Практическое занятие 3

Числовые ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости. Знакопеременные числовые ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимости

Теоретический материал

Числовые ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости

1. **Признак сравнения**

   Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причем выполняется условие $0 \le a_n \le b_n;\ \forall\, n \ge N$, тогда:

   а) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится;

   б) если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

2. **Предельный признак сравнения**

   Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и существует конечный и отличный от нуля $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$ где $k \ne 0$ и $k \ne \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расходятся одновременно.

3. **Признак Даламбера**

   Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d.$

   Тогда если $d = \begin{cases} < 1 - \text{ряд сходится;} \\ > 1 - \text{ряд расходится;} \\ = 1 - \text{требуется дополнительное исследование.} \end{cases}$

4. **Радикальный признак Коши**

   Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k.$

   Тогда если $k = \begin{cases} < 1 - \text{ряд сходится;} \\ > 1 - \text{ряд расходится;} \\ = 1 - \text{требуется дополнительное исследование.} \end{cases}$

5. **Интегральный признак Коши**

   Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого совпадает со значением некоторой функции $f(x)$ при $x = n$: $a_n = f(n)$.

Предположим, что функция $f(x)$ определена, положительна, непрерывна и монотонно убывает при $x \geq 1$. Тогда:

а) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходится;

б) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

<u>Примеры</u>

1. **Признак сравнения**

Эталонные ряды

1. Геометрическая прогрессия$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, если $\begin{cases} |q| < 1 - \text{сходится;} \\ |q| \geq 1 - \text{расходится.} \end{cases}$
2. Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, если $\begin{cases} \alpha > 1 - \text{сходится;} \\ \alpha \leq 1 - \text{расходится.} \end{cases}$

1.1. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^6+2}+2^n}$.

<u>Решение.</u>

Проверим необходимый признак сходимости, вычисляя $\lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^6+2}+2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{6n^5}{\sqrt{n^6+2}}+\ln 2 \cdot 2^n} = 0$ - необходимый признак выполнен, продолжаем исследование;

Оценим общий член ряда a_n:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^6+2}+2^n} < \frac{n}{\sqrt{n^6+2}} < \frac{n}{\sqrt{n^6}} < \frac{1}{n^2} = b_n.$$

Воспользуемся признаком сравнения.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходится, как ряд Дирихле с показателем $\alpha = 2 \Rightarrow$ ряд с меньшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^6+2}+2^n}$ тоже сходится *по первому признаку сравнения*.

1.2. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos^4 \frac{\pi}{n}$.

<u>Решение.</u>

Проверим необходимый признак сходимости, вычисляя $\lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cos^4 \frac{\pi}{n} = \infty$ ($\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$) $\Rightarrow$ ряд расходится по *необходимому признаку сходимости*.

1.3. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$.

<u>*Решение.*</u>

Проверим необходимый признак сходимости, вычисляя $\lim_{n\to\infty} a_n$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}=0$ - необходимый признак выполнен, продолжаем исследование;

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ который сходится:

$\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ - сходится по *первому признаку сравнения.*

2. Предельный признак сравнения

2.1. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$.

<u>*Решение.*</u>

<u>1 способ</u>: сравним с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - сходится как ряд Дирихле с показателем α=$\frac{3}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}\le\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$ - сходится по *первому признаку сравнения.*

<u>2 способ</u>: сравним с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - сходится как ряд Дирихле с показателем α=$\frac{3}{2}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}:\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=1\neq0\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$- сходится по *предельному признаку сравнения.*

2.2. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$.

<u>*Решение.*</u>

Сравним с $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ - сходится как прогрессия с $q=\frac{2}{3}$;

$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\cdot\frac{3^n}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi=\pi\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ - сходится по *предельному признаку сравнения.*

2.3. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^4+1}-n^2)$.

<u>*Решение.*</u>

Проверим необходимый признак:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^4+1}-n^2)(\sqrt{n^4+1}+n^2)}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=0$ - необходимый признак выполнен, продолжаем исследование;

$\sqrt{n^4+1}-n^2=n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1\right).$

Оценим порядок общего члена ряда, для этого воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых функций:

$\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$; $\alpha(x)\to 0$. В нашем случае $\alpha(n)=\frac{1}{n^4}$. Тогда $n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1\right)=n^2\cdot\frac{1}{2n^4}=\frac{1}{2n^2}$, т.е. в качестве эталонного ряда возьмем $b_n=\frac{1}{n^2}$ - ряд Дирихле $(\alpha=2>1)$, который сходится. Вычисляем $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1\right):\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty} n^4\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n^4\cdot\frac{1}{2n^4}=\frac{1}{2}$,

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^4+1}-n^2)$ сходится по *предельному признаку*.

3. Признак Даламбера

3.1. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n}}\operatorname{arctg}\frac{n}{3^n}$.

Решение.

$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}\operatorname{arctg}\frac{n}{3^n}=1\cdot 0=0$ - необходимый признак выполнен, продолжаем исследование;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n+1}}\operatorname{arctg}\frac{n+1}{3^{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}}\operatorname{arctg}\frac{n}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-\frac{1}{n(n+1)}}\frac{n+1}{n\cdot 3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1\Rightarrow$ ряд сходится по *признаку Даламбера*.

3.2. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n}$.

Решение.

Исследование ряда по необходимому признаку затруднительно, поэтому применим сразу признак Даламбера.

Напомним, что $(2n+2)!=(2n)!\,(2n+1)(2n+2)$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{(2n+2)!}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}{2}=\infty>1\Rightarrow$ ряд расходится по *признаку Даламбера*.

3.3. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(3n-1)}{n!}$.

Решение.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(3n+2)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n(3n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(3n+2)}{(n+1)(3n-1)} = 0 < 1 \Rightarrow$ ряд сходится по *признаку Даламбера*.

4. Радикальный признак Коши

4.1. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\sqrt{n}}{4n^2+3}\right)^n$.

Решение.

Применим радикальный признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n\sqrt{n}}{4n^2+3}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n\sqrt{n}}{4n^2+3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{4+\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0 < 1 \Rightarrow$ ряд сходится по *радикальному признаку Коши.*

4.2. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(2^n+1)}\right)^n$.

Решение.

Применим радикальный признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{\ln(2^n+1)}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(2^n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(2^n)+\ln(1+2^{-n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} >$

$> 1 \Rightarrow$ ряд расходится по *радикальному признаку Коши.*

При использовании радикального признака Коши бывают полезны следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

4.3. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Решение.

Применим радикальный признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0 < 1 \Rightarrow$ ряд сходится по *радикальному признаку Коши.*

5. Интегральный признак Коши

5.1. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ - ряд Дирихле с показателем 5.

Решение.

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^5} = \lim\limits_{b\to\infty} -\frac{1}{4x^4}\Big|_1^b = \frac{1}{4}$ - сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ тоже сходится по *интегральному признаку Коши.*

5.2. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$.

Решение.

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$\int_1^{\infty}\frac{2dx}{3+x^2} = 2\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_1^b = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ - сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$ тоже сходится по *интегральному признаку Коши.*

5.3. Исследовать на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Решение.

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim\limits_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^b = \frac{1}{\ln 2}$ - сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ тоже сходится по *интегральному признаку Коши.*

Задания для самостоятельной работы

Исследовать на сходимость:

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{3n^2+\ln n}\right)^n$.

Домашнее задание: типовой расчет № 1.2-1.5.

Знакопеременные числовые ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимости

Теоретический материал

Определение. Ряды, представленные в виде $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$ или

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot u_n$, где $u_n > 0$, называются з*накочередующимися* числовыми рядами.

Теорема Лейбница (признак сходимости знакочередующегося ряда)

Рассматриваем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$.

а) Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю: $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots$

б) и стремятся к нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\cdot \frac{\ln n}{n}$.

Решение. Проверим выполнения условий теоремы Лейбница:

а) $u_n = \frac{\ln n}{n}$, начиная с номера $n = 3$, верно,$u_{n+1} \leq u_n$;

б) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$,

следовательно, ряд сходится по теореме Лейбница.

Абсолютная и условная сходимости

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - произвольный знакопеременный ряд, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ составлен из модулей его членов.

Теорема (Коши). Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Определение. Если ряд, составленный из модулей членов данного ряда, сходится, то сам знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Определение. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей членов, расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся*.

Замечание. При установлении абсолютной сходимости можно пользоваться всеми признаками сходимости положительных рядов.

Примеры

1. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$.

Решение. Применим радикальный признак Коши к ряду из модулей: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n+3}=\frac{3}{5}<1\Rightarrow$ ряд сходится абсолютно.

2. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Ряд из модулей является расходящимся как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha=\frac{1}{3}$ (ряд Дирихле). Однако, для данного ряда выполнены условия теоремы Лейбница (проверить самостоятельно), следовательно, ряд сходится условно.

3. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$, по признаку palim$_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^3}\right|=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ ряд из модулей сходится, значит исходный ряд *сходится абсолютно*.

4. Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Решение. Ряд из модулей будет гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится, значит, абсолютной сходимости нет. Проверим признак Лейбница: верно $u_{n+1}\le u_n$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Признак Лейбница выполняется, значит, исходный ряд *сходится условно*.

Замечание. Доказательство монотонного убывания можно проводить одним из трех способов:

а) непосредственно из свойств функции;
б) оценивая знак разности u_n-u_{n+1} (знак должен быть >0);
в) взяв производную от u_n и оценив ее знак (знак должен быть <0).

Задания для самостоятельной работы

Исследовать на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (Ответ: условная сходимость).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ (Ответ: условная сходимость).
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ (Ответ: условная сходимость).
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ (Ответ: абсолютная сходимость).
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(\sqrt[n]{2}-1)$ (Ответ: условная сходимость).
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ (Ответ: абсолютная сходимость).