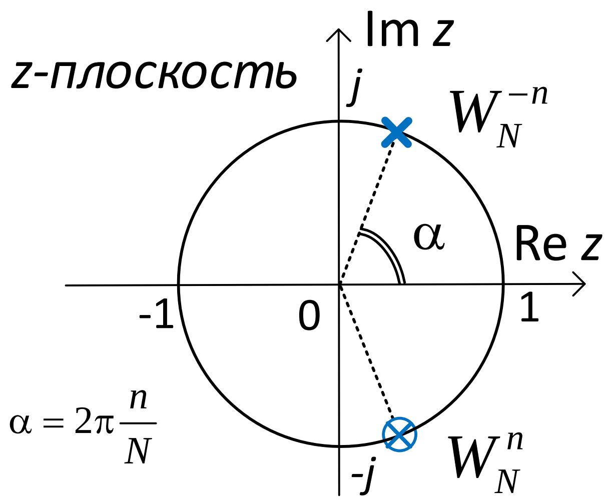
В момент времени $m = N-1$вычисляется

$$X[n] = y_n[m]\Big|_{m=N-1} = \left(W_N^{-n} V_n[m] - V_n[m-1]\right)\Big|_{m=N-1}. \qquad (14)$$

Важно, что в начале обработки каждого нового блока данных необходимо обеспечить условия для регистров памяти

$$V_n[-1] = V_n[-2] = 0. \qquad (15)$$

Формулы (13), (14) и (15) описывают работу ***алгоритма Гёрцеля.*** Его преимущество при вычислении коэффициента ДПФ $X[n]$ состоит в том, что вычисление выражения (13) выполняется N раз, в то время как выражение (14) вычисляется в цепи обратной связи только один раз при подаче на вход N-го входного отсчёта. Для действительной последовательности $x[m]$ длиной N фильтр выполняет N действительных умножений и $2N$ действительных сложений/вычитаний, одно комплексное умножение и одно комплексное вычитание



Нуль-полюсная диаграмма БИХ-фильтр второго порядка для рекурсивного вычисления $X[n]$ по алгоритму Гёрцеля

$$H_n(z) = \frac{W_N^{-n}\left(1 - W_N^{n} z^{-1}\right)}{(1 - W_N^{n} z^{-1})(1 - W_N^{-n} z^{-1})} = \frac{W_N^{-n} - z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi n / N) z^{-1} + z^{-2}}.$$

Передаточная функция $H_n(z)$ имеет комплексно-сопряжённые полюса в точках $z_{1,2} = \exp\left(\pm j 2\pi n / N\right)$,только один из которых скомпенсирован нулем (в точке $z_1 = \exp\left(j 2\pi n / N\right)$).

Фильтр будет неустойчив. Однако фильтр Гёрцеля остаётся устойчивым, поскольку он обрабатывает блоки сигнала длиной N и его внутренние регистры $V_n[m-1]$ и $V_n[m-2]$ обнуляются в начале обработки каждого блока.

Отметим, что алгоритм Гёрцеля может быть применен для вычисления любого отсчета ДПФ $X[n]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. В отличие от БПФ, он требует того, чтобы размерность ДПФ была составным числом.

Сравним эффективность использования алгоритма Гёрцеля по сравнению с БПФ по основанию 2.

1. В алгоритме Гёрцеля не требуется накопления блока входных данных до начала вычисления. Обработка начинается с приходом первого входного отсчёта.
2. Объём памяти для хранения коэффициентов фильтра меньше, чем объём памяти поворачивающих множителей в БПФ.
3. Если алгоритм Гёрцеля реализуется M раз для вычисления M разных коэффициентов ДПФ, то он значительно вычислительно эффективен по сравнению с БПФ при $M \ll \log_2 N$.

5.6. Скользящий спектральный анализ в точках *z*-плоскости.

КИХ-фильтр для скользящего спектрального анализа в одной точке *z*-плоскости.

Пусть $x[k]$– последовательность конечной длины в N отсчетов. Тогда *z*-преобразование этой последовательности

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]z^{-k}. \qquad (16)$$

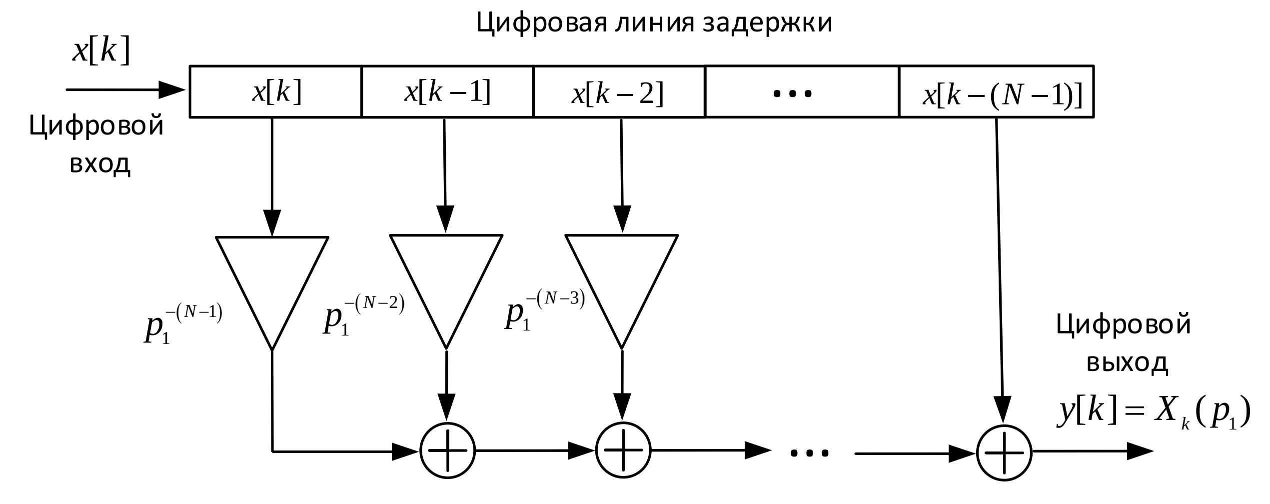
z-преобразование некоторой в точке $z=p_1$ на z-плоскости, вычисленное в момент времени k по N предшествующим отсчетам (скользящий анализ)

$$X_k(p_1)=x[k]p_1^{-(N-1)}+x[k-1]p_1^{-(N-2)}+ +x[k-2]p_1^{-(N-3)}+\ldots+x[k-(N-1)], \qquad (17)$$

$$X_k(p_1)=p_1^{-(N-1)}\sum_{m=0}^{N-1} x[k-m]\,p_1^{\,m}. \qquad (18)$$

Вычисление по формуле (17) может быть реализовано фильтром с импульсной характеристикой

$$h[m]=p_1^{-(N-1)+m},\ \ m=0,1,2,\ldots,N-1. \qquad (19)$$



Нерекурсивный КИХ-фильтр для скользящего спектрального анализа в одной точке $z=p_1$ *(реализация с цифровой линией задержки)*

При обработке сигналов с изменяющимся во времени спектром (например, речи) приходится измерять $X_k(p_1)$ для последовательных значений k, т.е. значения $X_0(p_1), X_1(p_1), X_2(p_1)$ и т. д. Такой способ измерения называют скользящим спектральным измерением; оно обеспечивается смещением временного окна (содержащего N отсчётов) на один отсчёт вперёд и повторением измерения.

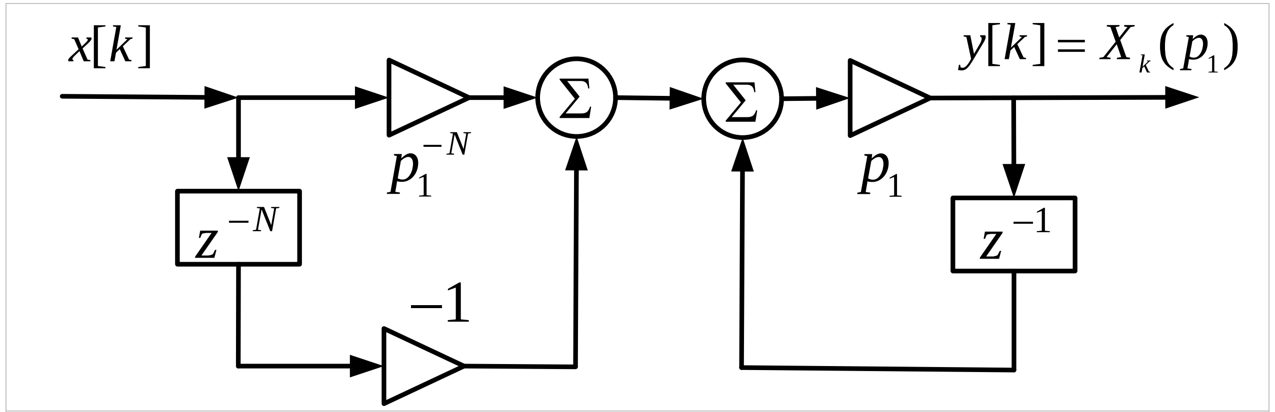
Скользящий спектральный анализ в точках z-плоскости

Чтобы получить передаточную функцию рекурсивной реализации такого фильтра, достаточно записать z-преобразование последовательности $h[m]$ и воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии:

$$H(z)=\sum_{m=0}^{N-1} p_1^{-(N-1)+m} z^{-m} = p_1^{-(N-1)} \frac{1-p_1^N z^{-N}}{1-p_1 z^{-1}} = \frac{p_1^{-N}-z^{-N}}{p_1^{-1}-z^{-1}}. \quad (20)$$

Разностное уравнение имеет вид

$$y[k]=p_1\left(x[k]p_1^{-N}-x[k-1]+y[k-1]\right).$$

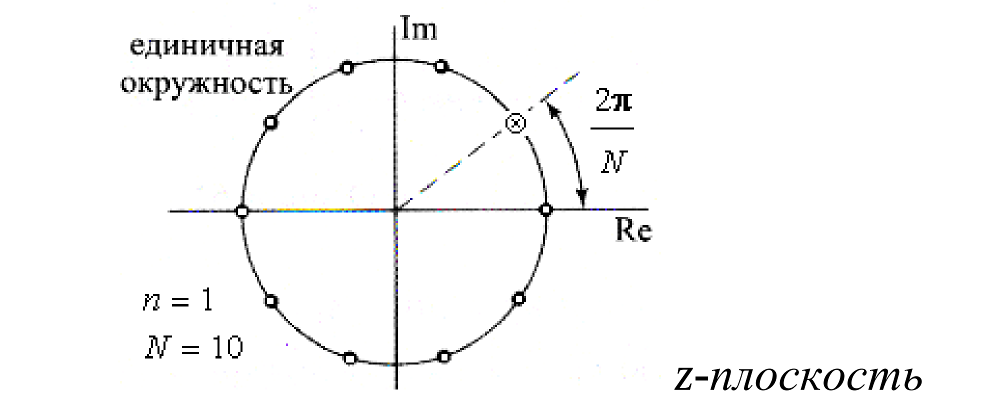


Рекурсивный КИХ-фильтр для скользящего спектрального анализа в одной точке $z=p_1$.

Структура фильтра однобинового скользящего ДПФ.

Заметим, что коэффициенты ДПФ $X[n]$ последовательности $x[k]$ равны значению $X(z)$ в точках $z=\exp\left(j2\pi n/N\right)$, равномерно расположенных на единичной окружности:

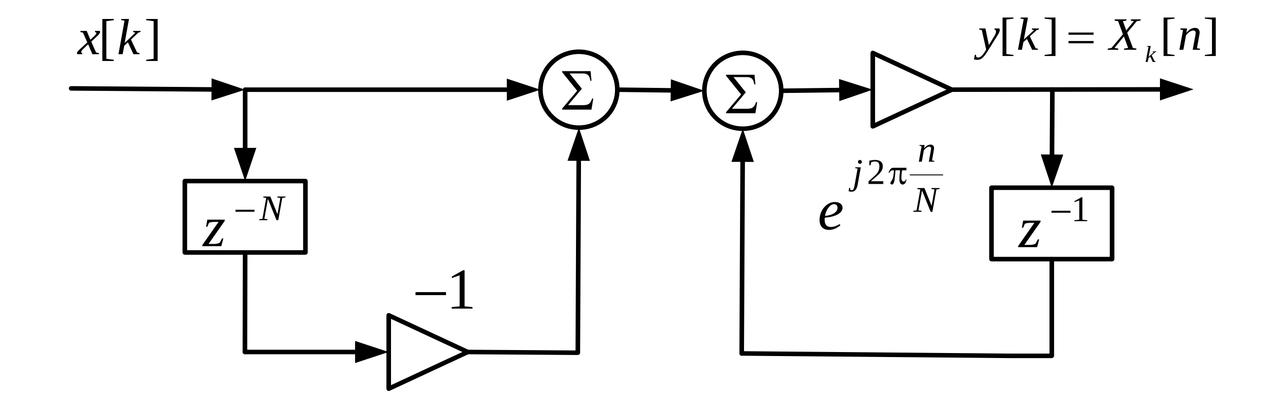
$$X[n]=X(z=e^{j2\pi n/N})=\sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{-j2\pi nk/N}, \quad (21)$$



Подстановкой $p_1=\exp\left(j2\pi n/N\right)$ находим передаточную функцию рекурсивного КИХ-фильтра однобинового скользящего ДПФ:

$$H_{\mathrm{DFT}}(z)=\sum_{m=0}^{N-1} e^{-j2\pi nm/N} z^{-m} = \frac{1-z^{-N}}{e^{-j2\pi n/N}-z^{-1}}. \quad (22)$$

Скользящий спектральный анализ в точках *z*-плоскости



Структура рекурсивного фильтра однобинового скользящего ДПФ.

$$H_{\text{DFT}}(z) = \frac{1 - z^{-N}}{e^{-j2\pi n/N} - z^{-1}} = \frac{e^{j2\pi n/N} - e^{j2\pi n/N} z^{-N}}{1 - e^{j2\pi n/N} z^{-1}}.$$

Разностное уравнение фильтра

$$y[k] = e^{j2\pi\frac{n}{N}} \big(x[k] - x[k-N] + y[k-1] \big).$$

Заметим, что такой фильтр состоит из гребенчатого фильтра и комплексного резонатора. Его частным случаем при $n = 0$ является CIC-фильтр, рассмотренный в лекциях предыдущего семестра.

То, что это фильтр *скользящего однобинового ДПФ* означает, что

- значение ДПФ вычисляется *в одной точке*, т.е. вычисляем один коэффициент $X[n]$,
- спектральные измерения ведутся в *скользящем режиме*: ДПФ $X_k[n]$ определяется по набору из текущего и $N-1$ предыдущих значений сигнала на входе:
$$x[k],\ \ x[k-1],\ \ x[k-2],\ \ \ldots,\ \ x[k-(N-1)].$$
Выход фильтра будет значением ДПФ в точке n для этой последовательности .

В алгоритме Гёрцеля анализ сигнала ведется блоками из N отсчетов и значение ДПФ на выходе фильтра будет только в конце обработки каждого блока:

$$X[n] = y_n[m]\big|_{m=N-1}.$$

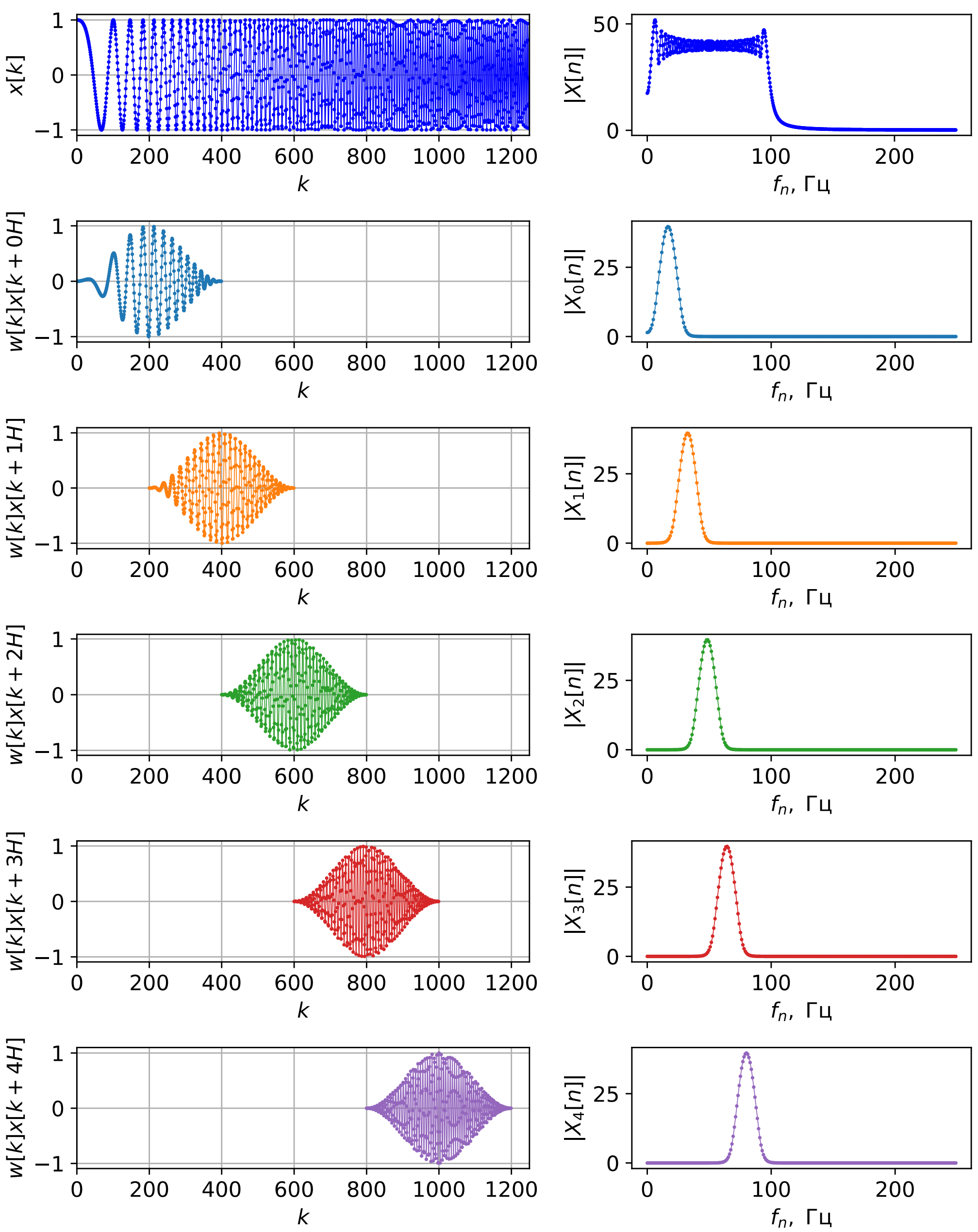
5.7. Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT).

Кратковременное дискретное преобразование Фурье (Discrete STFT, англ. Discrete Short-time Fourier transform) может задаваться формулой

$$X_m[n] = \sum_{k=mR}^{mR+M-1} x[k]w[k-mR]\exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right),$$

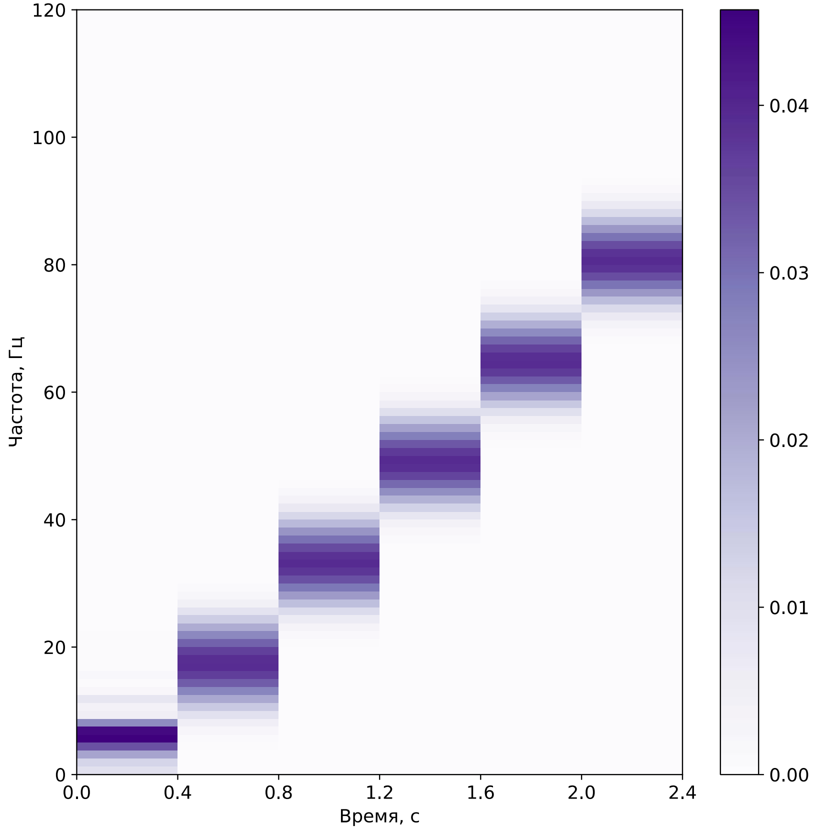
- $w[k]$ — временное окно,
- m — порядковый номер кадра,
- M — длина окна (сегмента),
- N_{FFT} – размерность ДПФ,
- $R = M - L$ – единичный сдвиг окна,
- L — число точек перекрытия.

Это преобразование позволяет осуществлять ДПФ-анализ на коротких интервалах времени. Для графического отображения результатов часто используется представление в виде графика с двумя осями, где по горизонтальной оси отображается время (или номер кадра m), по вертикальной — соответствующие частоты, а цветом — $|X_m[n]|$,.$|X_m[n]|^2$, или фазовая часть $X_m[n]$.

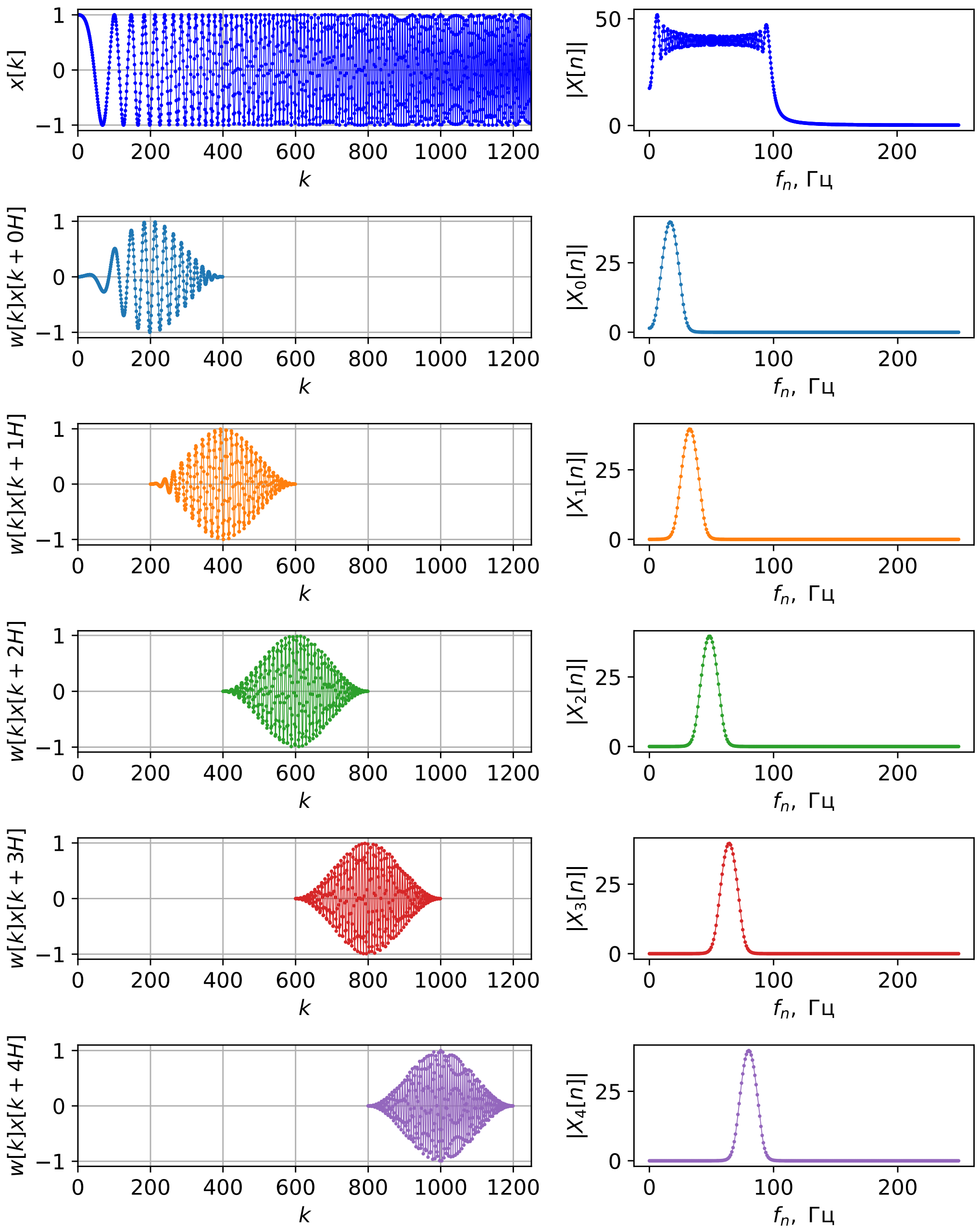


Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT)

Пример. Рассмотрим результаты спектрального анализа по отсчетам ЛЧМ – сигнала. В STFT используется окно Ханна, $M=400$, $L=200$, $N_{\mathrm{FFT}}=M$, $f_{\text{д}}=500$ Гц, за время наблюдения 2,4 секунды мгновенная частота ЛЧМ сигнала изменяется от 1 Гц до 80 Гц.



Спектрограмма (с нормировкой и учетом перекрытий) отсчетов ЛЧМ-сигнала (фрагмент графика для частот до 120 Гц).



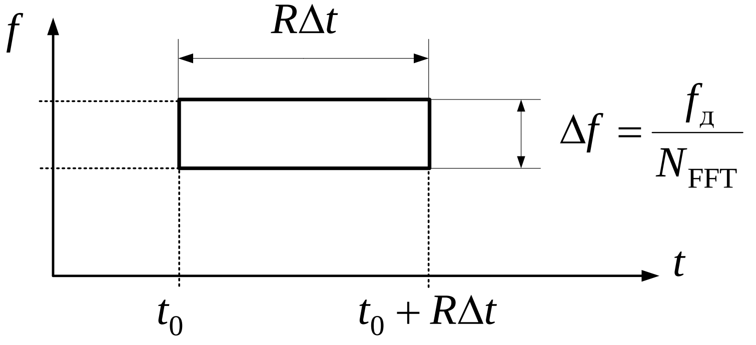
Разрешение по времени и по частоте для STFT

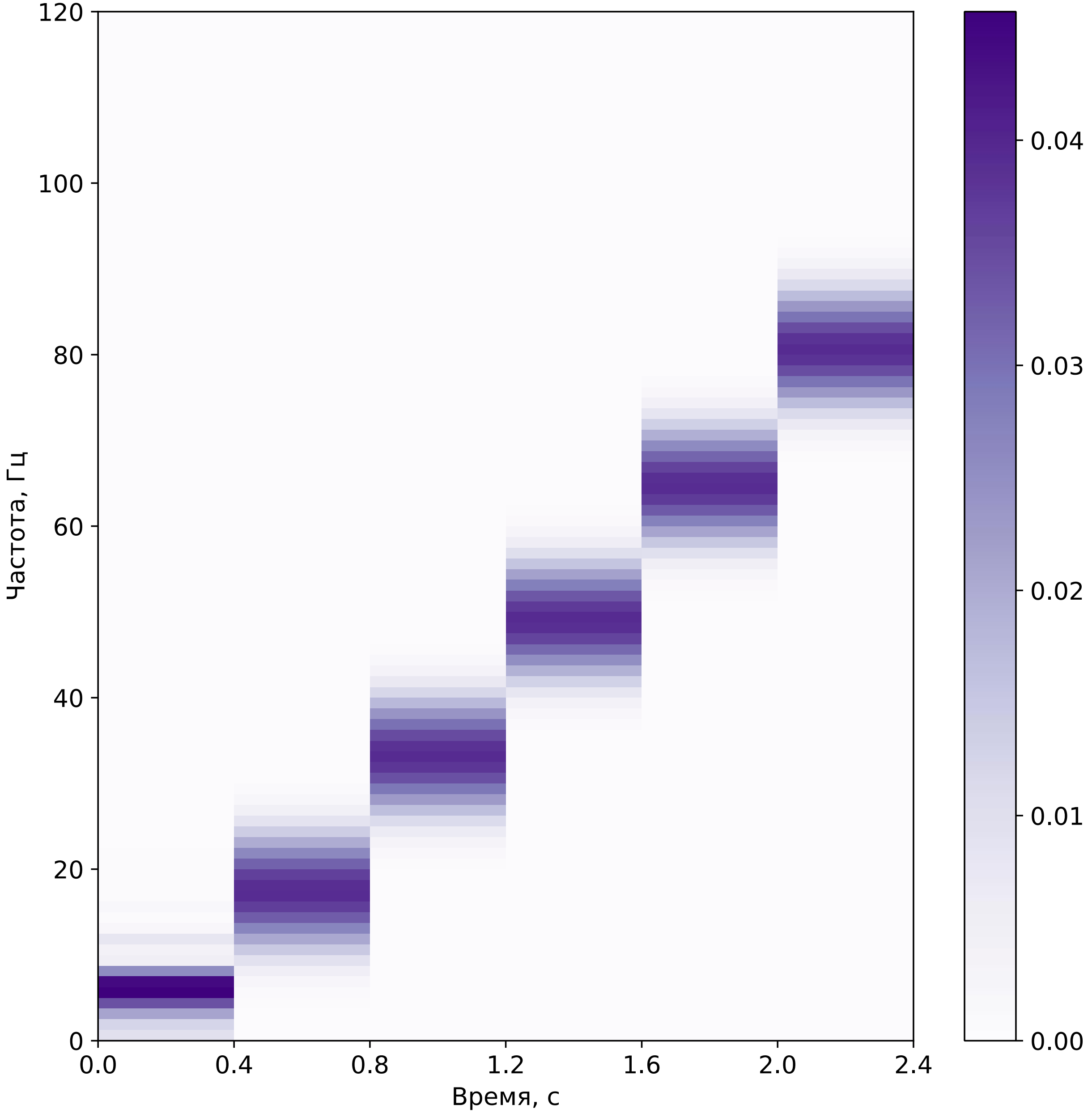
Разрешение по времени и по частоте для STFT

Результат кратковременного дискретного преобразования Фурье является дискретным по времени и по частоте. Если рассматривать вопрос о разрешении по времени и по частоте, обусловленный дискретностью сетки времени и частот, то можно установить следующее.

Ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси **времени** равна длине единичного сдвига окна в секундах, т.е. $R\Delta t$. В приведенном ранее примере $R\Delta t = 0,4$ с.

Ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси **частот** равно расстоянию между отсчетами отдельных ДПФ, входящих в формулу STFT: $\Delta f = f_д / N_{FFT}$, где N_{FFT} — размерность ДПФ.





Разрешение по времени и по частоте для STFT

На возможность различения гармонических компонент, также как и в ДПФ, здесь также влияет ширина главного лепестка окна (на уровне -3 дБ и -6 дБ). Она зависит от

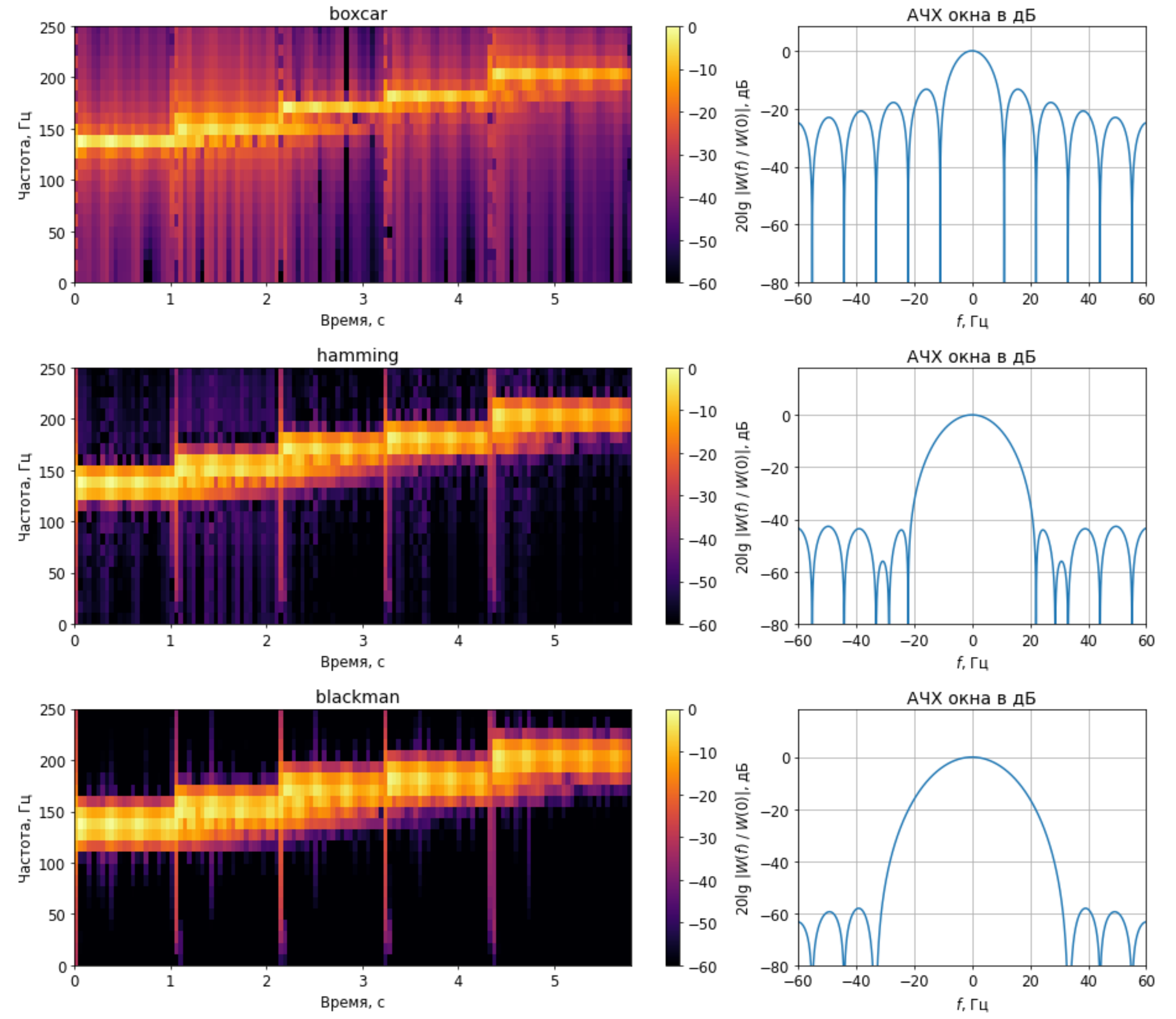
- длины окна M ,
- вида окна.

Необходимо учитывать, что увеличивая длину окна M мы улучшаем разрешение по частоте (главный лепесток становится уже), но в месте с тем, ухудшаем разрешение по времени (ширина прямоугольника по времени на графике больше).

Пример. В качестве сигнала используются отсчеты из WAV файла записи сигнала от вибрафона, $f_д = 44100$ Гц, воспроизводились соседние ноты. Перекрытие сегментов 50%. За 0 дБ взято максимальное значение $|X_m[n]|^2$.

$$R = M - L = M - M/2 = M/2.$$

В случае $M = 4000$ ширина главного лепестка у некоторых окон больше требуемой для разрешения соседних нот. Ширина прямоугольника по времени на графике $R\Delta t \approx 0,04$ с.

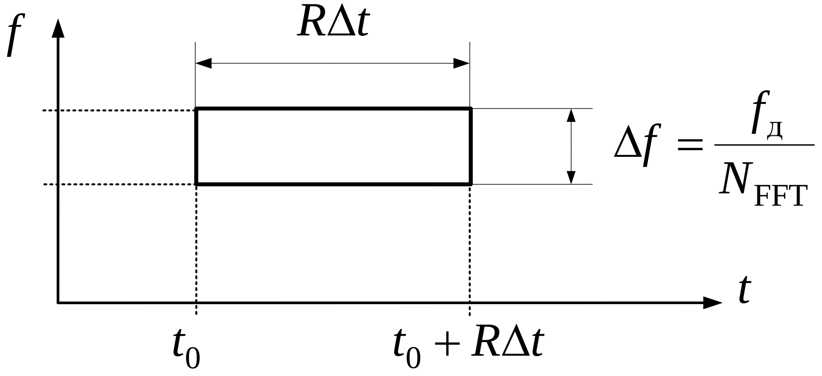


Спектрограммы в дБ и формы главного лепестка окна, M=4000

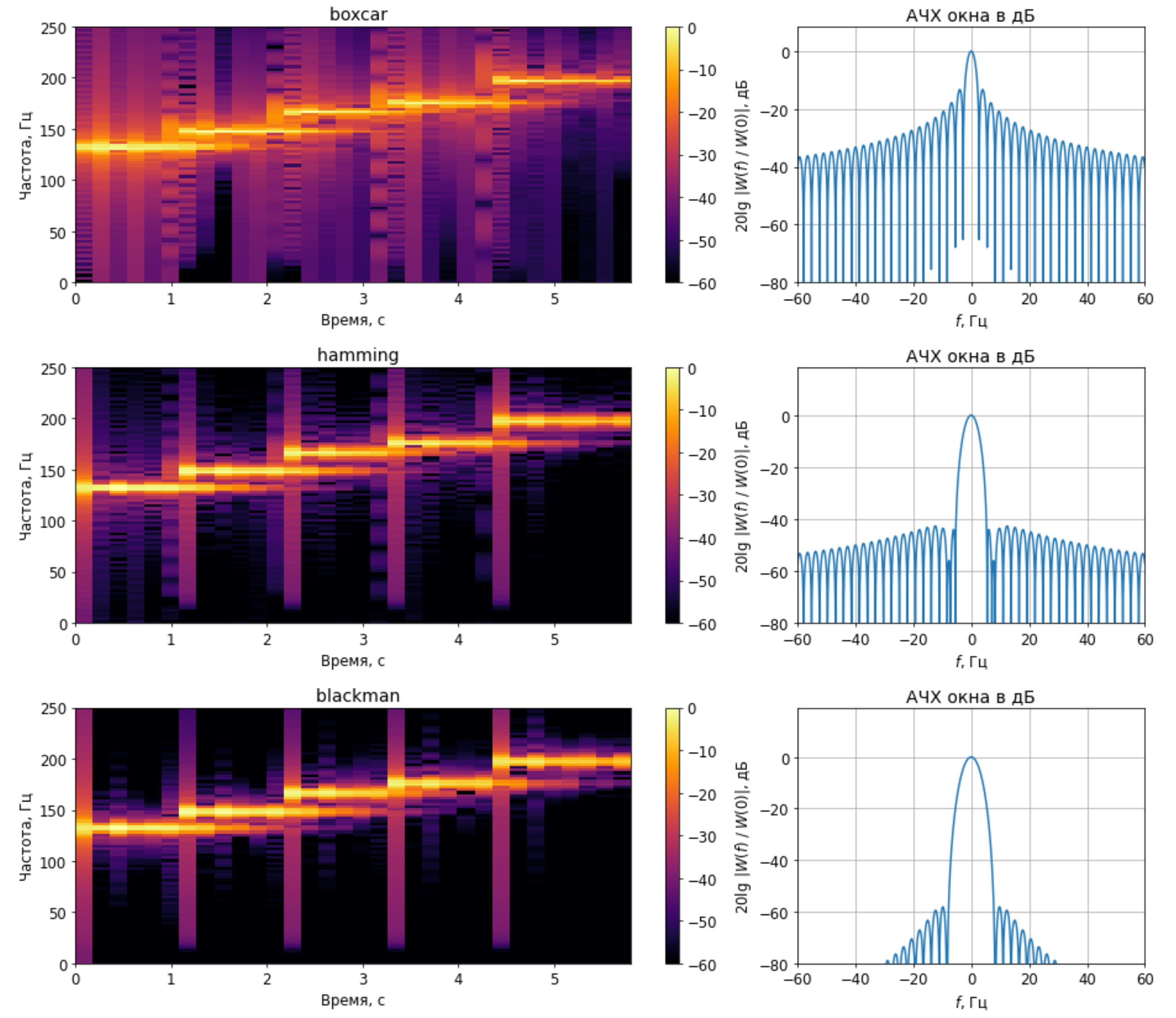
В случае $M = 16000$ у всех окон достаточно узкие главные лепестки и соседние ноты различимы. Вместе с тем

Разрешение по времени и по частоте для STFT

$R\Delta t = M\Delta t / 2 \approx 0{,}18\,\text{с}$. Т.е. увеличивая M мы получили более узкий главный леток окна, но вместе с тем, ухудшили разрешение по времени.



Заметим, что $\Delta f = f_{\text{д}} / N_{\text{FFT}}$ (ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси частот) может быть меньше реального разрешения спектральных комопонет.



Спектрограммы в дБ и формы главного лепестка окна, M=16000

Условия COLA и NOLA

Условия COLA и NOLA

По определению, для окна $w[k]$ выполнено условие **COLA(R)** (Constant OverLap-Add), если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] = const \;\forall k \in \mathbf{Z}$$

Если выполнено COLA(R), то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]w[k-mR]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[k]w[k-mR]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] = const \cdot X[n]$$

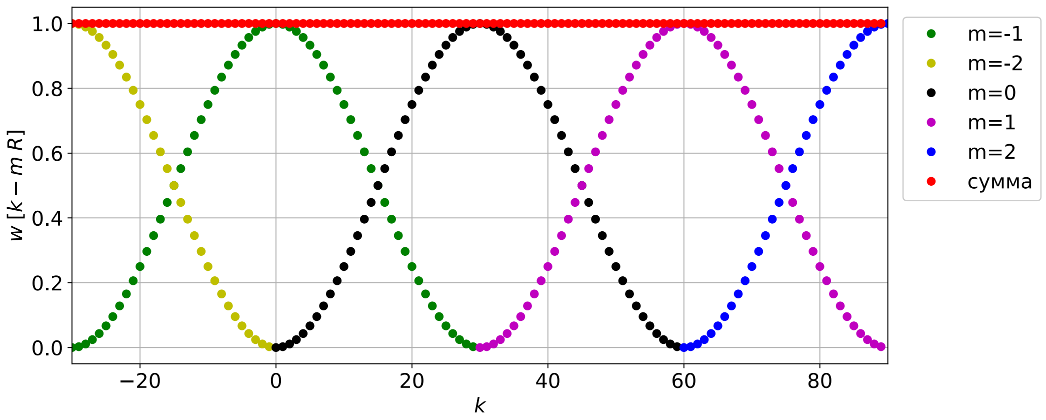
$$X[n] = const \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[n]$$

Формула означает, что для каждого коэффициента n сумма ДПФ по всем интервалам равна ДПФ всего сигнала.

Если условие COLA(R) выполнено, то по известному STFT гарантировано можно найти исходную последовательность.

Примеры окон и L, для которых условие выполнено:

- прямоугольное окно с перекрытием $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ от M;
- окно Бартлетта с перекрытием $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots$ от M;
- окно Ханна с перекрытием $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ от M;
- любое окно при $L = M - 1$, т.е. COLA(R=1) для любого окна выполнено.



Проверка условия COLA(R=30) для окна Ханна, $M = 60$

По определению, окно $w[k]$ удовлетворяет условию **NOLA(R)** (Nonzero Overlap Add), если

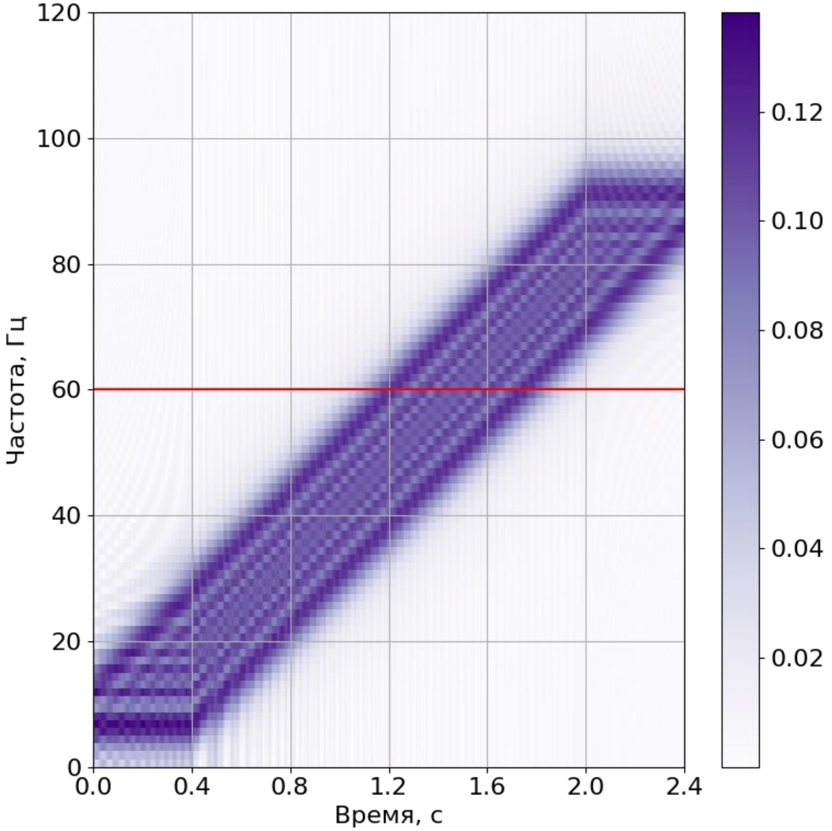
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR]^2 \neq 0 \;\forall k \in \mathbf{Z}$$

Условие **NOLA(R)** необходимо для обратимости STFT.

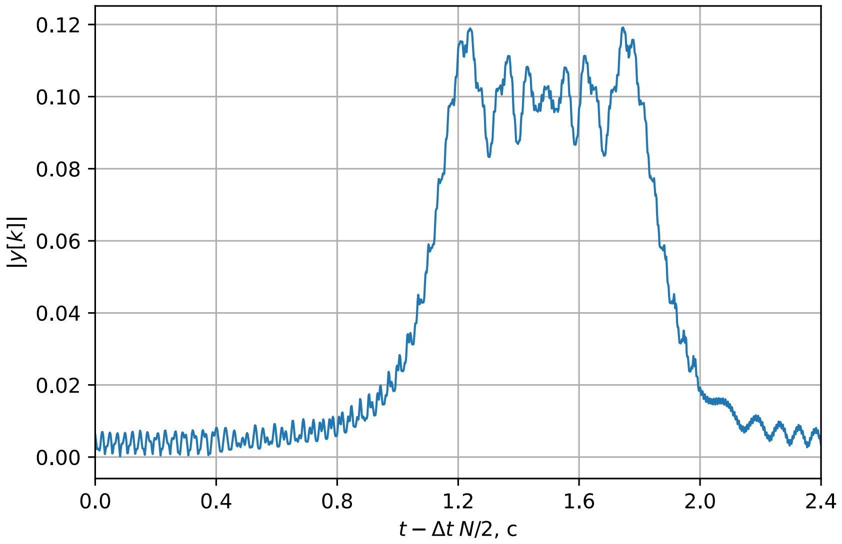
Сравнение скользящего ДПФ с STFT

Пример. Сравнение скользящего ДПФ с STFT

Рассмотрим результаты спектрального анализа по отсчетам ЛЧМ – сигнала, для которого за время наблюдения 2,4 с мгновенная частота изменилась от 1 Гц до 80 Гц.



STFT $|X_m[n]/N_{\text{FFT}}|$ *(с учетом перекрытий) для отсчетов ЛЧМ сигнала, прямоугольное окно,* $L=M-1=399$



Вывод фильтра (модуль) скользящего однобинового ДПФ для $n=48$*. Точки соединены линиями.*

Рассмотрим случай максимально возможного перекрытия $L=M-1=399$, $N_{\text{FFT}}=M$, $f_{\text{д}}=500\ \text{Гц}$ для случая прямоугольного окна. Заметим, что в таком случае на графике для каждой частоты мы видим примерно тоже, что по модулю вывел бы фильтр однобинового скользящего ДПФ, рассмотренный в п. 5.6. На графике для модуля STFT частота $f_1=60\ \text{Гц}$ выделена красной линией. Ей соответствует отсчет скользящего ДПФ размерностью $M=400$ с индексом $n=Mf_1/f_{\text{д}}=48$ (в общем случае нужно округлить до целого).

Задачи для самостоятельного решения

№1. Пусть требуется вычислить 17-ий отсчет 256-точечного ДПФ некоторой действительной последовательности конечной длительности. Предположим, что вычисления производятся по алгоритму Гёрцеля. Привести последовательность действий. Определить для данного алгоритма:

а) число действительных сложений/вычитаний;
б) число действительных умножений;
в) число комплексных сложений/вычитаний;
г) число комплексных умножений.

№2. Пусть требуется вычислить 3-ий отсчет 64-точечного ДПФ некоторой действительной последовательности конечной длительности.

Привести блок-схемы фильтров:

а) БИХ-фильтра второго порядка алгоритма Гёрцеля,

б) рекурсивного КИХ-фильтра скользящего спектрального анализа.

Указать, как выход фильтра соответствует значению искомого отсчета ДПФ.

№3. Предположим, что с использованием окна длиной $M = 4000$ вычисляется кратковременное дискретное преобразование Фурье последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{f_1}{f_д} k + \varphi_1\right) + \cos\left(2\pi \frac{f_2}{f_д} k + \varphi_2\right)$$

длиной в $N = 40000$ отсчетов без перекрытия. Фазы φ_1 и φ_2 неизвестны. Частота дискретизации $f_д = 44100$ Гц.

Для случая окна Ханна указать, начиная с какого значения $\Delta f = |f_1 - f_2|$ можно выбором необходимой размерности ДПФ N_{FFT} обеспечить различимость гармонических компонент на спектрограмме.

Задачи с лекции

Примечания.

1) В разделе 5.5 было сделано предположение, что $x[k]$ – последовательность конечной длительности. Если она периодическая с периодом N, то перед ее обработкой нужно выделить один период

$$x_N[k] = \begin{cases} x[k], & 0 \le k \le N-1, \\ 0, & k < 0,\ k \ge N. \end{cases}$$

2) Часто в литераторе приводятся блок-схемы вычисления по алгоритму алгоритма Гёрцеля, отличные от приведенной в лекции. Они различаются только способом интерпретации результата работы алгоритма, т.е. тем, как коэффициент ДПФ связан с выходом фильтра.

3) Аудиозапись из примера на слайдах 12 и 13 доступна в ipynb-файле по ссылке https://nbviewer.org/url/kprf.mipt.ru/attachments/article/73/Module2lab5.ipynb