Практическое занятие 6

Ряд Тейлора

Представление функций степенными рядами. Условие сходимости. Разложение функций в ряд Тейлора. Приближенные вычисления значений функций и определенных интегралов.

Теоретический материал

1. **Представление функций степенными рядами**

Пусть $f(x)$ – заданная функция (имеет производные всех порядков) в некотором интервале с центром в точке x_0. Тогда можно применить *формулу Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора.

Таким образом функция может быть разложена в ряд Тейлора, если:

а) она имеет производные всех порядков;

б) остаточный член $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$, ξ между x_0 и x, для некоторого значения x $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Если $R_n(x) \nrightarrow 0$, то ряд, составленный из производных может сходиться, но не к $f(x)$.

Классический *пример* такой функции:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

При разложении в ряд Тейлора получаются все $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Определение. Степенной ряд называется *рядом Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Если $x_0 = 0$, то данный степенной ряд называется *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Теорема (о единственности представления функции степенным рядом).

Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то этот ряд является рядом Тейлора этой функции.

Пример. Разложить функцию $f(x) = e^x \sin x$ в ряд по степеням x.

Решение. Определим значение функции $f(x) = e^x \sin x$ в точке $x = 0$:

$f(0) = 0.$

Найдем производные $f(x)$ в точке $x = 0$:

$$f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}\, e^x \sin(x + \frac{\pi}{4}); \; f'(0) = \sqrt{2} \sin\frac{\pi}{4};$$

$$f''(x) = \sqrt{2} e^x [\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)] = \sqrt{2}^2 e^x \sin(x + \frac{2\pi}{4});$$

$$f''(0) = \sqrt{2}^2 \sin\frac{2\pi}{4};$$

…………………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x \sin(x + \frac{n\pi}{4}); \; f^{(n)}(0) = \sqrt{2}^n \sin\frac{n\pi}{4};$$

…………………………………………………………………………

Теперь проверим, стремится ли остаточный член R_n к нулю при $n \to \infty$. Для этого оценим его абсолютную величину:

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n)}(\xi) x^n}{n!}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}^n e^{\xi} \sin(\xi + \frac{n\pi}{4})}{n!}\right| < \frac{\sqrt{2}^n e^{|x|} |x|^n}{n!} = u_n.$$

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ проверим сходимость по признаку Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{2}^{n+1}e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\sqrt{2}^{n}e^{|x|}|x|^{n}}=\frac{\sqrt{2}|x|}{n+1}=0<1$, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а его общий член $u_n\to 0$ при $n\to\infty$ (в силу необходимого признака сходимости), поэтому и остаточный член R_n, имеющий модуль, меньший u_n, и подавно стремится к нулю при всех x. Поэтому имеем разложение:

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n;\ \ x\in(-\infty,+\infty).$$

2. Разложение основных элементарных функций

Выпишем разложения в ряды Маклорена основных элементарных функций.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\qquad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\qquad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\qquad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\qquad x\in[-1,1];$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots,\ x\in(-1,1];$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$$x\in(-1,1).$$

Последнее выражение при $\alpha=-1$ принимает вид:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n\cdot x^n+\cdots,\qquad x\in(-1,1).$$

Заменяя x на $-x$, приходим к стандартной формуле для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ x\in(-1,1).$$

<u>*Пример 1.*</u> Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, а затем табличным разложением функции $\cos x$, заменяя переменную x на переменную $2x$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ по степеням x.

Решение. Воспользуемся табличным разложением функции e^x.

$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$. Затем поделим все выражение на x:

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty).$$

Пример 3. Разложить функцию $f(x) = \ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$ по степеням x.

Решение. Воспользуемся табличным разложением функции $\ln(1+x)$:

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1]$; тогда

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{2^n x^n}{n}, \qquad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right];$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1,1];$$

$$\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}} = \frac{1}{3}[\ln(1+2x) - \ln(1-x)] = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n+1}2^n + 1]\frac{x^n}{n} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{15}{4}x^4 + \cdots\right) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \cdots \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Пример 3. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x+2}$ по степеням $(x-1)$.

Решение. Преобразуем эту функцию, чтобы можно было использовать разложение $\frac{1}{x-1}$.

$$\frac{1}{x+2} = \frac{A}{1 - B(x-1)} \Rightarrow 1 - B(x-1) = A(x+2) \Rightarrow 1 + B - Bx = Ax + 2A.$$

Приравнивая коэффициенты при x^0 и x^1, получаем:

$$\begin{cases} A = -B; \\ 1 + B = 2A \end{cases} \Rightarrow 1 + B = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}, A = \frac{1}{3}.$$

Тогда $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{-3}} = \left[\text{сделаем замену } y = \frac{x-1}{-3}\right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-y} = [\text{разложим}] =$

$$= \frac{1}{3}[1 + y + y^2 + \cdots + y^n + \cdots] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)^2}{3^2} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^n} + \cdots\right]$$

Разложение справедливо, когда:

$\left|\frac{x-1}{-3}\right| < 1$, т.е. $-3 < x - 1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. Разложить функцию $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ по степеням x.
2. Разложить функцию $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ по степеням x.
3. Разложить функцию $f(x) = e^x \sin x$ по степеням x.
4. Разложить функцию $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$, т.е. по степеням переменной $(x+1)$.
5. Разложить функцию $f(x) = 2^x$ по степеням $(x-3)$.
6. Разложить функцию $f(x) = e^{3x}$ по степеням $(x-1)$.

3. Приближенные вычисления значений функции

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{2}$ с точностью до 5 знаков после запятой.

Решение. Для решения задачи воспользуемся табличным разложением функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \cdots$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{128}{64} \cdot \frac{125}{125}} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{128}{125}} = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{125} - \frac{1}{125^2} + \frac{1}{75 \cdot 125^2} - \cdots\right).$$

Последнее выписанное слагаемое этой суммы меньше, чем 10^{-5}. Кроме того, полученный числовой ряд является знакочередующимся рядом Лейбница, поэтому ошибка при замене суммы ряда на частичную сумму не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда.

Значит, для достижения заданной точности достаточно учесть первые три члена ряда: $\sqrt[3]{2} \approx \frac{5}{4}(1 + 0{,}008 - 0{,}000064) = 1{,}25992.$

4. Приближенные вычисления значений определенных интегралов

Пример. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx$ с точностью до 3 знаков после запятой.

Решение. Воспользуемся полученным разложением функции $\operatorname{arctg}(x)$ в ряд Маклорена:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots\right) dx = = \left(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \cdots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^5 \cdot 5^2} - \frac{1}{2^7 \cdot 7^2} + \cdots.$$

Получили знакочередующийся ряд Лейбница, последнее выписанное слагаемое меньше, чем 10^{-3}. Отбрасывая это слагаемое, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} dx \approx 0{,}5 - 0{,}01389 + 0{,}00125 \approx 0{,}487.$$

5. Вычисление предела последовательности

Теория рядов используется в теории последовательностей.

<u>*Пример.*</u> Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{[(3n)!]}=0.$

<u>*Решение.*</u> Составим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{[(3n)!]}$. Для изучения его сходимости применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot[(3n)!]}{\left[\left(3(n+1)\right)!\right]\cdot n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3(3n+1)(n+1)(3n+2)}=e\cdot 0=0<1.$$

По признаку Даламбера ряд сходится и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!}=0.$$

6. Вычисление значения производной функции в точке

Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x-x_0)^n$, то этот ряд является рядом Тейлора этой функции по теореме единственности. При этом $u_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Тогда для нахождения значения *n*-ой производной функции в точке x_0 используется формула: $f^{(n)}(x_0)=u_n\cdot\ n!$

<u>*Пример.*</u> Найти производную *n*-ого порядка для функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ при $x_0=0, n=6$ и $n=99$.

<u>*Решение.*</u> Разложим функцию $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$:

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sin x=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$$

Коэффициент $u_6 = -\frac{1}{7!}$, где $f^{(6)}(0) = -\frac{1}{7!}6! = -\frac{1}{7}$. Коэффициенты при нечетных степенях x в данном разложении равны нулю, в частности $u_{99} = 0$ и тогда $f^{(99)}(0) = 0$.

7. Применение теории рядов к решению линейных дифференциальных уравнений

Одним из методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является применение теории рядов. Данный метод использует известное утверждение из теории дифференциальных уравнений.

<u>Теорема.</u> Если все коэффициенты и правая часть линейного дифференциального уравнения n-ого порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

разлагаются в степенные ряды в некоторой окрестности точки x_0, то решение $y(x)$ этого дифференциального уравнения, удовлетворяющего условиям: $y(x_0) = A_0, y'(x_0) = A_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1}$, также разлагается в степенной ряд в указанной окрестности.

<u>Пример.</u> Решить задачу Коши $y' = y^2 + x^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

<u>Решение.</u> Подставим в уравнение $y' = y^2 + x^3$ начальные условия. Тогда $y'(0) = y^2(0) = \frac{1}{4}$. Найдем вторую производную, применяя дифференцирование неявной функции $y'' = 2yy' + 3x^2$. Тогда $y''(0) = 2y(0) \cdot y'(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Аналогично, $y''' = 2(y')^2 + 2yy'' + 6x$,

$y'''(0) = 2(y'(0))^2 + 2y(0)y''(0) = 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$,

$y^{(4)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' + 6 = 6y'y'' + 2yy''' + 6$,

$$y^{(4)}(0) = 6y'(0)y''(0) + 2y(0)y'''(0) + 6 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + 6 =$$

$= \frac{6}{16} + \frac{6}{16} + 6 = \frac{12}{16} + 6 = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$ и т.д.

Поскольку решение уравнения ищем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots,$$

то подставляя найденные коэффициенты, получим ответ:

$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4\cdot 2!}x^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}x^3 + \frac{27}{4\cdot 4!}x^4 + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 +$
$+ \frac{9}{32}x^4 + \cdots$

Задания для самостоятельного решения

Типовой расчет для факультетов ИИТ и ФТИ: № 1.12* Варианты 1-4, 5-8, 9-12, 13-16; № 1.13* (Задача не является обязательной); № 2.4 (по номеру варианта).