Практическое занятие 16.
Решение задач по темам курса, подготовка к экзамену

1 Краткая теоретическая справка

1.1 Пределы

1. **Предел отношения двух многочленов** $P(x)/Q(x)$ при $x \to \infty$ **зависит только от старших степеней этих многочленов**, а именно

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \infty \text{ при } n > m, \\ 0 \text{ при } n < m, \\ \dfrac{a_n}{b_n} \text{ при } n = m. \end{cases} \tag{1}$$

2. **Второй замечательный предел**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{2}$$

1.2 Разложения элементарных функций в ряд Тейлора

Ряд Тейлора в точке $x = 0$ (по степеням x) называется также **рядом Маклорена**.

Экспонента

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{3}$$

Логарифм

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]. \tag{4}$$

Синус

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{5}$$

Косинус

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{6}$$

Биномиальное разложение:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad x \in (-1, 1). \tag{7}$$

При $\alpha = -1$ из (7) получаем формулы сумм геометрических прогрессий:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n. \tag{8}$$

1.3 Признаки сходимости рядов с положительными членами

Эталонные ряды (используются в признаках сравнения).

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ сходится при } \alpha > 1 \text{ и расходится при } \alpha \leqslant 1. \tag{9}$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a^{n} \text{ сходится при } 0 \leqslant a < 1 \text{ и расходится при } a \geqslant 1. \tag{10}$$

Теорема 1 (**Первый признак сравнения**). *Если начиная с некоторого номера n выполняются неравенства*

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

то

- *из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (большего ряда) следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (меньшего ряда);*
- *из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (меньшего ряда) следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (большего ряда).*

Теорема 2 (**Второй (предельный) признак сравнения**). *Если начиная с некоторого номера $b_n > 0$ и существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A, \quad A \neq 0,$$

то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся или расходятся.

Теорема 3 (**Признак Даламбера**). *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = d$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*

- *сходится при $d < 1$;*
- *расходится при $d > 1$.*

Теорема 4 (**Радикальный признак Коши**). *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*

- *сходится при $d < 1$;*
- *расходится при $d > 1$.*

Теорема 5 (**Интегральный признак Коши**). *Рассмотрим общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ как функцию $a_n = f(n)$. Если функция $f(x)$ непрерывна и монотонно убывает на $[1, +\infty)$, то*

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и интеграл } \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ одновременно сходятся или расходятся.}$$

Замечание 1. **Сумма ряда** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, как правило, **не равна значению интеграла** $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$!

1.4 Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

Определение 1. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \text{ где } a_n \geqslant 0, \tag{11}$$

называется знакочередующимся.

Теорема 6 (**Признак Лейбница**)**.** *Знакочередующийся ряд* (11) *сходится если*

- *последовательность из модулей его членов убывает:* $a_n > a_{n+1}$ *для любого* n*;*
- *и стремится к нулю:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Замечание 2. Доказать убывание членов ряда можно одним из следующих способов.

- Доказать, что $a_n - a_{n+1} > 0$ для любого n.
- Доказать, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ для любого n.
- Если $a_n = f(n)$, то доказать, что производная $f'(x) < 0$ для любого x.

1.5 Комплексные числа

Определение 2. Число вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i — корень уравнения $x^2+1=0$, называется комплексным числом. Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \mathrm{Re}\,(z)$. Число y называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается $y = \mathrm{Im}\,(z)$. Число $\overline{z} = x - iy$ называется комплексно-сопряженным числу $z = x + iy$. Выражение $x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа z.

Замечание 3. Комплексные числа изображаются точками на плоскости. Комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка на плоскости с декартовыми координатами (x, y).

Замечание 4. Комплексные числа складываются, вычитаются, умножаются и делятся по правилам сложения, вычитания, умножения и деления многочленов, если считать i переменной, учитывая при этом, что $i^2 = -1$.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

- $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;
- $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Определение 3 (**Полярные координаты**)**.** Пусть r — это расстояние от начала координат до точки (x, y) или иными словами длина радиус-вектора точки (x, y), а φ — это угол между осью абсцисс (осью Ox) и радиус-вектором (x, y), отсчитываемый от оси абсцисс против часовой стрелки. Числа r и φ называются полярными координатами точки на плоскости с декартовыми координатами (x, y).

Замечание 5. Формулы перехода от декартовых координат к полярным:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{12}$$

Формулы перехода от полярных координат к декартовым:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{13}$$

Определение 4 (**Тригонометрическая форма комплексного числа**)**.** Пусть $z = x + iy$ — комплексное число. Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r и φ — полярные координаты точки (x, y), называется тригонометрической формой комплексного числа z. Число r называется модулем комплексного числа z и обозначается $r = |z|$. Число φ называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Замечание 6. Используя **формулу Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{14}$$

получаем формулу показательной формы комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

Замечание 7. Аргумент комплексного числа $\operatorname{Arg} z$ является многозначной периодической функцией с периодом 2π. При этом

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \text{ где } -\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

Замечание 8. Комплексные числа в тригонометрической форме легко умножать, делить и возводить в степень. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big).$$

Замечание 9. Корень n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{15}$$

1.6 Функции комплексного переменного

Также как комплексная переменная $z = x + iy$ имеет действительную и мнимую части x и y, являющиеся действительными переменными, функция комплексного переменного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ также имеет действительную и мнимую части $u(x, y)$ и $v(x, y)$, являющиеся действительнозначными функциями двух действительных переменных.

Показательная функция

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{16}$$

Данная формула является следствием формулы Эйлера (14).

Гиперболические функции

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{17}$$

Тригонометрические функции

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{18}$$

Замечание 10. Тригонометрические и гиперболические функции связаны следующими формулами

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z, \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin z.$$

Логарифмическая функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{19}$$

Простейшие множества точек на плоскости

Уравнение

$$|z - z_0| = R$$

задает **окружность** с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ (точка с координатами (x_0, y_0)) радиуса R. Неравенства $|z - z_0| \leqslant R$ и $|z - z_0| \geqslant R$ задают, соответственно, внутренность или внешность соответствующего круга.

Для изображения множеств точек, заданных уравнениями, содержащими $\operatorname{Re} z$ или $\operatorname{Im} z$, нужно подставить в уравнения $\operatorname{Re} z = x$ или $\operatorname{Im} z = y$.

Например множество $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Im} z$ есть множество $x \geqslant y$, т.е. полуплоскость, расположенная справа внизу от прямой $x = y$.

Определение 5. Однозначная функция $f(z)$ называется <u>аналитической в точке</u> z_0, если она дифференцируема в точке z_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется <u>аналитической в области</u> D, если она дифференцируема в любой точке области.

Теорема 7 (**Условия Коши-Римана**). *Для того чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x,y) и чтобы в этой точке имели место равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{20}$$

Уравнения (20) называются условиями Коши-Римана.

1.7 Вычеты

Теорема 8 (**Интегральная формула Коши**). *Если D — область, ограниченная контуром C, а $f(z)$ — однозначная и аналитическая в $\overline{D}$ функция, тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0}. \tag{21}$$

Теорема 9. *Если функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в $\overline{D}$, то во всех внутренних точках области у функции $f(z)$ существуют производные любого порядка, причем справедлива формула*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{22}$$

где $z_0 \in D$, а C — граница области D.

Теорема 10 (**Разложение в ряд Лорана**). *Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $0 \leqslant r < |z - z_0| < R \leqslant +\infty$, разлагается в этом кольце единственным образом в сходящийся к ней ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называется правильной частью ряда Лорана, а ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

— главной частью ряда Лорана.

Определение 6. Точка z_0 называется правильной точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в z_0.

Определение 7 (**Изолированная особая точка**). Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0, а в точке z_0 функция не определена или не дифференцируема.

Определение 8 (**Классификация изолированных особых точек**). Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется

- устранимой особой точкой, если ряд Лорана $f(z)$ в точке z_0 не содержит главной части: $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots$ В этом случае $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$ (предел $f(z)$ при $z \to z_0$ конечен);
- полюсом порядка n, если главная часть ряда Лорана $f(z)$ в точке z_0 конечна, а n — старшая степень $(z - z_0)$ в знаменателе: $f(z) = \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dfrac{c_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \ldots + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots$ В этом случае $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
- существенно особой точкой, если главная часть ряда Лорана $f(z)$ в точке z_0 бесконечна. В этом случае $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Определение 9 (**Вычет функции**). Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0. Вычет функции $f(z)$ в точке z_0 обозначается $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$.

Формулы для вычисления вычетов

- Если z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$.
- Если z_0 — простой полюс, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) \tag{23}$$

- Если z_0 — простой полюс, а $f(z)$ в окрестности z_0 представима как частное двух аналитических функций $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{24}$$

- Если z_0 — полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[f(z)(z - z_0)^n \right]^{(n)}. \tag{25}$$

- Если точка z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения необходимо найти коэффициент c_{-1} в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

Теорема 11 (**Основная теорема о вычетах**). *Если функция $f(z)$ аналитична всюду внутри замкнутой области D, ограниченной контуром C, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, \ldots, z_n$, лежащих внутри D, то*

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathop{res}_{z=z_k} f(z).$$

Теорема 12 (**Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций**). *Пусть функция* $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$, $Q(x)$ *— многочлены, причем все корни знаменателя не являются действительными, и степень* $Q(x)$ *больше степени* $P(x)$ *не менее, чем на 2. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, F(z),$$

где z_k *— полюсы функции* $F(z)$ *лежащие в верхней полуплоскости.*

2 Решение типовых задач

Задача 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^3-2n^2)\sin\left(\dfrac{7}{n^4+5n}\right)$.

Решение. В начале приведем идею решения.

Используя эквивалентность $\sin x \sim x$ (следствие формулы (5)), получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7\,(n^3-2n^2)}{n^4+5n}$. Поскольку на сходимость отношения двух многочленов влияют только старшие степени, то данный ряд ведет себя, как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n^3}{n^4}=7\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится по формуле (9).

Теперь приведем строгое доказательство.

Пусть $a_n=(n^3-2n^2)\sin\left(\dfrac{7}{n^4+5n}\right)$, а $b_n=\dfrac{1}{n}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3-2n^2)\sin\left(\frac{7}{n^4+5n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n\,(n^3-2n^2)}{n^4+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^4-14n^3}{n^4+5n}=7,$$

откуда по предельному признаку сравнения ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^3-2n^2)\sin\left(\dfrac{7}{n^4+5n}\right)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ одновременно сходятся или расходятся. Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится, значит расходится и исследуемый ряд. □

Задача 2. Исследовать на абсолютную (условную) сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(\ln n+1)^2}$.

Решение. Сначала исследуем ряд на абсолютную сходимость, т.е. исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n+1)^2}$. Функция $\dfrac{1}{x(\ln x+1)^2}$ непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[1,+\infty)$, поэтому можно воспользовать интегральным признаком Коши (теорема 5). Поскольку $d(\ln x+1)=\dfrac{dx}{x}$, то можно вычислить интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{dx}{x(\ln x+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{d(\ln x+1)}{(\ln x+1)^2}=$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln x+1}\bigg|_1^n=-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n+1}-1\right)=-(0-1)=1.$$

Интеграл сходится, значит по интегральному признаку Коши сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n+1)^2}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(\ln n+1)^2}$ сходится абсолютно. □

Задача 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$.

Решение. Пусть $a_n = \dfrac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+2}}\cdot\frac{2^n\sqrt{n+1}}{|x-2|^n} = \frac{|x-2|}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{|x-2|}{2}.$$

По признаку Даламбера ряд сходится если $\dfrac{|x-2|}{2} < 1$, т.е. $-2 < x-2 < 2$ или $0 < x < 4$.

Нам осталось исследовать поведения ряда в точках $x = 0$ и $x = 4$.

При $x = 0$ имеем знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Исследуем его на условную сходимость по признаку Лейбница.

1. Последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ монотонно убывает, поскольку $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} > 1$ при $n \geqslant 1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$.

Оба условия признака Лейбница (Теорема 6) выполнены, значит ряд сходится.

При $x = 4$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, который расходится по предельному признаку сравнения, т.к. эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/2}}$ расходится (см. (9)). □

Задача 4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$.

Решение. Подставим в разложение (3) $x = 3$, получим

$$e^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}, \quad \text{откуда} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!} = e^3 - 1.$$

□

Задача 5. Решить уравнение $\sin z = i$.

Решение. Применяя вторую для $\sin z$ из (18), получаем $\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i$ или $e^{iz} - e^{-iz} = -2$. Пусть $e^{iz} = t$, имеем $t - \dfrac{1}{t} = -2$ или $t^2 + 2t - 1 = 0$. Решая данное квадратное уравнение, получаем $(t+1)^2 = 2$, $t = -1 \pm \sqrt{2}$. Отсюда $e^{iz} = -1-\sqrt{2}$ или $e^{iz} = -1+\sqrt{2}$. Получаем

$$iz = \operatorname{Ln}\left(-1-\sqrt{2}\right) = \ln\left|-1-\sqrt{2}\right| + i\operatorname{Arg}\left(-1-\sqrt{2}\right) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + i(\pi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

или

$$iz = \operatorname{Ln}\left(-1+\sqrt{2}\right) = \ln\left|-1+\sqrt{2}\right| + i\operatorname{Arg}\left(-1+\sqrt{2}\right) = \ln\left(\sqrt{2}-1\right) + i(2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

откуда $z = \pi + 2\pi k - i\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ или $z = 2\pi k - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$. □

Задача 6. Найти площадь области, заданной неравенствами: $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Решение. Неравенства $1 \leqslant |z| \leqslant 2$ задают кольцо с центром в начале координат, внутренним радиусом 1 и внешним радиусом 2. Площадь кольца равна $\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$.

Неравенство $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ задает правую полуплоскость $x \geqslant 0$, которая отсекает от кольца половину, так что площадь пересечения будет $\dfrac{3}{2}\pi$. □

Задача 7. Исследовать на аналитичность функцию $f(z) = 2i\overline{z} - 3z^2$.

Решение. Представим функцию $f(z)$ в виде $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и проверим условия Коши-Римана (20):

$$f(z) = 2i\overline{z} - 3z^2 = 2i(x - iy) - 3(x + iy)^2 = 2ix + 2y - 3\left(x^2 + 2ixy - y^2\right) = \\ = \left(3y^2 + 2y - 3x^2\right) + i(2x + 2xy),$$

так что

$$u(x,y) = 3y^2 + 2y - 3x^2, \quad v(x,y) = 2x + 2xy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y + 2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2 + 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Условия Коши-Римана не выполняются нигде, кроме точки $(0,0)$, значит функция не является аналитической. □

Задача 8. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z dz}{z(z-2)}$ с помощью вычетов.

Решение. **Способ 1.** Функция $\dfrac{e^z}{z(z-2)}$ имеет две особых точки $z = 0$ и $z = 2$. Внутри круга $|z| \leqslant 1$ лежит только точка $z = 0$, поэтому по основной теореме о вычетах (теорема 11)

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z(z-2)} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \frac{e^z}{z(z-2)} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{ze^z}{z(z-2)} = 2\pi i \frac{e^0}{0-2} = -\pi i.$$

□

Решение. **Способ 2.** Функция $\dfrac{e^z}{z(z-2)}$ имеет две особых точки $z = 0$ и $z = 2$. Внутри круга $|z| \leqslant 1$ лежит только точка $z = 0$, поэтому функция $\dfrac{e^z}{z-2}$ является аналитической в круге $|z| \leqslant 1$. Тогда по интегральной формуле Коши (21)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z(z-2)} = \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z-0} dz = 2\pi i \frac{e^0}{0-2} = -\pi i.$$

□

Задача 9. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$ с помощью вычетов.

Решение. Функция $F(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)\,(z^2+9)}$ удовлетворяет условиям теоремы 12, ее знаменатель $(z^2+4)\,(z^2+9) = (z+2i)(z-2i)(z+3i)(z-3i)$ имеет два корня в верхней полуплоскости $z = 2i$ и $z = 3i$. По теореме 12

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=2i} F(z) + \operatorname*{res}_{z=3i} F(z) \right).$$

Поскольку $z = 2i$ и $z = 3i$ — простые полюсы $F(z)$, то для вычисления вычетов в этих точках воспользуемся формулой (23):

$$\operatorname*{res}_{z=2i} F(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z+2i)(z+3i)(z-3i)} = \frac{1}{4i \cdot 5i \cdot (-i)} = -\frac{i}{20}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=3i} F(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+3i)} = \frac{1}{5i \cdot i \cdot 6i} = \frac{i}{30}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\,(x^2+9)} = 2\pi i \left(-\frac{i}{20} + \frac{i}{30} \right) = \pi \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15} \right) = \frac{\pi}{30}.$$

□