Математический анализ-3 семестр
Лекция 8.
Тема 7. Тригонометрический ряд Фурье

7.4. Представление рядом Фурье функции произвольного периода

7.5. Ряд Фурье для четных и нечетных функций

7.6. Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам

7.4. Представление рядом Фурье функции произвольного периода

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$

или $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом $2l$ и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$. Сделав замену переменной

$$x = t\frac{l}{\pi}, \;\; t = x\frac{\pi}{l},$$

получим:

$$f(x) = f\left(t\frac{l}{\pi}\right) = g(t).$$

Если функция $f(x)$ была определена на отрезке $[-l, l]$, то функция $g(t)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы Дирихле.

Раскладывая в ряд Фурье функцию $g(t)$

$$g(t) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos nt + b_n \cdot \sin nt)$$

и возвращаясь к исходной функции, получим для нее следующее представление рядом Фурье:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} \right), (4)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, n = 1,2,3, \dots, (5)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, n = 1,2,3, \dots$$

Теорема Дирихле остается в силе с той лишь разницей, что в случае произвольного отрезка $[-l, l]$ точки $x = \pm\pi$ заменяются на точки $x = \pm l$:

$S(l) = S(-l) = \frac{1}{2}\big(f(-l + 0) + f(l - 0)\big)$.

Равенство Парсеваля принимает вид:

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx.$$

7.5. Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Если кусочно-непрерывная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является *четной*, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Действительно, сделав замену $t = -x$, вычислим

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(t)dt = \int_{0}^{l} f(x)dx$$

Аналогично устанавливается, что в случае *нечетной* функции $f(x)$:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx =$$

$$= -\int_{l}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx =$$

$$= -\int_{0}^{l} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx = 0.$$

Предположим теперь, что кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является *четной*.

Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Вычислим остальные коэффициенты Фурье четной функции.

Произведение $f(x)cos\frac{\pi nx}{l}$ также является четной функцией.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx, (n = 1,2,3, \dots)$$

Произведение $f(x)sin\frac{\pi nx}{l}$ является нечетной функцией.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0, (n = 1,2,3, \dots).$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье *четной* функции содержит только косинусы:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}\text{ , где}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx, (n = 1,2,3, \dots)$$

$$b_n = 0, (n = 1,2,3, \dots).$$

Равенство Парсеваля приобретает вид:

$$\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2.$$

Если функция $f(x)$ является *нечетной*, то произведение $f(x)cos\frac{\pi nx}{l}$ также является нечетной функцией, а произведение $f(x)sin\frac{\pi nx}{l}$ - четной. Вычислим коэффициенты Фурье нечетной функции:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx = 0, (n = 0,1,2,3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx, (n = 1,2,3, \dots$$

Тригонометрический ряд Фурье *нечетной* функции содержит только синусы:

$$f(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$$

а равенство Парсеваля приобретает вид:

$$\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2.$$

7.6. Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[0, l]$. Желая получить разложение этой функции в ряд Фурье, доопределим ее на промежутке $[-l, 0)$ произвольным образом, сохраняя лишь требование кусочной дифференцируемости. Это дает возможность получать различные разложения одной и той же функции в тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[0, l]$.

Если, определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in [-l, 0)$, то получим *четную* функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только косинусы.

Если, определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-l, 0)$, то получим *нечетную* функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только синусы.

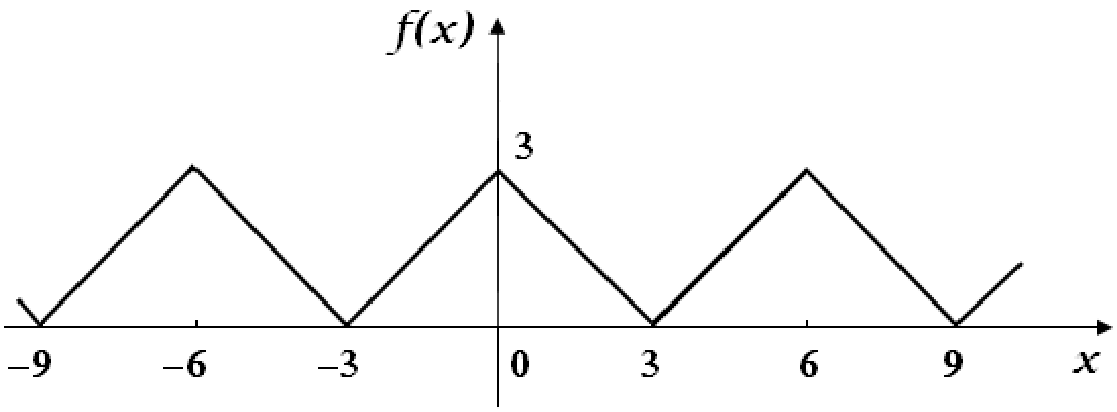
Пример 2. Разложить функцию $f(x) = 3 - x$, заданную на отрезке $[0,3]$, в тригонометрический ряд Фурье по косинусам и в тригонометрический ряд Фурье по синусам. Обосновать сходимость каждого ряда Фурье. Нарисовать графики суммы для каждого ряда Фурье.

Решение.

1). Разложение по косинусам.

Доопределим функцию $f(x) = 3 - x$ на промежутке $[-3,0)$ четным образом и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6:

$f(x) = f(-x) = 3 - (-x) = 3 + x, x \in [-3,0)$.



Вычислим коэффициенты Фурье этой четной функции:

$b_n = 0, (n = 1,2,3, \dots)$

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 (3 - x)dx = \frac{2}{3}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = 3, \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3(3-x)\cos\frac{\pi nx}{3}dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=3-x & dv=\cos\frac{\pi nx}{3}dx \\ du=-dx & v=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3}\left((3-x)\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3+\frac{3}{\pi n}\int_0^3\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{3}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3=-\frac{6}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-1)=$$

$$=\frac{6}{\pi^2n^2}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{12}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1\end{cases}.$$

Так как рассматриваемая функция является непрерывной всюду, то сумма ее тригонометрического ряда Фурье равна данной функции при всех x:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{12}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)}{3}x$$

Полученное разложение можно использовать для нахождения суммы ряда:

полагая в этом равенстве $x=0$, получим:

$$3=\frac{3}{2}+\frac{12}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Выпишем для этого разложения равенство Парсеваля.

$$\frac{2}{3}\int_0^3(3-x)^2dx=\frac{9}{2}+\frac{144}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

Вычислим интеграл в левой части:

$$\frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)^2 dx = \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_0^3 = \frac{2}{9}\cdot 27 = 6$$

Равенство Парсеваля принимает вид:

$$6 = \frac{9}{2} + \frac{144}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

откуда

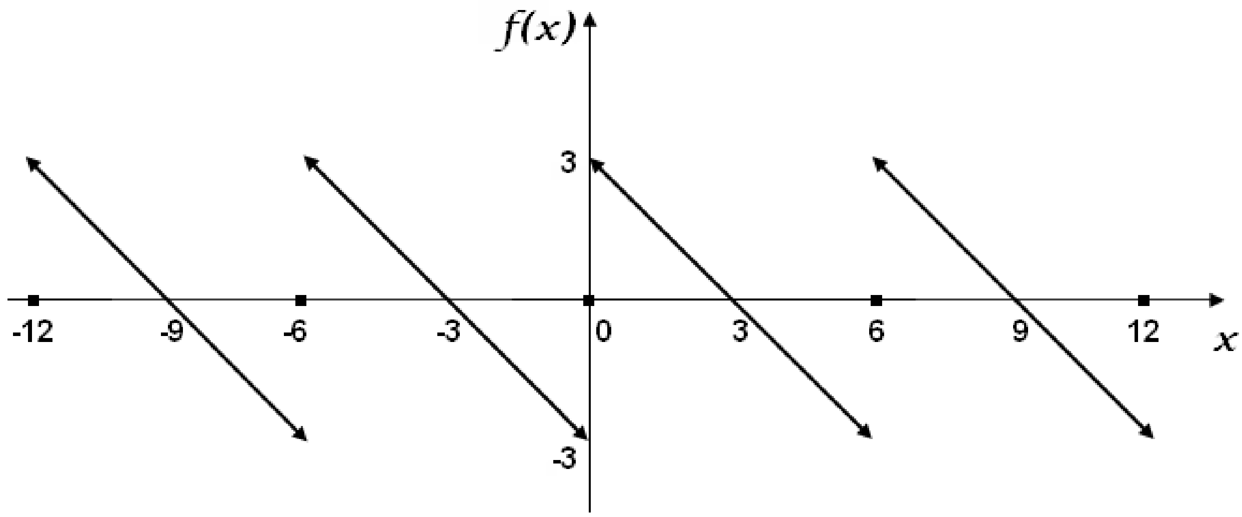
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Итак, с помощью разложений функций в тригонометрические ряды Фурье можно получать значения сумм некоторых числовых рядов.

2). <u>Разложение по синусам.</u>

Доопределим функцию $f(x) = 3 - x$ на промежутке $[-3,0)$ нечетным образом, изменим значение функции при $x = 0$, полагая $f(0) = 0$ и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6:

$f(x) = -f(-x) = -\big(3-(-x)\big) = -3 - x,\ x \in [-3,0).$



Согласно теореме Дирихле сумма тригонометрического ряда Фурье такой функции будет равна функции при всех x. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$a_n = 0, \qquad (n = 0,1,2,3,\dots)$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\sin\frac{\pi n x}{3}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 3 - x & dv = \sin\frac{\pi n x}{3}dx \\ du = -dx & v = -\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left((3-x)\cdot\left(-\frac{3}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 - \frac{3}{\pi n}\int_0^3 \cos\frac{\pi n x}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{\pi n} - \frac{9}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3\right) = \frac{6}{\pi n}.$$

$$b_n = \frac{6}{\pi n} \quad (n = 1,2,3,\dots)$$

$$f(x) = \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{3}$$

Полагая в этой формуле $x = \frac{3}{2}$, получим:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

Учитывая, что $\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, n = 2k \\ (-1)^k, n = 2k+1 \end{cases}$, перепишем полученный результат в виде:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}(-1)^k$$

Выписывая равенство Парсеваля для данного разложения, получим значение суммы еще одного числового ряда:

$$\frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{\pi n}\right)^2$$

$$6 = \frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \text{откуда}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$