Практическое занятие №13
Разложение функций в ряд Фурье на произвольном периоде

Ряды Фурье для функций любого периода и для непериодических функций

Ряд Фурье для функции $f(x)$ в интервале $(-l;l)$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} &a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx\quad n=1,2,...\\ &b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad n=1,2,...\end{aligned}\qquad(1)$$

Заметим, что промежуток [-l, l] может быть заменен любым другим промежутком длины $2l$, к примеру, промежутком [0, 2l], тогда

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx,\quad (n=0,1,2,...);\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{0}^{2l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad (n=1,2,...).$$

Для четной функции произвольного периода T=2l разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned} &f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n}{l}x;\\ &a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,...\end{aligned}\qquad(2)$$

Для нечетной функции:

$$\begin{aligned} &f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n}{l}x;\\ &b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx;\quad n=1,2,...\end{aligned}\qquad(3)$$

Если функция $f(x)$ задана на интервале (0, l), то для разложения в ряд Фурье функцию надо доопределить на интервале (-l, 0) произвольным способом, а затем разложить в ряд Фурье на интервале $(-l;l)$. Доопределять функцию можно четным или нечетным способом, т. е. чтобы значения функции в точках интервала (-l, 0) находились из условия $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$.

Ряд Фурье для функции с периодом $2l$

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l,l]$

или $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом $2l$ и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l,l]$. Сделав замену переменной $x=t\frac{l}{\pi}$, $t=x\frac{\pi}{l}$, получим:

$$f(x)=f\left(t\frac{l}{\pi}\right)=g(t).$$

Если функция $f(x)$ была определена на отрезке $[-l,l]$, то функция $g(t)$ определена на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы Дирихле. Раскладывая в ряд Фурье функцию $g(t)$

$$g(t)\to\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nt+b_n\cdot\sin nt)$$

и возвращаясь к исходной функции, получим для нее следующее представление рядом Фурье:

$$f(x)\to\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, n=1,2,3,\dots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, n=1,2,3,\dots.$$

Теорема Дирихле остается в силе с той лишь разницей, что в случае произвольного отрезка $[-l,l]$ точки $x=\pm\pi$ заменяются на точки $x=\pm l$:

$$S(l)=S(-l)=\frac{1}{2}\big(f(-l+0)+f(l-0)\big).$$

Если в ряд Фурье разлагается нечетная периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$, то произведение $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ есть функция также нечетная, а $f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$ – четная; следовательно, коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Если в ряд Фурье разлагается четная функция, то произведение $f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$ есть функция нечетная, а $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ – четная и, следовательно,

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Примеры решения задач

1. Для данной периодической функции построить ряд Фурье.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0;\\ x, & 0<x\le 2.\end{cases}$$

Решение. Ряд Фурье для заданной периодической функции с периодом $T=2l=4$ ищем в виде:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{2}x+b_n\sin\frac{\pi n}{2}x\right).$$

Вычисляем коэффициенты ряда по формуле (1)

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}xdx=\frac{x^2}{4}\bigg|_0^2=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0\cos\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx, & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx, & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2+\frac{2}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{2}{\pi^2 n^2} \sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2 = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом, разложение заданной функции $f(x)$ ряд Фурье примет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} \cos\frac{\pi n x}{2} + \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\frac{\pi n x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\frac{\pi(2n-1)x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\frac{\pi n x}{2}.$$

Согласно теореме Дирихле значение функции на конце интервала $(-2;2)$ вычисляем по формуле:

$$f(2) = \frac{f(2-0) + f(2+0)}{2} = \frac{2+0}{2} = 1.$$

Отметим, что график функции $f(x)$ имеет вид (рис. 1)

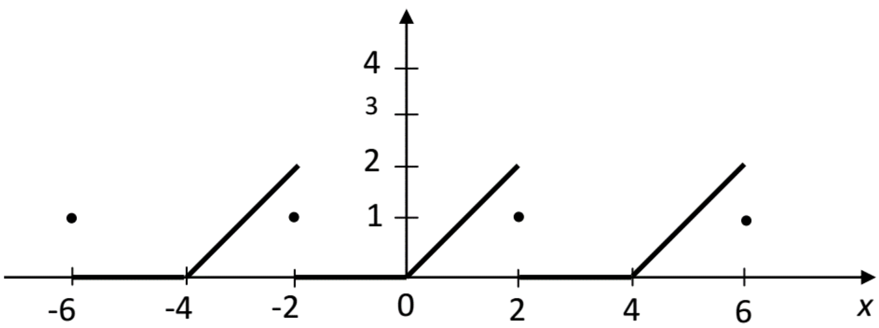

Рис. 1

Ответ: $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\frac{\pi(2n-1)x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin\frac{\pi n x}{2}.$

2. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье в интервале $(-2,2)$.

Решение. Данная функция нечетная в интервале $(-2,\ 2)$, поэтому ее разложение в ряд Фурье содержит только синусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где по формуле (3)

$$b_n = \int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du = dx & v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{matrix} \right| = -\frac{2x}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}(2\cos n\pi - 0) + \frac{2^2}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{n\pi} - (-1)^n + \frac{4}{n^2\pi^2}(\sin n\pi - \sin 0) =$$

$$= \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Отсюда,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Ответ: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}.$

3. Разложить функцию $f(x) = \cos 2x$ в ряд Фурье в интервале $(0, \pi)$.

Решение. Доопределим данную функцию на интервале $(-\pi, 0)$ нечетным образ
Тогда используем формулу (3), где $l = \pi$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\cdot\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(nx + 2x) + \sin(nx - 2x))dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x(n+2)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x(n-2)dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos x(n+2)}{n+2} - \frac{\cos x(n-2)}{n-2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos\pi(n+2)}{n+2} - \frac{\cos\pi(n-2)}{n-2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n+2} - \frac{(-1)^n}{n-2} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n+2} + \frac{1-(-1)^n}{n-2}\right).$$

Далее видно, что

1) при $n = 2k$, $k = 0,1,2,\ldots$ коэффициенты $b_n = b_{2k} = 0$,
2) при $n = 2k+1$, $k = 0,1,2,\ldots$ коэффициенты $b_n = b_{2k+1}$ равны

$$b_{2k+1} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2k+1+2} + \frac{2}{2k+1-2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2k+3} + \frac{2}{2k-1}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4k+2}{4k^2+4k-3}.$$

Следовательно, ряд Фурье для рассматриваемой функции запишется в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\cdot\sin(2k+1)x=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+2}{4k^2+4k-3}\cdot\sin(2k+1)x.$$

Ответ: $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4k+2}{4k^2+4k-3}\cdot\sin(2k+1)x.$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x| - 5$ на $(-2{,}2), l = 2$.

Решение. Функция – четная, следовательно,

$b_n = 0,$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l(|x|-5)dx=\frac{2}{2}\int_0^2(x-5)dx=\left(x^2\frac{1}{2}-5x\right)\Big|_0^2=2-10=-8.$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^2(x-5)cos\frac{\pi nx}{l}dx=\int_0^2\frac{2}{2}(x-5)\,cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{-10sin\frac{n\pi x}{2}}{\pi n}\Bigg|_0^2+$$

$$+\frac{2x}{n\pi}sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2 sin\frac{n\pi x}{2}=\begin{cases}0\text{, если } n=2k;\\ \frac{-8}{\pi^2(2k+1)^2}\text{, если } n=2k+1.\end{cases}$$

$$|x|-5=-4-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}.$$

Так выглядит разложение в ряд Фурье.