



Математический анализ-3 семестр

Лекция 7.

Тема 7. Тригонометрический ряд Фурье

7.1. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье

7.2. Сходимость ряда Фурье

7.3. Сходимость в среднем ряда Фурье

7. Тригонометрический ряд Фурье

При решении многих технических задач приходится иметь дело с периодическими процессами, для описания которых требуются периодические функции. Простейшей периодической функцией периода 2π является функция $\sin(x + \alpha)$. При сложении периодических функций

$$\begin{cases} \sin(x + \alpha_1), T = 2\pi \\ \sin(2x + \alpha_2), T = \frac{2\pi}{2} \\ \dots \\ \sin(nx + \alpha_n), T = \frac{2\pi}{n} \end{cases},$$

получим периодическую функцию с периодом 2π .

Естественно возникает обратный вопрос: можно ли заданную периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π представить в виде суммы конечного или бесконечного числа простейших периодических функций вида $\sin(nx + \alpha_n)$:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n) ?$$

Постоянное слагаемое A_0 можно считать периодической функцией с любым периодом, в том числе и с периодом 2π .

В механике функция $\sin(nx + \alpha_n)$ описывает простейшее гармоническое колебательное движение. Представление



периодической функции $f(x)$ в виде суммы простейших периодических функций можно рассматривать как разложение сложного колебания на отдельные гармонические колебания. Функции вида $\sin(nx + \alpha_n)$, входящие в состав разложения периодической функции $f(x)$, называются гармоническими составляющими этой функции или просто *гармониками*.

Пользуясь тригонометрическим тождеством:

$\sin(nx + \alpha_n) = \sin\alpha_n \cdot \cos nx + \cos\alpha_n \cdot \sin nx$, получим

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\alpha_n \cdot \cos nx + A_n \cos\alpha_n \cdot \sin nx$$

Обозначая $A_n \sin\alpha_n = a_n$, $A_n \cos\alpha_n = b_n$, разложение периодической функции $f(x)$ можно переписать в виде:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) \quad (1)$$

7.1. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье

Пусть функция $f(x)$:

- 1) определена на всей числовой оси,
- 2) периодична с периодом 2π
- 3) является непрерывной или кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ (функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если она непрерывна во всех точках этого отрезка за исключением конечного числа точек, в которых функция терпит разрыв первого рода, т.е. в этих точках существуют конечные односторонние пределы функции, не равные друг другу).

Предполагая, что $f(x)$ представляется в виде суммы простейших тригонометрических функций, найдем коэффициенты ряда (1). С этой целью проинтегрируем обе части равенства (1) на отрезке $[-\pi, \pi]$, что оправдано, например, в случае равномерной



сходимости на этом отрезке функционального ряда, стоящего в правой части равенства (1).

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} A_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = A_0 \cdot 2\pi$$

откуда

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Для вычисления коэффициентов a_n умножим обе части равенства (1) на $\cos kx$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} A_0 \cos kx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx \right) \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx = 0, \quad \text{если } k \neq n,$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx = 0, \quad \text{для любых } k \text{ и } n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_0 \cos kx dx = 0,$$

если $n \neq 0$, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \cdot \pi,$$

откуда:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично, для вычисления коэффициентов b_n умножим обе части равенства (1) на $\sin kx$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$, получим:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Чтобы формулы для коэффициентов выглядели единообразно, обозначим

$$a_0 = 2A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Итак, для любой функции $f(x)$, кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, можно вычислить коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

которые называются *коэффициентами Фурье* этой функции, и поставить в соответствие этой функции ряд:



$$f(x) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) \quad (3)$$

который называется *тригонометрическим рядом Фурье* этой функции.

Определение 1. Система функций:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots,$$

на основе которой построен тригонометрический ряд Фурье, называется *основной тригонометрической системой функций*. Эта система на отрезке $[-\pi, \pi]$ обладает свойством ортогональности: интеграл от произведения любых двух функций этой системы на отрезке $[-\pi, \pi]$ равен нулю.

7.2. Сходимость ряда Фурье

Предполагая, что функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, поставим этой функции в соответствие ее тригонометрический ряд Фурье.

Предположим теперь, что функция является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это означает, отрезок $[-\pi, \pi]$ можно разделить на конечное число отрезков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах отрезков имеет не только конечные предельные значения, но и односторонние производные при условии замены на концах этих отрезков значений функции на соответствующие предельные значения.

Теорема Дирихле устанавливает условия сходимости тригонометрического ряда Фурье и связь между значением самой функции и суммой ее тригонометрического ряда Фурье. Сформулируем теорему Дирихле без доказательства. В формулировке теоремы используем выражения $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ для обозначения односторонних пределов функции $f(x)$ при условии, что x стремится к x_0 слева и справа соответственно.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда тригонометрический



ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезке $[-\pi, \pi]$, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет следующим условиям:

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках интервала $(-\pi, \pi)$, в которых $f(x)$ непрерывна,

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$ во всех точках разрыва функции,

3) $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$.

Замечание. Теорема остается справедливой в случае, когда функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, является периодической с периодом 2π и на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно-дифференцируема.

Точнее, в этом случае тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится на всей числовой оси, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет условиям:

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках прямой $(-\infty, +\infty)$, в которых $f(x)$ непрерывна,

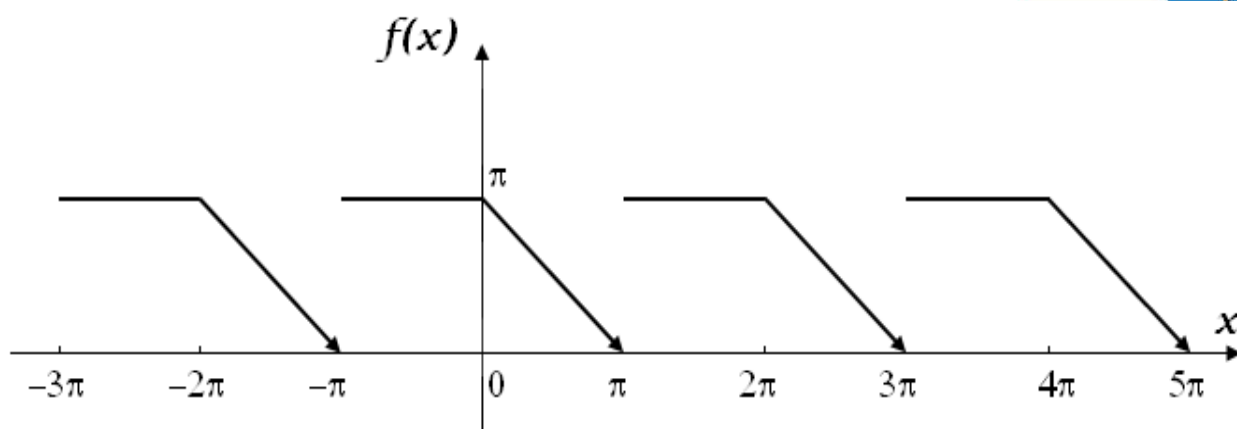
2) $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$ во всех точках разрыва функции.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π , заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Обосновать сходимость ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье.

График функции $f(x)$ выглядит так:



Решение. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \pi dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{3}{2} \pi, \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4} \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \pi \cdot \cos nx dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot \cos nx dx \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \pi - x & dv = \cos nx dx \\ du = -dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(0 + \frac{\pi - x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \frac{2}{\pi n^2}, n = 2k + 1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \pi \cdot \sin nx dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot \sin nx dx \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \pi - x & dv = \sin nx dx \\ du = -dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\pi - x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) =$$



$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{\pi} + \frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{\pi}{n} \right) = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Тригонометрический ряд Фурье $S(x)$, соответствующий данной функции, имеет вид:

$$f(x) \rightarrow \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) - \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$$

Поскольку данная функция непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[-\pi, \pi]$, то согласно теореме Дирихле для всех $x \in (-\pi, \pi)$ имеет место равенство: $f(x) = S(x)$.

Например, полагая $x = 0$, получим:

$$\pi = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$

или

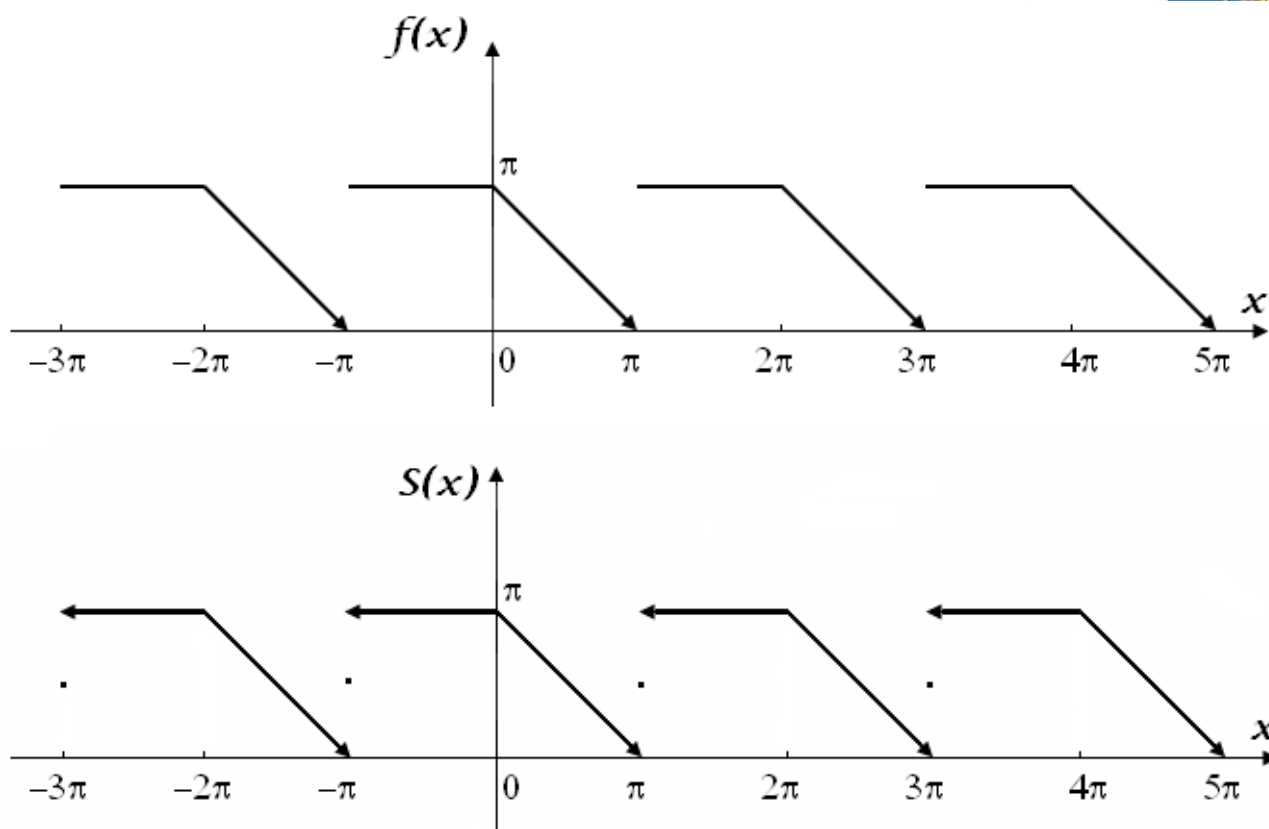
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

На концах отрезка $[-\pi, \pi]$ сумма ряда Фурье имеет следующее значение:

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)) = \frac{1}{2}\pi.$$

На рисунке показаны графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



7.3. Сходимость в среднем ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, и ставится задача о наилучшем приближении этой функции с помощью другой функции $g(x)$ из определенного класса функций, определенных на этом же отрезке. Если требуется обеспечить близость функций во всех точках отрезка, то в качестве критерия близости рассматривается величина, равная

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

и функция $g(x)$ выбирается так, чтобы эта величина принимала наименьшее возможное значение. В этом случае обеспечивается равномерная на всем отрезке близость функций. Если требуется обеспечить близость функций на отрезке в среднем, то в качестве критерия близости рассматривают величину, равную

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Для достижения наилучшего приближения в среднем требуется минимизировать эту величину.



Пусть функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда согласно теореме Дирихле тригонометрический ряд Фурье этой функции во всех точках непрерывности сходится к этой функции. Можно показать, что величина

$$\delta_n = \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx,$$

характеризующая отклонение в среднем частичной суммы $S_n(x)$ тригонометрического ряда Фурье от функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

Это означает, что тригонометрический ряд Фурье сходится в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$ к своей сумме.

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют равенству:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

которое называется *равенством Парсеваля* и является аналогом теоремы Пифагора в бесконечномерном пространстве функций, кусочно-дифференцируемых на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Действительно, если считать, что квадрат “длины функции” в этом пространстве равен

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

что основная тригонометрическая система функций является базисом этого пространства,

а ряд Фурье – разложением функции по этому базису, то, согласно равенству Парсеваля, квадрат “длины функции” равен сумме квадратов ее координат.

В частном случае, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет кусочно-непрерывную производную на этом отрезке, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках этого отрезка к функции $f(x)$, причем равномерно.