Практическое занятие №8
Методы разложения функций в ряд Тейлора

Теоретический материал

1. **Представление функций степенными рядами**

Пусть $f(x)$ – заданная функция (имеет производные всех порядков) в некотором интервале с центром в точке x_0. Тогда можно применить *формулу Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора.

Таким образом функция может быть разложена в ряд Тейлора, если:

а) она имеет производные всех порядков;

б) остаточный член $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$, ξ между x_0 и x, для некоторого значения x $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Если $R_n(x) \nrightarrow 0$, то ряд, составленный из производных может сходиться, но не к $f(x)$.

Классический *пример* такой функции:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

При разложении в ряд Тейлора получаются все $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Определение. Степенной ряд называется *рядом Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Если $x_0 = 0$, то данный степенной ряд называется *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Теорема (о единственности представления функции степенным рядом).

Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то этот ряд является рядом Тейлора этой функции.

Пример. Разложить функцию $f(x) = e^x \sin x$ в ряд по степеням x.

Решение. Определим значение функции $f(x) = e^x \sin x$ в точке $x = 0$:

$f(0) = 0.$

Найдем производные $f(x)$ в точке $x = 0$:

$$f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}\, e^x \sin(x + \frac{\pi}{4});\ f'(0) = \sqrt{2} \sin\frac{\pi}{4};$$

$$f''(x) = \sqrt{2} e^x [\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)] = \sqrt{2}^2\, e^x \sin(x + \frac{2\pi}{4});$$

$$f''(0) = \sqrt{2}^2 \sin\frac{2\pi}{4};$$

………………………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n\, e^x \sin(x + \frac{n\pi}{4});\ f^{(n)}(0) = \sqrt{2}^n \sin\frac{n\pi}{4};$$

………………………………………………………………………………

Теперь проверим, стремится ли остаточный член R_n к нулю при $n \to \infty$. Для этого оценим его абсолютную величину:

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n)}(\xi) x^n}{n!}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}^n\, e^{\xi} \sin(\xi + \frac{n\pi}{4})}{n!}\right| < \frac{\sqrt{2}^n e^{|x|} |x|^n}{n!} = u_n.$$

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ проверим сходимость по признаку Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2}^{n+1} e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\sqrt{2}^n e^{|x|} |x|^n} = \frac{\sqrt{2}|x|}{n+1} = 0 < 1,$ следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а его общий член $u_n \to 0$ при $n \to \infty$ (в силу необходимого признака сходимости), поэтому и остаточный член R_n, имеющий модуль, меньший u_n, и подавно стремится к нулю при всех x. Поэтому имеем разложение:

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n \sin\frac{n\pi}{4}}{n!} x^n;\ \ x \in (-\infty, +\infty).$$

2. Разложение основных элементарных функций

Выпишем разложения в ряды Маклорена основных элементарных функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \qquad x \in [-1,1];$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \cdots, \; x \in (-1,1];$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$

$$x \in (-1,1).$$

Последнее выражение при $\alpha = -1$ принимает вид:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n \cdot x^n + \cdots, \qquad x \in (-1,1).$$

Заменяя x на $-x$, приходим к стандартной формуле для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \cdots, \; x \in (-1,1).$$

<u>Пример 1.</u> Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ в ряд Маклорена.

<u>Решение.</u> Воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, а затем табличным разложением функции $\cos x$, заменяя переменную x на переменную $2x$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Пример 2. Разложить функцию $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ по степеням x.

Решение. Воспользуемся табличным разложением функции e^x.

$e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$. Затем поделим все выражение на x:

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty).$$

Пример 3. Разложить функцию $f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$ по степеням x.

Решение. Воспользуемся табличным разложением функции $\ln(1+x)$:

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1]$; тогда

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^n x^n}{n},\qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right];$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\qquad x\in(-1,1];$$

$$\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{1}{3}[\ln(1+2x)-\ln(1-x)]=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n+1}2^n+1]\frac{x^n}{n}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3x-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{3}x^3-\frac{15}{4}x^4+\cdots\right)=x-\frac{1}{2}x^2+x^3-\frac{5}{4}x^4+\cdots\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Пример 3. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x+2}$ по степеням $(x-1)$.

Решение. Преобразуем эту функцию, чтобы можно было использовать разложение $\frac{1}{x-1}$.

$$\frac{1}{x+2}=\frac{A}{1-B(x-1)}\Rightarrow 1-B(x-1)=A(x+2)\Rightarrow 1+B-Bx=Ax+2A.$$

Приравнивая коэффициенты при x^0 и x^1, получаем:

$$\begin{cases}A=-B;\\1+B=2A\end{cases}\Rightarrow 1+B=-2B\ \Rightarrow B=-\frac{1}{3}, A=\frac{1}{3}.$$

Тогда $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{-3}}=\left[\text{сделаем замену } y=\frac{x-1}{-3}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-y}=[\text{разложим}]=$

$$=\frac{1}{3}[1+y+y^2+\cdots+y^n+\cdots]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{3^2}-\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}+\cdots\right]$$

Разложение справедливо, когда:

$\left|\frac{x-1}{-3}\right|<1$, т.е. $-3<x-1<3 \Rightarrow -2<x<4.$

Разложение функций в ряд Тейлора, по определению, часто связано с громоздкими вычислениями при нахождении производных и сложностью исследования его сходимости. Приведем несколько методов, когда этого можно избежать

Использование формулы суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии

Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-2$ функцию $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$;

Решение т.к.

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+(x+2)-2}=-\frac{1}{1-(x+2)};$$

то при $|x+2|<1$

$$\frac{1}{1+x}=-(1+(x+2)+(x+2)^2+\ldots+(x+2)^n+\ldots)=-\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n \quad \forall x\in(-3;-1)$$

Метод подстановки

Разложить функцию $f(x)=\sin 2x$ по степеням $x-\dfrac{\pi}{4}$.

Решение : Запишем следующую цепочку равенств

$$\sin 2x=\left|\begin{matrix} x-\dfrac{\pi}{4}=t \\ x=t+\dfrac{\pi}{4}\end{matrix}\right|=\sin 2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2t=\cos t_1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t_1^{2n}}{(2n)!};$$

Возвращаясь к старой переменной x по формуле $t_1=2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, получаем

$$\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \quad \forall x\in R.$$

Метод интегрирования

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Решение т.к. $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2\int\limits_0^x \dfrac{dt}{1-t^2}$; $\dfrac{1}{1-t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^{2n}$ $|t| < 1$, то

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\right) dt = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in (-1;1) \;;$$

Метод дифференцирования

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$;

Решение. Так как $\dfrac{2x}{(1-x^2)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)'$ $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ $|x| < 1$, то

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right)' = (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots)' = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1} \quad \forall x \in (-1;1)$$

Для разложения используются и другие методы.

Задачи для аудиторного решения

1. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ по степеням x.
2. Разложить функцию $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$ по степеням x.
3. Разложить функцию $f(x) = e^x \sin x$ по степеням x.
4. Разложить функцию $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$, т.е. по степеням переменной $(x+1)$.
5. Разложить функцию $f(x) = 2^x$ по степеням $(x-3)$.
6. Разложить функцию $f(x) = e^{3x}$ по степеням $(x-1)$.