Кафедра Прикладной математики
Института информационных технологий
РТУ МИРЭА

Дисциплина «Вычислительная математика»

2023-2024 уч.г.

Наполнение курса

- **Объем курса**

8 лекционных и 16 практических занятий

- **Темы практических занятий**

1. Элементы теории погрешностей
2. Методы приближения и аппроксимация функций
3. Численные методы решений трансцендентных и алгебраических уравнений
4. Численное интегрирование
5. Численные методы линейной алгебры
6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений
7. Численное решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных
8. Быстрое дискретное преобразование Фурье

Практика 4.
Численное интегрирование

1.1. Основные понятия.
1.2. Метод прямоугольников.
1.3. Метод трапеций.
1.4. Метод парабол. (Метод Симпсона)
1.5. Примеры вычисления определенного интервала.

Часть 1.
Основные понятия

Поскольку функция f(x) в задаче аналитического решения интеграла вида

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad \text{на } [a,b].$$

не всегда представима в виде элементарных функций, то вычисления аналитическими методами становятся трудно выполнимыми.
Для подобного типа задач используются численные методы интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница:

$$I = F(b) - F(a)\text{, где}$$

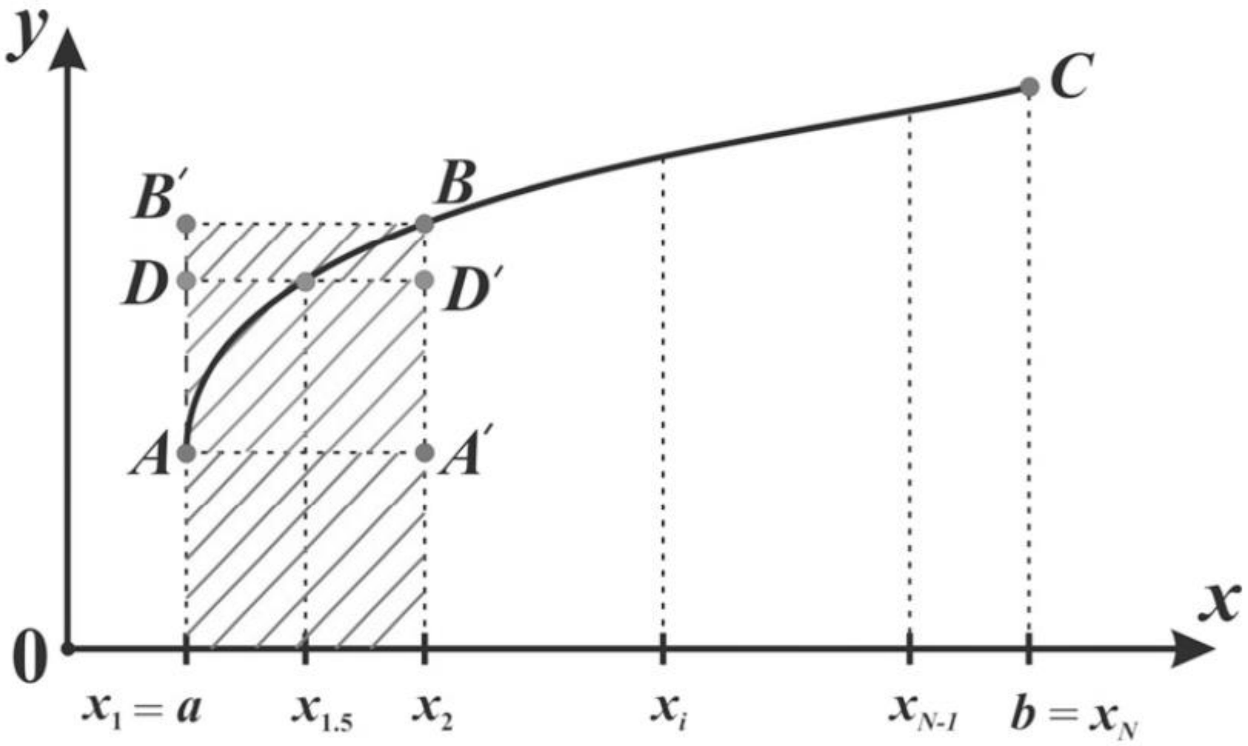
$F(x)$ – некоторая первообразная для данной функции $f(x)$.

Не существование первообразной:

$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x}dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{\ln(x)} \quad \text{и т.д.}$$

Часть 2.
Метод прямоугольников

Предположим, что $f(x)$ имеет следующий график.



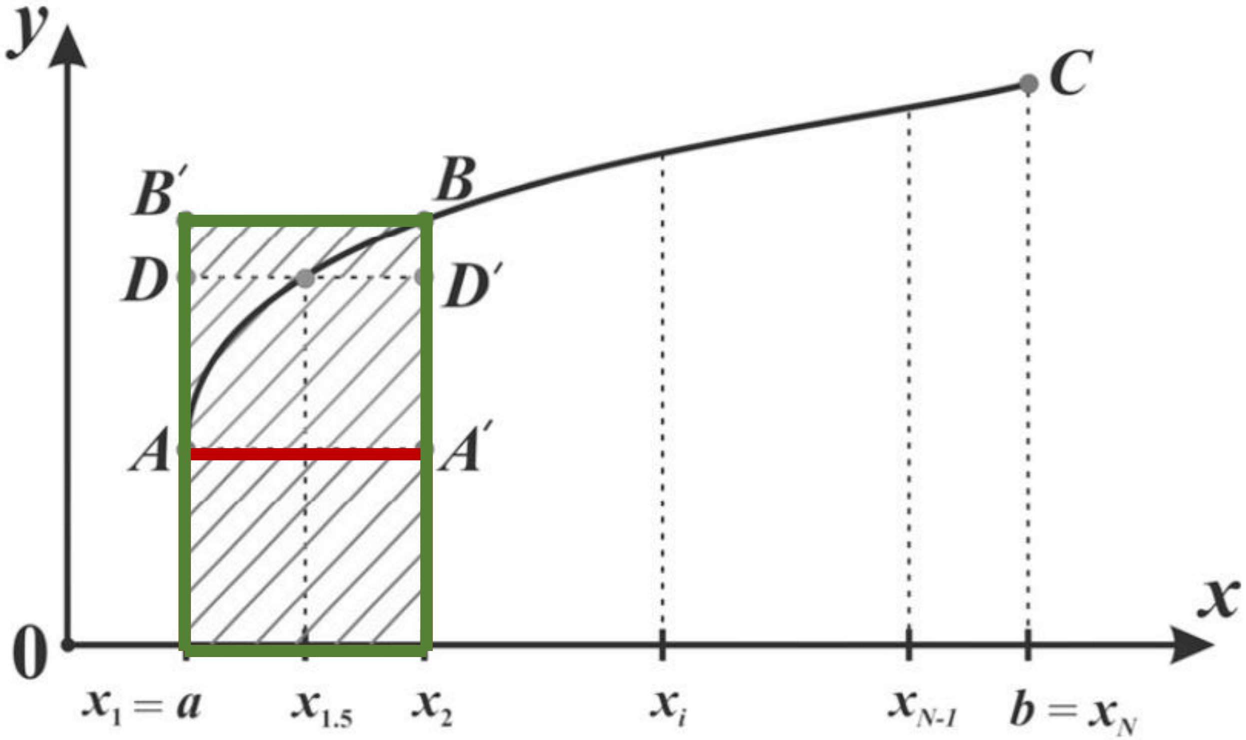
отрезок $[a, b]$ разбивают на несколько частей (N-1), т.е.

вводят разбиение, состоящее из N узлов: $x_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad x_1 = a, \ldots, x_N = b.$

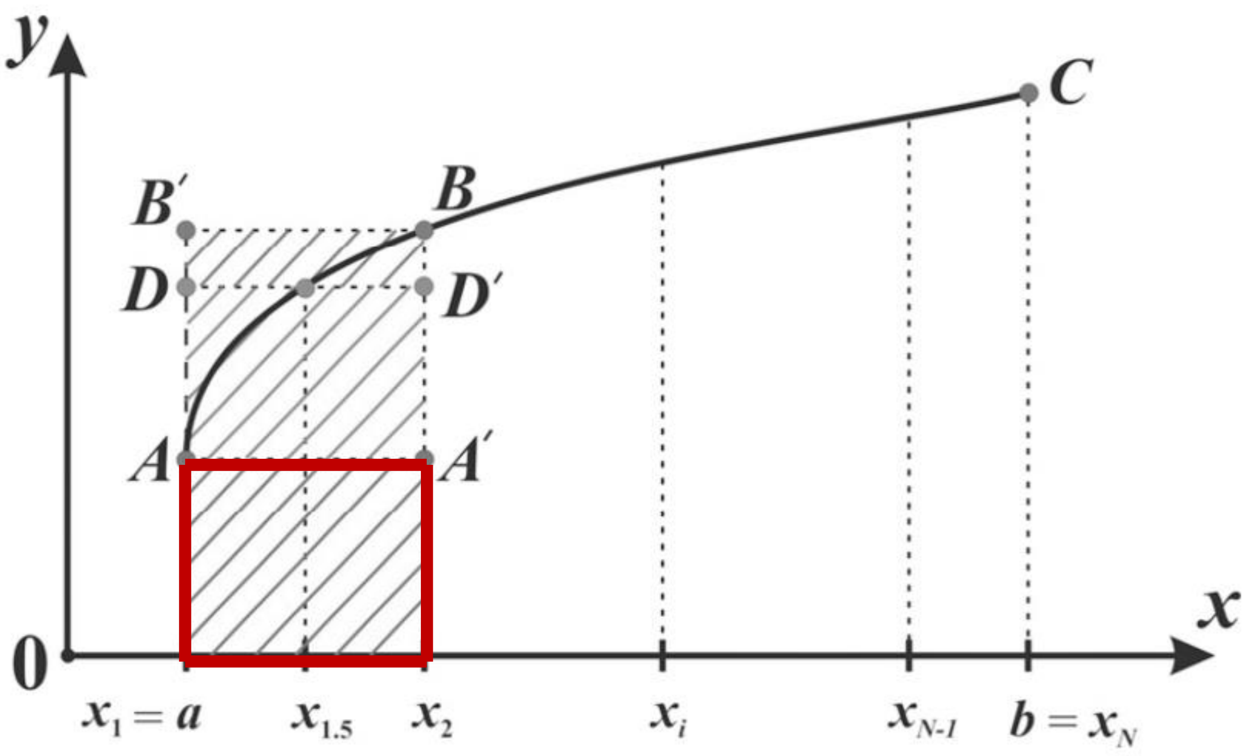
Будем считать узлы равноотстоящими: $h = \dfrac{b-a}{N-1}$.

Рассматриваем прямоугольники: $x_1 x_2 A'A$, или $x_1 x_2 BB'$

или вводим промежуточный узел: $x_{1.5} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \dfrac{h}{2}$.



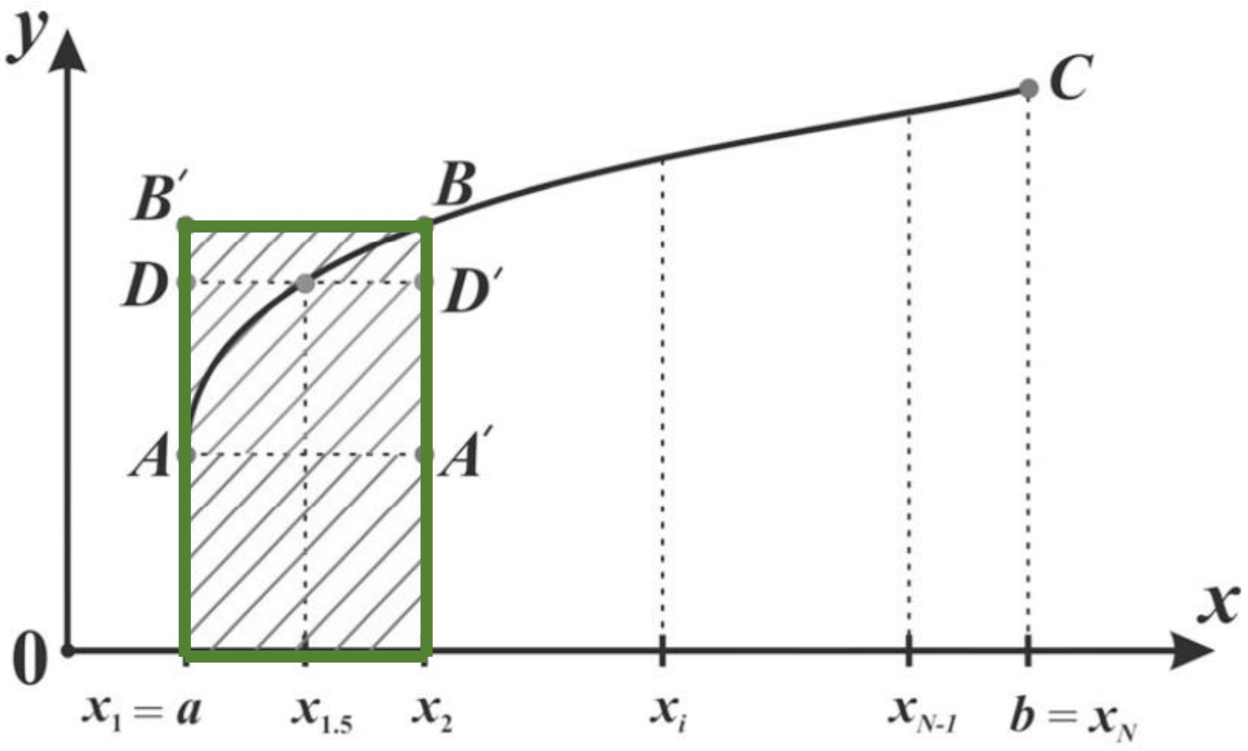
Если рассматриваем прямоугольник $x_1AA^/x_2$:



Формула левых прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + \ldots + h \cdot f(x_{N-1}) = h\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\,.$$

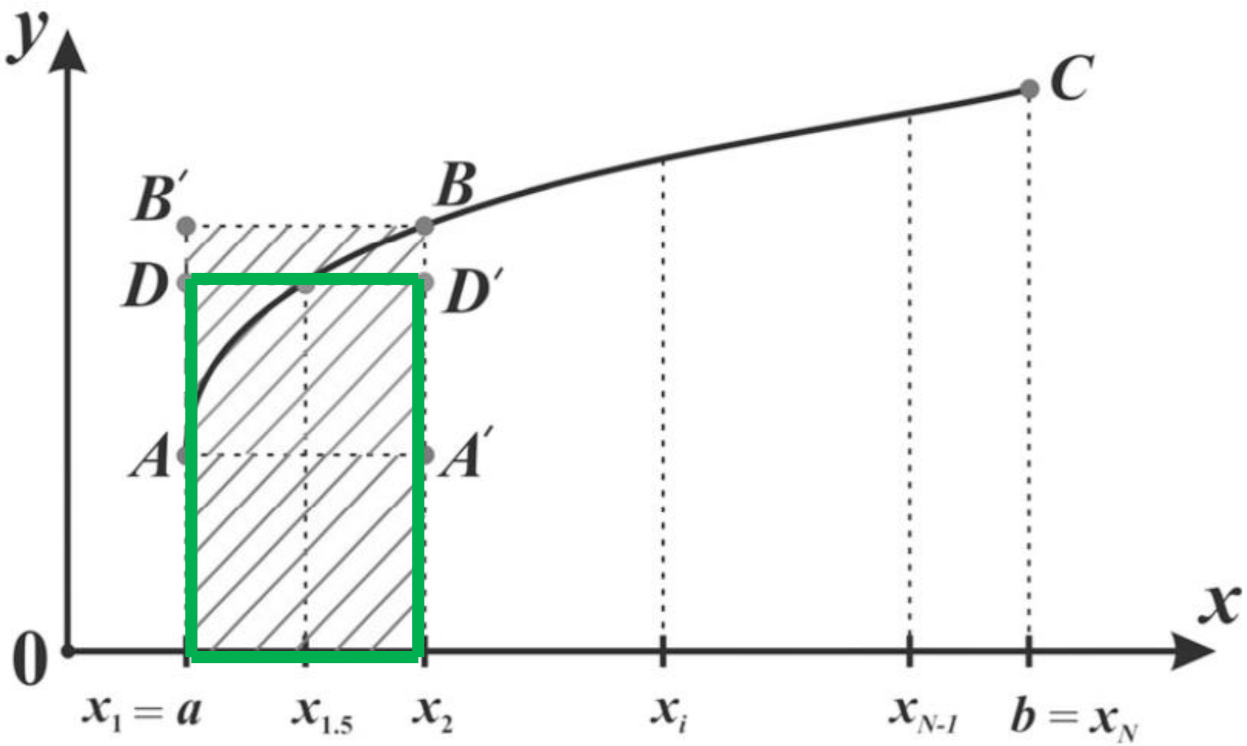
Если рассматриваем прямоугольник $x_1BB^{/}x_2$:



Формула правых прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f(x_2) + h \cdot f(x_3) + \ldots + h \cdot f(x_N) = h\sum_{i=2}^{N} f(x_i).$$

Если рассматриваем прямоугольник $x_1DD^/x_2$:



Формула средних прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) + \ldots + h \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h}{2}\right) = h\sum_{i=1}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

Часть 3.
Метод трапеций

Принцип метода:

отрезок [a;b] разбивается на n равных интервалов длины h, т.е. $h = \frac{b-a}{n}$,

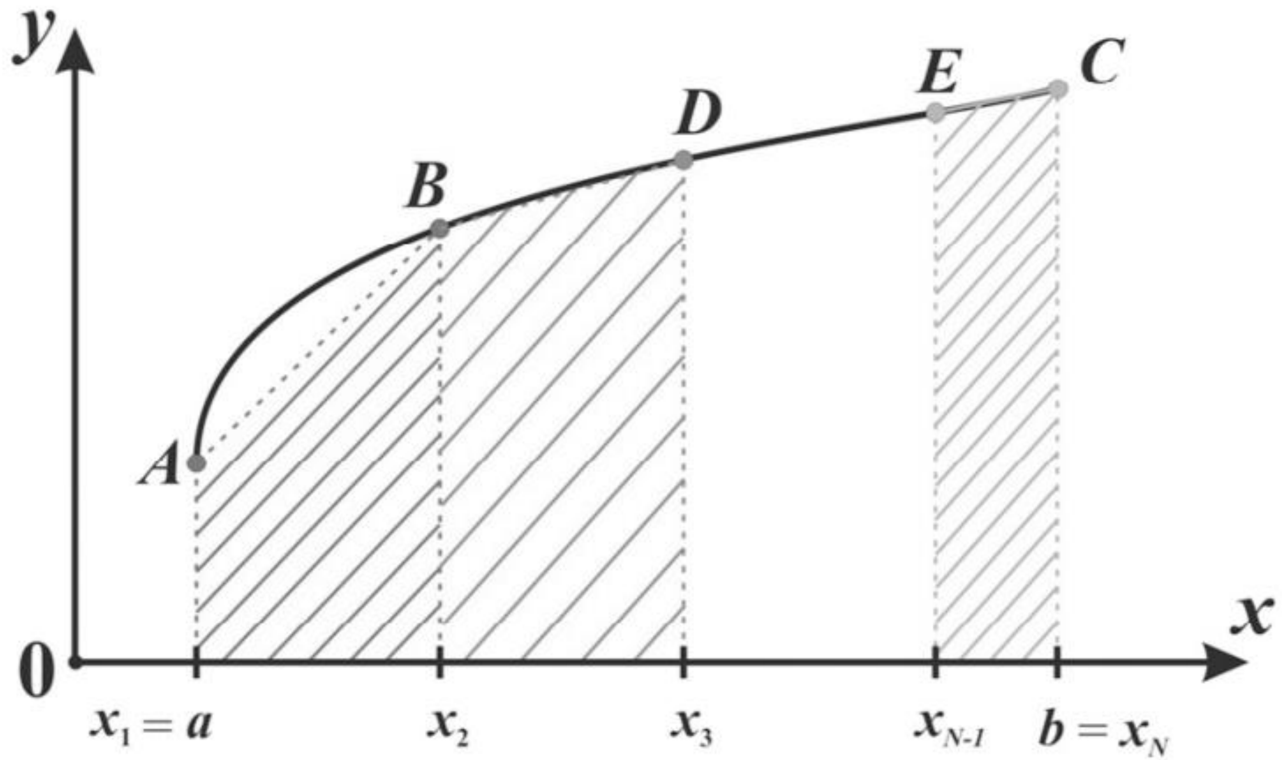
а узлы вычисляются по формуле: $x_i = a + i*h$,

тогда интеграл (I) представим в следующем виде:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h =$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(a) + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right)$$

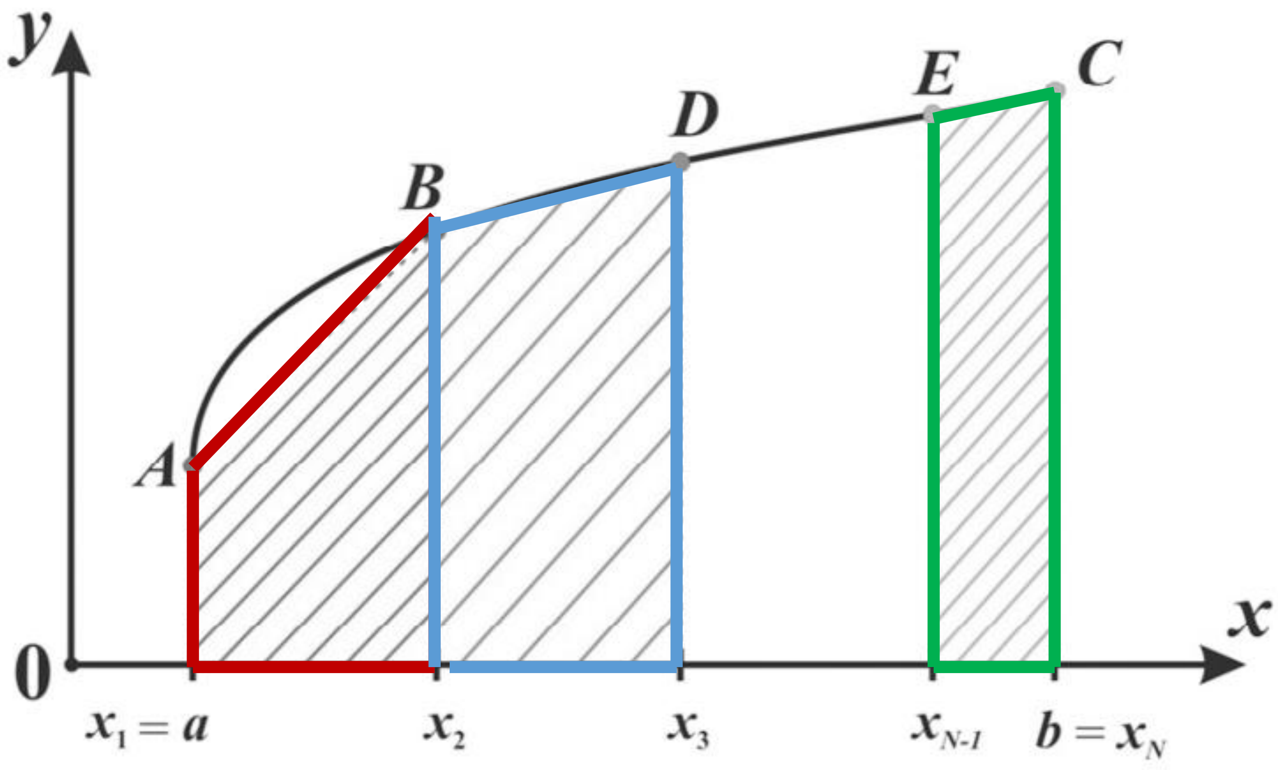
Предположим, что $f(x)$ имеет следующий график.



отрезок $[a,b]$ разбивают на (N-1) частей, т.е. вводят разбиение,

состоящее из N узлов: $x_i, \quad i=\overline{1,N}; \quad x_1 = a,\ldots,x_N = b, \quad h = \dfrac{b-a}{N-1}$.

Рассматриваем трапеции: $aABx_2$, x_2BDx_3, $x_{N-1}ECb$.



$$S_{aABx_2} = h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{h}{2} \cdot \left(f_1 + f_2\right);$$

$$S_{x_2BDx_3} = \frac{h}{2} \cdot \left(f_2 + f_3\right);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} \cdot \left(f_{N-1} + f_N\right);$$

$$I = S_{aABx_2} + S_{x_2BDx_3} + \ldots + S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} \cdot \left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \ldots + 2f_{N-1} + f_N\right).$$

В общем виде $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=2}^{N-1} f_i \right).$

Часть 4.
Метод парабол.
(Метод Симпсона)

Принцип метода:

отрезок [a;b] разбивается на 2n (чётное количество) равных интервалов длины h, т.е. $h = \frac{b-a}{2n}$,

тогда интеграл (I) представим в следующем виде:

$$I = \frac{h}{3}\left(f(a) + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 * \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + f(b)\right)$$

Найдем площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком параболы: $y = ax^2 + bx + c$

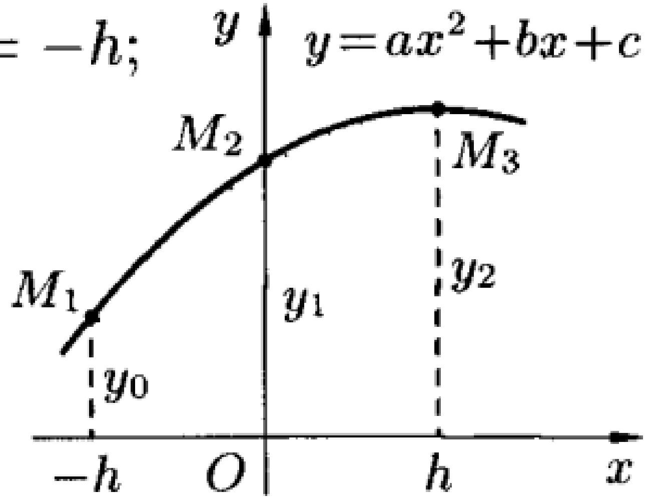
сбоку прямыми: $x = -h,\ x = h$ снизу — отрезком $[-h; h]$.

$M_1(-h; y_0),\ M_2(0; y_1),\ M_3(h; y_2)$

$y_0 = ah^2 - bh + c$ — ордината параболы в точке $x = -h$;

$y_1 = c$ — ордината параболы в точке $x = 0$

$y_2 = ah^2 + bh + c$ — ордината параболы в точке $x = h$



$$S = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Big|_{-h}^{h} = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch.$$

Выразим эту площадь через h, y_0, y_1, y_2.

$$c = y_1, \qquad a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$$

$$S = \frac{2}{3}h^3 \cdot \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h \cdot y_1 =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2hy_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

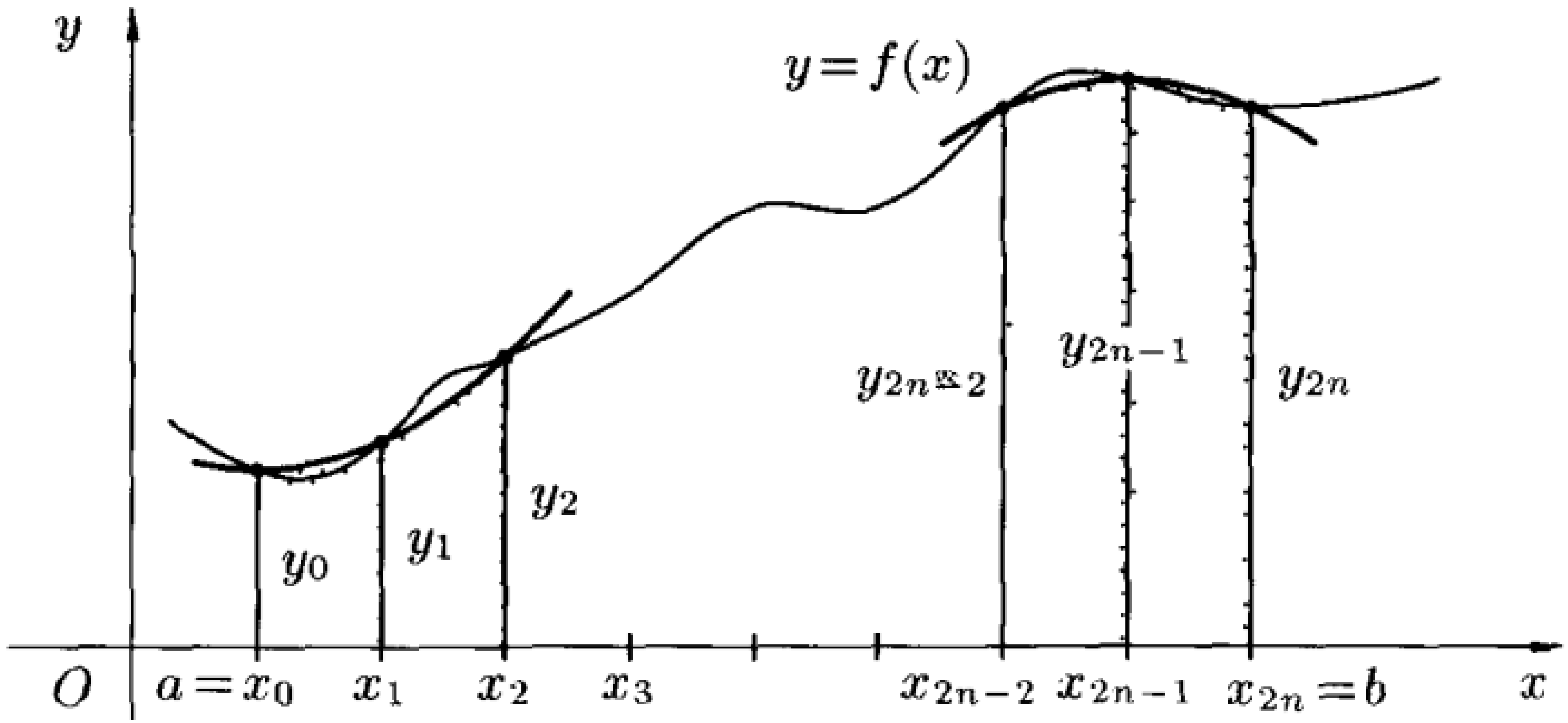
Получим теперь формулу парабол для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

отрезок $[a; b]$ разобьем на $2n$ равных частей (отрезков)

длиной $h = \dfrac{b-a}{2n}$ точками $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$.

$a = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{2n-2},\ x_{2n-1},\ x_{2n} = b$

$f(x)$: $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_{2n-2},\ y_{2n-1},\ y_{2n}$, где: $y_i = f(x_i)$



$$S_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Аналогично находим

$$S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),\ \ldots,$$

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Сложив полученные равенства, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\Big).$$

Часть 5.
Примеры вычисления определенного интервала

Дано: $f(x) = 2x - 1, \quad x \in [1,5]$.

Вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ с использованием формул прямоугольников, трапеций и Симпсона при $N = 5$ (N – число узлов). Проанализировать результат при изменении числа узлов.

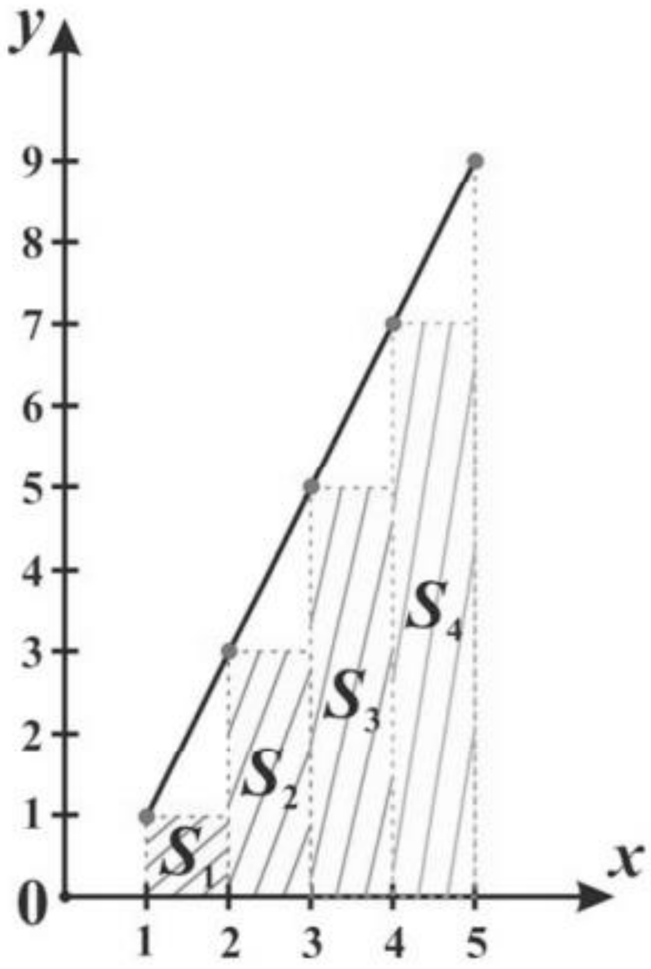
Решение.

Сначала проведем вычисление интеграла аналитически на основе формулы Ньютона-Лейбница: $I = \int_1^5 (2x - 1)\,dx = \left(x^2 - x\right)\Big|_1^5 = 20$.

определим шаг интегрирования:

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{5-1} = 1.$$

а) метод левых прямоугольников

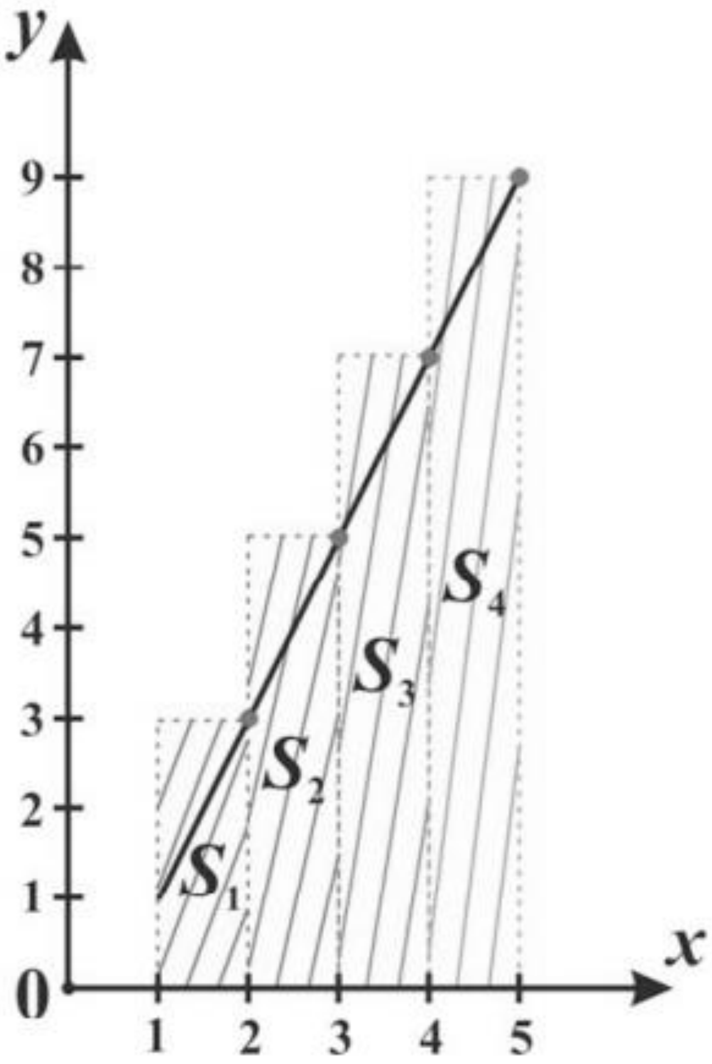


$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_1 \cdot h = 1;$$
$$S_2 = y_2 \cdot h = 3;$$
$$S_3 = y_3 \cdot h = 5;$$
$$S_4 = y_4 \cdot h = 7;$$
$$I = \sum_i S_i = 16.$$

b) метод правых прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_2 \cdot h = 3;$$

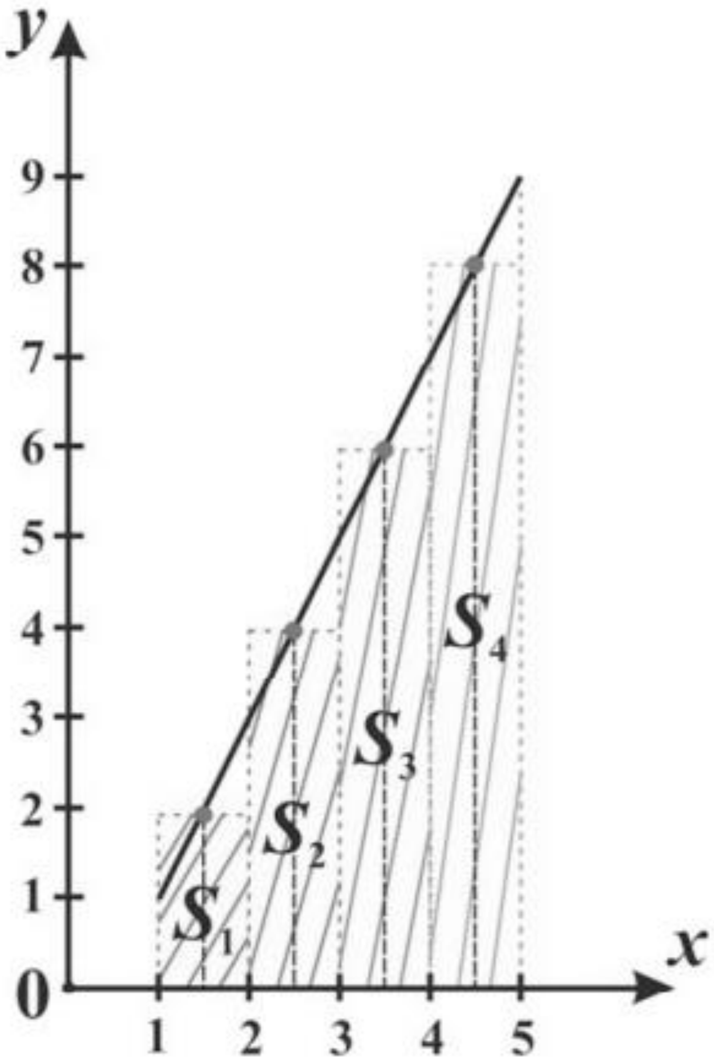
$$S_2 = y_3 \cdot h = 5;$$

$$S_3 = y_4 \cdot h = 7;$$

$$S_4 = y_5 \cdot h = 9;$$

$$I = \sum_i S_i = 24.$$

c) метод средних прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1.5	2.5	3.5	4.5
y_i	2	4	6	8

$$S_1 = f\left(x_{1.5}\right) \cdot h = 2;$$

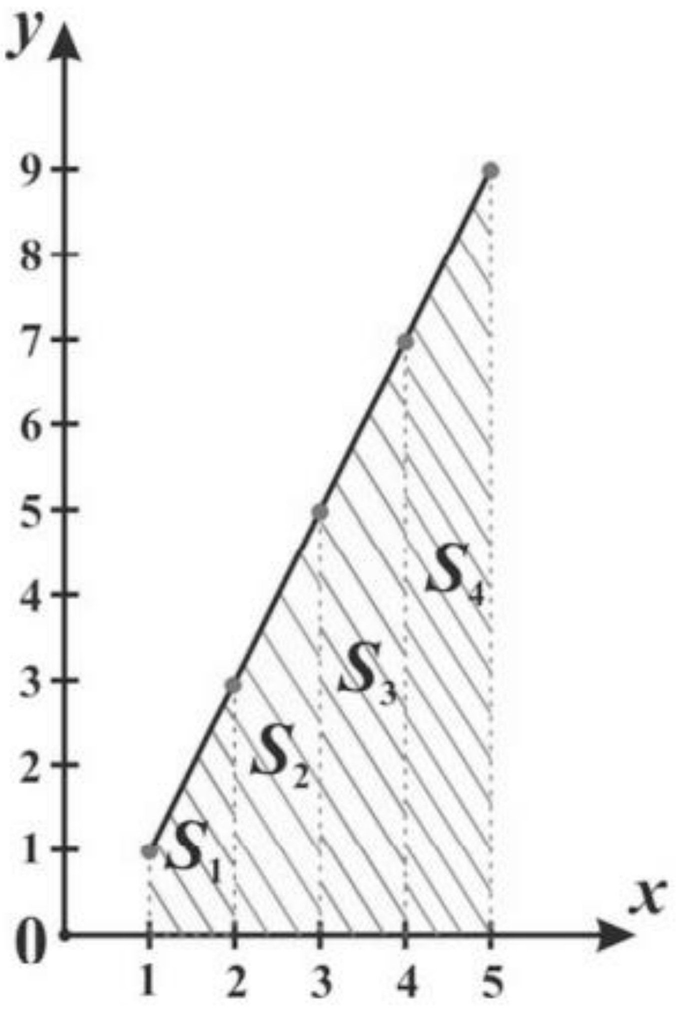
$$S_2 = f\left(x_{2.5}\right) \cdot h = 4;$$

$$S_3 = f\left(x_{3.5}\right) \cdot h = 6;$$

$$S_4 = f\left(x_{4.5}\right) \cdot h = 8;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

d) метод трапеций



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) = 2;$$

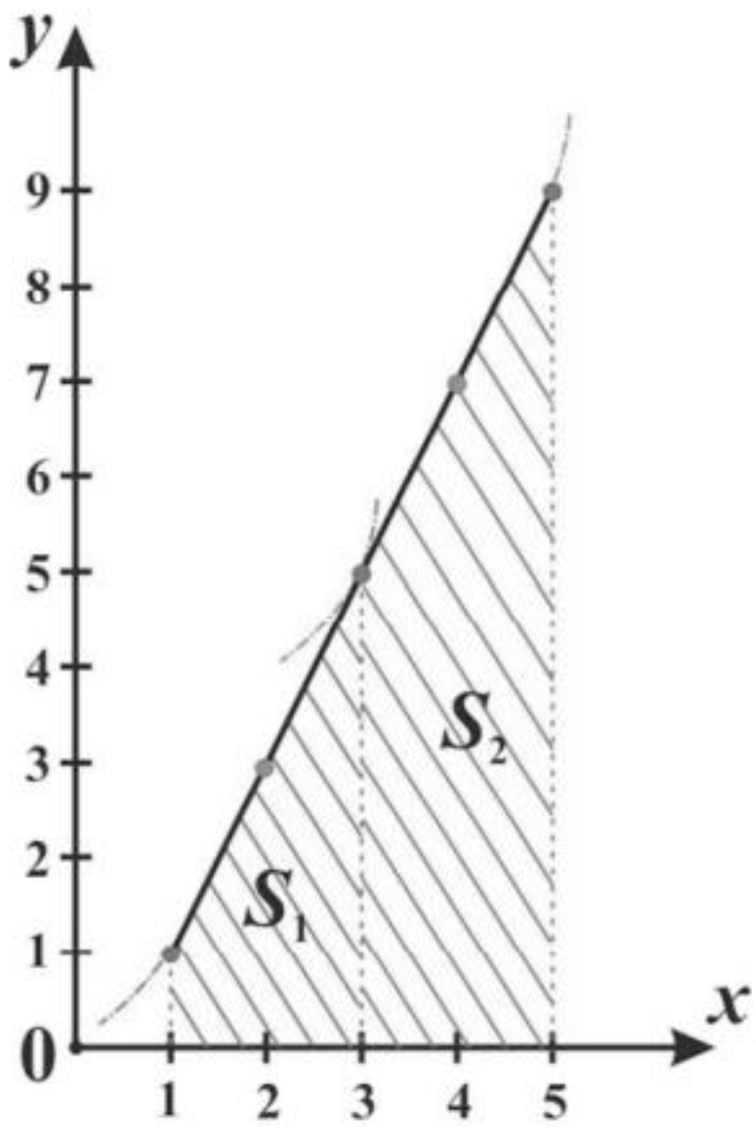
$$S_2 = \frac{h}{2}(f_2 + f_3) = 4;$$

$$S_3 = \frac{h}{2}(f_3 + f_4) = 6;$$

$$S_4 = \frac{h}{2}(f_4 + f_5) = 8;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

e) метод Симпсона (метод парабол)



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{3}\left(f_1 + 4f_2 + f_3\right) = 6;$$

$$S_2 = \frac{h}{3}\left(f_3 + 4f_4 + f_5\right) = 14$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

Увеличим число узлов до $N = 11$: $h = \dfrac{b-a}{N-1} = \dfrac{5-1}{11-1} = 0.4$.

x_i	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8	4.2	4.6	5.0
y_i	1.0	1.8	2.6	3.4	4.2	5.0	5.8	6.6	7.4	8.2	9.0

По формуле левых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} y_i = 18.4.$$

По формуле правых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=2}^{N} f(x_i) = h \cdot \sum_{i=2}^{N} y_i = 21.6.$$

Увеличение количества узлов приводит к уточнению значения определенного интеграла.