Практическое занятие 9

Комплексные числа и действия над ними

Определение 1. Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая условием $i^2 = -1$.
Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = \mathrm{Re}z,\ y = \mathrm{Im}z$.

Такое представление комплексного числа z называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy\ ) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = z^2$$

Пример 1. Даны два комплексных числа: $z_1 = 1 + i,\quad z_2 = 2 - 3i.$

Найти $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2\ ,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}.$

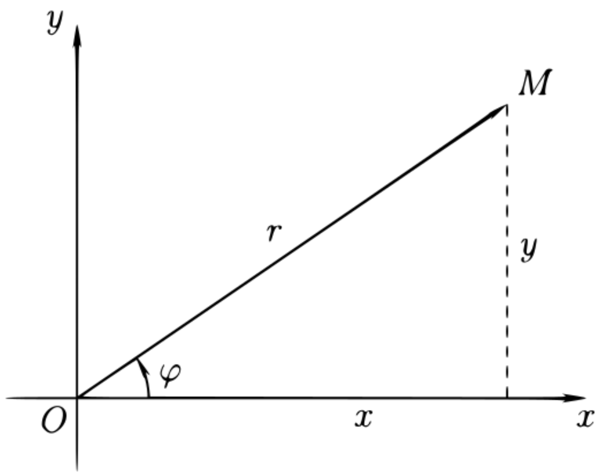
$z_1 + z_2 = 3 - 2i$

$z_1 - z_2 = -1 + 4i$

$z_1 \cdot z_2 = (1 + i)(2 - 3i) = 2 + 2i - 3i - 3i^2 = 5 - i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{2 - 3i} = \frac{(1 + i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 2i + 3i + 3i^2}{4 + 9} = \frac{-1 + 5i}{13} = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$$

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой M с координатами (x, y), либо вектором $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$ ($\vec{r}$ – радиус-вектор из начала координат). И наоборот, каждой точке $M(x, y)$ соответствует одно комплексное число $z = x + iy$.



Сопряженные числа на комплексной плоскости расположены симметрично относительно оси OX.

Определение 2. Длина вектора $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\right)$ называется *модулем* комплексного числа и обозначается $|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$.

Определение 3. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси OX, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = Argz$; определяется с точностью до слагаемого $2\pi k (k = 0, \pm 1, \ldots)$:

$$Argz = argz + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

где $argz$ есть *главное значение* $Argz$, определяемое условиями

$$-\pi < argz \leq \pi.$$

В зависимости от положения точки на комплексной плоскости,

$$argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если z в I , IV четверти,} \\ \pi - arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{если z во II четверти,} \\ -\pi + arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{если z в III четверти,} \\ 0, & \text{если } x>0,\ y=0, \\ \pi, & \text{если } x<0,\ y=0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x=0,\ y>0, \\ \dfrac{-\pi}{2}, & \text{если } x=0,\ y<0. \end{cases}$$

<u>Тригонометрическая форма комплексного числа</u>

Любое комплексное число $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ можно записать в *тригонометрической форме* $z = |z| \cdot \left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = r(cos\varphi + isin\varphi)$,
где $r = |z|, \varphi = argz$.

<u>Показательная форма записи комплексного числа</u>

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$, получаем
$z = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi}$, где $r = |z|, \varphi = argz$.

<u>Пример 2.</u> Представить число в тригонометрической и показательной форме:

1) $z_1 = 2 + 2i$. I четверть.

$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

$argz_1 = arctg\frac{2}{2} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = argz_1 = \frac{\pi}{4}$

$$z_1 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2) $z_2 = -3 + 3i$

3) $z_3 = -\sqrt{3} - i$

4) $z_4 = 2 - 2\sqrt{3}i$

5) $z_5 = 3$

6) $z_6 = 2i$

7) $z_7 = -1$

8) $z_8 = -3i$

Ответы:

$$z_2 = -3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_3 = -\sqrt{3} - i = 2\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$z_4 = 2 - 2\sqrt{3}i = 4\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_5 = 3 = 3(cos0 + isin0) = 3e^{i\cdot 0}$$

$$z_6 = 2i = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_7 = -1 = 1(cos\pi + isin\pi) = e^{i\pi}$$

$$z_8 = -3i = 3\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Действия над комплексными числами,
заданными в тригонометрической и показательной формах.

Пусть $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1) = r_1e^{i\varphi_1}$,

$$z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2) = r_2e^{i\varphi_2}.$$

$$z_1z_2 = r_1r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Возведение комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ в *натуральную* степень n

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + isin(n\varphi)) = r^ne^{in\varphi}$$

Корень n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\dots,n-1.$$

<u>*Пример 3*</u>. Даны два комплексных числа: $z_1 = -2 + 2i, \quad z_2 = \sqrt{3} - i.$

Вычислить: $(z_1z_2)^4$

$|z_1| = 2\sqrt{2},\ \varphi_1 = argz_1 = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad |z_2| = 2,$ $\qquad \varphi_2 = argz_2 = -\frac{\pi}{6}$

$$z_1z_2 = 4\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

$$(z_1z_2)^4 = 1024\left(cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right) = 1024\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 1024\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512 + i512\sqrt{3} = 1024e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Пример 4. Даны два комплексных числа: $z_1 = -1 - \sqrt{3}i, \ \ z_2 = 1 + i.$

Вычислить: $(z_{1/}z_2)^6$

$|z_1| = 2, \ \varphi_1 = -\pi + arctg\sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3} \qquad |z_2| = \sqrt{2}, \ \ \varphi_2 = arctg1 = \frac{\pi}{4}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{11\pi}{12}\right)}$

$$(z_{1/}z_2)^6 = 2^3e^{i\left(-\frac{11\pi}{2}\right)} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = 8i$$

Пример 5. Вычислить $\sqrt[3]{8}$.

Решение: Число 8 лежит на действительной оси:

$|8| = \sqrt{(8)^2 + 0^2} = 8, \quad \varphi = 0.$

$\sqrt[3]{8} = \left(cos\frac{0+2\pi k}{3} + isin\frac{0+2\pi k}{3}\right) = 2\left(cos\frac{2\pi k}{3} + isin\frac{2\pi k}{3}\right), \quad k = 0,1,2.$

Полагая последовательно $k = 0,1,2,$ выпишем все корни

$k = 0$: $\ z_0 = 2(cos0 + isin0) = 2,$

$k = 1$: $\ z_1 = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3},$

$k = 2$: $z_2 = 2\left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3},$

Пример 6. Решить уравнение:

1) $z^6 + 1 = 0.$

Решение: $z^6 = -1 \qquad z = \sqrt[6]{-1} \qquad |-1| = 1, \ \varphi = \pi.$

$$z = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1}\left(cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + isin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), \ \ k = 0,1,2,3,4,5.$$

$$k = 0: z_0 = cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$k=1: z_1=cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$k=2: z_2=cos\frac{5\pi}{6}+isin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},$$

$$k=3: z_3=cos\frac{7\pi}{6}+isin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2},$$

$$k=4: z_4=cos\frac{9\pi}{6}+isin\frac{9\pi}{6}=-i,$$

$$k=5: z_5=cos\frac{11\pi}{6}+isin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

2) $(1-i)z^3+1+i=0$

$$z^3=-\frac{1+i}{1-i}=-\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}=(-1)e^{i\frac{\pi}{2}}=e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}}=e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$z^3=cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2}=cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$$

$$z=\sqrt[3]{-i}=cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)+isin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right),\qquad k=0,1,2$$

$$k=0: z_0=cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2},$$

$$k=1: z_1=cos\frac{3\pi}{6}+isin\frac{3\pi}{6}=i,$$

$$k=2: z_2=cos\frac{7\pi}{6}+isin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

3) $z^2-2iz+3=0$

$$z_{1,2}=\frac{2i\pm\sqrt{-4-4\cdot 3}}{2}=\frac{2i\pm\sqrt{-16}}{2}=i\pm 2i$$

$z_1 = 3i,\ \ z_2 = -i$

4) $z^4 + 5z^2 - 36 = 0$

$z^2 = t$

$t^2 + 5t - 36 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(-36)}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$t_1 = 4, \qquad z^2 = 4,\ \ z_{1,2} = \pm 2$

$t_2 = -9,\ \ \ z^2 = -9,\ \ z_{1,2} = \pm 3i$

5) $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$

$z^3 = t$

$t^2 - 2it - 1 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4 - 4(-1)}}{2} = \frac{2i}{2} = i\ (II)$$

$z^3 = i$

$$z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}} = cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + isin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3},\ \ k = 0{,}1{,}2$$

$$z_0 = cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = cos\frac{9\pi}{6} + isin\frac{9\pi}{6} = -i$$

Уравнение 6-й степени имеет 3 различных корня, каждый из них имеет кратность 2.

Изображение множеств на комплексной плоскости

Изобразить на комплексной плоскости линии и области, заданные уравнениями и неравенствами.

Пример 7. $|z-2+i|=3$

Пример 8. $|z-i|<3$

Пример 9. $\begin{cases} 1<|z|<3 \\ Imz<0 \end{cases}$

Пример 10. $\begin{cases} |Rez|<1 \\ |Imz|<2 \end{cases}$

Пример 11. $Rez+Imz>0$

Пример 12. $Rez^2=9$

Пример 13. $Im\left(\frac{1}{z}\right)<\frac{1}{2}$

Ответы.

Пример 7. $|z-2+i|=3$. Окружность с центром в точке $2-i$ и радиусом 3.

Пример 8. $|z-i|<3$. Круг (без границы) с центром в точке I и радиусом 3.

Пример 9. $\begin{cases} 1<|z|<3 \\ Imz<0 \end{cases}$. Часть кольца между окружностями радиуса 1 и 3 с центром в начале координат, без границ, расположенная в нижней полуплоскости.

Пример 10. $\begin{cases} |Rez|<1 \\ |Imz|<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|<1 \\ |y|<2 \end{cases}$. Прямоугольник без границ, образуемый прямыми $x=\pm 1, y=\pm 2$.

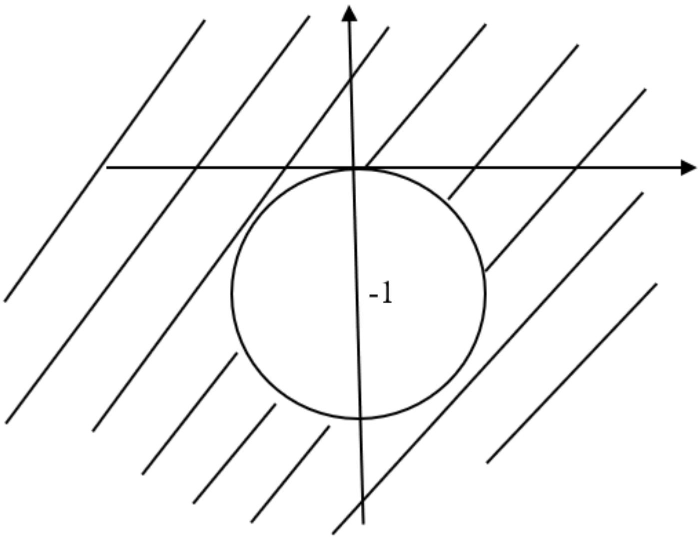
Пример 11. $Rez+Imz>0 \Leftrightarrow x+y>0 \Leftrightarrow y>-x$. Полуплоскость выше прямой $y=-x$, без границы.

Пример 12. $Rez^2=9 \Leftrightarrow x^2-y^2=9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ – гипербола.

Пример 13. $Im\left(\frac{1}{z}\right)<\frac{1}{2}$

$$Im\left(\frac{1}{z}\right) = Im\frac{1}{x+iy} = Im\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = Im\frac{x-iy}{x^2+y^2} = -\frac{y}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$$

$-\frac{y}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2} < \frac{1}{2}$ $\quad$ $x^2+y^2+2y>0$ $\quad$ $x^2+(y+1)^2>1$



Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{-3-3i}\right)^{12}$
2. Решить уравнения a) $z^2 - 2 + 2\sqrt{3}i = 0$

   b) $z^4 + 81 = 0$

Домашнее задание: типовой расчет стр. 21-22 задачи 1.15, 1.16, 1.17.

Задача 1.18 (№1-4).