Практическое занятие 8

Ряды Фурье

Теоретический материал

1. Разложение функций в ряд Фурье

<u>*Определение.*</u> Пусть f(x) – периодическая функция с периодом 2π, интегрируемая на [-π; π]. Рядом Фурье называется ряд:

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где коэффициенты определяются формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

2. Условия сходимости ряда Фурье

Теорема Дирихле устанавливает *условия сходимости ряда Фурье.*

<u>*Теорема Дирихле.*</u> Пусть 2π — периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ ($[0;2\pi]$) удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x)$ — кусочно-непрерывная, т.е. непрерывная или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2) $f(x)$ — кусочно-монотонная, т.е. монотонная на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонная.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1) в точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2) в каждой точке x_0 разрыва функции $S(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$,

т.е. сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3) в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ (или при $x = 0$, $x = 2\pi$ на концах отрезка)

$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Таким образом, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 *теоремы Дирихле*, то на отрезке $[-\pi; \pi]$ ($[0; 2\pi]$) имеет место разложение:

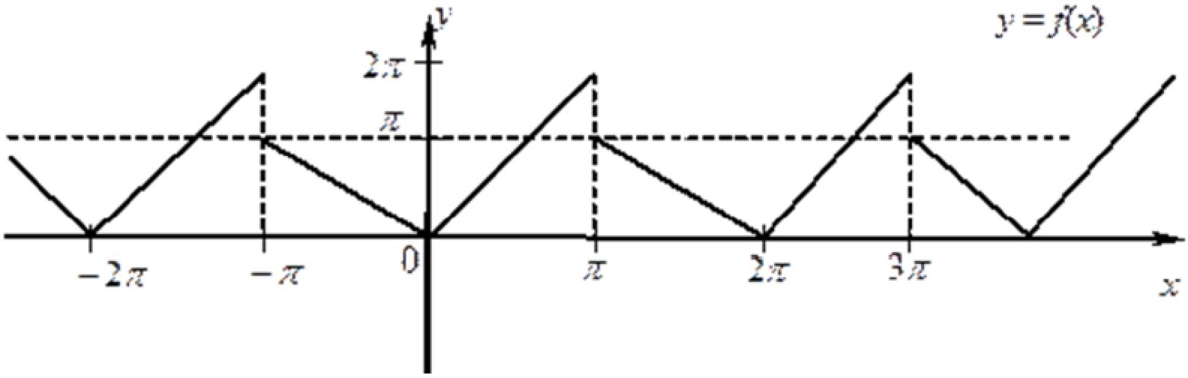
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Это равенство может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi; \pi]$.

В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье может быть получено указанное разложение во всей области определения функции.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$ формулой $f(x)=\begin{cases} 2x \text{ при } 0\le x\le \pi, \\ -x \text{ при } -\pi\le x\le 0. \end{cases}$

Решение.



Данная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. может быть разложена в ряд Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2xdx=\frac{3\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\cos nxdx=$$

$$=\begin{bmatrix} \text{интегрируем по частям:} \\ u=x, du=dx, \\ dv=\cos nxdx, v=\dfrac{1}{n}\sin nx. \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{n}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n)+\frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n-1)=-\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{n}(-1)^{n-1}.$$

Исходной функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

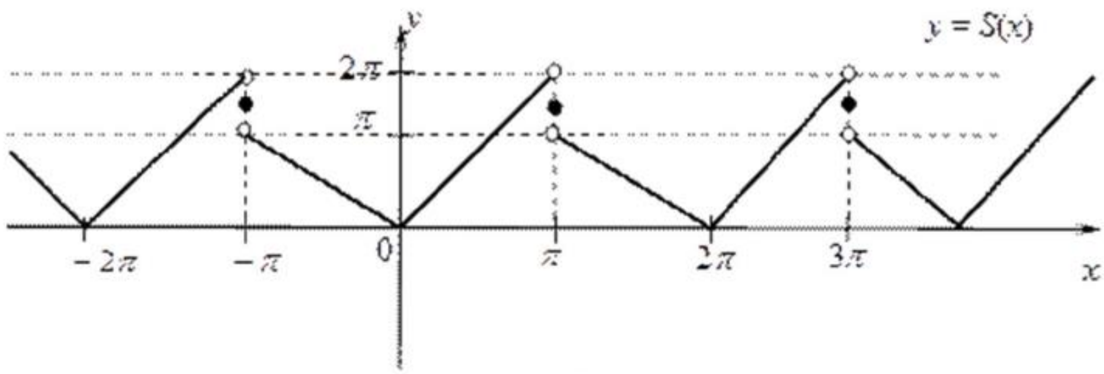
$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[-\pi;\pi]$, поэтому, согласно теореме Дирихле, для всех этих точек имеем равенство $f(x) = S(x)$, т.е.

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right),$$

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi+2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Ниже приведен график $S(x)$



3. Разложение функции по синусам и косинусам

Если $\varphi(x)$ – четная функция, то $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = 2\int_{0}^{\pi}\varphi(x)dx$.

Если $\psi(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)dx = 0$.

1) Пусть $f(x)$ – четная функция, заданная на полупериоде, тогда

$f(x)\cos nx$ – четная функция, а $f(x)\sin nx$ – нечетная,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx;$$

$$b_n = 0.$$

В этом случае ряд содержит только члены с косинусами и константу $\frac{1}{2}a_0$.

2) Пусть $f(x)$ – нечетная функция, заданная на полупериоде, тогда

$a_0 = 0,\ a_n = 0\,,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$

В этом случае ряд содержит члены только с синусами.

4. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$

или $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом $2l$ и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$. Сделав замену переменной $x = t\frac{l}{\pi},\ \ t = x\frac{\pi}{l}$, получим:

$$f(x) = f\left(t\frac{l}{\pi}\right) = g(t).$$

Если функция $f(x)$ была определена на отрезке $[-l, l]$, то функция $g(t)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы Дирихле. Раскладывая в ряд Фурье функцию $g(t)$

$$g(t) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos nt + b_n \cdot \sin nt)$$

и возвращаясь к исходной функции, получим для нее следующее представление рядом Фурье:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, n = 1,2,3, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, n = 1,2,3, \ldots .$$

Теорема Дирихле остается в силе с той лишь разницей, что в случае произвольного отрезка $[-l, l]$ точки $x = \pm\pi$ заменяются на точки $x = \pm l$:

$$S(l) = S(-l) = \frac{1}{2}\big(f(-l+0) + f(l-0)\big).$$

Если в ряд Фурье разлагается нечетная периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$, то произведение $f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}$ есть функция также нечетная, а $f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}$ – четная; следовательно, коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Если в ряд Фурье разлагается четная функция, то произведение $f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$ есть функция нечетная, а $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ – четная и, следовательно,

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Примеры разложения в ряд Фурье.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x| - 5$ на $(-2,2), l = 2$.

Решение. Функция – четная, следовательно,

$b_n = 0,$

$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l(\,|x|\, - \,5)dx \, = \frac{2}{2}\int_0^2(x-5)dx = (x^2\frac{1}{2} - 5x)\Big|_0^2 \, = \, 2-10 = -8.$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^2 (x-5)cos\frac{\pi n x}{l}dx = \int_0^2 \frac{2}{2}(x-5)\,cos\frac{\pi n x}{l}dx \, = \, \frac{-10sin\frac{n\pi x}{2}}{\pi n}\Bigg|_0^2 +$$

$$+\frac{2x}{n\pi}sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{\pi n}\int_0^2 sin\frac{n\pi x}{2} = \begin{cases} 0\text{, если } n = 2k; \\ \frac{-8}{\pi^2(2k+1)^2}\text{, если } n = 2k+1. \end{cases}$$

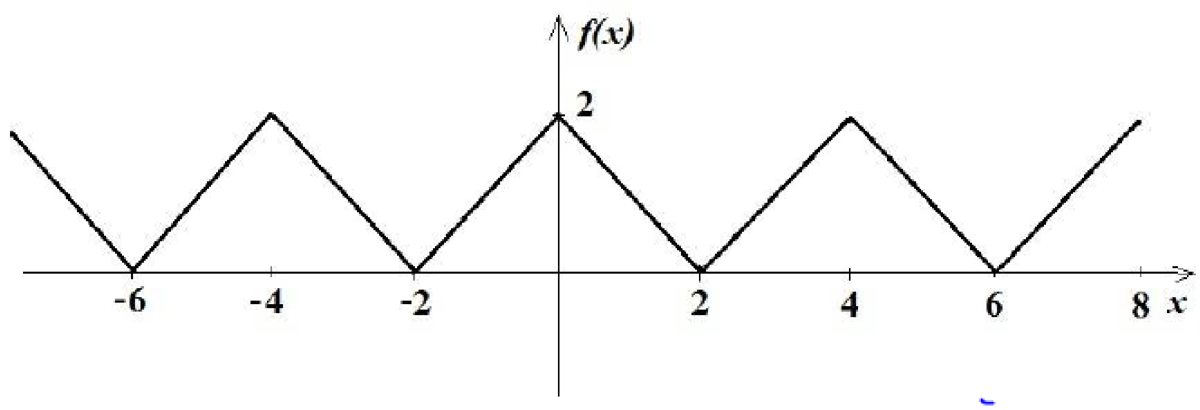
$$|x| - 5 \, = \, -4 \, - \, \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}.$$

Так выглядит разложение в ряд Фурье.

Пример 1. Разложить функцию $f(x) \, = \, 2-x$, заданную на отрезке $[0,2]$ в тригонометрический ряд Фурье по косинусам и в тригонометрический ряд Фурье по синусам.

Решение. Разложение по косинусам.

Доопределим функцию на промежутке $[-2,0]$ четным образом и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом равным 4.



$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(2-x)dx=2,$

$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=((2\text{-}x)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx)=$

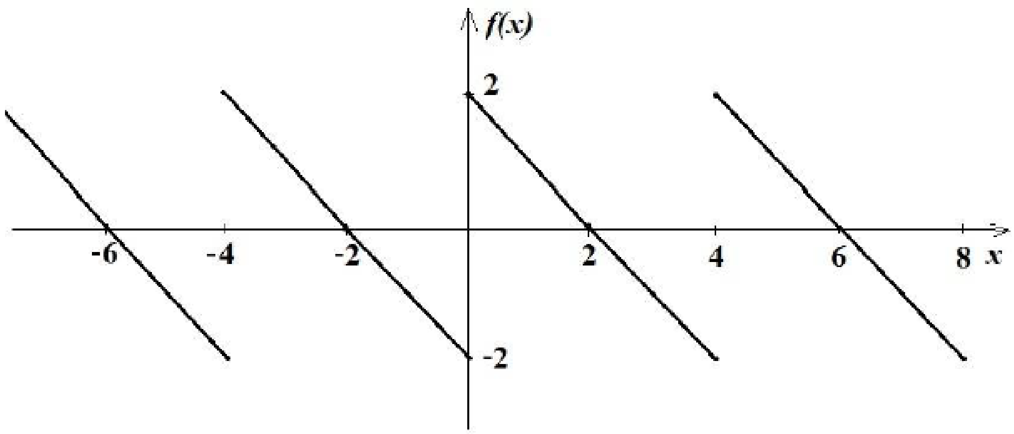
$$=\begin{cases}0,\text{ если } n=2k,\\ \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2},\text{ если } n=2k+1.\end{cases}$$

Ряд Фурье по косинусам имеет вид:

$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\pi\frac{2k+1}{2}x.$

Разложение по синусам.

Доопределим функцию на промежутке $[-2{,}0]$ нечетным образом и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом равным 4.



$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{2}((2-x)(\frac{-2}{n\pi})\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx)=$

$=\frac{4}{n\pi}-\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=\frac{4}{n\pi}.$

Ряд Фурье по синусам имеет вид:

$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$

Задачи для самостоятельного решения

Типовой расчет для факультетов ИИТ и ФТИ: № 1.14 (1-4, 5-8, 9-12, 13-16); № 2.5 (по номеру варианта).