

Оглавление

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	4
2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.....	5
2.1. Уравнения с разделяющимися переменными (Задача №1)	5
2.2. Уравнения с однородными функциями (Задача №2)	6
2.3. Уравнения, приводящиеся к виду «с однородными функциями»	9
(Задача №3).....	9
2.4. Линейные уравнения. Решение задачи Коши. (Задача №4)	11
2.5. Уравнения Бернулли. (Задача №5).....	14
2.6. Уравнения в полных дифференциалах (Задача №6)	16
3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА.....	19
3.1. Уравнения вида $f(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (Задача №7).....	19
3.2. Уравнения вида $f(y'', y) = 0$ (Задача №8)	21
4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	22
4.1. Основные понятия	22
4.2. Общее решение однородных уравнений	23
4.3. Линейные неоднородные уравнения.....	25
4.3.1. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x) = P_m(x)$ (Задача №9).....	25
4.3.2. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ (Задача №10).....	27
4.3.4. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ (Задача №12).....	31
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»	34
Список литературы	51
Сведения об авторах	52

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальные уравнения – это уравнения, в которые входят переменная, неизвестная функция этой переменной, и производные неизвестной функции:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной.

Определение1: *Решением, интегралом* или *интегральной кривой* дифференциального уравнения называется n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т.е. такая, что

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad (1)$$

тождественно по x на некотором участке изменения x .

Определение2: *Общим решением* называют функцию

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (2)$$

зависящую от аргумента x и констант C_1, C_2, \dots, C_n (количество констант определяется порядком уравнения), такую, что:

- а) при произвольном выборе констант является решением заданного уравнения;
- б) какие бы ни были заданы начальные условия

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

существует единственный набор констант $C_1=C_{10}, C_2=C_{20}, \dots, C_n=C_{n0}$ такой, что функция

$$y = \Phi(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}) \quad (4)$$

удовлетворяет начальным условиям (3).

Если в результате интегрирования дифференциального уравнения решение найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, говорят, что найден **общий интеграл** дифференциального уравнения.

Определение 3: *Частным решением* дифференциального уравнения называют функцию $y = \Phi(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0})$, которая получается из общего решения (2) при определенном значении констант $C_1=C_{10}, C_2=C_{20}, \dots, C_n=C_{n0}$

Геометрически общее решение (2) представляет собой семейство кривых на плоскости OXY , зависящее от n произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n , а частное решение (4) – одну интегральную кривую этого семейства,

проходящую через точку (x_0, y_0) и удовлетворяющую условиям (3), наложенным на производные функции y .

Определение 4: *Задачей Коши* называется задача отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям (3).

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными (Задача №1)

$$\text{Уравнение вида } y' = f(x) \cdot g(y), \quad (5)$$

где $f(x)$ и $g(y)$ - непрерывные функции, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Для отыскания решения уравнения (5) надо разделить в нем переменные.

Для этого заменяют в (5) y' на $\frac{dy}{dx}$, обе части уравнения (5) делят на $g(y)$

(предполагая $g(y) \neq 0$) и умножают на dx . Тогда уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (6)$$

В этом уравнении переменная x входит только в правую часть, а переменная y - только в левую (т.е переменные разделены). Интегрируя (6), получаем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} + C_1 = \int f(x)dx + C_2, \text{ или } \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad (7)$$

где $C = C_2 - C_1$ - произвольная постоянная.

Соотношение (7) определяет неявным образом общее решение уравнения (5)

Возможна другая форма записи уравнения с разделяющимися переменными. А именно:

$$f_1(x) \cdot g_1(y)dx + f_2(x) \cdot g_2(y)dy = 0. \quad (8)$$

Здесь дифференциалы переменных записаны отдельно, и каждый из них умножен на произведение функций, зависящих *только от одной* переменной. В этом случае все уравнение делят на «посторонние» сомножители каждого слагаемого (в том слагаемом, где есть дифференциал переменной x , «посторонним» будет множитель, зависящий от y , и наоборот, там где есть dy , «посторонним» является множитель, зависящий от x), т.е. уравнение (8) делят

на $g_1(y)$ и $f_2(x)$ (предполагая $f_2(x) \neq 0$ и $g_1(y) \neq 0$). Уравнение принимает вид:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0. \quad (9)$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C \quad (10)$$

ПРИМЕР1. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$

В этом уравнении дифференциалы переменных представлены в явном виде. Будем разделять переменные. Для этого перенесем все слагаемые, содержащие dy в правую часть, а dx - в левую часть уравнения:

$$20xdx + 5xy^2dx = 3x^2ydy + 3ydy$$

Вынесем общие множители в левой и правой частях уравнения:

$$5x(4 + y^2)dx = 3y(x^2 + 1)dy.$$

Разделим левую и правую части уравнения на множители, являющиеся «посторонними» в каждом произведении. Для части, содержащей dx , «посторонним» будет множитель, зависящий от y , т.е. $4 + y^2$, а для части, содержащей dy - множитель, зависящий от x , т.е. $x^2 + 1$.

Получим: $\frac{5xdx}{x^2 + 1} = \frac{3ydy}{y^2 + 4}$. Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{5xdx}{x^2 + 1} + \tilde{C} = \int \frac{3ydy}{y^2 + 4}, \text{ учитывая, что } tdt = \frac{1}{2}d(t^2 \pm a), \text{ перепишем:}$$

$$\frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \tilde{C} = \frac{3}{2} \int \frac{d(y^2 + 4)}{y^2 + 4}, \text{ т.к. } \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \text{ получим}$$

$$\frac{5}{2} \ln|x^2 + 1| + \tilde{C} = \frac{3}{2} \ln|y^2 + 4| \text{ или окончательно:}$$

$$\underline{5 \ln|x^2 + 1| + C = 3 \ln|y^2 + 4|}.$$

Решение получено в неявном виде, т.е. в виде общего интеграла.

2.2. Уравнения с однородными функциями (Задача №2)

Определение 5: Функция двух переменных $f(x, y)$ называется **однородной функцией измерения k** , если при любом значении λ справедливо равенство

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y). \quad (11)$$

В частности, функция является **однородной функцией нулевого измерения**, если при любом значении λ справедливо

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y). \quad (12)$$

Т.к. λ выбирается произвольно, можно взять $\lambda = \frac{1}{x}$. Но тогда равенство (12)

$$\text{принимает вид: } f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y).$$

Таким образом, **однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения $\frac{y}{x}$** .

Например, функция $f(x, y) = 5y^3 - 2xy^2 + 3x^3$ – однородная функция третьего измерения, т.к.

$$f(\lambda x, \lambda y) = 5(\lambda y)^3 - 2\lambda x(\lambda y)^2 + 3(\lambda x)^3 = \lambda^3(5y^3 - 2xy^2 + 3x^3) = \lambda^3 \cdot f(x, y).$$

А функция $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - 2y^2} + x}{2x - y}$ – однородная функция нулевого измерения,

т.к. числитель и знаменатель дроби представляют собой однородные функции первого измерения (убедиться самостоятельно). Покажем, что данная функция

может быть представлена как функция отношения $\frac{y}{x}$. Для этого вынесем

переменную x за скобки под корнем, затем за скобки в числителе и знаменателе:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - 2\frac{y^2}{x^2}\right)} + x}{2x - y} = \frac{x \cdot \sqrt{1 - 2\frac{y^2}{x^2}} + x}{2x - y} = \frac{x \cdot \left(\sqrt{1 - 2\frac{y^2}{x^2}} + 1\right)}{x \cdot \left(2 - \frac{y}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2} + 1}{2 - \frac{y}{x}} = \tilde{f}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{Уравнение вида } y' = f(x, y) \quad (13)$$

где $f(x, y)$ – **однородная функция нулевого измерения, называется дифференциальным уравнением с однородными функциями**.

Решение уравнений такого вида основано на том факте, что однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения $\frac{y}{x}$. Такие уравнения

приводят к виду уравнений с разделяющимися переменными, вводя новую функцию по формуле

$$\frac{y}{x} = t \quad (14)$$

и учитывая, что $y = x \cdot t$, а значит

$$y' = t + x \cdot t'. \quad (15).$$

Подставляя (14) и (15) в (13), получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$t + x \cdot t' = \tilde{f}(t).$$

Переносим t в правую часть и заменяя t' на $\frac{dt}{dx}$, получаем

$$x \cdot \frac{dt}{dx} = \tilde{f}(t) - t.$$

Разделяя переменные, окончательно получим:

$$\frac{dt}{\tilde{f}(t) - t} = \frac{dx}{x}. \quad (16)$$

После интегрирования уравнения (16) выполняют обратную подстановку по формуле (14).

Еще одна форма уравнений с однородными функциями имеет вид:

$$y' \cdot F(x, y) = G(x, y), \quad (17)$$

где $F(x, y), G(x, y)$ – однородные функции одинакового измерения. Разделив такое уравнение на $F(x, y) \neq 0$, получают уравнение вида (13).

ПРИМЕР 2.
$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$$

Убедившись, что функция в правой части является однородной функцией нулевого измерения (самостоятельно), вводим новую функцию по формулам:

$$y' = t + x \cdot t', \quad y = x \cdot t, \quad y' = t + x \cdot t'.$$

Получаем уравнение с новой функцией: $t + x \cdot t' = \frac{x^2 + 2x \cdot xt - 5 \cdot (xt)^2}{2x^2 - 6x \cdot xt}$. Вынесем

в числителе и знаменателе правой части x^2 за скобки и сократим дробь.

Уравнение примет вид: $t + x \cdot t' = \frac{x^2(1 + 2t - 5t^2)}{x^2(2 - 6t)}$ или $t + x \cdot t' = \frac{1 + 2t - 5t^2}{2 - 6t}$. В

полученном уравнении перенесем t в правую часть и приведем выражение в

правой части к общему знаменателю: $x \cdot t' = \frac{1+2t-5t^2}{2-6t} - t$, или

$$x \cdot t' = \frac{1+2t-5t^2-2t+6t^2}{2-6t}, \text{ т.е. } x \cdot t' = \frac{t^2+1}{2-6t}.$$

Заменим t' на $\frac{dt}{dx}$ и разделим переменные: $x \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{t^2+1}{2-6t}$, тогда $\frac{(2-6t)dt}{t^2+1} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируем полученное уравнение:

$$\int \frac{(2-6t)dt}{t^2+1} = \int \frac{dx}{x} + C \text{ или } 2 \int \frac{dt}{t^2+1} - 6 \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \ln|x| + C,$$

$$\text{т.е. } 2 \arctg t - 3 \ln|t^2+1| = \ln|x| + C.$$

В полученное решение подставляем значение t и окончательно получаем

$$\text{решение заданного уравнения в неявном виде: } 2 \arctg \frac{y}{x} - 3 \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right| = \ln|x| + C.$$

2.3. Уравнения, приводящиеся к виду «с однородными функциями» (Задача №3)

Уравнения вида $y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ не являются уравнениями с однородными

функциями, если $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, но могут быть приведены к такому виду с помощью подстановки вида:

$$\begin{cases} x = x_1 + m \\ y = y_1 + k \end{cases} \quad (18)$$

В этом случае $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$. Числа m и k подбираются таким образом, чтобы дробь

в правой части нового уравнения была однородной функцией нулевого измерения. Подставим равенства (18) в числитель и знаменатель правой части

уравнения. Дробь примет вид $\frac{a_1(x_1+m)+b_1(y_1+k)+c_1}{a_2(x_1+m)+b_2(y_1+k)+c_2}$. Раскрывая скобки и

приводя подобные слагаемые, получим дробь аналогичную исходной:

$$\frac{a_1x_1+b_1y_1+(a_1m+b_1k+c_1)}{a_2x_1+b_2y_1+(a_2m+b_2k+c_2)}.$$

Для того, чтобы эта дробь была однородной, приравняем свободные коэффициенты в числителе и знаменателе к нулю:

$$\begin{cases} a_1 m + b_1 k + c_1 = 0 \\ a_2 m + b_2 k + c_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Полученные условия (19) служат для определения чисел m и k .

С новыми переменными исходное уравнение примет вид: $y'_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1}{a_2 x_1 + b_2 y_1}$.

Это уравнение с однородными функциями, решение которых рассмотрено выше.

ПРИМЕР 3. $y' = \frac{y+2}{2x+y-4}$

Введем новые переменные по формулам (18). Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$y'_1 = \frac{y_1 + k + 2}{2(x_1 + m) + (y_1 + k) - 4} \quad \text{или} \quad y'_1 = \frac{y_1 + (k + 2)}{2x_1 + y_1 + (2m + k - 4)}.$$

Приравняем свободные коэффициенты к нулю и определим m и k .

$$\begin{cases} k + 2 = 0 \\ 2m + k - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} k = -2 \\ m = -1/2k + 2 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} k = -2 \\ m = 3 \end{cases}.$$

В данном случае формулы (18) принимают вид: $\begin{cases} x = x_1 + 3 \\ y = y_1 - 2 \end{cases}$.

При найденных значениях m и k уравнение примет вид: $y'_1 = \frac{y_1}{2x_1 + y_1}$. Выносим

в знаменателе x_1 за скобки: $y'_1 = \frac{y_1}{x_1(2 + y_1/x_1)}$ или $y'_1 = \frac{\frac{y_1}{x_1}}{2 + \frac{y_1}{x_1}}$. Используя

подстановку $\frac{y_1}{x_1} = t, y_1 = tx_1, y'_1 = t'x_1 + t$, преобразуем уравнение к виду:

$t'x_1 + t = \frac{t}{2+t}$. Переносим t в правую часть, приводим правую часть к общему

знаменателю, получаем: $t'x_1 = \frac{t}{2+t} - t$ или $t'x_1 = \frac{-t-t^2}{2+t}$. Заменяем t' на $\frac{dt}{dx_1}$ и

разделяем переменные: $\frac{dt}{dx_1} \cdot x_1 = \frac{-t-t^2}{2+t}$, тогда $\frac{(2+t)dt}{-t-t^2} = \frac{dx_1}{x_1}$. Интегрируем

полученное уравнение: $\int \frac{(2+t)dt}{-t-t^2} = \int \frac{dx_1}{x_1} + C$.

Выполним преобразование первой подынтегральной функции:

$$\frac{t+2}{-t^2-t} = -\frac{t+2}{t^2+t} = -\frac{t+2}{t^2+2 \cdot t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = -\frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{3/2}{\frac{1}{4} - \left(t+\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{t+1/2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}.$$

Уравнение примет вид:

$$3/2 \int \frac{dt}{1/4 - (t+1/2)^2} - 1/2 \int \frac{d\left((t+1/2)^2 - 1/4\right)}{(t+1/2)^2 - 1/4} = \ln|x_1| + \tilde{C}.$$

Получаем: $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1/2} \ln \left| \frac{(t+1/2)+1/2}{(t+1/2)-1/2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| (t+1/2)^2 - 1/4 \right| = \ln|x_1| + \tilde{C}$. Запишем

постоянную интегрирования \tilde{C} как $\ln|C|$ и, преобразовав, получим:

$$\frac{3}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t} \right| - \frac{1}{2} \ln |t^2 + t| = \ln|x_1| + \ln|C|, \text{ или } \ln \left| \frac{t+1}{t^2} \right| = \ln|C \cdot x_1|.$$

Значит: $\frac{t+1}{t^2} = C \cdot x_1$ или $t+1 = C \cdot t^2 \cdot x_1$. Подставляем значение $t = \frac{y_1}{x_1}$, получим:

$$\frac{y_1}{x_1} + 1 = C \cdot \left(\frac{y_1}{x_1} \right)^2 \cdot x_1.$$

Умножая равенство на x_1 , получим $y_1 + x_1 = C \cdot y_1^2$. Вернемся к исходным

обозначениям по формулам $\begin{cases} x_1 = x - 3 \\ y_1 = y + 2 \end{cases}$. Получим решение исходного

уравнения: $(y+2) + (x-3) = C \cdot (y+2)^2$.

Либо окончательно: $x + y = C \cdot (y+2)^2 + 1$.

2.4. Линейные уравнения. Решение задачи Коши. (Задача №4)

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = f(x), \quad (20)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции, называется линейным уравнением первого порядка.

Один из методов решения таких уравнений – метод Бернулли. Он заключается в том, что решение ищут в виде произведения двух функций:

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad (21)$$

$$\text{В этом случае} \quad y' = u'v + uv' \quad (22)$$

Подставляя y и y' в исходное уравнение, получают уравнение:

$$u'v + uv' + p \cdot u \cdot v = f \quad (23)$$

Затем выполняют группировку слагаемых, содержащих одну из функций:

$$u \cdot (v' + pv) + u' \cdot v = f \quad (24)$$

Каждая функция из произведения (21) может быть выбрана произвольно, только все произведение в целом должно удовлетворять уравнению (20). Поэтому ту функцию, которая осталась в скобках, находят из условия - выражение в скобках приравнивается к нулю:

$$v' + p \cdot v = 0 \quad (25)$$

Полученное уравнение – с разделяющимися переменными. Его разрешают относительно неизвестной функции v . При этом находят только одну функцию, удовлетворяющую уравнению (25) (интегрируя уравнение (25), в решение не включают постоянную интегрирования).

Найденную функцию подставляют в уравнение (24), которое с учетом равенства (25), принимает вид:

$$u' \cdot v(x) = f(x) \quad (26)$$

Это уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными. Его разрешают относительно неизвестной функции $u(x)$. Найденные функции $v = v(x)$ и $u = u(x, C)$ подставляют в равенство (21).

ПРИМЕР 4.

$$\text{Найти решение задачи Коши.} \quad y' - y/x = -2/x^2, \quad y(1) = 1. \quad (27)$$

Для решения этой задачи сначала найдем общее решение заданного уравнения в виде $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$. Уравнение принимает вид: $u'v + uv' - uv/x = -2/x^2$.

Группируем слагаемые, содержащие функцию v , функцию u выносим за скобки: $u \cdot (v' - v/x) + u'v = -2/x^2$. (28)

Находим функцию v , приравняв к нулю выражение в скобках: $v' - v/x = 0$.

Заменяем v' на $\frac{dv}{dx}$ и разделяем переменные: $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$, т.е. $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя

это равенство, находим одну функцию v , удовлетворяющую уравнению:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \text{ значит } \ln|v| = \ln|x|, \text{ т.е. } v = x.$$

Подставляем найденную функцию v в уравнение (28), с учетом равенства нулю выражения в скобках, получаем уравнение относительно неизвестной функции u :

$$u' \cdot x = -2/x^2. \text{ Заменяем } u' \text{ на } \frac{du}{dx} \text{ и разделяем переменные: } x \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^2}, \text{ т.е.}$$

$$du = -\frac{2dx}{x^3}. \text{ Интегрируя, находим функцию } u: \int du = -2 \int \frac{dx}{x^3} + C \text{ или}$$

$$u = -2 \int x^{-3} dx + C, \text{ значит } u = \frac{1}{x^2} + C. \text{ Подставляем найденные значения } u \text{ и } v,$$

$$\text{находим общее решение уравнения (27): } y = \left(\frac{1}{x^2} + C \right) \cdot x \text{ или}$$

$$y = \frac{1}{x} + Cx. \quad (29)$$

Т.к. поставлена задача Коши, необходимо из найденного семейства функций (29) выбрать такую функцию, которая удовлетворяет условию $y(1)=1$. Т.е. используя заданные начальные условия, надо определить конкретное значение постоянной C . Для этого в найденное общее решение подставим $x=1$ и $y=1$.

$$\text{Получим уравнение для определения } C: 1 = \frac{1}{1} + C \cdot 1. \text{ Откуда следует, что } C = 0.$$

Подставляем это значение в общее решение (29) и находим частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = \frac{1}{x}$.

Другой метод решения уравнений (20) – метод Лагранжа, который заключается в том, что сначала решают однородное уравнение, соответствующее исходному:

$$y' + p(x) \cdot y = 0. \quad (30)$$

Общее решение уравнения (30) находят, разделяя переменные, в виде:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad (31)$$

где C – произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (20) вариации ищут, вариацией произвольной постоянной в виде:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}, \quad (32)$$

где $C(x)$ – неизвестная дифференцируемая функция от x , которую необходимо найти.

Для нахождения $C(x)$ нужно подставить y в исходное уравнение, которое принимает вид уравнения с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР.

Проинтегрировать уравнение $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x$. (33)

Однородное уравнение, соответствующее исходному, имеет вид:

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0.$$

Разделяя переменные, интегрируем это уравнение:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x dx}{1-x^2}; \ln y = \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + \ln C, \text{ т.е. } y = C\sqrt{1-x^2}. \quad (34)$$

Полагаем теперь $y = C(x)\sqrt{1-x^2}$; (35)

тогда $y' = C'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. (36)

Подставляя в уравнение (33) равенства (35) и (36), получим:

$$C'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{1-x^2} C(x)\sqrt{1-x^2} = \arcsin x + x, \quad (37)$$

т.е. $C'(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. (38)

Интегрируя, находим:

$$C(x) = \int \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C \quad (39)$$

Найденное значение (39) подставляем в равенство (35) и окончательно получаем общее решение уравнения (33):

$$y = \sqrt{1-x^2} \left(\frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C \right).$$

2.5. Уравнения Бернулли. (Задача №5)

Уравнение вида $y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n$, (40)

где $p(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции, называется уравнением Бернулли.

Уравнения такого вида можно привести к виду линейных уравнений. Разделив уравнение на y^n , получают уравнение: $y' \cdot y^{-n} + p(x) \cdot y^{1-n} = f(x)$. Замена $z = y^{1-n}$; $z' = y' \cdot y^{-n}$ приводит к линейному уравнению $z' + p(x) \cdot z = f(x)$.

Кроме того, такие уравнения можно сразу решать методом Бернулли, так же как и линейные уравнения.

ПРИМЕР 5. Найти решение задачи Коши.

$$y' - y \cdot \operatorname{tg} x = -(2/3)y^4 \sin x, \quad y(0) = 1. \quad (41)$$

Будем искать решение сразу методом Бернулли: в виде произведения $y = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Выполняя указанную подстановку, получаем уравнение: $u'v + uv' - u \cdot v \cdot \operatorname{tg} x = -(2/3) \cdot u^4 \cdot v^4 \cdot \sin x$. Группируем слагаемые, содержащие функцию v , функцию u выносим за скобки:

$$u(v' - v \cdot \operatorname{tg} x) + u'v = -(2/3) \cdot u^4 \cdot v^4 \cdot \sin x \quad (42)$$

Находим функцию v , приравняв к нулю выражение в скобках: $v' - v \cdot \operatorname{tg} x = 0$.

Заменяем v' на $\frac{dv}{dx}$ и разделяем переменные: $\frac{dv}{dx} = v \cdot \operatorname{tg} x$, т.е. $\frac{dv}{v} = \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x}$.

Интегрируя это равенство, находим одну функцию v , удовлетворяющую уравнению:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x} \quad \text{или} \quad \int \frac{dv}{v} = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}.$$

Значит $\ln|v| = -\ln|\cos x|$, т.е. $\ln|v| = \ln|(\cos x)^{-1}|$, т.е. $v = \frac{1}{\cos x}$.

Подставляем найденную функцию v в уравнение (42), с учетом равенства нулю выражения в скобках, получаем уравнение относительно неизвестной функции u :

$\frac{u'}{\cos x} = -\frac{2}{3} \cdot u^4 \cdot \frac{\sin x}{\cos^4 x}$. Заменяем u' на $\frac{du}{dx}$ и разделяем переменные:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{3} \cdot u^4 \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad \text{т.е.} \quad u^{-4} du = -\frac{2}{3} \cdot u^4 \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x}.$$

Интегрируя, находим функцию u :

$$\int u^{-4} du = -\frac{2}{3} \int \cos^{-3} x \cdot \sin x \cdot dx + \tilde{C} \quad \text{или} \quad \frac{u^{-3}}{-3} = \frac{2}{3} \int \cos^{-3} x \cdot d(\cos x) + \tilde{C}.$$

Тогда $\frac{-1}{u^3} = \frac{2 \cos^{-2} x}{-2} + \tilde{C}$, или $\frac{1}{u^3} = \frac{1}{\cos^2 x} + C$, т.е. $\frac{1}{u^3} = \frac{1 + C \cos^2 x}{\cos^2 x}$.

Значит $u^3 = \frac{\cos^2 x}{1 + C \cos^2 x}$, а $u = \left(\frac{\cos^2 x}{1 + C \cos^2 x} \right)^{\frac{1}{3}}$.

Подставляем найденные значения u и v , находим общее решение уравнения (41):

$$y = \left(\frac{\cos^2 x}{1 + C \cos^2 x} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

Или $y = \frac{\cos^{2/3} x}{(1 + C \cos^2 x)^{1/3}} \cdot \frac{1}{\cos x}$, т.е. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x (1 + C \cos^2 x)}}$ (43)

Для решения задачи Коши необходимо найти функцию, удовлетворяющую начальным условиям $y(0)=1$. Определим значение постоянной C , подставляя $x=0, y=1$ в общее решение (43).

Получим: $1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos 0 (1 + C \cos^2 0)}}$ или $\frac{1}{\sqrt[3]{1+C}} = 1; 1+C=1; C=0$. Таким

образом, решением поставленной задачи является функция $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}$.

2.6. Уравнения в полных дифференциалах (Задача №6)

Определение 6: Полным дифференциалом функции двух переменных $F(x,y)$

называется выражение $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$.

Уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, (44)

где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух переменных $F(x,y)$ называется уравнением в полных дифференциалах.

Если уравнение (44) является уравнением в полных дифференциалах, то его можно записать следующим образом: $dF(x, y) = 0$.

Отсюда следует, что общее решение уравнения (44) в неявном виде определяется равенством

$$F(x, y) = C, \quad (45)$$

где C – произвольная постоянная.

Решая уравнения вида (44), необходимо сначала убедиться, что левая часть этого уравнения – действительно полный дифференциал некоторой

функции $F(x, y)$. Т.е. проверить, что функции $M(x, y)$ - частная производная по x , а $N(x, y)$ – частная производная по y одной и той же функции:

$$M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (46)$$

Для этого используют следующее свойство частных производных: смешанные частные производные второго порядка функции двух переменных

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ не зависят от порядка дифференцирования и совпадают, т.е.

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$. Поэтому дифференцируют функцию $M(x, y)$ по y , а функцию $N(x, y)$ по x (чтобы получить смешанные частные производные второго порядка) и сравнивают полученные функции.

Если они совпали, значит, уравнение действительно является уравнением в полных дифференциалах.

После того, как проверка выполнена, решение уравнения сводится к определению функции $F(x, y)$ для подстановки его в решение (45).

Для этого интегрируют функцию $M(x, y)$ по переменной x (т.к. она является частной производной по этой переменной):

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y), \quad (47)$$

где $\varphi(y)$ - постоянная интегрирования, которую считают зависящей от y . На этом этапе решения $\varphi(y)$ - ещё неопределенная. Для окончательного получения $F(x, y)$ найденную функцию (47) дифференцируют по переменной y и приравнивают к уже известной частной производной функции $F(x, y)$ по y , т.е. к функции $N(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Полученное дифференциальное уравнение решают относительно неизвестной функции φ по переменной y .

Найденную функцию $\varphi(y)$ подставляют в (47), а окончательно определенную функцию $F(x, y)$ в решение (45).

ПРИМЕР 6. $xy^2 dx + y(x^2 + y^2) dy = 0$ (48)

Это уравнение имеет вид уравнения (44). Здесь $M(x, y) = xy^2$; $N(x, y) = y(x^2 + y^2)$.

Полагая, что $M(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$; $N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$, проверим это. Вычислим смешанные производные второго порядка функции $F(x, y)$ по её частным производным первого порядка (при вычислении частной производной по переменной x , переменную y рассматриваем как константу, а при вычислении производной по переменной y , константой считаем переменную x).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (M(x, y)) = (xy^2)'_y = x \cdot (y^2)'_y = x \cdot 2y = 2xy$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (N(x, y)) = (y(x^2 + y^2))'_x = y \cdot (x^2 + y^2)'_x = y \cdot (2x + 0) = 2xy$$

Получили совпадение смешанных частных производных второго порядка. Будем определять функцию $F(x, y)$, интегрируя функцию $M(x, y)$ по переменной x . При этом полагаем $y = \text{const}$, и постоянную интегрирования (обозначаем $\varphi(y)$) считаем зависящей от y .

$$F(x, y) = \int xy^2 dx + \varphi(y) = y^2 \int x dx + \varphi(y)$$

$$F(x, y) = y^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi(y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \varphi(y). \quad (49)$$

Функция $F(x, y)$ определена с точностью до постоянной интегрирования $\varphi(y)$.

Для определения $\varphi(y)$ продифференцируем полученную функцию (49) по переменной y (x считаем постоянной величиной) и приравняем к известной частной производной функции $F(x, y)$ по y , т.е. к функции $N(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 + \varphi(y) \right) = \frac{1}{2} x^2 (y^2)'_y + \varphi'(y) = \frac{1}{2} x^2 \cdot 2y + \varphi'(y) = x^2 y + \varphi';$$

с другой стороны, $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = y(x^2 + y^2)$.

Приравнявая, получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(y)$: $x^2 y + \varphi' = y(x^2 + y^2)$. В этом уравнении y – переменная величина, $x = \text{const}$.

Заменяем $\varphi'(y)$ на $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и разделяем переменные:

$$x^2 y + \frac{d\varphi}{dy} = x^2 y + y^3; \quad \frac{d\varphi}{dy} = y^3; \quad d\varphi = y^3 dy.$$

Интегрируем полученное уравнение и находим $\varphi(y)$:

$$\int d\varphi = \int y^3 dy + \hat{C}; \quad \varphi = \frac{y^4}{4} + \hat{C}.$$

Таким образом, окончательно найдена функция $F(x, y)$:

$$F(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^4 + \hat{C}.$$

Так как решение уравнения в полных дифференциалах выражается формулой (45), решение данного уравнения имеет вид:

$$\frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^4 + \hat{C} = \tilde{C},$$

или окончательно: $\frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^4 = C$, где $C = \tilde{C} - \hat{C}$ - произвольная постоянная.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

3.1. Уравнения вида $f(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (Задача №7)

Уравнения такого вида не содержат в явном виде неизвестной функции y и её производных до $(n-2)$ -го порядка включительно. Для понижения порядка уравнения вводят новую функцию по формуле: $z(x) = y^{(n-1)}$. Тогда $z'(x) = y^{(n)}$, и уравнение превращается в уравнение первого порядка. Решая его, находят функцию $z(x)$, которую затем интегрируют $n-1$ раз для получения функции $y(x)$.

Так как при каждом интегрировании в решение включается постоянная интегрирования, окончательная функция зависит от аргумента x и n произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n .

ПРИМЕР 7.
$$x \cdot y''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (50)$$

В этом уравнении старшей производной является производная третьего порядка, кроме того в уравнении представлена производная второго порядка, а искомая функция и её первая производная в явном виде отсутствуют. Поэтому понижение порядка уравнения выполняем по формулам:

$$z(x) = y''; \quad z'(x) = y'''. \quad (51)$$

Уравнение принимает вид: $x \cdot z' + z = \frac{1}{\sqrt{x}}$ или $z' + z \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Это линейное

уравнение. Будем искать его решение в виде произведения двух функций:

$$z = u \cdot v, \quad \text{тогда} \quad z' = u'v + uv'. \quad \text{Подставляем в уравнение:} \quad u'v + uv' + uv \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Группируем слагаемые, содержащие функцию v , функцию u выносим за скобки:

$$u'v + u\left(v' + v\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (52)$$

Функцию v находим, приравнявая к нулю выражение в скобках:

$$v' + v \cdot \frac{1}{x} = 0 \quad (53)$$

Заменяем v' на $\frac{dv}{dx}$ и разделяем переменные: $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$; т.е. $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, находим только одну функцию v , удовлетворяющую условию (53):

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}; \text{ значит } \ln|v| = -\ln|x| \text{ или } \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|. \text{ Таким образом } v = \frac{1}{x}.$$

Найденную функцию подставляем в уравнение (52) и, с учетом равенства (53),

$$\text{получаем: } u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Определяем функцию u , интегрируя уравнение $\frac{du}{dx} = x^{-\frac{1}{2}}$ или $du = x^{-\frac{1}{2}} dx$:

$$\int du = \int x^{-\frac{1}{2}} dx + C_1. \text{ Значит } u = 2\sqrt{x} + C_1. \text{ Подставляем найденные значения функций } u \text{ и } v, \text{ определяем функцию } z: z(x) = (2\sqrt{x} + C_1) \cdot \frac{1}{x}.$$

Найденную функцию подставляем в равенство (51):

$$y'' = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{C_1}{x}. \quad (54)$$

$$\text{Интегрируя равенство (54), находим } y': y' = \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{C_1}{x} \right) dx + C_2.$$

Получаем $y' = 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + C_1 \int \frac{dx}{x} + C_2$ или $y' = 4\sqrt{x} + C_1 \ln|x| + C_2$. Интегрируя последнее равенство, находим y : $y = \int (4\sqrt{x} + C_1 \ln|x| + C_2) dx + C_3$. Подробнее:

$$y = 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx + C_1 \int \ln|x| dx + C_2 \int dx + C_3 \quad (55).$$

Вычислим $\int \ln x dx$, используя формулу интегрирования «По частям»:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x.$$

Окончательно получаем: $y = \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + C_1(x \ln x - x) + C_2x + C_3$.

3.2. Уравнения вида $f(y'', y) = 0$ (Задача №8)

Уравнения такого вида не содержат в явном виде аргумент x . Для понижения порядка уравнения вводят новую функцию по формуле:

$$z(y) = y'. \quad (56)$$

Тогда $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y)$, и уравнение превращается в уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $z(y)$. Решая его, находят функцию $z(y)$, которую подставляют в (56). Полученное дифференциальное уравнение первого порядка решают относительно функции $y(x)$.

ПРИМЕР 8. Решить задачу Коши

$$y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}. \quad (57)$$

Т.к. данное уравнение не зависит явным образом от переменной x , понижаем порядок уравнения. Вводим новую функцию $z(y)$ по формулам: $y' = z(y)$; $y'' = z' \cdot z$.

Уравнение принимает вид: $y^3 \cdot z' \cdot z = y^4 - 16$. Заменяем z' на $\frac{dz}{dy}$ и разделяем

переменные: $y^3 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = y^4 - 16$, т.е. $z dz = \frac{y^4 - 16}{y^3} dy$. Интегрируя, находим:

$$\int z dz = \int \frac{y^4 - 16}{y^3} dy + C_1 \quad \text{или} \quad \frac{z^2}{2} = \int y dy - 16 \int y^{-3} dy + C_1. \quad \text{Т.е.} \quad \frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{8}{y^2} + C_1.$$

Или: $z^2 = y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1$. Окончательно, выражая $z(y)$, получим:

$z = \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1}$. Подстановка этой функции приводит к уравнению:

$$y' = \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1}.$$

Т.к. в данном случае требуется найти частное решение, можно воспользоваться начальными условиями уже на этом этапе решения задачи для

определения первой из двух констант, которые должны входить в общее решение дифференциального уравнения второго порядка. Это упростит следующий этап интегрирования.

Подставим в полученное выражение для производной начальное условие:

$$y_0 = 2\sqrt{2}; (y_0)^2 = 8; y'_0 = \sqrt{2}, \text{ получим } \sqrt{2} = \sqrt{8 + \frac{16}{8} + 2C_1}, \text{ или } 2C_1 + 10 = 2.$$

Отсюда $C_1 = -4$. Подставив C_1 , получаем уравнение: $y' = \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} - 8}$ или

$$y' = \sqrt{\frac{y^4 + 16 - 8y^2}{y^2}}, \text{ т.е. } y' = \sqrt{\frac{(y^2 - 4)^2}{y^2}}.$$

Таким образом, получаем: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{y}$. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{y dy}{y^2 - 4} + \ln \tilde{C}_2 = \int dx$$

Тогда: $\frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 - 4)}{y^2 - 4} + \ln \tilde{C}_2 = x$ или: $\ln(y^2 - 4) + \ln C_2 = 2x$. Откуда, используя

свойства логарифмов, получаем: $C_2 \cdot (y^2 - 4) = e^{2x}$. Для получения

окончательного решения подставим начальные условия $x_0 = 0$; $y_0 = 2\sqrt{2}$ и

определим C_2 : $C_2 \left((2\sqrt{2})^2 - 4 \right) = e^0$; $C_2 \cdot (8 - 4) = 1$; $C_2 = 1/4$. Таким образом,

решением задачи Коши является функция $\frac{1}{4}(y^2 - 4) = e^{2x}$; $y^2 - 4 = 4e^{2x}$

или $y = 2\sqrt{e^{2x} + 1}$.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Основные понятия

Определение 7. Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка называют уравнение вида:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (58)$$

Определение 8. Функции y_1, y_2, \dots, y_n называются линейно зависимыми, если существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не равных нулю одновременно, что выполняется тождество:

$$\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \dots + \lambda_n \cdot y_n \equiv 0.$$

Если таких чисел подобрать нельзя, то указанные функции линейно независимы. Например, функции $y_1=x, y_2=x^2, y_3=x^3$ - линейно независимы, т.к. алгебраическая сумма $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$ может быть тождественно равна нулю только при нулевых значениях коэффициентов. Функции $y_1=x, y_2=e^x, y_3=2e^x$ - линейно зависимы, т.к. при $\lambda_1=0, \lambda_2=-2$ и $\lambda_3=1$ алгебраическая сумма $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0 \cdot x + (-2) \cdot e^x + 1 \cdot (2e^x)$ тождественно равна нулю.

Для случая двух функций понятие линейной независимости может быть сформулировано так: две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, если их отношение не является постоянной величиной: $y_1 / y_2 \neq \text{const.}$

Определение 9. Линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка называются уравнения вида:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad \text{где } a_0, a_1, \dots, a_n - \text{коэффициенты,}$$

которые в общем случае являются функциями от x .

В данном расчетном задании представлены уравнения с постоянными коэффициентами.

Если правая часть уравнения тождественно равна нулю, уравнение называется однородным.

В случае, когда правая часть зависит от x или равна ненулевой константе, уравнение называется неоднородным.

4.2. Общее решение однородных уравнений

Теорема.

Если y_1, y_2, \dots, y_n - линейно независимые частные решения уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (59),$$

то общее решение уравнения (48) определяется равенством:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (60)$$

Для нахождения частных решений уравнений (59) составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (61),$$

которое получается из уравнения (59) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями k , причем сама функция заменяется единицей. Уравнение (61) имеет n корней – действительных или комплексных (среди которых могут быть и равные, т.е. кратные). В зависимости от характера корней характеристического уравнения составляются n частных решений уравнения (59), а именно:

- 1) каждому действительному простому корню $k=k_0$ соответствует частное решение $y=e^{k_0x}$;
- 2) каждому действительному корню $k_1, \dots, k_r=k_0$ кратности r соответствует r частных решений $y_1=e^{k_0x}$, $y_2=xe^{k_0x}$, $y_3=x^2e^{k_0x}$, ..., $y_r=x^{r-1}e^{k_0x}$;
- 3) каждой паре комплексных сопряженных корней $k=\alpha+\beta i$ и $k=\alpha-\beta i$ соответствует пара частных решений $y_1=e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2=e^{\alpha x} \sin \beta x$;
- 4) каждой паре комплексных сопряженных корней $k_1, \dots, k_r=\alpha+\beta i$ и $k_{r+1}, \dots, k_{2r}=\alpha-\beta i$ кратности r соответствует r пар частных решений:
- 5) $y_1=e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2=xe^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_3=x^2e^{\alpha x} \cos \beta x$, ..., $y_r=x^{r-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$,
- 6) $y_{r+1}=e^{\alpha x} \sin \beta x$, $y_{r+2}=xe^{\alpha x} \sin \beta x$, $y_{r+3}=x^2e^{\alpha x} \sin \beta x$, ..., $y_{2r}=x^{r-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Согласно теореме *общее решение однородного уравнения n -го порядка может быть получено как линейная комбинация n линейно независимых частных решений.*

После получения этих решений на основании корней характеристического уравнения общее решение однородного уравнения записывают в виде:

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \dots + C_n \cdot y_n$$

ПРИМЕР 9.

Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + y' = 0$ (62)

Составляем характеристическое уравнение: $k^3 - 2k^2 + k = 0$. Раскладывая левую часть на множители: $k(k^2 - 2k + 1) = 0$ или $k(k-1)^2 = 0$, находим корни характеристического уравнения $k_1=0$; $k_2=k_3=1$. Корень $k=0$ – простой действительный корень, ему соответствует одно частное решение $y_1=e^{0 \cdot x}=1$. Корень $k=1$ – действительный корень кратности 2, поэтому ему соответствуют

2 частных, линейно независимых решения $y_2 = e^{1 \cdot x} = e^x$, $y_3 = x \cdot e^{1 \cdot x} = x \cdot e^x$.
Общее решение составляем как линейную комбинацию найденных трех частных решений по формуле (60):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, \text{ т.е. } y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

4.3. Линейные неоднородные уравнения

Структура общего решения неоднородного линейного уравнения (58) определяется следующей теоремой:

Если $u = u(x)$ – частное решение неоднородного уравнения, а y_1, y_2, \dots, y_n – n линейно независимых частных решений соответствующего ему однородного уравнения, то общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = u + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (63)$$

т.е. общее решение неоднородного уравнения равно сумме любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

Метод получения общего решения однородного уравнения рассмотрен в предыдущем пункте.

Данный метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, имеющими правую часть специального вида

4.3.1. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x) = P_m(x)$ (Задача №9)

Если правая часть линейного уравнения – многочлен m -ой степени, т.е. имеет вид: $f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m$ (многочлен может быть неполным, т.е. среди коэффициентов A_1, A_2, \dots, A_m могут быть нулевые, в том числе одновременно), то частное решение $u(x)$ ищут в виде многочлена той же степени с неопределенными коэффициентами. При этом многочлен должен содержать все степени переменной x , вне зависимости от количества слагаемых в правой части.

Например, если $f(x) = 2x^3 + 1$ или $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$, т.е. многочлен третьей степени, то частное решение ищут в виде: $u(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Кроме того, необходимо учесть значение корней характеристического уравнения. А именно, если среди корней характеристического уравнения есть корень $k=0$ кратности r , то в частное решение добавляют множитель x^r .

Для определения коэффициентов частное решение подставляют в левую часть уравнения и приравнивают коэффициенты при равных степенях x в левой и правой части.

Пример 10.

$$y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5 \quad (64)$$

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение, соответствующее заданному: $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ (65)

Для получения общего решения уравнения (65) составим характеристическое уравнение: $k^3 - 5k^2 + 6k = 0$. (66)

Решим это уравнение, вынося за скобки множитель k и приравнявая к нулю каждый из полученных сомножителей: $k \cdot (k^2 - 5k + 6) = 0$;

$$k = 0 \quad \text{и} \quad k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Получаем 3 корня: $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Им соответствуют 3 частных решения:

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1; \quad y_2 = e^{2 \cdot x}; \quad y_3 = e^{3 \cdot x}.$$

Общее решение однородного уравнения $y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ т.е.

$$y_{o.o.} = C_1 + C_2 e^{2 \cdot x} + C_3 e^{3 \cdot x}. \quad (67)$$

Для получения частного решения неоднородного уравнения (64) – $u(x)$ рассмотрим правую часть уравнения $6x^2 + 2x - 5$ и корни характеристического уравнения (66). Так как правая часть уравнения (64) – многочлен второй степени, то частное решение следует искать также в виде многочлена второй степени с неопределенными коэффициентами: $Ax^2 + Bx + C$. Но т.к. среди корней характеристического уравнения есть корень $k_1 = 0$, то этот многочлен необходимо домножить на x (корень характеристического уравнения $k_1 = 0$ – простой, поэтому домножать будем на x именно в первой степени). Таким образом, будем искать частное решение в виде

$$u(x) = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x = Ax^3 + Bx^2 + Cx \quad (68)$$

Для определения коэффициентов A , B и C вычислим три производные функции $u(x)$ и подставим их в уравнение (64). Для удобства, за чертой справа будем указывать коэффициенты, с которыми следует подставлять соответствующее слагаемое в уравнение:

$$\begin{array}{l} u = Ax^3 + Bx^2 + Cx \\ u' = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ u'' = 6Ax + 2B \\ u''' = 6A \end{array} \left\| \begin{array}{l} \cdot 0 \\ \cdot 6 \\ \cdot (-5) \\ \cdot 1 \end{array} \right.$$

Подставляя найденные производные в уравнение с указанными коэффициентами, получим:

$$6A - 5(6Ax + 2B) + 6(3Ax^2 + 2Bx + C) = 6x^2 + 2x - 5.$$

Или, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые:

$$18Ax^2 + (12B - 30A)x + (6A - 10B + 6C) = 6x^2 + 2x - 5.$$

Составим систему уравнений, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , и определим значения A , B и C :

$$\begin{cases} 18A = 6 \\ 12B - 30A = 2 \\ 6A - 10B + 6C = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ 12B = 30A + 2 \\ 6C = 10B - 6A - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ B = 1 \\ C = 1/2 \end{cases}$$

Подставим найденные значения коэффициентов в (57), получим частное решение

$$u(x) = 1/3 x^3 + x^2 + 1/2 x \quad (69)$$

неоднородного уравнения (64).

Общее решение этого уравнения определяется формулой (63). Значит, с учетом формул (67) и (69), общее решение неоднородного линейного уравнения (64) имеет вид:

$$\underline{y_{o.n.} = 1/3 x^3 + x^2 + 1/2 x + C_1 + C_2 e^{2 \cdot x} + C_3 e^{3 \cdot x} .}$$

4.3.2. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ (Задача №10)

Если правая часть линейного уравнения – произведение экспоненты $e^{\alpha x}$ на многочлен m -ой степени, т.е. имеет вид:

$f(x) = e^{\alpha x} (A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m)$ (и в этом случае среди коэффициентов A_1, A_2, \dots, A_m могут быть нулевые), то частное решение $u(x)$ ищут в виде аналогичного произведения $e^{\alpha x}$ на многочлен той же степени с неопределенными коэффициентами. При этом многочлен должен содержать все степени переменной x , вне зависимости от количества слагаемых входящих в многочлен в правой части.

Кроме того, в этом случае также учитывают значение корней характеристического уравнения. А именно, если среди корней характеристического уравнения есть действительный корень $k = \alpha$ (корень,

совпадающий с числовым коэффициентом в степени экспоненты) кратности r , то в частное решение добавляют множитель x^r .

Для определения коэффициентов частное решение подставляют в левую часть уравнения и приравнивают коэффициенты при равных степенях x в левой и правой части.

$$\text{Пример 10. } y''' + y'' - 6y' = (20x + 14) \cdot e^{2x} \quad (70)$$

Для решения этого уравнения рассмотрим однородное уравнение, ему соответствующее: $y''' + y'' - 6y' = 0$ (71)

и характеристическое уравнение : $k^3 + k^2 - 6k = 0$. Решением характеристического уравнения являются 3 действительных корня: $k_1=0$; $k_2=2$ и $k_3=-3$. Этим корням соответствуют частные решения уравнения (71):

$$y_1 = e^{0x} = 1; y_2 = e^{2x}; y_3 = e^{-3x}.$$

$$\text{Общее решение уравнения (71) - } y_{o.o.} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}. \quad (72)$$

Для получения частного решения неоднородного уравнения (70) рассмотрим его правую часть – функцию $f(x) = (20x + 14) \cdot e^{2x}$. Это – произведение многочлена первой степени на e^{2x} (т.е. в этом случае $\alpha = 2$). Поэтому частное решение будем искать в виде произведения многочлена

$Ax + B$ на e^{2x} . Кроме того, учтем, что значение простого корня $k_2=2$ совпадает с числом α . Поэтому добавим в произведение еще один множитель x .

$$\text{Таким образом } u(x) = e^{2x}(Ax + B) \cdot x = e^{2x}(Ax^2 + Bx) \quad (73)$$

Вычислим производные до третьего порядка включительно от данной функции. На каждом этапе вычисления производных, для удобства подстановки в исходное уравнение будем выносить e^{2x} за скобки, и группировать слагаемые по степеням x .

$$\begin{aligned} u' &= 2e^{2x}(Ax^2 + Bx) + e^{2x}(2Ax + B) = e^{2x}(x^2 \cdot 2A + x \cdot (2A + 2B) + B) \\ u'' &= 2e^{2x}(2Ax^2 + (2A + 2B)x + B) + e^{2x}(4Ax + 2A + 2B) = e^{2x}(x^2 \cdot 4A + x \cdot (8A + 4B) + 2A + 4B) \\ u''' &= 2e^{2x}(4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B) + e^{2x}(8Ax + 8A + 4B) = e^{2x}(x^2 \cdot 8A + x \cdot (24A + 8B) + 12A + 12B) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot (-6) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \right\}$$

Подставим найденные производные в уравнение (70):

$$(x^2 \cdot 0 + x \cdot 20A + 14A + 10B) = (20x + 14) \cdot e^{2x}.$$

Для определения коэффициентов A и B составим систему двух уравнений, приравняв коэффициенты при равных степенях x :

$$\begin{cases} 20A = 20 \\ 14A + 10B = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 10B = 14 - 14A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

После подстановки найденных коэффициентов в (73) получим частное решение неоднородного уравнения (70): $u(x) = e^{2x} \cdot x^2$. (74)

И окончательно, в соответствии с формулой (63), используя решения (72) и (74), запишем общее решение неоднородного уравнения (70):

$$y_{o.n.} = e^{2x} \cdot x^2 + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}.$$

4.3.3. Линейные уравнения с правой частью вида:

$$f(x) = e^{\alpha x} (M \cdot \cos \beta x + N \cdot \sin \beta x) \text{ (Задача №11)}$$

Правая часть линейного уравнения – произведение экспоненты $e^{\alpha x}$ на линейную комбинацию тригонометрических функций $\sin \beta x$ и $\cos \beta x$ (аргументы функций должны совпадать) может быть представлена разными способами:

а) один из коэффициентов M или N равен нулю, т.е.

$$f(x) = M e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \quad \text{или} \quad f(x) = N e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

б) коэффициент α равен нулю, т.е. $f(x) = M \cdot \cos \beta x + N \cdot \sin \beta x$

в) коэффициент α равен нулю одновременно с одним из коэффициентов M или N , т.е. $f(x) = M \cdot \cos \beta x$ или $f(x) = N \cdot \sin \beta x$.

Во всех этих случаях частное решение ищут в полном виде (т.е. в виде, содержащем обе тригонометрические функции) с неопределенными коэффициентами.

При составлении $u(x)$ необходимо проверить значение корней характеристического уравнения. Если среди корней характеристического уравнения есть пара комплексный корней $k = \alpha + i\beta$ и $k = \alpha - i\beta$ (корни, содержащие в действительной части числовой коэффициент из степени экспоненты, а в мнимой части – числовой коэффициент из аргумента тригонометрических функций) кратности r , то в частное решение добавляют множитель x^r .

В частности, если правая часть не содержит экспоненты в явном виде, т.е. коэффициент $\alpha=0$, то среди корней характеристического уравнения проверяют наличие чисто мнимых корней $k = i\beta$ и $k = -i\beta$.

Неопределенные коэффициенты можно найти из системы линейных уравнений, получаемых на основании равенства коэффициентов при подобных слагаемых в правой и левой части исходного уравнения после подстановки в него $u(x)$ вместо y .

Пример 11.

$$y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x) \quad (75)$$

Для решения этого уравнения рассмотрим однородное уравнение, ему соответствующее:

$$y'' - 4y' + 8y = 0 \quad (76)$$

и характеристическое уравнение : $k^2 - 4k + 8 = 0$. Решая это квадратное уравнение, получаем отрицательный дискриминант: $D = (-4)^2 - 4 \cdot 8 = 16 - 32 = -16$. Значит корни характеристического уравнения – комплексные числа: $k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = 2 \pm 2i$. Этим корням соответствуют два частных

решения однородного уравнения (76): $y_1 = e^{2x} \cos 2x$; $y_2 = e^{2x} \sin 2x$.

Общее решение уравнения (76)

$$y_{o.o.} = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x. \quad (77)$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (75) в соответствии с видом его правой части: $f(x) = e^x(-\sin x + 2\cos x)$. Здесь представлено произведение экспоненты на линейную комбинацию тригонометрических функций с одинаковыми аргументами, числовые коэффициенты в степени экспоненты и аргументах тригонометрических функций совпадают и равны единице, т.е. $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. Т.к. пара комплексных корней характеристического уравнения не совпадает с числами $1 \pm i$, то частное решение $u(x)$ будем искать в виде совпадающем с видом функции $f(x)$:

$$u(x) = e^x(A \sin x + B \cos x). \quad (78)$$

Для подстановки в исходное уравнение вычислим первую и вторую производные функции $u(x)$. Будем группировать слагаемые, содержащие одинаковые тригонометрические сомножители.

$$\begin{aligned} u &= e^x(A \sin x + B \cos x) \\ u' &= e^x(A \sin x + B \cos x) + e^x(A \cos x - B \sin x) = e^x(\sin x(A + B) + \cos x(A - B)) \\ u'' &= e^x(\sin x(A + B) + \cos x(A - B)) + e^x(\cos x(A + B) - \sin x(A - B)) = e^x(\sin x \cdot (2A) + \cos x \cdot (2B)) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot 8 \\ \cdot (-4) \\ \cdot 1 \end{array} \right\}$$

Подставляем найденные производные в исходное уравнение (75):

$$e^x((4A + 2B) \sin x + (4B - 2A) \cos x) = e^x(-\sin x + 2\cos x).$$

Для определения коэффициентов A и B составим систему двух уравнений, приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\begin{cases} 4A + 2B = -1 \\ 4B - 2A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B = -1 - 4A \\ -2 - 10A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -0,4 \\ B = 0,6 \end{cases}$$

Подставляем найденные коэффициенты в (78), получаем частное решение уравнения (75):

$$u(x) = e^x (0.6 \cos x - 0.4 \sin x). \quad (79)$$

И окончательно, в соответствии с формулой (63), используя решения (77) и (79), получаем общее решение неоднородного уравнения (75):

$$y_{o.n.} = e^x (0.6 \cos x - 0.4 \sin x) + e^{2x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

4.3.4. Линейные уравнения с правой частью вида: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ (Задача №12)

Правая часть линейного уравнения – суперпозиция двух функций может быть представлена разными способами:

а) $f_1(x) = M \cdot \cos \beta x + N \cdot \sin \beta x$, $f_2(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$

б) $f_1(x) = M_1 \cdot \cos \beta_1 x + N_1 \cdot \sin \beta_1 x$, $f_2(x) = M_2 \cdot \cos \beta_2 x + N_2 \cdot \sin \beta_2 x$

в) $f_1(x) = e^{\alpha_1 x} P(x)$, $f_2(x) = e^{\alpha_2 x} Q(x)$.

Во всех этих случаях частное решение ищут также в виде суперпозиции двух функций с неопределенными коэффициентами.

При этом для каждой части $f(x)$ при составлении $u(x)$ необходимо проверить значение корней характеристического уравнения в соответствии со всеми вышеизложенными правилами.

Пример 12.

$$y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x \quad (80)$$

Для решения этого уравнения рассмотрим однородное уравнение, ему соответствующее:

$$y''' - 100y' = 0 \quad (81)$$

и характеристическое уравнение : $k^3 - 100k = 0$. Решая это кубическое уравнение, получаем корни характеристического уравнения – действительные числа: $k_1 = 0$, $k_2 = 10$, $k_3 = -10$. Этим корням соответствуют три частных решения однородного уравнения (81): $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$; $y_2 = e^{10x}$; $y_3 = e^{-10 \cdot x}$.

Общее решение уравнения (81):

$$y_{o.o.} = C_1 + C_2 e^{10 \cdot x} + C_3 e^{-10 \cdot x}. \quad (82)$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (80) в соответствии с видом его правой части: $f(x) = 20e^{10x} + 100\cos 10x$. Здесь

представлена суперпозиция двух функций $f_1(x) = 20e^{10x}$ и $f_2(x) = 100\cos 10x$. При этом, для анализа корней характеристического уравнения необходимо рассмотреть $\alpha_1=10, \beta_1=0$ и $\alpha_2=0, \beta_2=10$.

Т.к. число $\alpha_1=10$ совпадает с действительным корнем $k_2=10$ характеристического уравнения, то частное решение $u_1(x)$ будем искать в виде совпадающем с видом функции $f_1(x)$, домноженном на x :

$$u_1(x) = A x e^{10x} \quad (83)$$

Т.к. среди корней характеристического уравнения не совпадает с числами $\pm 10i$, то частное решение $u_2(x)$ будем искать в виде совпадающем с видом функции $f_2(x)$:

$$u_2(x) = B \sin 10x + D \cos 10x. \quad (84)$$

Таким образом, будем искать частное решение неоднородного уравнения (80) в виде:

$$u(x) = A x e^{10x} + B \sin 10x + D \cos 10x. \quad (85)$$

Для подстановки в исходное уравнение вычислим первую, вторую и третью производные функции $u(x)$. Будем группировать слагаемые, содержащие функции одного типа.

$$\begin{aligned} u &= A x e^{10x} + B \sin 10x + D \cos 10x \\ u' &= A e^{10x} + 10A x e^{10x} + 10B \cos 10x - 10D \sin 10x = (10A x + A) e^{10x} + (-10D) \sin 10x + 10B \cos 10x \\ u'' &= 10A e^{10x} + (100A x + 10A) e^{10x} - 100D \cos 10x - 100B \sin 10x = \\ &= (100A x + 20A) e^{10x} + (-100B) \sin 10x + (-100D) \cos 10x \\ u''' &= 100A e^{10x} + (1000A x + 200A) e^{10x} - 1000B \cos 10x + 1000D \sin 10x = \\ &= (1000A x + 300A) e^{10x} + 1000D \sin 10x + (-1000B) \cos 10x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot (-100) \\ \cdot 1 \end{array} \right\}$$

Подставляем найденные производные в исходное уравнение (80):

$$\begin{aligned} &(1000A x + 300A) e^{10x} + 1000D \sin 10x + (-1000B) \cos 10x - \\ &- 100((10A x + A) e^{10x} + (-10D) \sin 10x + 10B \cos 10x) = 20e^{10x} + 100\cos 10x \end{aligned}$$

или

$$200A e^{10x} + 2000D \sin 10x + (-2000B) \cos 10x = 20e^{10x} + 100\cos 10x$$

Для определения коэффициентов A , B и D составим систему трёх уравнений, приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях:

$$\left. \begin{array}{l} 200A = 20 \\ 2000D = 0 \\ -2000B = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 0,1 \\ B = -0,05 \\ D = 0 \end{array} \right\}$$

Подставляем найденные коэффициенты в (85), получаем частное решение уравнения (80):

$$u(x) = 0,1 x e^{10x} - 0,05 \sin 10x. \quad (86)$$

И окончательно, в соответствии с формулой (63), используя решения (82) и (86), получаем общее решение неоднородного уравнения (80):

$$\underline{y_{o.n.} = 0,1 x e^{10x} - 0,05 \sin 10 x C_1 + C_2 e^{10 \cdot x} + C_3 e^{-10 \cdot x}}$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Вариант № 1.

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$
3. $y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}$
4. $y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0$
5. $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 1$
6. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$
7. $y'''x \ln x = y''$
8. $4y^3y'' = y^4 - 1; y(0) = \sqrt{2}; y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$
9. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$
10. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$
11. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$
12. $y'' - 2y' = 2\operatorname{ch} 2x$

Вариант № 2.

1. $\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2ydy$
2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$
3. $y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}$
4. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
5. $xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = 1/2$
6. $\left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0$
7. $xy''' + y'' = 1$

$$8. y'' = 128y^3; y(0) = 1; y'(0) = 8$$

$$9. y''' - y'' = 6x^2 + 3x$$

$$10. y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x$$

$$11. y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$$

$$12. y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x$$

Вариант № 3.

$$1. 6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$$

$$2. y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$3. y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}$$

$$4. y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y(0) = 0$$

$$5. 2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2$$

$$6. (3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$$

$$7. 2xy''' = y''$$

$$8. y^3 y'' + 64 = 0; y(0) = 4; y'(0) = 2$$

$$9. y''' - y' = x^2 + x$$

$$10. y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$$

$$11. y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x)$$

$$12. y''' - y' = 2e^x + \cos x$$

Вариант № 4.

$$1. \sqrt{3+y^2} dx - ydy = x^2 ydy$$

$$2. xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$$

$$3. y' = \frac{2y-2}{x+y-2}$$

$$4. y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$5. y' + 4x^3 y = 4(1+x^3)e^{-4x} y^2, y(0) = 1$$

6. $\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy=0$
7. $xy''' + y'' = x + 1$
8. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 1$
9. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$
10. $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$
11. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$
12. $y'' - 3y' = 2\operatorname{ch} 3x$

Вариант № 5.

1. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$
2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$
3. $y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}$
4. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = \frac{3}{2}$
5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, y(1) = 1$
6. $(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0$
7. $\operatorname{tg} xy'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$
8. $y'' = 32\sin^3 y \cos y; y(1) = \frac{\pi}{2}; y'(1) = 4$
9. $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2$
10. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$
11. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$
12. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$

Вариант № 6.

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$
2. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$

3. $y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}$
4. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), y(0)=1$
5. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2, y(0)=2$
6. $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$
7. $x^2y'' + xy' = 1$
8. $y'' = 98y^3; y(1)=1; y'(1)=7$
9. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$
10. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x-5)e^x$
11. $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$
12. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x$

Вариант № 7.

1. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$
2. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$
3. $y' = \frac{x+y-8}{3x-y-8}$
4. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
5. $3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1)=3$
6. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$
7. $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$
8. $y^3y'' + 49 = 0; y(3) = -7; y'(3) = -1$
9. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$
10. $y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^x$
11. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$
12. $y'' - 4y' = 16\operatorname{ch} 4x$

Вариант № 8.

1. $6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$
2. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$
3. $y' = \frac{x+3y+4}{3x-6}$
4. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}$
5. $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), y(0) = 1$
6. $(\sin 2x - 2 \cos(x+y))dx - 2 \cos(x+y)dy = 0$
7. $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$
8. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1; y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}; y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
9. $y^V - y^{IV} = 2x + 3$
10. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$
11. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$
12. $y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x}$

Вариант № 9.

1. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$
2. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$
3. $y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$
4. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1$
5. $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^3), y(0) = -1$
6. $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$
7. $y''' \operatorname{tg} x = 2y''$
8. $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 2$
9. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$
10. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x$

$$11. y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$$

$$12. y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$$

Вариант № 10.

$$1. y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$$

$$2. xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$$

$$3. y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$$

$$4. y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3}$$

$$5. 3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1$$

$$6. \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0$$

$$7. y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''$$

$$8. y'' = 72y^3; y(2) = 1; y'(2) = 6$$

$$9. y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$$

$$10. y''' - 3y' - 2y = -4xe^x$$

$$11. y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$$

$$y'' - 5y' = 50\operatorname{ch} 5x$$

Вариант № 11.

$$1. \sqrt{4-x^2} y' + xy^2 + x = 0$$

$$2. y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$$

$$3. y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x - 2}$$

$$4. y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, y(2) = 4$$

$$5. 2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$6. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0$$

$$7. x^4 y'' + x^3 y' = 1$$

$$8. y^3 y'' + 36 = 0; y(0) = 3; y'(0) = 2$$

$$9. y''' + y'' = 5x^2 - 1$$

$$10. y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$$

$$11. y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$$

$$12. y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$$

Вариант № 12.

$$1. 2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$$

$$2. xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

$$3. y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$$

$$4. y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, y(1) = e$$

$$5. 3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1$$

$$6. \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y \right) dy = 0$$

$$7. xy''' + 2y'' = 0$$

$$8. y'' = 18\sin^3 y \cos y; y(1) = \frac{\pi}{2}; y'(1) = 3$$

$$9. y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$$

$$10. y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x$$

$$11. y'' - 4y' + 8y = e^x (-3\sin x + 4\cos x)$$

$$12. y''' - 9y' = -9e^{3x} - 9\cos 3x + 18\sin 3x$$

Вариант № 13.

$$1. x\sqrt{4 + y^2} dx + y\sqrt{1 + x^2} dy = 0$$

$$2. 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$$

3. $y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}$
4. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, y(1)=1$
5. $2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0)=1$
6. $\frac{1+xy}{x^2 y} dx + \frac{1-xy}{xy^2} dy = 0$
7. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$
8. $4y^3 y'' = y^4 - 16; y(0) = 2\sqrt{2}; y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
9. $7y''' - y'' = 12x$
10. $y''' - y'' - 2y' = (6x-11)e^{-x}$
11. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$
12. $y'' - y' = 2 \operatorname{ch} x$

Вариант № 14.

1. $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$
2. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$
3. $y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}$
4. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1)=4$
5. $3(xy' + y) = xy^2, y(1)=3$
6. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2} dy = 0$
7. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$
8. $y'' = 50y^3; y(3)=1; y'(3)=5$
9. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$
10. $y''' + y'' - 2y' = (6x+5)e^x$
11. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$
12. $y'' + 25y = 20 \cos 5x - 10 \sin 5x + 50e^{5x}$

Вариант № 15.

1. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$
2. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$
3. $y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}$
4. $y' + \frac{2y}{x} = x^3, y(1) = -\frac{5}{6}$
5. $y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2}$
6. $\frac{y}{x^2} dx - \frac{xy+1}{x} dy = 0$
7. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$
8. $y^3 y'' + 25 = 0; y(2) = -5; y'(2) = -1$
9. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$
10. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x+15)e^x$
11. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$
12. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$

Вариант № 16.

1. $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$
2. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$
3. $y' = \frac{y-2x+3}{x-1}$
4. $y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1$
5. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
6. $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0$
7. $xy''' + y'' + x = 0$
8. $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 3$

9. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$
10. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x$
11. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$
12. $y'' + 2y' = 2\operatorname{sh} 2x$

Вариант № 17.

1. $y \ln y + xy' = 0$
2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$
3. $y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}$
4. $y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3$
5. $y' + 2xy = 2x^3 y^3, y(0) = \sqrt{2}$
6. $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3\right)dy = 0$
7. $\operatorname{th} x \cdot y^{\text{IV}} = y'''$
8. $y'' = 8\sin^3 y \cos y; y(1) = \pi/2; y'(1) = 2$
9. $y^{\text{IV}} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$
10. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x$
11. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$
12. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$

Вариант № 18.

1. $(1 + e^x)y' = ye^x$
2. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$
3. $y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}$
4. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1, y(1) = 1$
5. $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1$

6. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0$
7. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$
8. $y'' = 32y^3; y(4) = 1; y'(4) = 4$
9. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$
10. $y''' + 3y'' + 2y' = (1-2x)e^{-x}$
11. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$
12. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$

Вариант № 19.

1. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$
2. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$
3. $y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}$
4. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1$
5. $2y' + 3y\cos x = (8+12\cos x)e^{2x}y^{-1}, y(0) = 2$
6. $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$
7. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$
7. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$
8. $y^3 y'' + 16 = 0; y(1) = 2; y'(1) = 2$
9. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$
10. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$
11. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$
12. $y'' + 3y' = 2sh3x$

Вариант № 20.

1. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$
2. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$
3. $y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}$

4. $y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}$
5. $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2, y(0) = 1$
6. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$
7. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''$
8. $y'' + 32 \sin y \cos^3 y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 4$
9. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$
10. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x$
11. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$
12. $y'' + 49y = 14 \sin 7x + 7 \cos 7x - 98e^{7x}$

Вариант № 21.

1. $y(1 + \ln y) + xy' = 0$
2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$
3. $y' = \frac{x + y + 2}{x + 1}$
4. $y' + \frac{xy}{2(1 - x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}$
5. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \sqrt{2}$
6. $xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0$
7. $y''' \operatorname{th} 7x = 7y''$
8. $y'' = 50 \sin^3 y \cos y; y(1) = \pi/2; y'(1) = 5$
9. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$
10. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x}$
11. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$
12. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$

Вариант № 22.

1. $(3 + e^x)yy' = e^x$
2. $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$

3. $y' = \frac{2x + y - 3}{4x - 4}$
4. $y' + xy = -x^3, y(0) = 3$
5. $2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2$
6. $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0$
7. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$
8. $y'' = 18y^3; y(1) = 1; y'(1) = 3$
9. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$
10. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x$
11. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$
12. $y'' + 4y' = 16\operatorname{sh} 4x$

Вариант № 23.

1. $\sqrt{3 + y^2} + \sqrt{1 - x^2} yy' = 0$
2. $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$
3. $y' = \frac{2x + y - 3}{2x - 2}$
4. $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2, y(0) = 1$
5. $y' + xy = (x-1)e^x y^2, y(0) = 1$
6. $(\cos(x + y^2) + \sin x)dx + 2y\cos(x + y^2)dy = 0$
7. $\operatorname{cth} xy'' - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$
8. $y^3 y'' + 9 = 0; y(1) = 1; y'(1) = 3$
9. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$
10. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$
11. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$
12. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$

Вариант № 24.

1. $x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$

2. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$
3. $y' = \frac{y}{2x+2y-2}$
4. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \cdot \sin x, y(0) = 1$
5. $2y' + 3y \cos x = -e^{-2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}, y(0) = 1$
6. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$
7. $(x+1)y''' + y'' = (x+1)$
8. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1); y(0) = \sqrt{2}; y'(0) = \sqrt{2}$
9. $y^{IV} + y''' = x$
10. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$
11. $y'' - 4y' + 8y = e^x (2 \sin x - \cos x)$
12. $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$

Вариант № 25.

1. $y'y \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$
2. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10 \frac{y}{x} + 5$
3. $y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}$
4. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = 1/2$
5. $y' - y = xy^2, y(0) = 1$
6. $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0$
7. $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$
8. $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 5$
9. $y''' - y'' = 6x + 5$
10. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$
11. $y'' + 2y' = 3e^x (\sin x + \cos x)$
12. $y'' + 5y' = 50 \operatorname{sh} 5x$

Вариант № 26.

1. $\sqrt{5+y^2}dx+4(x^2y+y)dy=0$
2. $xy'=\frac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$
3. $y'=\frac{x+y-4}{x-2}$
4. $y'-y\cos x=-\sin 2x, y(0)=3$
5. $2(xy'+y)=y^2\ln x, y(1)=2$
6. $\left(1+\frac{1}{y}e^{x/y}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}e^{x/y}\right)dy=0$
7. $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3$
8. $y''=8y^3; y(0)=1; y'(0)=2$
9. $y'''+3y''+2y'=x^2+2x+3$
10. $y'''-2y''-3y'=(8x-14)e^{-x}$
11. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 4x$
12. $y''+81y=9\sin 9x+3\cos 9x+162\cdot e^{9x}$

Вариант № 27.

1. $(1+e^x)yy'=e^x$
2. $y'=\frac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$
3. $y'=\frac{2x+y-1}{2x-2}$
4. $y'-4xy=-4x^3, y(0)=-1/2$
5. $y'+y=xy^2, y(0)=1$
6. $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=0$
7. $-xy'''+2y''=\frac{2}{x^2}$
8. $y^3y''+4=0; y(0)=-1; y'(0)=-2$
9. $y'''-5y''+6y'=(x-1)^2$

$$10. y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$$

$$11. y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$$

$$12. y''' - 64y' = 128 \cos 8x - 64e^{8x}$$

Вариант № 28.

$$1. \sqrt{2 + y^2} dx + 3(x^2 y + y) dy = 0$$

$$2. xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$$

$$3. y' = \frac{3y - 2x + 1}{3x + 3}$$

$$4. y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1$$

$$5. y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, y(1) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}$$

$$6. 2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2 y + y^2) dy = 0$$

$$7. \operatorname{cth} x y'' + y' = \operatorname{ch} x$$

$$8. y'' = 2 \sin^3 y \cos y; y(1) = \pi/2; y'(1) = 1$$

$$9. y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$$

$$10. y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x$$

$$11. y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$$

$$12. y'' + y' = 2 \operatorname{sh} x$$

Вариант № 29.

$$1. 2x dx - y dy = x^2 y dy - xy^2 dx$$

$$2. 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10 \frac{y}{x} + 10$$

$$3. y' = \frac{6y - 6}{5x + 4y - 9}$$

$$4. y' - 3x^2 y = x^2(1 + x^3)/3, y(0) = 0$$

$$5. 2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 2$$

$$6. (3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2) dx + (2x^3 + 3x^2 y) dy = 0$$

$$7. x^4 y'' + x^3 y' = 4$$

8. $y^3 y'' + 1 = 0; y(1) = -1; y'(1) = -1$
9. $y^{\text{IV}} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$
10. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$
11. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$
12. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$

Вариант № 30.

1. $\sqrt{2-x^2} y' + 2xy^2 + 2x = 0$
2. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$
3. $y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}$
4. $y' - y\cos x = \sin 2x, y(0) = -1$
5. $xy' + y = xy^2, y(1) = 1$
6. $xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$
7. $y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' = 2x$
8. $y'' = 2y^3; y(-1) = 1; y'(-1) = 1$
9. $y^{\text{IV}} + y''' = 12x + 6$
10. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1-x)e^{-x}$
11. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x$
12. $y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x$

Список литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. – М.: Интеграл-Пресс, 2010. – 544 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2005. – 512 с.

Сведения об авторах

Ледовская Екатерина Валерьевна, кандидат технических наук, доцент
кафедры, прикладная математика

Держинский Роман Игоревич, кандидат технических наук,
заведующий кафедрой, прикладная математика