Практическое занятие 13

Изолированные особые точки

Вычеты функций

Определение 1. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0, а в точке z_0 функция не определена или не дифференцируема.

Рассмотрим точку z_0 и разложим $f(z)$ в ряд в окрестности точки z_0, т.е. по степеням $(z - z_0)$.

Если точка z_0 – правильная, т.е. $f(z)$ аналитична в т. z_0, то существует окрестность (круг радиуса R) $|z - z_0| < R$, внутри которого $f(z)$ аналитична и функция раскладывается в степенной ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\,;\; c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Если точка z_0 – изолированная особая точка (ИОТ), то $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < R$ и функция раскладывается в степенной ряд Лорана: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Таблица классификации изолированных особых точек функции

Типы ИОТ	
По пределу	По ряду Лорана в окрестности ИОТ
Устранимая особая точка $\boldsymbol{z_0}$:	
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$	Ряд Лорана не содержит главной части, т.е. $\boldsymbol{f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots}$
Полюс порядка n:	
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$	Главная часть ряда Лорана конечна, n – старшая степень $(\boldsymbol{z - z_0})$ в знаменателе
Существенно особая точка $\boldsymbol{z_0}$	
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует	Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых

Определение 2. Точка z_0 называется *нулем n-го порядка* аналитической функции $f(z)$, если n – порядок первой не равной нулю производной:
$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0.$
Если $n = 1$, то точка z_0 называется *простым нулем.*

Теорема 1. Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда имеет место равенство $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Связь между нулем и полюсом:

Если точка z_0 – полюс порядка n для функции $f(z)$,

то точка z_0 – нуль порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$

при условии $\frac{1}{f(z_0)} = 0$.

Теорема 5. Если функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ и точка z_0 является нулем порядка m для функции $P(z)$ $(z_0 = \mathrm{H}(m))$
и нулем порядка l для функции $Q(z)$ $(z_0 = \mathrm{H}(l))$, то есть $z_0 = \frac{\mathrm{H}(m)}{\mathrm{H}(l)}$, то:

1. если $m > l$, то $n = m - l$ есть порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0,

2. если $m < l$, то $n = l - m$ есть порядок полюса функции $f(z)$ в точке z_0,

3. если $m = l$, то z_0 – устранимая особая точка.

Найти все особые точки функции и определить их тип.

1. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. Особая точка $z_0 = 0$.
   Она является нулем для числителя: $e^z - 1|_{z=0} = 0$.
   Определим порядок нуля в числителе:
   $(e^z - 1)' = e^z|_{z=0} = 1 \neq 0$, следовательно, это ноль первого порядка.
   Для знаменателя $z_0 = 0$ является нулем первого порядка,
   значит $z_0 = \frac{\mathrm{H}(1)}{\mathrm{H}(1)}$ – устранимая особая точка.

2. $f(z) = \frac{sinz}{z^3+z^2-z-1} = \frac{sinz}{z^2(z+1)-(z+1)} = \frac{sinz}{(z+1)^2(z-1)}$.

Особые точки: $z_1 = -1$, $z_2 = 1$.

Числитель ни в одной из этих точек не обращается в ноль.

Для знаменателя: z_1 является нулем второго порядка, z_2 является нулем первого порядка, значит,

$z_1 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(2)} = \text{П}(2)$ – полюс второго порядка,

$z_2 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \text{П}(1)$ – простой полюс.

3. $f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$. Особая точка $z_0 = 2$. Это существенно особая точка, так как ряд Лорана в окрестности этой точки, т.е. по степеням $(z-2)$ содержит бесконечную главную часть:

$$e^{\frac{1}{z-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n n!}.$$

4. $f(z) = \frac{z}{sinz}$.

Найдем особые точки: $sinz = 0$, $z = \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Для знаменателя они являются простыми нулями, т.к. $(sinz)' = cosz|_{z=\pi k} \neq 0$.

Рассмотрим отдельно точку $z = 0$, т.к. она обращает числитель в ноль и является нулем первого порядка: $z = 0$: $\frac{\text{Н}(1)}{\text{Н}(1)} = \text{УОТ}$.

$z = \pi k, k = \pm 1, \pm 2, \dots : \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \text{П}(1)$ - простые полюсы.

5. $f(z) = \frac{1}{1-sinz}$

6. $f(z) = \frac{1-cosz}{z^2}$

7. $f(z) = e^{\frac{i}{(z-1)^2}}$

8. $f(z) = cos\frac{1}{z}$

9. $f(z) = \frac{z}{z^5+2z^4+z^3}$

10. $f(z) = \frac{1}{e^{-z}-1} + \frac{1}{z^2}$

11. $f(z) = sin\frac{\pi}{z+1}$
12. $f(z) = \frac{z^2}{cosz-1}$
13. $f(z) = \frac{z-\pi}{sin^2 z}$

Вычеты функций

Вычет функции в изолированной особой точке

Определение. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$:

1. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то $resf(z_0) = 0$ (в ряде Лорана нет главной части, $c_{-1} = 0$).
2. Если z_0 – простой полюс, то $resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0)$.
3. Если $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима как частное двух аналитических функций $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\Psi(z_0) = 0, \Psi'(z_0) \neq 0$, т.е. z_0 – простой полюс функции $f(z)$, $z_0 = \frac{\mathrm{H}(0)}{\mathrm{H}(1)} = \Pi(1)$, то $resf(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\Psi\prime(z_0)}$.
4. Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то $resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n]$.
5. Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 $(resf(z_0) = c_{-1})$.

Примеры. Найти вычеты функции в ее особых точках.

1. $f(z) = \frac{sinz}{z}$. Особая точка: $z_0 = 0$.

Определим ее тип: $sinz_0 = 0$, значит z_0 является нулем для числителя. $(sinz)' = cosz|_{z_0} \neq 0$, значит, эта точка является нулем первого порядка для числителя.

$z_0 = \frac{H(1)}{H(1)} =$ УИТ − устранимая особая точка, следовательно, $resf(0) = 0$.

2. $f(z) = \frac{cosz}{(2z-\pi)^2}$. Особая точка: $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

Для знаменателя это ноль 2-го порядка.

$cosz|_{\frac{\pi}{2}} = 0, (cosz)' = sinz|_{\frac{\pi}{2}} \neq 0$, значит, для числителя это ноль первого порядка. Итак, $z_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{\text{H}(1)}{\text{H}(2)} = \Pi(1)$ − простой полюс для функции $f(z)$.

$$resf\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{cosz}{(2z-\pi)^2}\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{cosz}{4\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(z-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{cosz}{4\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} = \begin{pmatrix} z-\frac{\pi}{2} = t \\ t\to 0 \end{pmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+t)}{4t} = \lim_{t\to 0} \frac{-sint}{4t} = -\frac{1}{4}.$$

3. $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$. $z_0 = 0$ – существенно особая точка функции $f(z)$. Убедимся в этом, разложив $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z.

$$f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}} = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} =$$

$$= z^4\left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{5!z^5} + \frac{1}{6!z^6} + \cdots\right) =$$

$= z^4 + z^3 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!z} + \frac{1}{6!z^2} + \cdots.$

Главная часть данного ряда бесконечна, следовательно, $z_0 = 0$ – существенно особая точка функции $f(z)$.

$c_{-1} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = resf(0).$

4. $f(z) = \frac{z+1}{(z+2i)^2(z-1)}$. Особые точки функции: $z_1 = -2i, z_2 = 1.$

$z_1 = -2i = \Pi(2),\ z_2 = 1 = \Pi(1).$

$resf(-2i) = \lim\limits_{z\to-2i}[f(z)(z+2i)^2]' = \lim\limits_{z\to-2i}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)' =$

$\lim\limits_{z\to-2i}\frac{z-1-z-1}{(z-1)^2} = \lim\limits_{z\to-2i}\frac{-2}{(z-1)^2} = \frac{-2}{(-2i-1)^2} = \frac{-2}{1+4i-4} = \frac{2}{3-4i}$

Упрощаем, приводим к ответу в виде комплексного числа:

$\frac{2}{3-4i} = \frac{2(3+4i)}{9+16} = \frac{6+8i}{25}.$

$resf(1) = \lim\limits_{z\to1}f(z)(z-1) = \lim\limits_{z\to1}\frac{z+1}{(z+2i)^2} = \frac{2}{(1+2i)^2} = \frac{2}{-3+4i} =$
$-\frac{6+8i}{25}.$

5. $f(z) = \frac{tgz}{z^2-\frac{\pi z}{4}}$

6. $f(z) = ze^{\frac{1}{z-2}}$

7. $f(z) = zsin\frac{\pi z}{z-1}$

8. $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$

9. $f(z) = \frac{1}{cosz}$

10. $f(z) = \frac{5z}{(e^z-1)(z^2+9)}$

Домашнее задание: типовой расчет

Часть 1, задача 1.22.

Часть 2, задача 2.8.