Практическое занятие 14

Математический анализ -3 семестр

Приложения теории вычетов

Основная теорема о вычетах

Теорема 1. Если функция $f(z)$ аналитична всюду внутри замкнутой области D, ограниченной контуром L, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_{1,}z_{2,}\dots,z_n$, лежащих внутри D, тогда $\oint_L f\,(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res}\, f(z)$.

Примеры. Вычислить интеграл:

1). $\int_{|z-1|=1} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz.$

Особые точки подынтегральной функции определяются из уравнения $(z-1)^2(z+2)=0.$

$z_1 = 1 = \frac{Н(0)}{Н(2)} = П(2)$ – полюс второго порядка,

$z_2 = -2 = \frac{Н(0)}{Н(1)} = П(1)$ – полюс первого порядка, z_2 не принадлежит D: $|z-1|<1$.

По основной теореме о вычетах

$$\int_{|z-1|=1} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz = 2\pi i \cdot \underset{z=1}{res} f(z).$$

$$\underset{z=1}{res} f(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{(z+2)}\right)' = \lim_{z\to 1}\frac{z+2-z}{(z+2)^2} = \frac{2}{9}$$

$$\int_{|z-1|=1} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz = 2\pi i \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9}\pi i.$$

2). $I = \int_{|z|=1} z^2 \cdot sin\frac{1}{z} dz.$

Особая точка функции $f(z) = z^2 \cdot sin\frac{1}{z}$ $\quad z_0 = 0$. Она является существенно особой точкой, принадлежит области $|z| \le 1$. Вычет в существенно особой точке найдем, разложив функцию в ряд Лорана по степеням z:

$z^2 \cdot sin\frac{1}{z} = z^2 \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots\right) = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \cdots$

$\underset{z=0}{res}f(z) = C_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$

$I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$

3). $I = \int_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz.$

Особые точки подынтегральной функции – корни уравнения $z^{10} - 1 = 0$.

$z = \sqrt[10]{1} = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi k}{10}}, k = 0,1, \ldots, 9.$

Все они принадлежат кругу $|z| \leq 3$.

Использование основной теоремы о вычетах приводит к громоздким вычислениям. Удобнее воспользоваться теоремой: $I = -2\pi i \cdot res_\infty f(z)$.

Выпишем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$f(z) = z^9 \cdot \frac{1}{z^{10}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^{10}}} = z^9 \cdot \frac{1}{z^{10}}\left(1 + \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{20}} + \cdots\right) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{20}} + \cdots\right)$

$res_\infty f(z) = -1, I = -2\pi i \cdot res_\infty f(z) = -2\pi i \cdot (-1) = 2\pi i.$

4) $I = \int_{|z|=4} \frac{dz}{z^6+9z^4}.$

Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^6+9z^4} = \frac{1}{z^4(z^2+9)}$ внутри окружности $|z| = 4$ имеет три особые точки $z_1 = 0, z_2 = 3i, z_3 = -3i$.

Использование основной теоремы о вычетах приводит к громоздким вычислениям. Удобнее воспользоваться теоремой: $I = -2\pi i \cdot res_\infty f(z)$.

Выпишем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z^6 + 9z^4} = \frac{1}{z^6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{9}{z^2}} = \frac{1}{z^6}\left(1 - \frac{9}{z^2} + \frac{81}{z^4} - \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^6} - \frac{9}{z^8} + \frac{81}{z^{10}} - \cdots$$

Коэффициент $c_{-1} = 0$, т.е. $res_\infty f(z) = 0$, следовательно

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{z^6 + 9z^4} = 0.$$

5). $\int_{|z|=1} \frac{e^z cos\pi z}{z^2+2z} dz$. $\{\pi i\}$

6). $\int_{\left|z-\frac{\pi}{2}\right|=1} \frac{z^2}{sin^3 z \cdot cos z} dz$. $\left\{-\frac{2\pi^3 i}{4}\right\}$

7). $\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^{17}} dz.$ $\left\{\frac{2\pi i}{16!}\right\}$

8). $\int_{|z|=5} \frac{z^2}{e^z+1} dz.$ $\{4\pi^3 i\}$

9). $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{sin^2 \pi z}{z^2} dz$

10). $\int_{|z|=1} \frac{1-cos3z}{9z^9} dz$

<u>Вычисление несобственных интегралов</u>

1. <u>Интегралы от рациональных функций.</u>

Теорема 2. Если $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены, причем все корни знаменателя комплексные и степень $Q(x)$ «m» хотя бы на две единицы больше степени $P(x)$ «n» $(m - n \geq 2)$, то $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} F(z)$, где $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ и z_k – полюсы функции $F(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

<u>Пример</u>. 1). Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

Введем функцию $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}$.

Т.е. на действительной оси при $z = x$ $f(z) = f(x)$. Функция $f(z)$ имеет особые точки $z_{1,2} = \pm 2i$, $z_{3,4} = \pm 3i$ – это простые полюсы. В верхней

полуплоскости находятся точки $z_1 = 2i, z_3 = 3i$.
Условия теоремы 2 для функции $f(z)$ выполнены, т.е. можно воспользоваться формулой из этой теоремы. Для этого необходимо вычислить $res_{z=2i}f(z)$ и $res_{z=3i}f(z)$.

$$res_{z=2i}\frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z+2i)(z^2+9)} = \frac{1}{4i(9-4)} = \frac{1}{20i}.$$

$$res_{z=3i}\frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \lim_{z\to 3i}\frac{1}{(z+3i)(z^2+4)} = \frac{1}{6i(-9+4)} = -\frac{1}{30i}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)} = 2\pi i\left(\frac{1}{20i}-\frac{1}{30i}\right) = 2\pi i\frac{1}{60i} = \frac{\pi}{30}.$$

2). Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}\quad\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

2. <u>Вычисление интегралов с тригонометрическими функциями вида</u>

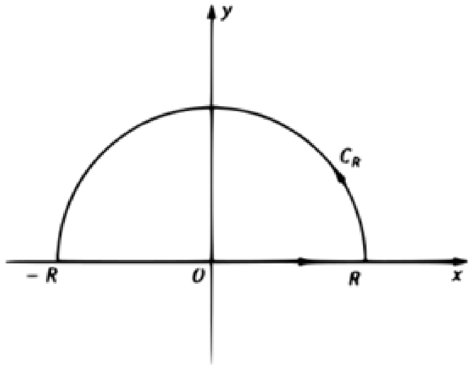
$$\int_0^{+\infty}R(x)\cos\alpha x\,dx,\ \int_0^{+\infty}R(x)\sin\alpha x\,dx,$$

где $R(x)$ – правильная рациональная дробь, $\alpha > 0$ – любое вещественное число.

Лемма Жордана. Если функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z| \to \infty$, тогда при $\alpha > 0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}e^{i\alpha z}f(z)dz = 0\,,$$

где контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости.



Теорема 3. Если функция $f(z)$, заданная на всей действительной оси, может быть продолжена на верхнюю полуплоскость и полученная функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси, тогда при $a > 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left[f(z)e^{iaz}\right]$, где z_k – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Так как согласно формуле Эйлера $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$,

т.е. $\cos\alpha x = Re(e^{i\alpha x})$, $\sin\alpha x = Im(e^{i\alpha x})$, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = Re\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right], (Im\, z_k > 0).$$

Примеры

1). Вычислить интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2} dx$.

Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}$

Так как подынтегральная функция $F(x)$ четная, то $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{2} Re\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} F(z)\right), Im\, z_k > 0$.

$z = 2i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является полюсом второго порядка.

$z = -2i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 2i$

$$res_{z=2i}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\right) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}(z-2i)^2\right)' = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{ie^{iz}(z+2i)^2 - 2(z+2i)e^{iz}}{(z+2i)^4} = \lim_{z\to 2i} \frac{ie^{iz}(z+2i) - 2e^{iz}}{(z+2i)^3} =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{ie^{iz}z - 4e^{iz}}{(z+2i)^3} = \frac{-2e^{-2} - 4e^{-2}}{(4i)^3} = \frac{-6e^{-2}}{-64i} = \frac{3}{32i} e^{-2}$$

$$I = \frac{1}{2}\, Re\left(2\pi i \frac{3}{32i} e^{-2}\right) = \frac{3\pi}{32} e^{-2}.$$

2). Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 6x}{x^2+4x+13} dx$.

Введем вспомогательную функцию $F(z)=\frac{ze^{i6z}}{z^2+4z+13}$. Найдем ее особые точки: $z^2+4z+13=0$, $z_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{-4\pm 6i}{2}$.

$z_1=-2+3i$, $z_2=-2-3i$. Они являются простыми полюсами.

z_2 находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

$$res_{z=-2+3i}\left(\frac{ze^{i6z}}{z^2+4z+13}\right)=\left.\frac{ze^{i6z}}{2z+4}\right|_{z=-2+3i}=\frac{(-2+3i)e^{i(-12+18i)}}{2(-2+3i)+4}=\frac{(-2+3i)e^{-18-12i}}{6i},$$

$$I=Im\left(2\pi i\cdot\frac{(-2+3i)e^{-18}e^{-12i}}{6i}\right)=Im\left[\frac{\pi}{3}(-2+3i)e^{-18}(cos12-isin12)\right]=$$

$$=Im\left[\frac{\pi}{3e^{18}}(-2cos12+3icos12+2isin12+3sin12)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{3e^{18}}(3cos12+2sin12).$$

3). Вычислить интеграл $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$. $\left\{\frac{\pi}{3e^3}(cos1-3sin1)\right\}$

4). Вычислить интеграл $I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin 3x}{x^2+16}dx$. $\left\{\frac{\pi}{2e^{12}}\right\}$

Домашнее задание: Типовой расчет,

Часть 1, задачи 1.23, 1.24

Часть 2, задачи 2.9, 2.10