Практическое занятие №9
Применение степенных рядов
(Приближенные вычисления значений функции, вычисление определенных и несобственных интегралов, вычисление пределов последовательности с помощью теории рядов, вычисление значения производных в точке)

Приближенное вычисление значений функций.

Для нахождения приближенного значения функции f(x) в точке x_0
с заданной точностью поступим следующим образом. Разложим функцию f(x) в ряд по степеням $(x-x_1)$ с интервалом сходимости, содержащим точку x_0, где x_1 - точка, в которой значение функции и ее производных вычисляются легко и точно. Переменной x придадим значение x_0 и в полученном числовом ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-x_1)^n$ оставим только члены, гарантирующие только заданную точность вычислений. Минимаьное число n_0 таких членов определим из соответствующей оценки либо остатка формулы Тейлора, либо остатка ряда.

Пример. Вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ число e.

Решение. Так как

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < c < x, \forall x \in R;$$

то из оценки

$$|R_n(1)| = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}01$$

следует, что $n \geq 5$, т.е. необходимо взять пять слагаемых.

$$e^x \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2 + 0{,}500 + 0{,}167 + 0{,}042 + 0{,}008 = 2{,}717; \Rightarrow e \approx 2{,}72;$$

Пример . Вычислить $\sin 18°$ с точностью 0,0001.

Решение Так как $18° = \frac{\pi}{10}$ и ряд

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}$$

является рядом Лейбница, то из оценки

$$\left| r_n\left(\frac{\pi}{10}\right) \right| \leq \frac{1}{(2(n+1)+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2(n+1)+1} \leq 0{,}0001$$

получаем $n \geq 1$. Таким образом

$$\sin 18° \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} \approx 0{,}31416 - 0{,}00617 = 0{,}30899;$$

<u>Пример.</u> Вычислить $\sqrt[3]{2}$ с точностью до 5 знаков после запятой.

<u>Решение.</u> Для решения задачи воспользуемся табличным разложением функции $(1+x)^{\alpha}$ при $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \cdots$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{128}{64}\cdot\frac{125}{125}} = \frac{5}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{128}{125}} = \frac{5}{4}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\left(1 + \frac{1}{125} - \frac{1}{125^2} + \frac{1}{75\cdot 125^2} - \cdots\right).$$

Последнее выписанное слагаемое этой суммы меньше, чем 10^{-5}. Кроме того, полученный числовой ряд является знакочередующимся рядом Лейбница, поэтому ошибка при замене суммы ряда на частичную сумму не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда.

Значит, для достижения заданной точности достаточно учесть первые три члена ряда: $\sqrt[3]{2} \approx \frac{5}{4}(1 + 0{,}008 - 0{,}000064) = 1{,}25992.$

Приближенное вычисление интегралов

Пример Вычислить $\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx$ с точностью $0{,}001$

Решение. Имеем :

$$e^{-x^2} = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad \forall x \in R \Rightarrow \int_0^{1/3} e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/3} x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$$

Оценим погрешность

$$|r_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)3^{2n+3}} \le 0{,}001 \Rightarrow n \ge 1;$$

тогда

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} \approx 0{,}3333 - 0{,}0123 = 0{,}321$$

Пример. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx$ с точностью до 3 знаков после запятой.

Решение. Воспользуемся полученным разложением функции $\operatorname{arctg}(x)$ в ряд Маклорена:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots\right) dx = = \left(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \cdots\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^5 \cdot 5^2} - \frac{1}{2^7 \cdot 7^2} + \cdots.$$

Получили знакочередующийся ряд Лейбница, последнее выписанное слагаемое меньше, чем 10^{-3}. Отбрасывая это слагаемое, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx \approx 0{,}5 - 0{,}01389 + 0{,}00125 \approx 0{,}487.$$

Вычисление предела последовательности

Теория рядов используется в теории последовательностей.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{[(3n)!]} = 0.$

Решение. Составим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{[(3n)!]}$. Для изучения его сходимости применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot [(3n)!]}{\left[\left(3(n+1)\right)!\right] \cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3(3n+1)(n+1)(3n+2)} = e \cdot 0 = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера ряд сходится и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(3n)!} = 0.$$

Вычисление значения производной функции в точке

Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (x - x_0)^n$, то этот ряд является рядом Тейлора этой функции по теореме единственности. При этом $u_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Тогда для нахождения значения n-ой производной функции в точке x_0 используется формула: $f^{(n)}(x_0) = u_n \cdot n!$

Пример. Найти производную n-ого порядка для функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x_0 = 0, n = 6$ и $n = 99$.

Решение. Разложим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sin x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Коэффициент $u_6 = -\frac{1}{7!}$, где $f^{(6)}(0) = -\frac{1}{7!}6! = -\frac{1}{7}$. Коэффициенты при нечетных степенях x в данном разложении равны нулю, в частности $u_{99} = 0$ и тогда $f^{(99)}(0) = 0$.

Применение теории рядов к решению линейных дифференциальных уравнений

Одним из методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является применение теории рядов. Данный метод использует известное утверждение из теории дифференциальных уравнений.

Теорема. Если все коэффициенты и правая часть линейного дифференциального уравнения n-ого порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

разлагаются в степенные ряды в некоторой окрестности точки x_0, то решение $y(x)$ этого дифференциального уравнения, удовлетворяющего условиям: $y(x_0) = A_0, y'(x_0) = A_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1}$, также разлагается в степенной ряд в указанной окрестности.

Пример. Решить задачу Коши $y' = y^2 + x^3,\ y(0) = \frac{1}{2}$.

Решение. Подставим в уравнение $y' = y^2 + x^3$ начальные условия. Тогда $y'(0) = y^2(0) = \frac{1}{4}$. Найдем вторую производную, применяя дифференцирование неявной функции $y'' = 2yy' + 3x^2$. Тогда $y''(0) = 2y(0)\cdot y'(0) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Аналогично, $y''' = 2(y')^2 + 2yy'' + 6x$,

$y'''(0) = 2(y'(0))^2 + 2y(0)y''(0) = 2\cdot\frac{1}{4^2} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$,

$y^{(4)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' + 6 = 6y'y'' + 2yy''' + 6$,

$y^{(4)}(0) = 6y'(0)y''(0) + 2y(0)y'''(0) + 6 = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} + 6 =$

$= \frac{6}{16} + \frac{6}{16} + 6 = \frac{12}{16} + 6 = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$ и т.д.

Поскольку решение уравнения ищем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots,$$

то подставляя найденные коэффициенты, получим ответ:

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4\cdot 2!}x^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}x^3 + \frac{27}{4\cdot 4!}x^4 + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 +$$
$$+ \frac{9}{32}x^4 + \cdots$$

Интегрирование дифференциальных уравнений

Степенные ряды могут применяться для нахождения приближенного решения дифференциального уравнения, если его решение не удается найти в элементарных функциях.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$yy' = \sin y,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$;

Решение. Уравнение допускает разделение переменных :

$$\frac{ydy}{\sin y} = dx;$$

однако интеграл от левой части уравнения не выражается в элементарных функциях. Будем искать решение в виде ряда Маклорена

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Так как $y(0)=\frac{\pi}{2}$, а $y'=\frac{\sin y}{y}$ (*) то $y'(0)=\frac{2}{\pi}$.

Дифференцируя по х обе части равенства (*), находим

$$y''=\frac{y'(y\cos y-\sin y)}{y^2}\ ; \quad (**)$$

откуда

$$y''(0)=\frac{-y'(0)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^3;$$

Дифференцируя обе части равенства (**) , находим $y'''(0)$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения

$$y(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}x-\frac{2^2}{\pi^3}x^2+\ldots$$