Математический анализ-3

Практическое занятие 11

Дифференцирование и интегрирование

функции комплексного переменного

Дифференцирование функций комплексного переменного.
Условия Коши-Римана

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D.

Обозначим

$$\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение. Однозначная функция $\omega = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в данной точке z и обозначается $f'(z)$ или ω', т.е.

$$\omega' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Замечание. Правила дифференцирования остаются справедливыми и для функции комплексной переменной**.**

Определение. Однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической* в точке z_0, если она дифференцируема в самой точке z_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она дифференцируема в любой точке области.

Теорема. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y) и чтобы в этой точке имели место равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называемые условиями Коши-Римана. При этом формулы для производной функции $f'(z)$ имеют вид:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Замечание. Условия Коши-Римана (необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции комплексного переменного) позволяют решать вопрос об аналитичности функции в области.

1. Проверить функцию на аналитичность.

1) $f(z) = z^2\bar{z}$

$$f(z) = z^2\bar{z} = (x + iy)^2(x - iy) = (x^2 + 2ixy - y^2)(x - iy) =$$

$$= x^3 + 2ix^2y - xy^2 - ix^2y + 2xy^2 + iy^3 = x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3)$$

$$u(x, y) = x^3 + xy^2 \qquad v(x, y) = x^2y + y^3$$

Условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2 \quad \neq \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy \ \neq \ -\frac{\partial v}{\partial x} = -2xy$$

Условия Коши-Римана выполнены только в точке (0;0).

В этой точке функция дифференцируема, аналитической не является ни в одной точке комплексной плоскости.

2) $f(z) = ze^z$

$$f(z) = ze^z = (x + iy)\, e^x(cosy + isiny) =$$

$$= e^x(xcosy + ixsiny + iycosy - ysiny) =$$

$$= e^x(xcosy\ - ysiny) +\ ie^x(xsiny + ycosy)$$

$$u(x, y) =\ e^x(xcosy\ - ysiny) \qquad v(x, y) = e^x(xsiny + ycosy)$$

Условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\ (xcosy - ysiny) + e^x\ (cosy\ ) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x(xcosy + cosy - ysiny)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x\ (-xsiny - siny - ycosy) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x(xsiny + ycosy) + e^x siny$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполняются, следовательно, функция аналитична на всей комплексной плоскости.

$$f'^{(z)} = (ze^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^x\ (xcosy - ysiny + cosy) + ie^x(xsiny + ycosy + siny) =$$

$$= e^x x(cosy + isiny) + e^x y(-siny + icosy) + e^x(cosy + isiny) = ze^z + e^z$$

$$sinz = sinxchy + icosxshy \qquad cosz = cosxchy - isinxshy$$

$$shz = shxcosy + ichxsiny \qquad chz = chxcosy + ishxsiny$$

3) $f(z) = \cos(2z - 3i)$

$$f(z) = \cos(2z - 3i) = \cos(2(x + iy) - 3i) = \cos\big(2x + i(2y - 3)\big) =$$

$$= cos2xch(2y - 3) - isin2xsh(2y - 3)$$

$$u(x, y) =\ cos2xch(2y - 3) \qquad v(x, y) =\ -sin2xsh(2y - 3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2sin2xch(2y - 3) \quad = \quad \frac{\partial v}{\partial y} =\ -2sin2xch(2y - 3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2cos2xsh(2y-3) \qquad = \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = 2cos2xsh(2y-3)$$

Условия Коши-Римана выполняются.

Функция является аналитической на всей комплексной плоскости

4). $f(z) = ch\, z.$

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) = \frac{1}{2}(e^{x+iy} + e^{-x-iy}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x}(cosy + isiny) + e^{-x}(cosy - isiny)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x}cosy + e^{-x}cosy) + i\cdot\frac{1}{2}(e^{x}siny - e^{-x}siny)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}cosy(e^{x} + e^{-x})$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2}siny(e^{x} - e^{-x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}cosy(e^{x} - e^{-x})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}cosy(e^{x} - e^{-x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}siny(e^{x} + e^{-x})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}siny(e^{x} + e^{-x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполнены для любых x, y.

Функция аналитична на всей комплексной плоскости.

5) $f(z) = |z|Re\bar{z}$

$$f(z) = |z| Re\bar{z} = \sqrt{x^2 + y^2}x$$

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}x \qquad v(x, y) = 0$$

Функция не является аналитической.

6) $f(z) = 3zIm(z^2)$

$$f(z) = 3zIm(z^2) = 3(x + iy)Im(x^2 + 2ixy - y^2) = (3x + 3iy)2xy =$$

$$= 6x^2y + 6ixy^2$$

$$u(x, y) = 6x^2y \qquad v(x, y) = 6xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12xy \quad = \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 12xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 \quad \neq \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -6y^2$$

Условия Коши-Римана не выполняются.

Функция не является аналитической.

Определение. Функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической* в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема. Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями, т. е. $u(x, y)$, $v(x, y)$ *удовлетворяют уравнению Лапласа:* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$

Определение. Две гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*.

Теорема. Если в области D заданы две гармонические функции $u(x, y)$ и

$v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, то из них можно построить аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Замечание. Задание одной (действительной или мнимой) части при условии ее гармоничности определяет аналитическую функцию с точностью до константы.

2. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной или мнимой части.

1) $u(x, y) = 2e^x cosy, \quad f(0) = 2$

Проверим гармоничность $U(x, y)$:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x cosy \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^x cosy$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x siny \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2e^x cosy$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, функция гармоническая

Найдем $v(x, y)$: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; =>$

$$v(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int 2e^x cosydy = 2e^x siny + \varphi(x)$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \; => \; -2e^x siny = -2e^x siny + \varphi'(x) \quad => \; \varphi'(x) = 0 \quad \varphi(x) = c$

$v(x, y) = 2e^x siny + c \; => \; f(z) = 2e^x cosy + i(2e^x siny + c) = 2e^z + ic$

$f(0) = 2 \quad 2 = 2e^0 + ic \quad c = 0$

Итак, $f(z) = 2e^z$

2). $v(x,y) = 2(\operatorname{ch}x \cdot \sin y - xy)$. $f(0)=0$.

Гармоничность:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2(\operatorname{sh}x \cdot \sin y - y) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2(\operatorname{ch}x \cdot \sin y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2(\operatorname{ch}x \cdot \cos y - x) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2(-\operatorname{ch}x \cdot \sin y)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2(\operatorname{ch}x \cdot \cos y - x)$$

$$u(x,y) = \int 2(\operatorname{ch}x \cdot \cos y - x)dx =$$

$$= 2\left(\operatorname{sh}x \cdot \cos y - \frac{x^2}{2}\right) + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$-2\operatorname{sh}x \cdot \sin y + \varphi'(y) = -2\operatorname{sh}x \cdot \sin y + 2y$$

$$\varphi'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = y^2 + C$$

$$u(x,y) = 2\left(\operatorname{sh}x \cdot \cos y - \frac{x^2}{2}\right) + y^2 + C$$

$$f(z) = 2\operatorname{sh}x \cdot \cos y - x^2 + y^2 + C + i(2\operatorname{ch}x \cdot \sin y - 2xy)$$

$$f(z) = 2\operatorname{sh}z - z^2 + C$$

$$f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0.$$

Ответ: $f(z) = 2\operatorname{sh}z - z^2$

Интеграл от функции комплексного переменного

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, определенную и непрерывную в области D и кусочно-гладкую кривую L, лежащую в D.

Теорема. Если *f(z)* определена и непрерывна на L, то $\oint_L f(z)dz$ существует.

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ – действительные функции переменных x и y.

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов от действительной и мнимой частей, а именно:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)d(x + iy) =$$

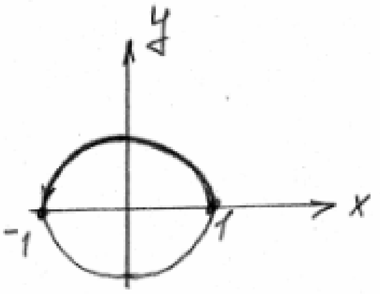
$$= \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_L u(x, y)dy + v(x, y)dx$$

Основные свойства криволинейных интегралов переносятся на интеграл от функции комплексного переменного.

3. Вычислить интеграл:

1). $\int_C (z^2 + z\cdot\bar{z})dz$.

$C: \begin{cases} |z| = 1 \\ 0 \le \arg z \le \pi \end{cases}$



на C: $z = 1\cdot e^{i\varphi}$

$0 \le \varphi \le \pi$.

$dz = i\cdot e^{i\varphi}d\varphi$

$\bar{z} = 1\cdot e^{-i\varphi}$

$$\int_C (z^2 + z\cdot\bar{z})dz = \int_0^{\pi} (e^{i2\varphi} + 1)\cdot ie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} i(e^{i3\varphi} + e^{i\varphi})d\varphi = i\left(\frac{1}{3i}e^{i3\varphi} + \frac{1}{i}e^{i\varphi}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

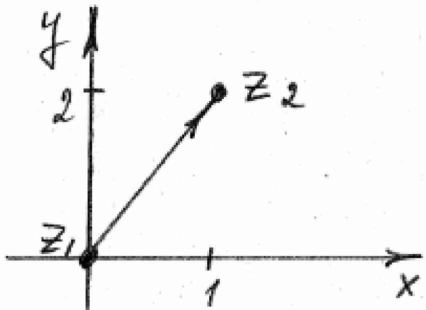
$$= \left(\frac{1}{3}e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}e^{i3\pi} + e^{i\pi} - \frac{1}{3} - 1 =$$

$$= \frac{1}{3}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) + \cos\pi + i\sin\pi - \frac{4}{3} =$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$$

2) $\int\limits_C \operatorname{Im} z\, dz$. $\quad C: \begin{cases} 1) \text{ прямая от т. } z_1 = 0 \text{ до т. } z_2 = 1+2i \\ 2) \text{ парабола от } z_1 \text{ до } z_2. \end{cases}$

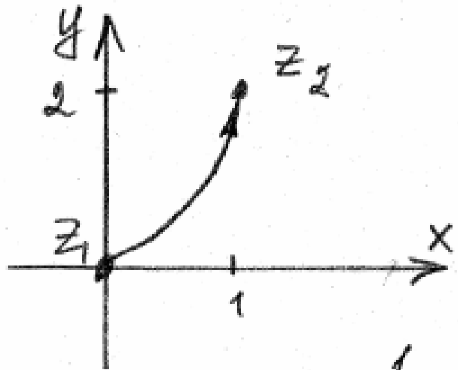
$$\int\limits_C \operatorname{Im} z\, dz = \int\limits_C y\, d(x+iy) = \int\limits_C y\,dx + i\int\limits_C y\,dy$$



$y = 2x;\ dy = 2dx$

$0 \le x \le 1$.

$$\int_0^1 2x\,dx + i\int_0^1 4x\,dx = (2+4i)\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1+2i.$$



$y = 2x^2$

$dy = 4x\,dx$

$0 \le x \le 1$

$$\int_0^1 2x^2 dx + i\int_0^1 8x^3 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 + i\cdot 2x^4\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} + 2i$$

Примеры для самостоятельного решения

Проверить функцию на аналитичность.

1). $f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$

2). $f(z) = \cos(iz - 1)$

3). $f(z) = ie^z + (z + i)^2$

4). $f(z) = \frac{1}{z}$

5). $f(z) = \frac{\bar{z}}{i} + \frac{i}{\bar{z}}$

Найти аналитическую функцию $f(z)$ по известной мнимой части.

6) $V(x, y) = x^2 - y^2 + 2x \quad f(0) = 1$

Домашнее задание.

Типовой расчет стр. 23 задача 19 (№1-18), стр.34 задача 7.

«Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.3» Ефимов А.В., Поспелов А.С. №13.236