Практическое занятие 2

Признаки сходимости знакопостоянных рядов.
Признаки сравнения. Признак Даламбера.

Определение. Положительными называются ряды, все члены которых неотрицательны: $a_n \geq 0$.

Напомним виды рядов, сходимость которых была уже рассмотрена на лекции.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический ряд – расходится

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ - ряд Дирихле – сходится при α >1;

расходится при $\alpha \leq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ - при $|q| < 1$ бесконечно убывающая геометрическая прогрессия – сходится.

<u>Первый</u> <u>признак</u> <u>сравнения</u>. Пусть даны два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n . \qquad (2)$$

Если для всех номеров n (или для всех номеров n, бóльших некоторого номера N) выполнено неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Решение. Рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который, как уже было доказано, расходится. Для всех $n \geq 2$ справедливо неравенство $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ и, следовательно, данный ряд также расходится по первому признаку сравнения.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos 3n|}{n^3}$

Сравним исходный ряд с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Для всех n выполняется неравенство $\frac{|\cos 3n|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}$. Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится (ряд Дирихле, α=3 >1), то исходный ряд сходится по первому признаку сравнения.

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$

Для всех n выполняется неравенство $\frac{2^n}{n\cdot 3^n}\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ сходится (бесконечно убывающая геометрическая прогрессия), то исходный ряд сходится по первому признаку сравнения.

<u>Второй признак сравнения</u> (предельный). Пусть даны два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ , \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\ ,\ (b_n>0,\text{ начиная с некоторого номера } n). \tag{2}$$

Если существует конечный, отличный от нуля $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, то ряды (1) и (2) оба сходятся или оба расходятся.

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(2n+1)^2}$

Сравним исходный ряд с рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Рассмотрим предел отношения общих членов этих рядов. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{(2n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2}{(2n+1)^2}=\frac{5}{4}\ne\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле, α=2 >1), то исходный ряд тоже сходится по предельному признаку сравнения.

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^3+2}\cdot tg\,\frac{2}{5n^3+7}$

Найдем ряд, с которым надо сравнивать исходный ряд.

$$a_n=\sqrt{n^3+2}\cdot tg\,\frac{2}{5n^3+7}\sim\sqrt{n^3+2}\cdot\frac{2}{5n^3+7}=\frac{2\sqrt{n^3+2}}{5n^3+7}\sim\frac{1}{n^{3/2}}=b_n$$

Проверим, что ряд для сравнения подобран правильно.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{n^3+2}}{5n^3+7}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n^3+2}\cdot n^{3/2}}{5n^3+7}=\frac{2}{5}\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (ряд Дирихле, α=3/2 >1), то исходный ряд тоже сходится по предельному признаку сравнения.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^2\frac{3}{\sqrt{10n+2}}$

Рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, так как

$$a_n=\arcsin^2\frac{3}{\sqrt{10n+2}}\sim\left(\frac{3}{\sqrt{10n+2}}\right)^2\sim\frac{1}{n}=b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{\sqrt{10n+2}}\right)^2}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n}{10n+2}=\frac{9}{10}\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$$

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, следовательно, исходный ряд тоже расходится по предельному признаку сравнения.

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot(e^{1/\sqrt{n+2}}-1)^5$

Найдем ряд, с которым надо сравнивать исходный ряд.

$$a_n=n^2(e^{1/\sqrt{n+2}}-1)^5\sim\cdot\frac{n^2}{(\sqrt{n+2})^5}\sim\frac{1}{n^{1/2}}=b_n$$

Проверим, что ряд для сравнения подобран правильно.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{\sqrt{(n+2)^5}}}{\frac{1}{n^{1/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot n^2}{\sqrt{(n+2)^5}}=1\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ расходится (ряд Дирихле, α=1/2 < 1), то исходный ряд тоже расходится по предельному признаку сравнения.

3.2. Признак Даламбера

Теорема. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. Если $D < 1$, то ряд сходится, если $D > 1$, то ряд расходится.

Заметим, что если $D = 1$, то признак ответа не дает.

Задача 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{7^n}$.

Решение. Выпишем n+1 – й член ряда. $a_{n+1} = \frac{3(n+1)+5}{7^{n+1}} = \frac{3n+8}{7^n \cdot 7}$

Вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+8}{7^n \cdot 7}}{\frac{3n+5}{7^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+8}{3n+5} \cdot \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} < 1,$$

т.е. ряд сходится по признаку Даламбера.

Задача 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n}$.

Вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)!}{5^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!\cdot(n+2)}{(n+1)!} \cdot \frac{5^n}{5^n \cdot 5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{5} = \infty$$

Следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера.

Задача 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n)!)^2}{(2n+1)!}$.

Вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{((n)!)^2}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{((n+1)!)^2 \cdot (2n+1)!}{((n)!)^2 (2n+3)!}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{4} < 1$$

Следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

Задача 11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{(2n)!!}$

Напомним, что (2n)!! – произведение четных чисел от 2-х до 2n, (2n+1)!! – произведение нечетных чисел до 2n+1.

Предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+4)!}{(2(n+1))!!}}{\frac{(n+3)!}{(2n)!!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+4)!\cdot(2n)!!}{(n+3)!\cdot(2n+2)!!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{2n+2}=\frac{1}{2}<1$$

Следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

Задача 12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$.

Решение. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{2^n n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{2n!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}e>1$$

,

и, согласно признаку Даламбера, данный ряд расходится.