МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МИРЭА – РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕХАНИКА.

Дополнительные занятия по физике
для студентов первого курса

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва 2020

1. КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

1.1. Кинематика

В механике изучается простейший вид движения − механическое движение, т.е. изменение положения тел в пространстве относительно других тел или их частей с течением времени. Классическая механика (механика Галилея-Ньютона) изучает движение макроскопических материальных тел, совершаемое со скоростями значительно меньшими скорости света в вакууме. По характеру рассматриваемых задач механику разделяют на кинематику, динамику, статику. Раздел механики, который изучает механическое движение, но не рассматривает причины, вызывающие это движение (не рассматриваются приложенные к телу силы), называется кинематикой.

Рассмотрим основные понятия и определения кинематики.

Телом отсчета называется тело, относительно которого определяется положение других тел.

Систему отсчета образуют: тело отсчета, связанная с ним система координат и синхронизированные между собой часы (см. рисунок 1).

Материальной точкой называется физическая модель тела, размерами, формой и структурой которого можно пренебречь в сравнении с другими размерами при изучении данного механического движения.

Радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала системы координат, определяет пространственное положение материальной точки в выбранной системе отсчета. При движении материальной точки радиус-вектор $\vec{r}$ является функцией времени. Задание радиус-вектора эквивалентно указанию трёх скалярных функций: трёх его проекций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ на оси декартовой системы координат.

Закон движения материальной точки записывается следующим образом:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1)$$

Например, для равномерного движения, т.е. движения с постоянной скоростью, функция $\vec{r}(t)$ имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \qquad (2)$$

а для равнопеременного: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2}$, (3)

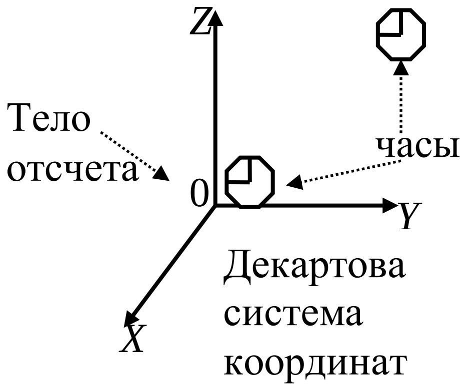


Рис.1

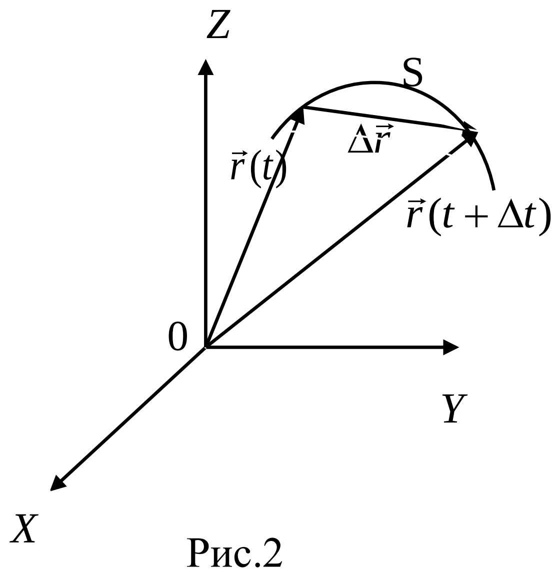


Рис.2

где $\vec{r}_0$ - характеризует начальное положение точки при t=0, а $\vec{v}_0$ - начальную скорость.

Перемещение материальной точки $\Delta\vec{r}$ за промежуток времени Δt – вектор, соединяющий положение точки в моменты t и $t+\Delta t$. На рис. 2 указаны положения материальной точки в различные моменты времени и соответствующие им радиус-векторы: $\vec{r}(t), \vec{r}(t+\Delta t)$, а также вектор перемещения $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t). \qquad (4)$$

Траекторией называется линия, которую описывает материальная точка (конец радиус-вектора) при своем движении. По форме траектории механическое движение разделяется на прямолинейное и криволинейное. В первом случае траекторией движения является отрезок прямой, во втором некоторая кривая.

Путь − это расстояние S, пройденное материальной точкой вдоль траектории за промежуток времени Δt (длина траектории) (см. рис. 2). Путь скалярная величина. При прямолинейном движении в одном направлении $S = |\Delta\vec{r}|$, при криволинейном движении $S > |\Delta\vec{r}|$.

Скорость – это физическая величина, определяющая быстроту движения точки и направление её движения.

Средняя скорость перемещения

$$\vec{v}_{ср.} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{5}$$

– это отношение перемещения к промежутку времени, за которое это перемещение произошло. Направление вектора $\vec{v}_{ср.}$ совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$.

Средняя скорость прохождения пути (среднепутевая скорость):

$$v_{ср.} = \frac{S}{\Delta t} \tag{6}$$

– это отношение пройденного пути вдоль траектории к промежутку времени. Среднепутевая скорость – это скалярная величина.

Мгновенной скоростью (скоростью в момент времени t) называют предел, к которому стремится средняя скорость перемещения при $\Delta t \to 0$, т.е. отношение очень малого перемещения $d\vec{r}$ к малому промежутку времени dt, за который это перемещение произошло, это есть не что иное, как производная от функции $\vec{r}(t)$ по времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t). \tag{7}$$

Вектор мгновенной скорости в каждой точке направлен по касательной к траектории. Проекции скорости на оси прямоугольной декартовой системы координат равны:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x'(t), v_y = \frac{dy}{dt} = y'(t), v_z = \frac{dz}{dt} = z'(t) , \tag{8}$$

где x, y и z – зависящие от времени координаты точки.

Модуль скорости равен:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{9}$$

Размерность скорости в СИ $[v] = \dfrac{м}{с}$.

Равномерное прямолинейное движение − это движение с постоянной по модулю и направлению скоростью, при котором материальная точка совершает равные перемещения за равные промежутки времени. При прямолинейном движении траектория является прямой линией. Если направить ось X вдоль траектории, то проекции перемещения и скорости на оси Y, Z равны нулю и зависимости координаты x и модуля перемещения (в данном случае − пути) от времени для этого типа движения имеют вид:

$$x = x_0 + vt\,, \tag{10}$$

$$|\Delta\vec{r}| = S = x - x_0 = vt. \tag{11}$$

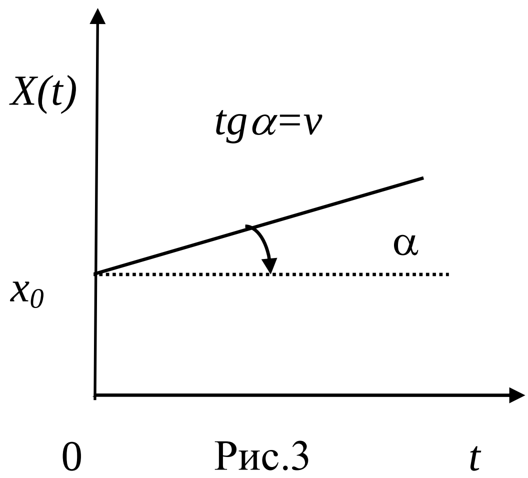


Рис.3

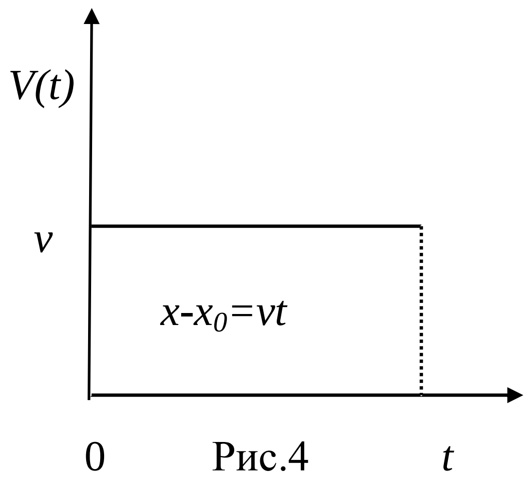


Рис.4

Графики зависимости координаты от времени и скорости от времени для равномерного прямолинейного движения показаны на рис.3, 4. Тангенс угла наклона графика зависимости координаты от времени (рис.3) численно равен скорости v. Площадь прямоугольника на графике зависимости скорости от времени (рис.4) численно равна пути S.

Ускорение − физическая величина, определяющая быстроту и направление изменения скорости.

Средним ускорением за промежуток времени Δt называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$, происшедшее за данный промежуток, к величине Δt, т.е.

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{12}$$

Мгновенным ускорением $\vec{a}$ (ускорением в момент времени t) называют предел, к которому стремится среднее ускорение при $\Delta t \to 0$, т.е. отношение очень малого приращения скорости $d\vec{v}$ к малому промежутку времени dt, за который это приращение произошло.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{13}$$

В прямоугольной декартовой системе координат вектор ускорения можно разложить на составляющие a_x, a_y, a_z (проекции ускорения на оси X, Y, Z):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}, \tag{14}$$

модуль ускорения равен:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{15}$$

Размерность ускорения в СИ $[a] = \frac{м}{с^2}$.

Неравномерное движение – это движение с ускорением.

Простейшим типом неравномерного движения является равнопеременное движение, при котором тело за равные промежутки времени совершает неодинаковые перемещения.

Прямолинейное равнопеременное движение – это движение, при котором вектор ускорения не меняется с течением времени ни по величине, ни по направлению $(\vec{a} = const)$, и может быть определен следующим образом:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}, \tag{16}$$

где под $\boldsymbol{v_0}$ следует понимать начальную скорость движения тела.

Зависимость скорости от времени при равнопеременном движении имеет вид:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \tag{17}$$

При прямолинейном движении векторы ускорения и скорости всегда направлены по одной прямой. Если векторы $\vec{a}, \vec{v}_0$ направлены одинаково, движение будет равноускоренным, если же эти векторы противоположны по направлению, движение − равнозамедленное.

Если ось координат X направлена вдоль вектора начальной скорости, то зависимость координаты от времени при равнопеременном прямолинейном движении имеет вид:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{18}$$

откуда модуль перемещения (в данном случае путь) равен:

$$|\Delta\vec{r}| = S = x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{19}$$

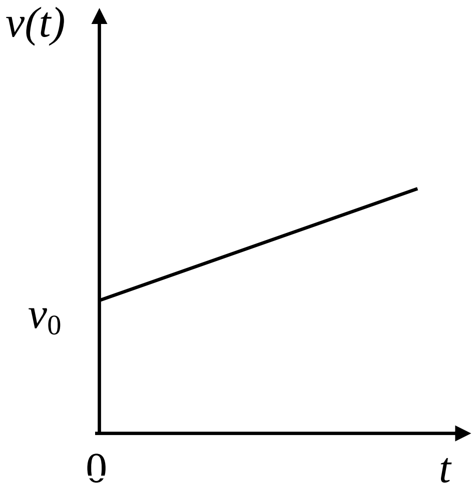


Рис.5

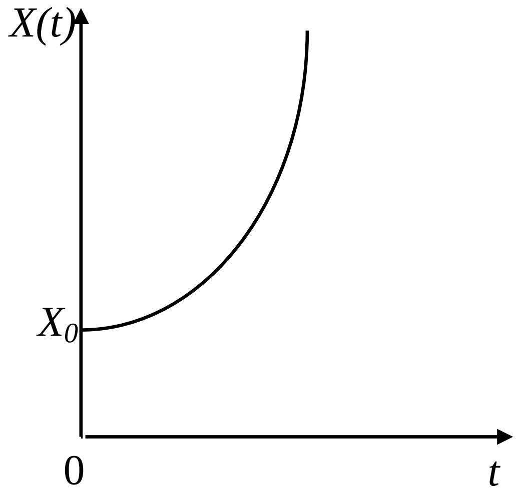


Рис.6

Ускорение положительно для равноускоренного и отрицательно для равнозамедленного движения. Учитывая зависимость скорости от времени при равнопеременном движении, будем иметь:

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \tag{20}$$

В случае равнозамедленного движения отрицательными будут и числитель ($v < v_0$) и знаменатель (ускорение отрицательно).

На рис. 5 показан график зависимости скорости от времени $v(t)$ для равноускоренного движения (v_0 –начальная скорость).

На рис. 6 показан график зависимости координаты от времени $X(t)$ для равноускоренного движения (он имеет вид параболы).

Криволинейное движение, простейшим примером которого является движение по окружности, – это движение, при котором ускорение можно разложить на две составляющие: тангенциальное ускорение a_τ и нормальное ускорение a_n. Тангенциальное ускорение a_τ направлено по касательной к траектории (при ускоренном движении направление a_τ совпадает с направлением линейной скорости, при замедленном движении направление a_τ противоположно направлению линейной скорости). Нормальное ускорение a_n направлено к центру кривизны траектории (по нормали к скорости $\vec{v}$). Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, нормальное ускорение – быстроту изменения направления скорости.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{21}$$

Линейной скоростью называется скорость, с которой материальная точка движется по окружности. В случае произвольного криволинейного движения вектор скорости может изменяться с течением времени как по модулю, так и по направлению.

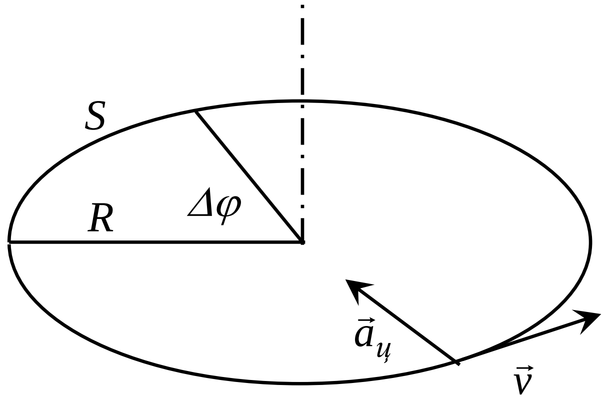


Рис.7

При равномерном движении по окружности модуль мгновенной скорости материальной точки с течением времени не меняется. Движущаяся точка за равные промежутки времени проходит равные по длине дуги окружности. Вектор линейной скорости в каждой точке направлен по касательной к окружности (см. рис.7).

Вектор центростремительного ускорения (нормального) $\vec{a}_ц$ направлен к центру окружности и его модуль равен:

$$a_ц = \frac{v^2}{R}, \tag{22}$$

где R - радиус окружности, а v - линейная скорость. Векторы скорости и центростремительного (нормального) ускорения перпендикулярны друг другу. При равномерном движении по окружности тангенциальное ускорение a_τ равно нулю.

Изменение положения точки на окружности может быть охарактеризовано изменением угловой координаты точки $\Delta\varphi$. Угол $\Delta\varphi$ называется углом поворота радиус- вектора материальной точки. При равномерном движении точки по окружности за любые равные промежутки времени углы поворота её радиус-вектора одинаковы.

Угловая скорость движения точки по окружности вокруг заданного центра − это отношение угла поворота радиус-вектора точки за промежуток времени Δt к длительности этого промежутка:

$$w = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (23)$$

Соответственно угол поворота радиус-вектора материальной точки, равномерно движущейся по окружности, равен: $\Delta\varphi=w\Delta t$.

Путь, пройденный точкой, равномерно движущейся по окружности, за время Δt равен:

$$S=v\Delta t. \qquad (24)$$

Геометрическое соотношение между длиной дуги S и углом поворота $\Delta\varphi$ имеет вид:

$$S = R\Delta\varphi. \qquad (25)$$

Путь, пройденный точкой за один период по окружности радиуса R, равен:

$$S=2\pi R. \qquad (26)$$

Связь между линейной и угловой скоростью имеет вид:

$$v=wR. \qquad (27)$$

Периодом вращения T (обращения) называется промежуток времени, в течение которого точка совершает один полный оборот по окружности, а величина обратная периоду – частотой вращения n (обращения). Период и частота соответственно раны:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{w}, \quad n = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}. \qquad (28)$$

1.2. Динамика

Раздел механики, изучающий причины, вызывающие движение, называется динамикой. Основой динамики являются три закона (постулата) Ньютона, сформулированных им в результате обобщения многочисленных опытных фактов и наблюдений движения небесных тел (планет Солнечной системы).

Рассмотрим основные понятия и определения динамики.

Сила $\vec{F}$ – это векторная физическая величина, являющаяся мерой воздействия, оказываемого на данное тело со стороны других тел, в результате чего изменяется скорость движения этого тела или оно деформируется. Сила полностью определена, если заданы её модуль, направление и точка приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Если на тело действуют несколько сил, то результирующее воздействие будет равно векторной сумме всех сил, действующих на тело (см. рис.8):

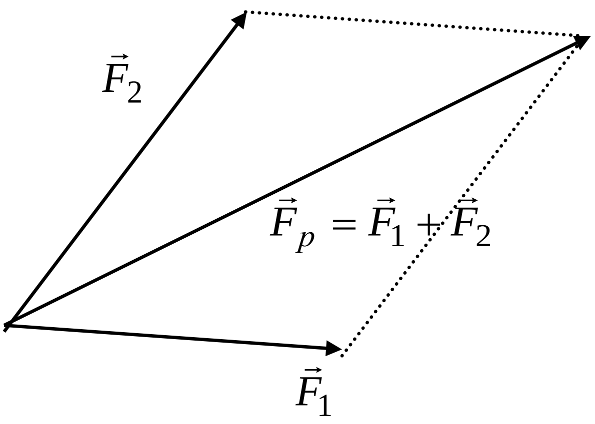


Рис.8

$$\vec{F}_p = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n. \qquad (29)$$

Размерность силы в СИ $[F] = H$ (Ньютон).

Масса – скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности тела в поступательном движении, а также характеризующая способность тел взаимодействовать с другими телами.

Инертностью называется свойство тела сохранять свою скорость при отсутствии взаимодействий с другими телами и приобретать то или иное ускорение под действием данной силы. Под действием одной и той же силы ускорения тел, имеющих различную массу, будут различны. Размерность массы в СИ $[m] = кг$.

I закон Ньютона: Существуют такие системы отсчета, относительно которых тело движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя, если векторная сумма сил, действующих на тело, равна нулю.

Тело, на которое не действуют никакие силы, называется изолированным. Прямолинейное и равномерное движение изолированного тела в инерциальной системе отсчета – это движение по инерции. При таком движении вектор скорости тела остается постоянным $(\vec{v} = const)$. Покой точки является частным случаем движения по инерции $(\vec{v} = 0)$. Изолированных тел, не подверженных воздействию со стороны других тел не существует, однако благодаря убыванию всех известных взаимодействий с увеличением расстояния, такое изолированное тело можно реализовать с любой требуемой точностью.

Инерциальной системой отсчета в рамках достижимой в настоящее время точности измерений является гелиоцентрическая система отсчета, связанная с Солнцем и «неподвижными» звездами. Все системы отсчета, движущиеся равномерно и прямолинейно или покоящиеся относительно гелиоцентрической или другой инерциальной системы отсчета называются инерциальными. Существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета. Все инерциальные системы отсчета отличаются друг от друга постоянными скоростями относительного движения. В инерциальных системах отсчета выполняется I закон Ньютона.

Неинерциальными системами отсчета называются системы отсчета, в которых изолированное тело не сохраняет скорость движения неизменной. Неинерциальные системы отсчета движутся с ускорением относительно любой инерциальной системы отсчета.

Принцип относительности Галилея: Для любых механических явлений все инерциальные системы отсчета являются равноправными. Никакие физические эксперименты не позволяют отличить покой инерциальной системы отсчета от её равномерного прямолинейного движения. Равномерное и прямолинейное движение системы отсчета не влияет на ход механических явлений, протекающих в ней.

Закон сложения скоростей является проявлением относительности механического движения.

Рассмотрим движение материальной точки относительно системы отсчета $К'$ (см.рис.9). Система $К'$ движется относительно системы отсчета К с постоянной скоростью $\vec{v}_1$. Система К – покоится. Если скорость материальной точки М относительно

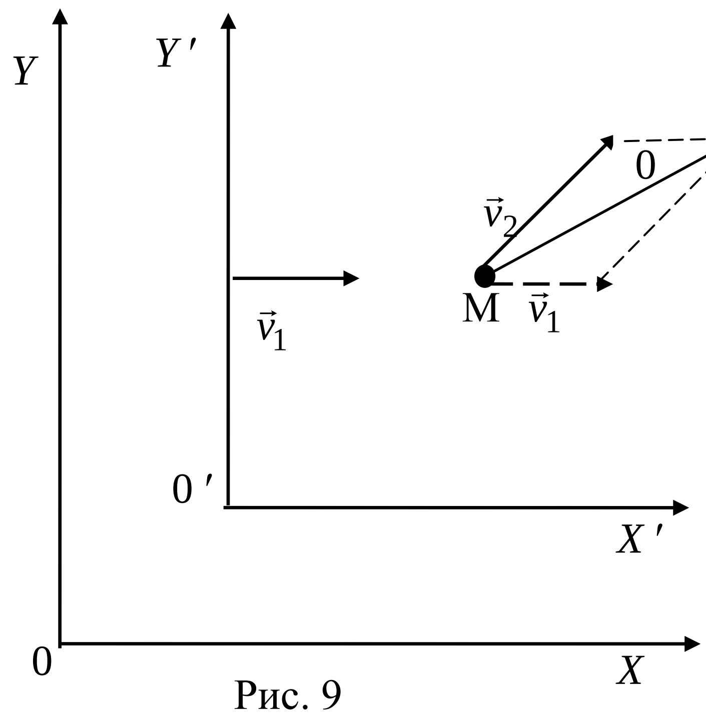


Рис. 9

системы отсчета $К'$ равна $\vec{v}_2$, то относительно системы отсчета К скорость материальной точки М будет равна векторной сумме скоростей: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Если движение материальной точки М в системе отсчета $К'$ происходит с постоянной скоростью $\vec{v}_2$, то в системе отсчета К скорость $\vec{v}$ материальной точки М тоже постоянна. Следовательно, если одна из систем отсчета является инерциальной, то инерциальной является и другая.

II закон Ньютона: Равнодействующая всех сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на его ускорение. Математически это утверждение запишется в виде:

$$\vec{F}_p = m\vec{a}, \tag{30}$$

где равнодействующая $\vec{F}_p$ равна векторной сумме всех сил, действующих на тело, и определяется соотношением (29).

В инерциальных системах отсчета любое изменение скорости тела происходит под воздействием других тел. Ускорение тела в инерциальной системе отсчета, прямо пропорционально действующей на тело силе, обратно пропорционально массе тела и по направлению совпадает с силой.

На практике вместо векторного уравнения (30) используются скалярные уравнения для проекций ускорения материальной точки или поступательно движущегося тела на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$a_x = \frac{F_x}{m}, a_y = \frac{F_y}{m}, a_z = \frac{F_z}{m}, \tag{31}$$

где F_x, F_y, F_z - проекции равнодействующей силы на оси *X*, *Y*, *Z*.

Модуль силы равен:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \tag{32}$$

III закон Ньютона: В инерциальной системе отсчета тела взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению. Математически это утверждение запишется в виде:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{33}$$

Знак минус указывает на противоположную направленность векторов сил. Силы $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ приложены к разным телам и не могут взаимно уравновешиваться. Следует подчеркнуть, что эти силы взаимодействия всегда имеют одинаковую природу.

В задачах ньютоновой (классической) механики учитываются гравитационные силы (силы тяготения) и две разновидности электромагнитных сил – силы упругости и силы трения.

Закон всемирного тяготения. Этот закон сформулирован Ньютоном на основании закономерностей движения планет и законов механики. Он гласит: между двумя материальными точками действуют силы взаимного притяжения (гравитационные силы) прямо пропорциональные массам этих точек и обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними. Модуль гравитационной силы (силы тяготения) определяется выражением:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{34}$$

где G=6,67·10^{-11}м^3/кг·с^2 − гравитационная постоянная − универсальна и не зависит от взаимодействующих тел. Выражение (34) справедливо для тел произвольной формы, размеры которых во много раз меньше расстояния между центрами масс тел (материальных точек) и для тел со сферически-симметричным распределением масс, r − расстояние между центрами масс взаимодействующих тел. Векторы сил тяготения направлены вдоль прямой линии, соединяющей центры масс.

Сила, действующая на любое тело массой m, находящееся вблизи поверхности Земли и направленная к центру Земли (сила тяжести F_T), является гравитационной силой. Так как Землю в первом приближении можно считать сферическим телом, то для того, чтобы найти ее значение, можно использовать выражение (34), тогда

$$F_T = G\frac{mM_з}{R_з^2} = mg, \tag{35}$$

где радиус Земли $R_з \approx$ 6400км, а масса Земли $M_з \approx$ 6·10^{24}кг, g − ускорение свободного падения, направленное к центру Земли и одинаковое для всех тел, находящихся вблизи поверхности Земли. Его численное значение равно:

$$g = G\frac{M_з}{R_з^2} \cong 9{,}8\frac{м}{с^2}. \tag{36}$$

Ускорение свободного падения для тела находящегося на высоте h над поверхностью Земли равно:

$$g = G\frac{M_з}{(R_з + h)^2}. \tag{37}$$

Первая космическая скорость – скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли. Это означает, что тело должно вращаться с постоянной скоростью по круговой орбите вокруг Земли на малом расстоянии h от её поверхности. Эту скорость позволяет рассчитать закон всемирного тяготения. На искусственный спутник действует сила тяжести mg, под действием которой он приобретает центростремительное ускорение, равное ускорению свободного падения: $a_ц = \frac{v^2}{R_з} = g$, направленное перпендикулярно скорости. Согласно II закону Ньютона имеем:

$$m\frac{v^2}{R_з} = mg, \tag{38}$$

откуда первая космическая скорость для планеты Земля (скорость движения тела по круговой орбите вокруг Земли вблизи ее поверхности) равна:

$$v = \sqrt{R_з g} \cong 7{,}9\frac{км}{c}. \tag{39}$$

Скорость, с которой движется тело по круговой орбите радиуса r, вокруг произвольной планеты под действием силы всемирного тяготения выражается следующим образом:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}, \tag{40}$$

Отметим, что в (40) под M понимается масса планеты, вокруг которой движется рассматриваемое тело.

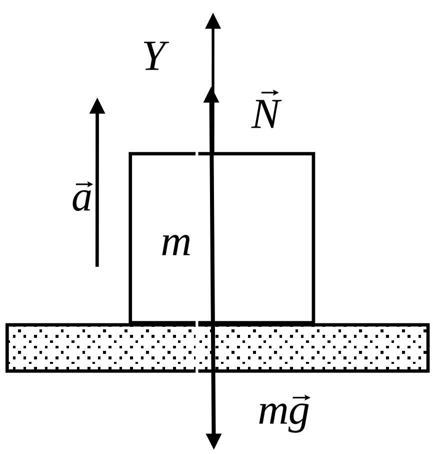


Рис.10

Весом называют силу, с которой тело, вследствие его притяжения к Земле, растягивает нить подвеса или давит на неподвижную опору. Вес тела незначительно зависит от географической широты местности. На Северном полюсе тело массой 1 кг весит 9,83Н, а на экваторе 9,78Н. Изменение веса составляет около 0.5%. Вес тела пропорционален массе тела.

Если тело покоится на горизонтальной опоре или движется прямолинейно и равномерно, сила тяжести и сила реакции опоры $\vec{N}$ уравновешены. Вес тела (сила, с которой тело давит на опору) и сила реакции опоры (сила, с которой опора давит на тело) согласно третьему закону Ньютона равны по величине. Поэтому в данном случае вес и сила тяжести также численно равны:

$$P = mg. \tag{41}$$

В случае, когда тело массой m находится на горизонтальной опоре, которая движется вверх с ускорением $\vec{a}$, согласно рисунку 10, уравнение движения тела в проекции на ось Y запишется следующим образом: $N - mg = ma,$ откуда имеем для величины веса P:

$$P = |N| = m(g + a). \tag{42}$$

Для тела, движущегося вместе с опорой с ускорением, направленным вниз, вес равен:

$$P = |N| = m(g - a). \tag{43}$$

Как видим, вес тела может быть как больше, так и меньше силы тяжести.

Невесомость или отсутствие веса наступает в том случае, когда тело не растягивает подвес или не давит на опору. Например, при нахождении предмета в лифте, который движется вниз с ускорением a, равным ускорению свободного падения g (оборвалась подвеска лифта!), реакция опоры равна нулю, т.е. пол лифта не давит на предмет, и, следовательно, предмет не может давить на пол, а это и означает отсутствие веса (невесомость). Если на тело действует только одна сила − сила тяжести, то тело находится в состоянии невесомости.

Силы упругости − это силы, возникающие при смещении различных частей тела друг относительно друга, т.е. при деформации, а также в месте контакта деформируемого тела с телом, вызывающим деформацию. Упругой деформацией называется такая деформация, при которой после прекращения действия внешних сил тело восстанавливает свою первоначальную структуру.

Сила упругости, действующая на тело со стороны опоры или подвеса, называется силой реакции опоры (подвеса) или силой натяжения подвеса.

Закон Гука, справедливый для упругой деформации, устанавливает связь между силой упругости $\vec{F}_{упр.}$, возникающей в сжатом или растянутом теле (пружине) и вектором деформации (удлинения или сжатия) $\Delta\vec{l}$: сила упругости пропорциональна вектору деформации и противоположна ему по направлению, т.е.

$$\vec{F}_{упр.} = -к\Delta\vec{l}, \tag{44}$$

где k – коэффициент упругости или жесткость.

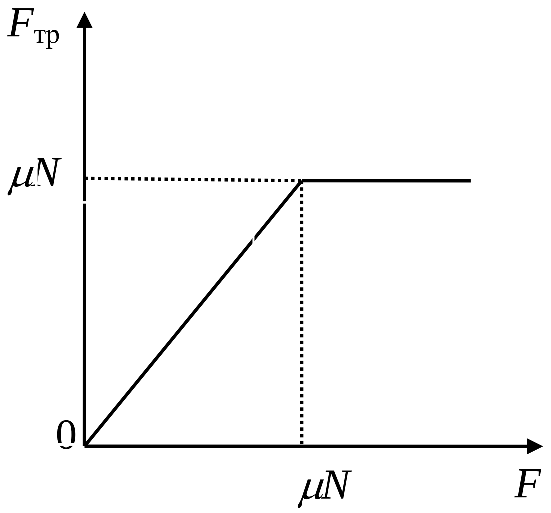


Рис. 11

Силой трения называется взаимодействие между различными соприкасающимися телами, препятствующее их относительному перемещению. Сила трения направлена противоположно скорости тела вдоль границы раздела соприкасающихся тел. Сила трения, возникающая на границе соприкасающихся неподвижных тел (при отсутствии относительного перемещения), называется силой трения покоя. Если же соприкасающиеся тела движутся, то между ними возникает сила трения, именуемая силой трения скольжения. На рис. 11 дан график зависимости силы трения от внешней силы $\vec{F}$, с которой некоторое тело тянут вдоль оси x. Горизонтальный участок графика соответствует случаю, когда тело движется. При этом возникает сила трения скольжения. Наклонный участок описывает покоящееся тело и, соответственно, силу трения покоя. Из рисунка 11 видно, что максимальная сила трения покоя равна силе трения скольжения. В свою очередь, сила трения скольжения определяется следующим выражением

$$F = \mu N, \tag{45}$$

где μ - коэффициент, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей, он называется коэффициентом трения.

Импульс тела (материальной точки) или количество движения – это векторная физическая величина равная произведению массы m тела (материальной точки) на его скорость $\vec{v}$:

$$\vec{P} = m\vec{v}. \tag{46}$$

В механике часто встречаются задачи, когда необходимо рассматривать несколько тел, движущихся по-разному. В этом случае говорят о движении системы тел. Суммарный импульс системы, состоящей из n тел (материальных точек) равен векторной сумме импульсов всех тел (материальных точек) системы:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n. \tag{47}$$

Рассмотрим **замкнутую систему** тел. В замкнутой системе входящие в нее тела взаимодействуют только между собой, не взаимодействуя с телами, внешними по отношению к данной системе.

Закон сохранения импульса, являющийся одним из фундаментальных законов физики, гласит: В замкнутой системе геометрическая сумма импульсов тел, ее составляющих, неизменна при любых взаимодействиях тел этой системы между собой. Необходимым условием применимости закона сохранения импульса к системе взаимодействующих тел является использование инерциальной системы отсчета. Иначе говоря, в инерциальной системе отсчета суммарный импульс замкнутой системы тел с течением времени остается постоянным: $\vec{P} = const.$

Взаимодействие между телами замкнутой системы может приводить к изменению импульсов отдельных тел, к передаче импульса от одного тела к другому, но это не сказывается на изменении суммарного импульса всей системы. Законом сохранения импульса можно пользоваться и в том случае, когда проекция суммы всех внешних сил на какую-то координатную ось равна нулю. В данном случае говорят о законе сохранения проекции импульса на данную координатную ось: $\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow P_x = const,$

при этом проекции импульса на другие координатные оси с течением времени могут изменяться. Если система состоит из одного тела, то для него закон сохранения импульса означает, что в отсутствии сил, на него действующих, импульс тела не изменяется. Это равносильно закону инерции (скорость тела не меняется). Если система состоит из двух тел, то закон сохранения импульса в векторном виде запишется следующим образом:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \tag{48}$$

Импульсом силы $\vec{F}$, которая в течение промежутка времени Δt действует на систему (считаем, что сила остается постоянной в течение промежутка Δt), называется физическая величина, равная произведению вектора силы $\vec{F}$ на промежуток времени Δt. При этом импульс системы $\vec{P}$ меняется и его приращение равно импульсу силы:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t, \quad \text{или} \quad \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{F}\Delta t. \tag{49}$$

Рассмотрим закон сохранения импульса на примере действия реактивного двигателя. При сгорании топлива газы, нагретые до высокой температуры, выбрасываются из сопла ракеты со скоростью $\vec{v}$. Ракета и выбрасываемые её двигателем газы взаимодействуют между собой. На основании закона сохранения импульса при отсутствии внешних сил импульс системы (сумма векторов импульсов взаимодействующих тел) остается постоянным: $\vec{P} = const$. До начала работы двигателей импульс ракеты и горючего был равен нулю: $\vec{P}_1 = 0$. Следовательно, после включения двигателя сумма векторов импульса ракеты и импульса истекающих газов равна нулю:

$$\vec{P}_2 = m\vec{v} + M\vec{u}, \tag{50}$$

Из (50) имеем: $M\vec{u} = -m\vec{v}$.

Откуда модуль скорости ракеты равен:

$$u = \frac{mv}{M}, \tag{51}$$

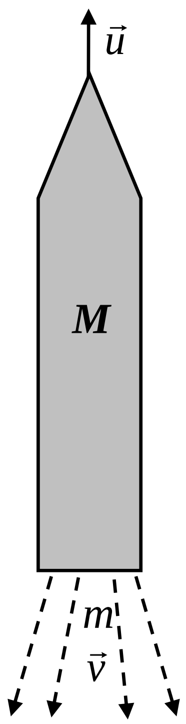


Рис.12

где v − скорость истечения газов, m - масса выброшенных газов, M − масса ракеты. Ракета движется в результате взаимодействия с газами, образующимися при сгорании топлива. Формула (51) справедлива только при условии небольшого изменения массы ракеты в результате работы её двигателя.

1.3. Работа и энергия. Закон сохранения механической энергии

Работой A постоянной силы $\vec{F}$ называется скалярная физическая величина равная произведению модулей силы и перемещения, умноженному на косинус угла между векторами силы и перемещения:

$$A = |\vec{F}||\vec{S}|\cos\alpha . \tag{52}$$

Размерность работы в СИ $[A] = Дж$ (Джоуль).

Работа, совершенная силой, положительна, если угол α между вектором силы и вектором перемещения $\alpha < 90°$. При значениях угла $90° < \alpha \le 180°$ работа силы отрицательна. Если направления силы и перемещения совпадают, то работа равна произведению модуля силы на модуль перемещения:

$$A = |\vec{F}||\vec{S}| . \tag{53}$$

Если сила и перемещение перпендикулярны друг другу, то работа силы равна нулю.

Потенциальными называются силы, работа которых зависит только от начального и конечного положения тела (материальной точки) и не зависит от формы траектории. При перемещении по замкнутой траектории работа потенциальной силы всегда равна нулю. К потенциальным силам, рассматриваемым в разделе «Механика» относятся силы тяготения, силы упругости.

Работа силы тяжести при перемещении по горизонтальной плоскости равна нулю. Вся работа, которую приходится затрачивать при перемещении, это работа сил по преодолению трения и сопротивления. Однако несколько иначе дело обстоит с пешеходом. При ходьбе по горизонтальному пути центр тяжести тела человека не остается на одной и той же высоте, а при каждом шаге поднимается и затем опускается. Поэтому при ходьбе даже по горизонтальному пути совершается работа против силы тяжести.

Если, несмотря на действие силы тяжести, перемещение точки приложения силы не происходит, то сила никакой работы не совершает, например, если груз неподвижно висит на подвесе.

При опускании или падении груза эта сила совершает работу равную:

$$A = mg\Delta h, \tag{54}$$

где Δh – расстояние, на которое сместился груз. При движении по наклонной плоскости, по какому бы пути не двигался груз, сила тяжести совершает работу равную (54), где Δh – расстояние по вертикали, на которое сместился груз.

Работа силы упругости при изменении деформации пружины от значения x_1 до значения x_2 составляет:

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \tag{55}$$

где k- коэффициент упругости.

Работа сил трения и сопротивления, которые относятся к непотенциальным силам, зависит от формы траектории. Работа силы трения (сопротивления) всегда отрицательна (сила, действующая на тело, и перемещение тела направлены в противоположные стороны и угол между ними равен 180°, а cos180°= -1) и равна:

$$A = -F_{mp.}S. \tag{56}$$

Мощность N – это скалярная физическая величина, равная работе A, совершенной силой за единицу времени. Средняя мощность N – это скалярная физическая величина, равная отношению работы A, совершенной силой за промежуток времени Δt, к величине этого промежутка

$$N_{cp.} = \frac{A}{\Delta t}. \tag{57}$$

Мощность силы $\vec{F}$, которая действует на тело, движущееся со скоростью $\vec{v}$ равна:

$$N = |\vec{F}||\vec{v}|\cos\alpha, \tag{58}$$

где α - угол между вектором силы $\vec{F}$ и вектором скорости $\vec{v}$.

Размерность мощности в СИ $[N] = Вт$ (Ватт).

Энергия – это скалярная физическая величина, характеризующая способность тела (или системы взаимодействующих тел) совершать работу.

Размерность энергии в СИ $[E] = Дж$ (Джоуль).

Кинетическая энергия материальной точки или тела является мерой их механического движения, зависящей от скоростей их движения в данной инерциальной системе отсчета. Энергию, которой обладает тело потому, что движется, называют кинетической энергией. Кинетическая энергия материальной точки (поступательно движущегося твердого тела) с массой m, движущейся в инерциальной системе отсчета со скоростью $\vec{v}$ равна:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{59}$$

При поступательном движении твердого тела со скоростью $\vec{v}$ движутся все точки тела, например, центр тяжести. Значения кинетической энергии не могут быть отрицательными.

Связь работы с изменением кинетической энергии. Связь между работой, совершенной равнодействующей всех сил, приложенных к телу, и изменением кинетической энергии тела имеет следующий вид:

$$A = \Delta T = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{60}$$

Если равнодействующая всех сил, приложенных к телу, совершает положительную работу, то скорость тела увеличивается. В этом случае сила и ускорение имеют направление то же что и скорость, увеличивая её. Если же сила совершает отрицательную работу, то ускорение направлено против скорости и скорость тела убывает.

Из (54) и (55) следует, что в обоих случаях работа равна разности некоторой физической величины, зависящей от начального и конечного положения тела, но не от формы его траектории. Данная физическая величина называется потенциальной энергией U.

Потенциальная энергия – часть механической энергии тела, зависящая от взаимного расположения его частей и их положения во внешнем силовом поле. Во всех практических задачах интерес представляет разность значений потенциальной энергии, поэтому нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбирают произвольно. В связи с этим потенциальная энергия может быть положительной, отрицательной и равной нулю. Мерой изменения потенциальной энергии системы при её переходе из одного состояния в другое является работа потенциальных сил, осуществляющих взаимодействие между частицами (частями системы).

Убыль потенциальной энергии системы равна работе потенциальных сил:

$$A = U_1 - U_2 = - \Delta U, \tag{61}$$

где U_1 – потенциальная энергия в начальном состоянии, U_2 – потенциальная энергия в конечном состоянии. Работа сил тяготения и сил упругости с одной стороны равна увеличению кинетической энергии системы, а с другой уменьшению потенциальной энергии системы.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тела массой m с Землей для высоты, которая значительно меньше чем радиус Земли ($h \ll R_з$), если нуль отсчета потенциальной энергии выбран при h=0, где h - высота над поверхностью Земли, равна:

$$U=mgh. \tag{62}$$

Потенциальная энергия упругой деформации сжатой или растянутой пружины равна:

$$U = \frac{kx^2}{2}, \tag{63}$$

где k -коэффициент упругости, x-модуль вектора деформации. Потенциальная энергия недеформированной пружины (x=0) равна нулю.

Полная механическая энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий: $E_{п.м.} = T + U$. Если система состоит из нескольких невзаимодействующих тел, то полная механическая энергия складывается из суммарных кинетических и потенциальных энергий всех тел, составляющих систему.

Закон сохранения механической энергии:

Полная механическая энергия тел, составляющих замкнутую систему и взаимодействующих между собой силами тяготения и силами упругости, остается постоянной:

$$E_{п.м.} = const. \qquad (64)$$

О превращении механической энергии

Если в системе помимо потенциальных сил (сил тяготения и упругости) действуют внутренние непотенциальные силы (силы трения, силы сопротивления), то полная механическая энергия системы не сохраняется и её изменение равно работе непотенциальных сил A':

$$\Delta E_{\text{п.м.}} = E_{\text{п.м.2}} - E_{\text{п.м.1}} = A'. \qquad (65)$$

Но работа непотенциальных сил всегда меньше нуля, поэтому полная механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют непотенциальные силы, всегда уменьшается, переходя в энергию теплового движения. При любых физических взаимодействиях энергия не возникает и не исчезает, а только превращается из одной формы в другую.

Если система незамкнута, т.е. на неё действуют внешние силы, то полная механическая энергия не сохраняется, а её изменение равно работе внешних сил $A_{\text{вн}}$:

$$\Delta E_{\text{п.м.}} = A_{\text{вн}}. \qquad (66)$$

1.4. Статика

Раздел механики, изучающий условия равновесия тел, называется статикой. Статика является частным случаем динамики.

Равновесие не вращающегося тела возможно только при равенстве нулю равнодействующей всех сил, приложенных к телу:

$$\vec{F}_p = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \qquad (67)$$

т.е. если геометрическая сумма всех сил, приложенных к телу равна нулю. В этом случае тело движется поступательно равномерно прямолинейно или покоится (не вращается).

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая линия, соединяющая любые точки тела, сохраняет свое направление в пространстве. При поступательном движении тело движется, не поворачиваясь, и перемещение всех точек, за какой-либо промежуток времени одинаково. При рассмотрении поступательного движения достаточно знать, как движется одна точка тела. Поступательное движение твердого тела описывается движением его центра масс, т.е. сводится к описанию движения материальной точки с помощью второго закона Ньютона.

Равновесие тела, имеющего ось вращения.

Вращательным движением называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются концентрическими окружностями с центрами на одной прямой, называемой осью вращения.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси вращения (ось проходит через точку O)называется физическая величина, равная произведению модуля силы F на плечо d (d - кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы):

$$M = Fd. \qquad (68)$$

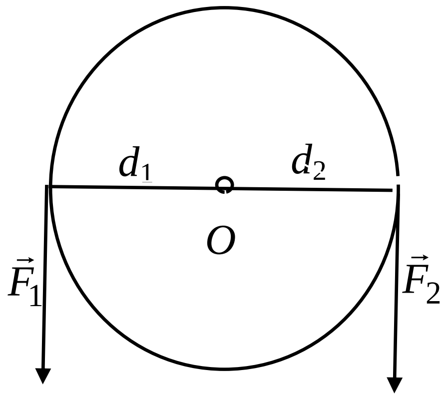


Рис. 13

Ось вращения, проходящая через точку O (см. рис.14), лежит в плоскости перпендикулярной силам $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

Положительный знак приписывается моментам сил, вызывающих вращение тела по часовой стрелке. Правило моментов (условие равновесия тела, имеющего ось вращения) формулируется следующим образом:

Тело, имеющее неподвижную ось вращения, находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно этой оси равна нулю:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0 . \qquad (69)$$

Если две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ по отдельности вызывают вращение тела в противоположных направлениях, то при их одновременном действии тело находится в равновесии при выполнении следующего условия:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2. \qquad (70)$$

В соотношении (70) под d_1 и d_2 понимают кратчайшие расстояния от оси вращения до линии действия соответствующей силы, причем считается, что эти силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения (если силы ориентированы иначе, надо использовать их проекции на указанную плоскость).

1.5. Элементы гидростатики.

Физическую величину, равную отношению модуля силы F, действующей перпендикулярно поверхности, к площади S этой поверхности называют давлением:

$$P = \frac{F}{S}. \qquad (71)$$

Размерность давления в СИ [P]=Па (Паскаль).

Закон Паскаля. Все жидкости и газы передают оказываемое на них давление одинаково по всем направлениям. На основе закона Паскаля работает **гидравлический пресс** (см. рис.14). Основными частями гидравлического пресса являются два цилиндра с поршнями, в цилиндрах под поршнями находится минеральное масло. Цилиндры соединены между собой трубкой, по которой масло может протекать из одного цилиндра в другой. Поршни плотно закрывают цилиндры. Их площади S_1, S_2 существенно различаются между собой. После действия силы $\vec{F}_1$ на поршень узкого цилиндра, в жидкости под поршнем создается давление P, равное $P = \frac{F_1}{S_1}$. По закону Паскаля такое же

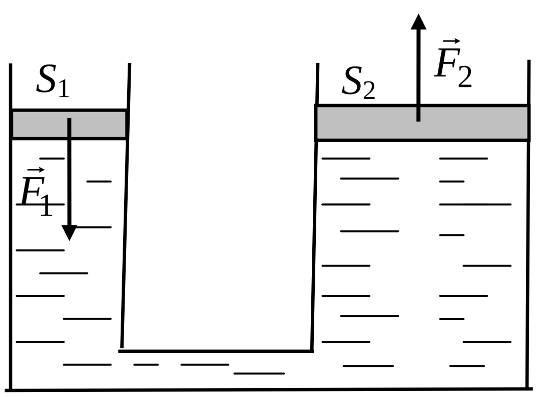


Рис. 14

давление будет внутри жидкости в широком цилиндре, в результате чего на поршень широкого цилиндра действует сила $\vec{F}_2$, равная: $F_2 = PS_2 = F_1 \dfrac{S_2}{S_1}$, откуда:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}. \qquad (72)$$

Гидравлический пресс дает выигрыш в силе во столько раз, во сколько раз площадь его большего поршня больше, чем площадь малого поршня.

Гидростатическое давление. Благодаря тому, что на столб жидкости действует сила тяжести, верхние слои жидкости оказывают давление на слои, расположенные ниже, а также на дно сосуда. Давление, зависящее от глубины h под поверхностью жидкости (на поверхности жидкости h=0), называется гидростатическим:

$$P = P_0 + \rho g h, \qquad (73)$$

где ρ − плотность жидкости, P_0 – давление над поверхностью жидкости.

Такое же давление, в соответствии с законом Паскаля, оказывает жидкость и на боковые стенки сосуда на глубине h.

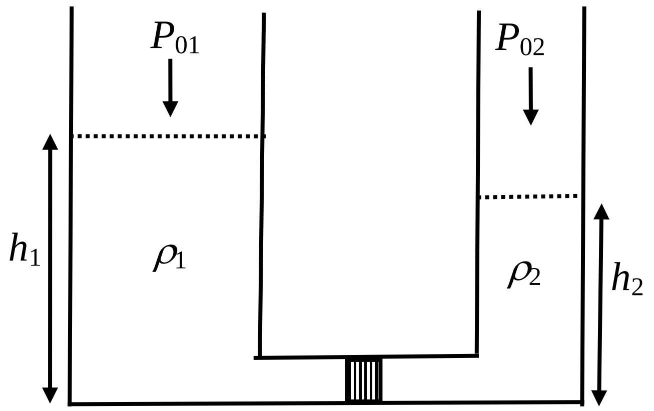


Рис. 15

Закон сообщающихся сосудов. В сообщающиеся сосуды (см. рис. 15) налиты две разнородные жидкости, плотности которых ρ_1 ρ_2. Чтобы жидкости не смешивались, они разделены свободно перемещающимся поршнем. Равновесию столбов жидкостей и поршня соответствует условие: $P_{01}+\rho_1 g h_1 = P_{02}+\rho_2 g h_2$. Если сосуды открыты, то $P_{01}= P_{02}$ или $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$. Если в сообщающихся сосудах находится однородная жидкость $\rho_1 = \rho_2$, то её свободная поверхность во всех сосудах располагается на одном и том же уровне ($h_1 = h_2$). Закон сообщающихся сосудов формулируется следующим образом: Высоты столбов разнородных жидкостей в сообщающихся сосудах обратно пропорциональны плотностям этих жидкостей

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{74}$$

Архимедова сила (выталкивающая сила) действует на тело, погруженное в жидкость или газ, т.к. давление на верхнюю и нижнюю поверхность тела разные. Сила, выталкивающая тело, погруженное в жидкость (или газ), равна весу жидкости (или газа), вытесненной телом:

$$F_A = \rho V g\ , \tag{75}$$

где ρ - плотность жидкости (или газа), а V − объем части тела, погруженной в жидкость или газ. На тело находящееся в жидкости или газе действуют две противоположно направленные силы: сила тяжести и Архимедова сила, поэтому вес тела при взвешивании в жидкости или газе оказывается меньше веса, измеренного в вакууме.

Условие плавания тела: Если Архимедова сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ, по модулю больше или равна силе тяжести, действующей на тело

$$F_A \geq mg, \tag{76}$$

то тело плавает в жидкости или газе (рис.16).

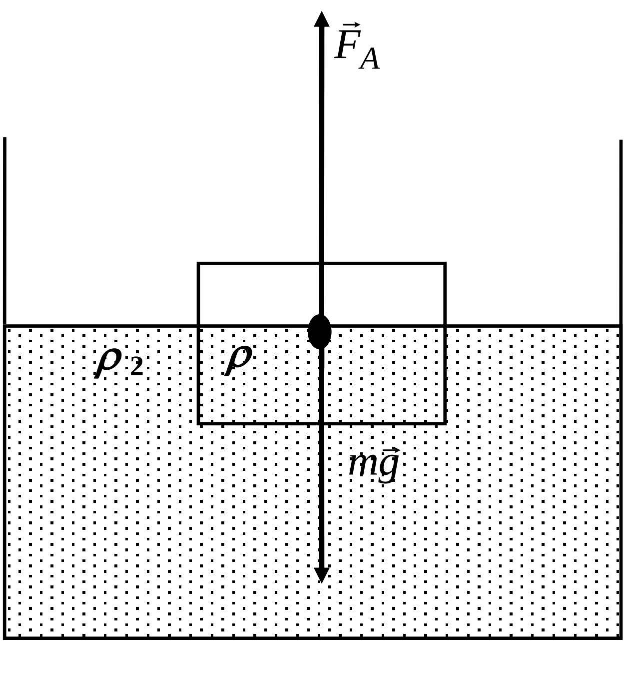


Рис. 16

Если Архимедова сила больше по модулю силы тяжести (в этом случае плотность жидкости ρ_2 больше средней плотности погруженного тела ρ, например дерево в воде), то тело всплывает; если Архимедова сила по модулю равна силе тяжести, то тело может находиться в равновесии на любой глубине. Если же Архимедова сила по модулю меньше силы тяжести, то тело тонет.

1.6. Колебательное движение

Периодическими колебаниями называются движения, при которых значения физических величин, изменяющихся в процессе движений, повторяются через равные промежутки времени.

Периодом T колебаний называется тот наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательное движение. За время, равное периоду, совершается одно полное колебание.

Частотой n периодических колебаний называется физическая величина равная числу полных колебаний, совершаемых за 1 секунду. Частота n – физическая величина обратная периоду:

$$n = \frac{1}{T}. \qquad (77)$$

Круговая (циклическая) частота ω – физическая величина, определяющая число колебаний, происходящих за 2π секунд. Частота n и период колебаний T связаны с круговой частотой ω следующим образом:

$$n = \frac{\omega}{2\pi}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (78)$$

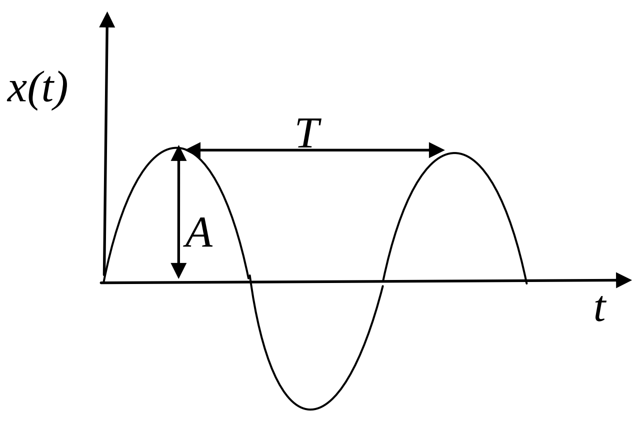


Рис. 17

Простейшим типом периодических колебаний являются гармонические колебания.

Гармоническими называются колебания, при которых отклонение от положения равновесия x изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0), \qquad 79)$$

где A- амплитуда колебаний, ω – круговая частота, $\varphi =(\omega t +\varphi_0)$- фаза колебаний, φ_0 -фаза в начальный момент времени (начальная фаза) (на рис.17 φ_0=0).

Амплитуда колебаний A равна наибольшему абсолютному отклонению от положения равновесия физической величины x.

Фаза колебаний φ определяет значение x (отклонение от положения равновесия) в данный момент времени.

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях изменяются с течением времени по следующим законам:

$$v(t)=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad (80)$$

$$a(t)= - A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0) \qquad (81)$$

Примеры колебательных систем

1. **Математический маятник** – это материальная точка массы M, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити к неподвижной точке O и совершающая движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (см. рис.18). Математический маятник совершает гармонические колебания, если угол отклонения φ нити от вертикали мал ($\varphi \le 6^o$). Период колебаний математического маятника равен:

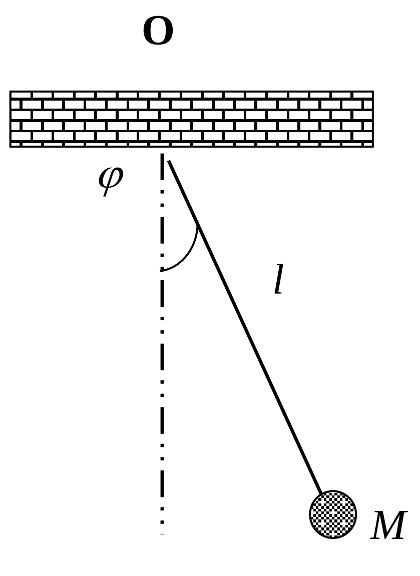


Рис.18.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (82)$$

где l – длина нити, g – ускорение свободного падения. Положением равновесия математического маятника называется положение, соответствующее вертикальному положению нити маятника.

2. **Пружинный маятник** – это тело массы m, закрепленное на пружинке жесткостью k (см. рис.19). Пружинный маятник совершает гармонические колебания, если сила упругости пружины удовлетворяет закону Гука ($F = - kx$, где x – смещение от поло-

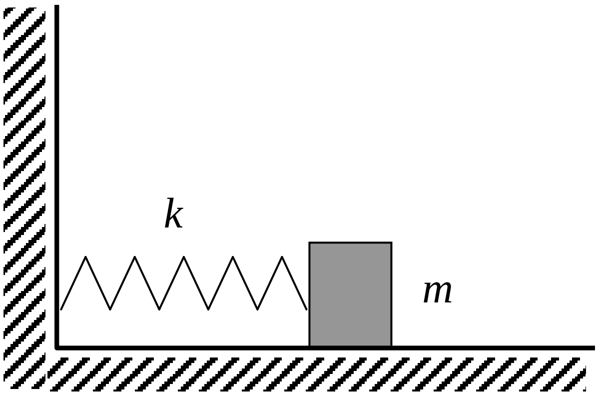


Рис. 19

жения равновесия). Период колебаний и круговая частота пружинного маятника, соответственно, равны:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad w = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (83)$$

Энергия гармонических колебаний. При колебательном движении происходит переход потенциальной энергии в кинетическую энергию и наоборот.

При отклонении математического маятника от положения равновесия его потенциальная энергия в поле тяготения увеличивается, так как увеличивается расстояние от поверхности Земли. При движении к положению равновесия скорость маятника возрастает, его кинетическая энергия увеличивается. Увеличение кинетической энергии происходит за счет уменьшения потенциальной энергии. В положении равновесия кинетическая энергия максимальна. При максимальном отклонении от положения равновесия кинетическая энергия равна нулю.

Если вывести пружинный маятник из положения равновесия, то маятник начнет совершать колебания под действием силы упругости, направленной в сторону, противоположную смещению маятника. При максимальных смещениях пружинного маятника его скорость равна нулю. В момент прохождения маятником положения равновесия ($x = 0$) его скорость максимальна.

Кинетическая энергия пружинного маятника массой m равна:

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0). \qquad (84)$$

Потенциальная энергия такого пружинного маятника равна:

$$E_{пот} = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0). \qquad (85)$$

Легко убедиться, что полная энергия E гармонических колебаний системы не зависит от времени $E = E_{кин} + E_{пот} = const$.

Упругой волной называется процесс распространения колебаний в упругой среде. Среда называется упругой, если между её частицами существуют силы взаимодействия, препятствующие какой-либо деформации этой среды. Каждая из частиц среды при этом колеблется около положения устойчивого равновесия, волновые процессы не связаны с переносом вещества.

Если колебания частиц в волне происходят в направлении распространения волны, то волна называется продольной. Если колебания частиц происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, то волна называется поперечной.

Скоростью распространения волны называется физическая величина, численно равная расстоянию, которое проходит любая точка волновой поверхности за единицу времени.

Длина волны λ − расстояние между двумя ближайшими точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе ($\Delta\varphi=2\pi$) (см. рис.20), иначе – расстояние, на которое распространяется фронт волны за один период колебаний, происходящих в источнике волны:

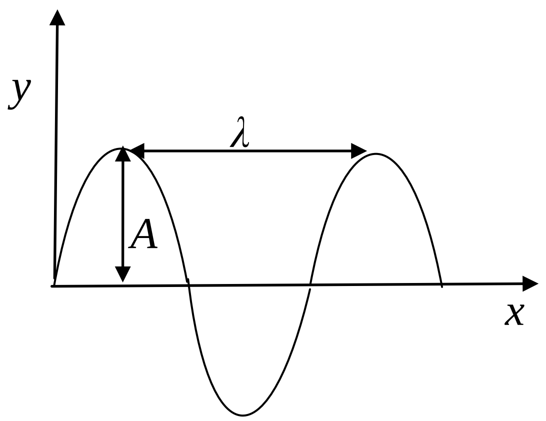


Рис. 20

$$\lambda = v \cdot T, \tag{86}$$

где v – скорость распространения волны. Колебания частиц среды, отстоящих на расстоянии d, происходят с запаздыванием по времени Δt и по фазе $\Delta\varphi$:

$$\Delta t = \frac{d}{v}, \qquad \Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}. \tag{87}$$

Частота колебаний зависит от свойств источника волн. Скорость распространения волны и длина волны зависят от свойств среды.

Звуковые волны – это продольные волны в интервале частот от 20 до 20000 Гц (акустические колебания таких частот воспринимаются человеческим ухом). Скорость распространения звука в воздухе при 0°С составляет 331 м/с. Громкость звука соответствует амплитуде акустических колебаний. Высота звука (тона) зависит от частоты звуковых колебаний: чем выше частота, тем выше тон.

2. ЗАДАЧИ

2.1. Задачи с решениями

2.1.1.Условия задач

1. Приборы, установленные на берегу, показывают, что ветер дует с юго-запада, а величина скорости ветра $V = 5$ *м/с*. Что покажут аналогичные приборы, установленные на корабле, идущем на запад со скоростью $U = 36$ *км/ч*?

2. Тело, имея некоторую начальную скорость, движется прямолинейно и равноускоренно. За время $t_0 = 2c$ оно прошло путь $s = 4$ *м*, причем его скорость увеличилась в *5* раз. Найдите ускорение тела.

3. Одно тело свободно падает с высоты $h_0 = 50$ *м*, другое бросают с земной поверхности вверх с некоторой начальной скоростью одновременно с началом падения первого. Оба тела встречаются на высоте $H = 10$ *м*. Какова начальная скорость второго тела?

4. Мальчик бросает мяч вверх под углом $70°$ к горизонту и попадает в открытое окно, которое расположено на *9.6 м* выше его плеча. Мяч влетает в окно горизонтально. С какой скоростью вылетел мяч из руки?

5. Тело брошено под углом к горизонту с начальной скоростью $V_0 = 10$ *м/с*. Найти скорость тела в момент, когда оно оказалось на высоте $h = 3$ *м*.

6. С самолета, летящего горизонтально со скоростью $V = 180$ *км/час* на малой высоте $h = 80$ *м*, необходимо сбросить груз в автомобиль, движущийся по автостраде со скоростью $u = 135$ *км/час*. Под каким углом к горизонту должен быть виден автомобиль из кабины самолета при сбрасывании груза?

7. Под каким углом к горизонту надо бросить тело, чтобы высота подъема была бы равна дальности полета?

8. Муравей бежит от муравейника по прямой так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке А на расстоянии $l_1 = 1$ *м* от центра муравейника, его скорость равна $V_1 = 2$ *м/с*. За какое время муравей добежит от точки А до точки В, которая находится на расстоянии $l_2 = 2$ *м* от центра муравейника?

9. Цилиндрический каток радиуса R помещен между двумя рейками. Рейки движутся со скоростями V_1 и V_2. Определить угловую скорость ω вращения катка и скорость V_c его центра масс. Каток не проскальзывает.

10. К концам невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, прикреплены два груза массой *8 кг* и *2 кг.* Найдите скорость грузов спустя *2 с* после начала движения.

11. Угол наклона ленты подъемника к горизонту $\alpha = 5°$. Коэффициент трения между грузом и лентой $k = 0.2$. При каком максимальном ускорении ленты груз не будет скользить по ленте подъемника? Лента не прогибается.

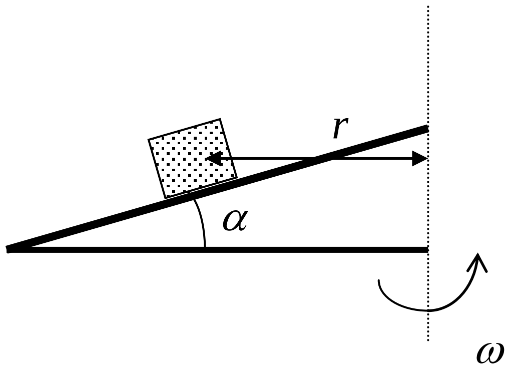
12. Тело скользит без трения с высоты *19,6 м* по наклонной плоскости, образующей угол $30°$ с горизонтом. У основания наклонной плоскости находится стенка, расположенная перпендикулярно наклонной плоскости. Тело отскакивает от стенки по закону абсолютно упругого удара. Найдите время после начала движения, через которое тело вернется в исходную точку.

13. С какой максимальной скоростью может ехать по горизонтальной дороге мотоциклист, описывая дугу окружности радиусом *90 м*, если коэффициент трения скольжения равен *0,4*? На какой угол от вертикали он должен при этом отклониться?

14. Монета находится на расстоянии *12 см* от оси вращающегося диска, скорость вращения которого можно менять. Когда частота вращения диска медленно увеличивается, монета покоится на диске до тех пор, пока частота вращения диска не станет равной *58 об/мин*, после чего монета начинает двигаться к краю диска. Чему равен коэффициент трения между монетой и диском?

15. Полусферическая чаша радиусом *20 см* вращается вокруг вертикальной оси с частотой $\nu=2\ c^{-1}$. В чаше находится маленький шарик, вращающийся вместе с ней. Определить угол между радиусом, проведенным в точку нахождения шарика, и вертикалью.

16. На наклонной плоскости с углом наклона α лежит тело (см. рис.) Плоскость равномерно вращается вокруг вертикальной оси. Расстояние от оси вращения до тела равно r. Наименьший коэффициент трения, при котором тело удерживается на вращающейся наклонной плоскости, равен μ. Найти угловую скорость вращения ω.



17.На мяч массой $m=0,3$ *кг*, брошенный под углом $\alpha=30°$ к горизонту с начальной скоростью $V_0=30$ *м/с*, в горизонтальном направлении действует с постоянной силой $F=1H$ встречный ветер. Какова дальность полета мяча?

18. Один из спутников Юпитера, открытый Галилеем, имеет период обращения $1,44\cdot10^6$ с и отстоит от Юпитера в среднем на расстояние $1,9\cdot10^9$ м. Используя эти данные, вычислите массу Юпитера. Гравитационная постоянная G=6,67$\cdot10^{-11}$*м*^{3}/(*кг.с*^{2}).

19. Подлетев к неизвестной планете, космонавты придали своему кораблю скорость $V=11$ *км/с.* Эта скорость обеспечила кораблю полет по круговой траектории радиусом $r=9110$ *км*. Каково ускорение свободного падения g_0 у поверхности планеты, если ее радиус $R=8900$ *км*?

20. На экваторе некоторой планеты, имеющей форму шара, покоящиеся относительно планеты тела весят в *1.2* раза меньше, чем на полюсе. Средняя плотность вещества планеты $\rho=3$

10^3 *кг/м*^{3}. Каков период обращения планеты вокруг своей оси? Гравитационная постоянная $G = 6.67\ 10^{-11}$ *м*^{3}*/кг с*^{2}.

21. Радиоактивное покоящееся ядро распадается на другое ядро и элементарные частицы – электрон (*е*) и нейтрино (ν). Последние две частицы испускаются под прямым углом друг к другу и имеют импульсы соответственно $8{,}6 \cdot 10^{-23}$ и $6{,}2 \cdot 10^{-23}$ *(кг·м)/с.* Какова величина и направление импульса нового ядра?

22. Лодка массой *150 кг* и длиной *2 м* покоится на поверхности пруда на расстоянии *0,7 м* от берега и обращена к нему носом. Человек массой *70 кг*, сидевший в лодке, переходит с ее носа на корму. Причалит ли лодка к берегу за время движения по ней человека? Ответ подтвердить расчетами.

23. Лягушка массой m сидит на конце доски массой M и длиной l. Доска плавает на поверхности пруда. Лягушка прыгает под углом α к горизонту вдоль доски. Какой должна быть скорость лягушки V, чтобы она оказалась на другом конце доски?

24. Стальной шарик массой *1 кг* свободно падает с высоты *1 м* на стальную плиту и отскакивает от нее. При отскоке его скорость уменьшается в *2* раза. Определите высоту, на которую поднимется шарик, тепло, выделившееся при соударении, и импульс, переданный шариком плите при одном отскоке.

25. Шарик массой *10 г*, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити, отклонили так, что нить заняла горизонтальное положение, и отпустили. Чему будет равно натяжение нити при прохождении шариком положения равновесия?

26. Тело массы *1 кг* соскальзывает с наклонной плоскости длиной *22 м*, которая образует с горизонтом угол 30^o. Начальная скорость тела равна нулю. Скорость тела у основания наклонной плоскости равна *4 м/с*. Какое количество тепла выделилось при трении тела о плоскость?

27. Тело массой *3 кг*, двигавшееся со скоростью *4 м/с,* ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и абсолютно неупругим, найдите количество тепла, выделившееся в результате удара.

28. Тело массой $m= 2$ *кг* соскальзывает с горки высотой $H= 4.5$ *м* по наклонной плоскости, плавно переходящей в цилиндрическую поверхность радиуса $R= 2$*м*. Определить силу давления на цилиндрическую поверхности в верхней ее точке, если работа сил трения при движении тела до этой точки равна численно равна $A=40$ *Дж.*

29. Тело массой m брошено под углом к горизонту. За время полета его импульс изменился на $\Delta p=10$ *кг м/с*. Определить наибольшую высоту подъема тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

30. Шарик, прикрепленный на нити длиной l, отвели в горизонтальное положение и отпустили. На какую максимальную высоту h_{max} сможет подняться шарик, если при прохождении шариком положения равновесия нить налетает на гвоздь, находящийся на расстоянии, равном половине ее длине, ниже точки подвеса.

31. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть на другую грань сплошной железный куб, масса которого равна *200 кг*. Плотность железа *7800 кг/м*^{3}.

32. Груз массой *0,5 кг* подвешен к пружине жесткостью *50 Н/м*, которая прикреплена к потолку. Груз поднимают до положения, при котором пружина не растянута, и отпускают. Какой максимальной скорости достигнет груз при движении?

33. Однородный стержень массы $M=3$ *кг* и длины $L=1$ *м* подвешен за концы на двух пружинах. Обе пружины в ненагруженном состоянии имеют одинаковую длину, но левая пружина имеет коэффициент жесткости в $n=1,5$ раза больше правой. На каком расстоянии от левого конца стержня надо положить груз массы $m=1$ *кг*, чтобы стержень принял горизонтальное положение?

34. Цилиндрический сосуд заполнен двумя несмешивающимися жидкостями с плотностями $\rho_1=1$ *г/см*^{3} и $\rho_2=2$ *г/см*^{3}. В сосуд погружают куб с длиной ребра $L=10$ *см*. Найти глубину погружения куба в жидкость с плотностью ρ_2, если плотность вещества куба равна $\rho=1,5$ *г/см*^{3}.

35. Какой минимальный свинцовый груз нужно подвесить на нити к куску пробки массой *1 кг*, чтобы пробка и груз полностью погрузились в воду? Чему будет равна при этом сила натяжения нити? Плотность пробки $0{,}5\cdot 10^3$ *кг/м*^{3}, свинца − $11{,}1\cdot 10^3$ *кг/м*^{3}.

36. Стеклянный шарик объемом *0,2 см*^{3} равномерно падает в воде. Какое количество тепла выделится при перемещении шарика на расстояние *6 м*? Плотность стекла *2500 кг/м*^{3}. Энергией движения жидкости можно пренебречь.

37. Маятник состоит из маленького шарика массой $m=100$, подвешенного на невесомой нерастяжимой нити длиной l = *50 см*. Определить период колебаний маятника и энергию, которой он обладает, если наибольший угол его отклонения от положения равновесия составляет *15°*.

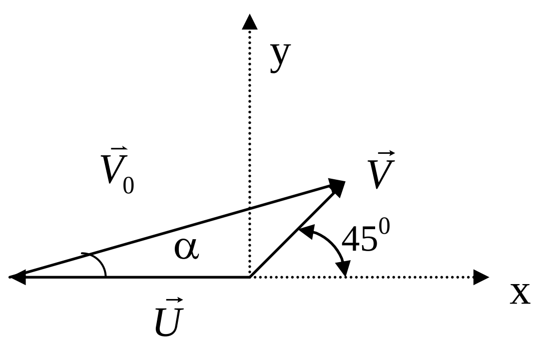
38. На гладком горизонтальном столе лежит кубик массой *1 кг*, прикрепленный к стене пружиной жесткостью *100 Н/м*. В кубик попадает и застревает в нем горизонтально летящая со скоростью *50 м/с* пуля массой *10 г*. Определите амплитуду колебаний кубика после соударения.

2.2.2. Решения задач

1. Для решения задачи воспользуемся законом сложения скоростей

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{V}_0 \ ,$$

где $\vec{V}_0$ − скорость ветра относительно корабля. В проекции на оси координат имеем (см. рис.):



$V_0 \cos\alpha = V\cos 45^0 + U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}V + U$,

$V_0 \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}V$, откуда получаем, разделив первое уравнение на второе:

$$ctg\alpha = 1 + \sqrt{2}(U/V).$$

Подставляя числовые данные, находим: $\alpha \approx 14{,}6^0$, $V \approx 14{,}3$м/с^2.
Ответ: $V \approx 14{,}3$м/с^2.

2. При прямолинейном равноускоренном движении координата x и скорость V тела меняются со временем следующим образом:

$$x = V_0 t + \frac{at^2}{2} \text{ и } V = V_0 + at,$$

где a - ускорение тела, V_0 − его начальная скорость (начальная координата тела $x_0=0$), откуда

$$s = V_0 t_0 + \frac{a t_0{}^2}{2}.$$

По условию задачи через время t_0 скорость тела увеличилась в 5 раз, т.е. до$5V_0$. Следовательно, из приведенных формул имеем

$$V_0 + at_0 = 5V_0.$$

Таким образом, мы получили систему уравнений с двумя неизвестными − a и V_0. Решая ее, получим, что ускорение $a = \frac{4}{3}\frac{s}{t_0{}^2}$.

После подстановки численных значений s и t_0 находим a=1,33 м/с^2.

Ответ: $a = \frac{4}{3}\frac{s}{t_0{}^2} = 1{,}33$ м/с^2.

3. При вертикальном движении в поле силы тяжести Земли изменение высоты h тела над поверхностью Земли в зависимости от времени t описывается уравнением

$$h = h_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где h_0 - начальная высота тела над Землей, V_0 - его начальная скорость. Термин “свободное падение” означает, что тело начинает падать с некоторой начальной высоты без начальной скорости (V_0=0). Таким образом , для первого тела имеем

$$h = h_0 - \frac{gt^2}{2},$$

Для второго тела, стартующего с поверхности Земли ($h_0 = 0$), получим

$$h = V_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Встреча тел означает, что они оказались на одной и той же высоте H через время t_1 после начала движения.

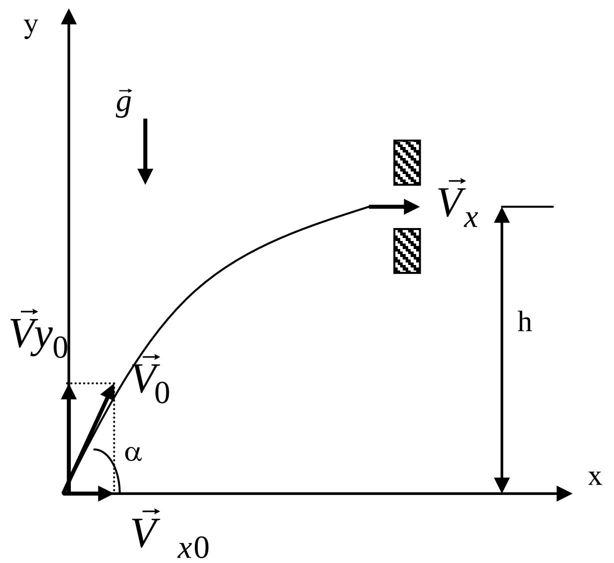
Выражая из второго уравнения $t = \sqrt{2(h_0 - H)/g}$ и, подставляя это значение в третье, получим:

$$V_0 = h_0\sqrt{\frac{g}{2(h_0 - H)}}.$$

После подстановки численных значений $V_0 \approx 17{,}8$ м/с.

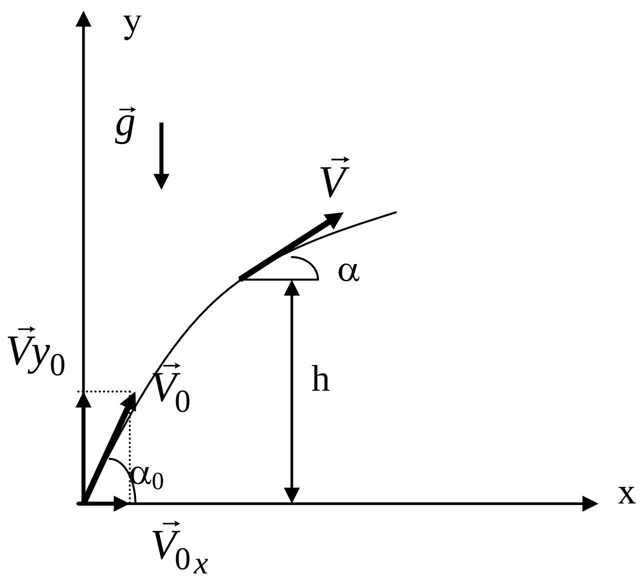
Ответ: $V_0 = h_0\sqrt{\frac{g}{2(h_0 - H)}} \approx 17{,}8$ м/с.

4. Поскольку мяч влетает в окно горизонтально (см. рис.), его скорость в направлении оси y равна нулю : $V_{0y} - gt = 0$, откуда время полета мяча до окна составляет $t = V_{0y}/g$. Следовательно, высота окна $h = V_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = \frac{V_{0y}^{\;2}}{2g}$, откуда $V_{0y} = \sqrt{2gh}$. Таким образом начальная скорость мяча равна $V_0 = \frac{V_{0y}}{\sin\alpha} \approx$ 14.6м/с.



Ответ: $V_0 = \frac{V_{0y}}{\sin\alpha} \approx$ 14.6м/с.

5. Поскольку в направлении оси y тело движется равнозамедленно с ускорением g, имеем:



$h = \dfrac{{V_{0y}}^2 - {V_y}^2}{2g}$, откуда

$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2gh$.

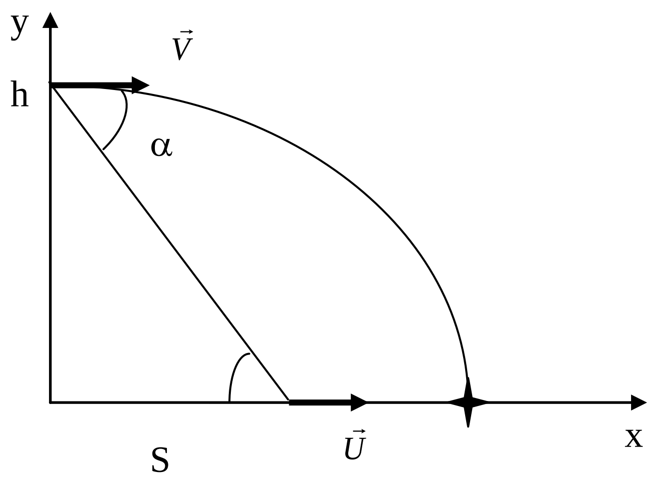
Поскольку в направлении x тело движется равномерно, т.е. $V_{0x}=V_x$, получаем для скорости на высоте h:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 = V_{ox}^2 + V_{oy}^2 - 2gh = $$
$$= V_0^2 - 2gh \; .$$

Тогда для скорости на высоте h окончательно имеем

$V = \sqrt{V_0^2 - 2gh} \approx 6.4$ м/с.

Ответ: $V = \sqrt{V_0^2 - 2gh} \approx 6.4$ м/с.



6. Запишем зависимость координаты от времени для автомобиля, принимая за начальную координату автомобиля x_0=s , где s – расстояние между самолетом и автомобилем в момент сбрасывания груза (см. рисунок):

$$x_a = s + ut \, .$$

Зависимости координат от времени для груза имеют вид:

$$y_\Gamma = h - gt^2/2 \; ,$$
$$x_\Gamma = Vt \, .$$

Во время попадания груза в автомобиль $y_г$=0, откуда имеем, используя второе уравнение:

$$t = \sqrt{2h/g}\ .$$

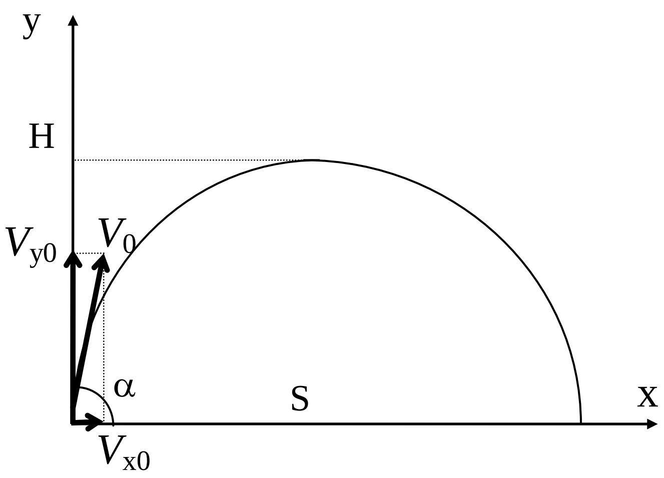
Если груз попал в автомобиль, то $x_а = x_г$, а $y_Г = 0$. Тогда из приведенных выше уравнений получаем:

$$tg\alpha = \frac{h}{s} = \frac{\sqrt{gh/2}}{V-u}.$$

После подстановки численных значений имеем $tg\alpha$=1.6.

Ответ: $tg\alpha = \dfrac{h}{s} = \dfrac{\sqrt{gh/2}}{V-u} = 1.6$.

7. Так же, как и в предыдущих задачах, брошенное тело будет участвовать в двух видах движения: по горизонтали (ось x) - равномерное движение со скоростью $V_{x0} = V_0\cos\alpha$, и по вертикали (ось y) - движение с ускорением свободного падения g и с начальной скоростью $V_{y0} = V_0\sin\alpha$ (см. рис.).



Зависимости координат от времени будут иметь вид:

по горизонтали $$x = V_{x0}t$$

и по вертикали $$y = V_{y0}t - \frac{gt^2}{2}.$$

При движении вдоль оси x скорость тела будет постоянной и равной $V_x = V_{x0}$, в то время как вдоль оси y она будет изменяться по закону

$$V_y = V_{y0} - gt.$$

Для нахождения высоты подъема H нужно учесть, что в верхней точке траектории скорость V_y обращается в ноль. Тогда из третьего уравнения следует, что время подъема тела

$t_n = \dfrac{V_{y0}}{g} = V_0 \sin\alpha / g$. Подставив полученное значение t_n во второе уравнение, найдем

$$H = \frac{V_0{}^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

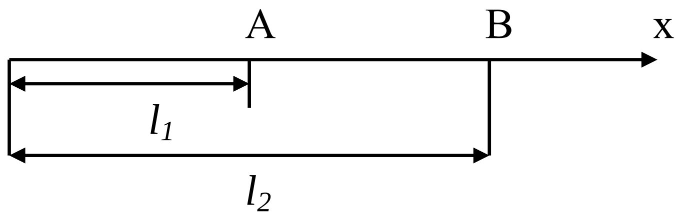
Дальность полета S определяется из условия, что в момент падения координата тела y обращается в ноль. Тогда, приравнивая $y=0$, получим, что полное время полета $T = 2V_0 \sin\alpha / g$. После подстановки T в первое уравнение дальность полета окажется равной

$$S = \frac{2V_0{}^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{V_0{}^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Приравнивая выражения для H и S, получим после преобразований, что $\mathrm{tg}\alpha=4$.

Ответ: $tg\alpha = 4$.

8. Направим ось координат x вдоль прямой, по которой бежит муравей (см. рисунок).



По условию задачи скорость муравья обратно пропорциональна координате:

$$V(x) = \frac{c}{x},$$

где коэффициент пропорциональности c можно определить, зная скорость муравья в точке A. Для скорости V_1 на расстоянии l_1 от муравейника (точка A) имеем: $V_1 = \dfrac{c}{l_1}$, откуда $c=V_1 l_1$. Тогда скорость муравья в точке B равна: $V_2 = \dfrac{c}{l_2} = \dfrac{V_1 l_1}{l_2} = 1$ *см/с*.

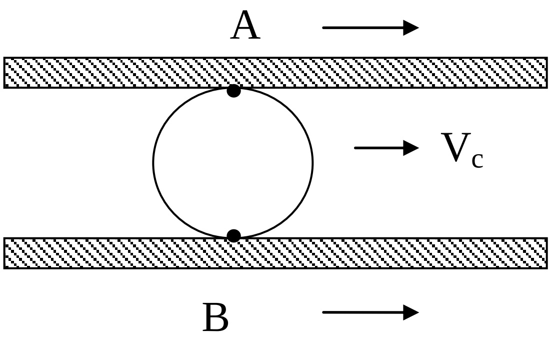
Поскольку скорость муравья обратно пропорциональна координате x, графиком зависимости $(1/V)(x)$ будет прямая линия.

Площадь под данной прямой – время t_{AB}, которое тратит муравей на путь от А к В . Тогда, используя формулу площади трапеции (площадь под графиком) , получаем:

$$t_{AB} = \frac{(1/V_1 + 1/V_2)(l_2 - l_1)}{2} = 75\ c.$$

Ответ: $t_{AB} = \frac{(1/V_1 + 1/V_2)(l_2 - l_1)}{2} = 75\ c.$

9. Поскольку каток движется без проскальзывания, скорости его точек А и В (см. рис.) совпадают со скоростями движения реек: $V_A=V_1$, а $V_B=V_2$.Скорость любой точки катка складывается из скорости поступательного движения его центра масс V_C и скорости вращения вокруг центра масс. Поэтому для верхней (А) и нижней (В) точек катка можно записать:

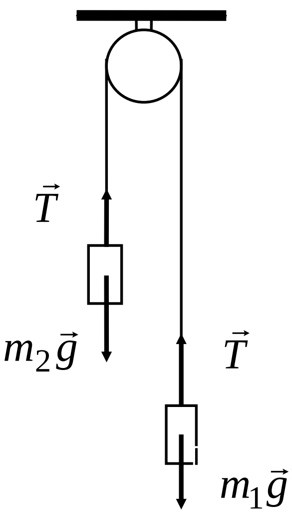


$$V_A=V_1= V_C+\omega R,$$
$$V_B=V_2= V_C -\omega R,$$

откуда $V_1+V_2=2V_C$, и для скорости центра масс имеем $V_C = \frac{V_1+V_2}{2}$.

Тогда $V_1 = \frac{V_1+V_2}{2} + \omega R$, а угловая скорость вращения катка равна $\omega = \frac{V_1 - V_2}{2R}$.

Ответ: $\omega = \frac{V_1 - V_2}{2R}$.



10. На каждый из грузов (см. рис.) действуют силы тяжести m_1g и m_2g, а также сила натяжения нити T, которая одинакова по обе стороны блока вследствие невесомости блока и нити. Силы, действующие на грузы, постоянны, и, следовательно, грузы движутся с постоянным ускорением, одинаковым для них обоих из-за нерастяжимости нити. Одинаковыми будут также и скорости грузов.

Для определения ускорения грузов запишем второй закон Ньютона для каждого из них:

$$m_1 a = m_1 g - T,$$

$$m_2 a = T - m_2 g.$$

В записанных выше уравнениях учтено, что первый груз (m_1=8 кг) движется вниз, а второй (m_2=2 кг) - вверх. Исключая из них силу *T*, получим для ускорения

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}.$$

Так как начальная скорость грузов $V_0 = 0$, зависимость их скорости от времени будет иметь вид

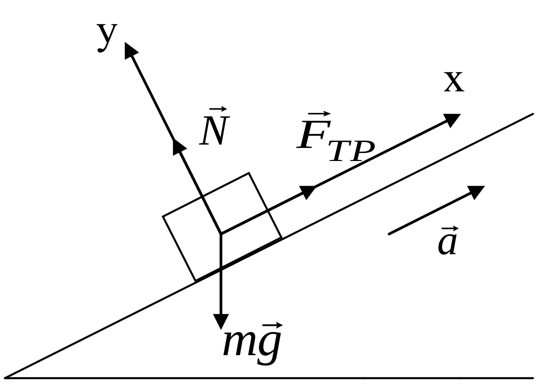
$$V=at$$

Из двух последних выражений получим $V = \dfrac{(m_1 - m_2)gt}{m_1 + m_2}$.

Используя численные данные, найдем, что через $t=2$ *с* скорость грузов $V=$ *12 м/с.*

Ответ: $V = \dfrac{(m_1 - m_2)gt}{m_1 + m_2} = 12$ *м/с.*

11. Силой, удерживающей груз в покое относительно ленты подъемника, является сила трения покоя, максимальное значение которой составляет: $F_{TP}=\mu N=\mu\, mg\cos\alpha$.



(Здесь мы воспользовались тем, что в проекции на ось *y* ускорение отсутствует и согласно рисунку $N=mg\cos\alpha$..)

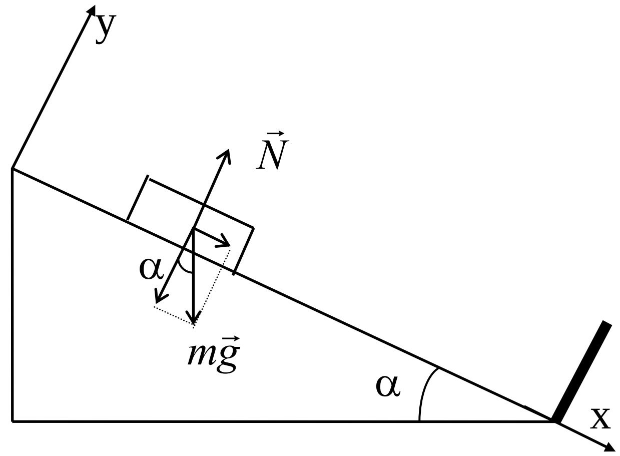
Поскольку груз движется вместе с лентой без проскальзывания, груз и лента имеют одинаковое ускорение, которое можно определить, записывая в проекции на ось x второй закон Ньютона для груза:

$$F_{TP} - mg\sin\alpha = ma.$$

Подставляя в последнее уравнение максимальное значение силы трения покоя, получим для максимального значения ускорения ленты, при котором груз не скользит, следующее выражение и числовое значение: $a = g(k\cos\alpha - \sin\alpha) \approx 1.1$ *м/с*^{2}.

Ответ: $a \approx 1.1$ *м/с*^{2}.

12. Расположим оси координат вдоль (ось x) и перпендикулярно (ось у) наклонной плоскости (см. рис.). На тело действуют сила тяжести mg, направленная вертикально вниз, и сила реакции опоры N, перпендикулярная наклонной плоскости.



Тело движется вдоль наклонной плоскости под действием составляющей силы тяжести $mg\sin\alpha$ (при отсутствии трения). Следовательно, согласно второму закону Ньютона ускорение тела $a = g\sin\alpha$.. При движении с вершины наклонной плоскости до стенки тело проходит расстояние $l = h/\sin\alpha$ без начальной скорости за время t_1, определяемое уравнением

$$l = \frac{at_1^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}}.$$

К моменту столкновения со стенкой тело приобретает скорость

$$V_1 = at_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha} = \sqrt{2gh}\ .$$

Так как при абсолютно упругом ударе скорость изменяет свое направление, не меняясь по модулю, при последующем движении вверх начальная скорость будет равна V_1. Через время t_2, когда тело достигнет вершины, оно пройдет тот же путь l. При этом сила, а значит и ускорение a тела, будет направлено в сторону, противоположную движению, то есть тело будет замедляться. Тогда

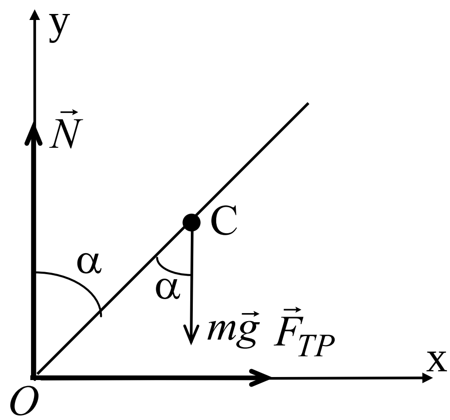
$$l = V_1 t_2 - \frac{g t_2^{\,2}}{2}.$$

Решение последнего уравнения дает единственное значение $t_2 = \sqrt{\dfrac{2h}{g\sin^2\alpha}}$, то есть $t_2 = t_1$.

Таким образом, полное время движения тела $t = t_1 + t_2 = 2t_1 = \dfrac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. После подстановки числовых значений получим $t=8c$.

Ответ: $t=\dfrac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 8$ *с.*

13. Как видно из рисунка, на мотоцикл, совершающий поворот на закруглении, действуют три силы: сила трения F_{TP} и реакции опоры N, приложенные к точке O касания колес мотоцикла с дорогой, а также сила тяжести mg, приложенная к центру тяжести мотоцикла C. Расстояние OC примем равным a.



Силы N и mg, направленные вертикально (ось y), равны между собой, так как движение в вертикальном направлении отсутствует. Сила F_{TP}, действующая по горизонтали (ось x), создает центростремительное ускорение $\dfrac{mV^2}{R}$, где m - масса мотоцикла, V - его скорость, R - радиус закругления дороги. Таким образом, можно записать, что $N = mg$,

$$F_{TP} = \frac{mV^2}{R}.$$

Вообще говоря, фигурирующая выше сила трения является силой трения покоя, так как точка O соприкосновения колеса с дорогой находится в покое (отсутствует пробуксовка - колесо не проскальзывает относительно дороги). Как известно, максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения, которая по определению равна

$$F_{TP} = \mu\ N$$

где μ=*0,4* - коэффициент трения.

Из выражения для силы трения видно, что максимальная величина F_{TP} достигается при максимальной скорости мотоцикла $V = V_{\max}$, получим, что

$$F_{TP} = \mu\ N = \mu\ mg = \frac{mV_{\max}^{\ 2}}{R},$$

откуда находим $V_{\max}$:

$$V_{\max} = \sqrt{\mu\ gR}.$$

Угол наклона мотоцикла к вертикали (см. рис.) определяется из условия равенства моментов сил F_{TP} и N относительно оси, проходящий перпендикулярно рисунку через центр тяжести C (момент силы mg относительно этой же оси равен нулю). Согласно рисунку плечо силы трения равно $a\cos\alpha$, а силы реакции опоры - $a\sin\alpha$. Следовательно, приравнивая моменты этих сил (напомним, что момент силы равен произведению силы на плечо), получим

$$F_{TP}a\cos\alpha = Na\sin\alpha.$$

Учитывая определение силы трения скольжения , имеем:

$$\mu = tg\alpha.$$

После подстановки численных данных найдем, что $V_{\max} \approx 19$ *м/с*, $tg\alpha = 0{,}4$.

Ответ : $V_{\max} = \sqrt{\mu\ gR} \approx 19$ *м/с*, $tg\alpha = 0{,}4$.

14. При вращении диска центростремительное ускорение монеты, пока она покоится относительно диска и вращается вместе с ним, создается силой трения покоя. По мере увеличения угловой скорости вращения ω сила трения покоя растет до своего максимального значения, равного силе трения скольжения. После этого начнется соскальзывание монеты с диска.

Так как в вертикальном направлении действуют силы mg и N, а движение отсутствует, то $N=mg$. Учитывая, что при вращении тела его линейная V и угловая ω скорости связаны соотношением

$$V = \omega R,$$

получим

$$F_{TP} = \mu mg = m\omega^2{}_{\max} R.$$

Угловая скорость вращения

$$\omega=2\pi\nu$$

где ν- частота вращения. Тогда, используя записанные соотношения, найдем

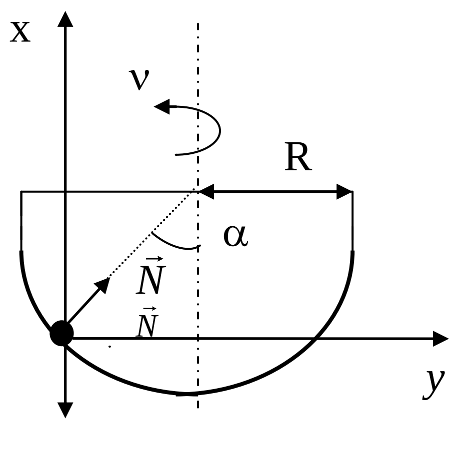
$$\mu = \frac{4\pi\ \nu^2{}_{\max} R}{g}.$$

Подстановка численных данных дает значение коэффициента трения μ=0,45. При этом учтено, что в системе СИ частота $\nu = 0{,}97\ c^{-1}$ и радиус $R= 0{,}12$ м.

Ответ: $\mu = \dfrac{4\pi\ \nu^2{}_{\max} R}{g}$=0,45.

15. Выбрав оси координат так, как указано на рисунке, запишем для проекций сил, действующих на шарик, следующие уравнения:

$$N \sin \alpha = ma\ , \quad N \cos\alpha = mg\ .$$



Поделив одно уравнение на другое, будем иметь:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{g}.$$

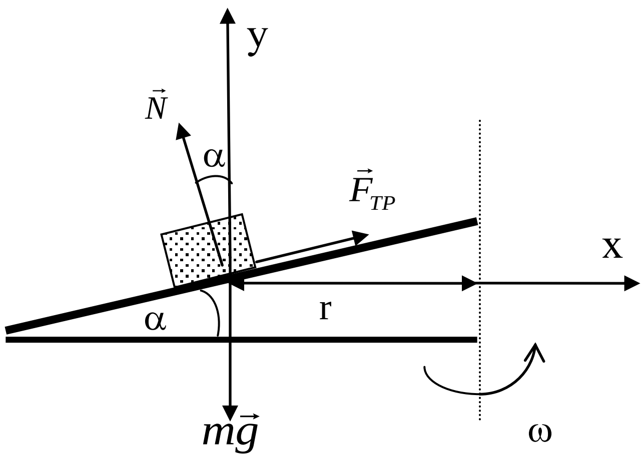
Поскольку радиус окружности, по которой вращается шарик, равен $r=R\sin\alpha$, а ускорение

$$a=\omega^2 r=4\pi^2\nu^2 r,$$

получим: $\alpha=arccos(g/4\pi^2\nu^2R)\approx 1.26$ *рад.*

Ответ: $=arccos(g/4\pi^2\nu^2R)\approx 1.26$ *рад.*

16. На рисунке указаны силы, действующие на тело. Для максимального значения силы трения покоя, удерживающей на наклонной плоскости тело, используем выражение: $F_{TP}=\mu N$. Запишем, учитывая, что тело неподвижно относительно наклонной плоскости, для проекций сил на выбранные оси координат (см. рис.) следующие уравнения:



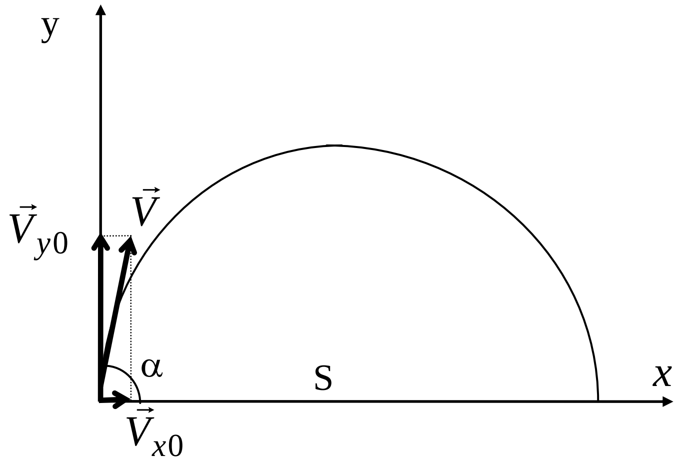
$$N(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)=mg\,,$$
$$N(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)=m\omega^2 r.$$

После деления второго уравнения на первое получим выражение для угловой скорости:

$$\omega=\sqrt{\frac{g(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)}{r(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}}\,.$$

Ответ: $\omega=\sqrt{\dfrac{g(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)}{r(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}}\,.$

17. Запишем зависимости от времени для координат тела, учитывая, что движение будет равнопеременным как вдоль x, так и вдоль y:



$$x=V_0\cos\alpha\ t-\frac{at^2}{2}\,,$$

$$y = V_0 \sin\alpha\ t - \frac{gt^2}{2}$$

Ускорение а, входящее в первое из уравнений, определим из второго закона Ньютона: $a=F/m$. Принимая во внимание, что в момент падения мяча координата $y=0$, найдем из зависимости $y(t)$ время полета мяча t_n:

$$t_n = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}.$$

После подстановки полученного выражения для времени полета в зависимость $x(t)$ получим выражение для дальности полета мяча S при встречном ветре:

$$S = V_0 \cos\alpha \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} - \frac{\frac{F}{m}\left(\frac{2V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2}{2} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{2FV_0^2 \sin^2\alpha}{mg^2}$$

При подстановке числовых значений получим для дальности полета мяча: $S \approx 64$ *м.*

Ответ: $S = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{2FV_0^2 \sin^2\alpha}{mg^2} \approx 64$ *м.*

18. При движении спутника вокруг планеты на него действует гравитационная сила (сила тяготения) F_T, величина которой определяется законом всемирного тяготения

$$F_T = G\frac{Mm}{R^2},$$

где M − масса планеты, m - масса спутника, R − расстояние между центрами планеты и спутника.

Центростремительное ускорение тела, движущегося по окружности радиуса R, равно

$$a_{.} = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R.$$

Запишем второй закон Ньютона для спутника, движущегося вокруг Юпитера

$$F_T = ma_{.}.$$

Подстановка в последнее соотношение выражений для силы тяготения и ускорения дает

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R,$$

откуда получим

$$M = 4\pi^2 \frac{R^3}{G\ T^2}\ .$$

После подстановки численных данных имеем $M \approx 2 \cdot 10^{27}$ *кг.*

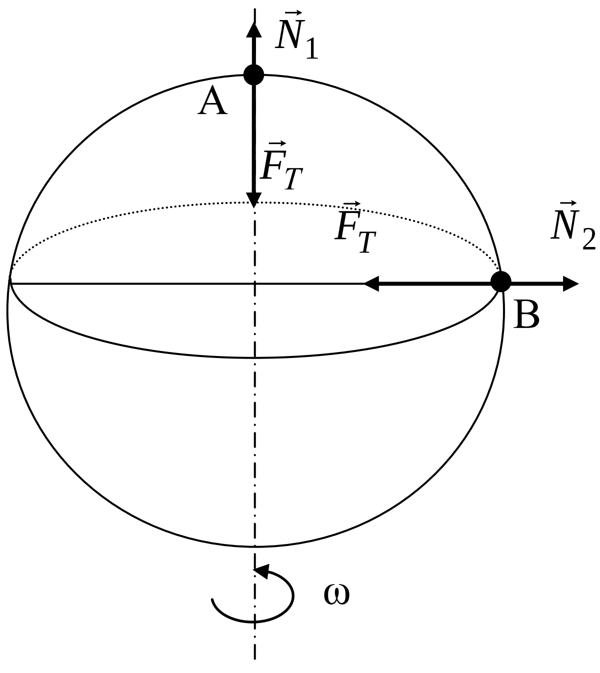
Ответ: $M = 4\pi^2 \dfrac{R^3}{G\ T^2} \approx 2 \cdot 10^{27}$ *кг.*

19. Используем, как и при решении предыдущей задачи, закон всемирного тяготения. Для удобства дальнейших преобразований перепишем его в несколько ином виде:

$$F_T = G\frac{Mm}{R^2}\frac{R^2}{r^2} = g_0\frac{mR^2}{r^2}.$$

Далее, применяя второй закон Ньютона для космического корабля, движущегося по окружности со скоростью V, получим $F_T = \dfrac{mV^2}{r}$, откуда, учитывая выражение для силы тяготения, будем иметь: $g_0 = \dfrac{V^2 r}{R^2} \approx 14$ *м/с*^{2}.

Ответ: $g_0 = \dfrac{V^2 r}{R^2} \approx 14$ *м/с*^{2}.



20. Поскольку полюс планеты (точка А, см. рис.) находится на оси вращения, для покоящегося относительно этой точки тела ускорение равно нулю и можно записать для силы тяжести F_T и силы реакции опоры N_1: $F_T - N_1 = 0$. В свою очередь тело массой *m*, находящееся на экваторе в точке В, вращается по окружности радиусом R, имея центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

т.е.

$$F_T - N_2 = m\,\frac{4\pi^2}{T^2} R.$$

Сила притяжения, входящая в приведенные уравнения согласно закону всемирного тяготения равна: $F_T = G\frac{mM}{R^2}$, где

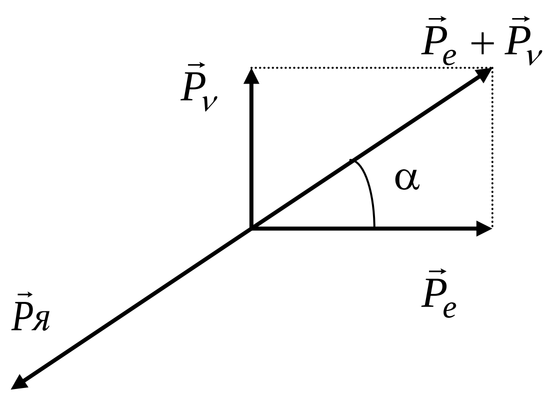
$$M = \rho\ V = \rho\ \frac{4}{3}\pi R^3 \quad - \text{масса планеты.}$$

Поскольку по третьему закону Ньютона сила реакции опоры и вес (сила давления на опору) численно равны, можно записать, исходя из условия, и для сил реакции опоры: $N_1 = 1.2N_2$.

Из записанных выше уравнений несложно получить и формулу для искомого периода: $T = 3\sqrt{\frac{2\pi}{G\rho}} \approx\ 1.68\ 10^4\ c\ \approx 4.67\ ч.$

Ответ: $T = 3\sqrt{\frac{2\pi}{G\rho}} \approx 1.68\ 10^4 c \approx 4.6c.$

21. Поскольку импульс тела является векторной величиной, суммарный импульс электрона $\vec{P}_e$ и нейтрино $\vec{P}_\nu$ определяется путем сложения этих величин по правилу параллелограмма. Так как общий импульс системы до распада ядра равнялся нулю, то из закона сохранения импульса



$$\vec{P}_e + \vec{P}_\nu + \vec{P}_я = 0.$$

Воспользовавшись этим соотношением и рисунком, получим

$$P_я = \sqrt{P_e^{\,2} + P_\nu^{\,2}}\ .$$

Направление вектора импульса ядра отдачи относительно направления вектора импульса электрона (угол α) находится из соотношения

$$tg\alpha = \frac{P_\nu}{P_e}.$$

После подстановки числовых значений имеем:

$$P_я = 10{,}6 \cdot 10^{-23}\ кгм/с,\ tg\alpha = 0{,}72.$$

Ответ: $P_я = \sqrt{P_e^{\,2} + P_\nu^{\,2}}$ $=0{,}6 \cdot 10^{-23}$ *(кг·м)/с.* $tg\alpha = \dfrac{P_\nu}{P_e} = 0{,}72.$

22. Пусть человек передвигается по лодке с постоянной скоростью V. Если длина лодки l и человек проходит от носа до кормы за время t, то $l = Vt$. Двигаясь по лодке, человек толкает ее назад, и за это время t лодка проходит, приближаясь к берегу, расстояние s со скоростью u, т.е. $s = ut$.

Для того, чтобы связать l и s, необходимо воспользоваться законом сохранения импульса. Обозначив массу лодки через M, считая что человек массой m движется вдоль оси x, а лодка - в противоположном направлении, запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x:

$$-M\,u + m(V - u) = 0.$$

Здесь мы учли, что до начала движения человека суммарный импульс системы лодка-человек был равен нулю, а скорость человека относительно воды можно записать как V-u.

Перегруппировывая слагаемые, получим

$$(M + m)u = mV,$$

откуда после умножения на время движения t имеем

$$s = \frac{m}{M + m}\,l.$$

Подстановка числовых значений дает s=*0,63 м.*

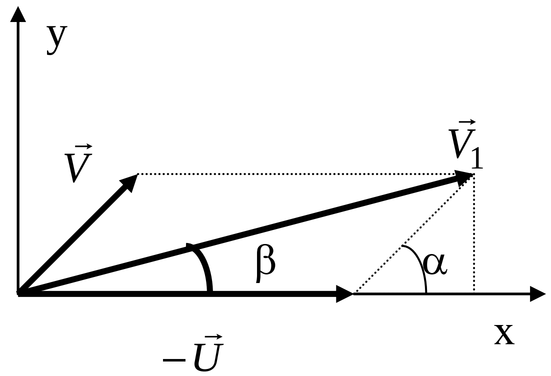
Таким образом, за время t движения человека по лодке с носа на корму лодка не достигнет берега, т.к. расстояние до берега-*0,7 м* - больше s.

Ответ: лодка не причалит к берегу за время движения человека по лодке.

23. Поскольку при прыжке лягушки доска поплыла в обратную сторону со скоростью U, скорость лягушки относительно доски V_1 и относительно берега V будет разной. Вектора этих скоростей связаны друг с другом согласно соотношению:

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{V}_1 \ .$$

Чтобы найти связь между модулями данных скоростей воспользуемся рисунком и теоремой косинусов:



$$V_1^2 = U^2 + V^2 + 2UV\cos\alpha \ ,$$

$$\sin\beta = \frac{V\sin\alpha}{V_1},$$

$$\cos\beta = \frac{U + V\cos\alpha}{V_1}.$$

Расстояние, которое пролетает за время прыжка t лягушка относительно системы отсчета, связанной с доской, составляет в горизонтальном направлении l. Считая скорость лягушки в данном направлении постоянной (силы сопротивления не учитываем), получим:

$$l = V_1\cos\beta\ t = \frac{2V_1^2\cos\beta\ \sin\beta}{g}.$$

(Время полета в приведенном выше выражении было найдено так же, как в задачах о движении тела, брошенного под углом к горизонту: $t = \dfrac{2V_1\sin\beta}{g}$.)

Подставляя в выражения для l формулы для $cos\beta$ и $sin\beta$, получаем для скорости доски:

$$U = \frac{gl - 2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{2V\sin\alpha}.$$

По закону сохранения импульса в проекции на ось x имеем:

$$mV cos\alpha = MU$$

С учетом выражения для U получим из последнего соотношения окончательно для скорости лягушки:

$$V = \sqrt{\frac{Mgl}{(M+m)\sin 2\alpha}}\,.$$

Ответ: $V = \sqrt{\dfrac{Mgl}{(M+m)\sin 2\alpha}}$.

24. При свободном падении тела с высоты h_1 в отсутствие сил сопротивления воздуха выполняется закон сохранения полной механической энергии

$$mgh_1 = \frac{mV_1^{\,2}}{2},$$

откуда скорость тела V_1 в момент падения

$$V_1 = \sqrt{2gh_1}\,.$$

По условию задачи скорость тела после отскока уменьшается в два раза: $V_2=V_1/2$. Применив еще раз закон сохранения полной механической энергии (для движения тела после отскока), получим:

$$\frac{mV_2^{\,2}}{2} = mgh_2.$$

Из двух последних выражений получим для высоты подъема шарика после отскока

$$h_2 = \frac{V_2^{\,2}}{2g} = \frac{V_1^{\,2}}{8g} = \frac{h_1}{4}.$$

Так как столкновение шарика с плитой не является абсолютно упругим, часть первоначальной механической энергии переходит в тепло. Количество выделенного тепла Q равно разности полных механических энергий до и после соударения:

$$Q = mgh_1 - mgh_2 = \frac{3}{4}mgh_1.$$

Импульс $\vec{p}$, переданный плите при отскоке, равен, согласно закону сохранения импульса, разности импульсов до ($\vec{p}_1$) и после ($\vec{p}_2$) столкновения. Так как проекции этих векторов имеют разный знак, записываем для величины вектора $\vec{p}$:

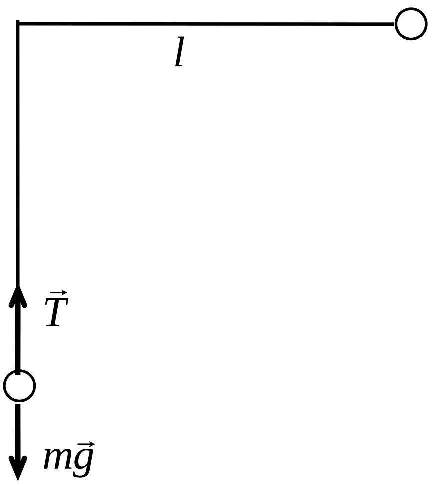
$$p = p_1 - (-p_2) = mV_1 + mV_2 = \frac{3}{2} mV_1 = 3m\sqrt{\frac{gh_1}{2}}.$$

После подстановки численных данных получим

h_2=0.25 м, Q=7,5 Дж, p=6,7 (кг·м)/с.

Ответ: $h_2 = \frac{h_1}{4}$ *=0.25м*, $Q = \frac{3}{4} mgh_1$ *=7,5 Дж*, $p = 3m\sqrt{\frac{gh_1}{2}}$ *=6,7кгм/с*

25. При прохождении положения равновесия на шарик будет действовать сила тяжести и сила натяжения нити (см. рис.). По второму закону Ньютона



$$T - mg = m\frac{V^2}{l},$$

где V^2/l -центростремительное ускорение шарика.

Для определения скорости V шарика в нижней точке траектории нужно воспользоваться законом сохранения энергии. Тогда

$$mgl = \frac{mV^2}{2},$$

откуда

$$V^2 = 2gl.$$

После подстановки этого выражения в первое уравнение определяем значение силы натяжения нити

$$T = 3mg.$$

Численное значение *T=0,3 Н.*

Ответ: $T = 3mg$ *=0,3 Н.*

26. Тело перед началом соскальзывания с наклонной плоскости обладает только потенциальной энергией mgh (его начальная скорость равна нулю), где h - высота наклонной плоскости. Очевидно, $h = l\sin\alpha$. В конце наклонной плоскости полная механическая энергия тела равна энергии кинетической. Полная механическая энергия не сохраняется, и ее изменение равно количеству тепла, выделившемуся при трении тела о плоскость при соскальзывании:

$$mgl\sin\alpha - \frac{mV^2}{2} = Q.$$

При подстановке численных значений получим $Q=102$ *Дж.*

Ответ: $Q = mgl\sin\alpha - \frac{mV^2}{2} = 102$ *Дж.*

27. Если после столкновения тел они начинают двигаться вместе, то их удар является абсолютно неупругим. При таком ударе часть кинетической энергии движущегося тела переходит в тепло Q. Значит, количество выделившегося тепла будет равно в данном случае разности кинетических энергий тел до и после столкновения:

$$Q = \frac{m_1V^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2},$$

где m_1 и m_2 - массы первого и второго тел, V скорость первого тела, u − скорость совместного движения тел после удара.

Для определения скорости u нужно воспользоваться законом сохранения импульса:

$$m_1V = (m_1 + m_2)u.$$

Из указанных выражений получим

$$Q = \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)}\frac{V^2}{2}.$$

Численное значение $Q=12$ *Дж.*

Ответ: $Q = \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)}\frac{V^2}{2} = 12$ *Дж.*

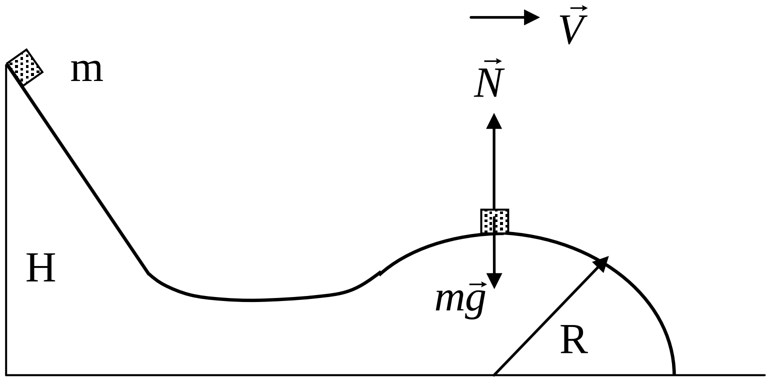
28. Поскольку в данной задаче приходится учитывать работу силы трения, запишем закон изменения полной механической энергии для тела массой m (см. рис.):

$$mgR + \frac{mV^2}{2} - mgH = -A.$$

В правой части данного равенства под A следует понимать абсолютную величину работы силы трения (см. условие). В верхней части цилиндра тело движется по окружности со скоростью V, т.е. оно обладает центростремительным ускорением, и второй закон Ньютона для него выглядит следующим образом:

$$mg\text{-}N=\frac{mV^2}{R}.$$

Из приведенных соотношений легко получить выражение для силы реакции опоры, действующей на тело в верхней части цилиндра:



$$N = mg(3-\frac{2H}{R})+\frac{2A}{R}.$$

Согласно третьему закону Ньютона сила реакции опоры численно равна силе давления тела на эту опору:

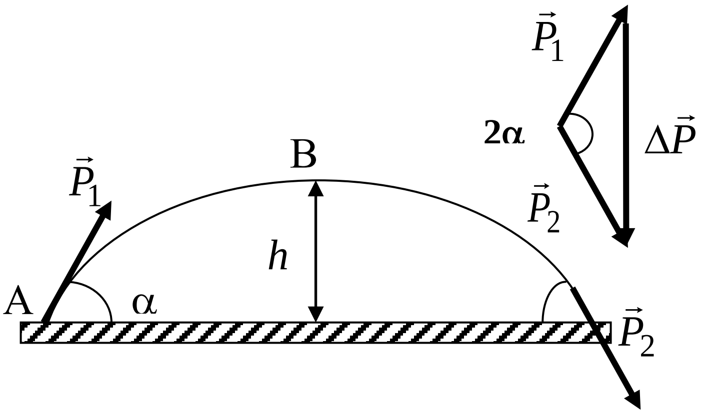
$$N=F_д= 10\ Н.$$

Ответ: сила давления $F_д= mg(3-\frac{2H}{R})+\frac{2A}{R}=10\ Н.$

29. Поскольку сила сопротивления пренебрежимо мала, выполняется закон сохранения полной механической энергии, и для точек А и В можно записать (см. рис.):

$$\frac{mV_0^2}{2}=\frac{mV_0^2}{2}\cos^2\alpha+mgh, \text{ откуда } \frac{1}{2}(1-\cos^2\alpha)V_0^2=gh \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{2}V_0^2\sin^2\alpha=gh.$$



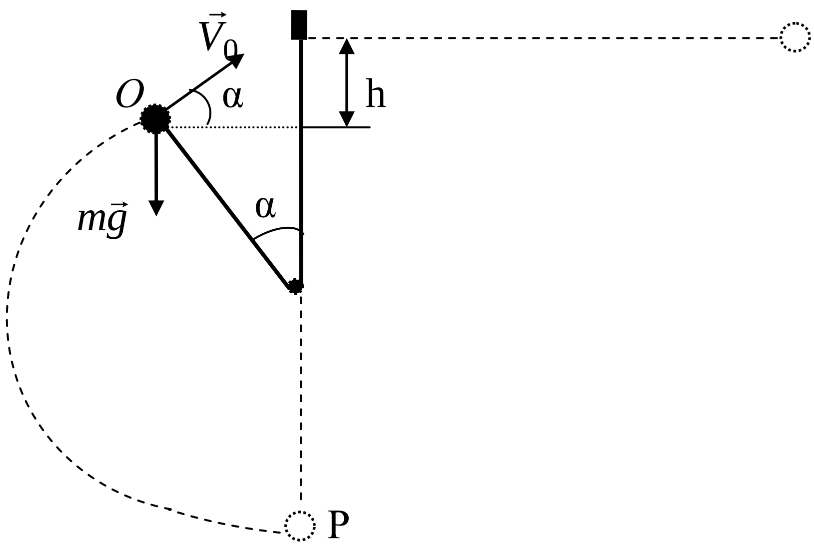
Последнее соотношение используем при подстановке в выражение для изменения импульса $\Delta P=2P_1\sin\alpha=2mV_0\sin\alpha$ (см. рис.), откуда для начальной скорости получим:

$$V_0 = \frac{\Delta P}{2\sin\alpha\ m}.$$

Из двух последних выражений имеем для высоты максимального подъема h окончательно: $h = \frac{\Delta P^2}{8m^2 g}$ =1.25 м.

Ответ: $h = \frac{\Delta P^2}{8m^2 g}$ =1.25 м.

30. Пусть в точке О (см. рис.) сила натяжения равна нулю. Тогда дальше шарик будет двигаться только под действием силы тяжести



как тело, брошенное под углом α к горизонту. Выразим скорость шарика V_0 из второго закона Ньютона, считая, что в точке О он движется по дуге окружности радиуса $l/2$:

$$mg\cos\alpha = \frac{2mV_0^{\,2}}{l},$$

откуда

$$V_0^2 = \frac{gl\cos\alpha}{2}.$$

Используя закон сохранения энергии $mgh = \frac{mV_0^2}{2}$, получим

$$V_0^2 = 2gh.$$

Используя рисунок, имеем:

$$cos\alpha = \frac{2\left(\frac{l}{2} - h\right)}{l}.$$

Из записанных выше выражений получим, что точка О, из которой шарик начинает движение по параболе как тело, брошенное под углом к горизонту, лежит ниже точки подвеса на расстоянии h от нее:

$$h = l/6.$$

Тогда далее шарик поднимется выше точки O на расстояние h_0:

$$h_0 = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad .$$

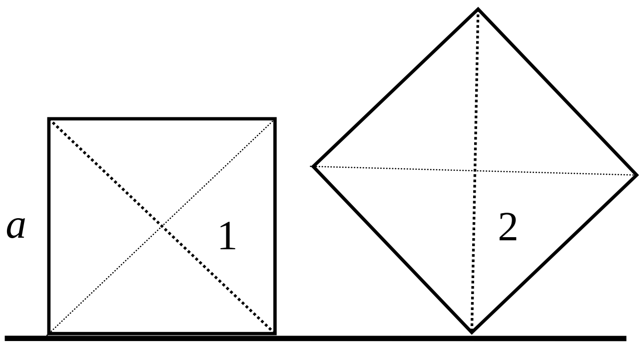
С учетом выражений для V_0^2 и h, приведенных выше, получим:

$$V_0^2 = \frac{gl}{3}.$$

Из приведенных формул легко убедиться в том, что $cos\alpha=2/3$. Тогда $sin^2\alpha=5/9$ и из формул для h_0 и V_0^2 находим, что $h_0=5l/54$. В соответствии с этим высота подъема шарика относительно нижней точки его траектории P будет составлять $h_{max}=h_0+l-h=25l/27$.

Ответ: $h_{max}=25l/27$.

31. Пусть длина ребра куба равна a. Для того, чтобы перевернуть его на другую грань, нужно совершить работу, поставив куб на ребро (см. рис.). Очевидно, что после этого он повернется и опустится на другую грань под действием силы тяжести.



При совершении указанной операции центр тяжести куба поднимется с высоты $a/2$ (положение 1) до высоты $a\sqrt{2}/2$ (положение 2).

Таким образом, работа A по перемещению куба будет равна изменению потенциальной энергии его центра тяжести:

$$A = mg\frac{a\sqrt{2}}{2} - mg\frac{a}{2}.$$

Для расчета длины грани a воспользуемся определением плотности: $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{a^3}$, откуда $a=(m/\rho)^{1/3}$. После подстановки значения a в первую формулу получим

$$A=\frac{mg}{2}\left(\frac{m}{\rho}\right)^{1/3}(\sqrt{2}-1),$$

что после численных расчетов дает *A=120 Дж.*

Ответ: $A=\frac{mg}{2}\left(\frac{m}{\rho}\right)^{1/3}(\sqrt{2}-1)$=*120 Дж.*

32. Движение груза, прикрепленного к пружине, происходит с ускорением a под действием силы тяжести и силы упругости kx, (здесь k - жесткость пружины, x − ее деформация). По второму закону Ньютона

$$ma = mg - kx.$$

По мере увеличения x ускорение груза изменяется: при $mg > kx$ оно положительно, достигает нуля при некотором значении $x = x_1$, а затем (при $mg < kx$) становится отрицательным. Пока ускорение положительно, скорость движения груза возрастает, достигает максимального значения V_{max} при a=0, а затем (при a<0) начинает убывать. Таким образом, искомая максимальная скорость V_{max} достигается, согласно первому уравнению, при

$$x = x_1 = \frac{mg}{k}.$$

Для определения V_{max} нужно воспользоваться законом сохранения энергии. Примем за ноль потенциальной энергии тяготения энергию при $x=x_1$. Тогда в исходном положении груза (при нерастянутой пружине) потенциальная энергия тяготения равна mgx_1, а потенциальная энергия упругости и кинетическая энергия груза равны нулю. Следовательно, закон сохранения энергии примет вид:

$$mgx_1 = \frac{mV^2{}_{max}}{2} + \frac{kx_1{}^2}{2}.$$

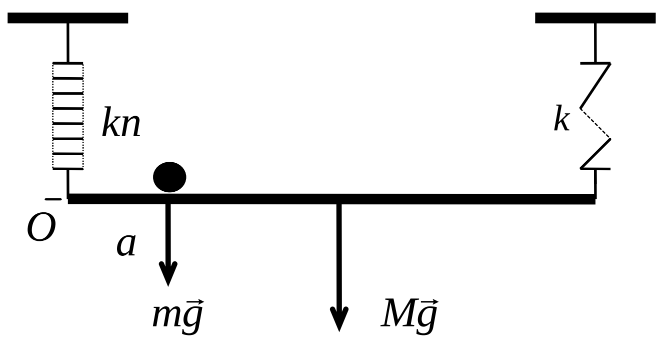
Из приведенных выше уравнений получим

$$V_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

После подстановки чисел имеем $V_{\max}$≈*1м/с.*

Ответ: $V_{\max} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$≈*1м/с.*

33. Сила, действующая со стороны пружины на груз, растягивающий ее на величину *x,* равна kx.Следовательно, дополнительный груз *m* нужно положить ближе к более жесткой левой пружине на расстоянии *a* от нее (см. рис.).



Условие равновесия тела, имеющего ось вращения (в данном случае стержень может вращаться, отклоняясь от горизонтального положения), заключается в выполнении двух требований: равенство нулю суммы сил, действующих на тело

$$Mg + mg = kx + nkx,$$

и равенство нулю суммы моментов сил относительно некоторой оси. Выберем ось вращения в точке прикрепления к стержню левой пружины (точка *O* на рисунке). Тогда

$$kxL = Mg\frac{L}{2} + mga.$$

(Так как стержень однороден, точка приложения его силы тяжести Mg находится на расстоянии $L/2$ от его концов.)

Выражая из второго уравнения kx и подставляя результат в первое, получим для искомого расстояния точки приложения силы mg:

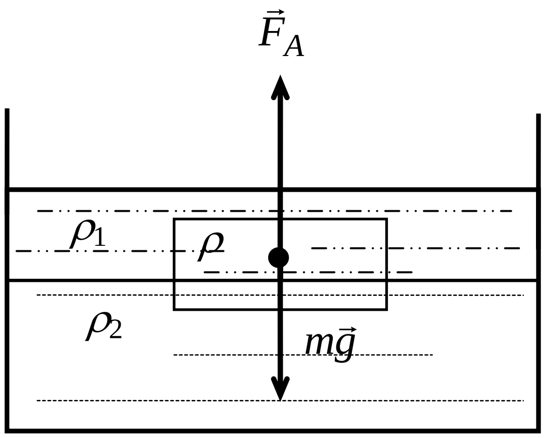
$$a = \frac{L}{m}\ \frac{2m-(n-1)M}{2(n+1)} = 0{,}1 \text{ м.}$$

Ответ: $a = \frac{L}{m}\ \frac{2m-(n-1)M}{2(n+1)} = 0{,}1$ м.

34. На куб, погруженный в жидкость, действует сила тяжести mg и суммарная выталкивающая сила (сила Архимеда) $F_A=F_{A1}+F_{A2}$ (здесь F_{A1} - выталкивающая сила из верхней и F_{A2} - из нижней жидкости (см. рис.). Сила тяжести куба выражается через его плотность ρ и объем V

$$mg=\rho Vg.$$

Выталкивающие силы рассчитываются из закона Архимеда через плотности жидкостей ρ_1и ρ_2



$$F_{A1}=\rho_1V_1g,\quad F_{A2}=\rho_2V_2g\ ,$$

где V_1 и V_2 – части объема куба, погруженные в эти жидкости. Очевидно, что общий объем куба

$$V=V_1+V_2.$$

Так как куб находится в равновесии, то $mg=F_{A1}+F_{A2}$ и, с учетом приведенных выше выражений,

$$\rho Vg=\rho_1V_1g+\rho_2V_2g\ .$$

Тогда, учитывая, что $V_2=L_2S$, $V=LS$, где S – площадь поперечного сечения куба, получаем: $L_2 = L\frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$.

Численное значение $L_2=5$*см.*

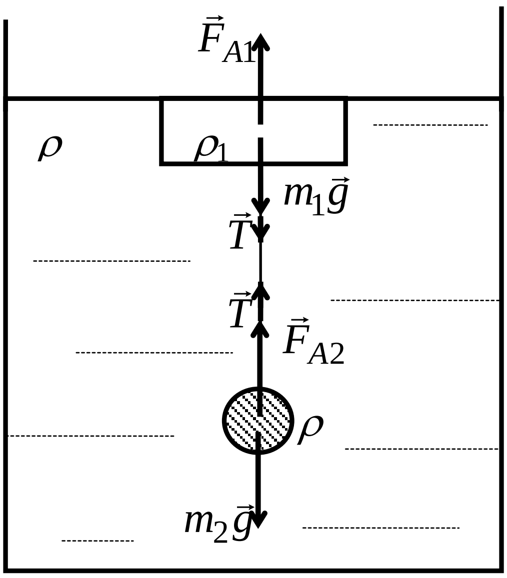
Ответ: $L_2 = L\frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1} = 5$ *см.*

35. На кусок пробки массой m_1 и плотностью ρ_1 действует сила тяжести m_1g, сила Архимеда $F_{A1}=\rho_1Vg$ и сила натяжения нити T. Аналогичные силы действуют и на свинцовый груз массой m_2 и плотностью ρ_2: m_2g , $F_{A2}=\rho_1Vg$ и T (см. рис.). (Здесь ρ – плотность воды, V_1 и V_2 – объемы куска пробки и свинцового груза соответственно). Выражая объемы тел через массу и плотность $V_1=m_1/\rho_1$ и $V_2=m_2/\rho_2$, получим условия равновесия пробки

$$m_1\frac{\rho}{\rho_1}g = m_1 g + T$$

и свинца

$$m_2\frac{\rho}{\rho_2}g + T = m_2 g\,.$$



Из данных выражений получим массу свинца

$$m_2 = m_1\frac{\rho_2(\rho-\rho_1)}{\rho_1(\rho_2-\rho)}\,.$$

и силу натяжения нити

$$T = (\frac{\rho}{\rho_1}-1)m_1 g\,.$$

Соответствующие числовые значения равны $m_2 \approx 1{,}1$ *кг* и $T \approx 10$ *Н*.

Ответ: $m_2 = m_1\frac{\rho_2(\rho-\rho_1)}{\rho_1(\rho_2-\rho)} \approx 1{,}1$*кг*, $T = (\frac{\rho}{\rho_1}-1)m_1 g \approx 10$*Н*.

36. Так как шарик падает в воде равномерно, то действующая вниз сила тяжести ($mg=\rho_1 Vg$, где m − масса, ρ_1 − плотность и V − объем шарика) и сумма действующих вверх сил, − сила Архимеда ($F_A=\rho_2 Vg$, где ρ_2 − плотность воды) и сила вязкого трения между шариком и водой F_{TP},- равны между собой:

$$\rho_1 Vg = \rho_2 Vg + F_{TP}\,.$$

При перемещении шарика на расстояние x работа силы трения, переходящая в тепло Q, равна $F_{TP}\, x$ или

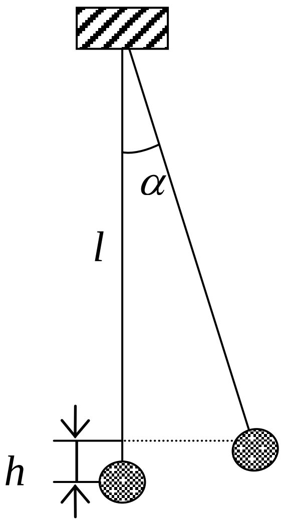
$$Q = F_{\text{тр}}x = Vg(\rho_1-\rho_2)x = 18\cdot 10^{-3}\ Дж.$$

Ответ: $Q = Vg(\rho_1-\rho_2)x = 18\cdot 10^{-3}$ *Дж.*

37. Будем считать маленький шарик, совершающий колебания на нити, математическим маятником. Тогда его период запишем с помощью следующего выражения: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l – длина нити (размерами шарика пренебрегаем). Подстановка числовых значений дает $T \approx 1.42$ *с*.

Если h (см. рис.) – максимальная высота подъема маятника, то, используя заданный в условии наибольший угол его отклонения α, получим для h следующее выражение:

$$h=l(1-\cos\alpha).$$



Поскольку в крайнем положении полная энергия маятника равна потенциальной, то энергию, которой обладает маятник, запишем следующим образом:

$$W=mgh=mgl(1-\cos\alpha).$$

При подстановке числовых значений будем иметь для энергии маятника: $W \approx 15$ *мДж*.

Ответ: $T \approx 1.42$ *с*, $W\ mgl(1-\cos\alpha) \approx 15$ *мДж*.

38. Найти амплитуду колебаний кубика можно с помощью законов сохранения импульса и энергии. Так как пуля застревает в кубике, их столкновение является абсолютно неупругим и закон сохранения полной механической энергии при этом столкновении не выполняется. Скорость u совместного движения кубика с пулей определяется из закона сохранения импульса

$$MV=(M+m)\,u,$$

где m − масса пули , M − масса кубика.

Кинетическая энергия кубика с пулей $(M+m)u^2/2$ переходит в потенциальную энергию пружины $kA^2/2$, сжатой до максимального (амплитудного) значения A (k − жесткость пружины).

Таким образом,

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{m^2V^2}{2(M+m)},$$

откуда находим амплитуду колебаний $A = \frac{mV}{\sqrt{k(M+m)}} = 5 \cdot 10^{-2}$ *м*.

2.2. Задачи без решений

2.2.1. Условия задач

1. Тело при равноускоренном движении из состояния покоя проходит за пятую секунду расстояние $S_5=0.9м$. Определить ускорение тела и путь тела S_7 за седьмую секунду.

2. Автомобиль начал двигаться из состояния покоя равноускоренно и, пройдя некоторое расстояние, достиг скорости $V_2=2$ *м/с.* Какой была скорость автомобиля V_1 на середине этого расстояния?

3. Мальчик бросает вертикально вверх с одного и того же уровня два шарика с одинаковыми начальными скоростями V_0 = 6 м/с один за другим с интервалом времени τ = 1с. Определить, через какое время после бросания первого шарика оба шарика окажутся на одной высоте?

4. Тело брошено с высоты H=5м над поверхностью Земли горизонтально со скоростью V_0 =5 м/с. Найти дальность полета тела L.

5. Под каким углом α к горизонту должен быть брошен шарик, чтобы дальность его полета L была в два раза больше максимальной высоты подъема H_{max}?

6. Камень брошен горизонтально с высоты $h=2$ *м* так, что к поверхности Земли он подлетает под углом $\alpha=45°$. Какое расстояние S по горизонтали пролетает камень?

7. Шарик бросают горизонтально с вершины наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=30°$ с горизонтом. С какой скоростью V_0 должен быть брошен шарик, чтобы он упал на плоскость на расстоянии $L=1м$ от вершины.

8. Кубик массой $m=5$ *кг* движется под действием силы $F=10$ *Н* по горизонтальной поверхности. Сила направлена под углом $\alpha=45°$ к горизонту. При каком коэффициенте трения μ кубик будет двигаться с постоянной скоростью?

9. К потолку движущегося лифта на нити подвешена гиря массы $m_1=1$ *кг.* К этой гире привязана другая нить, к которой подвешена гиря массы m_2 =2 *кг.* Найдите силу натяжения T_1 верхней нити, если сила натяжения нити между гирями равна T_2=9,8 Н.

10. Коробке массой m =1кг, лежащей на длинной горизонтальной доске, массой M=3кг, сообщили скорость V_0 =3м/с. Какой путь L пройдет коробка относительно доски, если коэффициент трения между ними k=0.2, а трение между доской и плоскостью отсутствует.

11. Внутри конической поверхности движется в горизонтальной плоскости шарик. Ось конуса вертикальна, угол при вершине α=60°. Скорость шарика V=15м/с. Найти время одного оборота T (период вращения) шарика.

12. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси, делая n=25 оборотов в минуту. На каком расстоянии R от оси вращения может удержаться находящееся на нем тело, если коэффициент трения f=0.2?

13. К грузу массой m=1кг приложена постоянная вертикальная сила, поднимающая его из состояния покоя за время t=5с на высоту H=10м. Определить работу A силы за время подъема и среднюю мощность N, развиваемую силой.

14. Лифт поднимается с ускорением a=1.2м/с^2, направленным вертикально вверх. На полу лифта лежит кирпич массой m =5кг. Чему равна сила давления F кирпича на пол лифта?

15. Во сколько раз объем подводной части айсберга больше объема его надводной части? Плотность воды $\rho_в = 1000 кг/м^3$, плотность льда $\rho_л = 900 кг/м^3$.

16. Шарик подвесили на упругой пружине и опустили в воду. Во сколько раз изменилось натяжение пружины? Плотность воды $\rho_в$=*1000 кг/м*^{3}, плотность материала шарика $\rho_ш$= *7000 кг/м*^{3}.

17. Тело, летевшее в горизонтальном направлении со скоростью V=*10 м/с*, разорвалось на две части массами m_1=*1 кг* и m_2 =*1.5 кг.* Скорость большей части осталась после взрыва горизонтальной и возросла до V_2 = *25 м/с*. Определить скорость V_1 и направление движения второй части.

18. В клин массы M=*1кг* попадает горизонтально летящий шарик массы m =*10г* и после абсолютно упругого удара о наклонную поверхность клина отскакивает вертикально вверх. Какую скорость приобрел клин, если после удара шарик поднялся на высоту $h = 3м$? Трением пренебречь.

19. Небольшой шарик начинает скользить с высоты $H=10м$ по наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. В конце наклонной плоскости шарик встречает абсолютно упругую горизонтальную плоскость. Найти максимальную высоту подъема шарика после упругого удара о плоскость. Начальная скорость тела равна нулю, трением пренебречь.

20. Два одинаковых пластилиновых шарика подвешены на одинаковых нерастяжимых нитях длиной $l=2м$. Один шарик отводят от положения равновесия так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают. При соударении шарики слипаются. Определить максимальную высоту, на которую после соударения поднимутся шары.

21. Горизонтально летящая пуля массы m=10г насквозь пробивает первоначально покоившийся шар массы M=100г и вылетает из него со скоростью, вдвое меньшей первоначальной. Какая доля q кинетической энергии пули превратилась во внутреннюю энергию?

22. Пуля летит горизонтально со скоростью V_0, пробивает лежащую на горизонтальном столе коробку и вылетает со скоростью, уменьшившейся в три раза ($V_0/3$), в том же направлении. Масса коробки в 5 раз больше массы пули. Коэффициент трения между коробкой и столом равен k. На какое расстояние S продвинется коробка?

23. Пластилиновый шарик массой m=10г, имеющий скорость V=10м/с, попадает в такой же, но неподвижный шарик и прилипает к нему таким образом, что дальше они движутся вместе. Найти количество тепла Q, выделившееся при ударе.

24. На краю стола высотой $H=1.22м$ лежит шарик массой $m_1=100г$. Второй шарик массой $m_2=150г$., движущийся по поверхности стола со скоростью $V=2м/с$, сталкивается неупруго с первым шариком и оба шарика падают на пол. Найти дальность полета шариков L.

25. С высоты H=5м бросают вниз тело массой $m=0.2кг$ с начальной скоростью $V_0=2м/с$. Тело углубляется в грунт на $l=5см$. Найти среднюю силу сопротивления грунта $F_{сопр.}$.

26. Когда груз математического маятника проходит положение равновесия, нить испытывает натяжение в 2 раза больше силы тяжести, действующей на груз. На какой максимальный угол α_{max} от вертикали отклоняется нить?

27. Качели представляют собой однородную доску длиной $L=6$ *м,* которая может качаться относительно горизонтальной оси, проходящей через центр качелей. На противоположных концах качелей сидят мальчик массы $m_1=70$ *кг* и девочка массы $m_2=50$ *кг.* На каком расстоянии x от центра качелей надо положить груз массы $m_3 =60$ *кг*, чтобы качели приняли горизонтальное положение?

28. На гладком горизонтальном столе лежит кубик массы $M=1кг$, прикрепленный к вертикальной стене пружиной жесткостью $k=100Н/м$. В кубик попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой $m=10г$, имеющая скорость $v_0=50м/с$. Определить амплитуду A и период T колебаний кубика после соударения.

29. Спутник запущен так, что он движется в плоскости Земного экватора и с Земли все время кажется неподвижным. Определить расстояние от центра Земли до искусственного спутника. Радиус Земли $R_З$=6400км.

30. Найти время падения камня с высоты $H=20м$ на поверхность Луны, если ее радиус $R_Л$ в 3.7 раза меньше радиуса Земли $R_З$, а масса Луны $M_Л$ в 81 раз меньше массы Земли $M_З$. Ускорение свободного падения на поверхности Земли принять равным 9.8м/с^2.

31. Найти первую космическую скорость для планеты, масса которой в 3 раза, а радиус в 2 раза больше, чем у Земли. Принять первую космическую скорость для Земли равной *8* км/с.

32. На какую высоту h над Землей надо поднять математический маятник, чтобы период его колебаний увеличился на 1%? Радиус Земли принять равным 6400км.

33. За одно и тоже время один математический маятник совершает 50 колебаний, а второй-30. Найти их длины, если один из них на 32см короче другого.

34. Как изменится период колебаний математического маятника при перенесении его с Земли на Луну, если радиус Луны $R_Л$ в 3.7 раза меньше радиуса Земли $R_З$, а масса Луны $M_Л$ в 81 раз меньше массы Земли $M_З$.

35. Под каким наименьшим углом к горизонту может стоять прислоненная к идеально гладкой стене лестница, если известно, что коэффициент трения лестницы о пол равен k=0.2.

36. Шарик бросают вертикально вверх со скоростью V_0 =5.5м/с. Одновременно с предельной высоты, которую шарик может достигнуть, бросают вертикально вниз камень с той же начальной скоростью. Определить время τ, по истечении которого камень и шарик встретятся.

2.2.2. Ответы

1. S=1.3м, a=0.2м/с^2; **2.** V_1=14.3м/с; **3.** t=1.1с; **4.** L=5м;
5. $\alpha = arctg2$; **6.** S=4м; **7.** V_0=2.7м/с; **8.** μ=0.17;
9. T_1=14.7Н; **10.** L=1.7м; **11.** T=5.6с; **12.** R=0.3м;
13. A=108Дж, N=22Вт; **14.** F=55Н; **15.** n=9; **16.** $\frac{T_2}{T_1} = 0.9$;
17. $V_1' = -12.5$м/с, V_1''=62.5м/с; **18.** V =0.08м/с; **19.** h=5м;
20. h=0.5м; **21.** q=0.73; **22.** $S = \frac{2v_0^2}{225kg}$; **23.** Q=0.25Дж;
24. L=0.6м; **25.** F=210Н; **26.** α=60°; **27.** x=1м;
28. T=0.63с;A=0.05м; **29.** $r=42\cdot10^3$км; **30.** t=4.9с;
31. V=9.8км/с;32. h=64км; **33.** l_1=18см, l_2=50см; **34.** $\frac{T_л}{T_З} = 2.4$;
35. $\alpha = arctg2.5$; **36.** τ=0.14с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Перышкин А.В., Гутник Е.М. Физика. Учеб. для 9 кл. средн. шк.- М.: Просвещение, 2019.
2. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б., Сотский Н.Н. Физика. Учеб. для 10 кл. сред. шк. - М.: Просвещение, 2020.
3. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика. Учеб. для 11 кл. сред. шк. - М.: Просвещение, 2018.
4. Кабардин О.Ф. Физика. Справочные материалы. Учеб. пособие для учащихся. М.; Аст, 2018 (или любое издание прошлых лет).
5. Рымкевич А.П. Физика. Задачник. 10-11 кл.: Пособие для общеобразовательных учреждений. М. Дрофа, 2019.
6. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. - М.: Наука, 1919
7. Гольдфарб Н.И. Задачники «Дрофы». Физика. - М.: Дрофа, 2018.

СОДЕРЖАНИЕ