Интервальные оценки параметров. Доверительные интервалы точечных оценок

Постановка задачи

- Скачать папку с исходными данными по ссылке
- Открыть папку соответствующую номеру своей группы
- Открыть папку соответствующую номеру своего варианта
- В папке data можете найти 4 ряда данных реализации случайной величины

Каждому будут даны 4 выборки:
1 и 2 из нормального распределения, 100 и 10 элементов соответственно.
3 и 4 из равномерного распределения, 100 и 10 элементов соответственно.

Необходимо по результатам работы сделать вывод, влияет ли длина выборки и распределение на доверительные интервалы.

Попадает ли в построенный доверительный интервал математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение генеральной совокупности, которое я скажу каждому по варианту после того, как проведете расчеты.

Зависит ли ширина доверительного интервала от длины выборки? Присутствуют ли существенные различия между доверительными интервалами, рассчитанными с помощью нормального распределения и t-распределения?

Постановка задачи

Для каждого из четырех рядов данных необходимо провести следующие расчёты:

1. Рассчитать точечные оценки математического ожидания и стандартного отклонения

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

2. Найти границы доверительного интервала мат. ожидания по правилу нормального распределения, используя таблицу критических значений функции Лапласа $\Phi(x)$

$$\hat{x}_{\text{в}} \in \left[\bar{x} - x_\gamma \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + x_\gamma \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}\right], \Phi(x_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$$

Для стандартного отклонения видим, что делим на n-1, а не на n. Это нужно для компенсации смещённости.

3. По правилу t-распределения Стьюдента, используя таблицу критических значений $t_{\gamma,n}$ t-распределения при значении уверенности $\gamma = 0.95$

$$\hat{x}_{\text{в}} \in \left[\bar{x} - t_{1-\gamma,n-1} \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\gamma,n-1} \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}\right]$$

4. Найти границы доверительного интервала для среднеквадратического отклонения по оценке χ^2-распределения при значении уверенности $\gamma = 0.95$

$$\hat{\sigma}_{\text{в}} \in \left[\frac{\sigma_{\text{в}} \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}}, \frac{\sigma_{\text{в}} \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}\right]$$

Пример

15.097699
38.386666
32.511936
28.008473
29.823424
26.130094
29.136400
24.302484
42.823643
21.248396

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 28.75$$

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = 8.00$$

Статистика для расчета доверительного интервала математического ожидания

$$z = \frac{\overline{x}_{\text{в}} - \mu}{S_{\text{в}}/\sqrt{n}}$$

$\overline{x}_{\text{в}}$ — выборочное среднее

μ — математическое ожидание генеральной совокупности

$\frac{S_{\text{в}}}{\sqrt{n}}$ — точечная оценка стандартного отклонения выборочных средних

Статистика для расчета доверительного интервала среднеквадратического отклонения

$$H = \frac{(n-1){\sigma_{\text{в}}}^2}{\sigma^2} \qquad {\sigma_{\text{в}}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Нам необходимо стандартизировать случайную величину (X выборочное), чтобы работать со стандартным нормальным распределением. Такая статистика (z-оценка) нам нужна, чтобы использовать таблицу для значений функции Лапласа.

Статистика H имеет распределение Пирсона (Хи-квадрат распределение), так как в числителе стоит несмещенная оценка дисперсии ${\sigma_{\text{в}}}^2$, в которой в числителе стоит x, который должен иметь нормальное распределение. То есть это сумма квадратов нормально распределенных случайных величин.

Пример

$$\overline{x} = 28.75 \qquad \sigma_{\text{в}} = 8.00 \qquad \gamma = 0.95$$

$$\hat{x}_{\text{в}} \in \left[\bar{x} - x_\gamma \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + x_\gamma \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}\right], \Phi(x_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$$

$$\Phi(x_\gamma) = \frac{0.95}{2} = 0.475 \rightarrow x_\gamma = 1.96$$

$$\hat{x}_{\text{в}} \in \left[28.75 - 1.96 \cdot \frac{8.00}{\sqrt{10}}, 28.75 + 1.96 \cdot \frac{8.00}{\sqrt{10}}\right]$$

$$\hat{x}_{\text{в}} \in [23.79, 33.71]$$

Мы знаем надежность интервала γ – это вероятность того, что математическое ожидание генеральной совокупности попадет в этот интервал.
По таблице критических значений функции Лапласа мы можем найти x_γ.

Пример

$$\overline{x} = 28.75 \qquad \sigma_{\text{в}} = 8.00 \qquad \gamma = 0.95$$

$$\hat{x}_{\text{в}} \in \left[\bar{x} - t_{1-\gamma,n-1} \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\gamma,n-1} \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$t_{1-\gamma,n-1} = t_{0.05,9} = 2{,}26$$

$$\hat{x}_{\text{в}} \in \left[28.75 - 2{,}26 \cdot \frac{8}{\sqrt{10}}, 28.75 + 2{,}26 \cdot \frac{8}{\sqrt{10}}\right]$$

$$\hat{x}_{\text{в}} \in [23.03, 34.47]$$

Пример

$$\alpha = 1 - \gamma$$

$$\overline{x} = 28.75 \qquad \sigma_в = 8.00 \qquad \gamma = 0.95 \qquad \alpha = 0.05$$

$$\hat{\sigma}_в \in \left[\frac{\sigma_в \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}}, \frac{\sigma_в \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}\right]$$

$$\chi^2_{0.975,9} = 19.23, \qquad \chi^2_{0.025,9} = 2.7$$

$$\hat{\sigma}_в \in \left[\frac{8 \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{19.23}}, \frac{8 \cdot \sqrt{9}}{\sqrt{2.7}}\right]$$

$$\hat{\sigma}_в \in [5.47, 14.6\,]$$

Для любого значения α можно найти с помощью
функции MS Excel: =ХИ2ОБР(α;n-1)

Структура отчета

- 2.1 Постановка задачи
- 2.2 Ход выполнения работы
- 2.2.1 Расчёт точечных оценок математического ожидания и стандартного отклонения (кратко про данные, свойства точечных оценок (несмещенность, эффективность, состоятельность), формулы точечных оценок, расчеты).
- 2.2.2 Расчёт интервальной оценки математического ожидания (Z-статистика, описание, значения Ф для каждого ряда, расчет доверительного интервала для каждого ряда, расчеты доверительных интервалов с помощью t-распределения)
- 2.2.3 Расчёт интервальной оценки стандартного отклонения
- 2.3 Выводы