Математический анализ-3 семестр

Лекция 16

Тема 7. Приложения теории вычетов

7.1. Основная теорема о вычетах

7.2. Вычисление несобственных интегралов

7.1. Основная теорема о вычетах

Теорема 1. Если функция $f(z)$ аналитична всюду внутри замкнутой области *D*, ограниченной контуром *L*, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_{1,}z_{2,}\ldots,z_n$, лежащих внутри *D*, тогда

$$\oint_L f\,(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z_k}{res}\,f(z).$$

Доказательство. Все особые точки $z_k \in D$, лежащие внутри контура *L*, окружим контурами l_k так, чтобы l_k не пересекались и целиком лежали в *D*. По следствию из теоремы Коши для многосвязной области интеграл по внешнему контуру *L* равен сумме интегралов по внутренним контурам $l_1,\ldots,l_n$ при условии, обход всех контуров совершается в одном направлении. По определению вычета:

$$\oint_{l_1} f(z)dz = 2\pi i\cdot resf(z_1)$$

$$\oint_{l_2} f(z)dz = 2\pi i\cdot resf(z_2)$$

$$\vdots$$

$$\oint_{l_n} f(z)dz = 2\pi i\cdot resf(z_n)$$

Просуммируем равенства:

$$\sum_{k=1}^{n}\oint_{l_k} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} resf(z_k)$$

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res}\, f(z).$$

<u>*Примеры.*</u> Вычислить интеграл с помощью основной теоремы о вычетах.

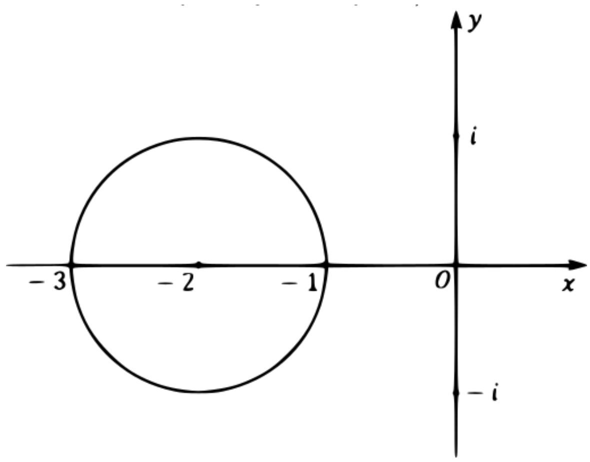
1). $\int_{|z+2|=1} \dfrac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$

Особые точки подынтегральной функции определяются из уравнения

$$(z+2)^2(z^2+1) = 0.$$

$z_1 = -2$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i$ – полюса первого порядка.



Внутри окружности $|z+2| = 1$ лежит одна точка $z = -2$, поэтому по основной теореме о вычетах

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot \underset{z=-2}{res}\, f(z).$$

$z = -2$ является полюсом 2 порядка для функции $f(z)$.

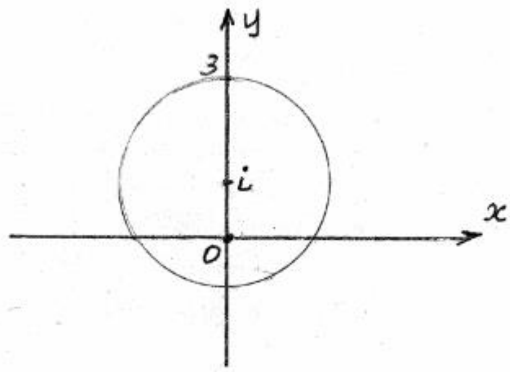
$$\underset{z=-2}{res}\, f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to-2} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+2)^2(z+i)(z-i)}\right] = \lim_{z\to-2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{4}{25}.$$

Поэтому

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = \frac{8\pi i}{25}.$$

2). $\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$

В области $D: |z-i| < 2$ функция



$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ имеет одну особую точку $z = 0$. Это существенно особая точка, так как ее лорановское разложение в окрестности $z = 0$ имеет вид:

$$f(z) = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots\right) =$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет в точке $z = 0$ равен коэффициенту

$$c_{-1} = \frac{1}{3!},$$

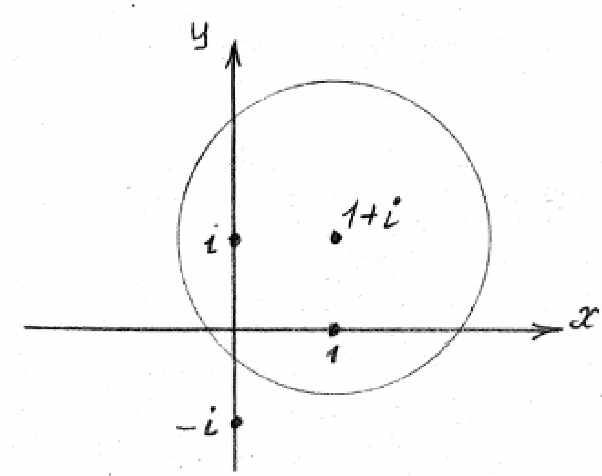
$$\text{т. е.}\, res_{z=0} f(z) = \frac{1}{3!}.$$

По основной теореме о вычетах

$$\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot res_{z=0} f(z) = \frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi i}{3}.$$

3). $\int_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \left(\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right) dz$

Особые точки подынтегральной функции определяются из уравнения $(z-1)^2(z^2+1) = 0$.



$z_1 = 1 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(2)} = \Pi(2)$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \Pi(1)$ – полюса первого порядка,

$z_3 = -i$ не принадлежит $D\colon |z-1-i| < \sqrt{2}$.

$$\underset{z=1}{res} f(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{(z^2+1)}\right)' = \lim_{z\to 1} -\frac{2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\underset{z=i}{res} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)} = \frac{1}{(i-1)^2\cdot 2i} = \frac{1}{2i(-1-2i+1)} = \frac{1}{4}$$

По основной теореме о вычетах

$$\int_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \left(\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right) dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

4). $\int_{|z|=2} \text{tg}z dz$

Особые точки подынтегральной функции определяются из уравнения

$\cos z = 0, z = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \in D. \quad \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \Pi(1) -$ простые полюсы.

$$\underset{z=\pm\frac{\pi}{2}}{res} f(z) = \left.\frac{sinz}{(cosz)'}\right|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{sinz}{-sinz}\right|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$\int_{|z|=2} \text{tg}z dz = 2\pi i(-2) = -4\pi i.$$

5). $\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} dz$

В области $D: |z-i| < \frac{3}{2}$ функция

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$$

имеет две особые точки:

$z_1 = 0, z_2 = i.$

$z_1 = 0 -$ существенно особая точка, так как лорановское разложение функции в окрестности $z = 0$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} \cdot e^{\frac{1}{z^2}} =$$

$$= (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots)\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z^4} + \frac{1}{3!\,z^6} + \frac{1}{4!\,z^8} + \cdots\right) =$$

$$= 1 - z^2 + z^4 + \cdots + \frac{1}{z^2} - 1 + z^2 + \cdots + \frac{1}{2!\,z^4} - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет в точке $z = 0$ равен коэффициенту $c_{-1} = 0$, т.е. $res_{z=0} f(z) = 0$.

$z_2 = i$: $\frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \Pi(1) -$ простой полюс.

$$\underset{z=i}{res} f(z) = \left. \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{2z} \right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

$$\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

6). $\int_{|z+3|=2} \mathrm{z} \cdot e^{\frac{1}{z+3}} dz$

Особая точка подынтегральной функции $z = -3$ – существенно особая точка. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = -3$.

Замена: $z + 3 = t, z = t - 3$.

$$f(t) = (t-3)e^{\frac{1}{t}} = (t-3)\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!\,t^2} + \frac{1}{3!\,t^3} + \cdots\right) =$$

$$= t - 3 + 1 - \frac{3}{t} + \frac{1}{2t} - \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{3!\,t^2} - \frac{3}{3!\,t^3} + \cdots$$

$$f(z) = (z+3) - 2 + \frac{1}{z+3}\left(\frac{1}{2} - 3\right) + \frac{1}{(z+3)^2}\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right) + \cdots$$

$$\underset{z=-3}{res} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

$$\int_{|z+3|=2} \mathrm{z} \cdot e^{\frac{1}{z+3}} dz = 2\pi i \left(-\frac{5}{2}\right) = -5\pi i.$$

7). $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^5 + 4z^3}$

Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^3(\mathrm{z}^2+4)}$ внутри окружности

$|z| = 3$ имеет три особые точки

$z_1 = 0 - \Pi(3), z_2 = 2i - \Pi(1), z_3 = -2i - \Pi(1).$

Использование основной теоремы о вычетах приводит к громоздким вычислениям. Удобнее воспользоваться формулой:

$$I = -2\pi i \cdot res_{\infty} f(z).$$

Выпишем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{1}{z^5 + 4z^3} = \frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{z^2}} = \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{4}{z^2} + \frac{4^2}{z^4} - \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^5} - \frac{4}{z^7} + \frac{16}{z^9} - \cdots$$

Коэффициент $c_{-1} = 0$, т.е. $res_\infty f(z) = 0$, следовательно

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{z^6 + 9z^4} = 0.$$

8). $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^7}{(z^2+2)(z^3+3)} dz$

Подынтегральная функция $f(z) = \frac{z^7}{(z^2+2)(z^3+3)}$ внутри окружности $|z| = 3$ имеет пять особых точек: $z_{1,2} = \pm\sqrt{2}i, z_{3,4,5} = \sqrt[3]{-3}$.

Выпишем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$$f(z) = z^7 \cdot \frac{1}{z^2 + 2} \cdot \frac{1}{z^3 + 3} = z^7 \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z^2}} \cdot \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{z^3}} =$$

$$= z^2\left(1 - \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^4} - \frac{2^3}{z^6} + \cdots\right)\left(1 - \frac{3}{z^3} + \frac{3^2}{z^6} - \cdots\right) =$$

$$= z^2\left(1 - \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^4} - \frac{3}{z^3} + \frac{6}{z^5} - \frac{4 \cdot 3}{z^7} + \frac{9}{z^6} + \cdots\right)$$

$c_{-1} = -3, res_\infty f(z) = 3$

$$I = -2\pi i \cdot res_\infty f(z) = -2\pi i \cdot 3 = -6\pi i.$$

7.2. Вычисление несобственных интегралов

7.2.1. Интегралы от рациональных функций.

Теорема 2. Если $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены, причем все корни знаменателя комплексные и степень $Q(x)$ «m» хотя бы на две единицы больше степени $P(x)$ «n» $(m - n \geq 2)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} F(z),$$

где

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

и z_k – полюсы функции $F(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Пример.

Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2}.$$

Так как подынтегральная функция

$$F(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2}$$

– четная, то

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2}.$$

Введем функцию

$$F(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)^2}$$

(заменили переменную x на z). Т.е. на действительной оси при $z = x$ $F(z) = F(x)$. Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$ – это полюса второго порядка. В верхней полуплоскости находится точка $z = 3i$. Условия теоремы 2 для функции $F(z)$ выполнены. Вычислим $res_{z=3i} F(z)$.

$$res_{z=3i}F(z) = \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}[F(z)(z-3i)^2] =$$

$$= \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-3i)^2}{(z-3i)^2(z+3i)^2}\right] = \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+3i)^2} =$$

$$= \lim_{z\to 3i}\frac{2z(z+3i)^2 - 2z^2(z+3i)}{(z+3i)^4} =$$

$$= \lim_{z\to 3i}\frac{6iz}{(z+3i)^3} = \frac{-18}{-6^3 i} = \frac{1}{12i}.$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot res_{z=3i}F(z) = \frac{\pi i}{12i} = \frac{\pi}{12}.$$

7.3.2. Вычисление интегралов с тригонометрическими функциями вида

$$\int_0^{+\infty} R(x)\cos\alpha x\,dx,\quad \int_0^{+\infty} R(x)\sin\alpha x\,dx$$

где $R(x)$ – правильная рациональная дробь, $\alpha > 0$ – любое вещественное число.

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $f(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости и на действительной оси, кроме конечного числа полюсов, лежащих в верхней полуплоскости;
2) При $z\to\infty$ в верхней полуплоскости и на действительной оси $zf(z)\to 0$ равномерно по аргументу z, т.е. $max_{z\in C_R}|zf(z)|\to 0$ при $R\to\infty$, контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости. При этом справедливо равенство:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Здесь

$$\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k)$$

– сумма вычетов $f(z)$ относительно полюсов, лежащих в верхней полуплоскости.

Разобьем интервал $(-R, R)$ на части $(-R, 0)$ и $(0, R)$ и заменим в первом из интегралов x на $-x$. В результате получим

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \big(f(x)+f(-x)\big)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k)$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty}(f(x)+f(-x))dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Используем полученный результат в частном случае, когда подынтегральная функция имеет вид: $f(z) = F(z)\cdot e^{iaz}$, $a > 0$, где функция $F(z)$ удовлетворяет двум условиям 1) и 2).

Тогда этим же условиям будет удовлетворять и функция $f(z)$. Тогда

$$\int_0^{+\infty}\big(F(x)\cdot e^{iax} + F(-x)\cdot e^{-iax}\big)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\left[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}\right].$$

Пусть $F(z)$ – *четная* функция, т.е. $F(-z) = F(z)$, тогда

$$\int_0^{+\infty} F(x)\cos ax\, dx = \pi i\sum_{k=1}^{n} res\left[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}\right].$$

Аналогично, если $F(z)$ – *нечетная* функция, т.е. $F(-z) = -F(z)$, тогда

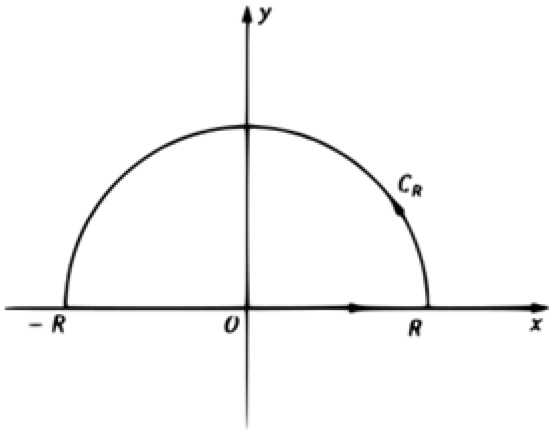
$$\int_0^{+\infty} F(x)\sin ax\, dx = \pi\sum_{k=1}^{n} res\left[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}\right].$$

Следующая лемма позволяет ослабить условия 1)-2), наложенные на функцию $F(z)$.

Лемма Жордана. Если функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z| \to \infty$, тогда при $\alpha > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)dz = 0\,,$$

где контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости.



Теорема 3. Если функция $f(z)$, заданная на всей действительной оси, может быть продолжена на верхнюю полуплоскость и полученная функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси, тогда при $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left[f(z)e^{i\alpha z}\right],$$

где z_k – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Так как согласно формуле Эйлера $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$,

т.е. $\cos\alpha x = Re(e^{i\alpha x})$, $\sin\alpha x = Im(e^{i\alpha x})$, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) cos\,\alpha x\,dx = Re\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right], \qquad (Im\,z_k > 0).$$

<u>Примеры.</u>

1). Вычислить

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos 3x}{x^2+1}dx.$$

Введем вспомогательную функцию $F(z)=\frac{e^{i3z}}{z^2+1^2}$. Если $z=x$, то $Re\,F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x)=\frac{\cos 3x}{x^2+1}$. Так как подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}Re\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}res_{z_k}F(z)\right), Im\, z_k>0.$$

Функция $\frac{1}{z^2+1}$ при стремлении $|z|\to\infty$ стремится к нулю и не имеет особых точек на действительной оси, т.е. удовлетворяет условиям леммы Жордана.

$z=i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z=-i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z=i$

$$res_{z=i}\left(\frac{e^{i3z}}{z^2+1}\right)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i3z}}{z^2+1}(z-i)=\lim_{z\to i}\frac{e^{i3z}}{z+i}=\frac{e^{-3}}{2i}=\frac{-i}{2e^3}.$$

$$I=\frac{1}{2}Re\left(2\pi i\cdot\frac{-i}{2e^3}\right)=\frac{\pi}{2e^3}$$

2). Вычислить

$$I=\int_0^\infty \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx.$$

Введем вспомогательную функцию $F(z)=\frac{ze^{i2z}}{z^2+3^2}$. Если $z=x$, то $Im\,F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x)=\frac{x\sin 2x}{x^2+9}$. Так как подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}Im\left(2\pi i\sum_{k=1}^{n}res_{z_k}F(z)\right), Im\, z_k>0$$

Функция $\frac{z}{z^2+9}$ при стремлении $|z| \to \infty$ стремится к нулю и не имеет особых точек на действительной оси, т.е. удовлетворяет условиям леммы Жордана. По теореме 3 получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9} dx = 2\pi i \cdot res_{z=3i}\left(\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}\right).$$

$z = 3i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z = -3i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 3i$

$$res_{z=3i}\left(\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}\right) = \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}(z-3i) =$$

$$= \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z+3i} = \frac{3ie^{-6}}{6i} = \frac{1}{2e^6}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \cdot Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot Im\left[2\pi i \cdot res_{z=3i} \frac{\left(ze^{i2z}\right)}{z^2+9}\right] = \frac{1}{2} \cdot Im\left[2\pi i \frac{1}{2e^6}\right] = \frac{\pi}{2e^6}.$$