Математический анализ-3

Практическое занятие 12

Интегрирование функций комплексного переменного

Ряды с комплексными членами.

Ряды Тейлора и Лорана

Интегрирование функций комплексного переменного

Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Теорема (*теорема Коши для односвязной области*) Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D и C – замкнутый контур, принадлежащий области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования и

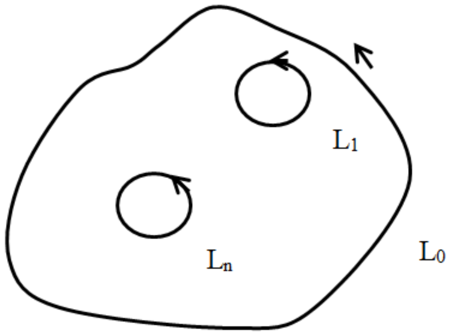
$$\oint_C f\,(z)dz = 0.$$

Теорема *(теорема Коши для многосвязной области).* Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кривыми $L_0, L_1, \ldots, L_n$, то $\oint_L f\,(z)dz = 0, L = L_0 + L_1 + \cdots + L_n$ при условии, что обход всех контуров совершается так, что область $\overline{D}$ остается с одной стороны (слева).

Следствие. Если все контуры проходить в одном направлении (например, против часовой стрелки), то

$$\int_{L_0} f\,(z)dz = \int_{L_1} f\,(z)dz + \ldots + \int_{L_n} f\,(z)dz,$$

т.е. интеграл по внешнему контуру L_0 равен сумме интегралов по внутренним контурам.



Теорема *(интегральная формула Коши)*

Если $\boldsymbol{D}$ – односвязная или многосвязная область, ограниченная контуром $\boldsymbol{L}$, и $\boldsymbol{f(z)}$ – однозначная и аналитическая в $\overline{\boldsymbol{D}}$ функция, тогда для любой точки $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{D}$ справедлива формула

$$\boldsymbol{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz}.$$

Теорема. Если функция $\boldsymbol{f(z)}$ аналитична в области $\boldsymbol{D}$ и непрерывна в $\overline{\boldsymbol{D}}$, то во всех внутренних точках области у функции $\boldsymbol{f(z)}$ существуют производные любого порядка, причем справедлива формула

$$\boldsymbol{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz}$$

где $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{D}$, а $\boldsymbol{L}$ – граница области $\boldsymbol{D}$.

Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интегралы:

Пример 1. $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}dz, \quad C: \begin{cases} |z-2| = 1 \\ |z-2| = 3 \\ |z-2| = 5 \end{cases}$

1) В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z-2| = 1$, подынтегральная функция аналитическая, поэтому в силу теоремы Коши

$$\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}dz = 0$$

2) Внутри области, ограниченной окружностью $|z-2| = 3$, находится одна точка $z = 0$, в которой знаменатель обращается в ноль. Перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}dz = \int\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz$$

Функция $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши ($z_0 = 0$), получим:

$$\int\limits_{C} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \int\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{z^2}}{z-6}\bigg|_{z=0} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{3}$$

3) В области, ограниченной окружностью $|z-2| = 5$, имеем две точки $z = 0$ и $z = 6$, в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль. Непосредственно формулу Коши применять нельзя.

Разложим дробь $\frac{1}{z^2-6z}$ на простейшие:

$$\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}$$

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \frac{1}{6}\cdot \int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z-6}dz - \frac{1}{6}\cdot \int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z}dz =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 2\pi i \cdot e^{36} - \frac{1}{6}\cdot 2\pi i \cdot e^{0} = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i$$

Пример 2. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz$

Подынтегральная функция $\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}$ является аналитической в области $|z-1| \le 1$ всюду, кроме точки $z_0 = 1$. Выделим под знаком интеграла функцию $f(z)$, являющуюся аналитической в круге $|z-1| \le 1$. Перепишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}, \quad f(z) = \frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}$$

Тогда

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(1)$$

$$f'(z) = \left(\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}\right)' = \frac{\pi\cos\pi z \cdot (z+1)^2 - 2(z+1)\sin\pi z}{(z+1)^4} =$$

$$= \frac{\pi\cos\pi z \cdot (z+1) - 2\sin\pi z}{(z+1)^3}$$

$$f'(1) = \frac{2\pi\cos\pi}{2^3} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{2} i$$

Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

Теорема. Функция $f(z)$, аналитичная в круге $|z - z_0| < R$, разлагается в нем единственным образом в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

коэффициенты которого c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (n = 0,1,\ldots),$$

где L – окружность с центром z_0, целиком лежащая в круге сходимости ряда $|z - z_0| < R$.

Предполагается, что окружность проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Справедливы следующие разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R_{\text{сх}} = \infty$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R_{\text{сх}} = \infty$

$cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R_{\text{сх}} = \infty$

$ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$, $R_{\text{сх}} = 1$

$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \ldots$, $R_{\text{сх}} = 1$

при $\alpha = -1$

$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $R_{\text{сх}} = 1$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $R_{\text{сх}} = 1.$

Примеры для самостоятельного решения:

Разложить в ряд Тейлора по степеням z:

1) $f(z) = e^{z+2}$
2) $f(z) = \ln(3+z)$
3) $f(z) = \frac{3}{2z-5}$

Ряд Лорана, его область сходимости

Определение. Рядом Лорана называется ряд вида

$$\ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$
$$+ c_n(z-z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где z_0, c_n – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная.

Теорема. Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце

$r < |z - z_0| < R$ (не исключаются случаи $r = 0$ и $R = +\infty$), разлагается в этом кольце единственным образом в сходящийся к ней ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

называется *главной частью ряда* Лорана.

На практике при нахождении коэффициентов c_n используют готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций.

Примеры.

1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = z^2 cos\frac{1}{z}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

Для любого комплексного t имеем:

$$cost = 1 - \frac{t^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, R_{\text{сх}} = \infty$$

Подставляя $t = \frac{1}{z}$, получим:

$$z^2 cos\frac{1}{z} = z^2 \left(1 - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!\,z^{2n}} + \cdots\right) =$$

$$= z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!\,z^2} - \frac{1}{6!\,z^4} + (-1)^n \frac{1}{(2n)!\,z^{2n-2}} + \cdots =$$

$$= -\frac{1}{2!} + z^2 + \frac{1}{4!\,z^2} - \frac{1}{6!\,z^4} + (-1)^n \frac{1}{(2n)!\,z^{2n-2}} + \cdots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 0$, т.е. в кольце

$0 < |z| < +\infty$. $r = 0, R = +\infty$.

В этом кольце функция является аналитической.

$$z^2 cos\frac{1}{z} = -\frac{1}{2!} + z^2 + \frac{1}{4!\,z^2} - \frac{1}{6!\,z^4} + (-1)^n \frac{1}{(2n)!\,z^{2n-2}} + \cdots$$

При этом

$$-\frac{1}{2!} + z^2$$

является *правильной* частью ряда Лорана,

$$\frac{1}{4!\,z^2}-\frac{1}{6!\,z^4}+(-1)^n\frac{1}{(2n)!\,z^{2n-2}}+\cdots$$

является *главной* частью ряда Лорана.

2. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=(z+3)^4e^{\frac{2}{(z+3)^2}}$ в окрестности точки $z_0=-3$.

$$z+3=t$$

$$f(z)=t^4e^{\frac{2}{t^2}}=t^4\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{4}{2!\,t^4}+\frac{8}{3!\,t^6}+\cdots\right)=$$

$$=(z+3)^4+2(z+3)^2+2+\frac{4}{3(z+3)^2}+\cdots$$

Правильная часть: $(z+3)^4+2(z+3)^2+2$

Главная часть: $\frac{4}{3(z+3)^2}+\cdots$

Область сходимости: $0<|z+3|<+\infty$

3. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=(z-\pi)^2\sin\frac{5}{z-\pi}$ в окрестности точки $z_0=\pi$

$$f(z)=(z-\pi)^2\left(\frac{5}{z-\pi}-\frac{5^3}{3!\,(z-\pi)^3}+\frac{5^5}{5!\,(z-\pi)^5}-\cdots\right)=$$

$$=5(z-\pi)-\frac{5^3}{3!\,(z-\pi)}+\frac{5^5}{5!\,(z-\pi)^3}-\cdots$$

Правильная часть: $5(z-\pi)$

Главная часть: $-\frac{5^3}{3!(z-\pi)}+\frac{5^5}{5!(z-\pi)^3}-\cdots$

Область сходимости: $0<|z-\pi|<+\infty$

4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$, $z_0=i$ во всех областях аналитичности функции.

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}=\frac{z}{(z+i)(z-i)}=\frac{A}{(z+i)}+\frac{B}{(z-i)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z+i)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)}$$

$\mathbf{0<|z-i|<2}$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)}+\frac{1}{2}\frac{1}{2i+(z-i)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)}+\frac{1}{4i}\frac{1}{1+\frac{\mathrm{z-i}}{2i}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)}-\frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)}-\frac{i}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(i)^n\frac{(z-i)^n}{2^n}$$

Область сходимости $0<\left|\frac{z-i}{2}\right|<1 \Leftrightarrow 0<|z-i|<2$

$\mathbf{|z-i|>2}$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)}+\frac{1}{2}\frac{1}{2i+(z-i)}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)}+\frac{1}{2(z-i)}\frac{1}{1+\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{z-i}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)}+\frac{1}{2(z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-i)^n}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-i)^{n+1}}$$

Ряд Лорана состоит из главной части.

Область сходимости $\left|\frac{2}{z-i}\right|<1 \Leftrightarrow |z-i|>2$

Примеры для самостоятельного решения:

5. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{1}{3-z}$ в окрестности точки

$z_0 = 1$.

6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{3-z}$ по степеням z ($z_0 = 0$) во всех областях аналитичности функции.
7. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{2z+1}{z(z-3)}$ по степеням $z-3$ ($z_0 = 3$) во всех областях аналитичности функции.
8. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$ по степеням z ($z_0 = 0$) во всех областях аналитичности функции.
9. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$ в окрестности ее особых точек.

Домашнее задание:

Типовой расчет, часть 1, задачи 1.20, 1.21.