ДИСЦИПЛИНА	**Модели и методы теории оптимального управления**
	(полное наименование дисциплины без сокращений)
ИНСТИТУТ	**информационных технологий**
КАФЕДРА	**прикладной математики**
	(полное наименование кафедры)
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	**Материалы для практических занятий**
	(в соответствии с пп.1-11)
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	**Пронина Елена Николаевна**
	(фамилия, имя, отчество)
СЕМЕСТР	**1, 2023-2024**
	(указать семестр обучения, учебный год)

План практических занятий

Занятие 1. Экстремум функций конечного числа переменных. Безусловный экстремум

Занятие 2. Условный экстремум: ограничения типа равенств и неравенств. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Условия Каруши-Куна-Таккера

Занятие 3. Введение в вариационное исчисление: техника вычисления вариаций функции и функционала, уравнение Эйлера-Лагранжа

Занятие 4. Введение в вариационное исчисление: задачи физического и геометрического содержания

Занятие 5. Задача Эйлера, различные типы индикатрис и соответствующие им режимы

Занятие 6. Проверочная работа

Занятие 7. Метод Лагранжа Понтрягина: задача с свободным правым и закрепленным левым концом, неограниченное множество допустимых управлений U

Занятие 8. Метод Лагранжа Понтрягина: ограниченное множество U

Занятие 9. Метод Лагранжа Понтрягина: задача с закрепленными концами

Занятие 10. Задачи с подвижной границей. Оптимальное по быстродействию управление простейшим механическим движением

Занятие 11. Метод Гамильтона-Якоби-Беллмана для задач с непрерывным временем

Занятие 12. Задача аналитического конструирования оптимального регулятора для линейной системы с квадратичным критерием качества

Занятие 13. Проверочная работа

Занятие 14. Метод Лагранжа-Понтрягина для многошаговых управляемых процессов

Занятие 15. Метод Гамильтона-Якоби-Беллмана для многошаговых управляемых процессов

Занятие 16. Прикладные задачи оптимального управления: однопродуктовая макроэкономическая модель – золотое правило накопления

Практическое занятие 1. Экстремум функций конечного числа переменных. Безусловный экстремум

Необходимый теоретический материал (см. лекция 1, учебное пособие стр. 11-17)

1. Понятие максимума и минимума функции. Экстремум абсолютный и относительный.
2. Необходимое условие экстремума для дифференцируемой функции, теорема Ферма:

   $df(\mathbf{x}^*) = 0 \leftrightarrow \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = x^*} = 0.$
3. Достаточное условие экстремума:
   в стационарной точке **x*** локальный максимум, если $d^2f(\mathbf{x}^*) < 0$;
   в стационарной точке **x*** локальный минимум, если $d^2f(\mathbf{x}^*) > 0$.
   Исследование знака второго дифференциала может быть выполнено путем приведения квадратичной формы к каноническому виду. В случае симметричной матрицы Гессе (матрицы вторых производных) знак квадратичной формы определяется по критерию Сильвестра.
   Если все угловые миноры матрицы положительны – матрица Гессе и квадратичная форма положительно определены (в стационарной точке – минимум),
   когда же знаки угловых миноров чередуются, причем минор первого порядка – отрицательный, матрица Гессе и квадратичная форма отрицательно определены (в стационарной точке – максимум),
   в третьем случае, исключающем первые два – знак матрицы Гессе и квадратичной формы не определен, экстремума нет, стационарная точка – седловая.
4. Обобщение понятий максимума и минимума – точная нижняя (inf) и точная верхняя границы (sup)
5. Абсолютный (глобальный экстремум). Теорема Вейерштрасса. Функция, дифференцируемая в ограниченной и замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений в этой области, или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Задания

1. Найдите минимум функции $f\ (x_1,\ x_2)$ и ее минимальное значение, $f(x_1, x_2) = \left|1 - \exp(x_1^2 + x_2^2 - 1)\right|$.

2. Покажите, что функция $f(x_1, x_2) = [1 + exp(x_2)]cos(x_1) - x_2 exp(x_2)$ имеет бесчисленное множество максимумов и ни одного минимума.
Постройте график функции $f(x_1, x_2)$ в программном пакете MathCAD. Существует ли аналог подобной функции на плоскости?

3. Найдите нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) функции
$f(x,y,z) = (x+2y+3z)e^{-(x+2y+3z)}$ в области $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Практическое занятие 2. Условный экстремум, ограничения типа равенств и неравенств. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Условия Каруши-Куна-Таккера

Теоретический материал: лекция 2, учебное пособие стр. 18-34

1. Постановка задачи на условный экстремум с ограничениями типа равенств, принципиально, что число ограничений менее числа независимых переменных.
2. Редукция задачи на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум для функции Лагранжа, неопределенные множители Лагранжа
3. Необходимые и достаточные условия экстремума функции Лагранжа
4. Содержательная интерпретация множителей Лагранжа
5. Обобщенная функция Лагранжа. Условие регулярности, $\lambda_0 \neq 0$
6. Теорема Каруши-Куна-Таккера.
7. Условие стационарности функции Лагранжа
8. Условия дополняющей нежесткости
9. Условия неотрицательности
10. Геометрическая интерпретация теоремы Каруши-Куна-Таккера

Задания

1. Данное положительное число a разложите на n положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.
2. С помощью метода неопределенных множителей Лагранжа решите задачу потребительского выбора при ограничениях на суммарный доход (модель Стоуна). Максимизируется целевая функция предпочтений (функция полезности):

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - b_i)^{a_i} \to \max_{\mathbf{x}},$$

где a и b – заданные параметры, $b_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Предполагается, что b_i – минимально необходимое количество i-го блага, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора.

Суммарный доход D полностью расходуется на приобретение набора предметов потребительской корзины в количествах x_1, x_2, …, x_n по фиксированным ценам p_1, p_2, …, p_n соответственно, то есть выполняется ограничение $\sum_i p_i x_i = D, \ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, ..., n$, где p_i, D – заданные параметры.

Коэффициенты a_i характеризуют относительную «ценность» благ для потребителя. Получите типичные функции спроса на различные товары (зависимости между объемами предметов потребительской корзины, доходом и ценой). В частности, рассмотрите функцию спроса, когда все $b_i = 0$ и все $a_i=1/n$.

3. Решите задачу нелинейного программирования, в которой требуется минимизировать целевую функцию $f(x_1, x_2) = x_2$ при ограничениях:

$$g_1(x_1,x_2) = -(x_1+1)^2 - x_2^2 + 4 \geq 0,$$
$$g_2(x_1,x_2) = -(x_1-1)^2 - x_2^2 + 4 \geq 0,$$
$$g_3(x_1,x_2) = -x_1 - x_2 + 2 \geq 0.$$

Дайте геометрическую интерпретацию теоремы Каруша-Куна-Таккера для данной задачи.
Выясните, какие ограничения задачи являются активными? Какой множитель Лагранжа принимает нулевое значение?
Покажите, что точка $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \lambda^*)$ является седловой точкой функции Лагранжа: $L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$.

Домашнее задание:

1. Методом неопределенных множителей Лагранжа найдите прямоугольник максимальной площади S при заданном ограничении на периметр P.
2. Опишите разнообразные формы поведения спроса на различные товары для модели с функцией предпочтения $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta-\alpha}(x_1 + \beta - \alpha)^{-\beta}$,
где α и β – параметры. Получите для задачи Стоуна типичные функции спроса, как для предметов первой необходимости x_1, так и для предметов роскоши x_2.

Практическое занятие 3. Введение в вариационное исчисление: техника вычисления вариаций функции и функционала, уравнение Эйлера-Лагранжа (общий случай)

Теоретический материал: лекция 3, учебное пособие стр.35-57

1. Понятие вариации функции: $\delta \bar{y} = y(x) - \bar{y}(x)$
2. Вариация функционала – главная линейная относительно вариации его аргумента часть приращения функционала, $I[\bar{y} + \delta y] - I[\bar{y}] \approx I[\bar{y}(x), \delta y(x)] = \delta I$
3. Вариационная производная, $\delta I = \int_{x_0}^{x_1} A(x)\delta y(x)dx$, $A(x) = \dfrac{\delta I}{\delta y}$
4. Техника вычисления вариаций совпадает с техникой вычисления дифференциалов и производных
5. Простейшая задача вариационного исчисления: $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \to \min, y(x) \in C_1[x_0, x_1], y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$

Необходимое условие экстремума функционала: δI =0, $\dfrac{\delta I}{\delta y}$=0 → уравнение Эйлера-Лагранжа, $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{\bar{y}(x)}=0\cdot$

Свойства вариаций:

1. Производная от вариации равна вариации от производной, $\dfrac{d}{dx}\ \delta y\ =\delta\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.
2. Вариация от интеграла равна интегралу от вариации, $\delta\int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)dx=\int\limits_{x_0}^{x_1}\delta y(x)dx$.
3. Функционал $L[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\ p(x)y(x)+q(x)y'(x)\ dx$ является линейным, то есть удовлетворяет условиям:

$L[c\cdot y(x)]=cL[y(x)],\quad L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)]$.

Упражнение

Найдите первую вариацию и вариационную производную функционалов: $I(y)$=cos(y(1)); $I(y)$=cos(y(1))+sin(y(6)); $I[y(x)]=\int\limits_1^2 ydx$; $I[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}(xy'^2+y^3e^{2x})dx$.

Задания

1. Найдите эйлерову экстремаль функционала $\int\limits_0^1(4y-y'^2+12x^2y')dx$, удовлетворяющую граничным условиям y(0)=1, y(1)=4.
2. Найдите эйлерову экстремаль функционала $\int\limits_0^{\pi/4}(y'^2-4y^2-2xe^xy)dx$, удовлетворяющую граничным условиям y(0)=0, y(π/4)=0.
3. Покажите, что в классе гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=0,\ y(\dfrac{\pi}{2})=1$, функционал $I[y(x)]=\int\limits_0^{\pi/2}(y'^2-y^2)dx$ достигает своего минимума на функции $\bar{y}(x)=\sin(x)$. Вычислите $I[\bar{y}(x)]$.

Запишите два уравнения – уравнение второго порядка в общем случае и его первый интеграл в частном случае, когда подынтегральная функция не зависит от x, сравните результаты.

4. Найдите экстремаль простейшего функционала для случая $F=x^ny'^2$ и докажите, что при n≥1 две точки, лежащие по разные стороны от оси y, не могут быть соединены экстремалью.

5. Найдите значение простейшего функционала для случая $F = y + xy',\ x_0 = y_0 = 0,\ x_1 = y_1 = 1.$

Практическое занятие 4. Введение в вариационное исчисление – продолжение, задачи физического и геометрического содержания

Теоретический материл: лекция 4, учебное пособие стр. 58-63

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \to \min, y(x) \in C_1, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Bigg|_{\bar{y}(x)} = 0 \Leftrightarrow F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

$$F(y, y') \to y'F_{y'} - F = const$$

Задания

1. Рассмотрите принцип стационарного действия Гамильтона (принцип наименьшего действия), согласно которому материальная частица движется так, что интеграл действия $L = \int_{t_1}^{t_2} (W - U)dt$ принимает стационарное значение. Кинетическая энергия материальной точки определяется выражением $W = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$, потенциальная энергия равняется $U = \frac{1}{2} k y^2$. Получите для пружинного маятника уравнения движения Лагранжа и закон сохранения энергии: *W+U=const.*

2. Решите задачу геометрической оптики при условии, что скорость света пропорциональна ординате,

$$T[y(x)] = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx \to \min, y(0) = 0, y(1) = 1\cdot$$

3. Решите задачу о наименьшей поверхности вращения: $I[y(x)] = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx \to \min,\ \ y(-1) = y(1) = 1$

4. Обратная задача вариационного исчисления. Рассмотрите вертикальное движение материальной точки с массой *m* в поле тяготения Земли. Обозначьте через *y* расстояние, измеряемое от начальной точки, через *t* – время от начала движения. Из второго закона Ньютона следует, что траектория движения *y*(*t*) должна удовлетворять уравнению: $y'' + g = 0$, где *g* – ускорение свободного падения. Существует ли функция *F* (*t, y, y*′) такая, что относящееся к ней дифференциальное уравнение Эйлера-Лагранжа совпадает с уравнением $y'' + g = 0$?

5. Решите изопериметрическую задачу,

$$S[y(x)] = \int_0^2 y dx \to \max, y(0) = 0, y(2) = 0, \int_0^2 \sqrt{1+y'^2} dx = \pi \cdot$$

Примените метод неопределенных множителей Лагранжа, функционал Лагранжа запишите в виде:

$$L[y(x)] = \int_0^2 \left[y + \lambda \sqrt{1+y'^2} \right] dx - \lambda\pi \cdot$$

Практическое занятие 5. Задача Эйлера: различные типы индикатрис и соответствующие им режимы

Теоретический материал – см. лекции 5-6, учебное пособие стр. 73-101

Задания:

1. В задаче Эйлера с линейной индикатрисой $I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^1 (x + 16t \cdot x^2 \cdot u) dt$ постройте последовательность, минимизирующую функционал I на множестве решений уравнения, $\frac{dx}{dt} = u$, с граничными условиями $x(0)=0$, $x(1)=0$.
2. Каким образом изменится решение примера пункта 1, если граничные условия задать в виде $x(0) = x(1) = -\frac{1}{4}$?
3. В задаче Эйлера с линейной индикатрисой $I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^1 (x + 16t \cdot x^2 \cdot u) dt$ найдите минималь на множестве решений уравнения, $\frac{dx}{dt} = u$, с граничными условиями $x(0)=0$, $x(1)=0$ и ограничением на управление $|u(t)| \le 2$.
4. В задаче Эйлера с линейной индикатрисой $I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^1 (x + 16t \cdot x^2 \cdot u) dt$ найдите минималь на множестве решений уравнения, $\frac{dx}{dt} = u$, с граничными условиями $x(0)=0$, $x(1)=0$ и ограничениями на управление и состояние $|u(t)| \le 2$, $x(t) \ge -t$.
5. Запишите для примера 1 дифференциальное уравнение Эйлера-Лагранжа. Проанализируйте результаты, сравните их с решением, полученным на основе достаточных условий оптимальности Кротова.

6. Решите задачу Эйлера о минимуме функционала $I(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^1 \underbrace{\left(1+x^2\right)}_{\geq 1}\underbrace{[1+\left(\dot{x}^2-1\right)^2]}_{\geq 1}dt \to \min$ при условиях $x(0)=x(1)=0$.

Сравните значения функционала для гладкого решения и скользящего режима.

Практическое занятие 6. Проверочная работа

1.Решите задачу Эйлера с линейной индикатрисой и ограничениями на состояние и управление:

$$I = \int_0^4 \left(8(t+1)x^2 + 8tx^2u\right)dt \to \max,\ \dot{x} = u,\ x(0) = 2,\ x(4) = 8,\ |u| \leq 5,\ 2 \leq x \leq 10.$$

2.В задаче Эйлера о минимуме функционала $I(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^1 \sqrt{1+u^2}dt$ на множестве решений дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = u$, при заданных граничных условиях $x(0)=0$, $x(1)=1$, найдите

а) пару функций **(x(t), u(t)),** доставляющую минимум функционалу I в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $x(t) \in C^1_{[0,1]}$;

б) последовательность $\{\mathbf{x_s(t), u_s(t)}\}$**,** минимизирующую тот же функционал I в классе кусочно-непрерывных функций $x(t) \in D^1_{[0,1]}$.

Как можно интерпретировать полученный результат?

Каков смысл величины $I\ [\bar{y}(x)]$? Чему равна величина $I\ [\bar{y}(x)]$? Достигается ли наименьшее значение функционала на множестве гладких функций?

3. Какова типовая структура оптимального решения задачи Эйлера с линейной индикатрисой и ограничениями на управление?

4. Может ли отсутствовать решение в линейных по управлению задачах при наличии ограничений на управление?

5. Объясните понятие множество «достижимости» на примере задания 1.

Практическое занятие 7. Метод Лагранжа Понтрягина
Теоретический материал: см. лекции 7-8, а также учебное пособии стр. 102-107

Задания (неограниченное множество допустимых управлений *U*)

1. Покажите, что для задач, линейных относительно фазовых координат и управлений, с линейным функционалом, принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

2. Найдите управляемый процесс, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности метода Лагранжа-Понтрягина. Установите на основе достаточных условий оптимальности Кротова, является ли найденный процесс оптимальным:

2.1. Задачи со свободным правым концом (ограничений на управления нет)

2.1.1. Прямое и сопряженное уравнения интегрируются независимо друг от друга:

$$I = \int_0^4 (2u + u^2 - x)dt + 2x(4) \to min; \ \frac{dx}{dt} = 3x + 2u; \ x(0)=0.$$

2.1.2. В краевой двухточечной задаче принципа максимума нельзя по отдельности проинтегрировать прямое и сопряженное уравнения:

$$I = \int_0^4 (u + u^2 + 2x^2)\, dt \to min; \ \frac{dx}{dt} = x + 2u; \ x(0) = 0.$$

Практическое занятие 8

Тема: Метод Лагранжа Понтрягина, продолжение
Задания (свободный правый конец, ограниченное множество *U*)

1. $I = \int_0^{10} (u^2 + x)dt \to \min; \quad \frac{dx}{dt} = x - u; \ 0 \le u \le 4; \quad x(0)=1.$

2. $I = \int_0^4 (x + 5u)dt - 2x(4) \to \min; \ \frac{dx}{dt} = 2x + u; \ |u| \le 1; \ x(0)=1.$

3. $I = \int_0^3 (2u^2 - 4x)dt + x(3) \to \min; \ \frac{dx}{dt} = x + u; \ |u| \le 1; \ x(0)=1.$

Практическое занятие 9

Тема: Метод Лагранжа Понтрягина, продолжение
Задания (оба конца траектории закреплены, ограниченное множество *U*)

1. Найдите управляемый процесс, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности метода Лагранжа-Понтрягина. Установите на основе достаточных условий оптимальности Кротова, является ли найденный процесс оптимальным:

1.1. Задачи с закрепленными концами и ограничениями на управление:

$$I = \int_0^5 (u^2 - x)dt \to \min; \ \frac{dx}{dt} = -(x + u); \ u \in [0; 10]; \ x(0)=1; \ x(5)=-2.$$

1.2. Решение не зависит от траектории и определяется только начальной и конечной точкой на ней:

$$I = \int_0^{10} (2x - u)dt \rightarrow \min;\ \frac{dx}{dt} = -2x + u;\ |u| \le 1;\ x(0)=1;\ x(10)=1.$$

Похожая задача, но правый конец траектории не закреплен, в результате величина функционала становится функцией конечного состояния x(10):

$$I = \int_0^{10} (-3x + 3u)dt + x^2(10) \rightarrow \min;\ \frac{dx}{dt} = -x + u;\ |u| \le 2;\ x(0) = 2.$$

1.3. Размерность фазового пространства n=2:

$$I = \int_0^{5} (x_1 + x_2 + 2u)\, dt - x_2(5) \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 - u \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + u \end{cases} \qquad x_1(0) = 2;\ x_2(0) = 0,\ |u| \le 1$$

Практическое занятие 10. Задачи с подвижной границей. Оптимальное по быстродействию управление простейшим механическим движением

Теоретический материал: см. лекция 10, учебное пособие стр. 178-187

Задание

Решите задачу оптимального быстродействия механическим движением движущегося по инерции объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \qquad |u| \le 1$$

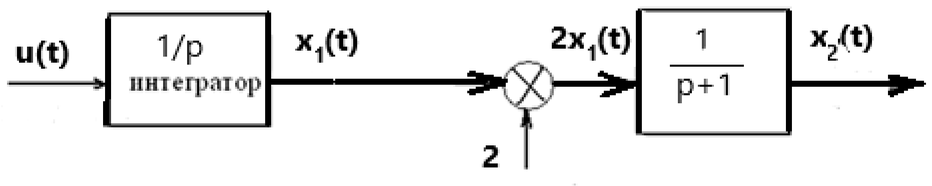
с граничными условиями $x_1(t_0) = x_{1,0}$; $x_2(t_0) = x_{2,0}$; $x_1(t_1) = x_{1,1}$; $x_2(t_1) = x_{2,1}$; конкретные значения выбираются по вариантам.

Практическое занятие 11. Метод Гамильтона-Якоби-Беллмана для задач с непрерывным временем

Теоретический материал см. лекция 11, учебное пособие стр. 119-124

Задания

1.Восстановите дифференциальные уравнения динамической системы по ее структурной схеме:



2.Постройте оптимальный регулятор для линейной дифференциальной системы с линейным критерием качества

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = u, \quad x_1(0) = 1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + 2x_1, \quad x_1(0) = 1 \end{cases} \qquad |u| \le 1,$$

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^2 \left(x_1 - 2x_2 + 3u\right) dt \to \min$$

Замечание. Функцию Кротова следует искать в виде линейной по состояниям формы: $\varphi(t, x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2$

3.Покажите, что синтез и программа управления в задаче с линейной системой и линейным критерием качества совпадают. Какая схема управления характерна для динамической системы в этом случае?

Практическое занятие 12. Задача аналитического конструирования оптимального регулятора для линейной системы с квадратичным критерием качества

Теоретический материал: см. лекция 12, учебное пособие стр. 124-135

Задание

1. Постройте синтез оптимального управления для линейной системы с квадратичным критерием качества:

$$I(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot) = \int_0^1 (y + u^2) dt \quad + x(1) - y(1) \to min, \quad \begin{cases} \dot{x} = -2y, x(0) = 1 \\ \dot{y} = u, \ y(0) = 1 \end{cases}.$$

2.Составьте схему формирования траектории динамической системы, покажите на ней структуру регулятора в цепи обратной связи.

Замечание. Функцию Кротова следует искать в виде:
$\varphi\ (t, x, y) = \psi_1(t)x + \psi_2(t)y$.

Практическое занятие 13. Проверочная работа
Задание
1. Найдите управляемый процесс, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности метода Лагранжа-Понтрягина. Установите на основе достаточных условий оптимальности Кротова, является ли найденный процесс оптимальным:

$$I = \int_0^4 (x + 2u)dt - 2x(4) \to \min; \quad \frac{dx}{dt} = 2x + u; \ |u| \le 1; \ x(0) = 1.$$

2. Постройте синтез оптимального управления для линейной системы с квадратичным критерием качества: $I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T u^2 dt + 4x^2(T) \to \min$,

$$\frac{dx}{dt} = x - 2u, \ x(0) = 1.$$

Практическое занятие 14. Метод Лагранжа-Понтрягина для многошаговых управляемых процессов (дискретный принцип максимума)

Теоретический материал: см. лекция 13, учебное пособие стр. 148-157

Задание
Методом Лагранжа-Понтрягина найдите оптимальные многошаговые процессы:
1. Задача со свободным правым концом

$$\sum_{t=0}^{3} [x^2(t) + u^2(t)] + 2x(4) \to \min;$$

$x(t+1) = -x(t) + u(t)$; $x(0) = 0$.
2. Задача с закрепленными концами траектории

$$\sum_{t=0}^{4} [x(t) + 2u(t) + u^2(t)] \to \min;$$

$x(t+1) = -x(t) + 2u(t)$; $x(0) = 1$, $x(5) = 1$.

3. Условие трансверсальности зависит от состояния на правом конце

$$\sum_{t=0}^{4} [x(t) + 2u^2(t)] - x(5) + 2x^2(5) \to \min;$$

$x(t+1) = -x(t) + 2u(t)$; $x(0) = 1$.

Практическое занятие 15. Метод Гамильтона-Якоби-Беллмана для многошаговых управляемых процессов

Теоретический материал: см. лекция 14, учебное пособие стр. 158-167

Задание

Методом Гамильтона-Якоби-Беллмана найдите оптимальные многошаговые процессы

1. $\sum_{t=0}^{3} [2x(t) + u^2(t)] \to \min;$

$x(t + 1) = x(t) + 2u(t)$; $x(0) = 2$; $|u| \le t + 1$.

2. $\sum_{t=0}^{4} [x(t) - u(t)] - x(5) \to \min;$

$x(t + 1) = u(t)$; $|u(t)| \le 1$; $x(0) = 1$.

3. $\sum_{t=0}^{4} [x(t) + u(t)] + x(5) \to \min;$

$x(t + 1) = x(t) - u(t)$; $|u(t)| \le \frac{1}{t+1}$, $x(0) = 0$.

Практическое занятие 16. Однопродуктовая макроэкономическая модель: золотое правило накопления

Теоретический материал: лекция 15, учебное пособие стр. 168-178

Задание

Определите оптимальную величину нормы накопления и отвечающий ей уровень фондовооруженности, которые обеспечивают максимальное значение среднедушевого конечного потребления c:

$\bar{c}(t) = (1-s)(1-a) f(k,t)$.

Роль уравнения связи в данной оптимизационной постановке играет стационарный режим однопродуктовой макроэкономической модели:

$$(1-a)sf(k,t) - (\mu + \omega)k = 0 \ .$$

Он определяется как положение равновесия динамической системы указанной модели. Решение данной задачи следует провести с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Покажите, что для производственной функции Кобба-Дугласа f оптимальные нормы накопления и потребления совпадают с эластичностями $s^*=\alpha$, $u^*=1-s^*=\beta$. Этот результат составляет «золотое» правило накопления.