Практическое занятие №11
Решение задач на разложение функций в тригонометрический ряд Фурье. Ряд Фурье для четных и нечетных функций. Разложение только по косинусам и разложение только по синусам.

Рядом Фурье для функции $f(x)$, определённой на отрезке $[a;b]$ будем называть ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b\sin\frac{\pi nx}{l},\ a\le x\le b, \tag{1}$$

где числа a_0, a_n, b_n $(n=1,2,3,\ldots)$ называют ***коэффициентами Фурье*** и вычисляют по формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \tag{2}$$

Выражение (1) называют суммой ряда Фурье и обозначают $S(x)$.

При этом справедлива ***теорема Дирихле***. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[a;b]$, то ряд Фурье (1) для функции $f(x)$ сходится во всех точках отрезка $[a;b]$, причём для суммы $S(x)$ этого ряда выполняются следующие равенства:*

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{если } x\in(a;b),\\[2mm] \dfrac{f(a+0)+f(b-0)}{2}, & \text{если } x=a \text{ или } x=b.\end{cases} \tag{3}$$

Если при этом функция $f(x)$ непрерывна в точке x, то $S(x)=f(x)$.

Здесь $f(x-0)=\lim\limits_{x\to x-0}f(x)$, $f(x+0)=\lim\limits_{x\to x+0}f(x)$, $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ – односторонние пределы $f(x)$ в соответствующих точках.

В частности, на симметричном отрезке $[-l;l]$ равенства (2) и (3) соответственно имеют вид:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \tag{4}$$

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{если } x\in(-l;l),\\[2mm] \dfrac{f(l-0)+f(-l+0)}{2}, & \text{если } x=-l \text{ или } x=l.\end{cases} \tag{5}$$

Если при этом функция $f(x)$ непрерывна во внутренней точке отрезка $[-l;l]$, то $f(x-0)=f(x+0)=f(x)$ и, следовательно, $S(x)=f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***периодической*** с периодом T, если она определена для всех $x\in R$ и выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$ для всех $x\in R$ $(T\ne 0)$.

Для функции $f(x)$, определённой на всей числовой оси с периодом $T=2l$, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ периодическая функция с периодом $T=2l$, которая на произвольном отрезке длины $2l$ оси OX удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье вида (1) с коэффициентами (4) при этом для любого $x\in(-\infty;+\infty)$ справедливо равенство:*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Заметим, что в формуле (4) подынтегральные функции являются периодическими с периодом $T=2l$. По свойству интегралов от периодических функций величины a_0, a_n, b_n

$(n=1,2,3,\ldots)$ могут быть вычислены интегрированием по любому отрезку длиной в период $T=2l$, а не обязательно по отрезку $[-l;l]$. Тогда

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)dx\,,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\,,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\,, \qquad (6)$$

где $\lambda\in R$, $(n=1,2,3,\ldots)$.

Неполные ряды Фурье

1) Если на отрезке $[-l,l]$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, т.е. функция $f(x)$ является четной функцией, то ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi nx}{l}\,, \qquad (7)$$

а из (4) следует:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx\,,\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\,,\ b_n=0\,,\ n=1,2,\ldots \qquad (8)$$

Заметим, что ряд Фурье (7) для чётной функции содержит только косинусы, поэтому задача о разложении такой функции в ряд Фурье может быть сформулирована как задача о ***разложении по косинусам***.

2) Если на отрезке $[-l,l]$ выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$, т.е. функция $f(x)$ является нечетной функцией, то ряд Фурье (1) имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\,, \qquad (9)$$

а из формул (4) следует:

$$a_0=0;\quad a_n=0\,,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\,,\ n=1,2,\ldots. \qquad (10)$$

Заметим, что ряд Фурье для нечётной функции содержит только синусы, поэтому задача о разложении такой функции в ряд Фурье может быть сформулирована как задача о ***разложении по синусам***.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ $f(x)$ В РЯДЫ ФУРЬЕ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ

Постановка задачи: разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на конечном промежутке.

При решении задач следует:

1) нарисовать график функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке и продолжить её как периодическую функцию на всю числовую ось, учитывая её принадлежность к чётным или нечётным функциям или к функциям общего вида. Для функции $f(x)$ общего вида период определяется значением $T=b-a$. Если функция $f(x)$ чётная или нечётная, то она должна быть определена на симметричном промежутке $[-l;l]$ и её период $T=2l$. В дальнейшем функция $f(x)$ рассматривается как периодическая с соответствующим периодом. График функции $f(x)$ следует нарисовать на промежутке, хотя бы длиной в два периода, чтобы продемонстрировать её периодичность;
2) нарисовать график функции $S(x)$ на промежутке хотя бы длиной в два периода, учитывая соотношения (3) для функции, рассматриваемой на произвольном промежутке, или (5) для функции, рассматриваемой на

симметричном промежутке, а также принимая во внимание, что в точках непрерывности функции $f(x)$ выполнено равенство $S(x)=f(x)$;

3) вычислить коэффициенты Фурье, используя формулы (2) для функции общего вида, формулы (8) для четной функции, формулы (10) для нечетной функции;
4) записать разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье на заданном промежутке в виде (1) для функции общего вида, в виде (7) для четной функции, в виде (9) для нечетной функции.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}2, & x\in[-\pi;0),\\ x, & x\in[0;\pi).\end{cases}$

□ 1) Из условия видно, что $f(x)$ – функция общего вида, $a=-\pi$, $b=\pi$. Следовательно, её разложение имеет вид (1) с коэффициентами (2). Вычислим $T=\pi-(-\pi)=2\pi$. Построим график функции $f(x)$ как периодической с периодом $T=2\pi$ (рис.1).

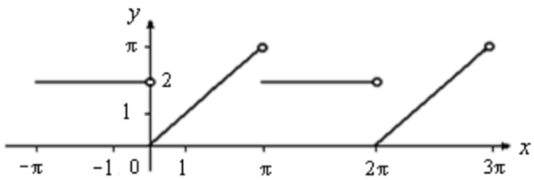

Рис. 1. График функции $f(x)$

2) Построим график функции $S(x)$ (рис. 2), учитывая, что $S(x)=f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$, а в точках разрыва функция $S(x)$ равна полусумме односторонних пределов функции $f(x)$. Согласно (5) имеем: $S(-\pi)=S(\pi)=$ $=\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$, где $f(-\pi+0)=\lim\limits_{x\to-\pi+0}f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi+0}2=2$, $f(\pi-0)=\lim\limits_{x\to\pi-0}f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to\pi-0}x=\pi$, тогда $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}(2+\pi)=0.5(2+\pi)=0.5\pi+1$. Точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода, поэтому $S(0)=\frac{1}{2}(f(-0)+f(+0))$, где $f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-0}2=2$, $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}x=0$, $\Rightarrow$ $S(0)=\frac{1}{2}(2+0)=1$.

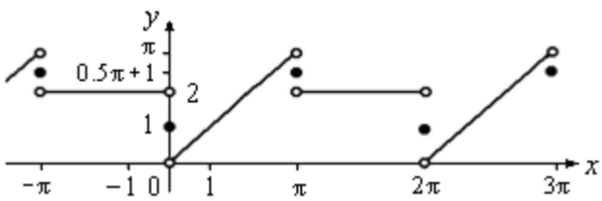

Рис. 2. График функции $S(x)$

3) Коэффициенты Фурье можно вычислить по формулам (4), так как функция $f(x)$ задана на симметричном промежутке. Тогда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\cdot dx+\int_{0}^{\pi}x\cdot dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(2x\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(0-(-2\pi)\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}-0\right)=$$

$$=2+\frac{\pi}{2}=\frac{4+\pi}{2};\ \Rightarrow\ \boxed{a_0=\frac{4+\pi}{2}}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{\pi nx}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\cdot\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}x\cdot\cos nxdx\right)=\langle\quad u=x,\ dv=\cos nxdx,$$

$$v=\frac{1}{n}\sin nx,\ du=dx\quad\rangle=\frac{1}{\pi}\left(2\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\big(\sin 0-\sin(-\pi n)\big)+\pi\frac{\sin\pi n}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\pi n-\cos 0}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\big((-1)^n-1\big);\ \Rightarrow\ \boxed{a_n=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{\pi nx}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\cdot\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}x\cdot\sin nxdx\right)=\langle u=x,\ dv=\sin nxdx,$$

$$v=-\frac{\cos nx}{n},\ du=dx\rangle=\frac{1}{\pi}\left(-2\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+x\cdot\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}-\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\cos(-\pi n)-\frac{\pi\cos\pi n}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\cdot(-1)^n-\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^n+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(n\pi)-\sin 0}{n^2}\right)=\frac{-2+2(-1)^n-\pi(-1)^n}{\pi n}=\frac{(2-\pi)(-1)^n-2}{\pi n};\ \Rightarrow\boxed{b_n=\frac{(2-\pi)(-1)^n-2}{\pi n}}.$$

4) Согласно (1) разложение функции $f(x)$, заданной на $(-\pi;\pi]$, имеет вид: $f(x)=\dfrac{4+\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\dfrac{(2-\pi)(-1)^n-2}{\pi n}\sin nx$, для $x\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$, а для $x=-\pi$ и $x=0$ это равенство не выполняется, так как $f(-\pi)=2$, а $S(-\pi)=0.5\pi+1$ и $f(0)=0$, а $S(0)=1$. ■

Пример 2. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0;2),\\ 2, & x\in[2;3).\end{cases}$

□ 1) Заметим, что в ряд Фурье по синусам раскладываются только нечётные функции. Так как функция $f(x)$ определена только для $x\in(0;2)\cup[2;3)$, то это означает, что на симметричный промежуток $(-3;-2]\cup(-2;0)$ функцию $f(x)$ нужно продолжить так, чтобы выполнялось равенство $f(-x)=-f(x)$. Поэтому длина промежутка, на котором функция $f(x)$ задана как нечётная, равна $T=6$ и $l=3$. Построим график функции $f(x)$ как периодической с периодом $T=6$ (рис. 3).

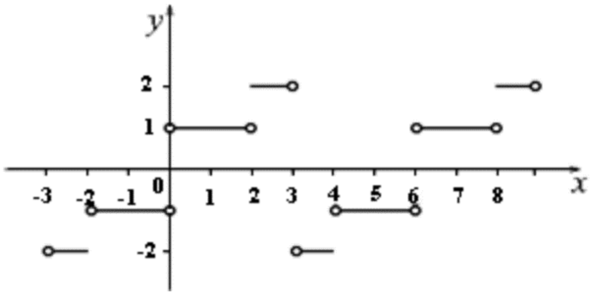

Рис. 3. График функции $f(x)$

С этой целью нарисуем сначала график функции $f(x)$ на $(0;2)\cup[2;3)$, а затем воспользуемся тем, что график нечётной функции симметричен относительно начала координат. Из этих соображений получаем график функции $f(x)$ на $(-3;-2]\cup(-2;0)$.

Затем продолжаем функцию $f(x)$ на всю числовую ось как периодическую с периодом $T = 6$.

Из графика видно, что рассматриваемая функция не определена в точках $x = 0$, ± 3, ± 6, ± 9, $\ldots$. Доопределив функцию $f(x)$ в этих точках полусуммой её односторонних пределов, получим функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле на отрезке $[-3;3]$. Следовательно, можно воспользоваться разложением вида (9) с коэффициентами (10).

2) График функции $S(x)$ отличается от графика функции $f(x)$ только в точках разрыва функции $f(x)$. Поэтому вычислим односторонние пределы функции $f(x)$ в точках $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$, $x = -3$.

$\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0}(-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} 1 = 1$, тогда $S(0) = \dfrac{1}{2}\left(-1+1\right) = 0$ (согласно (5)),

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} 2 = 2$, тогда $S(2) = \dfrac{1}{2}\left(1+2\right) = \dfrac{3}{2} = 1.5$ (согласно (5)),

$\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-0} 2 = 2$, $\lim\limits_{x\to -3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -3+0}(-2) = -2$, тогда по (5) $S(-3) = S(3) = \dfrac{1}{2}(f(-3+0) + f(3-0)) = \dfrac{1}{2}(-2+2) = 0.$

Далее при построении графика функции $S(x)$ пользуемся её нечётностью на $[-3;3]$ и периодичностью с периодом $T = 6$ (рис. 4).

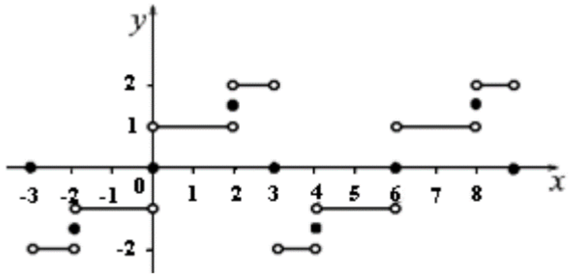

Рис. 4. График функции $S(x)$

3) Вычислим коэффициенты Фурье по формулам (10):

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^2 1\cdot\sin\frac{\pi n x}{3}\,dx + \frac{2}{3}\int_2^3 2\cdot\sin\frac{\pi n x}{3}\,dx = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_2^3 =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} - \cos 0\right) - \frac{4}{\pi n}\left(\cos\pi n - \cos\frac{2\pi n}{3}\right) = \frac{-2\cos\frac{2\pi n}{3} + 2 - 4\cdot(-1)^n + 4\cos\frac{2\pi n}{3}}{\pi n} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{2\pi n}{3} + 2 - 4\cdot(-1)^n}{\pi n} = \frac{2}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} + 1 - 2\cdot(-1)^n\right).$$

4) Согласно (9) разложение функции $f(x)$, заданной на (0;3), имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{3} + 1 + 2\cdot(-1)^{n+1}\right)\sin\frac{\pi n x}{3}$$

для $x \in (0;2)\cup(2;3)$, а для $x = 2$ это равенство не выполняется, так как $f(2) = 2$, а $S(2) = 1.5$. ■

Пример 3. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0;2], \\ 2, & x \in (2;3]. \end{cases}$

□ 1) Заметим, что в ряд Фурье по косинусам раскладываются только чётные функции. Так как функция $f(x)$ определена только для $x \in (0;2] \cup (2;3]$, то это означает, что на симметричный промежуток $[-3;-2) \cup [-2;0)$ функцию $f(x)$ нужно продолжить так, чтобы выполнялось равенство $f(-x) = f(x)$. Поэтому длина промежутка, на котором функция $f(x)$ задана как чётная, равна $T = 6$ и $l = 3$. Построим график функции $f(x)$ как периодической с периодом $T = 6$. С этой целью нарисуем сначала график функции $f(x)$ на $(0;2] \cup (2;3]$, а затем воспользуемся тем, что график чётной функции симметричен относительно оси ординат. Из этих соображений получаем график функции $f(x)$ на $[-3;-2) \cup [-2;0)$. Затем продолжаем функцию $f(x)$ на всю числовую ось как периодическую с периодом $T = 6$ (рис. 5).

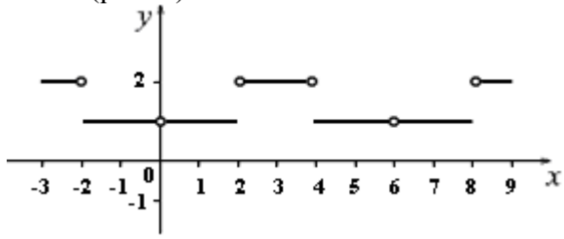

Рис. 5. График функции $f(x)$

Из графика видно, что рассматриваемая функция не определена в точках $x = 0$, $\pm 6, \ldots$. Доопределив функцию $f(x)$ в этих точках полусуммой её односторонних пределов, получим функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле на отрезке $[-3;3]$. Следовательно, можно воспользоваться разложением вида (7) с коэффициентами (8).

2) График функции $S(x)$ отличается от графика функции $f(x)$ только в точках разрыва функции $f(x)$. Поэтому вычислим односторонние пределы функции $f(x)$ в точках $x = 0$, $x = 2$:

$\lim\limits_{x \to -0} f(x) = \lim\limits_{x \to -0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to +0} 1 = 1$, тогда $S(0) = \frac{1}{2}\left(1+1\right) = 1$, согласно (5); $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} 2 = 2$, тогда $S(2) = \frac{1}{2}\left(1+2\right) = \frac{3}{2} = 1.5$; согласно (5) имеем $S(-3) = S(3) = \frac{1}{2}(f(-3+0) + f(3-0))$, где $f(-3+0) = \lim\limits_{x \to -3+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -3+0} 2 = 2$; $f(3-0) = \lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-0} 2 = 2$, тогда $S(-3) = S(3) = \frac{1}{2}(2+2) = 2$.

Далее при построении графика функции $S(x)$ пользуемся её чётностью на $[-3;3]$ и периодичностью с периодом $T = 6$ (рис.6).

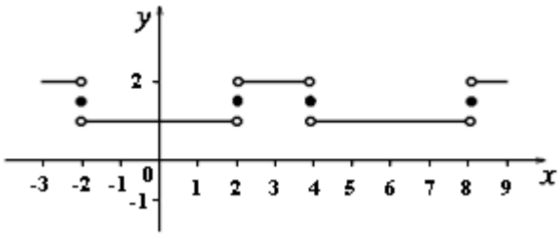

Рис. 6. График функции $S(x)$

3) Вычислим коэффициенты Фурье по формулам (10):

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^2 1\cdot dx + \frac{2}{3}\int_0^2 2\cdot dx = \frac{2}{3}\cdot x\Big|_0^2 + \frac{4}{3}\cdot x\Big|_2^3 + \frac{2}{3}(2-0) + \frac{4}{3}(3-2) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}; \boxed{a_0 = \frac{8}{3}}$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^2 1\cdot\cos\frac{\pi nx}{3}dx + \frac{2}{3}\int_2^3 2\cdot\cos\frac{\pi nx}{3}dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^2 + \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{3} - \sin 0\right) + \frac{4}{\pi n}\left(\sin\pi n - \sin\frac{2\pi n}{3}\right) = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3} - \frac{4}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3} = -\frac{2}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}$$

$$\boxed{a_n = -\frac{2}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}}$$

4) Разложение функции $f(x)$, заданной на (0;3], в ряд Фурье согласно (7) имеет вид:

$f(x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\frac{\pi nx}{3}$ для $x \in (0;2)\cup(2;3]$, а в точке $x = 2$ это равенство нарушено: $f(2) = 1$, а $S(2) = 1.5$. ■