Кафедра Прикладной математики

Института информационных технологий

РТУ МИРЭА

Дисциплина «Вычислительная математика»

2023-2024 уч.г.

Наполнение курса

- **Объем курса**

8 лекционных и 16 практических занятий

- **Темы практических занятий**

1. Элементы теории погрешностей
2. Методы приближения и аппроксимация функций
3. Численные методы решений трансцендентных и алгебраических уравнений
4. Численное интегрирование
5. Численные методы линейной алгебры
6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений
7. Численное решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных
8. Быстрое дискретное преобразование Фурье

Практика 1.
Элементы теории погрешностей.

1.1. Приближенные числа и их погрешности.
1.2. Основные источники погрешностей.
1.3. Погрешности арифметических вычислений.
1.4. Решение типового задания.

Часть 1.
Приближенные числа и их погрешности.

В отличии от аналитического численное решение любой задачи обычно осуществляется приближенно, с различной точностью.

Главная задача вычмат – *фактическое нахождение решения* поставленной задачи с требуемой или, по крайней мере, оцениваемой точностью.

Отклонение истинного решения от приближенного называется *погрешностью*.

Пусть точное значение какой-либо величины равно А, а приближенное значение равно «x». Тогда *погрешность* (*ошибка* или *отклонение*) – Δx вычисленного (приближенного) x от истинного (точного) значения А будет «А – x».

$$\Delta x = A - x \tag{1.1}$$

При $x \le A$: x называют *приближенным значением А с недостатком.*
При $x \ge A$: x называют *приближенным значением А с избытком*.

Из (1.1) следует, что знак ошибки Δx может быть любым. Поэтому целесообразно использовать абсолютное значение ошибки.

Абсолютной погрешностью называется всякая оценка сверху модуля истинной погрешности:

$$\Delta = |A - x| \tag{1.2}$$

Пример 1.1. Вычисление абсолютной погрешности.

A = 10 и x = 10,05.

$\Delta = |\, A - x \,| = |10 - 10{,}05|$

При нахождении абсолютной ошибки возможны два случая:

1. Число A известно. Например, A=1/6 и необходимо записать это число в виде десятичной дроби. В этом случае Δ легко определить по формуле (1.2).
2. Число A неизвестно. Такая ситуация на практике бывает чаще. В этом случае невозможно определить абсолютную погрешность A по формуле (1.2).

Если точное значение числа *A* неизвестно, абсолютную погрешность приближенного числа x оценивают сверху. Такая оценка называется *предельной абсолютной погрешностью.*

Предельной абсолютной погрешностью может быть всякое число Δ_x не меньшее абсолютной погрешности приближенного числа x:

$$\Delta_x \geq |A - x| \qquad (1.3)$$

! *Замечание 1.1*. Значение Δ_x выбирают возможно меньшим исходя из содержательных представлений.

Т.о., для одного и того же значениях могут быть получены различные предельные абсолютные погрешности (например, формула Рунге дает именно предельную абсолютную погрешность. Соответствующие теоремы в курсах численных методов посвящены обоснованию неравенства (1.3)). Неравенство (1.3) дает отрезок:

$$x - \Delta_x \leq A \leq x + \Delta_x \qquad (\text{или } A = x \pm \Delta_x) \qquad (1.4)$$

При стат. измерениях Δx задается с определенной достоверностью, т.е. вероятность события $\Delta x \geq |A - x|$ больше определенной величины γ: $P(\Delta x \geq |A - x|) > \gamma \leq 1$.

Пример 1.2. Общепринятая форма записи приближенных чисел.
$y = 16,3967 \pm 0.0006$

! *Замечание 1.2*. Значение Δ_x выбирают возможно меньшим исходя из содержательных представлений.

Т.о., приближенное число – это не точка на числовой оси, а отрезок. При этом точными могут быть лишь рациональные числа. Всякое иррациональное число в памяти ВУ (тип REAL) уже становится приближенным. О точности приближенного числа следует судить не по абсолютной его погрешности, а по относительной.

Знания абсолютной погрешности недостаточно для характеристики точности приближенного числа x. Так, если известно, что абсолютная погрешность измерения некоторой длины равна 1 мм, то еще нельзя сказать, хорошо или плохо произведено измерение. Чтобы оценить точность измерения, надо знать порядок измеряемой величины (или более точно).

Пример 1.3. Сравнение абсолютной погрешности при измерениях. $\Delta = 1$ мм.

а) измеряется ширина стекла для окна. $\Delta = 1$ мм – хороший результат.
б) измеряется толщина того же стекла. $\Delta = 1$ мм – плохой результат, так как вместо 3 мм толщины получили, например, 2 мм.

Для характеристики точности представления приближенного числа x используют значение абсолютной погрешности этого числа, приходящееся на единицу значения точного числа А – это *относительная погрешность.*

Т.е. относительной погрешностью δ приближенного числа x называется отношение его абсолютной погрешности Δ к абсолютной величине самого числа А:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \qquad (\text{или } \Delta = |A|\cdot\delta) \qquad (1.5)$$

Предельной относительной погрешностью δ_x приближенного числа x называют всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа :

$$\delta_x \geq \delta = \frac{\Delta}{|A|} \qquad (\text{или } \Delta \leq |A|\cdot\delta_x) \qquad (1.6)$$

! *Замечание 1.3*. Предельная относительная погрешность безразмерная величина и часто выражается в процентах. Все методы оценки погрешности дают возможность так или иначе найти абсолютную погрешность Δx. Однако она используется лишь для того, чтобы найти δ_x по формуле (1.5).

Т.к. на практике А $\approx x$, то вместо формулы (1.5) часто пользуются формулой:

$$x(1 - \delta_x) \le \delta \le x(1 + \delta_x)$$

а выражение (1.4) записывают в следующем виде:

$$\Delta_x = |x| \cdot \delta_x \qquad (\text{или } A = x(1 \pm \delta_x)) \qquad (1.7)$$

Пусть А>0, x>0, $\Delta_x < x$. Тогда $\delta = \dfrac{\Delta}{A} \le \dfrac{\Delta_x}{x - \Delta_x}$

Следовательно, предельная относительная погрешность может быть оценена числом в результате вычислений.

Аналогично: $\Delta = A \cdot \delta \le (x + \Delta)\delta_x \qquad (\text{или } \Delta_x = \dfrac{x \cdot \delta_x}{1 - \delta_x})$

Т.к. на практике $\Delta_x << x$, $\delta_x << 1$, то можно принять:

$$\delta_x \approx \frac{\Delta_x}{x} \qquad \Delta_x \approx x \cdot \delta_x$$

Пример 1.3. Оценка предельных абсолютной и относительной погрешности при определении площади.
Длина и ширина помещения, измеренные с точностью до 1 см, равны соответственно l=4,58 м и w=3,67 м.

Решение: Найдем приближенное значение площади помещения -

$$x = l \cdot w = 4{,}58 \text{ м} \cdot 3{,}67 \text{ м} = 16{,}8086 \text{ м}^2$$

Согласно условию задачи, возможные значения площади равны:

$$(l + 0{,}01)\cdot(w + 0{,}01) = 4{,}59 \text{ м} \cdot 3{,}68 \text{ м} = 16{,}8912 \text{ м}^2$$

$$(l - 0{,}01)\cdot(w - 0{,}01) = 4{,}57 \text{ м} \cdot 3{,}66 \text{ м} = 16{,}7262 \text{ м}^2$$

Предельная абсолютная погрешность $\Delta_x = 0{,}0826$м^2:

$|16{,}8912 - 16{,}8086| = 0{,}0826$ м^2; $|16{,}8086 - 16{,}7262| = 0{,}0824$ м^2.

Предельная относительная погрешность δ_x:

$$\delta_x \approx \frac{\Delta_x}{x} = \frac{0{,}0826 \text{ м}^2}{16{,}8086 \text{ м}^2} = 0{,}0049141 = 0{,}49\%$$

Часть 2.
Основные источники погрешностей.

Состав полной погрешности вычислений:

1) *неустранимая* погрешность;

2) *устранимая* погрешность.

Неустранимая погрешность обусловлена неточностью исходных данных и никаким образом не может быть уменьшена в процессе вычислений.

Устранимая погрешность обусловлена погрешностью аппроксимации (метода) и погрешностью вычислений.

Эти составляющие могут быть уменьшены выбором более точных методов и увеличением разрядности вычислений.

Источники погрешностей численного решения задачи.

Математическая модель. Погрешность математической модели связана с ее приближенным описанием реального объекта. Погрешность математической модели является неустранимой, в дальнейшем предполагается, что математическая модель фиксирована и ее погрешность учитываться не будет.

Исходные данные. Исходные данные обычно содержат погрешности, так как они либо неточно измерены, либо являются результатом решения некоторых вспомогательных задач. Во многих физических и технических задачах погрешность измерений составляет 1 – 10%. Погрешность исходных данных считается неустранимой и учитываться не будет.

Пример 1.3. Начальные погрешности некоторых числовых констант.

$$\pi = 3{,}14;\ e = 2{,}718.$$

Метод вычислений. Применяемые для решения задачи методы, как правило, являются приближенными.

Погрешность *метода* необходимо определять для конкретного метода. Обычно ее можно оценить и проконтролировать. Следует выбирать погрешность метода так, чтобы она была не более чем на порядок меньше неустранимой погрешности.

Пример 1.4. Вычисление значений тригонометрической функции sin(x).

Вычисляют конечное число членов степенного ряда:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Количество используемых членов ряда определяет погрешность вычисления этой функции.

Округление в вычислениях. Погрешность округления возникает из-за вычислений с конечным числом значащих цифр.

! *Замечание 1.3*. При решении больших задач производятся миллиарды вычислений, но так как погрешности имеют разные знаки, то они частично взаимокомпенсируются.

Десятичная запись числа.

Любое число в любой системе исчисления: $a = \alpha_k \ldots \alpha_1 \alpha_0 \alpha_{-1} \alpha_{-2} \ldots \alpha_{-m}$

можно представить формально поразрядно в десятичной системе счисления:

$$a = \sum_{i=-m}^{k} \alpha_i \cdot 10^i$$

где k+1 – число целых разрядов числа a, m – число дробных разрядов.

Пример 1.5. Поразрядное представление числа в десятичной системе счисления.

$$735{,}402 = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

α_k – первая ненулевая цифра числа a, считая слева. Тогда все последующие цифры числа a называются *значащими цифрами.*

Пример 1.6. Значащие цифры чисел.

a = 234126: все цифры значащие; a = 0,004370: 4 последние цифры значащие.

! *Замечание 1.4*. Т.о. значащие цифры – цифры, отличные от нуля, и нули, если они стоят между значащими цифрами или в конце числа и служат для сохранения разряда точности вычислений.

Верные в узком и в широком смысле десятичные знаки приближенного числа.

n первых (слева направо) значащих цифр приближенного числа являются *верными в узком смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превышает *половины единицы разряда*, выражаемого *n*-й значащей цифрой (слева направо).

n первых (слева направо) значащих цифр приближенного числа являются *верными в широком смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превышает *единицы разряда*, выражаемого *n*-й значащей цифрой, считая слева направо.

Пример 1.7. Узкий смысл верных десятичных знаков приближенного числа.

а) A = 47,35; a = 47,00. У a = 47,00 – 2 верных в узком смысле знака:

$$|A-a| = 0{,}35 < \frac{1}{2}\cdot 10^{0}=0{,}5$$

б) A = 63,97; a = 64,00. У a = 64,00 – 3 верных в узком смысле знака:

$$|A-a| = 0{,}03 < \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}=0{,}05$$

! *Замечание 1.5*. Понятие количества n верных знаков не означает, что n первых знаков приближенного числа совпадают с таким же количеством знаков точного числа.

Пример 1.8. Узкий смысл верных десятичных знаков приближенного числа.

A = 10; a = 9,995. У a 3 верных знака.

Округление чисел.

На практике часто приходится *округлять* приближенное число a, т.е. заменять его другим числом a_1 с меньшим количеством значащих цифр. Число a_1 выбирают таким, чтобы *погрешность округления* $|a_1 - a|$ была минимальной.

Округление a до n значащих цифр: оставляют все его цифры, стоящие справа от n-*й* значащей цифры, или, если это нужно для сохранения десятичных разрядов, заменяют их нулями. При этом пользуются следующим *правилом округления:*

- если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;
- если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;
- если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр имеются ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;
- если первая из отброшенных цифр равна 5 и остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра не изменяется, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Последний пункт правила округления носит название *правила четной цифры.*

Пример 1.8. Округление числа π=3,1415926535… до 5,4,3-х значащих цифр.

а) Отбрасываем все цифры, стоящие справа от пятой цифры. Имеем: 3,1415. Так как первая из отброшенных цифр больше 5 (равна 9), то увеличиваем оставшуюся младшую цифру числа на единицу. Окончательно получаем:

π=3,1416; в этом случае абсолютная погрешность равна $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$

б) Отбрасываем все цифры, стоящие справа от четвертой цифры. Имеем: 3,141. Так как первая из отброшенных цифр равна 5 и остальные отброшенные цифры ненулевые, то увеличиваем младшую цифру числа на единицу:

π=3,142; в этом случае абсолютная погрешность равна $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$

в) Отбрасываем все цифры, стоящие справа от третьей цифры. Имеем: 3,14. Так как первая из отброшенных цифр меньше 5, то ничего не меняем:

π=3,14; в этом случае абсолютная погрешность равна $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$

! *Замечание 1.6*. Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества *верных* значащих цифр. Если приближенное число содержит излишнее количество неверных значащих цифр, то его округляют. При этом руководствуются правилом: *при выполнении приближенных вычислений количество значащих цифр промежуточных результатов не должно превышать количества верных цифр более чем на одну-две единицы.*

Пример 1.9. Проверка верных значащих цифр приближенного числа.

Приближенное число a = 27,3864 имеет, согласно определению, 6 значащих цифр. Абсолютная погрешность этого числа составляет 0,004.

Решение:

1 разряд: цифра 2 – верная. Половина единицы ее разряда: $\frac{1}{2}\cdot 10^1 = 5 > 0,004$

2 разряд: цифра 7 – верная. Половина единицы ее разряда: $\frac{1}{2}\cdot 10^0 = 0,5 > 0,004$

3 разряд: цифра 3 – верная. Половина единицы ее разряда: $\frac{1}{2}\cdot 10^{-1} = 0,05 > 0,004$

4 разряд: цифра 8 – верная. Половина единицы ее разряда: $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2} = 0,005 > 0,004$

5 разряд: цифра 6 – верной не является. Половина единицы ее разряда: $\frac{1}{2}\cdot 10^{-3} = 0,0005 < 0,004$

6 разряд: цифра 4 – верной не является. Половина единицы ее разряда: $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4} = 0,00005 < 0,004$

Ответ: приближенное число a = 27,3864 имеет только 4 верные значащие цифры.

Связь между количеством верных цифр и относительной погрешностью.

Если положительное приближенное число а имеет n *верных в широком смысле* десятичных знаков, то предельная относительная погрешность δ_a этого числа вычисляется по формуле:

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_k} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \qquad (1.8)$$

где α_k - первая слева значащая цифра числа а.

Если положительное приближенное число а имеет n *верных в узком смысле* десятичных знаков, то предельная относительная погрешность δ_a этого числа вычисляется по формуле:

$$\delta_a = \frac{1}{2 \cdot \alpha_k} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \qquad (1.9)$$

где α_k - первая слева значащая цифра числа а.

! *Замечание 1.7*. Значащая цифра, которая не является верной, называется *сомнительной*. Цифра, сомнительная в широком смысле, является сомнительной и в узком смысле. В обратную сторону это утверждение может и не работать.

Пример 1.10. Определение предельной относительной погрешности.

Вместо числа π берем приближенное число a = 3,14.

Решение:

$\alpha_k = 3$, n = 3.

$$\delta_a = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{3-1} = \frac{1}{300} = \frac{1}{3}\%$$

Пример 1.11. Со сколькими десятичными знаками надо записать число $\sqrt{20}$, чтобы относительная погрешность не превышала 0,1 %?

Решение:

так как первая цифра значения корня равна 4, то имеем $\alpha_k = 4$, $\delta = 0{,}001$.

Представим (1.8) с искомым количеством десятичных знаков n:

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \le 0{,}001 \qquad \text{отсюда:} \quad (10)^{n-1} \ge 250 \quad \text{и} \quad n \ge 4$$

Для решения обратной задачи – определения количества n верных знаков числа *a,* если известна относительная погрешность, используют приближенную формулу:

$$\delta = \frac{\Delta}{a} \qquad \text{(или } \Delta_a = a \cdot \delta\text{)}$$

Учитывая старший десятичный разряд числа *a,* легко определить количество верных знаков данного приближенного числа *a.* В частности, если:

$$\delta \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n \qquad \text{то} \qquad \Delta_a \leq (\alpha_k + 1) \cdot 10^m \cdot 10^{-n} \leq 10^{m-n+1}$$

т.е. число *a* имеет заведомо *n* верных десятичных знаков.

Пример 1.11. Приближенное число a = 24 253 имеет относительную погрешность 1%. Сколько в нем верных знаков?

$$\Delta_a = a \cdot \delta = 24253 \cdot 0{,}01 = 243 = 2{,}43 \cdot 10^2$$

Следовательно, верными являются лишь первые две цифры (n = 2), цифра сотен является сомнительной. Поэтому число *a* необходимо записать в виде

$$a = 2{,}43 \cdot 10^4$$

МИРЭА
Российский
технологический
университет

Часть 3.
Погрешности арифметических вычислений.

При выполнении действий с приближенными числами происходит накопление погрешностей. Выясним, как оценить погрешность результата при выполнении арифметических вычислений по погрешностям исходных чисел.

Погрешность суммы.

Пусть A_1 и A_2 – точные значения некоторых положительных чисел, a_1 и a_2 – их соответствующие приближенные значения с абсолютными погрешностями Δ_{a_1} и Δ_{a_2}. Тогда можно записать

$$\Delta(a_1+a_2) = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} \tag{1.10}$$

Тогда имеем также соотношение для относительной погрешности:

$$\delta(a_1+a_2) = \frac{\Delta(a_1+a_2)}{a_1+a_2} = \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}}{a_1+a_2} \tag{1.11}$$

Аналогично при сложении произвольного количества чисел:

$$\Delta(a_1+a_2+\ldots+a_n) = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n} \tag{1.12}$$

Таким образом:
Абсолютная погрешность суммы не превышает суммы абсолютных погрешностей слагаемых.
Отсюда следует, что предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.
Учитывая изложенное, формулируют следующее *правило сложения приближенных чисел с различным количеством верных знаков*:

1. Выровнять порядки слагаемых: при этом меньший порядок выравнивается до большего.
2. Выделить числа, имеющие наименьшее количество знаков после запятой.
3. Остальные числа округлить по образцу выделенных, сохраняя один или два запасных десятичных знака.
4. Произвести сложение чисел, учитывая все сохраненные знаки.
5. В полученном результате округлить запасные знаки.

Пример 1.12. Сложение приближенных чисел и определение абсолютной погрешности результата.

Приближенные числа a_1 = 23,4; a_2 = 1,1074; a_3 = 3,05483.
Их абсолютные погрешности: Δ_{a_1} = 0,5; Δ_{a_2} = 0,0005; Δ_{a_3} = 0,00005.

Выделяем число a_1 = 23,4, как имеющее наименьшее количество верных знаков. Остальные числа округляем по *правилу округления* (слайд 18), сохранив два запасных десятичных разряда: a_2=1,107, a_3=3,055.

! *Замечание 1.7*. В результате округления имеем новые (измененные) значения абсолютных погрешностей исходных чисел: $\Delta_{a_2} = \Delta_{a_3}$ = 0,005.

Складывая исходные числа, получаем:

$$S = 23{,}4 + 1{,}107 + 3{,}055 = 27{,}562$$

Округляем полученный результат на один знак: S = 27,56.
Абсолютная погрешность результата равна:

$$\Delta_S = (\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \Delta_{a_3}) = 0{,}5 + 0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}51$$

Погрешность разности.

$$\Delta(a_1 - a_2) = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} \tag{1.13}$$

Относительная погрешность:

$$\delta(a_1 - a_2) = \frac{\Delta(a_1 - a_2)}{|a_1 - a_2|} = \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}}{|a_1 - a_2|} \tag{1.14}$$

Пример 1.13. Вычитание приближенных чисел и оценка погрешности результата.

Приближенные числа a_1 = 25,11784; a_2 = 25,11736. $\Delta_{a_1} = \Delta_{a_2}$ = 0,00005.

$\mathrm{D} = a_1 - a_2$ = 25,11784 – 25,11736 = 0,00048.

Находим абсолютную погрешность:

$\Delta_{\mathrm{D}} = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}$ = 0,00005 + 0,00005 = 0,0001.

Относительная погрешность разности равна: $\delta_D = \frac{\Delta_D}{D} = \frac{0,0001}{0,00048} = 0,2.$

Относительные погрешности для исходных чисел:

$\delta_{a_1} = \frac{\Delta_{a_1}}{a_1} = \frac{0,00005}{25,11784} = 0,000002.$ $\delta_{a_2} = \frac{\Delta_{a_2}}{a_2} = \frac{0,00005}{25,11736} = 0,000002.$

Таким образом, относительная погрешность результата *в 100 000 раз больше*, чем относительная погрешность исходных чисел.

! *Замечание 1.8*. Формула (1.13) требует нахождения разности $|a_1 - a_2|$, которая, как свидетельствует пример 1.13, может быть очень маленькой, т.е. относительная погрешность разности близких чисел может быть очень большой. Поэтому *необходимо избегать нахождения разности близких чисел, выполнив преобразование формулы для вычислений*.

Пример 1.14. Найти с тремя верными знаками значение разности.

$A_1 = \sqrt{301}$; $A_2 = \sqrt{300}$. Находим a_1 и a_2:

$A_1 = 17{,}34935157\ldots \Rightarrow a_1 = 17{,}34935$.

$A_2 = 17{,}32050808\ldots \Rightarrow a_2 = 17{,}32051$.

Видно, что первые три знака у чисел совпадают и при вычитании они пропадут. Чтобы получить три верных знака в результате, следует в исходных данных взять (с учетом запасной) 7 верных цифр:

$$\mathrm{D} = a_1 - a_2 = 17{,}34935 - 17{,}32051 = 0{,}02884 \approx 0{,}0288.$$

Последний знак верен в узком смысле.

Пример 1.14. Найти с тремя верными знаками значение разности (продолжение).

Точность относительной погрешности исходных данных сравнении с относительной погрешностью результата упала катастрофически – больше, чем в десять тысяч раз.

$$\delta_{a_1} = \frac{\Delta_{a_1}}{a_1} = \frac{0{,}00005}{17{,}34935} = 2{,}9 \cdot 10^{-7}. \qquad \delta_D = \frac{\Delta_D}{D} = \frac{0{,}0005}{0{,}0288} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}.$$

Можно организовать вычисления по-другому:

$$\mathrm{D} = \sqrt{301} - \sqrt{300} = \frac{(\sqrt{301} - \sqrt{300})(\sqrt{301} + \sqrt{300})}{\sqrt{301} + \sqrt{300}} = \frac{301 - 300}{\sqrt{301} + \sqrt{300}} = \frac{1}{\sqrt{301} + \sqrt{300}}.$$

Теперь достаточно выполнить вычисления с четырьмя верными знаками, дающими в финальном числе один запасной знак, на который нужно округлить:

$$\mathrm{D} = \frac{1}{\sqrt{301} + \sqrt{300}} = \frac{1}{17{,}35 + 17{,}32} = 0{,}02884 \approx 0{,}0288.$$

! *Замечание 1.8*. В практических вычислениях избегают вычитания близких чисел. Необходимо преобразовывать вычислительные выражения для устранения этой операции. Если же такой возможности нет, то для получения результата с n верными знаками, следует установить число p пропадающих при вычитании знаков и брать исходные данные с p+n+1 верными знаками (один знак является запасным).

Погрешность произведения.

При сложении правила оценки точности проще формулируются в терминах Δ_x, то при умножении удобнее контролировать изменение δ_x.

Предельная относительная погрешность произведения M двух приближенных чисел a_1 и a_2 не превышает суммы предельных относительных погрешностей этих чисел.

$$\delta(a_1 \cdot a_2) \leq \delta_{a_1} + \delta_{a_2} \qquad (1.15)$$

Зная δ_M, можем найти Δ_M:

$$\Delta_\mathrm{M} = \mathrm{M} \cdot \delta_\mathrm{M} \qquad (1.16)$$

Аналогично обобщается при умножении произвольного количества чисел:

$$\delta(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_n} \qquad (1.17)$$

! *Замечание 1.9*. При умножении точного числа q на приближенное число a относительная погрешность результата остается такой же, как у приближенного множителя a:

$$\delta_{qa} = \delta(q \cdot a) = \delta_a$$

Пример 1.15. Нахождение произведения приближенных с верными знаками чисел.

Приближенные с верными знаками числа $a_1 = 24{,}5$; $a_2 = 35{,}14$.
Значит абсолютные погрешности: $\Delta_{a_1} = 0{,}5$; $\Delta_{a_2} = 0{,}05$.

$$\mathrm{M} = a_1 \cdot a_2 = 25{,}5 \cdot 35{,}14 = 860{,}930.$$

$$\delta_M = \delta(a_1 \cdot a_2) = \frac{0{,}5}{24{,}5} + \frac{0{,}05}{35{,}14} = 0{,}0204 + 0{,}0014 = 0{,}0218.$$

Абсолютная погрешность (из выражения 1.16):

$$\Delta_{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \cdot \delta_{\mathrm{M}} = 860{,}930 \cdot 0{,}0218 = 18{,}76.$$

Определим верные цифры результата (аналогично примеру 1.9):

1 разряд: цифра 8 – верная. Половина единицы ее разряда: $\frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50 > 18{,}76 = \Delta_{\mathrm{M}}$

2 разряд: цифра 6 – сомнительная (и все последующие разряды). Половина единицы ее разряда: $\frac{1}{2} \cdot 10^1 = 5 < 18{,}76$

Ответ: $\mathrm{M} = 860{,}930 \pm 18{,}76.$

Правило нахождения *произведения нескольких приближенных чисел с различным количеством верных знаков*:

- Выделить сомножители с наименьшим количество верных знаков q.
- Остальные сомножители округлить до (q+1)-го верного знака, сохраняя один или два запасных десятичных знака.
- Произвести умножение чисел.
- Полученный результат округлить до q верных цифр.

Пример 1.16. Нахождение произведения приближенных с верными знаками чисел.

Приближенные с верными знаками числа $a_1 = 3{,}7$; $a_2 = 12{,}364$.

$q = -1 \Rightarrow$ Округляем до десятых (+1 запасной разряд) $a_2 = 12{,}364 \approx 12{,}36$.

$\mathrm{M} = a_1 \cdot a_2 = 3{,}7 \cdot 12{,}36 = 45{,}732 \approx 4{,}57 \cdot 10$.

Погрешность частного.

Правила для оценки относительной погрешности результата частного Q (деления двух величин a_1 и a_2: $Q=a_1/a_2$) такие же, как и для произведения

$$\delta(a_1/a_2) \le \delta_{a_1} + \delta_{a_2} \qquad (1.15)$$

! *Замечание 1.10*. Аналогично перед выполнением операции целесообразно провести округление чисел с большим количеством значащих цифр.

Пример 1.17. Нахождение частного и определение его погрешностей.

$Q = \dfrac{\sqrt{5}}{\pi}$ Исходные числа представить с точностью до десятых.

$a_1 = 2,2$; $a_2 = 3,1$.

$Q = \dfrac{2,2}{3,1} = 0,71.$ $\delta_Q = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} = \dfrac{0,5}{2,2} + \dfrac{0,5}{3,1} = 0,227 + 0,161 = 0,388.$

$\Delta_Q = Q \cdot \delta_Q = 0,71 \cdot 0,388 = 0,28.$

Погрешность степени (корня).

Предельная относительная погрешность m-й степени U приближенного числа x в m раз больше предельной относительной погрешности самого числа x ($U = x^m$).

$$\delta_U = m \cdot \delta_x \qquad (1.15)$$

! *Замечание 1.11*. При возведении приближенного числа в степень в результате следует оставить столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр содержится в основании степени.

Предельная относительная погрешность корня m-й степени U приближенного числа x в m раз меньше предельной относительной погрешности самого числа x ($U = \sqrt[m]{x}$).

$$\delta_U = \delta_x / m \qquad (1.16)$$

! *Замечание 1.12*. При извлечении корня m-ой степени приближенного числа в результате следует брать столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет подкоренное выражение.

Часть 4.
Решение типового задания 1.

Задание 1.1.

Определить, какое равенство точнее.

Дано: а) 9/11 = 0,818; б) $\sqrt{5}$ = 4,24.

Решение:

Находим значения данных выражений с бóльшим числом десятичных знаков:

a_1 = 9/11 = 0,81818 …; a_2 = $\sqrt{5}$ = 4,2426.

Находим предельные абсолютные погрешности (округляя их с избытком):

$\Delta_{a_1} = \left|0{,}81818 - 0{,}818\right| \le 0{,}00019.$ $\Delta_{a_2} = \left|4{,}2426 - 4{,}2426\right| \le 0{,}0027.$

Находим предельные относительные погрешности :

$$\delta_{a_1} = \frac{\Delta_{a_1}}{a_1} = \frac{0{,}00019}{0{,}818} = 0{,}00024 = 0{,}024\%. \quad \delta_{a_2} = \frac{\Delta_{a_2}}{a_2} = \frac{0{,}0027}{4{,}24} = 0{,}00064 = 0{,}064\%.$$

$\delta_{a_1} < \delta_{a_2}$ $\Rightarrow$ равенство а) 9/11 = 0,818 - является более точным.

Задание 1.2 (а).

Округлить сомнительные цифры числа, оставляя верные в узком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.

Дано: а) 72,353 (±0,026).

Решение:

а = 72,353 (±0,026). $\Delta_a = 0{,}026$.

Находим верные знаки в а: $\frac{1}{2}\cdot 10^{-1} = 0{,}05 > 0{,}026 > 0{,}005 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$

Верные знаки до -1 порядка: 7,2,3. Округляем а до десятых:

$a_1 = 72{,}4$. $\Delta_{a_1} = \Delta_a + \Delta_{\text{округл}} = 0{,}026 + 0{,}047 = 0{,}073$.

Полученная $\Delta_{a_1} > 0{,}05$; значит, уменьшаем число цифр в a_1 до двух:

$a_2 = 72$. $\Delta_{a_2} = \Delta_a + \Delta_{\text{округл}} = 0{,}026 + 0{,}353 = 0{,}379$.

Полученная $\Delta_{a_2} < 0{,}5$; значит, оставшиеся цифры верны в узком смысле.

Задание 1.2 (б).

Округлить сомнительные цифры числа, оставляя верные в широком смысле. Определить абсолютную погрешность результата.

Дано: 2,3544; δ = 0,2%.

Решение:

$\Delta_a = \mathrm{a} \cdot \delta_{\mathrm{a}}$ = 2,3533 · 0,2 = 0,00471.

Находим верные знаки в а: $10^{-2} = 0{,}01 > 0{,}00471 > 0{,}001 = 10^{-3}$

Верные знаки до -2 порядка: 2,3,5. Округляем а до сотых:

$a_1 = 2{,}35$. $\Delta_{a_1} = \Delta_a + \Delta_{\text{округл}}$ = 0,0044 + 0,00471 = 0,00911.

Полученная $\Delta_{a_1} < 0{,}1$; значит, оставшиеся цифры верны в широком смысле.

Задание 1.3.

Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.

Дано: а) 0,4357; б) 12,384

Решение (а):

Так как все четыре знака *а* = 0,4357 верны в узком смысле, то $\Delta_a = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$

$$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_k} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{4-1} = 0{,}000125 = 0{,}0125\%$$

Решение (б):

Так как все пять знаков *а* = 12,384 верны в широком смысле, то $\Delta_a = 10^{-3}$

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_k} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{5-1} = 0{,}0001 = 0{,}01\%$$

Задание 1.4.

Вычислить и определить погрешности результата: $X = \dfrac{m^2 \cdot n^3}{\sqrt{k}}$

Дано: m = 28,3 (±0,02), n = 7,45 (±0,01), k = 0,678 (±0,003)

Решение:

Находим с 1-м запасным знаком m^2 = 800,89; n^3 = 413,49; $\sqrt{k}$ = 0,8234.

$\delta_m = \dfrac{\Delta_m}{m} = \dfrac{0{,}02}{28{,}3} = 0{,}00071$; $\delta_n = \dfrac{\Delta_n}{n} = \dfrac{0{,}01}{7{,}45} = 0{,}00135$; $\delta_k = \dfrac{\Delta_k}{k} = \dfrac{0{,}003}{0{,}678} = 0{,}00443$.

$\delta_X = 2\delta_m + 3\delta_n + \delta_k/2 = 0{,}00142 + 0{,}00405 + 0{,}002215 = 0{,}007685 \approx 0{,}77\%$.

Вычисляем X с запасом знаков: $X = \dfrac{m^2 \cdot n^3}{\sqrt{k}} = \dfrac{800{,}89^2 \cdot 413{,}49^3}{\sqrt{0{,}8234}} = 402186$.

$\Delta_X = X \cdot \delta_X = 402186 \cdot 0{,}0077 = 3096$.

У X верны 3 знака. $10^4 = 10000 > 3096 > 1000 = 10^3$

Ответ: $X = 4{,}02 \cdot 10^5\ (\pm 3{,}01 \cdot 10^3)$, $\delta_X = 0{,}77\%$.

Задание 1.5.

Вычислить и определить погрешности результата: $X = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$

Дано: n = 3,0567 (±0,0001), m = 5,72 (±0,02)

Решение:

n – 1 = 2,0567 (±0,0001); $m + n$ = 3,057 (±0,0004)+5,72(±0,02) = 8,777 (±0,0204);
$m - n$ = 5,72 (±0,02) − 3,057 (±0,0004) = 2,663 (±0,0204).

$$\delta_X = \delta_{n-1} + \delta_{m+n} + 2\delta_{(m-n)^2} = \frac{0,0001}{2,0567} + \frac{0,0204}{8,777} + 2\cdot\frac{0,0204}{2,663} = 0,0177 \approx 1,77\%.$$

$$X = \frac{2,0567\cdot 8,777}{2,663^3} = 2,545.$$

$$\Delta_X = X\cdot\delta_X = 2,55\cdot 0,0177 \approx 0,046.$$

У X верны 2 знака. $10^{-1} = 0,1 > 0,046 > 0.01 = 10^{-2}$

Ответ: X = 2,55 (±0,046), δ_X = 1,77%.

Задание 1.6.

Вычислить, пользуясь правилами подсчета цифр. $V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$

Дано: h = 11,8; R = 23,67.

Правила подсчета цифр основаны на принципе А.Н. Крылова (1863-1945):
В приближенном числе верны все значащие цифры, кроме последней - сомнительной и при этом не более как на одну единицу.

При сложении и вычитании приближенных чисел в результате сохраняем столько десятичных знаков, сколько их в приближенном аргументе *с наименьшим числом десятичных знаков.*

При умножении и делении приближенных чисел в произведении сохраняем столько значащих цифр, сколько их в данном числе *с наименьшим количеством значащих цифр*.

Решение:

$V = 3{,}142 \cdot 11{,}8^2\,(23{,}67 - 3{,}933) = 3{,}142 \cdot 11{,}8^2 \cdot 19{,}737 = 3{,}142 \cdot 139{,}2 \cdot 19{,}737$

$V = 8632.$ Наименьше количество значащих цифр в h – 3 $\Rightarrow$ $V \approx 8{,}63 \cdot 10^3$.

Ответ: $V = 8{,}63 \cdot 10^3$.