**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра МО ЭВМ**

отчет

**по лабораторной работе №2**

**по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»**

Тема: **Алгоритмы на графах**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 8383 |  | Мололкин К.А. |
| Преподаватель |  | Фирсов М.А. |

Санкт-Петербург

2020

**Цель работы.**

Изучить жадный алгоритм и алгоритм А\* для поиска пути в графе и решить задачи используя данные алгоритмы.

Жадный алгоритм:

Разработайте программу, которая решает задачу построения пути в ориентированном графе при помощи жадного алгоритма. Жадность в данном случае понимается следующим образом: на каждом шаге выбирается последняя посещённая вершина. Переместиться необходимо в ту вершину, путь до которой является самым дешёвым из последней посещённой вершины. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес.

Пример входных данных

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0

В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины

Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес

В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет abcde.

**Постановка задачи.**

Метод А\*:

Разработайте программу, которая решает задачу построения кратчайшего пути в *ориентированном* графе **методом А\***. Каждая вершина в графе имеет буквенное обозначение ("a", "b", "c"...), каждое ребро имеет неотрицательный вес. В качестве эвристической функции следует взять близость символов, обозначающих вершины графа, в таблице ASCII.

Пример входных данных

a e

a b 3.0

b c 1.0

c d 1.0

a d 5.0

d e 1.0

В первой строке через пробел указываются начальная и конечная вершины. Далее в каждой строке указываются ребра графа и их вес. В качестве выходных данных необходимо представить строку, в которой перечислены вершины, по которым необходимо пройти от начальной вершины до конечной. Для приведённых в примере входных данных ответом будет ade

Вар. 8. Перед выполнением А\* выполнять предобработку графа: для каждой вершины отсортировать список смежных вершин по приоритету.

**Описание жадного алгоритма.**

В данном случае жадность понимается следующим образом: на каждом шаге выбирается последняя посещённая вершина. То есть при проходе графа от начальной вершины до конечной, для каждого узла выбирается ребро с наименьшим весом. В начале алгоритма кладем стартовую вершину на стек, затем от нее переходим в ближайшую вершину, так же кладем на стек, если данная вершина является конечной, то завершаем работу алгоритма, в противном случае, переходим к следующей ближайшей, если дошли до верши не имеющей инцидентных либо все инцидентные были посещены, то достаем данную вершину из стека, и возвращаемся к той, что лежит на вершине стека. Код программы находится в приложении А.

**Описание структуры данных**

**Class EdgesList:**

using Edge = tuple<string, string, double, bool> - ребро

Поля:

1. std:: vector<Edge\*> edges – вектор хранящий ребра графа;
2. std:: stack<string> stackk – стек для вершин;

Методы:

1. EdgesList() = default – дефолтный конструктор класса;
2. void addEdge(Edge\* edge) - добавление ребра в граф:

Функция принимает на вход переменную Edge\* edge – указатель на ребро. Затем с помощью функции push\_back добавляем в вектор edges.

1. void printStack() – печать стека в обратном порядке:

Функция использует второй стек newS перекладывая в него вершины из stackk, а затем достает элементы из нового стека и печатает их

1. void findWay(string startTop, string endTop) – функция поиска пути в графе:

Функция принимает на вход две переменных - string startTop – начальная вершина пути, string endTop – конечная вершина. Затем кладем начальную вершину на стек. В цикле while создаем ребро с максимальным весом, затем просматриваем инцидентные ребра, если найдем ребро связывающее с конечной вершиной, то заканчиваем поиск, если нет, то ищем не пройдённое с минимальным весом, кладем его на стек и меняем startTop на найденную вершину, если нет инцидентных ребер либо все они пройдены, то снимаем вершину со стека и возвращаемся к вершине, лежащей на вершине стека. В конце функция вызывает printStack().

**Сложность алгоритма**

По времени жадный алгоритм можно оценить как О(|V|), где V количество вершин, так как в худшем случае, алгоритм проходит по всем вершинам.

По памяти алгоритм можно оценить как O(|E| + |V|), так как в графе хранятся все ребра, а стеке в худшем случае могут храниться все вершины.

**Описание алгоритма А\*.**

После считывания графа для каждой вершины происходит сортировка всех смежных ребер по приоритету. Затем запускается алгоритм А\*. Начальная вершина обозначается за текущую, затем рассматриваем все вершины в которые можно попасть из текущей, добавляем в список не посещённых со значением: расстояние от стартовой до данной + значение эвристической функции. Эвристическая функция рассчитывается как расстояние между символом данной вершины и конечной по таблице ASKII. Затем если список не пройденных вершин не пустой, то выбираем вершину с минимальным значением. Алгоритм заканчивает работу когда из текущей вершины есть ребро в конечную, либо когда список не посещённых вершин пустой. Код программы находится в приложении Б.

**Описание структуры данных:**

**Class Pair – используется для хранения ребра**

**Поля:**

1. GraphTop\* top – вершина;
2. double weight – вес пути;

**Методы:**

1. Pair(GraphTop\* top, double weight) – конструктор класса;

**Class GraphTop – используется для хранения вершины**

**Поля:**

1. char name – имя вершины;
2. double gFunc – значение функции g для заданной вершины;
3. double hFunc – значение функции h для заданной вершины;
4. double fFunc – значение функции f для заданной вершины;
5. std::vector<Pair\*> adjacentEdges – вектор для хранения смежных ребер;

**Методы:**

1. void sortTops(char goal) – сортировка смежных вершин по приоритету:

Функция принимает на вход переменную char goal – название конечной вершины, затем для каждой смежной вершины рассчитывается fFunc и по этому признаку вершины сортируются пузырьком в возрастающем порядке.

1. void setHFunc(char b) – установка поля hFunc у вершины:

Функция принимает на вход переменную char b – название конечной вершины, затем возвращаем модуль от разности переданного символа и данной вершины.

1. void setFFunc() – установка поля fFunc у вершины;
2. void addAdjacentEdge(GraphTop\* top, double weight) – функция добавляет ребро в вектор для хранения смежных ребер:

Функция принимает на вход переменные GraphTop\* top – смежная вершина и double weight – вес ребра, затем вызываем конструктор ребра и добавляем в вектор смежных ребер;

**Class EdgesList – используется для хранения графа**

**Поля:**

1. std::vector<GraphTop\*> tops – вектор хранящий все вершины графа;

**Методы:**

1. void sortTops(char goal) – для каждой вершины сортируется списко смежных по приоритету:

Функция принимает переменную char goal – конечная вершина, затем для каждой вершины вызывается функция sortTops(goal)

1. void addEdge(char topName, char adjacentTopName, double weight) – добавление ребра в граф:

Функция принимает на вход char topName – название начальной вершины ребра, char adjacentTopName – название конечной вершины ребра, double weight – вес ребра. Затем для topName и adjacentTopName вызывается функция isExistTop() и результаты записываются в новые переменные, затем для вершины с именем topName добаваляем смежное ребро с помощью функции addAdjacentEdge();

1. GraphTop\* isExistTop(char topName) – проверяет есть ли вершина в графе:

Функция принимает на вход char topName – название вершины, затем проверяем есть ли заданная вершина в графе, если есть возвращаем указатель на нее, если нет, то создаем вершину и возвращаем указатель на нее;

1. static GraphTop\* findBestTop(std::vector<GraphTop\*>& openSet) возвращает вершину из openSet с минимальным значением fFunc;
2. static bool isInOpenSet(GraphTop\* top, std::vector<GraphTop\*>& openSet) – проверяет существует ли переданная вершина в переданном векторе;
3. static void removeFromOpenSet(GraphTop\* top, std::vector<GraphTop\*>& openSet) – удаляет переданную вершину из переданного вектора;
4. static std::string reconstructPath(std::map<GraphTop\*, GraphTop\*>& passedTops, GraphTop\* start, GraphTop\* goal) – строит путь по переданному словарю:

Функция принимает std::map<GraphTop\*, GraphTop\*>& passedTops ссылка на словарь, GraphTop\* start – указатель на начальную вершину, GraphTop\* goal – указатель на конечную вершину, затем создаем строку resString и curr - указатель на конечную вершину, затем пока не дойдем до начальной вершины приравниваем к curr значение хранящиеся в словаре по ключу curr и добавляем имя текущей вершины к restring, в конце возвращаем перевернутую resString.

1. std::string findBestWay(char start, char goal) – функция алгоритма А\*:

Функция принимает char start – имя начальной вершины и char goal – имя конечной вершины, создает closedSet – вектор обработанных вершин, openSet – вектор вершин, которые предстоит обработать, passedTops – словарь вершин, используется для построения пути. Затем создаем переменную для хранения текущей вершины и записываем в нее стартовую, добавляем в вектор openSet. Потом запускает цикл while, который останавливается если openSet пустой. Затем текущей вершине приравниваем результат функции findBestTop(openSet), если текущая вершина – конечная, то возвращаем результат функции reconstructPath, передавая туда словарь, текущую и конечную вершины, если нет то удаляем текущую вершину из openSet и добавляем в closedSet, затем проходимся по всем смежным вершинам к текущей, если она есть в списке обработанных, то пропускаем ее, если нет, то кладем в openSet и считаем tentativeGScore равный значению gFunc для текущей вершины и вес ребра из текущей в смежную, если tentativeGScore меньше значения gFunc для смежной, то добавляем путь в словарь из смежной в текущую, и обновляем значения gFunc и fFunc у текущей. В конце если функция не нашла пути, то возвращает строку “0”.

**Сложность алгоритма**

По времени сложность алгоритма А\* можно оценить как О(|E|^(|E| - 1)), так как в худшем случае проверяются все узлы и все смежные с данным узлом вершины.

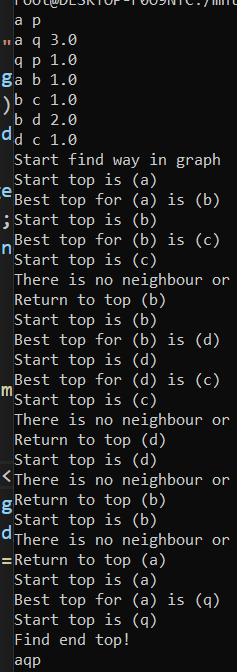
По памяти сложность можно оценить как O(|V| + |E|), так как приходится хранить все вершины и все ребра.

**Спецификация программы.**

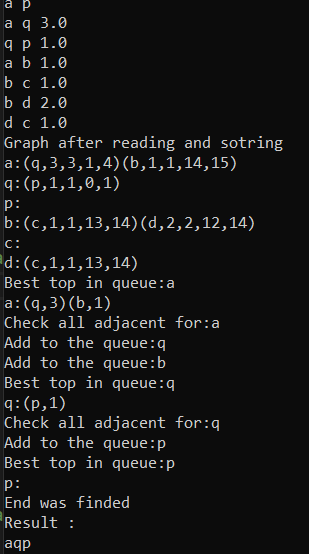
Программа написана на языке C++. Программа на вход получает вершину начала пути и конца пути. После вводятся ребра и их веса. Перед началом работы алгоритма у каждого узла сортируются смежные вершины по возрастанию по сумме эвристического числа и веса ребра.

**Тестирование.**

**Жадный алгоритм:**



**А\***



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Входные данные | Выходные данные для жадного алгоритма | Выходные данные для алгоритма А\* |
| a e  a b 3.0  b c 1.0  c d 1.0  a d 5.0  d e 1.0 | abcde | ade |
| e a  a a 0.5  a b 2  a c 3  b c 2  c a 3  c e 4  e c 1  c f 5  e g 1  g a 2  g h 4  e r 2 | eca | eca |
| a f  a b 1.0  a c 2.0  a d 1.0  b d 3.0  c e 2.0  d e 2.0  e f 2.0  d f 6.0 | adbef | adef |
| a e  a b 10.0  a c 8.0  c b 1.0  b d 3.0  d e 7.0  b e 9.0  c e 11.0 | acdbe | acbe |
| a f  a b 1.0  a c 3  c d 3.0  b e 2.0  e d 1.0  e f 2.0 | abef | abef |

**Вывод.**

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены и реализованы алгоритм A\* и жадный алгоритм для нахождения пути в графе.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

КОД ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА

#include <iostream>

#include <vector>

#include <tuple>

#include <stack>

#include <string>

using namespace std;

using Edge = tuple<string, string, double, bool>; //ребро

class EdgesList { //граф

private:

vector<Edge\*> edges; //вектор ребер

stack<string> stackk; //стек вершин

public:

EdgesList() = default;

void addEdge(Edge\* edge) { //добавление вершин в граф

edges.push\_back(edge);

}

void printList() { //печать ребер

for (auto & edge : edges) {

std::cout << get<0>(\*edge) << " ";

std::cout << get<1>(\*edge) << " ";

std::cout << get<2>(\*edge) << " ";

std::cout << get<3>(\*edge) << endl;

}

}

void printStack(){ //печать перевернутого стека

std::stack<string> newS; //содаем новый стек

while (!stackk.empty()) { //пока стек не пустой

newS.push(stackk.top()); //добавляем вершины в новый

stackk.pop(); //и убираем их из старого

}

while (!newS.empty()) { //пока нвый не пустой

cout << newS.top(); //печатаем вершину

newS.pop();//и убираем ее со стека

}

}

void findWay(string startTop, string endTop) {

std::cout << "Start find way in graph" << std::endl;

stackk.push(startTop); //кладем стартовую вершину на стек

bool finded = false; //флаг для остановки поиска

while(!finded) {

std::cout << "Start top is (" << startTop << ")" << std::endl;

Edge bestEdge = {"", "", 1000.0, false}; // будем сравнивать все ребра с данным

for (auto & edge : edges) { //проходимся по каждому ребру в графе

if ((get<0>(\*edge) == startTop) && (get<2>(\*edge) < get<2>(bestEdge)) && get<3>(\*edge) != true) { //если оно является не пройденым, инцидентным данному, а также его вес меньше текущего лучшего

bestEdge = \*edge;

}

}

//if(finded) break;

if(get<0>(bestEdge).empty()){ //если не нашли инцидентную или они все пройдены

std::cout << "There is no neighbour or there were passed for top (" << startTop <<")"<< std::endl;

string popedTop = stackk.top(); //снимаем со стека с вершины и приравниваем к новой переменной

stackk.pop();

std::cout << "Return to top (" << stackk.top() << ")" << std::endl;

for(int i = 0; i < edges.size(); i++){ //ищем инцидентное ребро между удаленной вершиной и вершиной стека

if(get<1>(\*edges[i]) == popedTop && get<0>(\*edges[i]) == stackk.top()) {

get<3>(\*edges[i]) = true;

startTop = stackk.top(); //делаем верхушку стека стартовой вершиной

}

}

}

else {

std::cout << "Best top for (" << startTop <<") is (" << get<1>(bestEdge) << ")" << std::endl;

stackk.push(get<1>(bestEdge)); //добавляем вершину на стек

startTop = get<1>(bestEdge); //и делаем ее стартовой

}

if(get<1>(bestEdge) == endTop) { //если смежное является конечным

std::cout << "Find end top!" << std::endl;

finded = true; //значит нашли конечную

break;

}

}

printStack();

}

};

int main() {

string vertex1, vertex2; // вершины для поиска пути

cin >> vertex1 >> vertex2;

std::string from;

std::string to;

double defaultEdgeLength = 1.0;

EdgesList edgesList; //инициализируем граф

while (cin >> from >> to >> defaultEdgeLength) { //счиываем пока cin не вернет false

auto\* currentEdge = new Edge{ from, to, defaultEdgeLength, false}; //создаем новое ребро и добавляем его в граф

edgesList.addEdge(currentEdge);

}

//edgesList.printList();

edgesList.findWay(vertex1, vertex2); //вызов функции поиска пути в графе

std::cout << std::endl;

return 0;

}

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

КОД ПРОГРАММЫ ДЛЯ А\*

#include <iostream>

#include <vector>

#include <map>

#include <cmath>

#include <algorithm>

#include <utility>

class GraphTop;

class Pair { //класс ребро

public:

GraphTop\* top; // врешина

double weight; //вес ребра

Pair(GraphTop\* top, double weight) : top(top), weight(weight){}; // конаструктор

};

class GraphTop { //класс вершина

public:

char name; //имя вершины

double gFunc = 0; //значение функции g

double hFunc = 0; //значение функции h

double fFunc = 0;//значение функции f

std::vector<Pair\*> adjacentEdges; // смежные ребра

explicit GraphTop(char name) : name(name){}; // конструктор

void sortTops(char goal){ //сортировка всмежных вершин

for(auto & adjacentEdge : adjacentEdges){ // заплняем значений функций g,f,h

adjacentEdge->top->gFunc = adjacentEdge->weight;

adjacentEdge->top->setHFunc(goal);

adjacentEdge->top->setFFunc();

}

for(int i = 0; i < adjacentEdges.size() ; i++){

for (int j = i+1; j < adjacentEdges.size(); ++j) {

if(adjacentEdges[j]->top->fFunc < adjacentEdges[i]->top->fFunc){ //сортируем ребра пузырьком

std::swap(adjacentEdges[j], adjacentEdges[i]);

}

}

}

};

void setHFunc(char b){ //эврестическа функция

hFunc = (double)abs((int)name - (int)b);

};

void setFFunc(){

fFunc = hFunc + gFunc;

};

void addAdjacentEdge(GraphTop\* top, double weight) { //добавления смежного ребра

adjacentEdges.push\_back(new Pair(top, weight));

};

void print(){ //печать смежных ребер

std::cout << name << ":";

for(auto & adjacentEdge : adjacentEdges){

std::cout << "(" << adjacentEdge->top->name << "," << adjacentEdge->weight << "," << adjacentEdge->top->gFunc << "," << adjacentEdge->top->hFunc << "," << adjacentEdge->top->fFunc<< ")";

}

};

void print1(){ //печать смежных ребер без h, g , f

std::cout << name << ":";

for(auto & adjacentEdge : adjacentEdges){

std::cout << "(" << adjacentEdge->top->name << "," << adjacentEdge->weight << ")";

}

};

};

class EdgesList {

private:

static GraphTop\* findBestTop(std::vector<GraphTop\*>& openSet){ //функция нахождения вершины с минимальной fFunc в векторе

GraphTop\* bestTop = openSet[0]; //приравниваем возвращаемой вершине первый элемент в векторе

for(int i = 1; i < openSet.size(); i++){ //проходимся по всем вершинам в векторе

if(openSet[i]->fFunc < bestTop->fFunc) bestTop = openSet[i];

}

return bestTop;

}

static std::string reconstructPath(std::map<GraphTop\*, GraphTop\*>& passedTops, GraphTop\* start, GraphTop\* goal){ //функция построения пути

std::string resString; //возвращаемая строка

GraphTop\* curr = goal; //приравниваем текущую вершину к конечной

resString += goal->name; //добавляем имя конечной вершины к рез строке

while(curr != start){ //пока не дойдем до начальной

curr = passedTops[curr]; //по ключю находим следующую вершину

resString += curr->name; //добавляем ее имя в рез строку

}

std::reverse(resString.begin(), resString.end()); //переворачиваем строку

return resString;

}

static bool isInClosedSet(GraphTop\* top, std::vector<GraphTop\*>& openSet){ //находим врешину в вектрое

for (auto & i : openSet) { //проходимся по каждой вершине в векторе

if(i == top) return true;

}

return false;

}

static void removeFromOpenSet(GraphTop\* top, std::vector<GraphTop\*>& openSet){ //удаление вершины из вектора

for(auto i = openSet.begin(); i <= openSet.end(); i++){ //с помощью итератора проходимся по вершинам в веторе

if((\*i) == top){ //сравниваем значение в итераторе и удаляемую вершину

openSet.erase(i); //если равны то удаляем

}

}

}

public:

std::vector<GraphTop\*> tops; //вектор всех вершин графа

void sortTops(char goal){ //сортировка всех смежных вершин у каждой вершины

for(auto & top : tops){ // проходимся по каждой вершине в вкторе и вызываем для нее сортировку

top->sortTops(goal);

}

}

void addEdge(char topName, char adjacentTopName, double weight) { //добавление ребра

GraphTop\* top = isExistTop(topName); //ищем вершину по имени

GraphTop\* adjacentTop = isExistTop(adjacentTopName); //ищем смежную вершину по имени

top->addAdjacentEdge(adjacentTop, weight); //вызываем функцию добавление смежного ребра

};

GraphTop\* isExistTop(char topName) { //вынкция проверки наличия ребра либо ее создания

for(auto & top : tops){ //ищем переданную вершину в графе

if(top->name == topName) return top; //если нашли то возвращаем

}

auto\* top = new GraphTop(topName); //если не нашли то создаем, добавляем в вектор вершин и возвращаем

tops.push\_back(top);

return top;

};

void print() { //печать всех вершин

for (auto & top : tops) {

top->print();

std::cout << std::endl;

}

};

std::string findBestWay(char start, char goal){ //поиск пути по алгоритму А\*

std::vector<GraphTop\*> closedSet; //обработанные вершины

std::vector<GraphTop\*> openSet; //вершины, которые предстоит обработать

std::map<GraphTop\*, GraphTop\*> passedTops; //словарь для пути

GraphTop\* startTop = isExistTop(start);//ищем стартовую вершину

openSet.push\_back(startTop);//добавляем в вектор для обработкаи

startTop->gFunc = 0.0; // заплняем значений функций g,f,h

startTop->setHFunc(goal);

startTop->setFFunc();

GraphTop\* curTop = startTop; //приравниваем текущей начальную

while(!openSet.empty()) { //пока в списке есть вершины для обработки

GraphTop\* curTop = findBestTop(openSet); //ищем вершины с наименьшем значением fFunc

std::cout << "Current top:" << std::endl;

curTop->print1();

std::cout << std::endl;

if(curTop->name == goal) { //если нашли конечную вызываем функцию для определения пути

std::cout << "End was finded";

return reconstructPath(passedTops, startTop, isExistTop(goal));

}

removeFromOpenSet(curTop, openSet); //удаляем тек вершину из списка обрабатываемых

closedSet.push\_back(curTop);// и добавляем в обработанные

std::cout << "Check all adjacent for:" << curTop ->name << std::endl;

for(int i = 0; i < curTop->adjacentEdges.size(); i++){ //проходимся по всем смежным для текущей

bool tentativeIsBetter; //вляг для проверки является ли лучшей

if(isInClosedSet(curTop->adjacentEdges[i]->top, closedSet)) continue; // если смежная уже обработана, то пропускаем

double tentativeGScore = curTop->gFunc + curTop->adjacentEdges[i]->weight; // по данной переменной будем определять, является ли вершина лучшей

if(!isInClosedSet(curTop->adjacentEdges[i]->top, openSet)) { //если нет в очереди на обработку, то добавим туда

openSet.push\_back(curTop->adjacentEdges[i]->top);

tentativeIsBetter = true;

}

else{

if (tentativeGScore < curTop->adjacentEdges[i]->top->gFunc) tentativeIsBetter = true; // если gFunc у смежной больше

else continue;

}

if (tentativeIsBetter){//если вершина лучшае

std::cout << "Adjacent top "<< curTop->adjacentEdges[i]->top->name << " is better" << std::endl;

passedTops[curTop->adjacentEdges[i]->top] = curTop; //то добавим ее в путь

curTop->adjacentEdges[i]->top->gFunc = tentativeGScore; // заполняем значений функций g,f,h

curTop->adjacentEdges[i]->top->setHFunc(goal);

curTop->adjacentEdges[i]->top->setFFunc();

}

}

}

return "0";

}

};

int main() {

EdgesList edgesList; //создание графа

char a, b, start, goal;

double weight;

std::cin >> start >> goal; //считывание начальной и конечной вершин

while(std::cin >> a >> b >> weight) { //считываем пока не cin не вернет false

edgesList.addEdge(a, b, weight); //добваление ребра графа

}

edgesList.sortTops(goal); //сортируем для каждой вершины смежные по приоритету

std::cout << "Graph after reading and sotring" << std::endl;

edgesList.print(); //печатаем граф

std::cout << edgesList.findBestWay(start, goal); //вызываем функцию нахождения пути в графе

return 0;

}