Математический анализ-3 семестр

Лекция 2

Тема 2. Числовые ряды с положительными членами

2.1. Критерий сходимости

2.2. Признаки сравнения

2.3. Признак Даламбера

2.4. Радикальный признак Коши

2.5. Интегральный признак Коши

2.6. Общие рекомендации по исследованию на сходимость положительных рядов

2.Числовые ряды с положительными членами

2.1. Критерий сходимости

Определение 1. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, все члены которого неотрицательны: $a_n \geq 0\ \forall n$, называется *положительным* рядом.

Последовательности частичных сумм таких рядов монотонно возрастают, т.к. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$.

По теореме Больцано-Вейерштрасса, монотонная последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена. Следовательно:

Теорема 1. Положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм ограничена.

Для непосредственного применения этого простого утверждения требуется делать оценку частичных сумм ряда, а это оказывается сложно в большинстве случаев. Как правило, судить о сходимости или расходимости ряда удается, применяя некоторые достаточные признаки, например, сравнивая данный ряд с другим, заведомо сходящимся или расходящимся.

2.2. Признаки сравнения

Теорема 2 (*первый признак сравнения*). Пусть даны два положительных ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0\ \forall n$ и
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \geq 0\ \forall n$.

Если для всех номеров n (или для всех номеров, бóльших некоторого номера N) выполнено неравенство $a_n \leq b_n$, то: из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего).

Доказательство. Будем предполагать, что неравенство $a_n \leq b_n$ выполнено для всех номеров n. В противном случае можно отбросить конечное число членов ряда, для которых неравенство не выполнено, что не повлияет на сходимость ряда. Тогда $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены, т.е. $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq S$, где S − некоторая константа. Но тогда ограничены и частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и ряд сходится.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то, предполагая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, получим противоречие с предыдущим доказанным утверждением. Теорема доказана.

Пример 1.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится, как сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Для всех номеров n верно, что $\frac{1}{2^n+\sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$.

Согласно первому признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Пример 2.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который, как уже было доказано, расходится.

Для всех $n > 1$ верно, что $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, и, следовательно, исходный ряд также расходится по признаку сравнения.

Пример 3.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится. Для всех $n \geq 3$ верно, что

$\ln n < n$, $\frac{1}{ln n} > \frac{1}{n}$, и, следовательно, исходный ряд также расходится.

Теорема 3 (второй признак сравнения, или предельный).

Пусть даны два положительных ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n > 0$ (начиная с некоторого номера).

Если существует конечный, отличный от нуля $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$,

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

По определению предела:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)\colon\ \forall n \geq N(\varepsilon)\colon\ \left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon$

$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - A < \varepsilon,$

$a_n < (A + \varepsilon) \cdot b_n$

Т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то согласно свойству сходящихся рядов сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(A + \varepsilon) \cdot b_n$, а, значит, по первому признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. По условию теоремы существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$, конечный и отличный от нуля. Аналогично придем к выводу, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Итак, если один из рядов сходится, то другой также сходится.

Далее, предполагая, что один из рядов расходится, а другой сходится, получим противоречие с уже доказанным утверждением. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следствие 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 4.

Докажем еще раз расходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, сравнивая его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, общий член которого

$a_n = ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - lnn,$

а частичная сумма

$S_n = (\ln 2 - ln1) + (\ln 3 - ln2) + \cdots + (\ln(n+1) - lnn) =$

$= \ln(n+1) \to \infty$ при возрастании n. Следовательно, этот ряд расходится.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = lne = 1.$$

Согласно предельному признаку сравнения гармонический ряд расходится.

<u>Пример 5.</u>

Пользуясь определением сходимости, т.е. рассматривая предел частичных сумм, мы уже доказали, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Значит, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.к. предел отношения общих членов этих рядов конечен и отличен от нуля:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

<u>Пример 6.</u>

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{5n}$. Выберем ряд для сравнения:

$\lim\limits_{n\to\infty} tg\,\frac{\pi}{5n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{5n} = 0$, из равенства нулю предела общего члена ряда вывод о сходимости или расходимости сделать нельзя, но можно выбрать ряд для сравнения – гармонический.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5}$. Предел конечен и отличен от нуля, исходный ряд расходится.

<u>2.3. Признак Даламбера</u>

При применении признаков сравнения необходимо подбирать известные сходящиеся или расходящиеся ряды. Признак Даламбера позволяет решить вопрос о сходимости ряда, проделав некоторые действия с самим рядом.

Теорема 4. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. Тогда:

если $D < 1$, то ряд сходится,

если $D > 1$, то ряд расходится.

Если $D = 1$, то признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости.

Доказательство.

1). Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)\colon\ \ \forall\ n \geq N(\varepsilon)\colon\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - D\right| < \varepsilon,$

$D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon.$

2). Пусть $D < 1$. Выберем ε такое, что

$D + \varepsilon < 1$ и рассмотрим правую часть неравенства:
$a_{n+1} < (D + \varepsilon)\cdot a_n.$

Оно выполнено, начиная с некоторого номера N.
Обозначим $D + \varepsilon = q,\ q < 1.$

Итак, $\forall\ n \geq N\ a_{n+1} < q\cdot a_n$:

$a_{N+1} < a_N\cdot q,$

$a_{N+2} < a_{N+1}\cdot q < a_N\cdot q^2,$

. . . . . .

$a_{N+k} < a_N\cdot q^k, \ldots$

т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, согласно первому признаку сравнения, ряд сходится.

3). Если $D > 1$ или $D = \infty$, то выберем ε такое, что $D - \varepsilon > 1$ и рассмотрим левую часть неравенства:

$(D - \varepsilon)\cdot a_N < a_{N+1}$,

т.е. члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, и, значит, ряд расходится.

Замечания.
1). При $D = 1$ признак Даламбера не работает.
2). Признак Даламбера удобно применять, если a_n содержит $n!$ или a^n.

Пример 7.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$. Вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}<1,$$ согласно признаку Даламбера, данный ряд сходится.

Пример 8.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$$ и, согласно признаку Даламбера, данный ряд расходится.

Пример 9.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0<1,$$

ряд сходится.

2.4. Радикальный признак Коши

Теорема 5. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$.

Если $K < 1$, то ряд сходится,

если $K > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$, то

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N(\varepsilon)$: $\forall \; n \geq N(\varepsilon)$:

$\left|\sqrt[n]{a_n} - K\right| < \varepsilon$, или $K - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon$.

Пусть $K < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-K}{2} > 0$. Согласно определению предела, начиная с некоторого номера N, будет выполнено неравенство:

$\sqrt[n]{a_n} < K + \frac{1-K}{2} = \frac{K+1}{2} = q < 1$ или $a_n < q^n$, т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, ряд сходится.

Если $K > 1$ или $K = \infty$, то, рассмотрев левую часть неравенства $K - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$, члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, и, значит, ряд расходится.

Замечание. При $K = 1$ признак Коши-радикальный не работает.

Пример 10.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} < 1$,

значит, ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Пример 11.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Применим радикальный признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{2} > 1$, значит, ряд расходится.

Пример 12.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln^n(n+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln(n+1)} = 0 < 1, \text{ ряд сходится.}$$

Пример 13.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

так как:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n} lnn} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{lnn}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1/n}{1}} = 1 \text{ . Ряд сходится.}$$

(При вычислении предела показателя степени применили правило Лопиталя).

Замечания.

1). $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(\ln n)} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{lnn}\cdot\frac{1}{n}} = 1$.

2). $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1$ (аналогично).

3). Признаки Даламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда в случае, когда соответствующие пределы равны 1.

Например, вычислим эти пределы для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходимость которого была доказана:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Такой же результат получим, рассматривая сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

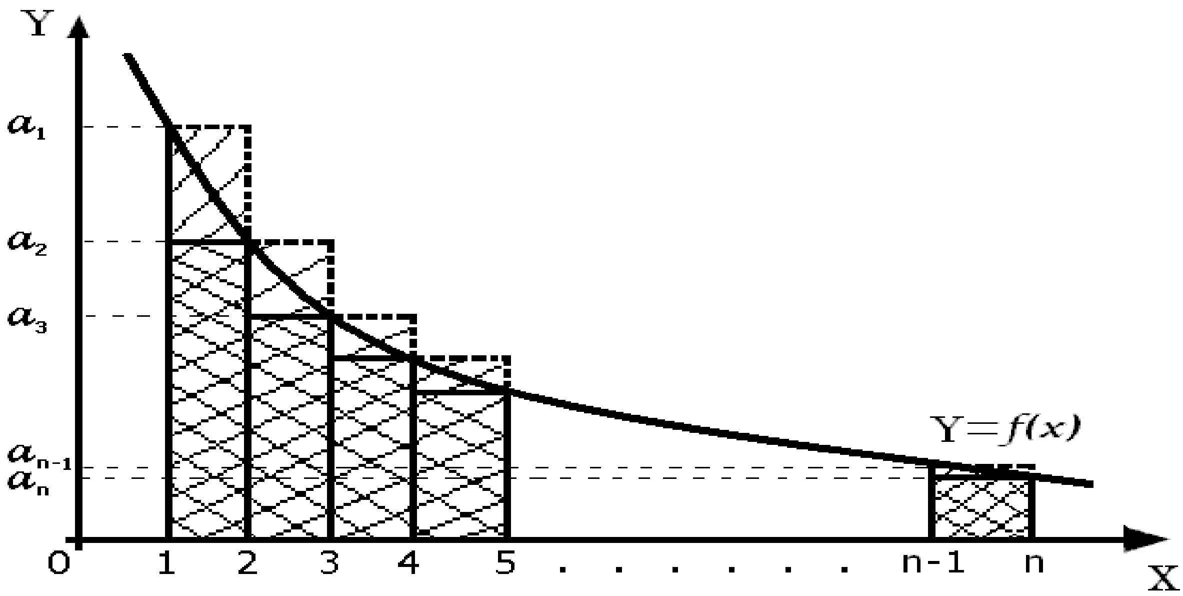
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1.$$

2.5. Интегральный признак Коши

Теорема 6. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, общий член которого можно рассматривать как функцию от n: $a_n=f(n)$. Предположим, что функция $f(x)$ определена, положительна, непрерывна и монотонно убывает при $x\geq 1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если сходится $\int_1^{+\infty}f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Доказательство.

Рассмотрим график функции $y=f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком $y=f(x)$, снизу осью OX, с боков прямыми $x=1,\ x=n$. Построим ступенчатые фигуры, одна из которых вписана в криволинейную трапецию, а другая описана около этой трапеции.



Вычислим площадь вписанной и описанной ступенчатый фигур:
Площадь вписанной ступенчатой фигуры равна $a_2+a_3+\cdots+a_n$,

площадь описанной фигуры равна $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Площадь самой криволинейной трапеции равна $\int_1^n f(x)dx$ и заключена между площадями вписанной и описанной фигур:

$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$.

Если интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. имеет конечное значение:

$\int_1^{+\infty} f(x)dx = I$,

$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)dx$

тогда частичные суммы ряда S_n ограничены:

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + I$.

Следовательно, ряд сходится.

Если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится,

$\int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$,

то

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n > \int_1^n f(x)dx + a_n > \int_1^n f(x)dx \to \infty,\ n \to \infty$,

следовательно ряд расходится.

Пример 14.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = arctgx|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Несобственный интеграл сходится, следовательно, исходный ряд сходится.

Пример 15.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} =$

$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_1^{+\infty} = +\infty$.

Ряд расходится.

Пример 16.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nln^2n}$. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{xln^2x}dx = \int_2^{+\infty}\frac{dlnx}{ln^2x} = -\frac{1}{lnx}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{ln2}$. Ряд сходится.

<u>Пример 17.</u>

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который называют *обобщенным гармоническим рядом* или *рядом Дирихле*. Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ сходится при условии $\alpha > 1$ и расходится при условии $\alpha \leq 1$, следовательно, обобщенный гармонический ряд
сходится, если $\alpha > 1$, и
расходится, если $\alpha \leq 1$.

<u>Замечание.</u> Мы рассмотрели основные признаки сходимости положительных рядов. Есть другие, более "тонкие" признаки, дающие ответ на вопрос о сходимости рядов в тех случаях, где рассмотренные признаки "не работают".

<u>2.6. Общие рекомендации по исследованию на сходимость положительных рядов</u>

1). Для доказательства расходимости ряда удобно использовать нарушение необходимого условия сходимости: если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

2). Если общий член ряда содержит факториал, то удобно использовать признак Даламбера.

3). Если общий член ряда содержит степени $n,\ n^2$, то удобно использовать признак Коши-радикальный.

4). При применении I признака сравнения удобно использовать оценки:
$1 < lnn < n^p \ (p > 0)$
$-1 \leq \binom{sinn}{cosn} \leq 1$
$0 \leq \binom{sin^2n}{cos^2n} \leq 1$
$-\frac{\pi}{2} \leq arctgn \leq \frac{\pi}{2}$.

5). При применении предельного признака сравнения удобно:
а) при вычислении $\lim_{n\to\infty} a_n$ применять эквивалентности

б) использовать ряды для сравнения:

ряд Дирихле: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\begin{cases}\alpha>1 \text{ сходится}\\ \alpha\le 1 \text{ расходится}\end{cases}$

ряд геометрической прогрессии: $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n}\begin{cases}|q|<1 \text{ сходится}\\ |q|\ge 1 \text{ расходится}\end{cases}$.

<u>Примеры.</u>

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{3n}$, $\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!(2(n+1)+1)!}{3(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(2n+3)!\,3n}{3(n+1)n!\,(2n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)(2n+1)!\,(2n+2)(2n+3)3n}{3(n+1)n!\,(2n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+3)n=\infty>1$$

ряд расходится (признак Даламбера).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+1}\right)^{(n-1)\cdot\frac{2n+1}{-2}\cdot\frac{-2}{2n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-2(n-1)}{2n+1}}=\frac{1}{e}<1$$

ряд сходится (признак Коши-радикальный).

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n}$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1\ (?)$ признак Коши-радикальный не работает.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n}=\frac{1}{e}\neq 0$, ряд расходится (необходимое условие сходимости).