Математический анализ-3 семестр

Лекция 3

Тема 3. Знакопеременные числовые ряды

3.1. Ряд Лейбница

3.2. Абсолютная и условная сходимость

3.3. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

3. Знакопеременные числовые ряды

Определение 1. Числовой ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные числа.

Если отрицательных членов конечное число, то, отбросив их, получим положительный ряд.

Если положительных членов конечное число, то, отбросив их, получим отрицательный ряд, который можно исследовать с помощью теорем о сходимости положительных рядов, изменив знаки всех членов ряда. Существенно новым является тот случай, когда среди членов ряда бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных чисел.

3.1. Ряд Лейбница

Рассмотрим случай, когда знаки членов ряда чередуются, например, члены с нечетными номерами положительны, а члены с четными номерами отрицательны.

Определение 2. Ряды, представленные в виде: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ или $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot a_n$, где $a_n > 0$, называются *знакочередующимися*.

Теорема 1 Лейбница (признак сходимости знакочередующегося ряда).

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю: $a_n > a_{n+1}$, $n = 1,2,3,\ldots,$

и стремятся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$ то ряд сходится.

Доказательство.
Для определенности возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$, $a_n > 0$.

Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Члены ряда сгруппированы так, что все слагаемые этой суммы – положительные числа. Значит, частичные суммы с четными номерами возрастают с ростом n.

С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

т.е. частичные суммы с четными номерами ограничены первым членом ряда: $S_{2n} < a_1$.

Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Для частичных сумм с нечетными номерами справедливо равенство: $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, из которого следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} =$$

$$= S + 0(\text{по условию теоремы}) = S.$$

Итак, частичные суммы с четными и нечетными номерами имеют один и тот же предел, а, значит, ряд сходится, и его сумма равна S.

Определение 3. Знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, называется *рядом Лейбница*.

Замечание. Частичные суммы с четными номерами приближаются к сумме ряда S, возрастая, а частичные суммы с нечетными номерами – убывая, т.е. справедливо неравенство:

$S_{2n} < S < S_{2n-1}$.

В частности, $0 < S < a_1$.

Если первый член ряда Лейбница $-a_1$, т.е. отрицателен, то $-a_1 < S < 0$.

В любом случае сумма ряда имеет знак его первого члена и меньше его по модулю.

Остаток ряда Лейбница также является рядом Лейбница. Следовательно, сумма остатка имеет знак своего первого члена и меньше его по модулю. Так для ряда Лейбница легко оценивается разность между суммой и частичной суммой.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Легко проверить, что условия теоремы Лейбница выполнены:

$$a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n},\ \ a_n=\frac{\ln n}{n}.$$

Для проверки выполнения условий теоремы Лейбница введем функцию $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ и докажем, что она монотонно убывает, начиная с некоторого значения x, и стремится к нулю при $x\to\infty$.

Вычислим:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$$

для $x>e$.

Это означает, что, начиная с номера $n=3$, верно неравенство

$$a_n>a_{n+1},\ n=3,\ldots.$$

Как уже было показано, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$. Следовательно, условия теоремы Лейбница выполнены, и ряд сходится.

Замечание. Составим ряды из модулей членов рассмотренных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}.$$

Оба эти ряда расходятся. Первый из них является гармоническим, а члены второго, начиная с $n=3$, больше, чем члены гармонического ряда.

3.2. Абсолютная и условная сходимость

Пусть дан произвольный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ составлен из модулей его членов.

Теорема 2. Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство. Пусть сходится ряд из модулей. Тогда согласно критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любого номера $n > N$ и любого натурального k будет верно неравенство:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Для знакопеременного ряда получим следующую оценку:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon \quad ,$$

что означает, что условие сходимости для него выполняется, т.е. сам знакопеременный ряд сходится.

Определение 3. Если сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда, то сам знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Определение 4. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся*.

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$, рассмотренные в примерах предыдущего пункта, являются условно сходящимися.

При установлении *абсолютной* сходимости можно пользоваться всеми признаками сходимости положительных рядов. Если сходимость ряда из модулей установлена, то исследование ряда на этом заканчивается: ряд сходится абсолютно.

Если установлена расходимость ряда из модулей с помощью признаков Даламбера или Коши, то исследование также заканчивается, т.к. в этом случае знакопеременный ряд расходится в силу невыполнения необходимого условия сходимости (общий член ряда стремится к ∞ с возрастанием n).

Если расходимость ряда из модулей установлена другими способами, то исследование надо продолжить, например, для знакочередующихся рядов с помощью теоремы Лейбница: ряд может сходиться условно.

<u>Пример 3.</u>

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{n^2}}{n!}$.

Применим признак Даламбера к ряду из модулей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^{n^2}}==\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2+2n+1}}{2^{n^2}}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}\cdot 2ln2}{1}=+\infty\ ,$$

предел вычислен с помощью правила Лопиталя.

Ряд из модулей расходится, причем его расходимость установлена с помощью признака Даламбера. Значит, и сам ряд расходится.

<u>Пример 4.</u>

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n$.

Применим радикальный признак Коши к ряду из модулей:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right) = \frac{3}{5} < 1,$$

значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 5.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Ряд из модулей является расходящимся как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = \frac{1}{3}$. Однако, для данного ряда выполнены условия теоремы Лейбница, т.е. ряд сходится условно.

Пример 6.

Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinn}{n^3}$.

Ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|sinn|}{n^3}$.

$\frac{|sinn|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ - ряд Дирихле, $\alpha = 3 > 1$, сходится,

Следовательно, ряд из модулей сходится по признаку сравнения.

Исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 7.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^3}{2^n}$.

Ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$.

Применим признак Коши-радикальный:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$, ряд из модулей сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

3.3. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Без доказательства отметим следующие свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема 3. Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный произвольной перестановкой его членов, также сходится и имеет ту же сумму. Другими словами, абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством так же, как и конечная сумма.

Если ряд сходится условно, то надлежащей перестановкой его членов можно изменить сумму ряда на любое заданное число, а также сделать ряд расходящимся.

Рассмотрим пример.

Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$
является условно сходящимся.
Теперь переставим члены ряда так, что после одного положительного члена будут следовать 2 отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\right).$$

Ясно, что последовательность частичных сумм нового ряда сходится. Однако в результате перестановки членов ряда получен ряд, сумма которого в 2 раза меньше суммы исходного ряда.

Действия по исследованию знакочередующегося ряда на сходимость можно изобразить в виде схемы:

Знакочередующиеся ряды: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_n - \ldots$

или $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_n - \ldots$

1. Исследуем на абсолютную сходимость:

ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

расходится (пр.Коши-рад, Даламбера)

Исходный ряд расходится

расходится (др. признаки)

у исходного ряда абсолютной сходимости нет

сходится

Исходный ряд сходится абсолютно

2. Исследуем на условную сходимость:

$$\left.\begin{cases} 1)\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ 2)\ a_n \succ a_{n+1} \end{cases}\right\}$$ Условия Лейбница

нет

Исходный ряд расходится.

да

Исходный ряд является рядом Лейбница, **сходится условно.**