

|                           |  |
|---------------------------|--|
| ДИСЦИПЛИНА                | <b>Теория графов</b><br><small>(полное наименование дисциплины без сокращений)</small> |
| ИНСТИТУТ                  | <b>информационных технологий</b>   |
| КАФЕДРА                   | <b>прикладной математики</b><br><small>(полное наименование кафедры)</small>           |
| ВИД УЧЕБНОГО<br>МАТЕРИАЛА | <b>Материалы для лекционных занятий</b><br><small>(в соответствии с пп.1-11)</small>   |
| ПРЕПОДАВАТЕЛЬ             | <b>Дзержинский Роман Игоревич</b><br><small>(фамилия, имя, отчество)</small>           |
| СЕМЕСТР                   | <b>1, 2023-2024</b><br><small>(указать семестр обучения, учебный год)</small>          |

## **План лекций**

1. Введение
2. Определение графа, мограф
3. Свойства бинарных отношений
4. Граф Хассе
5. Взвешенный граф
6. Двудольный граф, дерево, лес
7. Специальные матрицы, описывающие графы
8. Операции над графами
9. Метрические свойства графа, Связность графа
10. Разрезы на графах
11. Цикломатика и коцикломатика
12. Производная на графе
13. Устойчивость
14. Раскраска
15. Прикладные задачи теории графов
16. Числа

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| §1. Введение.....                                     | 4   |
| §2. Определение графа, мограф .....                   | 5   |
| §3. Свойства бинарных отношений.....                  | 13  |
| §4. Граф Хассе .....                                  | 16  |
| §5. Взвешенный граф .....                             | 20  |
| §6. Двудольный граф, дерево, лес .....                | 24  |
| §7. Специальные матрицы, описывающие графы .....      | 30  |
| §8. Операции над графами .....                        | 35  |
| §9. Метрические свойства графа, Связность графа ..... | 38  |
| §10. Разрезы на графах.....                           | 44  |
| §11. Цикломатика и коцикломатика.....                 | 50  |
| §12. Производная на графе .....                       | 54  |
| §13. Устойчивость .....                               | 64  |
| §14. Раскраска .....                                  | 68  |
| §15. Прикладные задачи теории графов .....            | 72  |
| §16. Числа.....                                       | 91  |
| Список литературы .....                               | 103 |

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Теория графов относится к молодому, слабоформализованному разделу математики. Задачи теории графов сопутствуют человечеству во всех областях его знаний. Аксиоматический аппарат теории графов выработан относительно. Именно поэтому можно сказать, что теория графов является одним из тех разделов математики, где можно достигнуть быстрого успеха. Ещё одна проблема – не установившаяся система обозначений. Впервые некоторые правила обозначений элементов графа были предложены всего в 1961 году.

Теория графов стала формироваться достаточно давно, в частности – с такой задачи:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{a, b, c, d\}, \\ M_2 &= \{a, c, e, f\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Даны 2 множества -  $M_1$  и  $M_2$ . Если их изобразить в виде пересекающихся совокупностей:

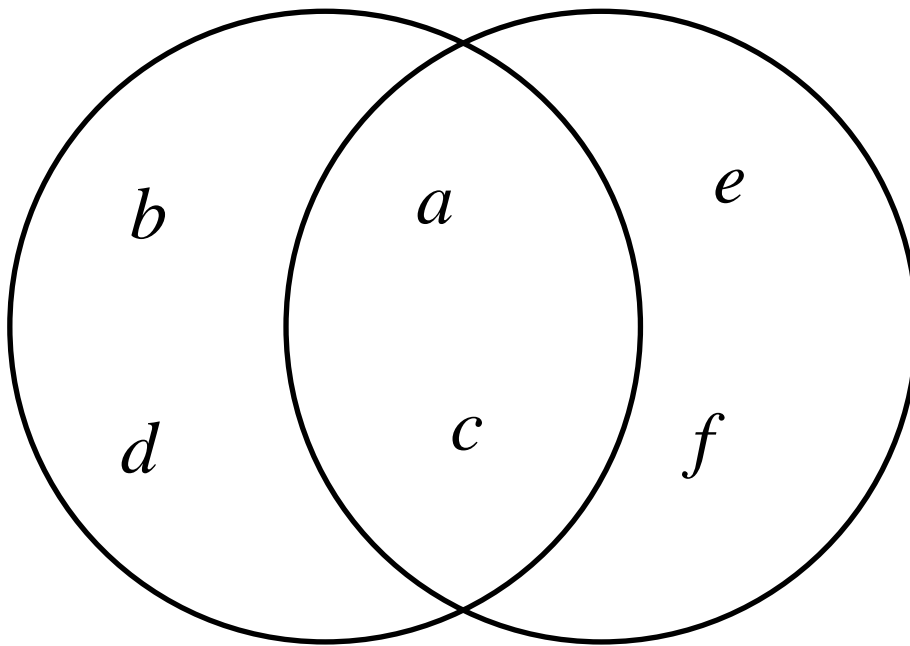


Рисунок 1

Вспоминаем круги Эйлера. Забавно, что впервые их изобразил не Эйлер, а Раймонд Луллий, каталонец, который изобрел философский компьютер. Он поставил задачу вычисления с помощью сочетания кругов на плоскости цвета, букв и цифр судьбы человеческой.

## §2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФА, МОГРАФ

Вспомним: квадратом множества  $M^2$  или декартовым произведением множества  $M_a$  на множество  $M_b$  – записываемого как  $M_a \times M_b$  будет называться случай декартового произведения:  $\{M^2 | (M_a \times M_b | M_a = M_b)\}$ . Соответственно, в квадрат множества  $M$  вкладывается бинарное отношение  $R_2 \subset M^2$  – ничто иное, как подмножество квадрата  $M^2$ .

*Определение:*

Совокупность  $M$  с заданным на нём соотношением  $R_2$  называется графом.

$$G = \langle M, R_2 \rangle, \quad (2.1)$$

$M$  – носитель графа,

$R_2$  – сигнатура графа. (По природе отношения –  $R_i$ , где индекс  $i$  отражает «арность» графа, или «арность» отношения).

Иными словами:  $M$  – множество вершин, а  $R_2$  – множество ребер. Индекс 2 показывает, что состоит это множество из пар элементов множества  $M$  – описывая тем самым существование связи между его элементами. Можно встретить такую запись:  $M(G)$  и  $R_2(G)$ . Описание термина «ребро» в одной из трактовок выглядит так: ребро графа  $G$  есть элемент множества ребер  $r_2 \in R_2(G)$ , или  $r_2 = \{m_1, m_2\}$ , где  $m_1 \in M(G)$ ,  $m_2 \in M(G)$ .

Скобки вида  $\langle \dots \rangle$  обозначают совокупность многосортных множеств. В обычном множестве принята единая природа объектов, составляющих его. Если же во множество включаются объекты существенно неоднородные по своей структуре – многосортные – в математике вводятся указанные обозначения. Так, для графа вводятся 2 «сорта» элементов – 1-ый сорт – это сами элементы –  $m_i$ , и 2-ой сорт – их связи (пары)  $(m, m_j)$ .

В качестве примера бинарного отношения рассмотрим предложенную Нейманом схему ЭВМ последовательного действия.

ЭВМ состоит из множества устройств  $M = \{a, b, c, d, e\}$ . Эти устройства:  $a$  – устройство ввода,  $b$  – арифметико-логическое устройство (АЛУ) или процессор,  $c$  – устройство управления,  $d$  – устройство запоминания,  $e$  – устройство вывода.

Рассмотрим информационный обмен между устройствами  $m_i$  и  $m_j$ , которые находятся в отношении  $R_2$  если из устройства  $m_i$  поступает информация в устройство  $m_j$ . Для отношения  $R_2$  получается 14 пар:

$$R_2 = \{(a; b); (a; c); (a; d); (b; c); (b; e); (b; d); (c; a); (c; b); (c; d); (c; e); (d; b); (d; c); (d; e); (e; c)\}. \quad (2.2)$$

Тогда граф  $G = \langle M, R_2 \rangle$  для отношения Фон-Неймана будет представлять собой:

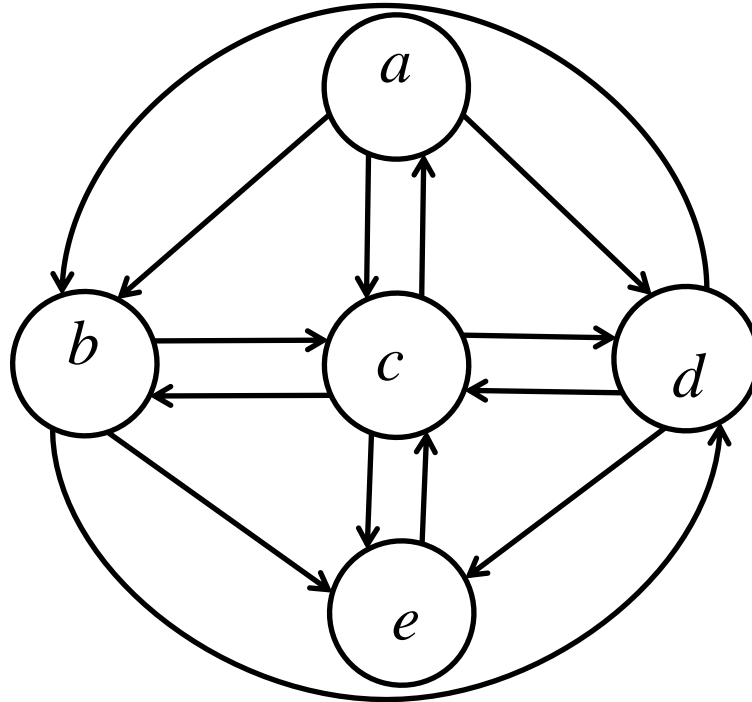


Рисунок 2

Стоит так же отметить, что в общем случае в графе может существовать элемент «петля» - вида  $(m_i, m_i)$ .

При матричном задании можно использовать двумерную таблицу, которая задаёт граф. Называется она матрицей смежности. Каждая строка и столбец взаимно-однозначно соответствует элементу множества  $M$ . То есть любая клетка  $(i, j)$  соответствует элементу множества  $R_2$ . Клетки как-то помечают – ставят «1» или просто закрашивают. В остальные ставятся «0». Матрица смежности для данного графа записывается в виде:

$$S(R_2) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}. \quad (2.3)$$

Введём понятие окрестности единичного радиуса.

*Определение:*

Окрестность единичного радиуса для точки  $m_i$  – ни что иное как совокупность  $m_j$ , таких что  $(m_i, m_j) \in R_2$ :

$$\delta_1(m_i) | m_j \in M | (m_i, m_j) \in R_2, R_2 \subset M^2. \quad (2.4)$$

Вместо понятия «окрестность единичного радиуса» применяется так же такой объект, как сечение.

Множество окрестностей единичного радиуса, взятых для всех элементов множества  $M$  при задании  $R_2 \subset M^2$  называется фактор-множеством.

Фактор-множеством для данного графа будет:

$$M/R^2 = \left[ \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \{b; c; d\} & \{c; d; e\} & \{a, b, d, e\} & \{b, c, e\} & \{c\} \end{array} \right]. \quad (2.5)$$

Таким образом, граф может быть задан через фактор-множество, обозначается как:

$$G = \langle R_2, \Gamma \rangle. \quad (2.6)$$

Воспользуемся тем, что мы записали: сечением множества по элементу  $a$  будет ничто иное, как  $\{b, c, d\}$ :

$$\Gamma_a = \{b, c, d\}. \quad (2.7)$$

Аналогично бинарному отношению может быть введено произведение вида:

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \prod_{i=1}^n M_i. \quad (2.8)$$

Это набор вида:

$$M = \{(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) | m_{i_1} \in M_1, m_{i_2} \in M_2, \dots, m_{i_n} \in M_n\}. \quad (2.9)$$

Соответственно, в условиях  $\forall i, j: M_i \equiv M_j$  (тождественности множеств) у нас получается  $M^n$  –  $n$ -ая декартова степень множества  $M$ . Можно сказать, что на нём возможно  $n$ -арное отношение  $R_n \subset M^n$ .

Если  $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n} \in M, (m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) \in R_n$  – говорят, что элемент находится в  $n$ -арном отношении  $R_n$ .

Стоит вспомнить и объявить термин «кортеж». Введение множества  $R_2$  было введением множества, состоящего из кортежей. Важно отметить, что его элементы вида  $(m_1, m_2)$  и  $(m_2, m_1)$  несут разную смысловую нагрузку – так как в нашем случае важно – что является началом дуги, а что – её концом.

Таким образом, отношение  $R_n$  задаётся в виде набора  $n$ -арных кортежей.

Неплохо выделить из совокупности объектов, смысловое содержание которых мы только что изучили симметричные  $n$ -арные отношения.

Для симметричных  $n$ -арных отношений из того, что  $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) \in R_n$  следует, что  $j_{1;\overline{n}} \equiv i_{1;\overline{n}} | (m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_n}) \in R_n$ . По существу такое отношение задаёт подмножество из  $n$  элементов. Симметричные отношения так же называют «S-отношения» или «словесные отношения», а элементы таких отношений так же называют «буквами». Подмножество, определяющее  $s$ -отношение ещё обозначается символом  $\mu_i$  и называется «слово». Задание  $s$ -отношения можно идентифицировать с помощью модельного графа (или мографа).

Матрица инцидентности задаёт  $s$ -отношение, и обозначается  $Q = [q_{i,j}]$ . В матрице столбец соответствует букве, а строка – слову. Можно сказать, что:

$$q_{i,j} = \begin{cases} 1: m_j \in \mu_i \\ 0: m_j \notin \mu_i \end{cases} \quad (2.10)$$

Пример:

Множество  $M = \{a, и, o, p, c, ы\}$ .

Слова:  $\mu_1 = \{c; o; p\}, \mu_2 = \{p; и; c\}, \mu_3 = \{c; ы; p\}, \mu_4 = \{o; c; a\}$ .

Построим матрицу инцидентности:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & и & o & p & c & ы \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}. \quad (2.11)$$



Определение: граф называется полным, если все его вершины попарно смежны. Частичный граф обозначается  $G' = \langle M, R_2 \rangle$ .  $R'_2 \subset R_2$ .

Новое обозначение касается именно графов:  $G' \subset G$ . Граф  $G'$  получается из графа  $G$  путем удаления некоторых его дуг. При удалении и вершин и дуг получается граф  $\tilde{G} \subset G$ . Если из графа  $\tilde{G}$  удалить дуги, можно получить частичный подграф – и можно продлить подобное отношение влево:  $G'' \subset \tilde{G} \subset G$ .

Для однозначного задания словесных отношений необходимо каждой букве-вершине сопоставить множество идентификаторов слов, в которые эти буквы входят. Тогда любому слову взаимно-однозначно соответствует полный подграф, каждая вершина которого соответствует идентификатору этого слова. Такой полный подграф, соответствующий слову, называется элементарным. Процесс сопоставления множества идентификаторов слов буквам принято называть моделизацией графа  $G$  или построением мографа.

В результате моделизации графа  $G$  каждой вершине взаимно-однозначно соответствует буква. Получается взвешенное множество идентификаторов слов, в которое входит каждая вершина. При этом две вершины называются смежными (соединены линиями без ориентации ребру) если им соответствует хотя бы один идентификатор.

Полученную таким образом на функции  $g$  функцию, областью определения которой является множество вершин графа  $G$ , а область значений – множество идентификаторов слов, будем называть модельным графом или мо-графом. Обозначается модельный граф:

$$G^M = \langle (V, W), U \rangle. \quad (2.12)$$

где:

$W$  – множество идентификаторов слов,

$V$  – множество вершин,

$U$  – множество букв.

Рассмотрим пример:

Два мо-графа  $G_1^M$  и  $G_2^M$  заданы s-отношениями  $S^1$  и  $S^2$ :

$$S^1_3 = \underbrace{\{\{т, о, р\}\}}_1, \underbrace{\{\{р, о, в\}\}}_2, \underbrace{\{\{в, о, т\}\}}_3 \text{ на множестве } M_1 = \{в; т; о; р\}.$$

Строим граф:

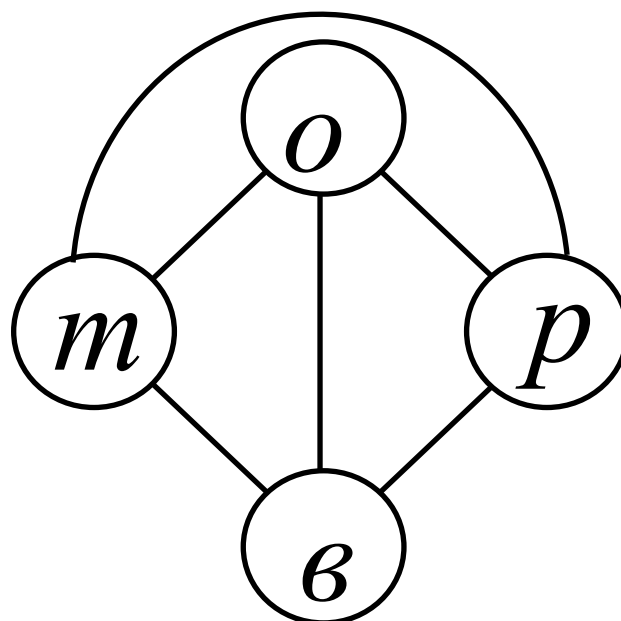


Рисунок 3

Обращаем внимание, что этот граф носит полный характер.  
Множество вхождений вершин выглядит так:

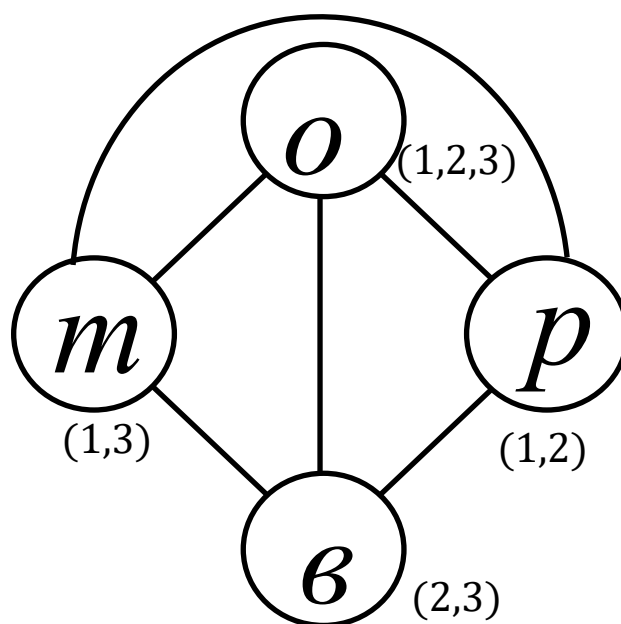


Рисунок 4

$$S^2_3 = \{\underbrace{\{c, o, p\}}_1, \underbrace{\{p, и, c\}}_2, \underbrace{\{c, ы, p\}}_3, \underbrace{\{o, c, a\}}_4\} \text{ на множестве } M_2 = \{a, o, и, p, c, ы\}.$$

Получаем следующий мо-граф:

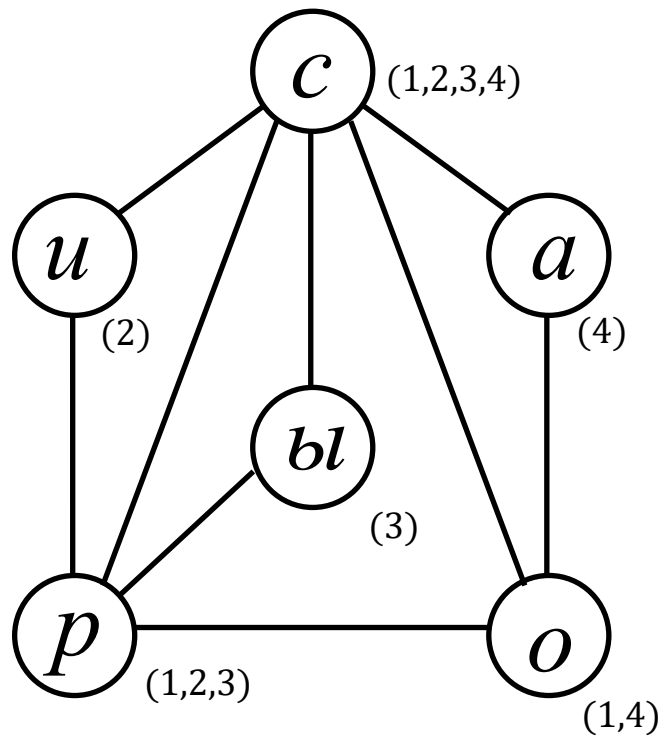


Рисунок 5

Геометрическая интерпретация гиперграфа, определяющая множество  $M$  сечений  $S^2_3 = \{\{c, o, p\}, \{p; и; c\}, \{c; ы; p\}, \{o; c; a\}\}$  изображена на рисунке. В записи  $S^2_3$  индекс «3» показывает «местность» соотношения – сколь местно соотношение. Однозначно задать s-отношение с помощью графа можно если в качестве носителя графа взять не только множество букв, но и множество идентификаторов слов. Такое задание s-отношения осуществляется посредством двухдольного графа.

Граф  $G = \langle V, U \rangle$  называется двухдольным графом или графом Кёнига, если его носитель разбит на 2 подмножества  $V^+$  и  $V^-$ , таких что:  $V^+ \cap V^- = \{\emptyset\}$  – то есть не имеющих общих вершин. Начало каждой дуги  $u$  принадлежит  $V^+$  и только ему, а конец -  $V^-$  и только ему. При заданном s-отношении элементам  $V^+$  в графе Кёнига взаимно-однозначно сопоставляются буквы, а элементам  $V^-$  - идентификаторы слов.

Двухдольный граф, заданный трёхместным соотношением  $S^2_3$  и множество  $M_2$  и идентификаторы  $(\overline{1,4})$  изображен на рисунке.

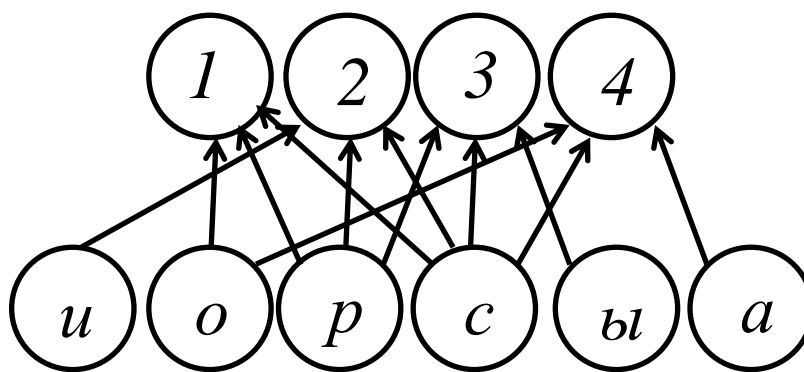


Рисунок 6

Неплохо отметить для задания  $s$ -отношений применяется объект, прозванный в западной литературе «гиперграф». При геометрической интерпретации графа его буквы соответствуют вершинам, а слова – кругам Эйлера, которые охватывают буквы, входящие в состав слов

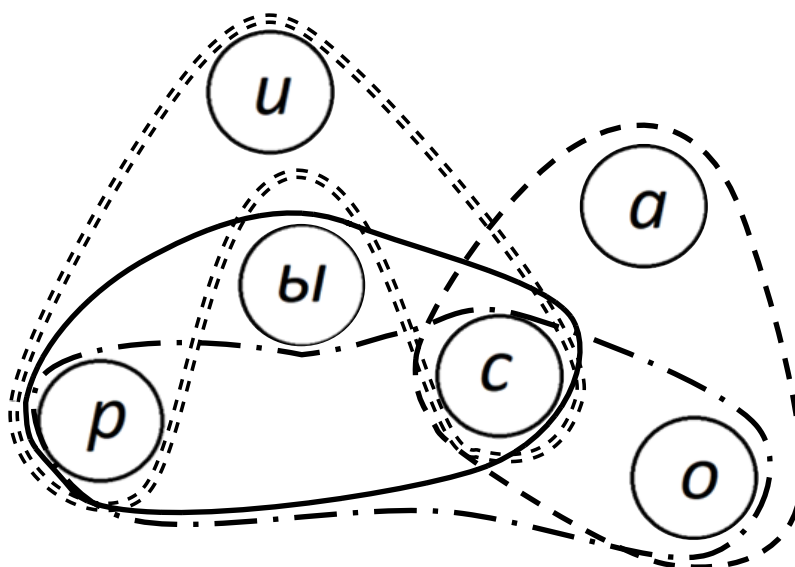


Рисунок 7

Одним из основных понятий в теории графов является понятие модели. Моделью  $\Psi$  называется совокупность множества  $M$  с заданным на соотношении набором сечений:  $S = \{R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1n}, R_{21}, R_{22}, \dots, R_{2n}, R_{m1}, R_{m2}, \dots, R_{mn}\}$ , где соответственно:

$M$ -носитель модели,

соотношения  $R_{i\alpha} \subset M'$  образуют сигнатуру модели.

$$\Psi = \langle M, S \rangle. \quad (2.13)$$

### §3. СВОЙСТВА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Рассмотрим, какими вообще бывают бинарные ( $n=2$ ) отношения:

1. Если:  $(\forall m_i \in M) ((m_i; m_j) \in R_2)$ , то  $R_2$  называется рефлексивным.

Рассматривая граф такого отношения можно сказать, что у каждой вершины такого графа есть петля. Матрица смежности – единичная.

2. Если:  $(\forall m_i; m_j (m_i \neq m_j) \in M) ((m_i; m_j) \in R_2 \Rightarrow (m_j; m_i) \in R_2)$ , то  $R_2$  называется симметричным. Матрица смежности такого отношения будет симметрична относительно главной диагонали. При задании графом для каждой двух вершин есть две дуги, инцидентных и коинцидентных между собой.

3. Если:  $(\forall m_i; m_j; m_k \in M, \otimes (m_i; m_j; m_k)) ((m_i; m_j) \in R_2 \& (m_j; m_k) \in R_2 \Rightarrow (m_i; m_k) \in R_2)$ , то  $R_2$  называется транзитивным. (здесь  $\otimes (m_i; m_j; m_k)$  означает «попарно различны»). Для транзитивных отношений графы будут иметь такие характерные дуги:

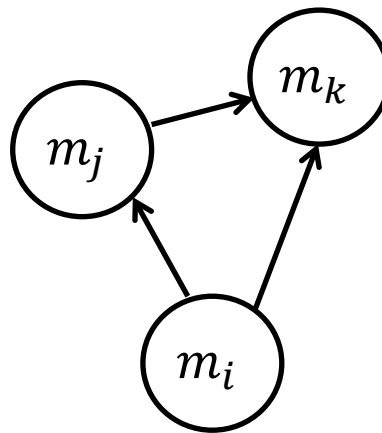


Рисунок 8

Любой паре дуг, где конец одной совпадает с началом другой, соответствует третья дуга, транзитивно замыкающая этот порядок.

Таким образом, мы подходим к метрическим пространствам. Введём:  $\Delta(R_2; \alpha)$  – параметр близости бинарного отношения  $R_2$  к свойству  $\alpha$  – будет он оцениваться минимальным числом дуг, которые надо удалить или добавить графу, задающему это отношение, чтобы полученный граф с отношением  $\widetilde{R}_2$  имел все 3 вышеприведенных свойства:  $\alpha = \rho \& \delta \& \eta$ . (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

Определим близость для информационного графа машины Фон-Неймана, рассматриваемого ранее:

$\Delta(R_2, \rho) = 5$  – рефлексивность (\*),

$\Delta(R_2, \delta) = 4$  – симметричность (\*\*),

$\Delta(R_2, \eta) = 6$  – транзитивность (\*\*\*)

Перечислим дуги, транзитивно (\*\*\*) замыкающие граф Фон-Неймана:

$(a, b) \in U \& (b, e) \in U$ , но  $(a, e) \notin U$

$(e, c) \in U \& (c, a) \in U$ , но  $(e, a) \notin U$

$(b, c) \in U \& (c, a) \in U$ , но  $(b, a) \notin U$

$(e, c) \in U \& (c, b) \in U$ , но  $(e, b) \notin U$

$(e, c) \in U \& (c, d) \in U$ , но  $(e, d) \notin U$

$(d, c) \in U \& (c, a) \in U$ , но  $(d, a) \notin U$

Рефлексивность (\*) для данного графа добавляется соответственно:

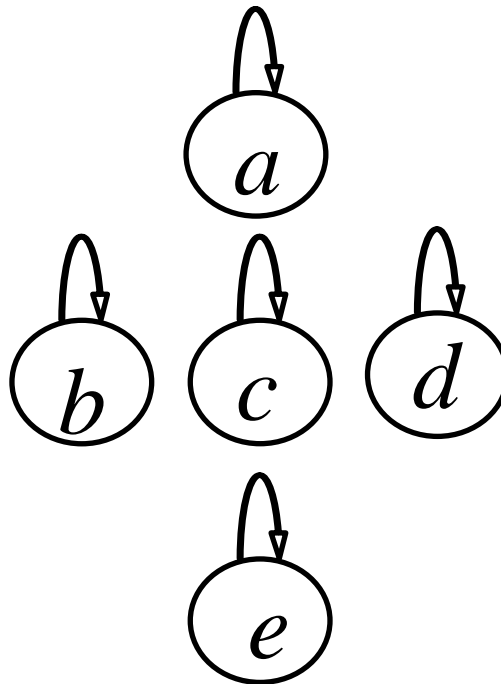


Рисунок 9

И, наконец, симметричность (\*\*) – дополняется следующим образом:

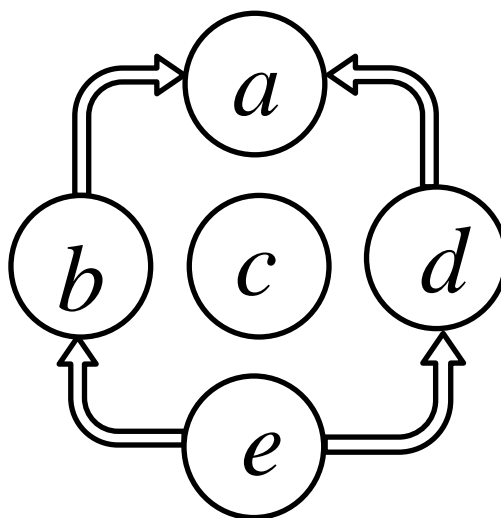


Рисунок 10

Продолжим список отношений:

4. Отношение  $R_2$ , обладающее свойствами рефлексивности и антисимметричности и транзитивности:  $(\forall a, b \in M)((a, b) \in R_2 \& (b, a) \in R_2) \Leftrightarrow a \equiv b$  называется отношением упорядоченности. Обозначается « $\preceq$ ».
5. Отношение  $R_2$ , обладающее свойствами антирефлексивности, антисимметричности и транзитивности называется отношением строгой упорядоченности. Записывается условие так:  $(\forall a \in M)((a, a) \notin R_2), (\forall a, b \in M)((a, b) \in R_2 \& (b, a) \in R_2) \Leftrightarrow a \equiv b$ . Обозначается такое отношение « $<$ ».
6. Отношение  $R_2$ , обладающее свойствами рефлексивности и транзитивности называется отношением предпорядка.
7. Если отношение  $R_2$  рефлексивно и симметрично, то оно называется отношением толерантности.

Рассмотрим операцию включения:  $\subset$ . Она рефлексивна – так как множество включает само себя. Она антисимметрична -  $M_i \subset M_j \& M_j \subset M_i \Rightarrow M_i \equiv M_j$ . Значит, отношение включения является отношением упорядоченности.

Примером отношения строгой упорядоченности является отношение « $<$ » на множестве рациональных чисел, а отношения предпорядка – отношение «Является делителем» для множества натуральных чисел.

## §4. ГРАФ ХАССЕ

Частично упорядоченные множества, обладающие графом  $H = \langle V; \leq \rangle$  образуются из первоначального графа удалением всех петель и транзитивно замыкающих дуг. Такого вида граф называется графом Хассе (Hasse). Граф Хассе (диаграмма Хассе) определяет базовое задание отношений упорядоченности на множестве.

Рассмотрим пример. Задан граф следующего вида:

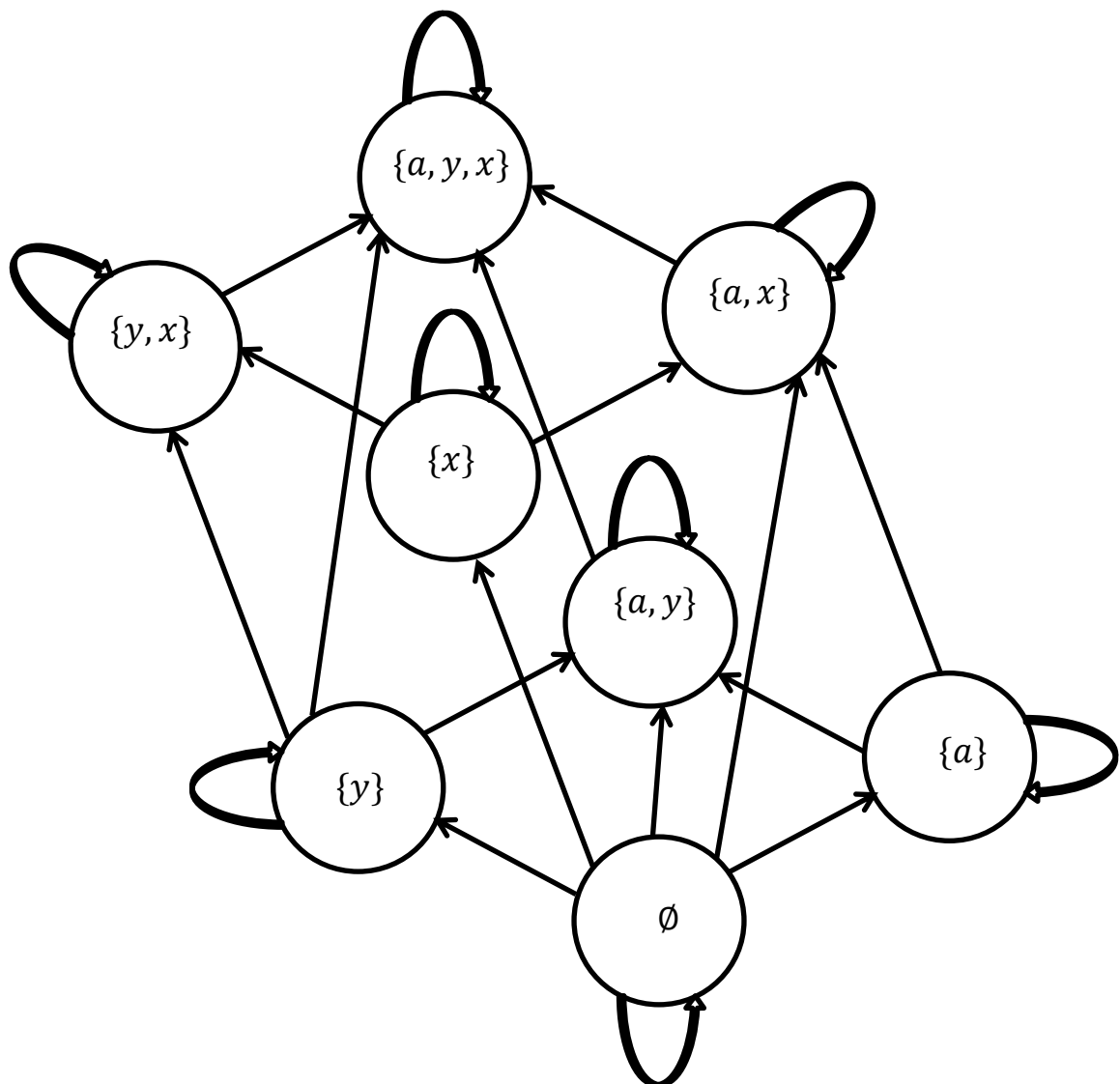


Рисунок 11

Граф Хассе для данного графа выглядит следующим образом:



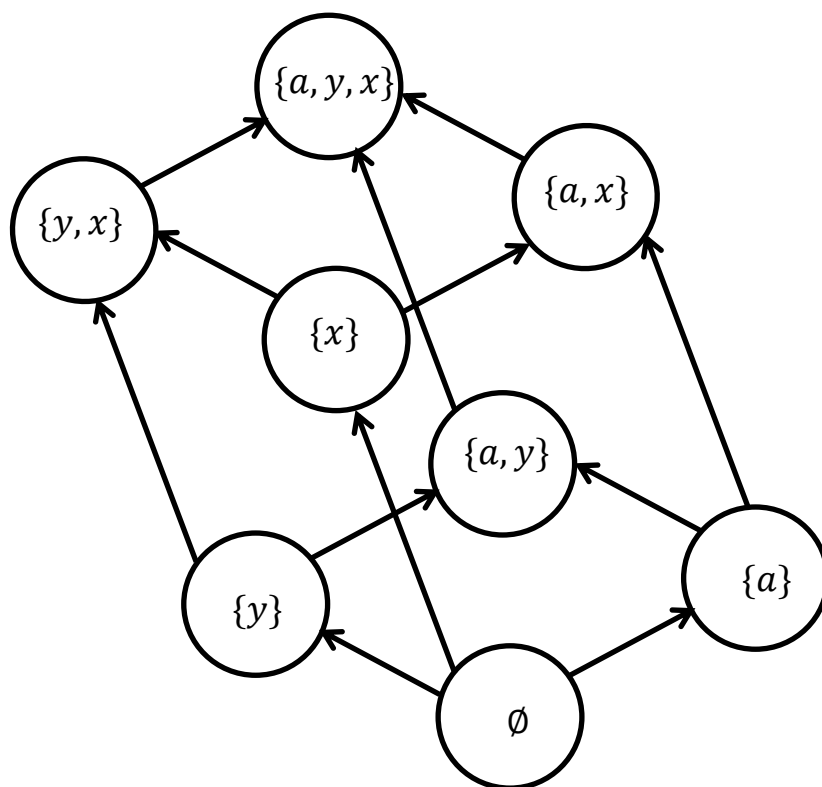


Рисунок 12

Внимательный человек без труда здесь заметит булеан третьей степени. В свою очередь булеан четвертой степени можно представить в виде декартова произведения булеана третьей степени на булеан первой:

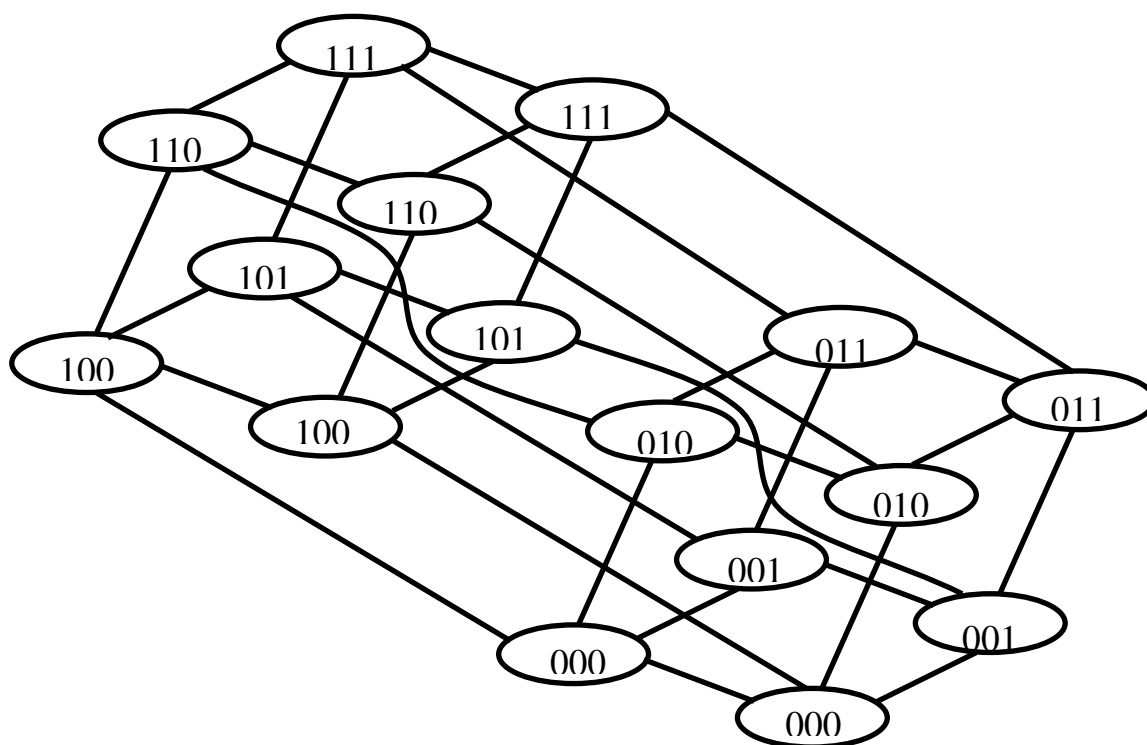


Рисунок 13

Либо в виде иерархичной структуры:

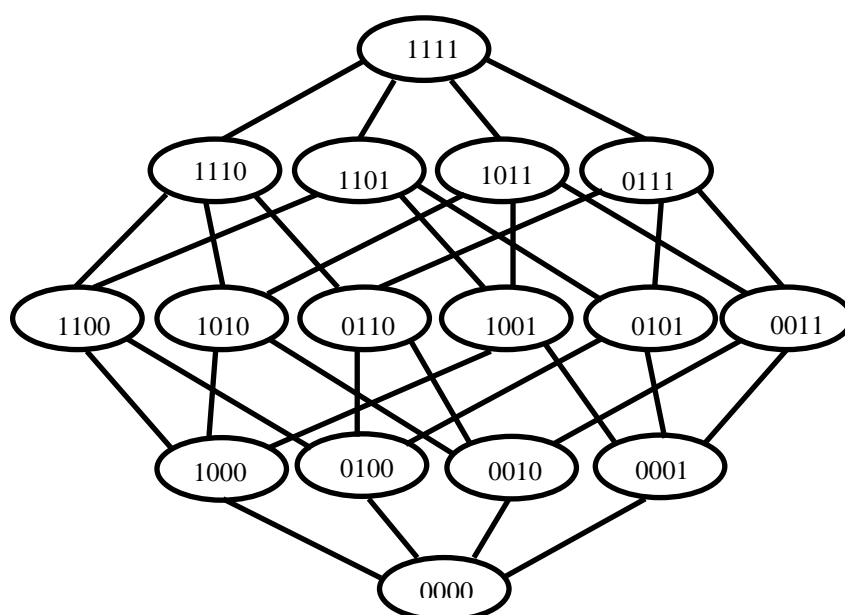


Рисунок 14

Есть ещё вариант представления булеана, в котором можно наблюдать возможность построения в формате, в котором длины рёбер булеана равны.

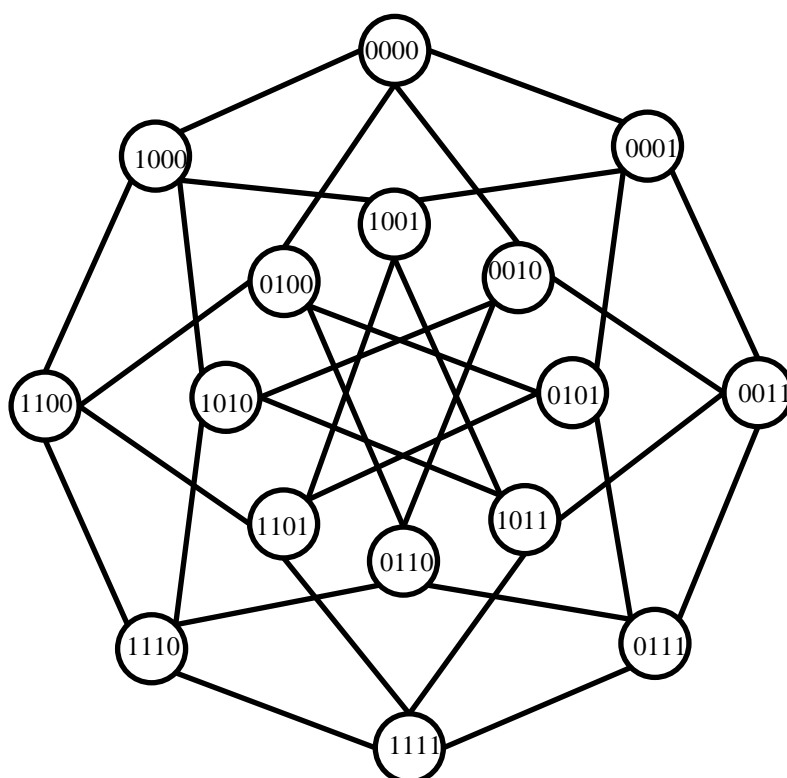


Рисунок 15

Говорят, что  $m_i$  покрывает  $m_j$  если:  $(\forall m_i, m_j) := m_i || m_j, m_i \succ m_j \nexists m_k: m_i \succ m_k \succ m_j$ .

Пусть  $(M, \preceq)$  и  $\exists M' \subset M, m_\alpha \in M' | \forall m_i \in M': m_\alpha \succ m_i$ , тогда  $m_\alpha$  называется мажорантой  $M'$ . Так же можно определить и миноранту.

Рассмотрим  $M' = \{(y, x); (a, x); (y, x, a)\}$ . Можно сказать, что  $\{a, x\} Ma \{x\} \{a\} \{\emptyset\}$  ( $Ma$  – является мажорантой).

Двойственным частному упорядоченному множеству  $M$  называется частично упорядоченное множество  $\tilde{M}$ , определённое на том же носителе с помощью обратного отношения. Обратным для графа Хассе будет отображение следующего вида:

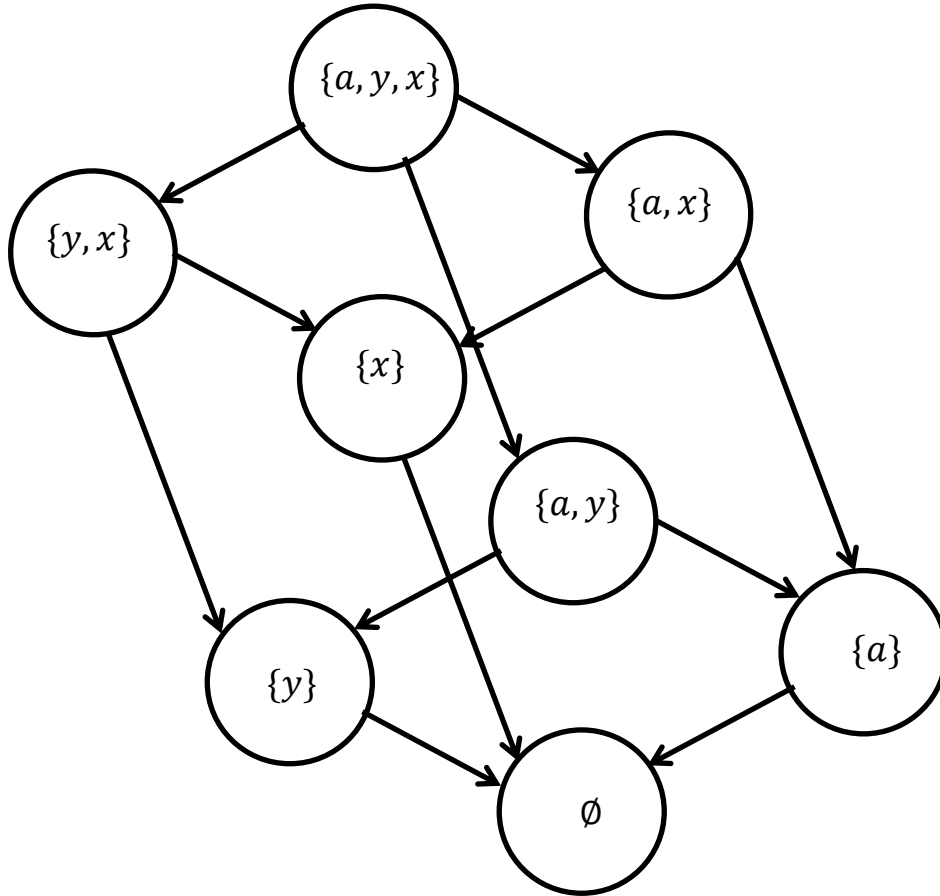


Рисунок 16

Принцип двойственности: Если теорема справедлива для частично упорядоченного множества с заданным отношением, она справедлива и для двойственного отношения к данному множеству.

## §5. ВЗВЕШЕННЫЙ ГРАФ

Сопоставим каждой вершине  $v_i \in V, i = \overline{1, n}$  набор весов  $w_i \in W, i = \overline{1, n}$ . Получим множество взвешенных вершин  $\{(v_i, w_i), i = \overline{1, n}\}$ .

*Определение*

Взвешенный граф – это набор:

$$\begin{cases} G := \langle (\tilde{V}, W), (U, \Phi) \rangle \\ \tilde{V} = V = V \cup U_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

Можно сказать, что это функция, определенная на вершинах и дугах графа. Имеем граф  $G = \langle V, U_1, U_2' \rangle$ , имеющий  $n$  вершин и  $m$  дуг. Будем считать:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если из } v_j \text{ дуги идет в } u_i \\ -1, \text{ если это конец} \\ 0, \text{ если не коинцидентна} \end{cases} \quad (5.2)$$

Соответственно, матрица инцидентности  $A(G) = [a_{ij}]_{m \times n}$ . Возникает в такой матрице проблема при определении элементов – петель: в них элемент должен принимать значение «1» и «-1» одновременно, так как дуга выходит и возвращается в одну и ту же вершину.

Решением этой проблемы – разбить  $A$  на  $A^+$  - начальную матрицу инцидентности и  $A^-$  - конечную матрицу инцидентности. Соответственно:

$$\begin{aligned} A^+ &= [a_{ij}^+]_{m \times n} : a_{ij}^+ = \begin{cases} 1, \text{ если } v_j - \text{начало дуги } u_i \\ 0 - \text{ в противном случае} \end{cases}, \\ A^- &= [a_{ij}^-]_{m \times n} : a_{ij}^- = \begin{cases} 1, \text{ если } v_j - \text{конец дуги } u_i \\ 0 - \text{ в противном случае} \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для графа без петель:  $A = A^+ - A^-$  без учета весов вершин и дуг. Если же мы будем работать со взвешенным графом, то появятся ещё весовые матрица и вектор:

$$W(G) = \left\| \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\|; P(G) = \left\| \begin{pmatrix} \rho_1 & & & \\ & \rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho_n \end{pmatrix} \right\|. \quad (5.4)$$

*Теорема:*

Произвольный граф полностью описывается набором:  $A^+, A^-, W, P$ .

*Задача:*

Описать граф, который будет соответствовать двоичному сложению двух булевых переменных при реализации его в базисе Шеффера:

$$f: B^2 \rightarrow B^1, f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2. \quad (5.5)$$

Напоминание: функция Шеффера в базисе «И-ИЛИ-НЕ» выглядит:  
 $\phi_{\text{ш}}(x, y) = \overline{x \& y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ .

*Решение:*

Схема, реализующая функцию двоичного сложения, основанная на элементах Шеффера выглядит следующим образом:

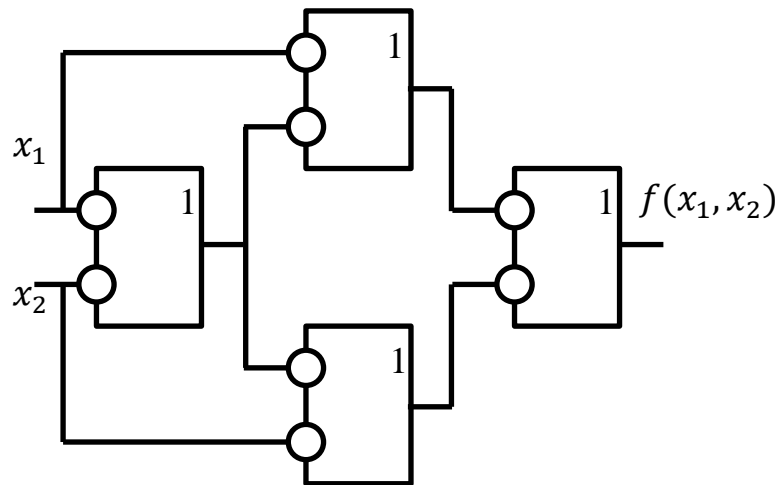


Рисунок 17

Ему соответствует следующий взвешенный граф:

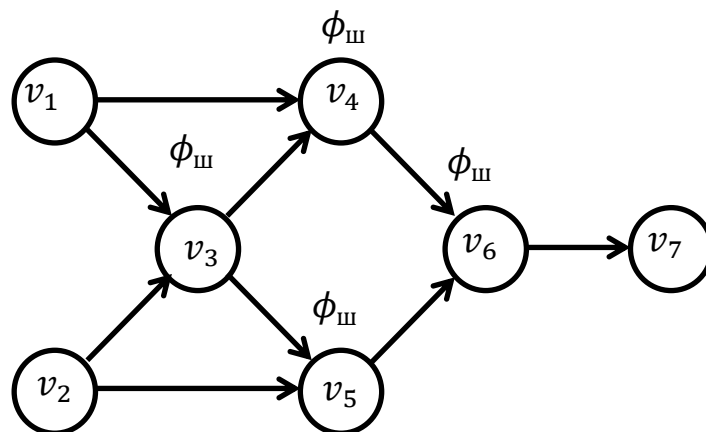


Рисунок 18

Начало дуги – выход элемента Шеффера или начальные переменные, конец дуги – вход элемента Шеффера или непосредственно функционал  $f(x_1, x_2)$ . Взвешенному графу соответствует следующая матрица инцидентности:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Для вектора весовых коэффициентов:

$$W(G) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \phi_{\text{ш}} \\ \phi_{\text{ш}} \\ \phi_{\text{ш}} \\ \phi_{\text{ш}} \\ f \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Классификация матрицы смежности

Матрица смежности невзвешенного графа  $S = [s_{ij}]_{n \times n}$  есть ничто иное как:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in U_2 \\ 0, (v_i, v_j) \notin U_2 \end{cases}. \quad (5.8)$$

Для взвешенного графа:

$$s_{ij} = \begin{cases} \rho_{ij}, (v_i, v_j) \in U_2 \\ 0, (v_i, v_j) \notin U_2 \end{cases}, \quad (5.9)$$

где  $\rho_{ij}$  – вес дуги.

Вес дуги, в общем случае, может быть не только константой, но и функцией, преобразующей некоторые значения.

Для рассматриваемой ранее задачи такая матрица имеет вид:

$$S(G) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Для вектора весовых коэффициентов:

$$W(G) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \phi_{ш} \\ \phi_{ш} \\ \phi_{ш} \\ \phi_{ш} \\ f \end{vmatrix}. \quad (5.11)$$

Два графа  $G = \langle V, U \rangle, G' = \langle V', U' \rangle$  называются изоморфными, если существует взаимно-однозначное соответствие между их вершинами, причем так, что:  $(v_\alpha, v_\beta) \in U \Leftrightarrow (v'_\alpha, v'_\beta) \in U'$ , и не появляется дополнительных дуг. Матрица  $S$  задает граф с точностью до изоморфизма.

*Теорема:*

$$S = (A^+)^T P (A^-). \quad (5.12)$$

Простыми словами можно описать эту теорему через понимание матрицы  $A$  и  $P$ . Матрицы инцидентности в строках содержат записи об участии вершин в образовании рёбер. Каждая строка соответствует ребру, а столбец – вершине, связанной с ребром. Матрица весов рёбер имеет диагональный вид, и её размерности равны количеству рёбер – задавая их веса. Произведение определяет матрицу, в строках которой содержится информация обо всём множестве взвешенных рёбер, исходящих из вершины, соответственно строке. Произведение такой матрицы на матрицу  $A^-$  связывает истоки с концами – то есть определяется взвешенная связь двух вершин – то есть матрица смежности.

## §6. ДВУДОЛЬНЫЙ ГРАФ, ДЕРЕВО, ЛЕС

Напомним определение двудольного графа: граф  $G = \langle V, U \rangle$  называется двудольным графом или графом Кёнига, если его носитель разбит на 2 подмножества  $V^+$  и  $V^-$ , таких что:  $V^+ \cap V^- = \{\emptyset\}$  – то есть не имеющих общих вершин. Начало каждой дуги  $u$  принадлежит  $V^+$  и только ему, а конец –  $V^-$  и только ему, и наоборот.

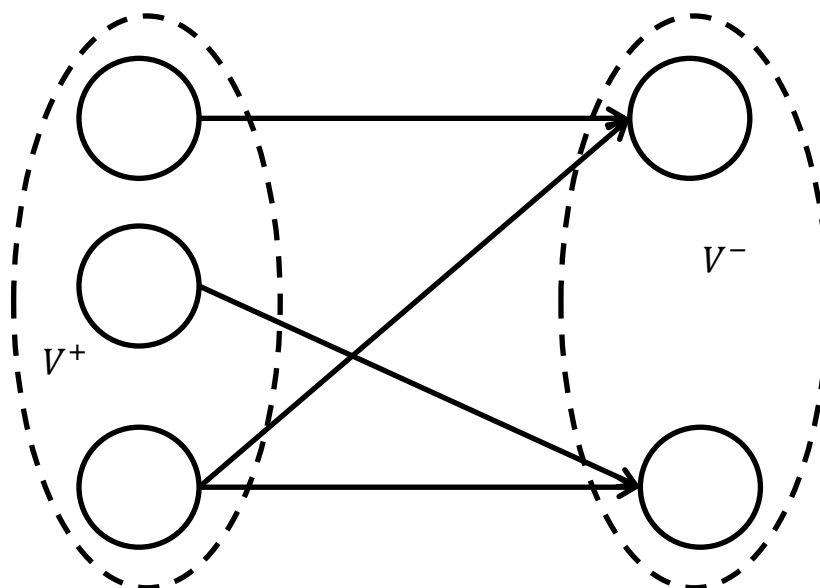


Рисунок 19

Для двудольного графа может быть введена специальная матрица смежности – называемой матрицей смежности двудольного графа. Так как вершины множеств не смежны внутри этих множеств, классическая матрица смежности может быть наполнена большим количеством нулей. Определим матрицу

$$K_{n \times m} = [k_{i,j}]_{n \times m} = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in U \\ 0, (v_i, v_j) \notin U \end{cases} \quad (6.1)$$

Матрица имеет  $n$  строк и  $m$  столбцов – каждой строчке соответствует вершина множества  $V^+$ , а каждому столбцу – вершина множества  $V^-$ . Так решается сразу 2 задачи – сокращение объёма матрицы, и определение характера графа (если граф не двудольный, то для него подобного рода матрицу составить нельзя). Так, для вышеприведённого графа матрица смежности в общем виде выглядит следующим образом (с произвольным порядком задания номеров вершинам):



$$S(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

тогда как матрица смежности, учитывающая двудольность графа, принимает следующий вид:

$$K(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Лесом называется граф, не содержащий циклов, а связный граф, не имеющий циклов, называется деревом. Ввиду специфики и частоты применения в дальнейшем введём понятие «концевая вершина». Концевая вершина – вершина, степень которой равна 1.

Ввиду отсутствия циклов внутри деревьев существует возможность однозначного представления дерева с применением матрицы, называемой матрицей расстояний между концевыми вершинами.

Матрица расстояний между концевыми вершинами  $D$  имеет размеры  $k \times k$ , где  $k$  – количество концевых вершин.

$$D = [d_{ij}]_{k \times k} := d_{ij} = d(v_i, v_j). \quad (6.4)$$

Где  $d(v_i, v_j)$  – расстояние между вершинами  $i$  и  $j$ . В случае невзвешенного графа расстояние определится как количество рёбер между вершинами. Так, например, для некоторого дерева, имеющего 5 концевых вершин можно иметь первичное представление в виде:

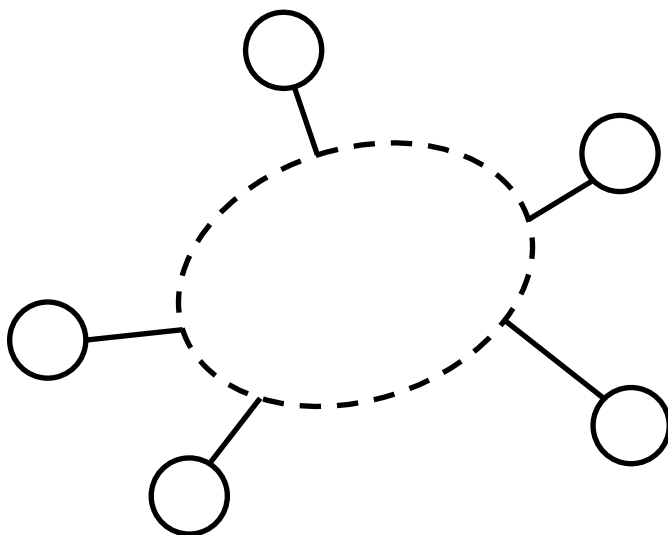


Рисунок 20

Зададим матрицу расстояний между концевыми вершинами:

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (6.5)$$

И однозначно восстановим структуру дерева:

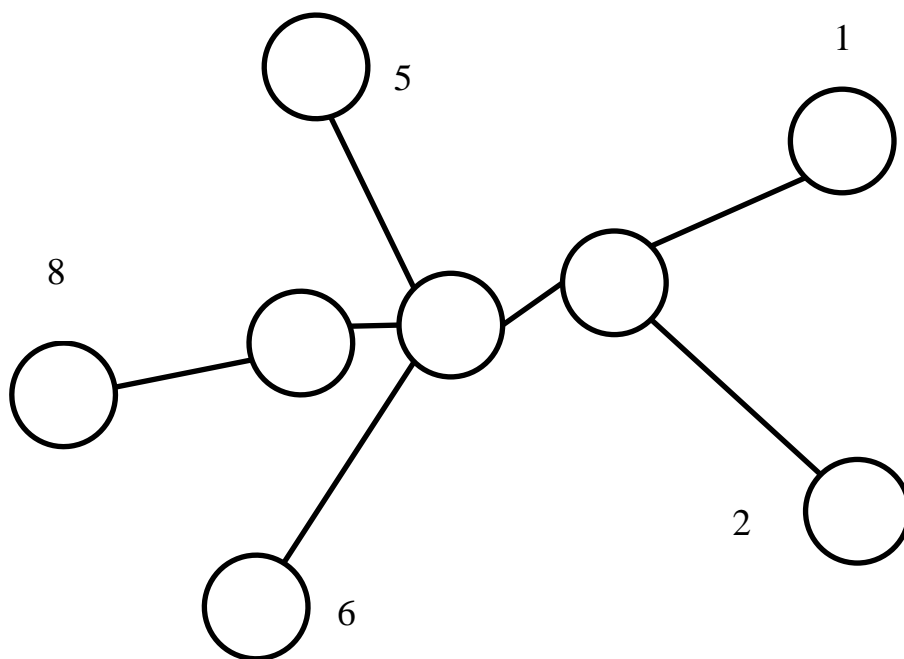


Рисунок 21

Так же для однозначного представления деревьев применяется механизм, известный как код Прюфера. Код Прюфера определяется для нумерованного графа-дерева по следующему алгоритму:

Для графа дерева  $T_{n \times n}$  пронумеруем все его вершины:  $1, 2 \dots n$ .

- найдем концевую вершину с наименьшим номером  $b_1$ .
- определим смежную ей вершину  $a_1$ .
- удалим вершину  $b_1$  из графа  $T$ , получим  $T'$

Операция повторяется пока не останется 2 связных вершины

Последовательность  $(a_1, a_2 \dots a_{n-2})$  называется кодом Прюфера. По своей природе код Прюфера определяет количество вершин дерева – количество элементов, образующих его ровно на 2 меньше мощности носителя графа. Для примера рассмотрим построение кода Прюфера по имеющемуся дереву и восстановление дерева назад:

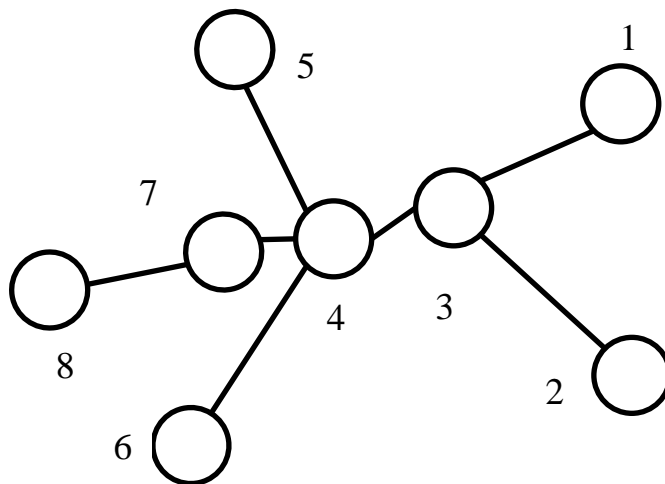


Рисунок 22

Первая концевая вершина с меньшим номером имеет номер 1, и соседствует с 3. Таким образом, первым элементом кода Прюфера является 3. Граф без вершины «1» имеет концевые вершины  $\{2, 5, 6, 8\}$ . Минимальный номер – 2, а смежная ей – 3. Так получается, что и 2 элемент кода Прюфера является 3. Дерево без вершин 1 и 2 обретает конечную вершину «3», которая сразу же становится концевой с минимальным номером, а смежная ей 4 становится 3-им элементом кода. Продолжая алгоритм получим в итоге код:  $(3, 3, 4, 4, 4, 7)$ .

Восстановление дерева по коду Прюфера продемонстрируем на полученной ранее последовательности. Из кода  $(3, 3, 4, 4, 4, 7)$  можно сделать вывод, что вершин в графе 8 – так как сам код состоит из 6 элементов. Так же из набора

чисел 1-8 в коде Прюфера представлены только 3,4 и 7 – а значит, 1,2,5,6,8 являются концевыми вершинами в дереве. По алгоритму последней является 7 и встречается она единожды – то есть выступает смежной 8 (так как являлась последней неконцевой вершиной). Затем, по коду можно понять, что с 7 смежна 4, так как только 3 и 4 являются неконцевыми, а 3 не встречается между 4 и 7 – а значит, в какой-то момент она стала концевой. Так же определяем, что у 3 вершины 2 смежных концевых – они удалялись первыми – и это вершины 1 и 2. По этому описанию можно построить следующее:

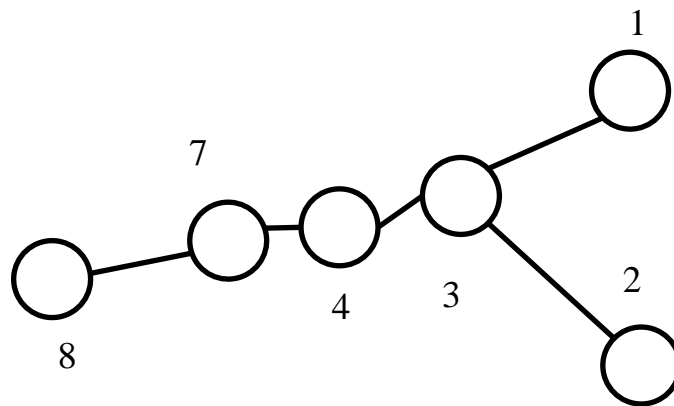


Рисунок 23

4 встречается 3 раза в коде. Первый раз – тогда, когда является смежной для концевой 3-ей вершины, а другие 2 раза – смежной для концевых 5 и 6. Таким образом, получаем восстановленное дерево:

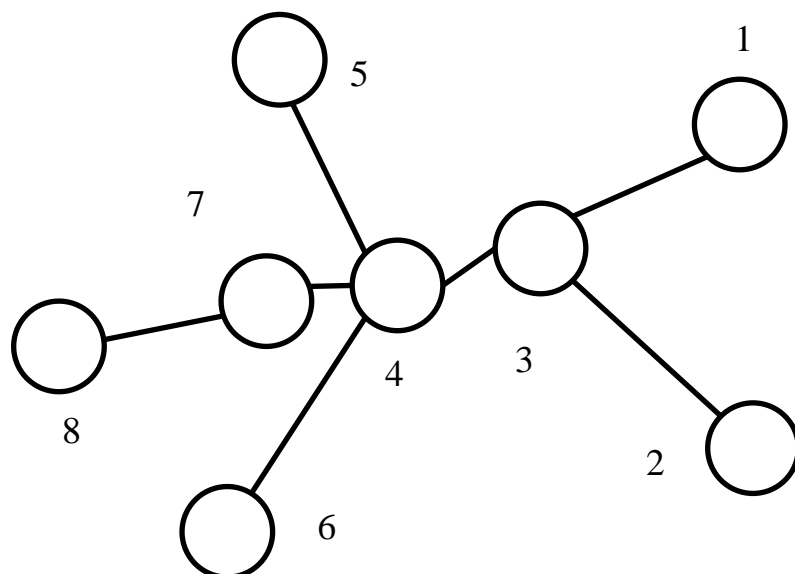


Рисунок 24

Стоит отметить, что любое дерево так же является двудольным графом. Покажем алгоритм разделения множества вершин на непересекающиеся внутри несмежные подмножества:

Возьмём произвольную концевую вершину дерева (например, 2-ую), и отнесём её к множеству  $V^-$ . Смежную ей вершину (в нашем случае – 3-ю) отнесем множеству  $V^+$ . Множество всех смежных этой вершине -  $\{1,4\}$  – относим к множеству  $V^-$ , и будем продолжать присвоение идентификаторов множеств. Таким образом, получим следующую картину:

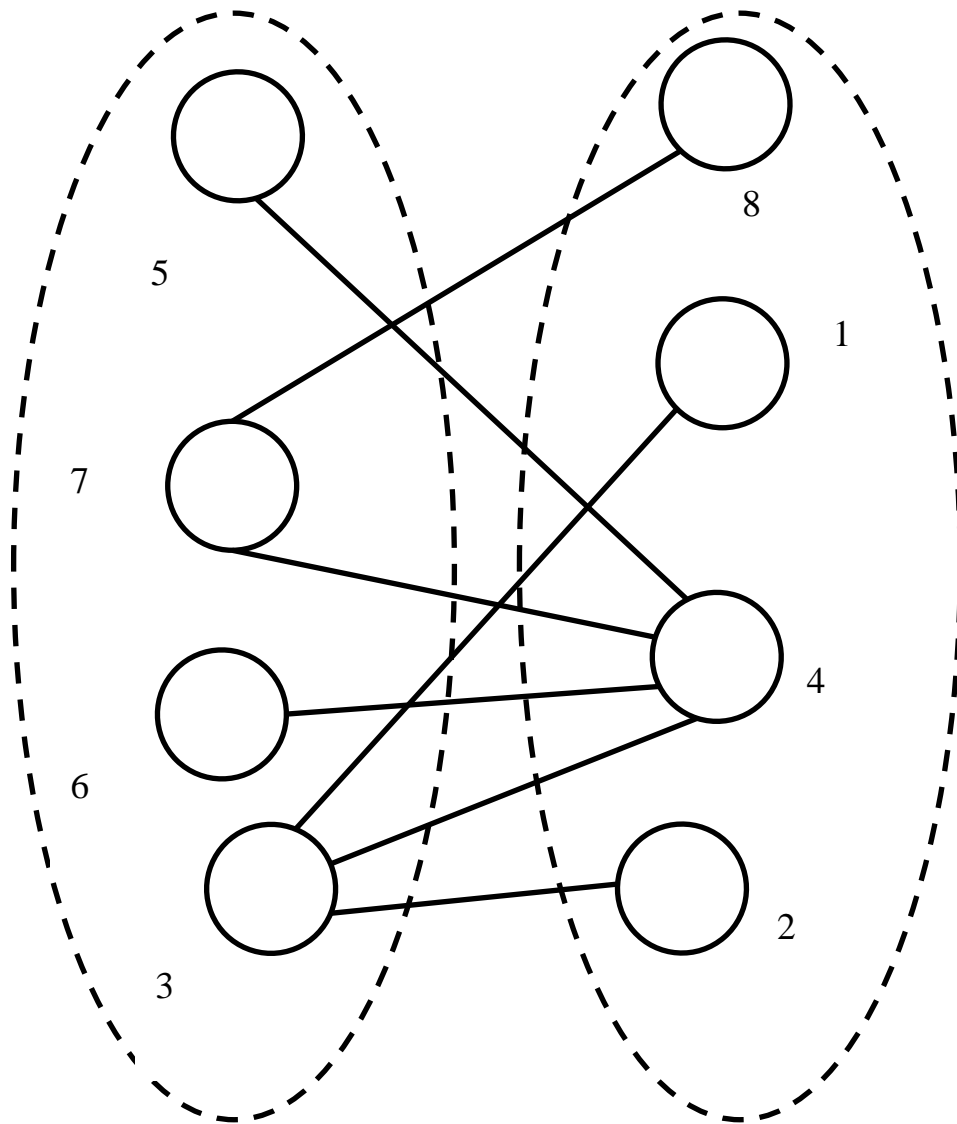


Рисунок 25

Соответственно, особенности и свойства двудольных графов так же распространяются и на деревья.

## §7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ГРАФЫ

Матрица достижимости

Тезис о достижимости вершин связанного графа: если какая-либо вершина достижима из какой либо другой вершины, то верно и обратное.

Вершина графа  $v_i$  называется достижимой из  $v_j$  – вершины того же графа, если существует по крайней мере 1 путь  $(v_i, v_j)$ . Множество вершин:

$$R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \cup \dots \cup \Gamma^p(v_i), \quad (7.1)$$

достижимых из вершины  $v_i$  есть объединение окрестностей этой вершины. Множество  $R(v_i)$  получается путем последовательного выполнения слева направо операций объединения до тех пор, пока мощность текущего множества не перестаёт возрастать при очередной операции объединения.

$$R = [r_{ij}] = \begin{cases} 1, & \text{если достижимо} \\ 0, & \text{если недостижимо} \end{cases}. \quad (7.2)$$

На примере:

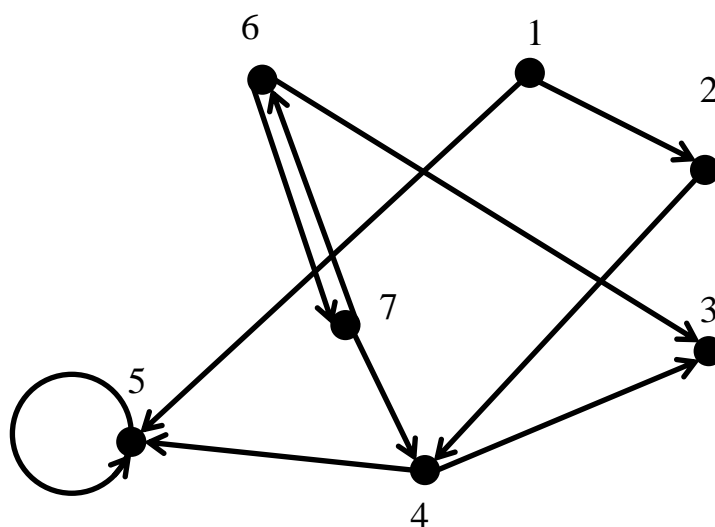


Рисунок 26

Получим матрицу:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Матрица достижимости может быть получена в результате операции логического сложения множеств:

$$E^* = E \cup E^2 \cup \dots \cup E^n, \quad (7.4)$$

где  $E^n$  – булева степень матрицы смежности.

Матрица степеней графа

Матрица определяется соответственно:

$$D_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), \\ 0 \end{cases}, \quad (7.5)$$

где  $\deg(v_i)$  – количество ребер, завершающихся в вершине  $v_i$  для случая ориентированного графа. Для неориентированного графа – просто количество вершин, смежных данной. На примере:

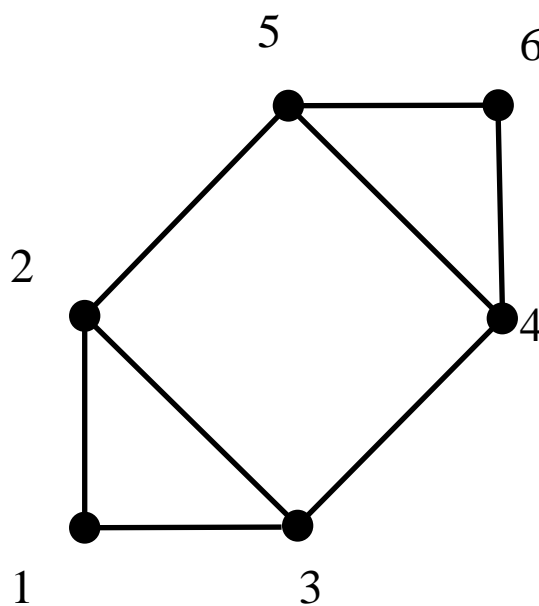


Рисунок 27

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{diag}(2,3,3,3,3,2). \quad (7.6)$$

Матрица Кирхгофа

Объект, описывающий электрические схемы. Если есть граф  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $|V| = n$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , то матрица Кирхгофа имеет следующий вид:

$$B(G) := \begin{cases} -1, (v_i; v_j) \in E \\ 0, (v_i; v_j) \notin E \\ \deg v_i, i = j \end{cases} \quad (7.7)$$

На примере:

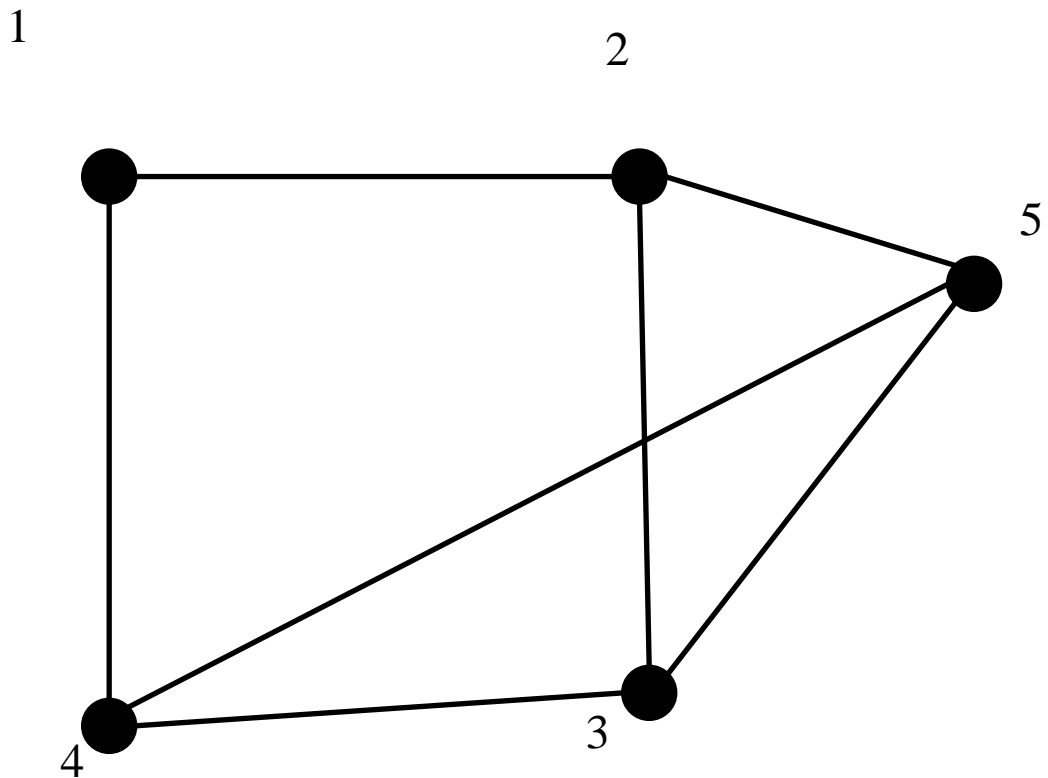


Рисунок 28



$$B(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

*Матричная теорема о деревьях (теорема Кирхгофа):*

Пусть  $G$  – связный граф с матрицей Кирхгофа  $B$ . Все алгебраические дополнения матрицы Кирхгофа равны между собой и их общее значение определяет количество остовных деревьев графа.

Для матрицы из примера алгебраическое дополнение элемента  $(1,1)$  можно рассчитать:

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 * (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1) * (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1) * (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 3(27 - 1 - 1 - (3 + 3 + 3)) + (-9 - 1 - (3 - 1)) + (-1 - 9 - (-1 + 3)) \\ &= 3 * 16 - 12 - 12 = 24. \end{aligned}$$

Таким образом, число остовов графа составляет 24.

Матрица Лапласа

Существует оператор, называемый лапласиан (оператор Лапласа). Он представляет собой сумму частных производных второго порядка определенного вида. В свою очередь матрица Лапласа имеет следующий вид:

$$L = D - A, \quad (7.9)$$

где  $L$  – матрица Лапласа,  $D$  – матрица степеней,  $A$  – матрица смежности.

На примере:

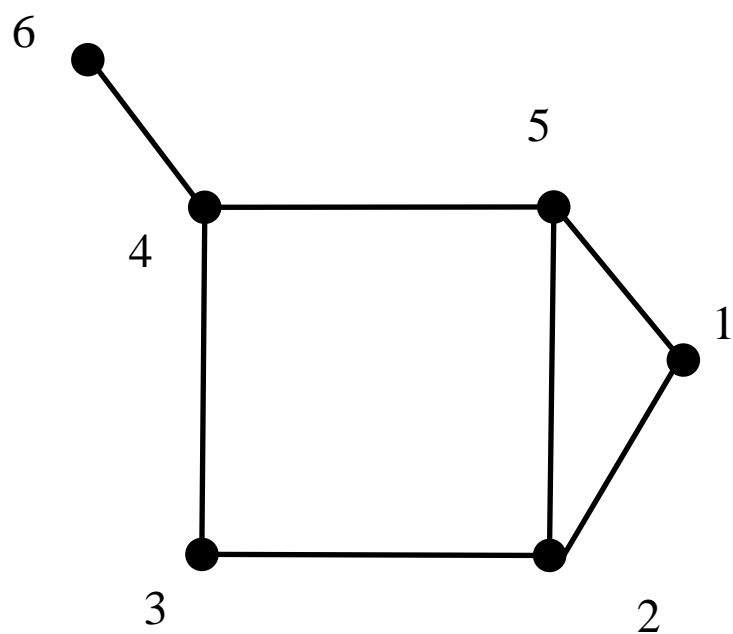


Рисунок 29

$$D = \text{diag}(2, 3, 2, 3, 3, 1),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Говорят, что матрица Кирхгофа представляет собой дискретный оператор Лапласа для графа  $G = \langle V, E \rangle$ .

## §8. ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

### Удаление ребра

Есть граф  $G = \langle V; E \rangle$  и ребро графа  $e \in E$ . Результатом операции удаления ребра является новый граф:  $\bar{G} = \langle V; E \setminus \{e\} \rangle$ .

*Теорема:*

$$\bar{G} = (G \setminus e) \setminus \bar{e} = (G \setminus \bar{e}) \setminus e. \quad (8.1)$$

Проиллюстрируем теорему:

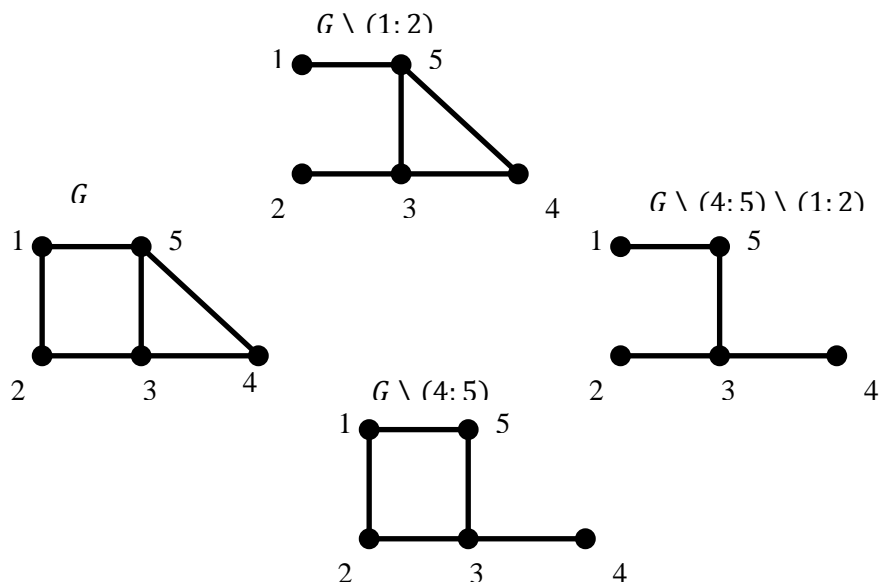


Рисунок 30

### Удаление вершины

Есть граф  $G = \langle V; E \rangle$  и вершина графа  $v \in V$ . Результатом операции удаления вершины является новый граф:  $\bar{G} = \langle V \setminus \{v\}; \bar{E} \rangle$ , где  $\bar{E}$  – множество дуг, за исключением инцидентных удаленной вершине.

*Теорема:*

$$\bar{G} = (G \ominus \bar{v}) \ominus v = (G \ominus v) \ominus \bar{v}. \quad (8.2)$$

Проиллюстрируем операцию:

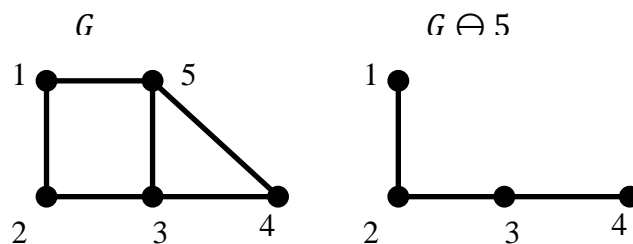


Рисунок 31

### Введение ребра

Пусть  $\{u, v\} \in E$ , тогда  $\tilde{G} = G \oplus e = \langle V, E \cup \{e\} \rangle$ .

Теорема:

$$\forall e_1, e_2 \in E \quad (G \oplus e_1) \oplus e_2 = (G \oplus e_2) \oplus e_1. \quad (8.3)$$

### Введение вершины в ребро

Есть  $(u, v)$  ребро. Добавим на него вершину  $w$ . Получим 2 ребра:  $(u, w), (w, v)$ . Непосредственно ребро  $(u, v)$  из конечного графа удаляется.

### Пересечение графов

Имеем 2 графа  $G_1 = \langle V_1; E_1 \rangle$  и  $G_2 = \langle V_2; E_2 \rangle$ . Граф, образованный пересечением множеств вершин и ребер будет результатом операции:

$$G_3 = G_1 \cap G_2 = \langle V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2 \rangle. \quad (8.4)$$

### Слияние вершин

Пусть в графе  $G$  рассматривается ребро  $(u, v)$ . Определим множества  $s(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  и  $s(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  – множества смежных вершинам  $u$  и  $v$  вершин. Граф  $H = G \setminus u \setminus v$ , полученный добавлением вершины  $w$  и множества ребер вида  $(w, u_i), i = \overline{1, k}$  и  $(w, v_j), j = \overline{1, m}$  называется графом, полученным из графа  $G$  путем слияния вершин  $u$  и  $v$ .

Пример:

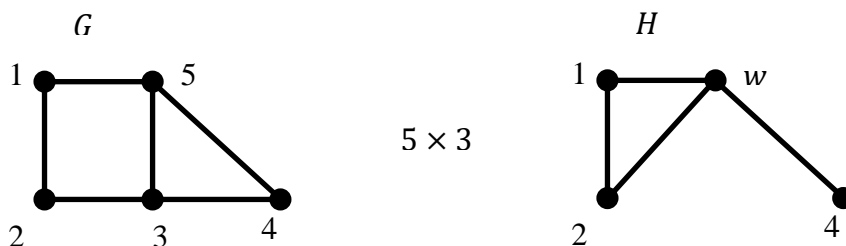


Рисунок 32

Граф  $H$  получен из графа  $G$  путем слияния вершин 5 и 3. Множества  $s(5) = \{1,3,4\}, s(3) = \{2,5,4\}$ .

#### Расщепление вершин

Возьмем некоторую вершину графа  $v$ . Множество смежных ей вершин  $s(v)$  произвольным образом разобьём на 2 класса  $A, B$ . Удалим вершину  $v$  с инцидентными ей ребрами и добавим 2 новые вершины  $v_1, v_2$  и ребро  $(v_1, v_2)$ . Вершину  $v_1$  соединим со всеми вершинами из класса  $A$ , а вершину  $v_2$  с вершинами класса  $B$ . Пример:

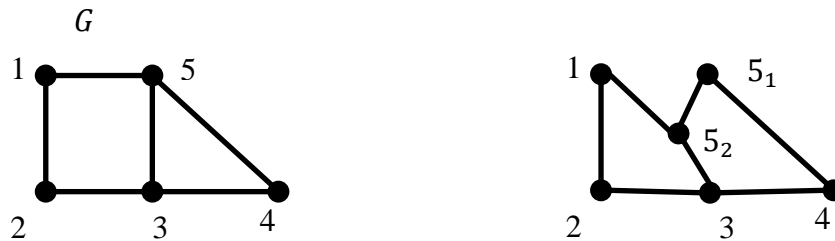


Рисунок 33

Расщепим вершину 5. Множество смежных ей вершин  $s = \{1,3,4\}$  разбиваем на 2 класса:  $A = (1,3), B = (4)$ .

#### Дополнение графа

Имеем граф  $G = \langle V; E \rangle$ . Дополнением графа будет граф  $\tilde{G}$ , в котором вершины смежны тогда и только тогда, когда они несмежны в графе  $G$ .



Рисунок 34

## §9. МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАФА, СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

*Определения:*

Цепью в неориентированном графе  $G = \langle V, U \rangle$  называется такая последовательность его рёбер  $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ , где  $\rho_i = (v_i; v_{i+1})$ , в которой каждая пара соседних элементов имеет общую вершину. В цепи существует вершина, называемая концевой, для неё выполняется  $\deg v_k = 1$ . Число рёбер цепи, соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_j$  называется длиной цепи и обозначается  $l(v_i, v_j)$ .

Циклом называется цепь, концевые вершины которой совпадают. Любая вершина  $v_i$  цикла имеет степень  $\deg(v_i) \leq 2$ .

Цепь называется составной цепью, если в ней повторяется хотя бы одно ребро; сложной цепью, если в ней повторяется хотя бы одна вершина, и простой цепью – в противном случае.

Неориентированный граф  $G$  называется связным графом, если любая пара его вершин соединена цепью.

Максимальный по включению вершин связный подграф графа  $G = \langle V, U \rangle$  называется его компонентой связности. Граф  $G$  называется несвязным графом, если он имеет более одной компоненты связности. Ясно, что граф, состоящий из двух несмежных вершин, имеет две компоненты связности и является несвязным графом.

Обговорим задачу определения числа компонент связности графа. Для этого начнем с теоремы.

Элемент матрицы  $S^n(G) = [s_{ij}]$  будет представлять собой множество цепей длиной  $n$ , соединяющих вершины  $v_i$  и  $v_j$ .

*Теорема:*

При возведении матрицы  $S(G)$  в степень умножение будем понимать, как конкатенацию (слипание) двух строк символов – присоединение второй строки символов к первой. Давайте проиллюстрируем полученное изыскание. Для этого воспользуемся графом Петерсена:

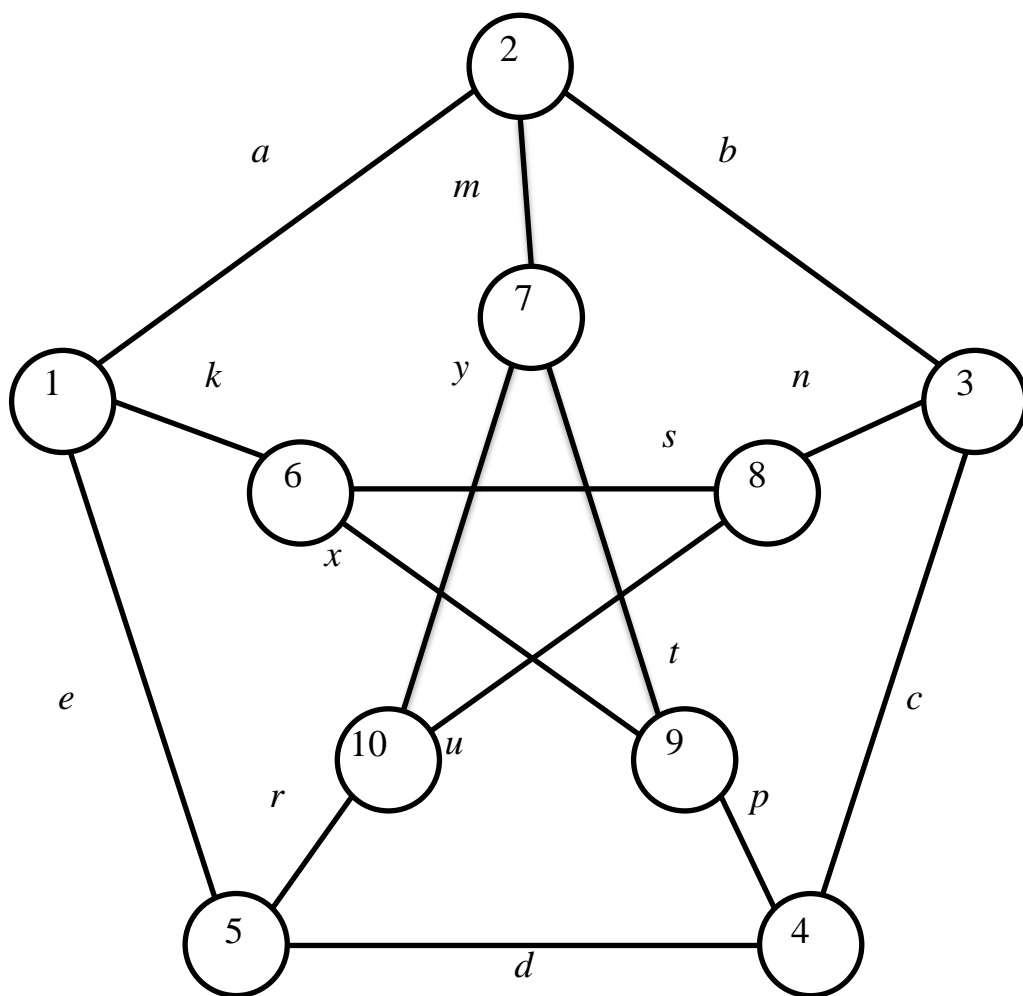


Рисунок 35

Соответствующая ему матрица смежности будет иметь следующий вид:

$S=$

|    | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1  |     | $a$ |     |     | $e$ | $k$ |     |     |     |     |
| 2  | $a$ |     | $b$ |     |     |     | $m$ |     |     |     |
| 3  |     | $b$ |     | $c$ |     |     |     | $n$ |     |     |
| 4  |     |     | $c$ |     | $d$ |     |     |     | $p$ |     |
| 5  | $e$ |     |     | $d$ |     |     |     |     |     | $r$ |
| 6  | $k$ |     |     |     |     |     |     | $s$ | $x$ |     |
| 7  |     | $m$ |     |     |     |     |     |     | $t$ | $y$ |
| 8  |     |     | $n$ |     |     | $s$ |     |     |     | $u$ |
| 9  |     |     |     | $p$ |     | $x$ | $t$ |     |     |     |
| 10 |     |     |     |     | $r$ |     | $y$ | $u$ |     |     |

Представленная матрица фактически определяет распределение ребер единичной длины. Если будем рассматривать матрицу цепей длины 2, нам нужно возвести её в квадрат.

$$S^2 =$$

|    | 1                         | 2                         | 3                         | 4                         | 5                         | 6                         | 7                         | 8                         | 9                         | 10                        |
|----|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1  | <i>aa ee</i><br><i>kk</i> |                           | <i>ab</i>                 | <i>ed</i>                 |                           |                           | <i>am</i>                 | <i>ks</i>                 | <i>kx</i>                 | <i>er</i>                 |
| 2  |                           | <i>aa bb</i><br><i>mm</i> |                           | <i>bc</i>                 | <i>ae</i>                 | <i>ak</i>                 |                           | <i>bn</i>                 | <i>mt</i>                 | <i>my</i>                 |
| 3  | <i>ba</i>                 |                           | <i>bb cc</i><br><i>nn</i> |                           | <i>cd</i>                 | <i>ns</i>                 | <i>bm</i>                 |                           | <i>cp</i>                 | <i>nu</i>                 |
| 4  | <i>de</i>                 | <i>cb</i>                 |                           | <i>cc dd</i><br><i>pp</i> |                           | <i>px</i>                 | <i>pt</i>                 | <i>cn</i>                 |                           | <i>dr</i>                 |
| 5  |                           | <i>ea</i>                 | <i>dc</i>                 |                           | <i>ee dd</i><br><i>rr</i> | <i>ek</i>                 | <i>ry</i>                 | <i>ru</i>                 | <i>dp</i>                 |                           |
| 6  |                           | <i>ka</i>                 | <i>sn</i>                 | <i>xp</i>                 | <i>ke</i>                 | <i>kk ss</i><br><i>xx</i> | <i>xt</i>                 |                           |                           | <i>su</i>                 |
| 7  | <i>ma</i>                 |                           | <i>mb</i>                 | <i>tp</i>                 | <i>yr</i>                 | <i>tx</i>                 | <i>mm tt</i><br><i>yy</i> | <i>yu</i>                 |                           |                           |
| 8  | <i>sk</i>                 | <i>nb</i>                 |                           | <i>nc</i>                 | <i>ur</i>                 |                           | <i>uy</i>                 | <i>nn ss</i><br><i>uu</i> | <i>sx</i>                 |                           |
| 9  | <i>xk</i>                 | <i>tm</i>                 | <i>pc</i>                 |                           | <i>pd</i>                 |                           |                           | <i>xs</i>                 | <i>pp</i><br><i>xx tt</i> | <i>ty</i>                 |
| 10 | <i>re</i>                 | <i>ym</i>                 | <i>un</i>                 | <i>rd</i>                 |                           | <i>us</i>                 |                           |                           | <i>yt</i>                 | <i>rr yy</i><br><i>uu</i> |

Если просуммировать матрицы  $S$  и  $S^2$ , то получится матрица, в которой отсутствуют нулевые элементы, что будет означать существование цепи длины 1 или 2 между любой парой вершин данного графа. Отсюда следует связность графа Петерсена.



|    |                           |                           |                           |                           |                           |                           |                           |                           |                           |                           |
|----|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
|    | 1                         | 2                         | 3                         | 4                         | 5                         | 6                         | 7                         | 8                         | 9                         | 10                        |
| 1  | <i>aa</i><br><i>ee kk</i> | <i>a</i>                  | <i>ab</i>                 | <i>ed</i>                 | <i>e</i>                  | <i>k</i>                  | <i>am</i>                 | <i>ks</i>                 | <i>kx</i>                 | <i>er</i>                 |
| 2  | <i>a</i>                  | <i>aa bb</i><br><i>mm</i> | <i>b</i>                  | <i>bc</i>                 | <i>ae</i>                 | <i>ak</i>                 | <i>m</i>                  | <i>bn</i>                 | <i>mt</i>                 | <i>my</i>                 |
| 3  | <i>ba</i>                 | <i>b</i>                  | <i>bb cc</i><br><i>nn</i> | <i>c</i>                  | <i>cd</i>                 | <i>ns</i>                 | <i>bm</i>                 | <i>n</i>                  | <i>cp</i>                 | <i>nu</i>                 |
| 4  | <i>de</i>                 | <i>cb</i>                 | <i>c</i>                  | <i>cc dd</i><br><i>pp</i> | <i>d</i>                  | <i>px</i>                 | <i>pt</i>                 | <i>cn</i>                 | <i>p</i>                  | <i>dr</i>                 |
| 5  | <i>e</i>                  | <i>ea</i>                 | <i>dc</i>                 | <i>d</i>                  | <i>ee dd</i><br><i>rr</i> | <i>ek</i>                 | <i>ry</i>                 | <i>ru</i>                 | <i>dp</i>                 | <i>r</i>                  |
| 6  | <i>k</i>                  | <i>ka</i>                 | <i>sn</i>                 | <i>xp</i>                 | <i>ke</i>                 | <i>kk ss</i><br><i>xx</i> | <i>xt</i>                 | <i>s</i>                  | <i>x</i>                  | <i>su</i>                 |
| 7  | <i>ma</i>                 | <i>m</i>                  | <i>mb</i>                 | <i>tp</i>                 | <i>yr</i>                 | <i>tx</i>                 | <i>mm</i><br><i>tt yy</i> | <i>yu</i>                 | <i>t</i>                  | <i>y</i>                  |
| 8  | <i>sk</i>                 | <i>nb</i>                 | <i>n</i>                  | <i>nc</i>                 | <i>ur</i>                 | <i>s</i>                  | <i>uy</i>                 | <i>nn ss</i><br><i>uu</i> | <i>sx</i>                 | <i>u</i>                  |
| 9  | <i>xk</i>                 | <i>tm</i>                 | <i>pc</i>                 | <i>p</i>                  | <i>pd</i>                 | <i>x</i>                  | <i>t</i>                  | <i>xs</i>                 | <i>pp</i><br><i>xx tt</i> | <i>ty</i>                 |
| 10 | <i>re</i>                 | <i>ym</i>                 | <i>un</i>                 | <i>rd</i>                 | <i>r</i>                  | <i>us</i>                 | <i>y</i>                  | <i>u</i>                  | <i>yt</i>                 | <i>rr yy</i><br><i>uu</i> |

$S + S^2 =$

Понятие цепи является основным при определении метрических свойств графа. Минимальная длина цепи, соединяющей вершины  $v_i, v_j$  называется расстоянием, обозначается  $r(v_i, v_j) = \min_k (l_k(v_i, v_j))$ . Максимальное расстояние называется диаметром графа  $d(G) = \max_{ij} \min_k (l_k(v_i, v_j))$ . Путем введения расстояния мы получаем метрику на графе. Можно проверить, что:  $\forall \{v_i, v_j, v_k\} \in V$ :

$$\begin{aligned}
 1) & r(v_i, v_j) = 0 \Leftrightarrow v_i = v_j, \\
 2) & r(v_i, v_j) = r(v_j, v_i), \\
 3) & r(v_i, v_j) + r(v_j, v_k) \geq r(v_i, v_k).
 \end{aligned}
 \tag{9.1}$$

Матрица  $A$  называется клеточно-диагональной или  $k$ -клеточной, если на ее главной диагонали находятся подматрицы, не равные 0:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

*Теорема:*

Граф  $G = \langle U, V \rangle$  состоит из  $k$  связанных компонент связности тогда и только тогда, когда матрица достижимости этого графа есть сумма  $i$ -ых степеней матрицы смежности от 1 до  $d(G)$ :

$$A_k \ni D(G) = \sum_{i=1}^{d(G)} [S(G)]^i. \quad (9.3)$$

Регулярный граф, Эйлеров граф, Гамильтонов граф

Цикл называется эйлеровым, если каждое ребро графа участвует в его образовании строго 1 раз. Граф, содержащий такого рода циклы, называется аналогично – эйлеровым графом.

*Теорема: Критерий кратности циклических графов*

Граф  $G = \langle V, U \rangle \in \mathbb{C}$  (является Эйлеровым) тогда и только тогда, когда он связан и степень любой вершины – четное число.

Простой цикл называется гамильтоновым, если он проходит через каждую вершину графа. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым.

*Теорема Дирака:*

Есть связный граф, состоящий более чем из 3 вершин, и степень каждой вершины отвечает неравенству:

$$\deg(v_i) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \text{Cap}(V) \right\rfloor. \quad (9.4)$$

Квадратные скобки обозначают «ближайшее целое число».

Граф, состоящий из единственной вершины, называется тривиальным. Удаление вершины из нетривиального графа приводит к подграфу, в котором так же должны быть удалены все ребра, инцидентные удаленной вершине.

*Определение:*

Минимальной степенью вершины графа называется вершина, имеющая минимальную степень в этом графе:  $\delta(G) = \min(\deg(v_i))$ .

Если все вершины имеют одинаковую степень, то граф называется регулярным. Граф Петерсена – регулярный, степень его равна 3.

*Определение:*

Связностью графа  $X(G)$  называется минимальное число вершин, удаление которых делает граф несвязным. Можно сказать, что  $\forall G: X(G) \geq 0$ .

*Следствие:*

Для полного графа  $K_n$  связность равна  $X(K_n) = n - 1$ .

Если  $X(G) = n$ , то граф  $G$  называется  $n$ -связным.

*Определение:*

Реберной связностью  $\lambda(G)$  называется минимальное число ребер, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Для тривиального графа  $\lambda(G) = 0$ .

Все эти числа соотносятся как:

$$X(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G). \quad (9.5)$$

Среди всех графов с  $n$  вершинами,  $m$  ребер,  $X(G)$  равна 0, если  $m < n - 1$ , если  $m \geq n - 1 \Rightarrow X(G) = \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$ .

Две цепи называются реберно не пересекающимися, если у них отсутствуют общие ребра. Если у них нет общих вершин, то они вершинно не пересекающимися.

Пусть  $G = \langle V, U \rangle$  – связный,  $\{u, v\} \in V: v \neq u$ . Множество ребер графа  $E \subset U$  называется  $uv$ -разделяющим множеством графа  $G$ , если любая простая цепь и в  $v$  и в  $u$  содержит ребро из  $E$ . Если некоторое  $uv$  разделяющее множество  $E$  содержит  $k$  ребер, то число реберно не пересекающихся простых цепей из  $uv$  не может превышать  $k$ . Если  $uv$  разделяющее множество имеет наименьшую мощность, то число ребер непересекающихся простых цепей –  $k$ .

## §10. РАЗРЕЗЫ НА ГРАФАХ

Ранее мы рассматривали теорему Дирака, признак гамильтонова графа, простые цепи, дали определение рёберно непересекающихся графов - «никакие два из них не имеют общего ребра», и если же у таких цепей нет и общих вершин, то дали определение вершин непересекающихся графов. Это всё шло в рамках обсуждения сильной связности графов. Далее говорили о связном графе:  $G = \langle V, U \rangle$ .

Если в множестве вершин  $V$  можем выделить два подмножества, такие, что каждые две вершины в множестве рёбер образует простую цепь между этими двумя вершинами, то мы давали определение  $V$ -разделяющих множеств. Если некоторое  $V$ -разделяющее множество содержит  $k$  рёбер, то число рёберно непересекающихся простых цепей из этих множеств не может быть более мощности  $V$ -разделяющего множества  $k$ , поскольку иначе число рёбер из этого  $V$ -разделяющего множества должно принадлежать более чем одной простой цепи.

*Заметка:*

Если  $UV$ -разделяющее множество имеет наименьшую мощность, то число рёбер непересекающихся простых цепей между  $U$  и  $V$  равно  $k$ .

Приведём цикл теорем, определяющих зависимость связности графа от числа непересекающихся цепей:

*Теорема:*

Максимальное число рёберно непересекающихся простых цепей, соединяющих две различные вершины  $UV$ -связного графа, равно минимальному числу рёбер в  $UV$ -разделяющем множестве.

*Теорема:*

Максимальное число вершинно непересекающихся простых цепей, соединяющих две различные несмежные вершины  $UV$ -графа  $G$ , равно минимальному числу вершин в  $UV$ -разделяющем множестве.

*Теорема:*

Граф  $G$   $n$ -связен (т.е.  $X(G) = n$  - наименьшее число вершин, удаление которых делает граф тривиальным) тогда и только тогда, когда если две его вершины соединены, по крайней мере, при помощи  $n$  вершинно непересекающихся цепей.

*Теорема:*

Граф  $n$ -рёберно связан тогда и только тогда, когда две его вершины соединены хотя бы  $n$  рёберно непересекающимися цепями.

*Теорема Менгера:*

Для любых двух множеств вершин  $V_\alpha, V_\beta$  таких, что  $\{V_\alpha, V_\beta\} = \emptyset$  и  $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ , наибольшее число непересекающихся цепей, соединяющих  $V_\alpha$  и  $V_\beta$ , равно наименьшему числу вершин, отделяющих  $V_\alpha$  от  $V_\beta$ . (Разделяющим множеством связного графа  $G$  является такое множество его рёбер, удаление которых из  $G$  делает этот граф несвязным).

Дан следующий граф:

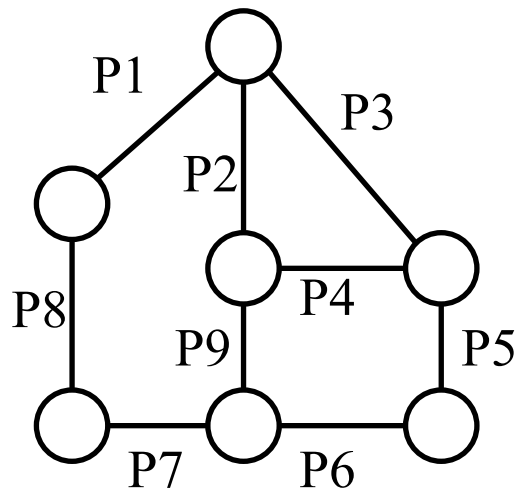


Рисунок 36

Множество рёбер  $\{p_3, p_5, p_7, p_9\}$  являются разделяющим множеством этого графа.

Применение такого сечения позволяет выделить в этом графе две компоненты связности:

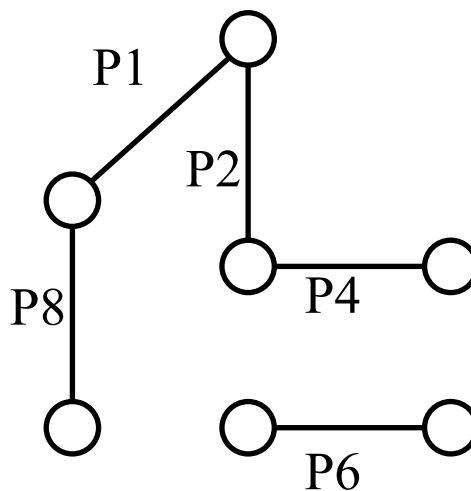


Рисунок 37

Конечно же, это не единственное разделяющее множество, но стоит оговориться, что для финитного графа их и не бесконечно много.

Разрезом называется такое разделяющее множество, которое не имеет собственного разделяющего подмножества.

Пример: множество  $\{p_3, p_5, p_7, p_9\}$  только что рассмотренного графа не является разрезом, ибо оно содержит в себе разделяющее подмножество  $\{p_3, p_5, p_7\}$ . А вот подмножество  $\{p_3, p_5, p_7\}$  не имеет в себе разделяющих подмножеств и является разрезом.

Разрез, состоящий из одного ребра, называется мостом. Иногда разрез графа называется коциклом. Пример моста, или же коцикла (ребро  $p$ ):

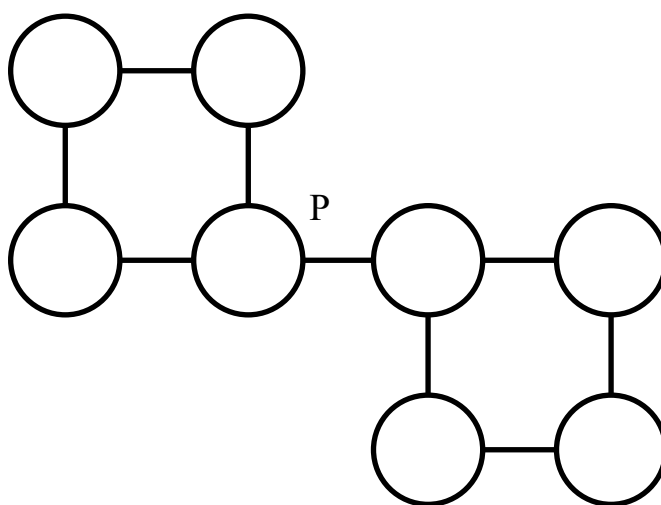


Рисунок 38

Рассмотрим ориентированный граф и его свойство быть сильносвязанным.

Последовательность дуг  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  вида  $\delta_i = (v_i, v_{i+1}), i = \overline{1, n}$  будет называться путём. Степень вершины  $\deg V_i = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$  (1 степень вершины для концевых и начальных вершин пути, 2 – для промежуточных). Вершине  $v_1$  коинцидентна начальная дуга  $\delta_1$ , вершине  $v_n$  коинцидентна дуга  $\delta_n$ . Число дуг, образующих путь, называется длина пути.

Контуром называется путь, у которого концевые вершины совпадают. Все вершины контура имеют степень  $\geq 2$  (возможно появление подконтуров, которые не будут противоречить данному определению).

Путь называется составным, если в нём повторяется хотя бы одна дуга; сложным, если повторяется хотя бы одна вершина; и простым в противоположных случаях.

Примеры сложных путей:

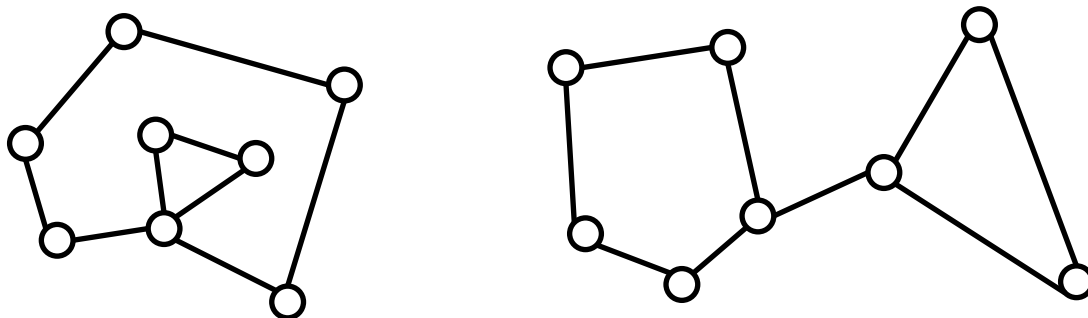


Рисунок 39

Граф  $G = \langle V, U \rangle$  называется сильносвязным, если любая пара его вершин соединена путём. Максимальным по включению вершин сильносвязным подграфом графа называют компонентой сильной связности этого графа.

Граф называется несильносвязным, если число компонент сильной связности превышает 1.

Рассмотрим алгоритм определения сильносвязности графа и числа его компонент сильносвязности. Этот алгоритм, так же, как и алгоритм определения связности графа и числа компонент связности, рассмотрим для случая неориентированного графа с использованием 5 основным теорем, рассмотренных в начале главы.

Определим сильносвязность орграфа Петерсена, заданного матрицей смежности:

$$S(G) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & u & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.1)$$

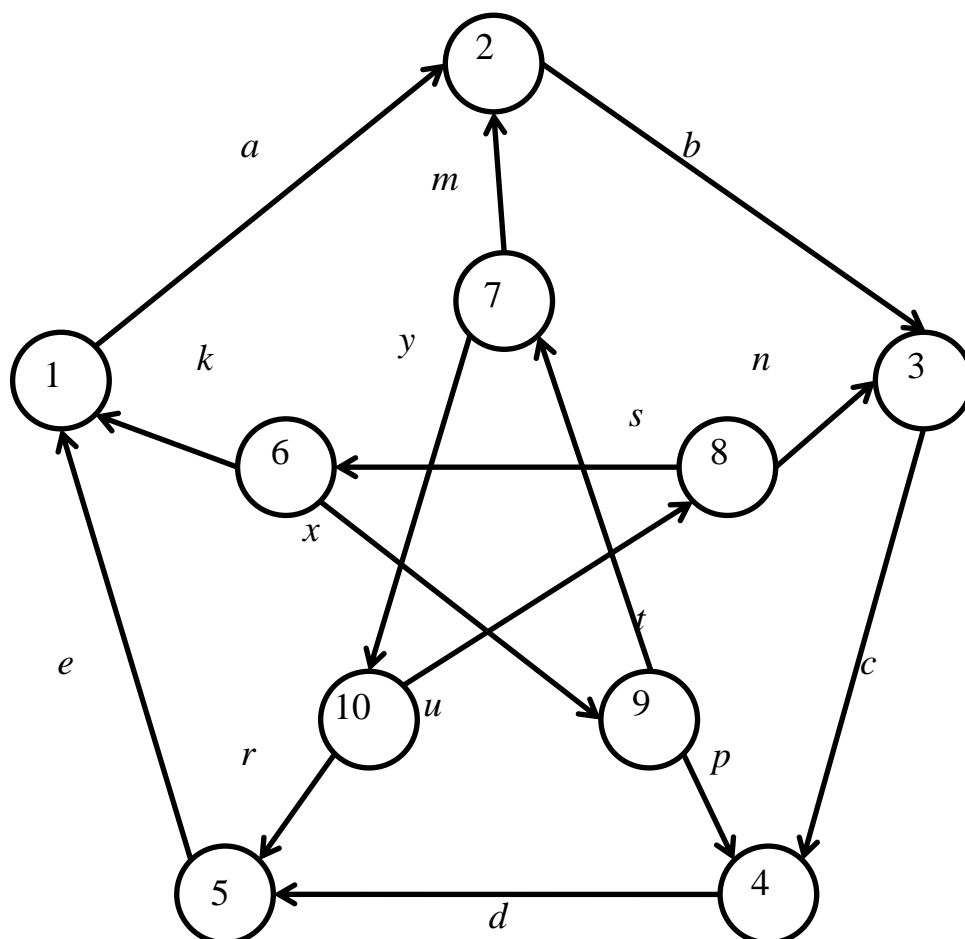


Рисунок 40

Максимальная степень, в которую необходимо возвести матрицу смежности графа  $S(G)$  для определения компонент сильносвязности на основании теоремы о виде матрицы достижимости равна диаметру этого графа:

$$d(G) = \max_{ij} \min_k l_k(v_i, v_j). \quad (10.2)$$

где  $l_k(v_i, v_j)$  - длина пути от вершины  $i$  до вершины  $j$ , в рассматриваемом графе Петерсена  $d(P_{10}) = 5$ .

Матрица достижимости графа  $D(G) = \sum_{i=1}^{d(P_{10})} [S(G)]^i$

$$D_{P_{10}}(G) = \sum_{i=1}^5 S(G)^i = S + S^2 + S^3 + S^4 + S^5. \quad (10.3)$$

Для орграфа Петерсена матрица достижимости приобретает вид:



|   |   |   |   |   |              |              |              |              |              |
|---|---|---|---|---|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <i>abcde</i>                              | <i>a</i>                                  | <i>ab</i>                                 | <i>abc</i>                                | <i>abcd</i>                               | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <i>bcde</i>                               | <i>bcdea</i>                              | <i>b</i>                                  | <i>bc</i>                                 | <i>bcd</i>                                | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <i>cde</i>                                | <i>cdea</i>                               | <i>cdeab</i>                              | <i>c</i>                                  | <i>cd</i>                                 | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <i>de</i>                                 | <i>dea</i>                                | <i>deab</i>                               | <i>deabc</i>                              | <i>d</i>                                  | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <i>e</i>                                  | <i>ea</i>                                 | <i>eab</i>                                | <i>eabc</i>                               | <i>eabcd</i>                              | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <i>k</i><br><i>xpde</i><br><i>xtyre</i>   | <i>ka</i><br><i>xtm</i><br><i>xpdea</i>   | <i>kab</i><br><i>xtmb</i><br><i>xtyun</i> | <i>xp</i><br><i>kabc</i><br><i>xtmbc</i>  | <i>xpd</i><br><i>xtyr</i><br><i>kabcd</i> | <i>xtyus</i> | <i>xt</i>    | <i>xtyu</i>  | <i>x</i>     | <i>xty</i>   |
| <i>yre</i><br><i>yusk</i><br><i>mbcde</i> | <i>m</i><br><i>yrea</i><br><i>yuska</i>   | <i>mb</i><br><i>yun</i><br><i>yreab</i>   | <i>mbc</i><br><i>yunc</i><br><i>yusxp</i> | <i>yr</i><br><i>mbcd</i><br><i>yuncd</i>  | <i>yus</i>   | <i>yusxt</i> | <i>yu</i>    | <i>yusx</i>  | <i>y</i>     |
| <i>sk</i><br><i>ncde</i><br><i>sxpde</i>  | <i>ska</i><br><i>sxtm</i><br><i>ncdea</i> | <i>n</i><br><i>skab</i><br><i>sxtmb</i>   | <i>nc</i><br><i>sxp</i><br><i>skab</i>    | <i>ncd</i><br><i>sxpd</i><br><i>sxtyr</i> | <i>s</i>     | <i>sxt</i>   | <i>sxtyu</i> | <i>sx</i>    | <i>sxty</i>  |
| <i>pde</i><br><i>tyre</i><br><i>tyusk</i> | <i>tm</i><br><i>pdea</i><br><i>tyrea</i>  | <i>tmb</i><br><i>tyun</i><br><i>pdeab</i> | <i>p</i><br><i>tmbc</i><br><i>tyunc</i>   | <i>pd</i><br><i>tyr</i><br><i>tmbcd</i>   | <i>tyus</i>  | <i>t</i>     | <i>tyu</i>   | <i>tyusx</i> | <i>ty</i>    |
| <i>re</i><br><i>usk</i><br><i>uncde</i>   | <i>rea</i><br><i>uska</i><br><i>usxtm</i> | <i>un</i><br><i>reab</i><br><i>uskab</i>  | <i>unc</i><br><i>usxp</i><br><i>reabc</i> | <i>r</i><br><i>uncd</i><br><i>usxpd</i>   | <i>us</i>    | <i>usxt</i>  | <i>u</i>     | <i>usx</i>   | <i>usxty</i> |

$D(G) =$

Компонента связности в матрице достижимости соответствует подмножеству матрицы максимального размера, каждый элемент из которого не равен нулю. Элементы, показывающие связь между этими подмножествами, могут быть не равны нулю. В данном примере имеются две компоненты связности с соответствующими носителями:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  и  $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ .

## §11. ЦИКЛОМАТИКА И КОЦИКЛОМАТИКА

Для исследования циклов в графе используют цикломатическую цу:  $G = \langle V, U \rangle, C(G) = [c_{ij}]$ . Каждому циклу графа взаимно однозначно соответствует вектор-строка матрицы  $C(G)$ ; каждый элемент этой строки определяется как:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } j \in i - \text{ый цикл} \\ 0, & \text{если ребро } j \notin i - \text{ый цикл} \end{cases} \quad (11.1)$$

Матрица  $C(G)$  всех векторов, каждый из которых соответствует одному циклу графа  $G$ , образует векторное пространство, называемое пространством циклов графа  $G$ . При этом все необходимые требования векторного пространства соблюдаются:

1.  $\forall R_i, R_j \in C(G), R_i \cap R_j \neq \emptyset \exists (R_i \oplus R_j) \in C(G)$ . Символ  $\oplus$  - операция «сложение по модулю 2».
2. Это сложение является коммутативным:  $R_i \oplus R_j = R_j \oplus R_i$ .
3. Имеет место ассоциативность  $(R_i \oplus R_j) \oplus R_k = R_i \oplus (R_j \oplus R_k)$ .

Базисом пространства циклов называется всякая система линейно независимых векторов, порождающая данное пространство. Всякий элемент пространства циклов единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов базиса пространства циклов. Если пространство имеет базис из  $n$  векторов, то оно называется  $n$ -мерным пространством.

Вектор  $R$  зависит от линейной комбинации циклов  $R_i$  и имеет вид:  $R = \sum_{i=1}^n R_i$

Рассмотрим на примере матрицу циклов для представленного графа:

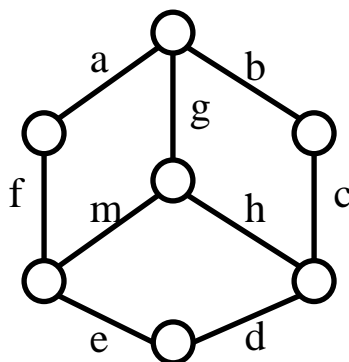


Рисунок 41

$$C(G) = \begin{array}{c|cccccccc} & a & b & c & d & e & f & m & g & h \\ \hline R_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ R_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ R_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ R_4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ R_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ R_6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ R_7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \quad (11.2)$$

В качестве базиса циклов можно взять множество циклов  $\{R_1, R_2, R_3\}$ . Можно убедиться в том, что все остальные циклы выражаются их линейными комбинациями:

$$\begin{aligned} R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 &= R_4, \\ R_1 \oplus R_2 &= R_5, \\ R_1 \oplus R_3 &= R_7, \\ R_2 \oplus R_3 &= R_6. \end{aligned} \quad (11.3)$$

*Определения:*

Остовной подграф графа – это подграф, содержащий все вершины графа.

Остовом называется остовный подграф, являющийся деревом.

Хордой остова  $D$  в связном графе  $G$  называется всякое ребро графа, не принадлежащее  $D$ . Любой подграф, который состоит из хорды и остова, имеет точно один цикл.

Цикломатическое число  $\nu(G)$  графа  $G$  равно числу хорд любого остова графа  $G$ . Если связный граф  $G$  имеет  $n$  вершин и  $m$  ребер, то его цикломатическое число равно:

$$\nu(G) = m - n + 1. \quad (11.4)$$

Если граф  $G$  содержит  $k$  компонент связности,  $n$  вершин и  $m$  ребер, то

$$\nu(G) = m - n + k. \quad (11.5)$$

Цикломатическое число несвязного графа  $G$  с  $k$  компонентами связности  $G_i, i = 1, 2, \dots, k$  может быть определено и как сумма цикломатических чисел его компонент связности:

$$\nu(G) = \sum \nu(G_i). \quad (11.6)$$

Цикломатическое число определяет меру связности графа.

Коциклический ранг (ранг разреза) – это число ребер в его остовном лесе:  
 $\beta(G) = n - k$ .

*Теорема Эйлера:*

Число базисных циклов графа постоянно и равно его цикломатическому числу.

Базисной системой циклов для данного остовного леса  $D$  графа  $G$  определяется как множество всех циклов графа  $G$ , каждый из которых содержит только одну хорду остова  $D$ . Такая система образует базис в пространстве циклов. В рассматриваемом примере множество циклов  $\{R_1, R_2, R_3\}$  является базисом циклов графа  $G$  относительно остова  $D$ .

$$C_6(G) = \begin{array}{cccccccc|c} c & m & d & a & b & e & f & g & h & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & R_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & R_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & R_3 \end{array} \quad (11.7)$$

Хорды
Остов  $D$

Цикломатическая матрица, представляющая базис циклов графа  $G$ , называется базисной цикломатической матрицей  $C_6(G)$ .

Выполнив  $(2^\nu - \nu - 1)$  раз операцию  $\oplus$  над базисными циклами, можно получить все множество циклов этого пространства.

*Теорема:*

Вторая и первая матрицы линейной инцидентности линейного графа  $G$  связаны операцией матричного умножения:

$$C(G) \times A(G) = 0 \{2\}. \quad (11.8)$$

Доказательство. Если вершина  $v_j$  входит в цикл  $C_i$ , то точно два ребра  $U_{k1}$  и  $U_{k2}$  инцидентные этой вершине включены в  $C_i$ . Запишем базисную систему разрезов для графа  $G$  и остовного дерева  $D$  из первого примера. Получаем:

$$\{a, m, d\}, \{b, c\}, \{e, d\}, \{g, m, c, d\}, \{d, h, c\}, \{f, m, d\}. \quad (11.9)$$

Удаляется ребро остова  $D$ , множество вершин при этом распадается на два непересекающихся подмножества  $V_1$  и  $V_2$ . Множество всех ребер в  $G$ , каждое из которых соединяет вершину из  $V_1$  с вершиной из  $V_2$ , является разрезом графа  $G$ . Множество всех разрезов для каждого ребра остова  $D$  является базисной системой разрезов для данного остова  $D$ .

Получаем базисную систему разрезов, которая образует базис в пространстве коциклов. Эта система может быть записана в виде соответствующей базисной коцикломатической матрицы:

$$K_6(G) = \begin{array}{ccccccccc} a & b & e & g & h & f & m & c & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (11.10)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}$  Остов
 $\underbrace{\hspace{15em}}$  Хорды

Выполняя  $2^k - k - 1$  раз операцию сложения по модулю два над коциклами, порождает все множество коциклов (разрезов) графа.

*Терема:*

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют четную длину (четны).

В двудольном графе не обязательно каждая вершина из  $V_1$  соединена с каждой вершиной из  $V_2$ , но если это так, то граф называется полным двудольным графом и обозначается  $K_{m,n}$ , где  $m$  — число вершин  $V_1$ , а  $n$  — число вершин  $V_2$ .

Граф  $K_{m,n}$  имеет  $m + n$  вершин и  $m \times n$  ребер. Полный двудольный граф  $K_{1,n}$  называется звездным графом (звездой) и является деревом.

Сети

Сетью называется ориентированный граф  $G = \langle V, U \rangle$ , в котором выделены два множества полюсных вершин  $V^+$  и  $V^-$  таких, что из каждой вершины  $v_i^+ \in V^+$  дуги только исходят, соответствуют вершины  $v_i^- \in V^-$  — дуги только входят, и каждая вершина  $v_i \in V \setminus (V^+ \cup V^-)$  коинцидентна как входящим, так и исходящим дугам.

## §12. ПРОИЗВОДНАЯ НА ГРАФЕ

Введем понятие производной на графах. Имеем граф  $G = \langle V, U \rangle$ , например следующего вида:

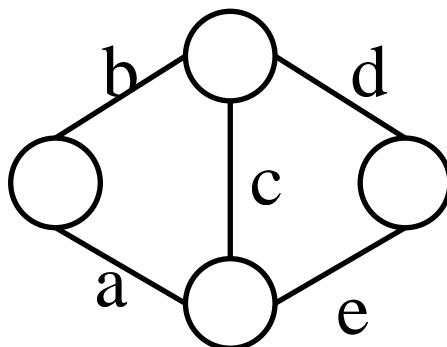


Рисунок 42

Пусть, нас будет интересовать частота участия ребер в образовании всевозможных остовов данного графа. Всего у данного графа имеется 8 остовов:

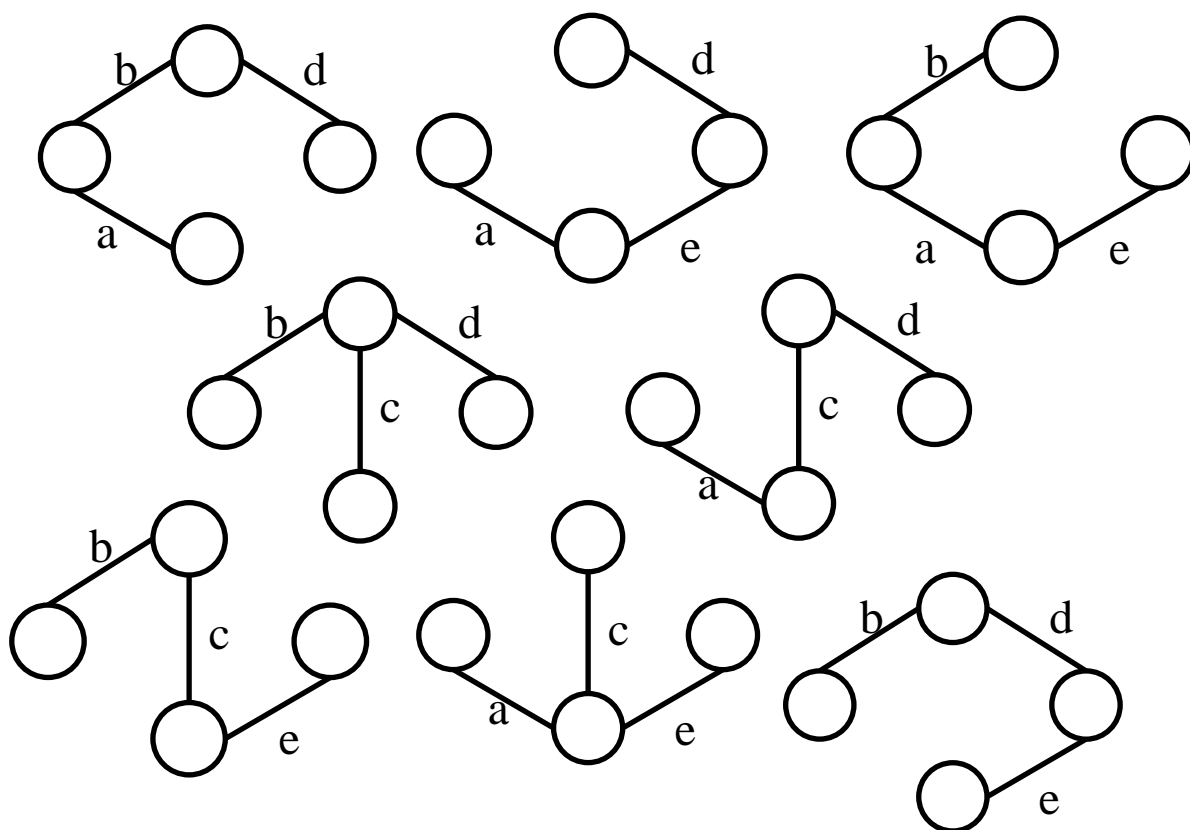


Рисунок 43

Искомую частоту можно характеризовать, например числом вхождений каждого ребра в эти остовы. Например, ребро  $a$  участвует в формировании 5 остовов, а ребро  $C$  – 4 и так далее. Частота ребра будет характеризоваться более полно, если на ряду с указанными выше числами, выписать числа, каждое из которых равно числу остовов, в которых содержится два фиксированных ребра. Например, ребро  $a$  и  $b$  содержится в двух остовах.

Еще более точно искомая частота произвольно взятой пары  $p_i$  и  $p_j$  определяют соотношением числа остовов, которые содержат ребро одно из них, но не оба одновременно.

$$\frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}}, \quad (12.1)$$

где  $f_i$  – количество остовов графа, содержащих ребро  $p_i \forall i$ .

Это состояние характеризует степень неравномерности участия пар в образовании остовов графа. В дальнейшем будет рассматриваться только процесс – событие ( $S$ ), происходящее при выполнении определенных условий. Для рассмотрения описанной формулой частотной характеристики событием явилось образование множества ребер остовов графа  $G$ , а условие – вхождение ребер графа в это множество.

Каждое событие определяет некоторую двухмерную двоичную матрицу, каждому столбцу которой, соответствует условие, входящее в событие. В каждой строке условие, при котором событие истинно.

$$Q = [q_{ij}]_{m \times n} : q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если условие } j \text{ входит в событие } i \\ 0 & \text{– в противном случае} \end{cases}. \quad (12.2)$$

Каждое событие определяет модель инцидентности, которой является матрица  $Q$ . То есть условия входящие в событие являются буквами модели. Совокупность условий, при которых событие истинно является словами модели. Интенсивность участия букв в словах будем характеризовать с помощью частот их вхождений. Для этого введем частотную матрицу отношений.

$$F = [f_{ij}]_{n \times n}. \quad (12.3)$$

Выпишем матрицу инцидентности для модели  $\Psi$ :

$$Q(\Psi) = [q_{ij}]_{n \times m}. \quad (12.4)$$

Частотной матрицей отношений для модели  $\Psi$  называется матрица, каждой строке которой взаимно-однозначно соответствует буква и элемент  $f_{ij}$  равен числу слов, в которые входят буква  $i$  и буква  $j$ , если  $i \neq j$ ,  $f_{ij}$  носит название взаимной частоты. Если  $i = j$ , то соответствует числу слов, в которые входит буква  $i$ , и  $f_{ii}$  называется собственной частотой буквы. Из определения можно вынести следствие, что матрица будет симметрична. Так же из данного определения следует, что собственная частота не может быть меньше взаимной частоты буквы с другими буквами.

Можно показать, что частотная матрица отношений  $F$ , характеризующая модель, а также матрица инцидентности удовлетворяет следующему важному соотношению:

$$Q^T \times Q = F. \quad (12.5)$$

Определим степень участия компонент графа  $G$  в наперед заданном событии  $S$ , или, другими словами, степень неоднородности компонент графа относительно события  $S$ . Подобного вида неоднородность характеризуется производной от графа  $G$  по событию  $S$ . Такой производной является неориентированный взвешенный граф, носитель которого совпадает с носителем модели, определяемым этим событием, и пара вершин  $v_i, v_j$  взвешенные относительно частот совместных и собственных  $(f_i - f_{ij}) + (f_j - f_{ij})$  относительно к  $f_{ij}$ .

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \langle V, (U, \Gamma) \rangle : \frac{\partial G}{\partial S}(v_i, v_j) = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}}. \quad (12.6)$$

Данное отношение имеет три дополнительных свойства:

$$\begin{aligned} 1) (v_i, v_j) \notin U &\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial S} = \infty, \\ 2) (v_i, v_j) \notin U &\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial S} - fin \text{ (конечно),} \\ 3) v_i = v_j &\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial S} = 0. \end{aligned} \quad (12.7)$$



Данные свойства определяют значение производной графа на его ребре. Рассмотрим используемый ранее граф. Возьмем событие  $S$  – образование ребер остова графа  $G$ . Найдём производную от приведенного графа по событию, которая будет характеризовать интенсивность участия ребер в образовании остовов графа.

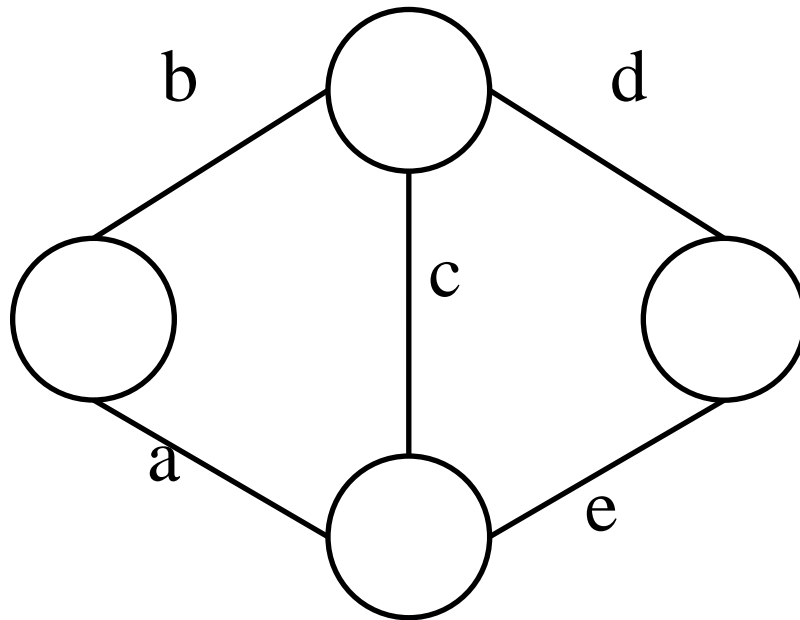


Рисунок 44

Изучим его матрицу инцидентности.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a & b & c & d & e \\ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array}. \quad (12.8)$$

В данной матрице каждому столбцу взаимно-однозначно соответствует ребро графа – условие, входящее в событие. Каждой строке соответствует ребро, образующее остов графа. Граф имеет 8 остовов. Получаем частотную матрицу.

$$F = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}. \quad (12.9)$$

Элементы данной частотной матрицы определяют производные графа по событию  $S$ , и представляют собой граф, носителем которого являются  $\{a, b, c, d, e\}$ . Две вершины смежны, если значение производной на дуге, образуемой этими вершинами, не будет равно 0 или  $\infty$ .

Вычисляем значение производной на ребрах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial S}(a, b) &= \frac{f_a - 2f_{ab} + f_b}{f_{ab}} = \frac{5 - 2 \times 2 + 5}{2} = 3, \\ \frac{\partial G}{\partial S}(a, c) &= \frac{f_a - 2f_{ac} + f_c}{f_{ac}} = \frac{5 - 2 \times 2 + 4}{2} = \frac{5}{2}, \\ \frac{\partial G}{\partial S}(a, d) &= \frac{f_a - 2f_{ad} + f_d}{f_{ad}} = \frac{5 - 2 \times 3 + 5}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

И так далее. Получаем  $K_5$ :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5/2 & 4/3 & 4/3 \\ 3 & 0 & 5/2 & 4/3 & 4/3 \\ 5/2 & 5/2 & 0 & 5/2 & 5/2 \\ 4/3 & 4/3 & 5/2 & 0 & 3 \\ 4/3 & 4/3 & 5/2 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.11)$$

Производные высших порядков на графе

Ясно, что подобного рода подход может быть и является частным случаем более общего подхода.

Рассмотрим граф  $G = \langle V, U \rangle$ , на котором задано событие  $S$ . Пусть это событие будет «образование рёбер базисного цикла относительно остова  $G'$  графа  $G$ ». Вычислим производную графа  $G$  по данному событию  $S$ .

Граф  $G$  следующего вида:

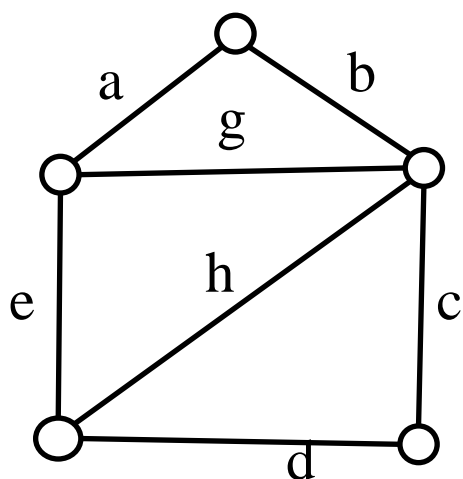


Рисунок 45

Его остов:

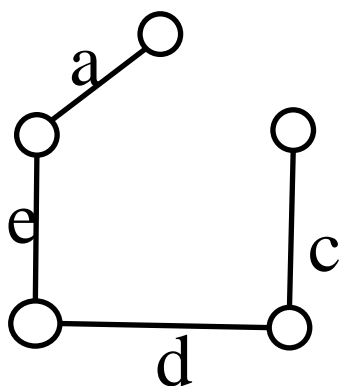


Рисунок 46

Найдём частотную матрицу:

$$F = Q^T \times Q = \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & g & h & \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ g \\ h \end{array} \end{array} \quad (12.12)$$

Вычислим значение производной, и получаем граф  $\frac{\partial G}{\partial s}$

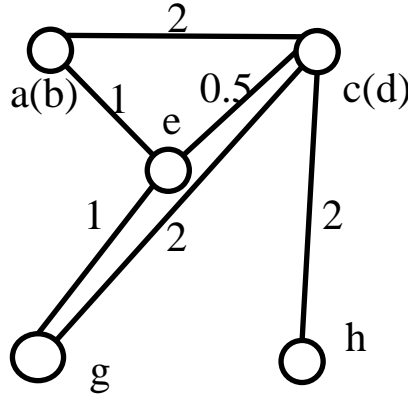


Рисунок 47

Анализ графа, представляющего собой производную графа  $G$  по событию  $S$ :  $\frac{\partial G}{\partial S}$ , позволяет установить у рёбер  $c$  и  $d$  и у рёбер  $a$  и  $b$  имеет место одинаковая интенсивность участия в этом событии  $S$ . Для определения производной по событию  $S$  графа  $G$  нужно:

- 1) Построить модель, определяющую вероятность данного события
- 2) Найти частотную матрицу отношений, соответствующую данной модели
- 3) Вычисляя частотную матрицу отношений, значений производной на рёбрах орграфа, построить производную  $\frac{\partial G}{\partial S}$ , характеризующую интенсивность участия элементов графа  $G$  в заданном событии  $S$ .

Производной  $\frac{\partial^k G}{\partial S^k}$  графа  $G$   $k$ -ого порядка по событию  $S$  называется производная от производной  $k-1$  порядка  $\frac{\partial^{k-1} G}{\partial S^{k-1}}$  по тому же событию  $S$ :

$$\frac{\partial^k G}{\partial S^k} = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial^{k-1} G}{\partial S^{k-1}} \right). \quad (12.12)$$

Смешанной производной от графа  $G$  по событию  $S_a$  и событию  $S_b$  называется производная по событию  $S_a$  от производной графа  $G$  по событию  $S_b$ :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S_a \partial S_b} = \frac{\partial}{\partial S_a} \left( \frac{\partial G}{\partial S_b} \right). \quad (12.13)$$

Аналогично могут быть введены смешанные производные от графа  $G$  по совокупности  $S_{1..k}$ .

Введённое понятие производной от графа  $G$  по событию  $k$  даёт возможность находить производную и от модели  $\Psi(Q)$ , или от мографа  $G^M(Q)$ .

В случае определения производной от модели, если событие  $S$  специально не оговаривается, в качестве события  $S$  принято считать «образование буквы слова». Значение производной от мографа  $G^M(Q)$  по паре  $(i; j)$  будет  $\frac{\partial G^M}{\partial S}(i, j) = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}}$ , где частоты  $f_i, f_j, f_{ij}$  определяются на частотной матрице отношений, данной ранее как произведение матриц инцидентностей:  $F = Q^T \times Q$ .

На мографе частоты  $f_i, f_j, f_{ij}$  равны числу весов вершин  $v_i, v_j$ .

Пример: дан следующий граф:

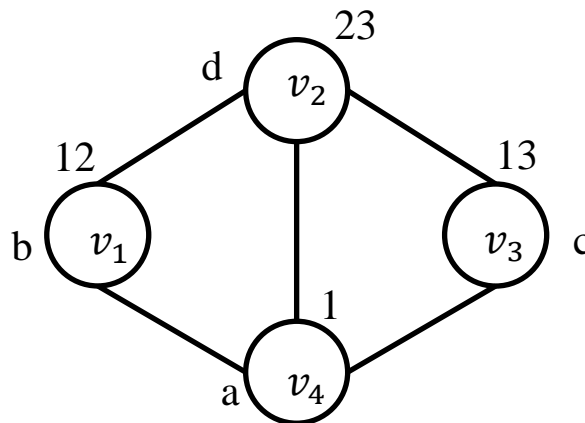


Рисунок 48

Производная от мографа по событию  $S_1, S_2$ :  $\frac{\partial^2 G^M}{\partial S_1 \partial S_2}((v_1; v_2)(v_2; v_3)) = ?$

Считая, что событие  $S_1$  - событие стандартной трактовки, а событие  $S_2$  - образование цикла нечётной длины в матрице инцидентности, получаем такую матрицу:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.14)$$

Ей соответствует частотная матрица:

$$F_1 = Q_1^T \times Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (12.15)$$

Значение производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^M}{\partial S_1}(a; b) &= 1, \frac{\partial G^M}{\partial S_1}(a; c) = 1, \frac{\partial G^M}{\partial S_1}(a; d) = \infty, \\ \frac{\partial G^M}{\partial S_1}(b; c) &= 2, \frac{\partial G^M}{\partial S_1}(b; d) = 2, \frac{\partial G^M}{\partial S_1}(c; d) = 2. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Полученный граф производной:

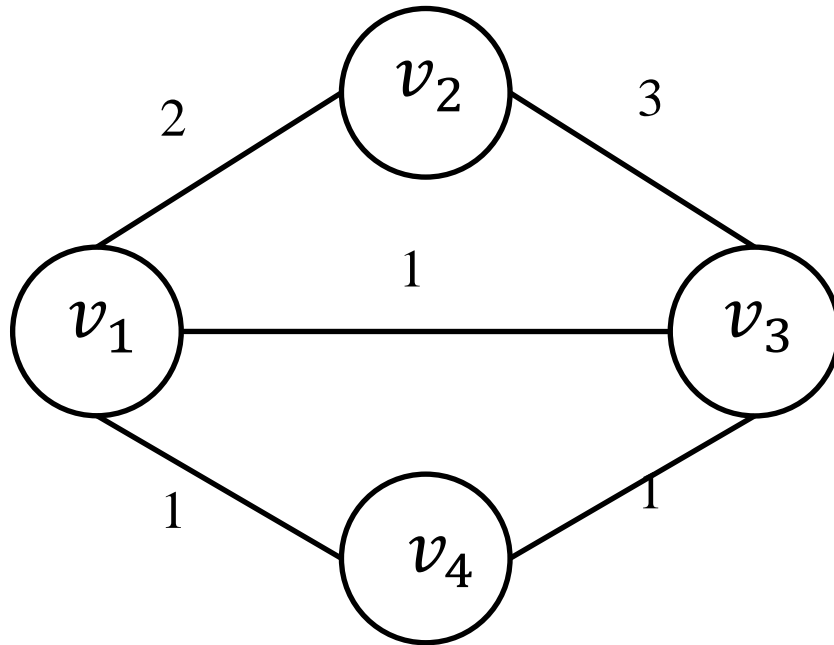


Рисунок 49

Событие  $S_2$  задаёт в графе, представляющем собой дифференциал мографа по событию  $S_1$   $\frac{\partial G^M}{\partial S_1}$ , следующую матрицу:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} (v_1, v_2) & (v_2, v_3) & (v_1, v_3) & (v_3, v_4) & (v_1, v_4) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.17)$$

Согласно алгоритму нахождения производной от графа, в итоге получаем следующую частотную матрицу:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.18)$$

Дальше применяя значение производной второго порядка по событиям  $S_1, S_2$ :

$$\frac{\partial^2 G^M}{\partial S_1 \partial S_2}((v_1; v_2)(v_2; v_3)) = \frac{1 - 2 * 1 + 1}{1} = 0. \quad (12.19)$$

Нами рассмотрено равномерность участия пар элементов события  $S$ . Аналогично может быть рассмотрено с участием третьего, четвёртого и других элементов события  $S$ .

Для этого обобщим понятие частот: это обобщение приводит нас к рассмотрению модели  $\Psi = \langle M, S_1, S_2, \dots S_k \rangle$ .

Введём понятие частотной гиперматрицы отношений для такого типа модели:  $F = [f_{i_1, i_2, i_3}]$ ,  $i = \overline{1, \text{cap } M}$ . Позиция по каждому измерению  $N$ -мерной матрицы перенумеровываются натуральными числами от 1 до мощности множества  $M$ , каждой букве  $m \in M$  ставят во взаимно-однозначное соответствие номер из этого натурального ряда и располагают буквы  $m_i \in M$  по соответствующим позициям.

Получается, что элемент  $f_{i_1, i_2, \dots, i_{\text{cap } M}}$  равен числу слов, в которое входят буквы, соответствующие этим номерам. Одинаковые индексы при написании не суммируются.

Полученная таким образом матрица будет называться  $N$ -мерной частотной матрицей отношения, или частотной гиперматрицей отношений.

## §13. УСТОЙЧИВОСТЬ

В любом графе могут быть выделены совокупности некоторых множеств, объединенных по какому-либо признаку.

Подмножество вершин таких, что никакие две вершины одного и того же подмножества не смежны. Аналогично граф может быть разбит на подмножество ребер таким образом, чтоб ребра одного подмножества были попарно не смежны. В общем случае число элементов в различных подмножествах различны, и существует подмножество, где число элементов принимает максимальное значение. Таким образом, вводятся два инварианта графа.

Инвариант – это величина, которая не зависит от базиса его представления.

Граф так или иначе представим в базисе. Эта характеристика везде его сопровождает.

Для попарно несмежных ребер и вершин: множество вершин называется внутренне устойчивым, если вершины попарно не смежны. Внутренне устойчивое множество вершин называется пустым подмножеством графа или пустым подграфом, если при добавлении хотя бы одной вершины, не принадлежащей подмножеству изначально, образуется хотя бы одно ребро или одна дуга.

Максимальная мощность пустого подграфа графа  $G\langle V, U \rangle$  называется числом внутренней устойчивости или вершинным числом независимости графа.  $\varepsilon_0(G)$

Максимальное число попарно несмежных ребер графа  $G\langle V, U \rangle$  называется реберным числом независимости и обозначается  $\varepsilon_1(G)$

Если ребро инцидентно вершине, то говорят, что они покрывают друг друга.

Множество вершин, покрывающих все ребра графа  $G\langle V, U \rangle$  называется вершинным покрытием графа.

Минимальная мощность вершинного покрытия называется числом вершинного покрытия графа  $\Pi_0(G)$ .

Множество ребер, покрывающих все вершины графа  $G\langle V, U \rangle$  называется реберным покрытием  $\Pi_1(G)$ .

Условимся считать, что любые вершины графа покрывают сами себя и две смежные вершины покрывают друг друга. Тогда минимальная мощность множества вершин, покрывающих вершины графа  $G$  называется вершинным числом внешней устойчивости  $\beta_0(G)$ .



Аналогично будем считать, что каждое ребро графа покрывает себя и два смежных ребра покрывают друг друга. Из этого следует, что минимальная мощность покрытия, покрывающего все вершины графа называется реберным числом внешней устойчивости графа  $\beta_1(G)$ .

Применение: оптимизация автоматических процессов.

Пример:

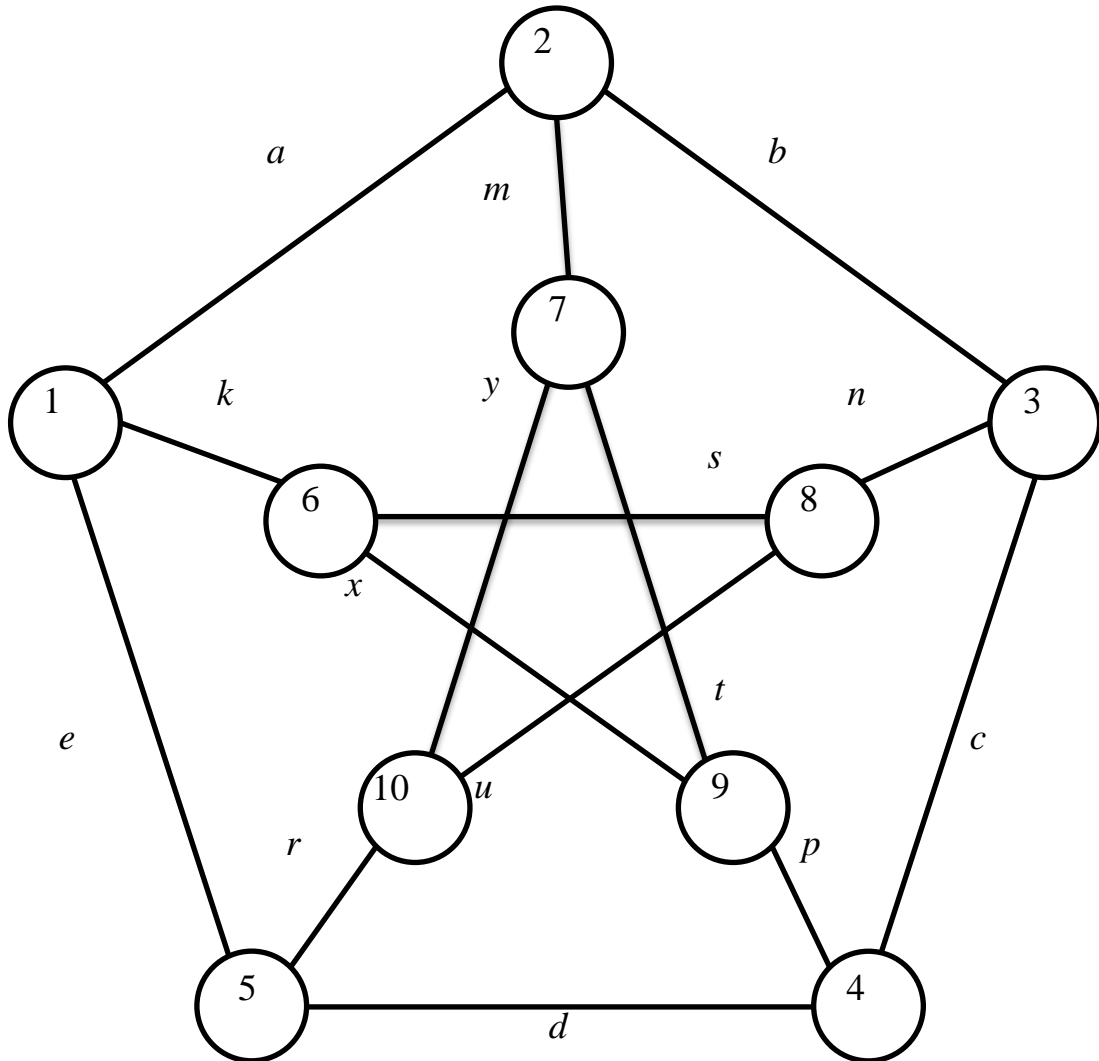


Рисунок 50

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0(G) &= 4, \text{cap}\{1; 3; 5; 10\} = 4, \\
 \beta_0(G) &= 3, \text{cap}\{1; 4; 10\} = 3, \\
 \Pi_0(G) &= 6, \text{cap}\{1; 3; 5; 7; 8; 9\} = 6, \\
 \beta_1(G) &= 4, \text{cap}\{a; c; x; u\} = 4, \\
 \Pi_1(G) &= 5, \text{cap}\{k; m; n; p; r\} = 5.
 \end{aligned}
 \tag{13.1}$$

## Алгоритм Магу нахождения множеств внешней устойчивости

Описание алгоритма:

- для графа составляется матрица смежности.
- матрица смежности дополняется единицами (1) по главной диагонали.
- для каждой строки выписываются дизъюнкции.
- выражение приводится к ДНФ.
- мощность наименьшего дизъюнкта будет давать число внешней устойчивости.

Пример:

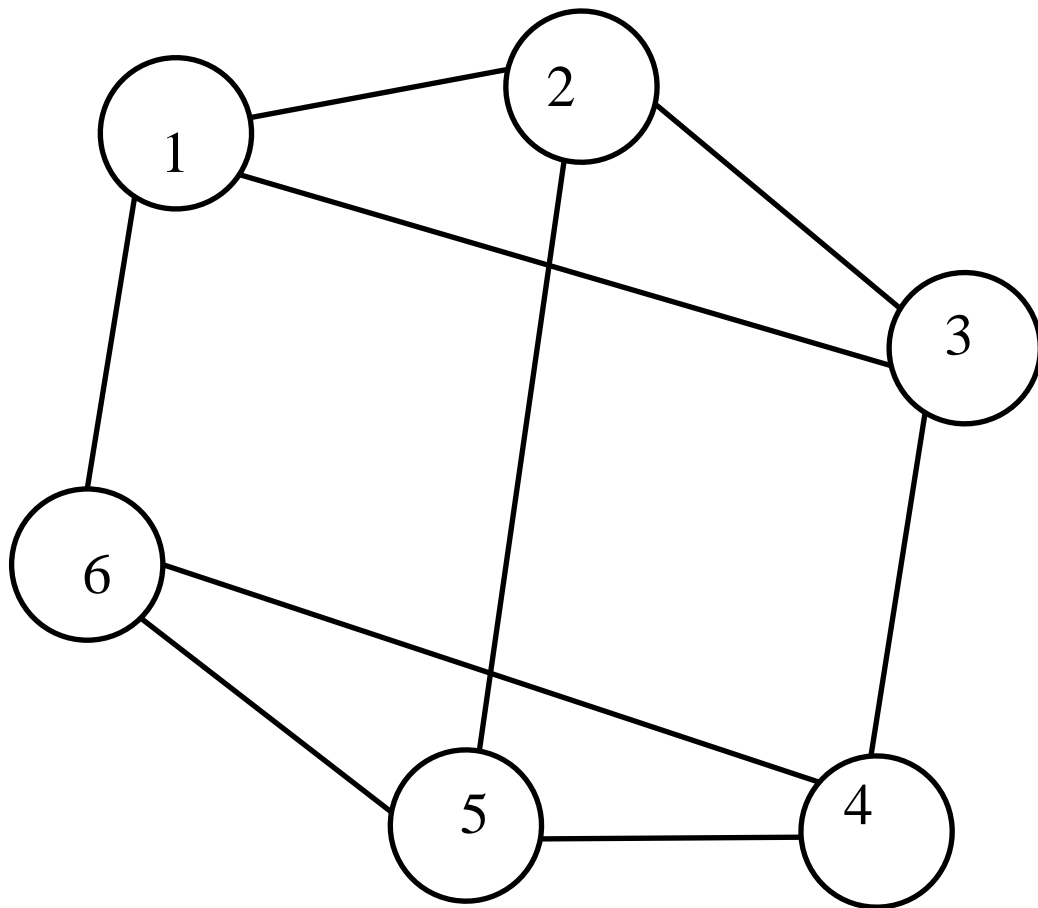


Рисунок 51

1) составим матрицу смежности графа, дополнив ее единицами на главной диагонали:

|       | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $v_1$ | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     |
| $v_2$ | 1     | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| $v_3$ | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| $v_4$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| $v_5$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     | 1     |
| $v_6$ | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     |

2) по единицам таблицы составим дизъюнкты:

$$\begin{aligned}
& (v_1 + v_2 + v_3 + v_6)(v_1 + v_2 + v_3 + v_5) \\
& (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)(v_3 + v_4 + v_5 + v_6) \\
& (v_2 + v_4 + v_5 + v_6)(v_1 + v_4 + v_5 + v_6) = \\
& = v_1 v_2 v_3 + v_4 v_5 v_6 + v_1 v_4 + v_1 v_5 + \\
& v_1 v_6 + v_2 v_4 + v_2 v_5 + v_2 v_6 + v_3 v_4 + v_3 v_5 + v_3 v_6.
\end{aligned} \tag{13.2}$$

3)выразим ДНФ:

$$\begin{aligned}
& \{v_1, v_2, v_3\}; \{v_4, v_5, v_6\}; \{v_1, v_4\}; \{v_1, v_5\}; \{v_1, v_6\}; \{v_2, v_4\}; \\
& \{v_2, v_5\}; \{v_2, v_6\}; \{v_3, v_4\}; \{v_3, v_5\}; \{v_3, v_6\}.
\end{aligned} \tag{13.3}$$

4) мощность минимального из них дает число внешней устойчивости: 2

## §14. РАСКРАСКА

Будем считать, что для нашего графа  $G$  существует такое разбиение, что:

$$\{V_i \mid \bigcup_{i=1}^k u = V; V_{i_a} \cap V_{i_b} = \{\emptyset\}; i_n; i_n = \overline{1, k}\}. \quad (14.1)$$

То есть не существует ни одной пары смежных вершин. Вершины, окрашенные в один цвет называются соцветные.

Хроматическим числом графа  $h(G)$  называется минимальное натуральное число  $n \in \mathbb{N}$ , при котором граф имеет  $n$ -раскраску.

Заметим, что  $h(G) = 1 \Leftrightarrow G = \{\emptyset\}$ .

*Теорема:*

Граф является двухцветным тогда и только тогда, если не содержит цикл нечетной длины.

*Теорема:*

$$G = \langle V; U \rangle \max_G \deg V = s(G) \Rightarrow h(G) \leq s(G) + 1. \quad (14.2)$$

Для большинства графов данная оценка сильно завышена.

*Теорема Брукса:*

Граф является  $s$ -окрашиваемым (раскрашивается в  $s$  цветов) за исключением таких случаев, как:

1. Для  $S > 2$  – если  $G$  содержит компонент плотности  $s(G) + 1$
2. Для  $S = 2$  – если  $G$  содержит компонент – цикл нечетной длины.

Плотность графа – это максимальная мощность полного подграфа.

$$p(G), F_{max} \subset G: p(G) = \max(\text{cap}(F_i)). \quad (14.3)$$

Оценки по этим теоремам дают хорошие результаты для больших наборов вершин. Для малых наборов они могут давать завышенную планку.

*Теорема Харари:*

$$\forall G = \langle V, U \rangle: \frac{\text{cap}(V)}{\beta_0} \leq h(G) \leq \text{cap}(V) - \beta_0 + 1. \quad (14.4)$$

*Теорема Гаддум:*

Сумма и произведение хроматических чисел для двух графов  $G = \langle V, U \rangle$ ,  $\bar{G} = \langle \bar{V}, \bar{U} \rangle$  – графов  $G$  и его дополнения позволяет применение следующей оценки:

$$\begin{aligned} \left\lceil 2\sqrt{\text{cap}(V)} \right\rceil &\leq h(G) + h(\bar{G}) \leq \text{cap}(V) + 1, \\ \text{cap}(V) &< h(G) \times h(\bar{G}) \leq \left\lceil \frac{(\text{cap}(V) + 1)^2}{4} \right\rceil. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Скобки вида « $\lceil$ » « $\rceil$ » представляют собой функцию нахождения ближайшего целого числа.

*Теорема:*

Для дихотомии (деления на два класса) хроматическое число графа  $G$  имеет свойство:

$$\begin{aligned} h(G) &\leq h(G_a) \times h(G_b) \\ h(G) &= h(G_a) + h(G_b) \\ G &= G_a + G_b \\ G_a \cap G_b &= \emptyset \\ h(G) &\leq \min(h(G_a); h(G_b)) \\ G &= G_a + G_b. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Алгоритм минимизации раскраски вершин для графа

1. Выделяется множество пустых подграфов, графа  $G$ .
2. Строим двухмерную таблицу, каждой строке которой взаимно-однозначно соответствует пустой подграф, столбцу – вершина. Соответственно в клетке  $i; j$  стоит 1, если  $j$  вершина содержится в  $i$  пустом подграфе или же 0, если она там не находится.
3. Определение покрытия столбцов строками, покрытие порождает раскраску за счет минимальной мощности числа этих возможных покрытий, и это и есть автоматически число  $j$ .

Пример:

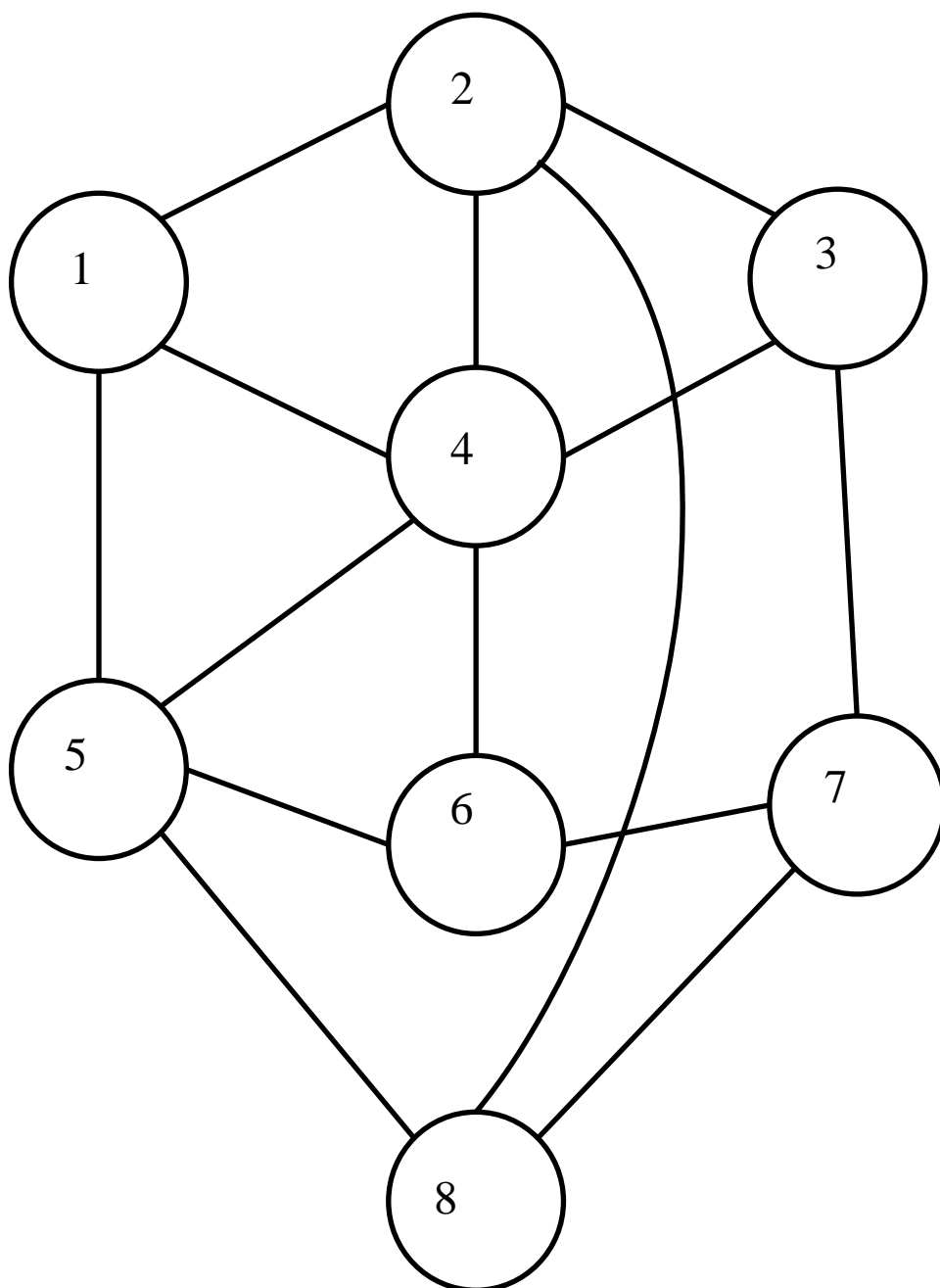


Рисунок 52

Найдем  $h(G)$ :

Выделяем вершинно пустой подграф, графа  $G$  путем построения соответствующих деревьев, фиксируем каждый раз в начале построения ярусы вершины с минимальной степенью.

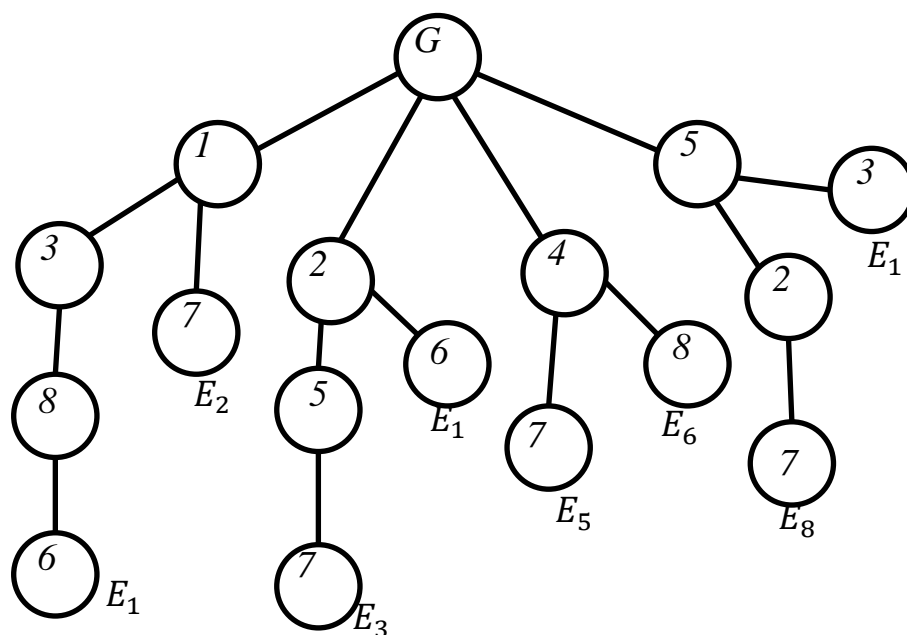


Рисунок 53

Таблица по подграфам

| $E_i$ | $v_j$ |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|-------|---|---|---|---|---|---|---|
|       | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $E_1$ | 1     |   | 1 |   |   | 1 |   | 1 |
| $E_2$ | 1     |   |   |   |   |   | 1 |   |
| $E_3$ |       | 1 |   |   | 1 |   | 1 |   |
| $E_4$ | 1     |   |   |   |   | 1 |   |   |
| $E_5$ |       |   |   | 1 |   |   | 1 |   |
| $E_6$ |       |   |   | 1 |   |   |   | 1 |
| $E_7$ |       |   | 1 |   | 1 |   |   |   |

Получаем двухмерную таблицу распределения вершин по пустым подграфам. Минимальное покрытие столбцов строками являются множества:  $E_1, E_3, E_5$ . То есть хроматическое число  $h(G) = 3$ . Раскраску вершин в 3 цвета можно представить в виде распределения по множествам:  $a = \{1; 3; 6; 8\}, b = \{2; 5; 7\}, c = \{4\}$ .

Для больших графов алгоритм модернизируется с учетом частотных свойств графа.

## §15. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

### Задача о назначениях

Задача является частным случаем транспортной задачи. В этом случае число поставщиков равно числу потребителей. Мощность каждого поставщика и спрос каждого потребителя равны 1. Предлагаемый метод решения задачи называется Венгерский метод, который был разработан и опубликован Гарольдом Куном в 1955 году.

Алгоритм метода:

1. В каждой строке матрицы находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов строки.
2. В каждом столбце полученной матрицы находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов столбцов.
3. Находим строку с единственным нулем. Этот ноль заключается в квадрат и называется отмеченным. В столбце, где находится отмеченный ноль все остальные нули зачеркиваются и в дальнейшем не рассматриваются. Этот шаг продолжается пока возможно.
4. Далее находим столбец с единственным нулем и этот ноль отмечаем. В строке, где находится отмеченный ноль все остальные нули зачеркиваются. Эта процедура также продолжается до тех пор, пока возможно.
5. Если после выполнения последних двух шагов остаются неотмеченные нули, то отмечаем любой из них, а в строке и столбце, где находится этот ноль все остальные нули зачеркиваются.
6. Если каждая строка и каждый столбец матрицы содержит ровно один отмеченный ноль, то получено оптимальное решение. Каждое из отмеченных полей указывает прикрепление поставщика к потребителю. В противном случае, проводим через все нули минимальное число пересекающихся горизонтальных и вертикальных прямых, среди не зачёркнутых этими прямыми чисел находим минимум. Этот минимум вычитаем из всех не зачёркнутых чисел и прибавляем ко всем числам на пересечении прямых.
7. К полученной матрице применяем алгоритм начиная с шага 3.

Рассмотрим применение метода на следующей задаче: существуют 4 базы и 4 потребителя. Расстояния от баз до торговых точек заданы матрицей:



$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ответ на задачу – суммарное расстояния вычисляется как сумма элементов исходной матрицы, стоящих на месте отмеченных нулей итоговой матрицы.

Решение: находим минимумы в каждой строке и вычитаем их из элементов этих строк.

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 15 & 7 & 0 \\ 2 & 13 & 8 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}.$$

Находим минимумы столбцов и вычитаем их из элементов столбцов:

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 7 & 0 \\ 2 & 13 & 8 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

В данной матрице в первой, второй и четвертой. Отметим ноль первой строки и зачеркнем все остальные нули четвертого столбца. Ту же операцию проделываем для четвертой строки и первого столбца.

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \emptyset \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \emptyset \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ \boxed{0} & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Больше строк с единственным нулем не существует, но есть два столбца с единственными нулями – второй и третий. Выделим ноль второго столбца и зачеркнем все нули строки его содержащей:

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \emptyset \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ \boxed{0} & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 11 & 8 & \emptyset \\ 7 & \boxed{0} & \emptyset & 3 \\ \boxed{0} & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Больше нулей нет, но полученное распределение не является оптимальным, так как во второй строке нет отмеченных нулей. Проведем минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых, пересекающихся между собой и проходящих через все нули. Для этого потребуется 3 прямых – 2 по нижним строкам и 1 по крайнему справа столбцу.

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Среди не зачёркнутых чисел находим минимум и добавляем его всем числам на пересечении прямых. Получим:

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & 2 \\ 2 & 11 & 8 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

К полученной матрице применяем алгоритм, пока не получим:

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Полученное распределение оптимально, но не факт, что единственно. Вычисляем сумму элементов исходной матрицы, стоящих на местах отмеченных нулей:  $3+5+8+8=24$ .

Венгерский алгоритм в терминологии паросочетаний

Для реализации алгоритма с применением элементов теории графов определим понятие паросочетания. Паросочетание – это множество попарно несмежных рёбер. Так, для графа ниже можно привести множество рёбер  $\{1,3,5\}$  – видно, что они несмежны (смежными являются рёбра, инцидентные одной вершине)

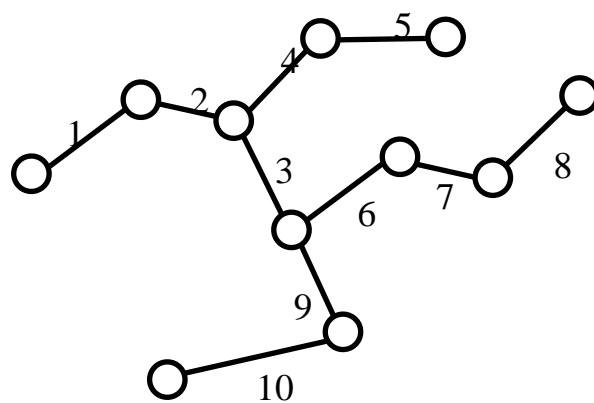


Рисунок 54

Среди паросочетаний выделяют классификацию – помимо паросочетаний, не обременённых базовым требованием несмежности рёбер, вводят понятие максимального паросочетания – это паросочетание, в которое нельзя добавить ещё одно ребро. Для вышеприведённого примера таких паросочетаний можно привести несколько. Так, максимальными паросочетаниями являются множества  $\{1,3,5,9,7\}$  или  $\{2,5,10,6,8\}$ , либо  $\{7,9,2,5\}$ . Видно, что максимальное паросочетание может быть не фиксированной мощности – в данном случае мы получили мощности и 4 и 5.

Наибольшим паросочетанием называется паросочетание с наибольшим количеством рёбер. В рассматриваемом примере можно доказать, что мощность наибольшего паросочетания составляет 5 – и таких паросочетаний несколько (как было показано в примерах максимальных паросочетаний).

Совершенным паросочетанием называется паросочетание, покрывающее все вершины графа. Можно понять, что совершенное паросочетание существует не для каждого графа – для примера выше видно, что для нечётного количества вершин, очевидно, не найдётся набора несмежных рёбер – за счёт чётности количества вершин, покрываемых натуральным количеством рёбер. Если удалить из примера одну из концевых вершин (например, инцидентную ребру 5) – можно построить совершенное паросочетание  $\{1,4,10,6,8\}$ . Так же определяют паросочетание, получившее название «почти совершенное» – это паросочетание, покрывающее все вершины, кроме одной. На рассматриваемом графе таким паросочетанием является озвученное ранее  $\{1,4,10,6,8\}$ , не покрывающее только одну концевую вершину. На самом деле, существуют графы, имеющие чётное число вершин, но в которых невозможно построить совершенное паросочетание.

Тогда задача о назначениях получает формулировку поиска совершенного паросочетания в двудольном взвешенном графе с критерием минимизации суммы весов рёбер.

Алгоритм в таком случае выглядит следующим образом:

1. В каждой строке матрицы находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов строки.
2. В каждом столбце полученной матрицы находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов столбцов.
3. По полученной матрице строим двудольный граф по правилу:
  - a. Вершины первой доли соответствуют строкам.
  - b. Вершины второй доли соответствуют столбцам.
  - c. Ребро соединяет те вершины, где на пересечении строки и столбца в матрице стоит 0.
4. Находим любое максимальное паросочетание. Проверяем – является ли оно наибольшим? Для проверки применяем механизм чередующихся путей и пополняющих путей.
5. Проверяем полученное наибольшее паросочетание – является ли оно совершенным? Если паросочетание не совершенное, то производится анализ графа и преобразование матрицы, после чего алгоритм начинается с 3 шага.

Чередующийся путь — это путь, в котором рёбра поочерёдно принадлежат паросочетанию и не принадлежат ему. Пополняющий путь (или увеличивающий путь) — это чередующийся путь, начинающийся и кончающийся свободными вершинами (то есть не участвующими в паросочетании). Приведём пример. В нижеприведённом графе определим максимальное паросочетание  $\{2,6\}$ . Видно, что для 8 вершин оно не является наибольшим, а значит, что можно попробовать увеличить его мощность. Примерами чередующихся путей будут  $\{1,6,7\}$ ,  $\{2,3,6,7\}$ ,  $\{2,3,6,4\}$  и т.д. Для определения пополняющего интервала определим вершины, не покрываемые паросочетанием  $\{2,6\}$ . Такими вершинами являются  $\{A1, B2, B1, \Gamma2\}$ . Построим чередующиеся пути, которые начнутся и закончатся рёбрами, инцидентными этим вершинам – то есть рёбрами  $\{1,4,5,7\}$  – из свойств, кстати говоря, видно, что мощности путей будут нечётными – такими путями будут:  $\{1,6,7\}$ ,  $\{1,6,4\}$ ,  $\{1,6,5\}$ ,  $\{4,6,1\}$ ,  $\{4,6,5\}$ . Заметим, что путь  $\{4,6,3\}$  – пусть и является чередующимся – нас не устраивает, так как заканчивается в вершине B1.

Механизм пополняющего пути заключается в том, что при замене в исходном паросочетании множества рёбер, принадлежащих паросочетанию и попол-

няющему пути, множеством рёбер, не принадлежащих паросочетанию, но принадлежащих пути, получается новое паросочетания большей мощности. Проверим – исходное паросочетание  $\{2,6\}$  имеет мощность 2. Применим пополняющий путь  $\{1,6,7\}$  – из нашего паросочетания убирается ребро 6, и добавляются 1 и 7. Таким образом, получаем паросочетание  $\{1,2,7\}$  – можно проверить, что оно является максимальным, его мощность составляет 3, что больше исходной мощности, к чему и требовалось прийти.

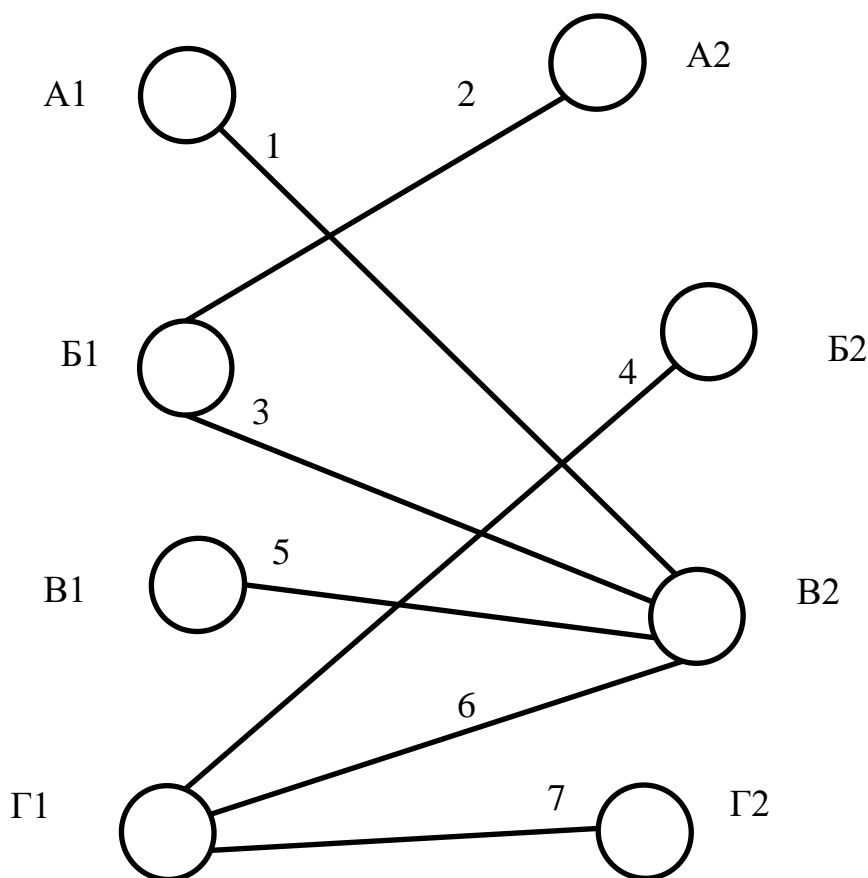


Рисунок 55

Если в графе не существует пополняющего пути, значит, паросочетание является наибольшим.

Этап анализа графа и преобразования матрицы рассмотрим в ходе решения задачи, решённой ранее:

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Проведём вычитание минимумов строк и столбцов – получим:

$$\begin{bmatrix} 5 & 13 & 7 & 0 \\ 2 & 11 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Построим двудольный граф:

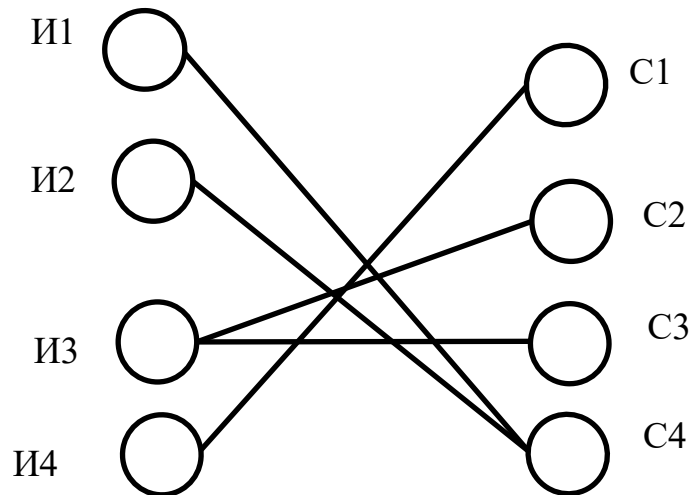


Рисунок 56

Построим максимальное паросочетание (выделим рёбра, относящиеся к нему, жирной линией):

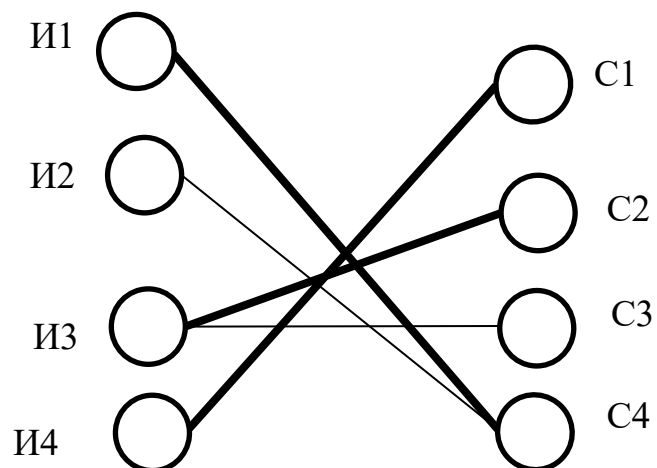


Рисунок 57

Если попробовать построить дополняющий путь – у нас не получится – единственная вершина множества И (источников), не покрытая паросочетанием

– вершина И2, а чередующийся путь из неё получается только с окончанием в И1, которое принадлежит паросочетанию. Поэтому полученное паросочетание является и наибольшим, но ещё не совершенным.

Преобразуем нашу матрицу. Для этого найдём чередующийся путь для вершин, не принадлежащих паросочетанию, такой, что он начинается и заканчивается во множестве источников. Такой путь в данном графе единственный: И2-С4-И1. Выпишем множества источников и стоков:  $X=\{И1,И2\}$ ,  $Y=\{С4\}$ . В матрице смежности двудольного графа выберем строки, соответствующие множеству  $X$ , и исключим из них столбцы, соответствующие  $Y$ . Получаем:

$$\begin{array}{ccc} 5 & 13 & 7 \\ 2 & 11 & 8 \end{array}$$

Среди элементов ищем минимальный (он равен 2) и прибавляем его ко всем элементам столбца, соответствующего множеству  $Y$ , после чего вычитаем его из строк, соответствующих  $X$ . Таким образом, получаем новую матрицу:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{11} & \mathbf{5} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{6} & 0 \\ 7 & 0 & 0 & \mathbf{5} \\ 0 & 6 & 1 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Жирно выделены все элементы, значение которых изменилось.

Повторим наш алгоритм для полученной матрицы – строим граф:

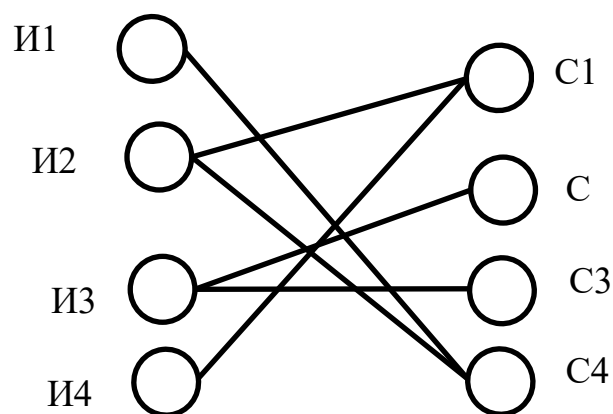


Рисунок 58

Строим произвольное максимальное паросочетание:

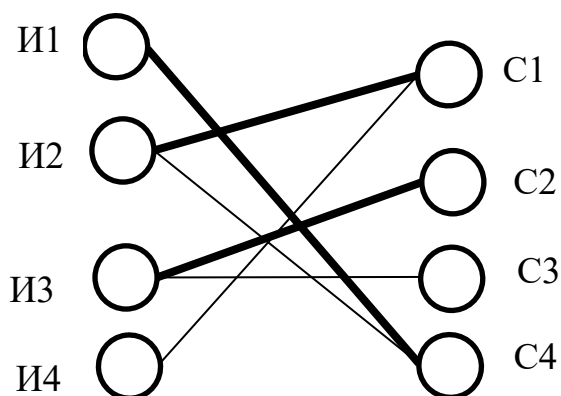


Рисунок 59

Видно, что пополняющих путей в этом графе так же нет, поэтому приступаем к анализу и изменению матрицы. На сей раз чередующийся путь, начинающийся и кончающийся во множестве источников содержит  $X=\{И4,И2,И1\}$  и  $Y=\{С1,С4\}$ . Выпишем строки с удалением столбцов:

$$\begin{matrix} 11 & 5 \\ 9 & 6 \\ 6 & 1 \end{matrix}$$

Минимум равен 1, вычтем его из выбранных строк и прибавим к закрытым столбцам:

$$\begin{bmatrix} 3 & \mathbf{10} & 4 & 0 \\ 0 & \mathbf{8} & 5 & 0 \\ \mathbf{8} & 0 & 0 & \mathbf{6} \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Строим новый граф:

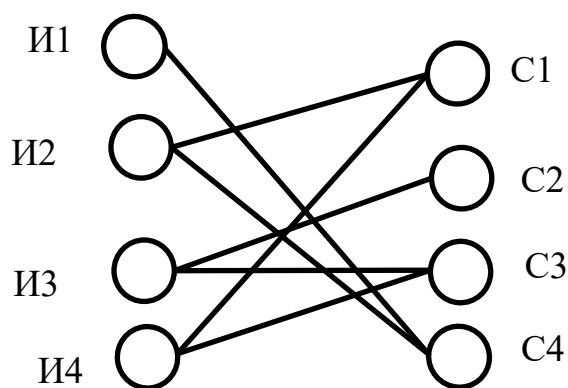


Рисунок 60



Строим максимальное паросочетание:

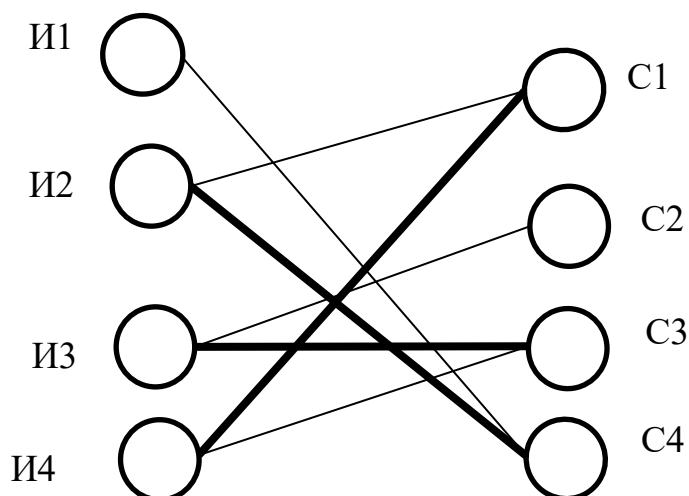


Рисунок 61

Проверим наличие пополняющих путей из множества источников можно провести путь И1-С4-И2-С1-И4-С3-И3-С2. Путь исходит из источников, заканчивается во множестве потребителей и имеет 4 ребра, не принадлежащих паросочетанию, и 3 – принадлежащих. Замена свойства «принадлежит паросочетанию» увеличивает количество рёбер паросочетания на 1, и делает паросочетание наибольшим.

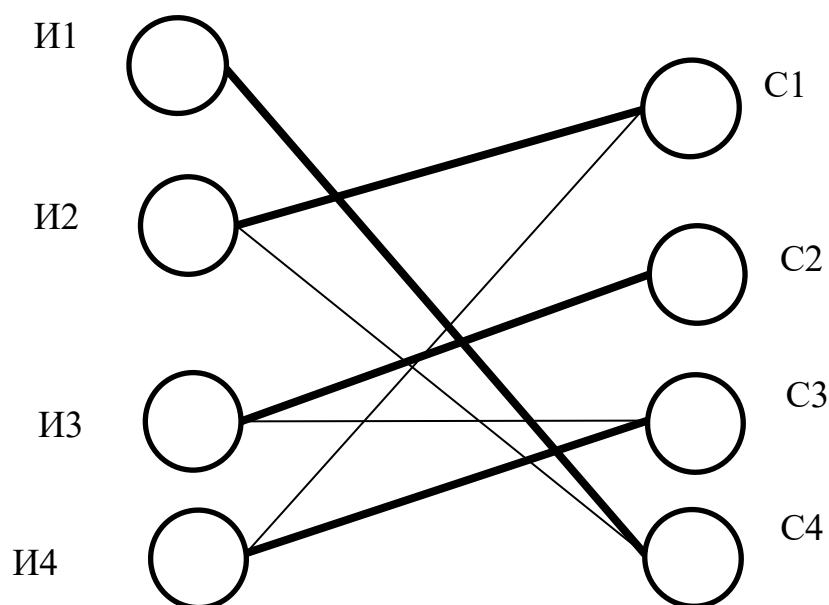


Рисунок 62

Его мощность составляет 4, что для данной задачи так же сигнализирует о том, что данное паросочетание является совершенным – задача решена. Так, мы получили распределение, реализованное ранее описанным аналогичным алгоритмом в матричном представлении –  $\{(1,4),(2,1),(3,2),(4,3)\}$ . Его условная стоимость равна  $5+3+8+8=24$ .

Случай максимизации целевой функции сводится к решению задачи минимизации для матрицы, полученной из исходной матрицы, при помощи умножения каждого элемента на -1. Формулировка задачи может быть следующей: имеется 4 поставщика и 4 продавца (торговых точки), Эффективность работы на торговой точке отображается в матрице:

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 11 \\ 5 & 8 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 15 & 9 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить распределение поставок на торговые точки, обеспечивающее максимальную суммарную прибыль. В свою очередь задачу можно свести к двойственной – нахождению минимального распределения матрицы, элементы которой равны по модулю и отличны по знаку исходным:

$$\begin{bmatrix} -9 & -3 & -4 & -8 \\ -4 & -6 & -7 & -11 \\ -5 & -8 & -8 & -4 \\ -6 & -12 & -15 & -9 \end{bmatrix}.$$

Дальше задача решается как предыдущая.

Балансировка линии сборки

Для каждой операции на производстве необходимо выделить временные условия. Необходимо знать последовательность проведения операций. Согласовать весь процесс при помощи теории графов. Пример: Пусть продуктом компании являются стулья повышенной комфортности. Будем считать типовой рабочий день 480 минут, необходимо выпустить 50 стульев. Для изготовления 1 стула выполняются 8 операций, которые можно описать следующей таблицей:

| № операции | Время операции (минут) | Предшествующие операции |
|------------|------------------------|-------------------------|
| 1          | 4                      | –                       |
| 2          | 6                      | 1                       |
| 3          | 7                      | 1,2                     |
| 4          | 5                      | 2,3                     |
| 5          | 5                      | 4                       |
| 6          | 8                      | 5                       |
| 7          | 6                      | 5                       |
| 8          | 4                      | 6,7                     |

Необходимо решить задачу балансировки. Нарисуем оргграф по предложенной таблице:

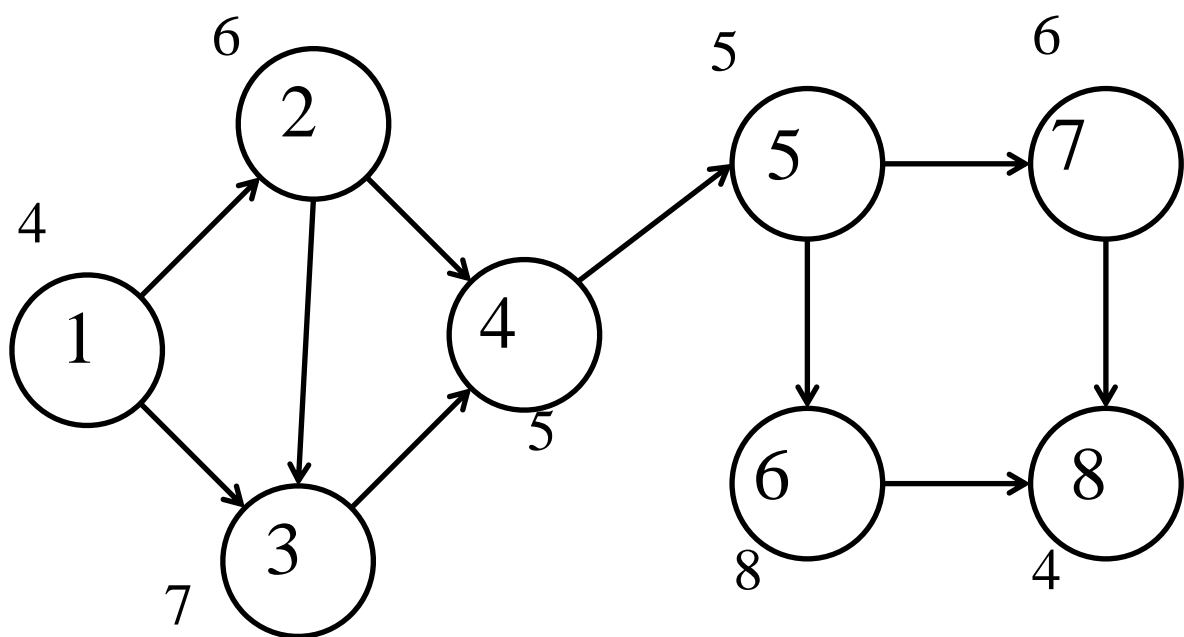


Рисунок 63

Определим время цикла – среднее время, в течение которого каждое изделие может быть доступно на любом рабочем месте для выполнения соответствующей операции. Время цикла – это есть рабочее время в течение суток, разделённое на объём производства в сутки.

$$\frac{480}{50} = 9.6 \approx 10.$$

Теоретически минимальное число рабочих мест есть суммарное время выполнения операций, делённое на время цикла:

$$\frac{4 + 6 + 7 + 5 + 5 + 6 + 8 + 4}{10} = 4.5 \approx 5.$$

Ясно что округление у нас всегда идёт до ближайшего большего целого числа. Следует отметить, чтобы полученная величина – это оценка снизу возможного числа рабочих мест. Может так случиться, что рабочих мест будет больше.

Если время выполнения какой-либо операции превышает время цикла, то эту операцию надо расщепить на две последовательные операции. В этом случае слегка изменяется граф состояний. Можно объединить:

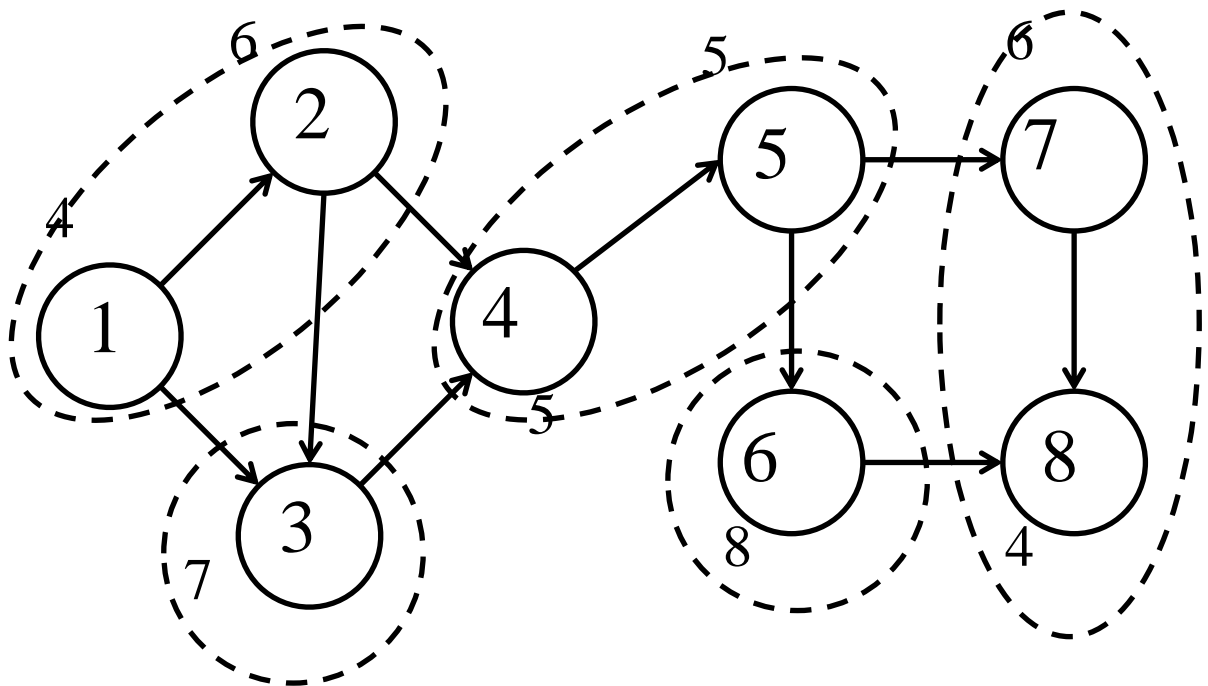


Рисунок 64

Такого типа группировка – один из вариантов решения, при котором не нарушается последовательность операций. При этом все операции распределены между 5 группами – рабочими местами.

Эффективность балансировки линий – это суммарное время выполнения операций, деленное на число рабочих мест, умноженное на время цикла.

$$\frac{4 + 6 + 7 + 5 + 5 + 6 + 8 + 4}{5 * 10} = 0.9 = 90\%.$$

Нахождение гамильтонова пути наименьшей длины

Имеется  $n \geq 1$  начальных пунктов с заданными между ними  $a_{ij}, i = 1:n, j = 1:n$ . Если прямого сообщения между пунктами нет, будем обозначать его  $\infty$ . Так же будем предполагать, что  $a_{ij} \neq a_{ji}$ . Требуется найти маршрут, проходящий через все пункты, и завершающийся в исходном пункте. Такой маршрут называется Гамильтоновыми. Теоретически можно решить задачу перебором всех возможных путей, но если  $n$  велико, сложность задачи возрастает. Один из методов решения – метод ветвей и границ. Рассмотрим задачу:

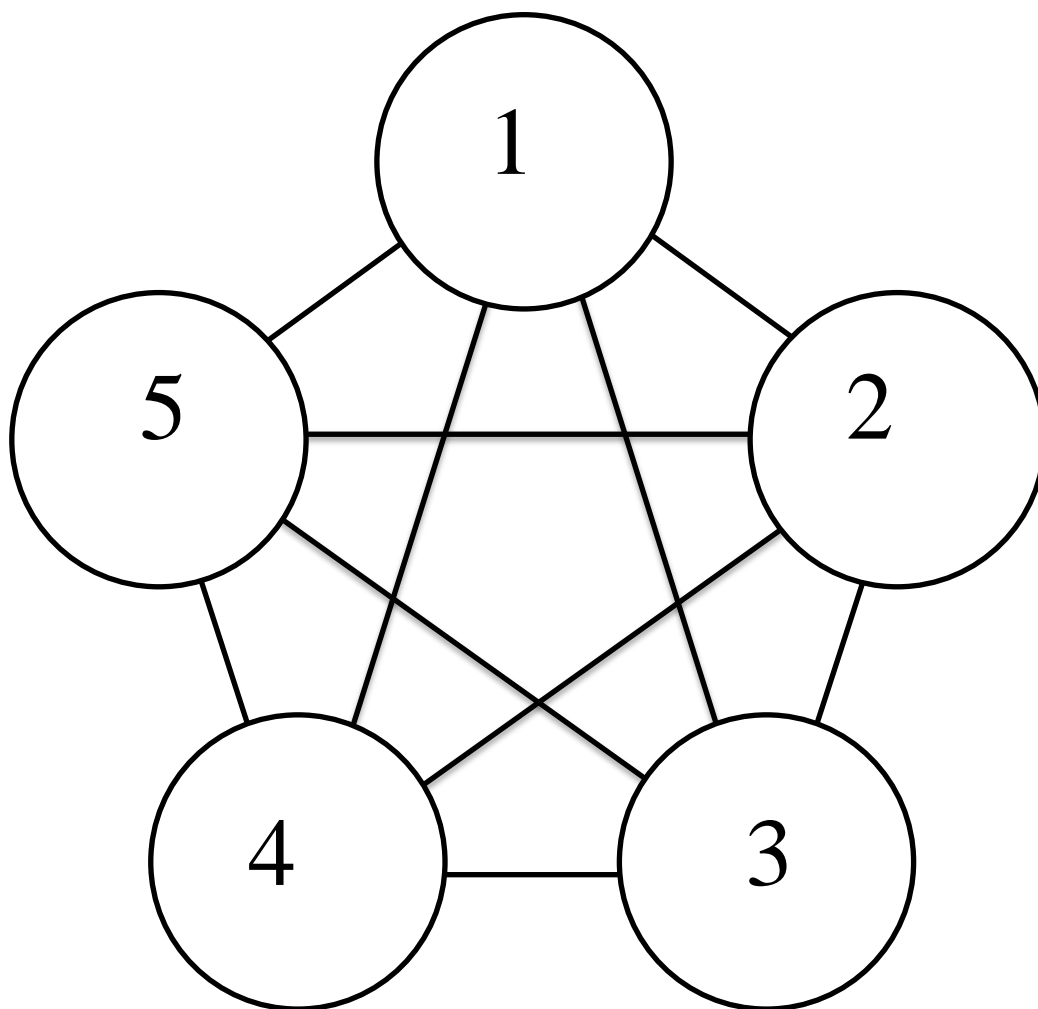


Рисунок 65

Расстояния имеют следующие значения:

$$A = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & \infty & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & \infty & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & \infty \end{bmatrix}.$$

Задача – построить маршрут минимальной длины.

Для начала определим минимальные элементы каждой строки и вычтем их из всех элементов соответствующих строк:

$$\begin{bmatrix} \infty & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & \infty & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & \infty & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 5 & 0 & 7 & 5 \\ 4 & \infty & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & \infty & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \infty & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}.$$

Дальше найдем минимумы в каждом столбце. И так же вычтем их из элементов соответствующих столбцов.

$$\begin{bmatrix} \infty & 5 & 0 & 7 & 5 \\ 4 & \infty & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & \infty & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \infty & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}.$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{matrix} = 18$$

Суммируем минимумы столбцов и строк. Полученное число называется константой приведения и равно 18. Оно представляет собой оценку снизу на текущем шаге длины маршрута.

Определим дугу, которая максимально увеличила бы благополучную оценку. Заменяем поочередно каждый из 0 на  $\infty$ , и рассчитаем сумму наименьших элементов в строке и столбце:

$$\begin{aligned} (1; 3): 3 + 0 &= 3, \{2; 5\}: 2 + 0 = 2, \\ \{3; 1\}: 0 + 0 &= 0, \{3; 4\}: 0 + 2 = 2, \\ \{3; 5\}: 0 + 0 &= 0, \{4; 1\}: 0 + 0 = 0, \\ \{4; 2\}: 0 + 1 &= 1, \{4; 3\}: 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\{5; 3\}: 1 + 0 = 1.$$

Полученную сумму укажем в качестве верхнего индикатора для соответствующего нуля:

$$\begin{bmatrix} \infty & 3 & 0^3 & 5 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0^2 \\ 0^0 & 3 & \infty & 0^2 & 0^0 \\ 0^0 & 0^1 & 0^0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0^1 & 2 & \infty \end{bmatrix}.$$

Для элемента  $(1; 3)$  эта сумма максимальна. Поэтому всё множество всех маршрутов разбивается на 2 класса:  $\{1; 3\}$  и  $\{\overline{1; 3}\}$ . В первом классе находятся все маршруты, включающие  $(1; 3)$ , во втором – не включающие. Рассмотрим второй класс.

Преобразуем нашу матрицу, исключив элемент  $(1; 3)$  путем замены его на  $\infty$ :

$$\begin{bmatrix} \infty & 3 & \infty & 5 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{bmatrix}.$$

В полученной матрице получим сумму констант приведения.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \infty & 3 & \infty & 5 & 5 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 2 & 2 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ & \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 2 & 2 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 2 & 2 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = 3. \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

Получаем новую константу приведения 3. Нижняя граница на предыдущем шаге была оценена в 18, на текущем – ещё +3, итого получаем 21.

Теперь рассмотрим второй класс. Исключение дуги (1; 3) осуществим исключением 1-ой строки и 3-его столбца. И так же заменим элемент (3; 1) на привычный  $\infty$  для исключения негамильтоновых путей.

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 2 & \infty \end{array} \right] .$$

Числа над матрицей и слева – это вспомогательная нумерация оставшихся столбцов и строк. Определим новую константу приведения:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 2 & \infty \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} = 1$$

Таким образом, мы получили константу приведения, равную 1. Сумма констант приведения составляет 19. Так как  $19 < 21$ , мы выбираем множество {1; 3}.

Для приведенного ниже множества определим степени нулей:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right]$$

$$(2; 5): 3 + 0 = 3, (3; 4): 0 + 1 = 1$$

$$(3; 5): 0 + 0 = 0, (4; 1): 0 + 2 = 2$$

$$(4; 2): 0 + 0 = 0, (5; 2): 1 + 0 = 1$$



$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0^3 \\ \infty & 3 & 0^1 & 0^0 \\ 0^2 & 0^0 & \infty & 3 \\ 2 & 0^1 & 1 & \infty \end{array} \right] .$$

Для элемента (2;5) эта сумма максимальна, поэтому разобьем множество маршрутов на  $\{(1;3); (2;5)\}$  и  $\{(1;3); \overline{(2;5)}\}$ . Рассмотрим сначала второй класс – заменим элементы (2;5) на  $\infty$  и найдем новую константу приведения.

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right] \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right] \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} \rightarrow \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 3 \\ 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right] \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} = 3$$

Константа приведения равна 3, а сумма с предыдущей равна 22.

Рассмотрим теперь первый класс. Удаляем вторую строку и пятый столбец, а вместо элемента (5;2) ставим  $\infty$ . Рассчитываем константу приведения:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \\ \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \\ \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} = 1$$

Константа приведения равна 1, сумма равна 20. Так как  $20 < 22$ , мы выбираем  $\{(1;3);(2;5)\}$ . Для полученной матрицы снова определим ребро, исключение которого максимально увеличило бы оценку – рассчитаем степени нулей:

$$(3;4): 3 + 0 = 3, (4;1): 0 + 1 = 1, (4;2): 0 + 3 = 3, (5;4): 1 + 0 = 1.$$

Получим:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 4 \\ 3 & \left[ \begin{array}{ccc} \infty & 3 & 0^3 \end{array} \right] \\ 4 & \left[ \begin{array}{ccc} 0^1 & 0^3 & \infty \end{array} \right] \\ 5 & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \infty & 0^1 \end{array} \right] \end{array} \end{array} \cdot$$

Для двух элементов сумма максимальна и равна 3. Выберем произвольный – например, (4,2). Разбиваем множества маршрутов на  $\{(1;3);(2;5);(4;2)\}$  и  $\{(1;3);(2;5);\overline{(4;2)}\}$ . Рассмотрим сначала второй – заменим (4;2) на  $\infty$ , получим матрицу и посчитаем константу приведения:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 4 \\ 3 & \left[ \begin{array}{ccc} \infty & 3 & 0 \end{array} \right] \\ 4 & \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & \infty \end{array} \right] \\ 5 & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \infty & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 3 \\ 0 \rightarrow 4 \\ 0 \quad 5 \end{array} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \left[ \begin{array}{ccc} \infty & 3 & 0 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & \infty \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \infty & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 3 \\ 0 \rightarrow 4 \\ 0 \quad 5 \end{array} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \left[ \begin{array}{ccc} \infty & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \infty & \infty \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \infty & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \cdot$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 4 \\ & 0 & 3 & 0 \end{array} = 3$$

Сумма констант приведения равна 23. Вернемся ко множеству, содержащему (4;2). Удалим 4 строку и 2 столбец, рассчитаем константу приведения:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1 & 4 \\ 3 & \left[ \begin{array}{cc} \infty & 0 \end{array} \right] \\ 5 & \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1 & 4 \\ 3 & \left[ \begin{array}{cc} \infty & 0 \end{array} \right] \\ 5 & \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 1 & 4 \\ 3 & \left[ \begin{array}{cc} \infty & 0 \end{array} \right] \\ 5 & \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \cdot$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 4 \\ & 1 & 0 \end{array} = 1$$

Сумма равна 21, следовательно, элемент (4;2) мы включаем в цепь. Имеем:  $\{(1;3);(2;5);(4;2)\}$ . В оставшейся матрице нужно выбрать нули так, чтобы в каждой строке и каждом столбце был единственный индивидуальный выбранный ноль. Такая комбинация – (3;4);(5;1).

Итого мы получаем:  $\{(1;3);(3;4);(4;2);(2;5);(5;1)\}$ , длина – равна 21.

## §16. ЧИСЛА

Что такое число? Число есть множество, на котором заданы определённого вида математические операции. Так, для перечисления окружающих нас целых объектов мы применяем операцию сложения и получаем множество натуральных чисел:  $\mathbb{N}$ . Как только мы добавляем обратную операцию – вычитание – мы оказываемся во множестве целых чисел:  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Дальше – с развитием счёта мы доходим до операции умножения, которая ещё оставляет нас в поле целых чисел, а возникающая вслед за ней операция деления – вызывает открытие множества рациональных чисел:  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ . Далее возникли поля действительных чисел, комплексных чисел:  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Потом появились кватернионы:  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ .

### Поля чисел

Самые известные поля чисел –  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ . Комплексные числа – единственный пример алгебраически замкнутого поля. Это говорит о том, что любой многочлен от 1 неизвестного имеет комплексный корень и может быть разложен на линейные множители в соответствии с основной теоремой алгебры. Пополнением этого поля  $\mathbb{C}_p$  – конечное поле  $\mathbb{F}_p$  из  $p$  элементов. Его замыкание есть алгебраический конструктив – объединение полей  $\mathbb{F}_q$ , таких, что  $q = p^n, n \in \mathbb{N}$ . В этих полях нет естественной топологии кроме дискретной.

Следующий момент, который стоит вспомнить – анализ комплекснозначных функций:  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

За комплексными числами существует алгебраический объект, носящий название кватернион. Поле кватернионов обозначается  $\mathbb{H}$ . Целью разработки кватернионов была разработка поля, состоящего из трехмерных векторов по образу комплексной плоскости, которая в свою очередь, фактически, представляет декартово произведение  $\mathbb{C} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i^2 = -1$ . Однако выяснилось, что для реализации трехмерных векторов потребовались четырехмерные числа.

Алгебра кватернионов  $\mathbb{H}$  порождается как действительное пространство обычной единицы, принадлежащей действительной оси и трех мнимых единиц, каждая из которых подчиняется закономерности:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (16.1)$$

Можно переписать в виде:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = 1 \\ ij + ji = jk + kj = ki + ik = 0' \end{cases} \quad (16.2)$$

или:

$$\begin{cases} (ai + bj + ck)^2 = -(a^2 + b^2 + c^2) \\ \forall a; b; c \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (16.3)$$

В кватернионе принято выделять скалярную  $(x_0) \in \mathbb{R}$  и векторную  $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$  части:

$$q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k. \quad (16.4)$$

То есть кватернион есть произвольный вектор, имеющий некоторую силу, действующую в направлении своего действия:

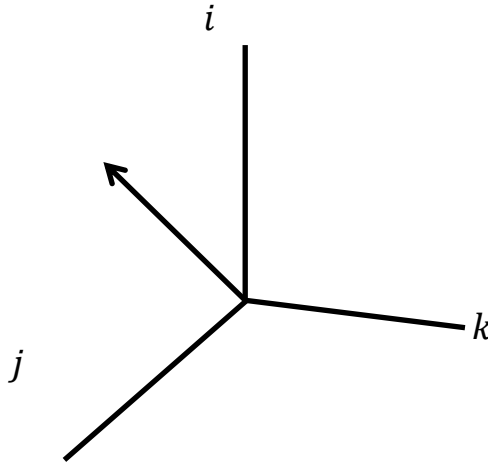


Рисунок 66

Операции над кватернионами:

Произведение кватернионов: распадается на две составляющие – одна имеет скалярную часть:  $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ , вторая – векторную:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ i & j & k \end{vmatrix}.$$

Следующий объект – алгебра Клиффорда. Записывается как  $Cl(V; \zeta)$ . Алгебраическая структура, связанная с линейным пространством  $V$ , которое орга-

низованно над полем  $\mathbb{K}$ , и квадратичной формулой  $\zeta$  в этом пространстве. Другими словами – алгебра Клиффорда – это алгебра над полем  $\mathbb{K}$ , порождаемая единицей и линейным пространством  $V$  соотношением  $v^2 = \zeta(v) * 1 \forall v \in V$  для любого элемента векторного пространства.

На примере – если  $V = \mathbb{R}, Q(x) = x^2$  или  $V = \mathbb{C}, Q(x) = -x^2$  – мы получаем две разновидности алгебры Клиффорда. Так же пример:  $V = \mathbb{R}^2, Q(x, y) = -x^2 - y^2$ . Вещественная алгебра Клиффорда – более разнообразна. Приведем таблицу алгебр Клиффорда для чисел вида:

$$\mathbb{C}_{pq} = Cl(\mathbb{R}^{p+q}, \zeta_{p;q}), \quad (16.5)$$

Где

$$\zeta_{p;q}(x_1, x_2, \dots, x_{p+q}) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=1+q}^{p+q} x_j^2. \quad (16.6)$$

| $\begin{matrix} \backslash & q \\ p & \end{matrix}$ | 0                | 1                 | 2                | 3                | 4                 | 5                 |
|---|------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| 0   | $\mathbb{R}$     | $2\mathbb{R}$     | $\mathbb{R}(2)$  | $\mathbb{C}(2)$  | $\mathbb{H}(2)$   | $2\mathbb{H}(2)$  |
| 1   | $\mathbb{C}$     | $\mathbb{R}(2)$   | $2\mathbb{R}(2)$ | $\mathbb{R}(4)$  | $\mathbb{C}(4)$   | $\mathbb{H}(4)$   |
| 2   | $\mathbb{H}$     | $\mathbb{C}(2)$   | $\mathbb{R}(4)$  | $2\mathbb{R}(4)$ | $\mathbb{R}(8)$   | $\mathbb{C}(8)$   |
| 3   | $2\mathbb{H}$    | $\mathbb{H}(2)$   | $\mathbb{C}(4)$  | $\mathbb{R}(8)$  | $2\mathbb{R}(8)$  | $\mathbb{R}(16)$  |
| 4   | $\mathbb{H}(2)$  | $2\mathbb{H}(2)$  | $\mathbb{H}(4)$  | $\mathbb{C}(8)$  | $\mathbb{R}(16)$  | $\mathbb{R}(32)$  |
| 5   | $\mathbb{C}(4)$  | $\mathbb{H}(4)$   | $2\mathbb{H}(4)$ | $\mathbb{H}(8)$  | $\mathbb{C}(16)$  | $\mathbb{C}(32)$  |
| 6   | $\mathbb{R}(8)$  | $\mathbb{C}(8)$   | $\mathbb{H}(8)$  | $2\mathbb{H}(8)$ | $\mathbb{H}(16)$  | $\mathbb{H}(32)$  |
| 7   | $2\mathbb{R}(8)$ | $\mathbb{R}(16)$  | $\mathbb{C}(16)$ | $\mathbb{H}(16)$ | $2\mathbb{H}(16)$ | $2\mathbb{H}(32)$ |
| 8   | $\mathbb{R}(16)$ | $2\mathbb{R}(16)$ | $\mathbb{R}(32)$ | $\mathbb{C}(32)$ | $\mathbb{H}(32)$  |                   |

Здесь для краткости алгебра матриц порядка  $n$  над полем или над телом  $\mathbb{K}$  обозначена как  $\mathbb{K}(n)$ . Прямая декартова сумма таких алгебр -  $2\mathbb{K}(n)$ .

Матрицы в роли чисел

Множество квадратных матриц размера  $n \times n$  с элементами поля  $\mathbb{K}$  обозначим:  $Mat_n(\mathbb{K})$ .

*Теорема:*

$Mat_n(\mathbb{K})$  является алгеброй над полем  $\mathbb{K}$ .

Легко проверяется, что:

$$\begin{aligned}(A + B)_{ij} &= A_{ij} + B_{ij}, \\ (\lambda A)_{ij} &= \lambda A_{ij}, \\ (AB)_{ij} &= \sum_{k=0}^n A_{ik} B_{kj}.\end{aligned}\tag{16.7}$$

Можно сказать, что  $A \in Mat_n(\mathbb{K})$  есть линейное преобразование линейного пространства  $V$  над полем  $\mathbb{K}$ .

Группа Гротендика.

Для  $m, n \in \mathbb{N}$  задумаемся над операциями:  $(m - n) = ? (n - m) = ?$  Если  $m > n$ , то  $(n - m) \notin \mathbb{N}$ . Обозначим его  $n \ominus m$ . Если мы хотим, чтобы в расширенном множестве чисел выполнялись привычные операции сложения, то нам надо отождествлять  $n \ominus m$  со всем выражением. Это значит, что для двух произвольных чисел:

$$\begin{aligned}(n + k) \ominus (m + k): k \in \mathbb{N} \\ (n - k) \ominus (m - k) \quad 1 \leq k \leq m, n.\end{aligned}\tag{16.8}$$

Мы будем считать их равными тогда и только тогда:

$$\begin{aligned}n_1 \ominus m_1 &\equiv n_2 \ominus m_2 \\ \Updownarrow & \\ n_1 + m_2 &= n_2 + m_1\end{aligned}\tag{16.9}$$

Например:  $0 \ominus 0 - m \ominus n = n \ominus m$ .

Таким образом, можно сказать, что класс эквивалентности образует группу по сложению.

*Теорема:*

Полученная таким образом группа изоморфна множеству целых чисел:  $G \sim \mathbb{Z}$ .

При  $m > n: (m + k) \ominus (n + k) \equiv m - n, m = n: (m + k) \ominus (n + k) \equiv 0, m < n: (m + k) \ominus (n + k) -$  отрицательное число.

Аналогично построение мультипликативной группы  $\mathbb{Q}^*$  ненулевых рациональных чисел. Можно сказать, что  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  – полугруппа, и можно рассматривать формально порождённую символом деления  $m: n, \{n; m\} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Эле-

менты  $m_1 : n_1 \equiv m_2 : n_2 \Leftrightarrow m_2 \times n_1 \equiv m_1 \times n_2$ . То есть класс эквивалентности чисел  $m : n$  может быть отождествлен  $z = \frac{m}{n}$ .

Для всех конечных групп  $\text{car } \Gamma < \aleph$  имея  $\Gamma : \Gamma_1$  (нормальный делитель гамма-1) и  $\Gamma_2 = \Gamma / \Gamma_1$  (фактор-группа гамма-2) естественно считать, что группа  $\Gamma$  делится на  $\Gamma_1$ . Построим группу, исходя из этого свойства. Обозначим групповой закон в аддитивной форме знаком «+». Если  $[\Gamma]$  гамма обозначает класс конечных групп, изоморфных  $\Gamma$ , то по определению имеет место порождение этой группы двумя классами:  $[\Gamma] = [\Gamma_1] + [\Gamma_2]$ . Это выражение обобщается:  $[\Gamma] = n_1[\Gamma_1] + n_2[\Gamma_2] + \dots + n_k[\Gamma_k]$  (\*), где  $\text{car } \Gamma_i < \aleph, n_i \in \mathbb{Z}$ . Тем самым доказано, что свободная абелева группа со счетным числом образующих может быть представлена в виде суммы нормальных делителей, факторизованных по целым числам. Так же стоит отметить, что  $\Gamma$  может быть циклической группой простого порядка, либо простой конечной группой.

*Следствие:*

Каждое выражение (\*) можно заменить ровно одним эквивалентным ему выражением того же вида, где  $\Gamma_i$  принадлежит списку групп, перечисленных в теореме.

Во всех рассмотренных случаях группа строится по одному и тому же принципу: вводятся дополнительные элементы – отрицательные числа, дробные, формальные линейные комбинации, и разбивается полученное множество по классу эквивалентности этим элементам. Наиболее общим выражением описанного принципа до последнего времени считалось понятие группы Гротендика. Так называется коммутативная группа, порождаемая классами следующих тождественных объектов:  $[A] = [B] + [C]$  – объект  $A$  есть подобъект  $B$  и фактор-объект  $C$ . Здесь заключена суть данного параграфа – в принципе факторизации – в переходе от числа к числу мы осуществляем процесс факторизации.

Понимание этого соображения позволяет нам переместиться от рациональных чисел к действительным непривычным путем. Вещественные числа получаются из рациональных путем процедуры пополнения – применимой для любого метрического пространства. Метрическое пространство – это множество, в котором определена функция «расстояния» между его элементами. Функция отвечает некоторым требованиям: 1) Функция неотрицательна:  $f(x, y) \geq 0$ ; 2) Функция носит симметрический характер для одной и той же пары элементов и равняется нулю для пары одинаковых элементов:  $f(x, y) = f(y, x), f(x, x) = 0$ ; 3) Функция отвечает неравенству треугольника:  $f(a, b) + f(b, c) \geq f(a, c)$ .

Насколько естественно определено обычное расстояние между рациональными точками множества  $\mathbb{Q}$ ? Расстоянием между элементами этого множества может быть, например, функция модуля разности:  $\forall \{r_1, r_2\} \in \mathbb{Q}: d(r_1, r_2) := |r_1 - r_2|$ .

Рассмотрим другой пример функции расстояния на том же множестве. Выберем простое число  $p$ . Любое рациональное  $r$  однозначно записывается в де:  $\forall r \in \mathbb{Q} = p^k \frac{m}{n}, k \in \mathbb{Z}$ . При этом  $\frac{m}{n}$  – несократимая дробь, и выполняется  $\text{НОД}(p, m) = \text{НОД}(p, n) = 1$ . Величина  $p^{-k}$  называется  $p$ -адической нормой числа  $r$ , и обозначается:  $\|r\|_p$ . Можно проверить, что  $d_p(r_1, r_2) = \|r_1 - r_2\|_p$ . По свойству треугольников:  $d_p(r_1, r_2) + d_p(r_2, r_3) \geq d_p(r_1, r_3)$ , но в нашем случае треугольники равнобедренные, причем длина основания не превосходит боковой стороны. Такие треугольники порождают ультраметрические пространства. В таких пространствах, например,  $\sum x_n$  сходится, если  $x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . В пространстве целых чисел ультраметрические пространства образуют ограниченное множество, диаметром 1.

*Определение:*

$\mathfrak{B}$  является метрическим, а  $\mathfrak{B}^*$  называется пополнением, если:  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^*$  и  $[\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}^*$  (применяя процедуру пополнения мы выходим на  $\mathfrak{B}^*$ ).

Применяя процедуру пополнения для пространства рациональных чисел мы получаем  $[\mathbb{Q}] = \mathbb{O}_p$ . Пусть  $X$  – множество. Топологией в  $X$  называется  $\forall \tau$  (любая система тау), если

- 1)  $X \setminus \{\emptyset\} \in \tau$ ,
- 2)  $\left\{ \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \mid \bigcap_{\alpha} G_{\alpha} \in \tau \right\} \in \tau$ .

При этом  $(X, \tau)$  задают топологию на  $X$ , а множества, которые принадлежат  $(X, \tau)$ , называются открытыми.

Множество  $\mathbb{O}_p$  – это множество целых  $p$ -адических чисел, образованных на основании обговоренных ранее принципов.  $p$ -адические числа допускают запись в виде бесконечных чисел в  $p$ -ичной системе счисления. Целое  $p$ -адическое число однозначно записывается в виде бесконечной влево последовательности:  $\dots a_n \dots a_2, a_1, a_0$ . Причем:  $0 \leq a \leq p - 1$  (\*). Запись выглядит как:  $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n + \dots$ . Так как имеет место:  $\|a_p p^n\| < p^{-n}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_p p^n = 0$  можно сказать, что ряд сходится.

Целые  $p$ -адические числа образуют кольцо. В отличии от  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{O}_p$  нет никакого естественного порядка.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p^n - 1) = -1 \quad (16.10)$$

Для  $p$ -адических чисел можно определить аналог функции  $sgn(x)$ .

$$sgn(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (16.11)$$

На отрезке  $[-1; 1]$  функция  $sgn$  может быть приближена  $x^\epsilon$ , где  $\epsilon$  – малое рациональное число с нечётным знаменателем. В  $p$ -адических ситуациях вместо него применяется  $p^n$  с большим  $n$ .

*Теорема:*

Любое число, принадлежащее  $\mathbb{O}_p$ , существует предел:

$$\forall a \in \mathbb{O}_p \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p^n} = sgn_p a, \quad (16.12)$$

обладающий следующими свойствами:

- 1)  $sgn_p(ab) = sgn_p a \cdot sgn_p b$ ,
- 2)  $sgn_p a$  зависит только от последней цифры  $a_0$
- 3)  $sgn_p a = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$  и является корнем  $(p - 1)$  степени из  $-1$ . В противном случае – если  $a_0 \neq 0$ .

*Теорема:*

Если  $a < d_p(a; b) < 1 \Rightarrow d_p(a^p; b^p) < d_p(a; b)$ .

В отличие от обычных целых чисел, многие целые  $p$ -адические числа обратимы. Если  $sgn_p a \neq 0$ , то  $a^{-1}$  – тоже целое  $p$ -адическое число. Все рациональные числа со знаменателем, взаимно простым с  $p$ , являются целыми  $p$ -адическими числами. Если процедура пополнения по расстоянию применять не к  $\mathbb{Z}$ , а к иррациональным числам, мы получим множество всех  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$ .

Правила арифметических действий схожи с привычным, однако все вычисления нужно выполнять с последней цифры.

Пример:  $\mathbb{Q}_5$ :

$$\begin{array}{r} \dots 123123123 \\ \text{Сложение:} \quad +010101010.1 \\ \hline 133224133.1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dots 123123123 \\ \text{Умножение: } \times 010101010.1 \\ \hline 210022042.3 \end{array}$$

$$\text{Корень: } \sqrt{-1} = \sqrt{\dots 44444} = \text{sgn} 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^5 = \dots 212$$

p-адические числа.

Оказывается весьма важным расширить рамки привычных теории групп и теории чисел на следующие алгебраические объекты, которые являются вновь или недавно открытыми.

Так же появляется расширение понятия комплексного числа, которыми являются кватернионы  $\mathbb{H}$  (открытые на границе XX века), обобщение кватернионов – алгебра Клиффорда  $\mathbb{Q}$  (не число, а алгебра, потому что для натуральных чисел нет операций, обратных сложению, или умножению).

Ранее мы говорили об этих алгебрах – кватернионов и Клиффорда, и потом было проиллюстрировано, что не только обратные операции порождают расширения понятия алгебры, и для этого в качестве примера были рассмотрены числа вида  $\dots a_n \dots a_1 a_0$ , имеющие бесконечный влево характер, которые назывались p-адическими числами.

Если говорим о шифровании, можно сказать, что -адическое число - это модель приёма, а все остальные принятые нами числа, насколько хватает мощности вычислительного комплекса и является p-адическим числом.

С другой стороны, p-адическое число может описывать блуждания в графе бесконечной мощности, где  $a_i$  - это нагруженные вершины графа (рёбра от движения от  $v_i$  к  $v_{i+1}$  получается значение  $a_i$ ). Непосредственно к этому вопросу теории графов мы не доходим, он введён в наш курс исключительно с иллюстративной задачей.

#### Основные положения p-адического анализа

P-адический анализ, если его структурировать на глобусе математики, он больше относится к теории чисел. Возникает он, прежде всего, при изучении вопросов делимости, и сравнения по целому модулю. Так же имеет место быть использование всех этих вопросов в математической физике.

Существует математический принцип: всё, что используется в математике, имеет некоторые физический смысл. Чем проще и элегантней конструкция, тем фундаментальней физический смысл.

Если для решения проблемы не хватает обычного математического анализа, используется p-адический анализ.

Если объединить действительные числа и p-адические числа, полученные из рациональных методов пополнения:  $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}_p$ , то для всех простых чисел это

объединение порождает структуру, которая обозначается  $\mathbb{A}$  и называется абель, по определению состоящую из чисел вида  $a = (a_\infty; a_2; a_3; \dots a_p \dots)$ ,  $a_\infty \in \mathbb{R}$ ,  $a_p \in \mathbb{Q}_p$ . Арифметические операции предела для абелей определяется по-компонентно, так, как это делается в обычном математическом анализе.

На абели переносится весь аппарат алгебры и анализа. Абель соединяет воедино все самые лучшие функции или черты функции  $\mathbb{R}_n$  анализа и  $p$ -адического анализа  $\mathbb{Q}_p$ .

Обратимые элементы абелей называются идеями:  $\|a\| = \prod_p \|a_p\|_p$ .

Произведения в силу построения вроде бы бесконечны, но на самом деле конечны, потому что почти все сомножители в абелях единичны.

Заметим, что поле  $\mathbb{Q}_p$  вкладывается в абели:  $\mathbb{A} \supset \mathbb{Q}_p$ . Соответственно, любому рациональному  $r$  соответствует абель:  $\forall r \in \mathbb{Q}: (r, r, \dots, r)$ , где  $r$  на первом месте - это действительное число,  $r$  на втором месте - это 2-адическое число,  $r$  на третьем месте - 3-адическое число и так далее до  $p$ -адического числа.

Абель вида  $r$ , где  $r$  - рациональное, называется главными абелями.

Если  $r \neq 0 \Rightarrow r^{-1}$ , то есть существует  $r^{-1}$  - обратное, а  $r$  называется обратимым.

Переход от рациональных чисел к действительным

Мы сказали, что процедура пополнения порождает новые числа - мы это проиллюстрировали на примере рациональных чисел. Нечто подобное получается и при переходе от рациональных к действительным числам.

В силу того, что по плотности множество рациональных  $\mathbb{R}$  и действительных  $\mathbb{Q}$  чисел отличаются, можно утверждать, что любое действительное число - сечение множества рациональных  $\forall c \in \mathbb{R}$ , т.е. такое разбиение множества рациональных на два подмножества, так, что  $a \in A < b \in B$ . Если  $\exists a_{\max} \in A$  и  $\exists b_{\min} \in B$ , такие, что  $c$  может быть отождествлено с одним из этих чисел, то это хорошо. На практике такое обычно редко происходит. Фактически, мы получаем новое число, не рациональное (то есть не принадлежащее рациональным числам), но реально существующее. Оно, по определению, считается больше, чем все числа из  $A$ , но меньше, чем все числа из  $B$ . Для подобных сечений могут быть произведены все арифметические действия по получению поля. В результате объект, который получается, изоморфен множеству действительных чисел.

Вопрос: почему нельзя идти дальше и рассматривать сечения действительных чисел как элементы ещё большего поля. На то является ограничение теоремы о верхней грани.

*Теорема о верхней грани:*

Для любого сечения  $\forall \mathbb{R} = A \cup B \quad \exists a_{\max} \in A$  или  $\exists b_{\min} \in B$

Можно ли вставить между  $A$  и  $B$  ещё одно число? Чтобы ответить на этот вопрос, введём величину  $\varepsilon$ , которое обозначает бесконечно малую величину:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} (*). \quad (16.13)$$

Тогда мы приходим к тому, что для дальнейшего алгебраического конструктива, нужно отказаться от аксиомы действительных чисел Архимеда: как бы ни был мал положительный  $\varepsilon$ , и как бы ни было велико число  $N$ , складывая много раз  $\varepsilon$  с самим собой, мы получим число, большее, чем  $N$ .

Если же пренебречь аксиомой Архимеда, то может быть построено бесконечное число полей, содержащих действительное число.

И тем самым мы подходим к одному из разделов математики: нестандартный анализ.

Один из подходов нестандартного анализа является алгебра Конвейя.

Алгебра-Конвейя  $\mathbb{K}$

Сакс, который назвал свои числа сюрреальными, или же  $K$ -числа, числа-Конвейя. В арифметике алгебры Конвейя существуют только два знака:  $\uparrow$  (вверх, up) и  $\downarrow$  (вниз, down). Из этих двух знаков и составляются  $K$ -числа, и наборы таких чисел могут иметь любую мощность. Обычно ограничивают сверху мощностью допустимых наборов. Уже счётные наборы включают в себе все обычные действительные числа и множества нестандартных, сюрреалистических чисел. На множестве Конвейя есть два отношения порядка:

1) Обычные « $<$ » и « $>$ ». Вполне упорядоченные числа Конвейя гарантируют сравнимость их между собой.

2) Для второй операции - «раньше» и «позже». Более раннее число по определению получается из более позднего обрезанием «хвоста» - т.е. отбрасывание знаков, начиная с некоторого места. Записывается это как  $a \leftarrow b$ .

*Лемма «арифметические действия в алгебре Конвейя»:*

Для  $\{A, B\} \in \mathbb{K}$ , где  $\forall a \in A < \forall b \in B \Rightarrow \exists 1\{c\} \in \mathbb{K}$ :

1)  $a < c < b$ ;

2)  $c$ - самое раннее из всех чисел, разделяющих  $A$  и  $B$ .

Это записывается как  $(A: B)$ .

Два принципа алгебры Конвейя:

1) правило арифметических действий определяется не сразу для всех чисел Конвейя, а постепенно, начиная с более ранних;

2) результаты действий должны быть самыми простыми из всех возможных, т.е. самым ранним числом, которое не противоречит ранее полученным результатам.

Выводы из этих двух принципов:

$$1) 0 + 0 = 0$$

Легкомысленно? С одной стороны, да, но, с другой, давайте при помощи этого правила и леммы, обозначенных ранее, определим строгую сумму любых двух чисел Конвейя:

Введём следующую операцию: верхний срез числа  $x$  (обозначается как  $x^\top$ ) – множество чисел, более ранних, чем  $x$ , и больше, чем  $x$ .

Соответственно, нижний срез числа  $x$  (обозначается как  $x_\perp$ ) – множество чисел, более поздних, чем  $x$ , и меньше, чем  $x$ .

Пример 1:  $x = \uparrow\downarrow\uparrow$  - данное число Конвейя.

$x^\top = \{\uparrow\}$  - верхний срез.

$x_\perp = \{\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow; 0\}$  - нижний срез.

Пример 2:  $x = 0$ .

$x^\top = x_\perp = \{\emptyset\}$  - верхний и нижний срезы.

Сумма двух чисел Конвейя:

$$x + y = \{(x_\perp + y) \cup (x + y_\perp) : (x^\top + y) \cup (x + y^\top)\}. \quad (16.14)$$

Первые две скобки означают множество всех чисел вида  $a + y$ , где  $a \in x_\perp$ .

Вторые две скобки означают множество всех чисел вида  $a + y$ , где  $a \notin x^\top$ .

При внимательном рассмотрении данные формулы определяют  $x + y$  при условии, что уже известны суммы всех более ранних слагаемых (принцип очередности), и делает это наиболее простым способом по основной лемме.

*Определение:*

$\uparrow^n = \underbrace{\uparrow\uparrow \dots \uparrow}_n$  - степень числа  $\uparrow$  (up),  $n \in \mathbb{N}$ ,

$\downarrow^n = \underbrace{\downarrow\downarrow \dots \downarrow}_n$  - степень числа  $\downarrow$  (down),  $n \in \mathbb{N}$ .

Вывод: числа Конвейя образуют аддитивную группу, изоморфную группе двоичных рациональных чисел. Запись двоичного рационального числа  $r$  в виде последовательности down, up есть ни что иное, как протокол поиска этого числа в следующем смысле:

Стартуем из точки 0 на действительной оси  $\mathbb{R}$ , расположенной вертикально, и двигаемся вверх или вниз с шагом единичной длины. Каждый такой шаг отмечается в протоколе через движение вверх ( $\uparrow$ , up) или движение вниз ( $\downarrow$ , down). Так продолжается, пока не перешагнём некоторое число, которое и

ищем. Индикатором превышения можно считать смену монотонной последовательности стрелок одного направления единой стрелкой обратного. После этого каждый новый шаг делается вдвое короче предыдущего, а его направление по-прежнему отмечается в протоколе up или down.

$$\text{Пример: } 2\frac{3}{16} = \underbrace{1 + 1 + 1}_{=3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow.$$

Тот же принцип применим ко всем действительным числам и приводит их записи в виде бесконечных чисел Конвейя.

*Лемма:*

Рациональные, но не двоичные рациональные числа соответствуют периодическим, начиная с некоторых значений, числам Конвейя. Для записи периодических чисел Конвейя удобно использовать знак периода:  $\Omega$ .

$$\text{Например, } \uparrow\uparrow\downarrow \in \mathbb{K} = \uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots \in \mathbb{K} = \frac{5}{3} \in \mathbb{R}.$$

Все встреченные нами числа Конвейя могут быть рассмотрены как способ записи обычных действительных чисел. Хотя этот способ и отличается некоторой равномерностью, но всё же менее удобен по сравнению с обычной записью. Но его преимущество – в записи нестандартных чисел, например, такие, как  $\omega = \hat{\uparrow}$  и  $\varepsilon = \uparrow\downarrow$ .

Оказывается, что  $\forall n \in \mathbb{N}: \omega > n, 0 < n \times \varepsilon < 1$ .

Так же определим умножение положительных чисел Конвейя:

$$x \times y = \{(x \times y_{\downarrow}) \cup (x_{\downarrow} \times y): (x \times y_{\uparrow}) \cup (x_{\uparrow} \times y)\}, \quad (16.15)$$

можно проверить, что  $\omega \times \varepsilon = \hat{\uparrow}$ .

*Определение:*

Множество называется вполне упорядоченным, если в его подмножестве существует минимальный элемент.  $\mathbb{N}$  - это вполне упорядоченное множество для естественного порядка.

Не вполне упорядоченные - рациональные  $\mathbb{Q}$  или действительные  $\mathbb{R}$  числа.

Исходя из представления алгебры Конвейя, счётное множество может быть упорядочено различными способами. Такого типа упорядочения дают факторизацию.

В любой категории морфизмов есть понятие эквивалентности объектов, которое оказывается несчётным множеством.

До сих пор встречающиеся нам числа Конвейя соответствуют вполне упорядоченным множествам типа множества рациональных чисел. Но может быть и множество вида  $\hat{\uparrow}\uparrow$ . По сравнению с  $\omega = \hat{\uparrow}$ , оно имеет максимальный элемент.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анищик, Т. А. Дискретная математика. Элементы теории графов: практикум : учебное пособие / Т. А. Анищик. — Краснодар : КубГАУ, 2020. — 79 с.
2. Асанов, М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы : учебное пособие / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 364 с. — ISBN 978-5-8114-4998-9.
3. Белова, О. О. Дискретная математика / О. О. Белова. — Калининград : БФУ им. И.Канта, 2021. — 288 с. — ISBN 978-5-9971-0646-1.
4. Богаченко, Н. Ф. Дискретная математика: комбинаторика, теория графов и шифры : учебное пособие / Н. Ф. Богаченко, С. В. Усов. — Омск : ОмГУ, 2019. — 56 с. — ISBN 978-5-7779-2377-6.
5. Болотюк, В. А. Практикум и индивидуальные задания по элементам теории графов (типовые расчеты) : учебное пособие для вузов / В. А. Болотюк, Л. А. Болотюк. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 152 с. — ISBN 978-5-8114-8761-5.
6. Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В. «Дискретная математика. Учебник для студентов вузов». Москва, АСТРЕЛЬ, 2006.
7. Горлач, Б. А. Исследование операций. Практикум для студентов технических и экономических специальностей вузов : учебное пособие для вузов / Б. А. Горлач, Н. Л. Додонова. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 200 с. — ISBN 978-5-8114-6731-0.
8. Деза Е.И., Модель Д.М. «Основы дискретной математики» Москва, ЛЕНАНД, 2018
9. Емеличев В.А., Зверев И.Э., Мельников О.И., Сарвалов В.И., Тышкевич Р.И. «Теория графов в задачах и упражнениях» Москва, ЛЕНАНД, 2019
10. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум : учебник / Я. М. Ерусалимский. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 476 с. — ISBN 978-5-8114-2908-0.
11. Игнатъев, А. В. Теория графов. Лабораторные работы : учебное пособие / А. В. Игнатъев. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 64 с. — ISBN 978-5-8114-9603-7.
12. Калитин, Д. В. Основы дискретной математики: теория графов : учебное пособие / Д. В. Калитин, О. С. Калитина. — Москва : МИСИС, 2017. — 67 с. — ISBN 978-5-906846-68-6.

13. Князьков, В. С. Введение в теорию графов : учебное пособие / В. С. Князьков, Т. В. Волченская. — 2-е изд. — Москва : ИНТУИТ, 2016. — 76 с.
14. Кочкарев А.А., Яцкин Д.В.. «Теория графов и классические задачи прикладной математики в экономике» Москва, КНОРУС, 2020
15. Микони, С. В. Дискретная математика для бакалавра: множества, отношения, функции, графы : учебное пособие / С. В. Микони. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-1386-7.
16. Омельченко А.В. Теория графов. Учебник. – М.: МЦНМО, 2018. – 416 с.
17. Оре Ойстин. Теория графов. – М.: Либроком, 2009. – 354 с.
18. Рыбин, С. В. Дискретная математика и информатика : учебник для вузов / С. В. Рыбин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 748 с. — ISBN 978-5-8114-8566-6.
19. Уилсон, Р. Дж. Введение в теорию графов, 5-е изд. Пер. с англ. - СПб. ООО "Диалектика", 2019. - 240 с.
20. Харари Ф. «Теория графов» Москва, ЛЕНАНД, 2018
21. Шевелев, Ю. П. Прикладные вопросы дискретной математики : учебное пособие / Ю. П. Шевелев. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 356 с. — ISBN 978-5-8114-2762-8.
22. Шевелев, Ю. П. Сборник задач по дискретной математике (для практических занятий в группах) : учебное пособие / Ю. П. Шевелев, Л. А. Писаренко, М. Ю. Шевелев. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 528 с. — ISBN 978-5-8114-1359-1.