Математический анализ-3 семестр

Лекция 14

Тема 5. Изолированные особые точки

5.1. Нули аналитической функции

5.2. Классификация изолированных особых точек на основе поведения функции в окрестности особой точки

5.3. Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана

Определение 1. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0, а в точке z_0 функция не определена или не дифференцируема.

Рассмотрим точку z_0 и разложим $f(z)$ в ряд в окрестности точки z_0, т.е. по степеням $(z - z_0)$.

Если точка z_0 – правильная, т.е. $f(z)$ аналитична в т. z_0, то существует окрестность (круг радиуса R) $|z - z_0| < R$, внутри которого $f(z)$ аналитична и функция раскладывается в степенной ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \; c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Если точка z_0 – изолированная особая точка (ИОТ), то $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < R$ и функция раскладывается в степенной ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \; c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

5.1. Нули аналитической функции

Определение 2. Точка z_0 называется *нулем n-го порядка* аналитической функции $f(z)$, если n – порядок первой не равной нулю производной: $f(z_0) = 0, f'^{(z_0)} = 0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0.$
Если $n = 1$, то точка z_0 называется *простым нулем.*

Теорема 1. Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда имеет место равенство $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции, определить порядок нуля:

$f(z) = cosz - 1.$

Решение: приравняем $f(z)$ нулю, получим $cosz = 1$, откуда $z_n = 2\pi n \ \ (n = 0, \pm 1, \ldots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n} = -sinz\,|_{z=2\pi n} = 0,$$

$$f''(z)\,|_{z=z_n} = -cosz\,|_{z=2\pi n} = -1 \neq 0.$$

Согласно определению, $z_n = 2\pi n$ являются нулями второго порядка.

Пример 2. Найти нули функции, определить порядок нуля:

$f(z) = z^8 - 9z^7.$

Решение: приравняем $f(z)$ нулю, получим $z^7(z - 9) = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 9$. Можно воспользоваться определением, однако проще использовать теорему 1. Функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = z^7(z - 9)$, но тогда $z = 0$ является нулем порядка 7, функцией $\varphi(z)$ является сомножитель $\varphi(z) = z - 9$, $\varphi(0) = -9 \neq 0$; $z = 9$ является нулем порядка 1, функцией $\varphi(z)$ в данном случае является $\varphi(z) = z^7$, $\varphi(9) = 9^7 \neq 0$.

Пример 3. Найти нули функции, определить порядок нуля: $f(z) = 1 - e^z$.

Приравняем $f(z)$ нулю, получим

$e^z = 1, z = Ln1 = ln1 + i(0 + 2\pi k),$

откуда $z_k = 2\pi ki \ \ (k = 0, \pm 1, \ldots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n} = -e^z\,|_{z=2\pi ki} = -(cos2\pi k + isin2\pi k) = -1$$

Согласно определению, $z_k = 2\pi ki$ являются простыми нулями функции $f(z) = 1 - e^z$.

Пример 4.

Найти нули функции и определить порядок нуля:

$f(z) = (z^2+1)^3 e^z$.

$f(z) = 0,\ z^2+1 = 0,\ z_1 = i,\ z_2 = -i$. Функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = (z+i)^3(z-i)^3 e^z$.

$z_1 = i$: $f(z) = (z-i)^3\varphi(\mathrm{z}), \varphi(z) = (z+i)^3 e^z, \varphi(i) \neq 0$, следовательно, по теор.1 $z_1 = i$ является нулем порядка 3.

$z_2 = -i$: $f(z) = (z+i)^3\varphi(\mathrm{z}), \varphi(z) = (z-i)^3 e^z, \varphi(-i) \neq 0$, следовательно, по теореме 1 $z_2 = -i$ является нулем порядка 3.

Пример 5.

Найти нули функции и определить их порядки:

$f(z) = (z^2-1)(z^5+8z^3)$.

$f(z) = (z-1)(z+1)z^3(z+\sqrt{8}i)(z-\sqrt{8}i)$,

$\begin{cases} z_{1,2} = \pm 1 \\ z_{3,4} = \pm\sqrt{8}i \end{cases}$ – простые нули, $\quad z_5 = 0$ – ноль третьего порядка.

5.2. Классификация изолированных особых точек на основе поведения функции в окрестности особой точки

Определение 3. Точка z_0 называется *устранимой* особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = C.$$

Пример 1. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1-e^{3z}}{z}$ и установить их тип.

Решение: особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Вычислим

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{3z}}{z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{-3z}{z} = -3.$$

т.е. $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Пример 2. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{cosz-1}{z^2}$.

Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Вычислим

$$\lim_{z\to 0}\frac{cosz-1}{z^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{-(1-cosz)}{z^2} = \lim_{z\to 0} -\frac{z^2}{2z^2} = -\frac{1}{2}.$$

т.е. $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Определение 4. Точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$, если $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Теорема 2. Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0. Если точка z_0 – нуль порядка n для $f(z)$, то точка z_0 – полюс порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Замечание. Если точка z_0 – полюс порядка n для функции $f(z)$, то точка z_0 – нуль порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ при условии $\frac{1}{f(z_0)} = 0$. Отметим, что без последнего условия $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ утверждение становится неверным. В самом деле, если $f(z) = \frac{sinz}{z^2}$, то $z = 0$ – полюс первого порядка. Однако функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^2}{sinz}$ не определена при $z = 0$.

Теорема 4. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Замечание. Теорема остается справедливой, если z_0 – устранимая особая точка функции $\varphi(z)$ и существует $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)\neq 0$.

Например, если $\varphi(z)=\frac{sinz}{z}$, а $f(z)=\frac{\varphi(z)}{z}=\frac{\frac{sinz}{z}}{z}$, то $z_0=0$ – полюс первого порядка для функции $f(z)$.

Пример 1.

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип:

$f(z)=\frac{2z+1}{z^4-2z^3}$.

Решение: найдем нули функции $\frac{1}{f(z)}=\frac{z^4-2z^3}{2z+1}$,

так как $z^4-2z^3=z^3(z-2)$, то функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет два нуля.

$z_1=0$ – это нуль третьего порядка, поэтому $f(z)$ можно представить в виде $\frac{\varphi(z)}{z^3}$, где $\varphi(z)=\frac{2z+1}{z-2}$, $\varphi(0)=-\frac{1}{2}\neq 0$.

По теореме 4 $f(z)$ в точке $z=0$ имеет полюс третьего порядка.

$z_2=2$ – нуль первого порядка, $f(z)$ можно представить в виде $\frac{\psi(z)}{z-2}$, где $\psi(z)=\frac{2z+1}{z^3}$, $\psi(2)=\frac{5}{8}\neq 0$. По теореме 4 $f(z)$ в точке $z=2$ имеет полюс первого порядка.

Пример 2.

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип:

$f(z)=\frac{z+3}{(z^2+2z)(z-1)^2}$.

Нули функции $\frac{1}{f(z)}=\frac{(z^2+2z)(z-1)^2}{z+3}=\frac{z(z+2)(z-1)^2}{z+3}$,

$z_1=0, z_2=-2, z_3=1$.

$f(z)=\frac{1}{z}\varphi(z), \varphi(z)=\frac{z+3}{(z+2)(z-1)^2}, \varphi(z)$ аналитична в точке

$z_1 = 0, \varphi(0) \neq 0$, следовательно, $z_1 = 0$ — простой полюс.

$z_2 = -2, f(z) = \frac{1}{z+2}\varphi(z), \varphi(z) = \frac{z+3}{z(z-1)^2}, \varphi(z)$ аналитична в точке $z_2 = -2, \varphi(-2) \neq 0$, следовательно, $z_2 = -2$ — простой полюс.

$z_3 = 1.$ $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\varphi(z), \varphi(z) = \frac{z+3}{z(z+2)}, \varphi(z)$ аналитична в точке $z_3 = 1, \varphi(1) \neq 0$, следовательно, $z_3 = 1$ — полюс 2-го порядка.

Теорема 5. Если функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ и точка z_0 является нулем порядка m для функции $P(z)$ $(z_0 = \text{Н}(m))$ и нулем порядка l для функции $Q(z)$ $(z_0 = \text{Н}(l))$, то есть $z_0 = \frac{\text{Н}(m)}{\text{Н}(l)}$, то:

1. если $m > l$, то $n = m - l$ есть порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0,

2. если $m < l$, то $n = l - m$ есть порядок полюса функции $f(z)$ в точке z_0,

3. если $m = l$, то z_0 – устранимая особая точка.

Пример 1.

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип: $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-5)^3}$.

Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = 0$ и $z_2 = 5$.

$z_1 = 0$. Числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в ноль.

Для числителя $P(z) = sinz$ число $z = 0$ является нулем 1 порядка, так как $P'(z)\,|_{z=0} = \cos z\,|_{z=0} = 1 \neq 0$, то по определению 2 $z = 0$ – простой ноль.

Знаменатель $Q(z) = z^2(z-5)^3$ по теореме 1 в точке $z = 0$ имеет ноль 2-го порядка.

Следовательно, $z_0 = \frac{\text{Н}(1)}{\text{Н}(2)} = \text{П}(1)$ – полюс первого порядка (по теореме 5).

В точке $z = 5$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-5)^3}$, где

$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z^2}, \varphi(5) = \frac{\sin 5}{25} \neq 0, \varphi(z)$ аналитична, т.е. $z_2 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(3)} = \text{П}(3)$ – полюс

3-го порядка.

Пример 2.

Найти тип особой точки $z_0 = 0$ функции $f(z) = \frac{\mathrm{z}}{2+\mathrm{z}^2-2chz}$.

$P(z) = z, P(0) = 0, P'(0) = 1 \neq 0, z_0 = \mathrm{Н}(1)$.

$Q(z) = 2 + \mathrm{z}^2 - 2chz, Q(0) = 0, Q'(z) = 2z - 2shz, Q'(0) = 0,$

$Q''(z) = 2 - 2chz, Q''(0) = 0, Q'''(z) = -2shz, Q'''(0) = 0,$

$Q^{(4)}(z) = -2chz, Q^{(4)}(0) = -2 \neq 0, z_0 = \mathrm{Н}(4)$.

Итак, $z_0 = \frac{\mathrm{Н}(1)}{\mathrm{Н}(4)} = \Pi(3)$ – полюс 3-го порядка.

Пример 3.

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип:

$f(z) = \frac{1-e^{z+1}}{\mathrm{z}(z+1)^3}$.

Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$.

$z_1 = \frac{\mathrm{Н}(0)}{\mathrm{Н}(1)} = \Pi(1)$ – простой полюс.

$z_2 = \frac{\mathrm{Н}(1)}{\mathrm{Н}(3)} = \Pi(2)$ – полюс 2-го порядка.

Определение 5. Точка z_0 называется *существенно особой* точкой, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела $f(z)$: $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Например, для функции $f(z) = sin\frac{1}{z}$ точка $z = 0$ является существенно особой точкой, т.к. $\nexists \lim\limits_{z \to 0} sin\frac{1}{z}$.

5.3. Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана

Теорема 6. Точка z_0 является *устранимой особой точкой*, если в *разложении* $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть, т.е.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n.$$

Теорема 7. Точка z_0 является *полюсом функции* $f(z)$, если главная часть разложения в ряд Лорана $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число слагаемых, т.е. $f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k$ $(c_{-n}\neq 0)$, наибольшая степень у разности $(z-z_0)$, стоящей в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равна порядку полюса.

Теорема 8. Точка z_0 является *существенно особой точкой* для функции $f(z)$, если главная часть разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 содержит бесконечно много членов.

В следующих примерах найти все особые точки данных функций и установить их тип.

Пример 1. $f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z}$.

Особая точка $f(z)$: $z_0=0$, в этой точке функция не определена. Разложим $f(z)$ в окрестности точки $z_0=0$, т.е. по степеням z в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[1-(1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{n!}+\ldots\right]=$$

$$=1-\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{(n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Это разложение не содержит главной части. Поэтому точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой.

Пример 2. $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}$.

Особая точка $f(z)$: $z_0=0$. Используя разложение в ряд Тейлора для функции $\cos z$ в окрестности точки $z_0=0$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля:

$$f(z)=\frac{1}{z^7}\left[1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{2!\,z^5}-\frac{1}{4!\,z^3}+\frac{1}{6!\,z}-\frac{z}{8!}+\ldots$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом пятого порядка, т. к. наибольший показатель отрицательной степени z равен 5.

<u>Пример 3.</u> $f(z) = (z+3)^3 e^{\frac{1}{z+3}}$.

Используем разложение

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Сделаем замену $t = z + 3$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $z_0 = -3$:

$$f(t) = t^3 \cdot e^{\frac{1}{t}} = t^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, t^n} = t^3 \left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!\, t^2} + \frac{1}{3!\, t^3} + \cdots\right)$$

$$f(z) = (z+3)^3 \left[1 + \frac{1}{z+3} + \frac{1}{2!\,(z+3)^2} + \frac{1}{3!\,(z+3)^3} + \frac{1}{4!\,(z+3)^4} + \ldots\right] =$$

$$= (z+3)^3 + (z+3)^2 + \frac{z+3}{2!} + \frac{1}{3!} + + \frac{1}{4!\,(\mathrm{z}+3)} + \ldots$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z+3)$. Следовательно, точка $z_0 = -3$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Таблица классификации изолированных особых точек функции

<table>
<tr><td colspan="2">Типы ИОТ</td></tr>
<tr><td>По пределу</td><td>По ряду Лорана в окрестности ИОТ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Устранимая особая точка $\boldsymbol{z_0}$:</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{z\to z_0} \boldsymbol{f(z) = c_0}$</td><td>Ряд Лорана не содержит главной части, т.е. $\boldsymbol{f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)+\ldots}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Полюс порядка n:</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{z\to z_0} \boldsymbol{f(z)} = \infty$</td><td>Главная часть ряда Лорана конечна, n – старшая степень $\boldsymbol{(z - z_0)}$ в знаменателе</td></tr>
<tr><td colspan="2">Существенно особая точка $\boldsymbol{z_0}$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{z\to z_0} \boldsymbol{f(z)}$ не существует</td><td>Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых</td></tr>
</table>