Кафедра Прикладной математики
Института информационных технологий
РТУ МИРЭА

Дисциплина «Вычислительная математика»

2023-2024 уч.г.

Наполнение курса

- **Объем курса**

8 лекционных и 16 практических занятий

- **Темы практических занятий**

1. Элементы теории погрешностей
2. Методы приближения и аппроксимация функций
3. Численные методы решений трансцендентных и алгебраических уравнений
4. Численное интегрирование
5. Численные методы линейной алгебры
6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений
7. Численное решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных
8. Быстрое дискретное преобразование Фурье

Практика 7.
Аналитическое решение дифференциальных уравнений первого порядка.

1.1. Задача Коши.
1.2. Уравнения с разделяющимися переменными.
1.3. Уравнения с однородными функциями.
1.4. Уравнения, приводящиеся к виду «с однородными функциями».
1.5. Линейные уравнения.
1.6. Уравнения Бернулли.
1.7. Уравнения в полных дифференциалах.

Часть 1.
Задача Коши.

В области теории ДУ О. Коши принадлежат: постановка «задачи Коши», основные теоремы существования решений и методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка (1820-е). Публикация «Дифференциальное и интегральное исчисление» (1831).

Постановка задачи решения ДУ.

Дифференциальное уравнение – это уравнение, в которое входят переменная, неизвестная функция этой переменной, и производные неизвестной функции.

ДУ первого порядка в *каноническом* виде называют уравнение следующего вида:

$$F(x,y,y') = 0 \tag{7.1}$$

а дифференциальное уравнение:
$$y' = f(x,y) \tag{7.2}$$

где $f(x,y)$ – заданная функция двух переменных, называется дифференциальным уравнением первого порядка, *разрешенным относительно производной*.

Решением, *интегралом* или *интегральной кривой* ДУ называется *n* раз дифференцируемая функция, удовлетворяющая этому уравнению, т.е. такая, что:

$$F(x,\varphi'(x),\ldots,\ \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \tag{7.3}$$

Задача Коши – нахождение решения уравнения (7.2) в виде функции $y(x)$ с начальным условием:

$$y(x_0) = y_0 \tag{7.4}$$

Задача Коши для ДУ n-го порядка.

ДУ n-го порядка в каноническом виде называют уравнение следующего вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

или:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) \tag{7.5}$$

для которого задача Коши состоит в нахождении решения $y = y(x)$, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \dots y_0^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)} \tag{7.6}$$

здесь y_0, y_0', $y_0^{(n)}$ – заданные числа.

Решением уравнения (7.2) является некоторая функциональная зависимость $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Существует множество решений (частных решений) дифференциального уравнения (7.4), которые могут быть объединены в *общее решение* вида:

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots C_n) \tag{7.7}$$

здесь, $C_1, C_2, \dots C_n$ – произвольные константы.

Свойства *общего решения* ДУ:

1. при произвольном выборе констант $C_1, C_2, \ldots C_n$ (7.7) является решением заданного дифференциального уравнения (7.5).

2. Какие бы ни были начальные условия (7.6) является решением заданного дифференциального уравнения (7.5) существует единственный набор констант $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}, \ldots C_n = C_{n0}$ такой, что функция.

$$y = \Phi\left(x, C_{10}, C_{20}, \ldots C_{n0}\right)$$

удовлетворяет начальным условиям.

Пример 7.1. Пример решения ДУ третьего порядка.

$$y''' = 2 \cdot x. \qquad y'' = \int y''' dx = \int 2x \cdot dx = x^2 + C_1 = x^2 + C_1$$

$$y' = \int (x^2 + C_1) dx = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$$y' = \int \left(\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2\right) dx = \frac{x^4}{4} + C_1 \frac{x^2}{3} + C_2 x + C_3$$

Решение ДУ n-го порядка – функция, зависящая от x и n независимых постоянных:

$$F(x,y,y',y'',\dots y^{(n)}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \varphi(x,C_1,C_2,\dots C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называют функцию:

$$y = \Phi(x,C_{10},C_{20},\dots C_{n0})$$

которая получается из общего решения при определенном значении констант: $C_1=C_{10}, C_2=C_{20},\dots C_n= C_{n0}$.

Задача Коши – задача собственно отыскания решения (7.7) дифференциального уравнения (7.5), удовлетворяющего начальным условиям (7.6).

Этапы решения задачи Коши:

1. Нахождение общего решения;
2. Вычисление константы через подстановку начальных условий в общее решение;
3. Запись частного решения путём замены произвольной постоянной в общем решении на найденную в п.2 константу.

Часть 2.
Уравнения с разделяющимися переменными.

Предложил И. Бернулли (1680-е).

Уравнение вида: $$y' = f(x) \cdot g(y) \qquad (7.8)$$

$f(x)$, $g(y)$ – непрерывные функции, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Для отыскания решения уравнения надо разделить в нем переменные. Для этого в (7.8) обе части уравнения делят на $g(y)$ и умножают на dx. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

В этом уравнении переменная x входит только в правую часть, а переменная y – только в левую (т.е. переменные разделены). Интегрируя получаем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx + C \qquad \Rightarrow \qquad G(y) = F(x) + C$$

Вторая форма записи:

$$f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0 \qquad (7.9)$$

Пример 7.2. Решение ДУ с разделяющимися переменными:

$$20x \cdot dx - 3y \cdot dy = 3x^2 y \cdot dy - 5xy^2 \cdot dx$$

Представим в виде (7.9): $20x \cdot dx + 5xy^2 \cdot dx = 3x^2 y \cdot dy + 3y \cdot dy \quad \Rightarrow$

$$5x(4 + y^2)dx = 3y(x^2 + 1)dy \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{5x}{x^2 + 1}dx = \frac{3y}{4 + y^2}dy \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{5x}{x^2 + 1}dx = \int \frac{3y}{4 + y^2}dy + \mathrm{C}$$

При $d(t^2 + a) = 2t \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{3}{2}\int \frac{d(4 + y^2)}{4 + y^2} + \mathrm{C}$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2} ln|x^2 + 1| = \frac{3}{2} ln|4 + y^2| + C$$

$$\Rightarrow \quad ln(C(x^2 + 1)^5) = ln(4 + y^2)^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(x^2 + 1)^5 = (4 + y^2)^3}$$

Часть 3.
Уравнения с однородными функциями.

Функция двух переменных $f(x,y)$ называется однородной функцией измерения *k*, если при любом значении λ справедливо равенство:

$$f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^{k} \cdot f(\lambda x,\lambda y) \qquad (7.8)$$

Пример 7.3. Нахождение измерения однородности функции.

$f(x,y) = 5y^3 - 2xy^2 + 3x^3$ Измерение однородности *k*=3, т.к. справедливо:

$$f(\lambda x,\lambda y) = 5(\lambda y)^3 - 2(\lambda x)(\lambda y)^2 + 3(\lambda x)^3 = \lambda^3 \cdot f(x,y)$$

В частности, функция является однородной функцией нулевого измерения, если при любом значении λ справедливо:

$$f(\lambda x,\lambda y) = f(x,y) \qquad (7.9)$$

Т.к. λ выбирается произвольно, можно взять $\lambda=1/x$. Но тогда равенство (7.9) принимает вид:

$$f(1,y/x) = f(x,y)$$

Таким образом, однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения y/x.

Уравнение вида (7.2): $y' = f(x,y)$

$f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения, называется дифференциальным уравнением с однородными функциями.

! *Замечание 7.1*. Решение основано на том факте, что однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения y/x. После интегрирования полученного уравнения выполняют обратную подстановку по формуле $y/x=t$.

$$\frac{y}{x} = t \quad \Rightarrow \quad y = tx \quad \Rightarrow \quad y' = t + xt'$$ Подставляем в (7.2):

получим уравнение с разделяющимися переменными: $t + xt' = \tilde{f}(t) \quad \Rightarrow$

$$\frac{dt}{\tilde{f}(t) - t} = \frac{dx}{x}$$

Вторая форма записи:

$$F(x,y)\cdot dx + G(x,y)\cdot dy = 0 \qquad (7.10)$$

$F(x,y)$, $G(x,y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Пример 7.3. Решение ДУ с однородными функциями: $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$

$\dfrac{y}{x} = t \quad \Rightarrow \quad y = tx \quad \Rightarrow \quad y' = t + xt'$ Подставляем в (7.2): $\Rightarrow$

$$t + xt' = \frac{1 + 2t - 5t^2}{2 - 6t} \Rightarrow xt' = \frac{1 + 2t - 5t^2}{2 - 6t} - t \quad \Rightarrow$$

$xt' = \dfrac{t^2 + 1}{2 - 6t}$ ДУ типа (7.8): $\Rightarrow \dfrac{(2 - 6t)dt}{t^2 + 1} = \dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \displaystyle\int \frac{(2 - 6t)dt}{t^2 + 1} = \int \frac{dx}{x} + C$

$$\Rightarrow \quad 2\int \frac{dt}{t^2 + 1} - \frac{6}{2}\int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = ln|x| + C$$

$\Rightarrow \quad 2arctg(t) - 3ln|t^2 + 1| = ln|x| + C$ При $\dfrac{y}{x} = t$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2arctg\left(\frac{y}{x}\right) - 3ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right| = ln|x| + C}$$

МИРЭА
Российский
технологический
университет

Часть 4.
Уравнения, приводящиеся к виду «с однородными функциями».

Уравнения вида:

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

не являются уравнениями с однородными функциями, если $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$.

но могут быть приведены к такому виду с помощью подстановки вида:

$$\begin{cases} x = x_1 + m \\ y = y_1 + k \end{cases} \qquad (7.11)$$

Здесь: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$$

Числа *m* и *k* подбираются таким образом, чтобы дробь в правой части нового уравнения была однородной функцией нулевого измерения. Подставим равенства (7.11) в числитель и знаменатель правой части уравнения. Дробь примет вид

$$\frac{a_1(x_1 + m) + b_1(y_1 + k) + c_1}{a_2(x_1 + m) + b_2(y_1 + k) + c_2}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим дробь аналогичную исходной:

$$\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + (a_1 m + b_1 k + c_1)}{a_2 x_1 + b_2 y_1 + (a_2 m + b_2 k + c_2)}$$

Для того, чтобы эта дробь была однородной, разрешим СЛУ 2x2 приравняв свободные коэффициенты в числителе и знаменателе к нулю:

$$\begin{cases} a_1 m + b_1 k + c_1 = 0 \\ a_2 m + b_2 k + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (7.12)$$

С новыми переменными x_1, y_1 исходное уравнение примет вид (7.9) (уравнение с однородными функциями):

$$y_1{}' = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1}{a_2 x_1 + b_2 y_1}$$

Пример 7.4. Решение ДУ, приводящееся к виду «с однородными функциями»:

$$y' = \frac{y + 2}{2x + y - 6}$$ Очевидно для числителя $y_1 = y - 2$, т.е. для (7.12) $k = -2$.

Из (7.12) для знаменателя: $2m + k - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 3$

По (7.11): $\begin{cases} x = x_1 + 3 \\ y = y_1 - 2 \end{cases} \quad \Rightarrow$ Новый вид ДУ: $y_1{}' = \dfrac{y_1}{2x_1 + y_1}$

$$\frac{y_1}{x_1} = t \quad \Rightarrow \quad y_1 = tx_1 \quad \Rightarrow \quad y_1{}' = t + x_1 t'$$ Подставляем в (7.2): $\Rightarrow$

$$t + x_1 t' = \frac{t}{2 + t} \quad \Rightarrow \quad x_1 t' = \frac{-t - t^2}{2 + t}$$ Разделяя переменные получим:

$$\Rightarrow \qquad \frac{(2 + t)dt}{-t - t^2} = \frac{dx}{x}$$

Пример 7.4. Решение ДУ, приводящееся к виду «с однородными функциями».

$$\int \frac{(2+t)dt}{-t-t^2} = \int \frac{dx_1}{x_1} + \mathrm{C}$$

Преобразование левой части:

$$\frac{(2+t)}{-t-t^2} = -\frac{2+t}{t+t^2} \Rightarrow$$

$$-\frac{t+2}{t^2+2t\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = -\frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = \frac{3/2}{\frac{1}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{t+1/2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} ln\left|\frac{t+1}{t}\right| - \frac{1}{2} ln|t+t^2| = ln|x_1| + \mathrm{C}$$

Экспонируем и сокращаем:

$$\frac{t+1}{t^2} = \mathrm{C}x_1$$

Подставляем:

$$t = \frac{y_1}{x_1}$$

$$y_1 + x_1 = \mathrm{C}y_1^2$$

при: $\begin{cases} x = x_1 + 3 \\ y = y_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow$

$$(y+2) + (x-3) = \mathrm{C}(y+2)^2 + 1$$

$$\boxed{y + x = \mathrm{C}(y+2)^2 + 1}$$

МИРЭА
Российский технологический университет

Часть 5.
Линейные уравнения.

Уравнения вида: $$y' + p(x) \cdot y = f(x) \qquad (7.13)$$

где $p(x,y)$, $f(x,y)$ – непрерывные функции, называется линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) первого порядка.

Метод Лагранжа.

Сначала решают однородное уравнение, соответствующее исходному:

$$y' + p(x) \cdot y = 0 \qquad (7.14)$$

Общее решение уравнения (7.14) находят, разделяя переменные $\frac{dy}{y} = -\,p(x) \cdot dx$ в виде: $$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (7.15)$$

где C – произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (7.13) ищут вариацией произвольной постоянной в виде:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (7.15)$$

где $C(x)$ – неизвестная дифференцируемая функция от x, которую необходимо найти. Для нахождения $C(x)$ нужно подставить y в исходное уравнение (7.14), которое принимает вид уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 7.4. Решение ЛДУ методом Лагранжа:

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin(x) + x \qquad (7.16)$$

Однородное ЛДУ, соответствующее исходному, имеет вид:

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = 0$$

Разделяя переменные получим:

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{1-x^2} \quad \Rightarrow$$

Интегрируя обе части:

$$\ln(y) = \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \ln C \quad \Rightarrow$$

$$y = C\sqrt{1-x^2} \qquad (7.17)$$

Находим производную для (7.17) для С(x):

$$y' = \mathrm{C}'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (7.18)$$

Подставляем (7.17), (7.18) в (7.16):

$$\mathrm{C}'(x)\sqrt{1-x^2} - \frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{xC(x)\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \arcsin(x) + x$$

Пример 7.4. Решение ЛДУ методом Лагранжа:

$$C'(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Интегрируем:

$\Rightarrow$

$$C(x) = \int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int d(\arcsin(x)) = \frac{1}{2}(\arcsin(x))^2$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{2}\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1/2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$C(x) = \frac{1}{2}(\arcsin(x))^2 + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{1}{2}(\arcsin(x))^2 + \sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}}$$

Часть 6.
Уравнения Бернулли.

Опубликовал Я. Бернулли (1695).
Решение сведением к ЛДУ нашел И. Бернулли (1697).

Уравнения вида: $$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^{\,n} \qquad (7.19)$$

где $p(x,y)$, $f(x,y)$ – непрерывные функции, называется (дифференциальным) уравнением Бернулли.

Сводится к ЛДУ разделив обе части на y^n: $$y' \cdot y^{\,-n} + p(x) \cdot y^{\,1-n} = f(x)$$

Выполняем замену: $z = y^{\,1-n} \quad \Rightarrow \quad z' = (1-n) \cdot y' \cdot y^{\,-n} \quad \Rightarrow$

$$\frac{z'}{1-n} = y' \cdot y^{\,-n} \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{1-n} + p(x) \cdot z = f(x)$$

■

Пример 7.5. Решение задачи Коши.

$$y' - y \cdot tg(x) = -\left(\frac{2}{3}\right) y^4 \sin(x) \qquad y(0) = 1 \qquad (7.20)$$

Будем искать решение сразу методом Бернулли: в виде произведения:

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Пример 7.5. Решение задачи Коши.

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v \cdot tg(x) = -\left(\frac{2}{3}\right) y^4 \sin(x) \qquad (7.21)$$

Группируем слагаемые, содержащие функцию v, функцию u выносим за скобки:

$$u' \cdot v + u(v' - v \cdot tg(x)) = -\left(\frac{2}{3}\right) y^4 \sin(x) \qquad (7.22)$$

Находим функцию v, приравняв к нулю выражение в скобках: $v' - v \cdot tg(x) = 0$

$$v' = v \cdot tg(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{\sin(x) \cdot dx}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{d(\cos(x))}{\cos(x)}$$

$$\ln(v) = -\ln(\cos(x)) \quad \Rightarrow \quad v = 1/\cos(x)$$

Подставляем найденную функцию v в уравнение (7.22), с учетом равенства нулю выражения в скобках, получаем уравнение относительно неизвестной функции u:

$$\frac{u'}{\cos(x)} = -\left(\frac{2}{3}\right) u^4 \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\left(\frac{2}{3}\right) u^4 \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^3}$$

Пример 7.5. Решение задачи Коши.

$$\frac{du}{u^4} = -\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\sin(x)\cdot dx}{(\cos(x))^3} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{du}{u^4} = \frac{2}{3}\int\frac{d(\cos(x))}{(\cos(x))^3} + C$$

$$\frac{-1/3}{u^3} = \frac{2}{3}\frac{1/2}{(\cos(x))^2} + C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u^3} = \frac{1 + C(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} \quad \Rightarrow$$

$$u^3 = \frac{(\cos(x))^2}{1 + C(\cos(x))^2} \quad \Rightarrow \quad u = \left(\frac{(\cos(x))^2}{1 + C(\cos(x))^2}\right)^{1/3}$$

Подставляем найденные значения u и v, находим общее решение уравнения (7.20):

$$y = u(x)\cdot v(x) = \left(\frac{(\cos(x))^2}{1+C(\cos(x))^2}\right)^{1/3}\cdot\frac{1}{\cos(x)} = \boxed{\frac{1}{(\cos(x)(1+C(\cos(x))^2))^{1/3}}}$$

Пример 7.5. Решение Задачи Коши.

Для решения задачи Коши необходимо найти функцию, удовлетворяющую начальным условиям (7.20). Определим значение постоянной С, подставляя $y(0)=1$ в общее решение:

$$1=\frac{1}{(\cos(0)(1+C(\cos(0))^2))^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{1}{(1+C)^{1/3}} \quad \Rightarrow \quad C=0$$

$$\boxed{y=\frac{1}{(\cos(x))^{1/3}}}$$

Часть 7.
Уравнения в полных дифференциалах.

Полным дифференциалом функции двух переменных $F(x,y)$ называется выражение

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \qquad (7.23)$$

Уравнения вида: $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (7.24)$$

где где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух переменных $F(x,y)$ – *уравнение в полных дифференциалах*.

Уравнение в полных дифференциалах (7.24) можно переписать:

$$dF(x,y) = 0 \qquad \Rightarrow$$

общее решение уравнения (7.24) в неявном виде определяется равенством

$$F(x,y) = C \qquad (7.25)$$

где *C* – произвольная постоянная.

! *Замечание 7.2*. Инвариантность смешанных частных производных.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Этапы решения.

1. Проверка инвариантности: решая уравнения вида (7.24), необходимо сначала убедиться, что левая часть этого уравнения – действительно полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$. Т.е. проверить, что функции $M(x,y)$ – частная производная по x, а $N(x,y)$ – частная производная по y одной и той же функции:

$$\frac{\partial\big(N(x,y)\big)}{\partial x} = \frac{\partial\big(M(x,y)\big)}{\partial y}$$

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}; N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad (7.26)$$

2. Первое интегрирование:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$$

где $\varphi(y)$ – постоянная интегрирования.

3. Второе интегрирование:

$$\frac{\partial\big(\int M(x,y)dx\big)}{\partial y} + \varphi'(y) = N(x,y) \;\Rightarrow$$

$$\varphi(y) = \Phi(y) + \widehat{C} \;\Rightarrow$$

4. Решение:

$$\int M(x,y)dx + \Phi(y) + \widehat{C} = \tilde{C}$$

Пример 7.6. Решение ДУ в полных дифференциалах.

$$xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0 \tag{7.27}$$

1. Проверка инвариантности: $M(x,y) = xy^2$ $\quad N(x,y) = y(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\left(y(x^2 + y^2)\right)}{\partial x} = 2xy = \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

2. Первое интегрирование:

$$F(x,y) = \int xy^2dx + \varphi(y) = y^2\int xdx + \varphi(y) = y^2\frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

3. Второе интегрирование:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial\left(y^2\frac{x^2}{2} + \varphi(y)\right)}{\partial y} = yx^2 + \varphi'(y)$$

при:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi'(y) = N(x,y) \qquad \Rightarrow$$

Пример 7.6. Решение ДУ в полных дифференциалах.

$$yx^2 + \varphi' = y(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad \varphi' = y^3 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \frac{y^4}{4} + \widehat{C}$$

$$F(x,y) = y^2\frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \widehat{C}$$

4. Решение: $y^2\frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \widehat{C} = \tilde{C}$ при: $C = \tilde{C} - \widehat{C}$

$$\boxed{y^2\frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C}$$