Кафедра Прикладной математики
Института информационных технологий
РТУ МИРЭА

Дисциплина «Вычислительная математика»

2023-2024 уч.г.

Наполнение курса

➢ **Объем курса**

8 лекционных и 16 практических занятий

➢ **Темы практических занятий**

1. Элементы теории погрешностей
2. Методы приближения и аппроксимация функций
3. Численные методы решений трансцендентных и алгебраических уравнений
4. Численное интегрирование
5. Численные методы линейной алгебры
6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений
7. Численное решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных
8. Быстрое дискретное преобразование Фурье

Практика 8.
Аналитическое решение дифференциальных уравнений высших порядков.

8.1. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
8.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
8.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения.
8.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Часть 1.
Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Вид I: Уравнения содержащие в явном виде производную (n)-го порядка:

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (8.1)$$

Интегрируем (n–1) раз для получения функции $y(x)$.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx = g_1(x) + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int (g_1(x) + C_1)dx = g_2(x) + C_1x + C_2$$ и т.д.

При каждом интегрировании в решение $y(x)$ включается постоянная интегрирования C. Окончательно функция зависит от аргумента x и n произвольных констант – $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

$$y(x) = \Phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (8.2)$$

Пример 8.1. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка: вид I.

$$y^{(4)} = \sin(x)$$

$$y^{(3)} = \int \sin(x)\ dx = -cos(x) + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$y'' = \int (-cos(x) + C_1)\, dx = -sin(x) + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$y' = \int (-sin(x) + C_1 x + C_2)\, dx = cos(x) + \widehat{C_1} x^2 + C_2 x + C_3 \quad \Rightarrow$$

$$y = \int \left(cos(x) + \widehat{C_1} x^2 + C_2 x + C_3\right) dx = sin(x) + \widetilde{C_1} x^3 + \widehat{C_2} x^2 + C_3 x + C_4$$

$$\boxed{y(x) = sin(x) + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4}$$

Вид II: Уравнения содержащие в неявном виде неизвестную функцию y и её производные до (n–2)-го порядка включительно:

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \tag{8.3}$$

Для понижения порядка уравнения вводят новую функцию $z(x)$:

$$z(x) = y^{(n-1)} \qquad \Rightarrow \qquad z'(x) = y^{(n)}$$

Получим уравнение первого порядка относительно z. Решая его, находят функцию $z(x)$, которую затем интегрируют (n–1) раз для получения функции $y(x)$.

При каждом интегрировании в решение $y(x)$ включается постоянная интегрирования С. Окончательно функция зависит от аргумента x и n произвольных констант – $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

$$y(x) = \Phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{8.4}$$

Пример 8.2. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка: вид II.

$$x \cdot y''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (8.5)$$

Для понижения порядка уравнения вводим новую функцию $z(x)$:

$$z(x) = y'' \qquad \Rightarrow \qquad z'(x) = y''' \qquad (8.6)$$

$$\Rightarrow \qquad x \cdot z' + z = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \Rightarrow \qquad z' + z\frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$ Линейное уравнение:

Будем искать решение сразу методом Бернулли – в виде произведения:

$$z = u(x) \cdot v(x)$$
$$z' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \Rightarrow$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' + u \cdot v \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Пример 8.2. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка: вид II.

Группируем слагаемые, содержащие функцию v, функцию u выносим за скобки:

$$u' \cdot v + u\left(v' + v \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \qquad (8.7)$$

Находим функцию v, приравняв к нулю выражение в скобках из (8.7):

$$v' + v \cdot \frac{1}{x} = 0 \qquad (8.8)$$

$$v' = -v\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{-dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(v) = -\ln(x) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x}$$

Найденную функцию подставляем в уравнение (8.7) с учетом равенства (8.8):

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Сокращаем и интегрируем: $\int du = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad u = 2\sqrt{x} + C_1$

Пример 8.2. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка: вид II.

Подставляя найденные функции v и u, определяем функцию z:

$$z(x) = (2\sqrt{x} + C_1)\frac{1}{x}$$

Подставляем в равенство (8.6):

$$y'' = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{C_1}{x}$$

Интегрируем 2 раза для получения функции $y(x)$:

$$y' = \int\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{C_1}{x}\right)dx = 4\sqrt{x} + C_1\ln(x) + C_2$$

При·

$$\int \ln(x)\,dx = \int\left(\left((x)'\ln(x) + x(\ln(x))'\right) - 1\right)dx$$

$$\int \ln(x)\,dx = \int\left((x\cdot\ln(x))' - 1\right)dx = x\ln(x) - x$$

$$y = \int(4\sqrt{x} + C_1\ln(x) + C_2)dx = \boxed{8/3\sqrt{x} + C_1(x\ln(x) - x) + C_2x + C_3}$$

Вид III: Уравнения содержащие в неявном виде неизвестную функцию y и её производную 2-го порядка y'':

$$F(y'',y) = 0 \tag{8.9}$$

Для понижения порядка уравнения вводят новую функцию $z(y)=y'$:

$$y''^{(x)} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y)$$

Получим уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $z(y)$. Решая его, находят функцию $z(y)$, которую подставляют в (8.9). Полученное ДУ первого порядка решают относительно функции $y(x)$.

Пример 8.3. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка: вид III.

$$y^3 \cdot y'' = y^4 - 16 \qquad y(0) = 2\sqrt{2} \qquad y'(0) = \sqrt{2}$$

Для понижения порядка уравнения вводим новую функцию $z(x)$:

$$z(y) = y' \quad \Rightarrow \quad z \cdot z' = y''$$

$$\Rightarrow \quad y^3 \cdot z \cdot z' = y^4 - 16$$

Разделяем переменные:

$$z \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{y^4 - 16}{y^3} \quad \Rightarrow$$

$$\int z \cdot dz = \int \frac{y^4 - 16}{y^3} dy \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{8}{y^2} + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} + 2C_1}$$

Уточним для начальных условий:

$$y(0) = 2\sqrt{2} \qquad y'(0) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow$$

$$y'(0) = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \frac{16}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + 2C_1} = \sqrt{8 + \frac{16}{8} + 2C_1} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow$$

Пример 8.3. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка: вид III.

$2C_1 = -8 \;\Rightarrow$

$$y' = \sqrt{y^2 + \frac{16}{y^2} - 8} = \sqrt{\frac{y^4 + 16 - 8y^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{(y^2-4)^2}{y^2}} \;\Rightarrow$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-4}{y} \;\Rightarrow\; \int \frac{y}{y^2-4}\cdot dy = \int dx + C_2 \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{1/2}{y^2-4}\cdot d(y^2-4) = x + C_2 \;\Rightarrow\; ln(y^2-4) = 2x + \widehat{C_2}$$

$$y^2 - 4 = e^{2x}\cdot \widetilde{C_2}$$

Уточним для: $y(0) = 2\sqrt{2}$

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4 = e^{2\cdot 0}\cdot \widetilde{C_2} \;\Rightarrow\; \widetilde{C_2} = 4$$

$$y^2 - 4 = 4e^{2x} \;\Rightarrow\; \boxed{y(x) = 2\sqrt{e^{2x}+1}}$$

Часть 2.
Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Уравнение вида: $$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \qquad (8.10)$$

линейное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – *линейно зависимые*, если существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не равных нулю одновременно, что выполняется тождество

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_{n-1} y_{n-1} + \lambda_n y_n \equiv 0$$

Если таких чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ подобрать нельзя, то указанные функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно *независимы*.

Пример 8.4. Линейная независимость функций:

$y_1 = x \quad y_2 = x^2 \quad y_3 = x^3$ линейно независимы, т.к. алгебраическая сумма:

$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_n = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$ может быть ≡0 только при нулевых значениях коэффициентов.

$y_1 = x \quad y_2 = e^x \quad y_3 = 2e^x$ линейно зависимы, т.к. алгебраическая сумма ≡0 при $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=1$:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_n = 0x - 2e^x + 2e^x \equiv 0$$

Часть 3.
Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Однородные ЛДУ n-го порядка.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимые частные решения уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{8.11}$$

то общее решение уравнения определяется равенством:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n \tag{8.12}$$

Для нахождения частных решений уравнений (8.1) составляют характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 \tag{8.13}$$

которое получается из уравнения (8.11) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями k, причем сама функция заменяется единицей. Уравнение (8.13) имеет n корней – действительных или комплексных (среди которых могут быть и равные, т.е. кратные). В зависимости от характера корней характеристического уравнения составляются n частных решений уравнения (8.11):

1. ∀ действительному простому корню $k=k_0$ соответствует частное решение:

$$y = e^{k_0 x}$$

2. ∀ действительному простому корню $k_1, k_2 \ldots k_r = k_0$ кратности r соответствует r частных решений:

$$y_1 = e^{k_0 x} \quad y_2 = x e^{k_0 x} \quad y_3 = x^2 e^{k_0 x} \quad \cdots \quad y_r = x^{r-1} e^{k_0 x}$$

3. ∀ паре комплексных сопряженных корней $k = \alpha + \beta i$ и $k = \alpha - \beta i$ соответствует пара частных решений:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \qquad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

4. ∀ паре комплексных сопряженных корней $k_1, k_2 \ldots k_r = \alpha + \beta i$ и $k_{r+1}, k_{r+2} \ldots k_{2r} = \alpha - \beta i$ кратности r соответствует r пар частных решений:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)\,;\; y_2 = x e^{\alpha x} \cos(\beta x); \quad \cdots \quad y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x);$$

$$y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)\,;\; y_{r+2} = x e^{\alpha x} \sin(\beta x); \quad \cdots \quad y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

$$\boxed{y_{OO} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n}$$

Пример 8.5. Решение однородного ЛДУ.

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

Составляем характеристическое уравнение: $k^3 - 2k^2 + k = 0$

Находим корни: $(k^2 - 2k + 1)k = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 0$

$$k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 = 0 \qquad \Rightarrow\; k_2 = 1 \qquad k_3 = 1 \qquad r = 2$$

Корень k=0 – простой действительный корень $\Rightarrow$ одно частное решение

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{0x} = 1$$

Корень k=1 – действительный корень кратности 2, поэтому ему соответствуют 2 частных, линейно независимых решения

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^x \qquad y_3 = e^{k_3 x} = xe^x$$

$$y_{OO} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \qquad \boxed{y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x}$$

Часть 4.
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Неоднородные ЛДУ с правой частью вида: $f(x)=P_m(x)$

Если правая часть линейного уравнения – многочлен m-ой степени в виде:

$$f(x) = A_0 x^{m} + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_{m}$$

(многочлен может быть неполным, т.е. среди коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ могут быть нулевые, в том числе одновременно), то частное решение $u(x)$ ищут в виде многочлена той же степени с неопределенными коэффициентами. При этом многочлен должен содержать все степени переменной x, вне зависимости от количества слагаемых в правой части.

Пример 8.6. Вид частного решения неоднородного ЛДУ.

$f(x) = 2x^3 + 1$ многочлен третьей степени, частное решение ищут в виде: $u(x) = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$

Необходимо учесть значение корней характеристического уравнения: если среди корней есть корень k=0 кратности r, то в частное решение добавляют множитель x^r.

Для определения коэффициентов частное решение подставляют в левую часть уравнения и приравнивают коэффициенты при равных степенях x в левой и правой части.

Пример 8.7. Решение задачи Коши.

$$y' = 0.5y + 0.4x^2 + 1.9 \qquad y(0) = 1 \qquad (8.14)$$

1. Отбросим неоднородность и решим однородное ЛДУ: $y' - 0.5y = 0$

Составляем характеристическое уравнение: $k - 0.5 = 0$

Корень k=0.5 – простой действительный корень ⇒ одно частное решение

$$y_1 = e^{0.5x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = Ce^{0.5x}}$$

2. Найдем частное решение неоднородного ЛДУ:

Поскольку неоднородность $0.4x^2+1.9$ является полиномом второй степени, будем искать $u(x)$ тоже в виде полинома $P_2(x)$, но с неопределенными коэффициентами:

$$u(x) = Kx^2 + Lx + M$$

Пример 8.7. Решение задачи Коши.

Найдем производную $u(x)$: $u'(x) = 2Kx + L$

и подставим в НЛДУ (8.5): $2Kx + L - 0.5(Kx^2 + Lx + M) = 0.4x^2 + 1.9$

В обеих частях равенства – полиномы 2-й степени. Коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа должны быть равны: $\Rightarrow$

K = –0.8; L = –3.2; M = 10.2. $\Rightarrow$ $u(x) = -0.8x^2 - 3.2x + 10.2$

общее решение исходного неоднородного ДУ:

$$\boxed{y = Ce^{0.5x} - 0.8x^2 - 3.2x + 10.2}$$

3. Накладываем на это решение начальное условие: $y(0) = 1$

$$y(0) = Ce^{0x} - 0.8 \cdot 0^2 - 3.2 \cdot 0 + 10.2 = C - 10.2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 11.2$$

$$\boxed{y(x) = 11.2e^{0.5x} - 0.8x^2 - 3.2x + 10.2}$$