Практическое занятие №12

Разложение функций в ряд Фурье на отрезке [-π; π]

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом 2π и является непрерывной или кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Напомним, что функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если она непрерывна во всех точках этого отрезка за исключением конечного числа точек, в которых функция терпит разрыв первого рода, т.е. в этих точках существуют конечные односторонние пределы функции, не равные друг другу.

Определение. Ряд вида $f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

называется *тригонометрическим рядом Фурье*.

В лекции №12 были выведены формулы для нахождения коэффициентов Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 1,2,3,...),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n = 1,2,3,...).$$

Обратимся к вопросам сходимости ряда Фурье.

Теорема Дирихле

Предполагая, что функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, поставим этой функции в соответствие ее тригонометрический ряд Фурье.

Предположим теперь, что функция является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это означает, отрезок $[-\pi, \pi]$ можно разделить на конечное число отрезков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах отрезков имеет не только конечные предельные значения, но и односторонние производные при условии замены на концах этих отрезков значений функции на соответствующие предельные значения.

Теорема Дирихле устанавливает условия сходимости тригонометрического ряда Фурье и связь между значением самой функции и суммой ее тригонометрического ряда Фурье. Сформулируем теорему Дирихле без доказательства.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет следующим условиям.

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках интервала $(-\pi; \pi)$, в которых $f(x)$ непрерывна.

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right)$ во всех точках разрыва функции.

3) $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\right)$.

В лекции №12 рассматривались вопросы сходимости ряда Фурье в среднем. Было получено *равенство Парсеваля*

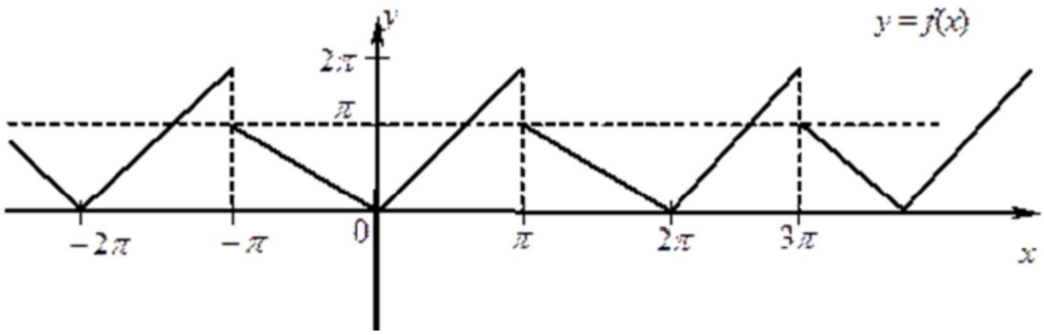
$$\frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Равенство Парсеваля часто применяется для нахождения суммы числового ряда.

Перейдем к решению задач на разложение функции в тригонометрический ряд Фурье.

<u>*Пример 1.*</u> Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\pi]$ формулой $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ при } 0 \le x \le \pi, \\ -x \text{ при } -\pi \le x \le 0. \end{cases}$

<u>*Решение.*</u>



Данная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. может быть разложена в ряд Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2xdx = \frac{3\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\cos nx dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{интегрируем по частям:} \\ u = x, du = dx, \\ dv = \cos nx dx, v = \frac{1}{n}\sin nx. \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{n}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n) + \frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n - 1) = -\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n).$$

Аналогично находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{n}(-1)^{n-1}.$$

Исходной функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

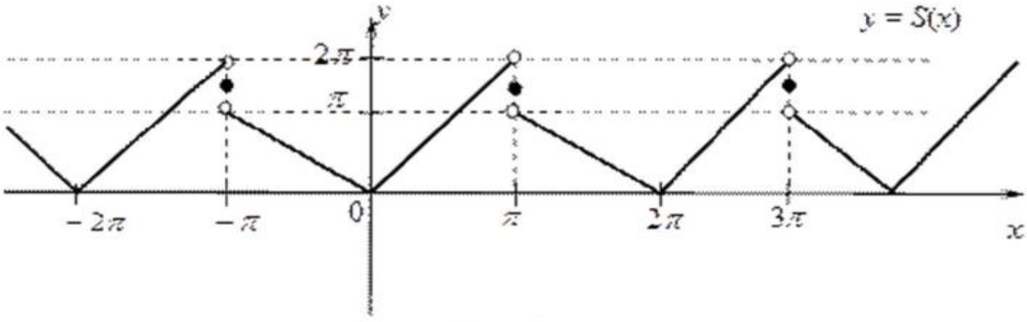
$$f(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[-\pi;\pi]$, поэтому, согласно теореме Дирихле, для всех этих точек имеем равенство $f(x) = S(x)$, т.е.

$$f(x) = S(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right),$$

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi+2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Ниже приведен график $S(x)$



Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0, \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Обосновать сходимость полученного ряда. Построить график суммы ряда.

Решение.

Запишем в общем виде тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Коэффициенты Фурье нужно находить по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (n = 1,2,3,...),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (n = 1,2,3,...).$$

Вычислим коэффициенты Фурье, используя условие $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

При нахождении коэффициентов Фурье нужно будет использовать методы интегрирования (метод замены переменной, метод интегрирования по частям, приемы интегрирования тригонометрических выражений).

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cdot dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)dx\right)=\frac{3}{2}\pi,\quad \frac{a_0}{2}=\frac{3}{4}\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cdot\cos nx dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cdot\cos nx dx\right)=\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)=\frac{1}{\pi n^2}(1-(-1)^n).$$

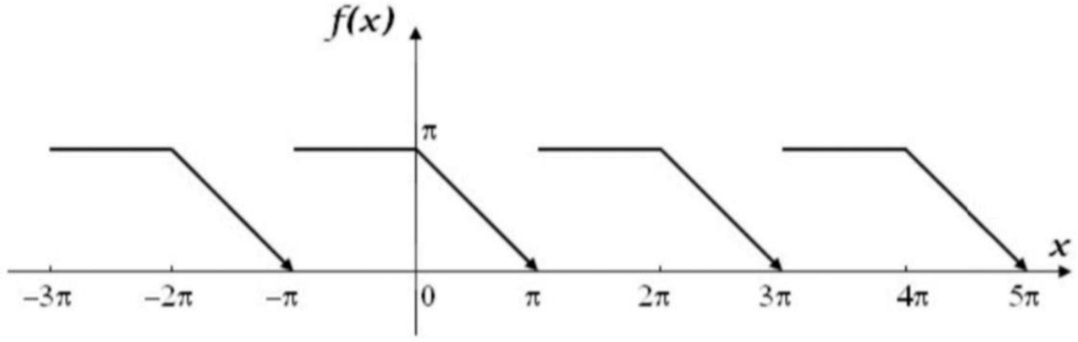
$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cdot\sin nx dx+\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cdot\sin nx dx\right)=\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^n}{n}.$$

Тригонометрический ряд Фурье $S(x)$, соответствующий данной функции, имеет вид

$$f(x)\to S(x)=\frac{3}{4}\pi+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)-\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right).$$

Рассмотрим сходимость полученного ряда. Используем теорему Дирихле.

Для наглядности построим график заданной функции $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$



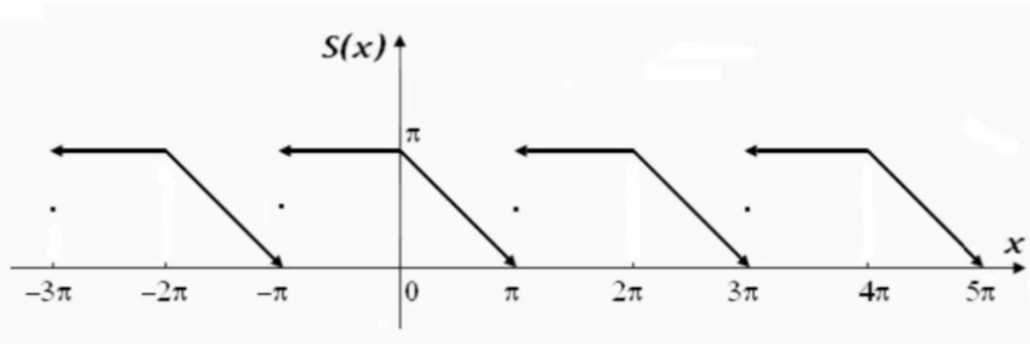
Все условия этой теоремы выполняются (проверить самостоятельно). Тогда во всех точках непрерывности заданной функции ряд Фурье сходится к самой функции, т.е. $f(x) = S(x)$

$$f(x) = S(x) = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) - \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$

В точках разрыва (на концах отрезка $[-\pi, \pi]$) сумма ряда Фурье имеет следующее значение:

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right) = \frac{1}{2}\pi \ .$$

График суммы ряда Фурье будет иметь вид



Следует обратить внимание на некоторые различия двух графиков – графика заданной функции и графика суммы ряда Фурье!

<u>*Домашнее задание.*</u>

Задача1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = 2x - 1$$

Обосновать сходимость полученного ряда. Построить график суммы ряда.

Задача2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = -x + \pi$$

Обосновать сходимость полученного ряда. Построить график суммы ряда.

Задача3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0, \\ 1 - \dfrac{x}{\pi}, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Обосновать сходимость полученного ряда. Построить график суммы ряда.

Задача4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = 3x$$

Обосновать сходимость полученного ряда. Построить график суммы ряда.