



Математический анализ-3 семестр

Лекция 4

Тема 4. Функциональные ряды

- 4.1. Функциональный ряд, его область сходимости
- 4.2. Равномерная сходимость функционального ряда
- 4.3. Теорема Вейерштрасса
- 4.4. Свойства равномерно сходящихся рядов

4. Функциональные ряды

4.1. Функциональный ряд, его область сходимости

Определение 1. Пусть дана последовательность функций:

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots,$$

определенных на некотором множестве X . Выражение вида:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

называется *функциональным рядом*, а множество X – областью определения этого ряда.

При подстановке произвольного значения x из множества X функциональный ряд становится числовым, причем при одних значениях x числовой ряд может быть сходящимся, а при других – расходящимся.

Определение 2. Множество значений переменной x , при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Примеры. Рассмотрим ряды, определенные для любых значений x .



1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Областью сходимости является интервал $(-1, 1)$ (при подстановке $\forall x \in (-1, 1)$ получаем сходящийся ряд геометрической прогрессии).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Областью сходимости является интервал $(1, +\infty)$.

Сумма функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ представляет собой функцию, определенную на области сходимости ряда.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

$$\forall x \in R: 0 < \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – ряд Дирихле, сходится, \rightarrow положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ сходится при любых значениях x (по признаку сравнения).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ – знакопеременный ряд.

Ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n^2 x)|}{n^2}$.

$$\forall x \in R: \frac{|\sin(n^2 x)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится, следовательно, сходится ряд из модулей, значит, при любых значениях x (по признаку сравнения) сходится исходный ряд (абсолютно).

4.2. Равномерная сходимость функционального ряда

Конечные суммы сохраняют свойства своих слагаемых. Например, сумма конечного числа непрерывных функций также непрерывна. Обладают ли бесконечные суммы функций, т.е. функциональные ряды, аналогичными свойствами?

Рассмотрим пример.

Функциональный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ представляет собой при $x \neq 0$ сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$, $0 < q < 1$. При $x = 0$ все члены этого ряда равны нулю.



Следовательно, данный ряд определен и сходится при всех x , причем его

$$\text{сумма } S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{(1+x^2)\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)} = 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, сумма ряда терпит разрыв при $x = 0$, несмотря на то, что члены ряда непрерывны при всех x .

Функциональные свойства суммы ряда зависят от характера сходимости самого ряда.

Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X .

$S_n(x)$, $S(x)$ - частичная сумма и сумма этого ряда соответственно.

Определение 3. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X , если этот ряд сходится при всех x , принадлежащих множеству X , и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех номеров $n > N$ и для любого $x \in X$ будет выполнено неравенство: $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Другими словами, ряд сходится равномерно на множестве X , если разность между частичной суммой и суммой ряда становится сколь угодно малой, начиная с некоторого номера, одновременно для всех x , принадлежащих области сходимости ряда.

Геометрически равномерная сходимость ряда означает, что графики частичных сумм $S_n(x) \forall n > N(\varepsilon)$ будут лежать внутри ε -полосы вокруг графика суммы $S(x)$.

Приняты обозначения:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ - сходимость ряда,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow S(x)$ - равномерная сходимость ряда.

Рассмотрим примеры.



Пример 5.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^{2n}}$ сходится при всех x как знакочередующийся ряд Лейбница.

В случае, когда $|x| \geq 1$, легко убедиться в том, что члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^{2n}}$ монотонно убывают по модулю, т.к. с ростом n увеличивается знаменатель дроби. В случае, когда $|x| < 1$ проверим, что выполняется неравенство:

$$\frac{1}{n+x^{2n}} > \frac{1}{n+1+x^{2n+2}},$$

которое равносильно неравенству:

$$n + x^{2n} < n + 1 + x^{2n+2},$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству:

$$x^{2n}(1 - x^2) < 1,$$

а последнее верно при $x \in (-1, 1)$.

Итак, общий член данного ряда стремится к нулю с ростом n при всех x .

Воспользуемся оценкой остатка ряда Лейбница:

$$|S_n(x) - S(x)| < |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x^{2n+2}} \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Разрешая данное неравенство относительно n , получим:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

В качестве номера N можно выбрать, например, число, равное целой части числа $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех номеров $n > N$ будет верно неравенство: $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, т.е. данный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.



Пример 6.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ является суммой геометрической прогрессии и сходится $\forall x \in (-1,1)$. Вычислим сумму остатка этого ряда:

$$\begin{aligned} |S_n(x) - S(x)| &= \\ &= |x^{n+1} + x^{n+2} + \dots| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right|. \end{aligned}$$

Если зафиксировать номер n , то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+0} |S_n(x) - S(x)| &= \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} |S_n(x) - S(x)| &= +\infty. \end{aligned}$$

Это доказывает, что $\forall x \in (-1,1)$ невозможно осуществить выполнение неравенства $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, например, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, при одном и том же номере n .

Таким образом, данный ряд сходится на интервале $(-1,1)$ неравномерно.

При исследовании функциональных рядов на практике удобно пользоваться достаточными условиями равномерной сходимости.

4.3. Теорема Вейерштрасса

(достаточное условие равномерной сходимости).

Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при всех $x \in X$, удовлетворяют неравенству:

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где a_n - члены некоторого сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве X .

Доказательство. Абсолютная сходимость функционального ряда при всех $x \in X$ следует из признака сравнения и из сходимости числового ряда.



Покажем, что функциональный ряд сходится равномерно на множестве X . Из условия теоремы следует, что для любого натурального числа k и для любого $x \in X$ верно неравенство:

$$\begin{aligned} & |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+k}(x)| \leq \\ & \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots + |u_{n+k}(x)| \leq \\ & \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} \leq \rho_n \end{aligned}$$

где ρ_n – остаток числового ряда.

Переходя в этом неравенстве к пределу при условии $k \rightarrow \infty$, получим:

$$|r_n(x)| \leq \rho_n, \text{ где } r_n(x) \text{ – остаток функционального ряда.}$$

Т.к. по условию теоремы числовой ряд сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех номеров $n > N$ будет выполнено неравенство: $\rho_n < \varepsilon$,

а, значит, и для остатка функционального ряда верно, что

$$|r_n(x)| \leq \rho_n < \varepsilon \text{ для всех } x \in X, \text{ т.е. функциональный ряд сходится равномерно на множестве } X.$$

Теорема доказана.

Определение 4. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условиям теоремы Вейерштрасса, называется *мажорирующим* числовым рядом для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или *числовой мажорантой*.

Пример 7. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно при всех x .

Мажорирующим числовым рядом для данного функционального ряда является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, т.к. $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ при всех x .

А так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то данный функциональный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.



Пример 8. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3+x^3}$ сходится равномерно на промежутке $[0, +\infty)$.

Члены данного функционального ряда неотрицательны при $x \in [0, +\infty)$.

Для построения мажоранты найдем при каждом фиксированном n максимальное значение функции $u_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3}$.

Для этого вычислим $u'_n(x)$:

$$u'_n(x) = \left(\frac{x}{n^3+x^3} \right)' = \frac{n^3+x^3-3x^3}{(n^3+x^3)^2} = \frac{-2x^3+n^3}{(n^3+x^3)^2} = \frac{-2\left(x^3-\frac{n^3}{2}\right)}{(n^3+x^3)^2}.$$

$u'_n(x) = 0$ при $x = \frac{n}{\sqrt[3]{2}}$ и эта точка является точкой максимума функции $u_n(x)$.

$$u_n(x)_{\max} = u_n\left(\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}}{n^3+\frac{n^3}{2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Значит, члены функционального ряда на множестве $[0, +\infty)$ удовлетворяют неравенству: $0 \leq u_n(x) \leq \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n^2}$.

А т.к. числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то числовой ряд, общий член которого равен $\frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n^2}$, также сходится.

В силу теоремы Вейерштрасса данный функциональный ряд сходится равномерно на промежутке $[0, +\infty)$.

4.4. Свойства равномерно сходящихся рядов

Рассматривая ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, который сходится при всех x , и все члены которого непрерывны на всей числовой оси, мы обнаружили, что сумма ряда терпит разрыв в точке $x = 0$. Это объясняется неравномерностью сходимости данного ряда на любом множестве, содержащем точку $x = 0$.

Покажем это, оценивая остаток ряда при $x \neq 0$:

$$S(x) - S_n(x) = r_n(x) =$$



$$= \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \dots = \frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} r_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 1,$$

т.е. остаток ряда не может быть сколь угодно мал одновременно при всех x ни для какого номера n .

Ряд сходится неравномерно на множестве, содержащем точку $x = 0$.

Перейдем к изучению свойств функциональных рядов, сходящихся равномерно на некотором отрезке.

1. *Непрерывность суммы* равномерно сходящегося ряда.

Теорема 2. Пусть функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке.

Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку x_0 , принадлежащую отрезку $[a, b]$, и для любого значения x , также принадлежащего отрезку $[a, b]$, оценим разность:

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &= \\ &= |(S(x) - S_n(x)) - (S(x_0) - S_n(x_0)) + (S_n(x) - S_n(x_0))| \leq \\ &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S(x_0) - S_n(x_0)| + |S_n(x) - S_n(x_0)|. \end{aligned}$$

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$.

В силу равномерной сходимости ряда можно фиксировать номер n такой, что неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ будет выполнено для всех $x \in [a, b]$, в том числе и для x_0 .

При фиксированном n частичная сумма ряда $S_n(x)$ является непрерывной на отрезке $[a, b]$ как сумма конечного числа непрерывных функций.



Поэтому для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого x , удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, будет выполнено неравенство: $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда разность:

$$|S(x) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что доказывает непрерывность суммы ряда в точке x_0 , а т.к. x_0 выбрано произвольно на отрезке $[a, b]$, то $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Другие свойства равномерно сходящихся рядов сформулируем без доказательства.

2. Почленное интегрирование.

Теорема 3. Если функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) непрерывны на отрезке $[a, b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то интеграл от суммы ряда $S(x)$ на отрезке $[a, b]$ представляется в виде суммы интегралов от членов этого ряда:

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx .$$

Замечание. Интегрирование можно выполнить на любом отрезке, принадлежащем отрезку $[a, b]$.

Пример 9. Вычислить сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Пусть S - искомая сумма, представим S в виде:

$$S = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} .$$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$.

На любом отрезке, принадлежащем интервалу $(-1, 1)$, этот ряд сходится равномерно, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$|n \cdot x^{n-1}| < n \cdot |q|^{n-1} (|q| < 1).$$



$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \cdot |q|^{n-1}} = |q| < 1$, следовательно, мажорирующий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |q|^{n-1}$ сходится (по радикальному признаку Коши).

А, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$ сходится равномерно на $(-1,1)$.

Применим к построенному функциональному ряду теорему о почленном интегрировании. Интегрирование выполним на отрезке $[0, x]$, полагая, что $x \in (-1,1)$.

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n \cdot x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Искомая сумма $S = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3} \right)^2} = \frac{3}{4}$.

3. Почленное дифференцирование.

Теорема 4. Пусть функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные $u_n'(x)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Тогда сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем производная суммы равна сумме ряда из производных:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Пример 10. Вычислить сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n \cdot n}}$.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, который сходится на интервале $(-1,1)$.



Обозначим исходную сумму числового ряда S , а сумму функционального ряда $S(x)$. Тогда $S = S\left(\frac{1}{2}\right)$.

Рассмотрим ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Этот ряд сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу $(-1,1)$, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом.

Применим к данному ряду теорему о почленном дифференцировании:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + \ln 1 = -\ln(1-x)$$

Искомая сумма $S = S\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2$.