**Практическое занятие №10**
**Нахождение области сходимости рядов в комплексной плоскости.**

**Пример 1.** Записать пять первых членов последовательностей:

а) $z_n = i^n$; б) $\omega_n = (1+i)^n$.

Подставляя последовательно значения $n = 1, 2, \ldots, 5$, получаем:

а) $z_1 = i;\ \ z_2 = -1;\ \ z_3 = -i;\ \ z_4 = 1;\ \ z_5 = i$;

б) $\omega_1 = 1+i,\ \ \omega_2 = (1+i)^2 = 2i,\ \ \omega_3 = (1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i,$

$\omega_4 = (1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4,\ \ \omega_5 = (1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = -4-4i.$

**Пример 2.** Исследовать на ограниченность последовательности: $z_n = i^n,\ \omega_n = (1+i)^n$.

**Решение**. Так как $|z_n| = |i^n| = 1$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется, например, неравенство $|z_n| < 2$. По определению последовательность $z_n = i^n$ — ограниченная.

Для второй последовательности, используя свойство модуля, находим

$|\omega_n| = |(1+i)^n| = (|1+i|)^n = (\sqrt{2})^n.$

Далее рассматриваем неравенство $(\sqrt{2})^n > M$ при любом $M$ и решаем его относительно $n\colon n\lg\sqrt{2} > \lg M,\ n > \dfrac{2\lg M}{\lg 2}$. В качестве $n_0$ можно взять любое $N(M) = \dfrac{2\lg M}{\lg 2}$.

По определению последовательность неограниченная.

**Пример 3**. Доказать, что последовательность $z_n$ вида $z_n = q^n$ является бесконечно малой, если $|q| < 1$, и бесконечно большой, если $|q| > 1$.

Пусть $|q| < 1$. Воспользуемся правилом 1.1:

1) составляем неравенство $|z_n| < \varepsilon$, то есть $|q^n| = |q|^n < \varepsilon$;

2) решаем его относительно $n\colon n > \dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$;

3) обозначив $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]+1$ ($[x]$ — целая часть числа $x$), получим, что для $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n|<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$. По определению $z_n$ — бесконечно малая последовательность.

Учитывая связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей, заключаем, что $z_n=q^n$ при $|q|>1$ является бесконечно большой.

Так, бесконечно малыми являются, например, последовательности:

$\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$, $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^n$, $\left(\dfrac{1-2i}{3+i}\right)^n$, $\left(\dfrac{i}{2-3i}\right)^n$; бесконечно большой $(1+i)^n$, $\left(\dfrac{2+i}{1-i}\right)^n$.

**Пример 4.** Применяя определение, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-2ni}{n+2}=1-2i$.

Используем правило 1.2:

1) составляем последовательность

$$\alpha_n=z_n-A=\frac{n-2ni}{n+2}-(1-2i)=\frac{4i-2}{n+2};$$

2) доказываем, что $\alpha_n$ — бесконечно малая. Находим $|\alpha_n|=\dfrac{|4i-2|}{n+2}=\dfrac{\sqrt{20}}{n+2}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n|=0$, то $|\alpha_n|<\varepsilon,\ n>N(\varepsilon)$ и, следовательно, $\alpha_n$ — бесконечно малая.

**Пример 5.** Вычислить предел последовательности с комплексными членами $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3ni}{i-n}$.

**Первый способ.** Используем утверждение 1.2. Обозначим $z_n=\dfrac{2+3ni}{i-n}$ и найдем $x_n=\operatorname{Re}z_n,\ y_n=\operatorname{Im}z_n$, выполняя операцию деления комплексных чисел:

$$\frac{2+3ni}{i-n}=\frac{(2+3ni)(n+i)}{-(n-i)(n+i)}=\frac{-n+i(3n^2+2)}{-(n^2+1)}=\frac{n}{n^2+1}+i\,\frac{-(3n^2+2)}{n^2+1}.$$

Получаем $x_n = \frac{n}{n^2+1},\ y_n = \frac{-(3n^2+2)}{n^2+1}$. Найдем пределы последовательностей действительных чисел:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-(3n^2+2)}{n^2+1} = -3$, то есть $a = 0,\ b = -3$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a + bi = -3i$.

**Второй способ.** Используем утверждение 1.3, применяя соответствующие методы, как в действительном анализе. Находим

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+3ni}{i-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+3i}{\frac{i}{n}-1} = -3i$, так как здесь $\frac{i}{n}$ и $\frac{2}{n}$ бесконечно малые.

**Пример 6**. Исследовать на сходимость ряды; в случае сходимости найти суммы рядов:

$$\textbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n; \qquad \textbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} + i\frac{1}{2^n}\right).$$

1) Так как $|z_n| = \left(\frac{i}{2}\right)^n$, то, применяя признак Коши, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, ряд сходится абсолютно.

Составляем последовательность частичных сумм ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{2}\right)^k$ и обозначаем $q = \frac{i}{2}$. Тогда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ — сумма $n$ членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Так как $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ (см. пример 1.38), поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{q}{1-q}$.

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ при $|q| < 1$ сходится и сумма его вычисляется по формуле $S = \dfrac{q}{1-q}$. В данном случае $q = \dfrac{i}{2}$, поэтому $S = \dfrac{i/2}{1-i/2} = \dfrac{i}{2-i}$.

2) Используем правило 1.3:

1) из $z_n = \dfrac{1}{3^n} + i\dfrac{1}{2^n}$ имеем $x_n = \dfrac{1}{3^n}$ и $y_n = \dfrac{1}{2^n}$;

2) составляем ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Ряды сходятся как ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n,\ |q| < 1$. и их суммы равны $S_1 = \dfrac{1/3}{1-1/3} = \dfrac{1}{2},\ S_2 = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1$. Суммой данного ряда является число $S = S_1 + iS_2 = \dfrac{1}{2} + i$.

**Пример 7**. Исследовать на сходимость ряды:

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3in-1}{2in^2-\sqrt{3}}; \qquad \mathbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3in-1}{2in^4-\sqrt{3}}.$$

Для этих рядов нахождение $x_n$ и $y_n$ затруднительно, поэтому будем пользоваться другими признаками:

1) здесь $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{1}{2i} \neq 0$, ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости;

2) для этого ряда $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, необходимый признак выполняется, но в силу его недостаточности требуется дальнейшее исследование. Воспользуемся замечанием 1.3. Применим признак сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z_n|}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^4+3in^3-n^2}{2in^4-\sqrt{3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|n^4-n^2+3in^3|}{|\sqrt{3}-2in^4|} = \frac{1}{2}.$$

Итак, по признаку сравнения ряд сходится абсолютно.

**Пример 8**. Доказать, что сходится абсолютно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^n}{n!}$

Используя признак Даламбера, рассмотрим $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2i)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot(2i)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2i}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, то ряд сходится абсолютно.

Заметим, что сходится абсолютно любой ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, где $z$ — любое комплексное число.

**Пример 9.** Найти произведение рядов $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}$

Как отмечено в примере 8, ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ — абсолютно сходятся при любом фиксированном $z$. Поэтому сомножителями являются абсолютно сходящиеся ряды. Перемножим их по правилу перемножения многочленов:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\left(1+z_1+\frac{z_1^2}{2!}+\ldots+\frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!}+\ldots+\frac{z_1^n}{n!}+\ldots\right)\cdot\left(1+z_2+\frac{z_2^2}{2!}+\ldots+\frac{z_2^k}{k!}+\ldots+\frac{z_2^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=1+(z_1+z_2)+\left(\frac{z_1^2}{2!}+z_1z_2+\frac{z_2^2}{2!}\right)+\ldots+\left(\frac{z_1^n}{n!}+\frac{z_1^{n-1}z_2}{(n-1)!}+\ldots+\frac{z_1^{n-k}z_2^k}{(n-k)!k!}+\ldots+\frac{z_2^n}{n!}\right)+\ldots$$

Перепишем последнее выражение следующим образом:

$$1+(z_1+z_2)+\frac{1}{2!}(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2)+\ldots+\frac{1}{n!}(z_1^n+nz_1^{n-1}z_2+\ldots+z_2^n)+\ldots$$

Общий член этого ряда имеет вид $\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{n}C_n^k z_1^{n-k}z_2^k$, или, согласно формуле бинома Ньютона, $\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n$. Таким образом, окончательно получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}.$$

**Пример 10**. Доказать, что для ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, где $c_n\neq 0$ для любого $n$, радиус сходимости можно определить по формулам:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}},\qquad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \quad (3.12)$$

Найдем область сходимости ряда, используя формулы (3.8):

$$|f(z)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_nz^n|}=|z|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0$, то неравенство $|f(z)|<1$ выполняется при любом $z$, т.е. ряд сходится всюду и $R=\infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\infty$, то неравенство $|f(z)|<1$ не выполняется ни для какого значения $z\neq 0$ и ряд сходится только в одной точке $z=0$, то есть $R=0$.

В случае, когда предел является конечным и не равен нулю, обозначим его $\ell$, то есть $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\ell$. Тогда неравенство $|f(z)|<1$, то есть $|z|\cdot\ell<1$, выполняется для $z$, удовлетворяющих условию $|z|<\frac{1}{\ell}$, а это есть круг сходимости, следовательно, $R=\frac{1}{\ell}$. Первая из формул (3.12) доказана. Аналогично доказывается вторая.

**Пример 11.** Найти области сходимости комплексных рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}z^n$.

Радиус сходимости каждого из рядов $R=1$, так как для первого ряда $c_n=\frac{1}{n^2}$ и согласно (3.12) $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|=1$; для второго ряда имеем $c_n=\frac{1}{n}$ и $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$; для третьего из $c_n=1$ получаем $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$. Поэтому областью сходимости каждого из этих рядов является круг $|z|<1$.

Исследуем сходимость рядов на границе круга сходимости — на окружности $|z|=1$, или, что то же, $z=e^{i\varphi}$.

Для первого ряда в точках границы, т.е. при $|z|=1$, получаем абсолютно сходящиеся ряды, так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ сходится во всех граничных точках. Поэтому он сходится абсолютно — круге $|z|\leqslant 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}z^n$ на границе расходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, очевидно, расходится в точке $z=1$ (точке границы $z=e^{i\varphi}$ при $\varphi=0$) как гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и сходится в точке $z=-1$ (точке $z=e^{i\varphi}$ при $\varphi=\pi$) как знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Заметим, что сходимость последнего ряда неабсолютная. Можно показать, что ряд расходится на границе $z=e^{i\varphi}$ только при $\varphi=0$, то есть $\varphi=0$, а во всех других точках границы, т.е. при $\varphi\neq 0$, он сходится.

Заметим, что данные в примере ряды могут быть получены один из другого с помощью дифференцирования или интегрирования. Так, из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ получаем дифференцированием ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$ или $\frac{1}{z}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, а из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ также дифференцированием — ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{n-1}$ или $\frac{1}{z}\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$.

**Пример 12.** Найти радиус сходимости рядов: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n(z-1)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{3^n}$.

а) Здесь $c_n=3^n$, и по формуле (3.12) находим: $R=\frac{1}{\ell}$, где $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=3$. Следовательно, $R=\frac{1}{3}$ и $|z-1|<\frac{1}{3}$ круг сходимости ряда.

б) Ряд имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k z^k=1+\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{3^2}+\ldots+c_k z^k+\ldots$.

Коэффициенты при нечетных степенях $z$ равны нулю, т.е. $c_k = 0$ при $k = 2n - 1$ и $c_k = \frac{1}{3^n}$ при $k = 2n$. Радиус находим по формуле (3.11):

$$R = \frac{1}{\ell}, \qquad \ell = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[n]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $R = \sqrt{3}$ и $|z| < \sqrt{3}$ — круг сходимости ряда.

Можно, как отмечено в п.2 замечаний 3.1, поступить иначе. Найдем область сходимости ряда, используя формулу (3.8):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}|z^{2n}|} = \frac{|z|^2}{3}.$$

Из неравенства $\frac{|z|^2}{3} < 1$ находим $|z| < \sqrt{3}$ — круг сходимости и $R = \sqrt{3}$ — радиус сходимости.

**Пример 13**. Найти суммы следующих рядов с комплексными членами:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$.

В первых двух случаях имеем ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Для $|q| < 1$ — такой ряд сходящийся. Последовательность частичных сумм $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$ может быть записана по формуле суммы членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$. При $|q| < 1$ находим $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$ — сумма членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии, для которой первый член $b_1 = 1$ и знаменатель $q$. Сумма ряда вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k z^n,\ k \geqslant 1,\ k$ — целое, может быть получена последовательным дифференцированием ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, а ряды $\sum_{n=k}^{\infty} z^n,\ k>0$, отличаются от $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ на конечное число слагаемых.

а) Для ряда имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1. \tag{3.13}$$

б) Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ или $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ аналогично пункту "а" находим:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2-z}, \quad |z|<2.$$

в) Для решения используем свойство дифференцирования ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Получаем $\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)'$ или $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$. Окончательно находим $\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{1}{(1-z)^2}$ или $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2},\ |z|<1$.

г) Используя формулу (3.13) для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^0 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - 1$ имеем

$$S = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -1 + \frac{1}{1-z} = \frac{z}{1-z}.$$

**Пример 14.** Найти кольцо сходимости и сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^n}$.

Запишем ряд в виде $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^n}+\frac{2^n}{z^n}\right)$ и, повторяя решение примера 3.4, находим кольцо сходимости ряда $2<|z|<3$. Сумму ряда $S(z)$ можно записать в виде $S(z)=S_1(z)+S_2(z)$, где $S_1$ -сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$, $S_2$ — ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$. Для нахождения суммы этих рядов применим формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Получаем $S_1=\frac{\frac{z}{3}}{1-\frac{z}{3}}$ для $|z|<3$ и $S_2=\frac{\frac{2}{z}}{1-\frac{2}{z}}$ для $|z|>2$.

Окончательный ответ:

$$S(z)=\frac{z}{3-z}+\frac{2}{z-2}=\frac{z^2-4z+6}{(z-2)(3-z)}.$$

Заметим, что функция $S(z)$ является аналитической всюду, кроме точек $z=2$ и $z=3$, суммой данного ряда она является только в кольце $2<|z|<z$.

Отметим также, что в данном ряде отсутствует свободный член. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^n}$, где свободный член равен 1 (при $n=0$), очевидно, сходится в том же кольце, а сумма его равна

$$S(z)=S_1(z)+S_2(z)=\frac{1}{1-\frac{z}{3}}+\frac{2}{z-2}=\frac{z}{(3-z)(z-2)}.$$

Она действительно отличается только на величину свободного члена, т.е. на единицу от найденной выше.