Математический анализ-3

Практическое занятие 10

Функции комплексного переменного

Определение. Говорят, что в области $\boldsymbol{D}$ определена функция $\boldsymbol{\omega = f(z)}$**,** если каждой точке $\boldsymbol{z \in D}$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или целое множество (многозначная функция) значений $\boldsymbol{\omega}$.

Геометрически задание функции $\omega = f(z)$ означает задание отображения точек комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости ω.

Пусть $z = x + iy$ и $\omega = f(z)$, тогда $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,

где $u(x, y) = \mathrm{Re}f(z)$ – действительная часть функции, $v(x, y) = \mathrm{Im}f(z)$ – мнимая часть функции.

<u>Элементарные функции комплексного переменного</u>

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами $(z = x + iy)$

1. *Дробно-рациональная функция*

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен

$$\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

2. *Показательная функция* e^z определяется равенством

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny).$$

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1, z_2 – комплексные числа,

в) $e^{z+2\pi ki} = e^z (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т.е. e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.

3. *Тригонометрические функции*

$$cosz = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \ sinz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Функции $sinz$ и $cosz$ – периодические функции с периодом $T = 2\pi$. Справедливо основное тригонометрическое тождество: $cos^2z + sin^2z = 1$.

Уравнение $sinz = 0$ имеет решение $z = k\pi$,

$cosz = 0$ имеет решение $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Функции tgz и $ctgz$ определяются равенствами $tgz = \frac{sinz}{cosz}$, $ctgz = \frac{cosz}{sinz}$. Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. *Гиперболические функции.*

Гиперболические функции shz, chz, thz, $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^z-e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z+e^{-z}}{2},$$
$$thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Основное гиперболическое тождество $ch^2z - sh^2z = 1$.

5. *Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями*

$$sinz = -ishiz, cosz = chiz, tgz = -ithiz,$$
$$ctgz = icthiz, shz = -isiniz, chz = cosiz,$$
$$thz = -itgiz, cthz = ictgiz.$$

Отсюда получим формулы для вынесения i из аргумента:

$$\cos(iz) = chz, \sin(iz) = ishz$$

6. *Логарифмическая функция Ln* z, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$\mathrm{Ln}\, z = ln|z| + iArgz = ln|z| + i(argz + 2\pi k),$
$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Функция $\omega = \mathrm{Ln}\, z$ является многозначной.

Главным значением Ln $\boldsymbol{z}$ называется значение, получаемое при $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{lnz = ln|z| + iargz}.$$

Тогда: $\mathrm{Ln}\, z = ln|z| + i(argz + 2\pi k) = lnz + 2\pi ki$

<u>Свойства $\omega = Ln\, z$:</u>

$$\text{a) } \mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2,$$

$$\text{b) } \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.$$

7. *Общая показательная функция* определяется равенством

$$a^z = e^{z\mathrm{Ln}a},$$

где a – любое комплексное число, $a \neq 0$.

8. *Общая степенная функция* $w = z^a$, где a – любое комплексное число, $z \neq 0$ $z^a = e^{a\mathrm{Ln}z}$.

1. Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

1) $f(z) = i - z^3$
2) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$
3) $f(z) = \frac{iz+1}{1+\bar{z}}$
4) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$
5) $f(z) = e^{-z}$
6) $f(z) = sinz$
7) $f(z) = ch(z - i)$

Решения.

1) $f(z) = i - z^3$

$$f(z) = i - (x + iy)^3 = i - (x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 =$$
$$= i - x^3 - 3ix^2y + 3xy^2 + iy^3 = -x^3 + 3xy^2 + i(1 - 3x^2y + y^3)$$

$$u(x, y) = -x^3 + 3xy^2$$

$$v(x, y) = 1 - 3x^2y + y^3$$

2) $f(z)=\frac{1}{\bar{z}}$

$$f(z)=\frac{1}{x-iy}=\frac{(x+iy)}{(x-iy)\cdot(x+iy)}=\frac{x+iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$$

3) $f(z)=\frac{iz+1}{1+\bar{z}}$

$$f(z)=\frac{i(x+iy)+1}{1+(x-iy)}=\frac{-y+1+ix}{1+x-iy}=\frac{(-y+1+ix)(1+x+iy)}{(1+x-iy)(1+x+iy)}=$$

$$=\frac{-y+1+ix-xy+x+ix^2-iy^2+iy-xy}{(1+x)^2+y^2}=$$

$$=\frac{-y+1-2xy+x}{(1+x)^2+y^2}+i\frac{x+x^2-y^2+y}{(1+x)^2+y^2}$$

$$u(x,y)=\frac{-y+1-2xy+x}{(1+x)^2+y^2},\qquad v(x,y)=\frac{x+x^2-y^2+y}{(1+x)^2+y^2}$$

4) $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}$

$$f(z)=\frac{x+iy}{x-iy}=\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

5) $f(z)=e^{-z}$

$$f(z)=e^{-x-iy}=e^{-x}(\cos(-y)+isin(-y))=e^{-x}(\cos y-isiny)$$

$$u(x,y)=e^{-x}\cos y\ ,\quad v(x,y)=-e^{-x}siny$$

6) $f(z) = sinz$

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}(cosx + isinx) - e^{y}(cosx - isinx)\right) =$$

$$= cosx\left(\frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y})\right) + isinx\left(\frac{1}{2i}(e^{-y} + e^{y})\right) =$$

$$= sinxchy + icosxshy$$

$u(x,y) = sinxchy$; $v(x,y) = cosxshy$

7)

$$f(z) = ch(z - i)$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(e^{x+i(y-1)} + e^{-(x+i(y-1))}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x}(\cos(y-1) + isin(y-1)) + e^{-x}(\cos(-y+1) + isin(-y+1))\right) =$$

$$= \cos(y-1)\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) + isin(y-1)\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) =$$

$$= \cos(y-1)\,chx + isin(y-1)shx$$

$$u(x,y) = \cos(y-1)\,chx$$

$$v(x,y) = sin(y-1)shx$$

2. Вычислить, ответ записать в алгебраической форме:

1) $e^{i\pi/4} = cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $e^{3+2i} = e^{3}(cos2 + isin2)$

3) $\mathrm{Ln}(1-i) = ln|1-i| + i(arg(1-i) + 2\pi k) =$

$$= ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

4) $\sin\pi i = \frac{1}{2i}\left(e^{i(\pi i)} - e^{-i(\pi i)}\right) = \frac{1}{2i}(e^{-\pi} - e^{\pi}) = -\frac{i}{2}(e^{-\pi} - e^{\pi}) =$

$$= \frac{i}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = ish\pi$$

5) $\cos\pi i = \frac{1}{2}\left(e^{i(\pi i)} + e^{-i(\pi i)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} + e^{\pi}\right) = ch\pi$

6) $\cos(2-i) = \frac{1}{2}\left(e^{i(2-i)} + e^{-i(2-i)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{1+2i} + e^{-1-2i}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(e(cos2 + isin2) + e^{-1}(\cos(-2) + isin(-2) \quad \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((e + e^{-1})cos2 + i(e - e^{-1})sin2 \quad \right)$$

7) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}i = \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}i\right)} = \frac{ish\frac{\pi}{2}}{ch\frac{\pi}{2}} = ith\frac{\pi}{2}$

8) $\mathrm{ctg}\pi i = \frac{cos\pi i}{sin\pi i} = \frac{ch\pi}{ish\pi} = -icth\pi$

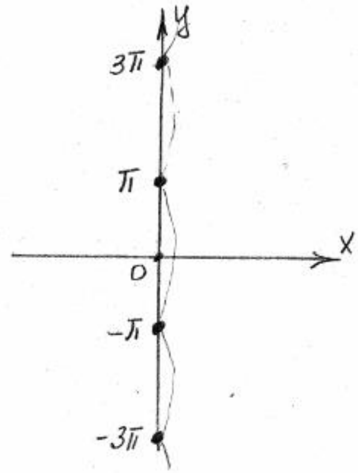
3. Решить уравнения:

1) $e^{-z} + 1 = 0$

$e^{-z} = -1$

$-z = Ln(-1) = i(\pi + 2\pi k)$

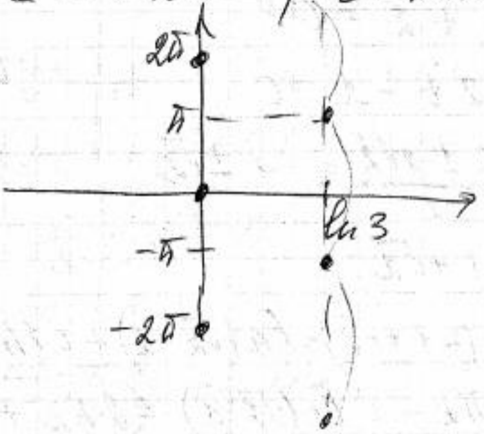
$z = -i(\pi + 2\pi k)$



2) $e^{2z} + 2e^{z} - 3 = 0$

$e^{z} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$

$z = Ln\,1 = i2\pi k$, $z = ln3 + i(\pi + 2\pi k)$



3) $e^{2iz} + 3\sqrt{3} + 3i = 0$

$e^{2iz} = -3\sqrt{3} - 3i$

Логарифмируем обе части уравнения

$2iz = Ln(-3\sqrt{3} - 3)$

$\left|-3\sqrt{3} - 3i\right| = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6 \quad argz = -\frac{5}{6}\pi$

$2iz = ln6 + i(-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k) \qquad z = \frac{1}{2i}ln6 + \frac{1}{2}(-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k)$

$z = \left(-\frac{5}{12}\pi + \pi k\right) - \frac{i}{2}ln6 \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4) $\text{thz} = 2$

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} : \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 2$$

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = 2$$

$$e^z - e^{-z} = 2(e^z + e^{-z})$$

$$e^z + 3e^{-z} = 0$$

Делаем замену: $e^z = t$

$t + \frac{3}{t} = 0 \qquad t^2 = -3 \qquad e^{2z} = -3$

Логарифмируем:

$$2z = Ln(-3)$$

$$2z = ln3 + i(\pi + 2\pi k)$$

$$z = \frac{1}{2}ln3 + i\left(\frac{1}{2}\pi + \pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

5) $4\cos z + 5 = 0$

$$2(e^{iz} + e^{-iz}) + 5 = 0 \; ; \; e^{iz} = t$$

$$2t + 2 \cdot \frac{1}{t} + 5 = 0$$

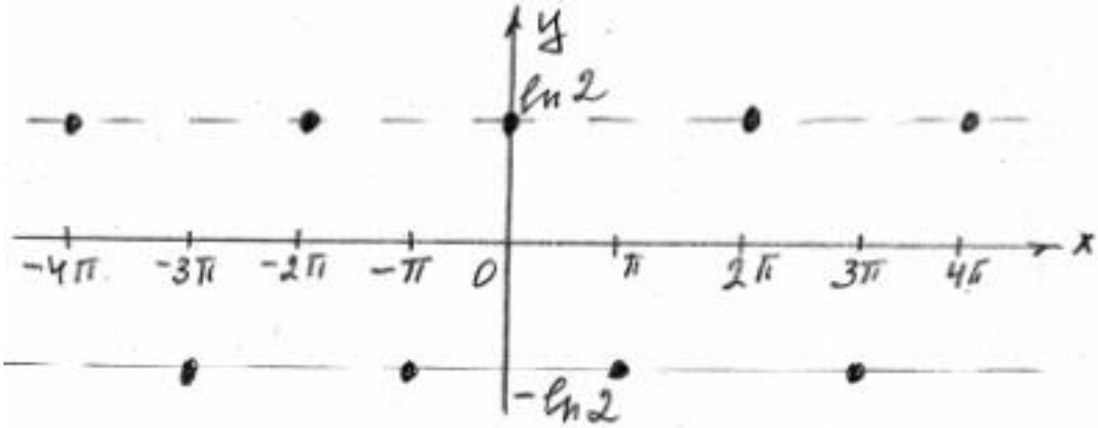
$$2t^2 + 5t + 2 = 0 \; ; \quad t = \frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

1. $e^{iz} = \frac{1}{2}$; $iz = \mathrm{Ln}\,\frac{1}{2} = -\ln 2 + i2\pi k$

$$z = 2\pi k + i\ln 2$$

2. $e^{iz} = -2$; $iz = \mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k)$

$$z = \pi + 2\pi k - i\ln 2$$



6) $\sin z = i$. Вычислить сумму корней уравнения, удовлетворяющих условию $Re(z) \in (-\pi, 2\pi)$. Ответ записать в градусах.

$$\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = i \quad | \cdot 2i$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = -2 \quad ; \quad e^{iz} = t$$

$$t - \frac{1}{t} + 2 = 0 \quad ; \quad t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$e^{iz} = -1 + \sqrt{2}$$

$$iz = Ln(-1+\sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2}-1) + i2\pi k$$

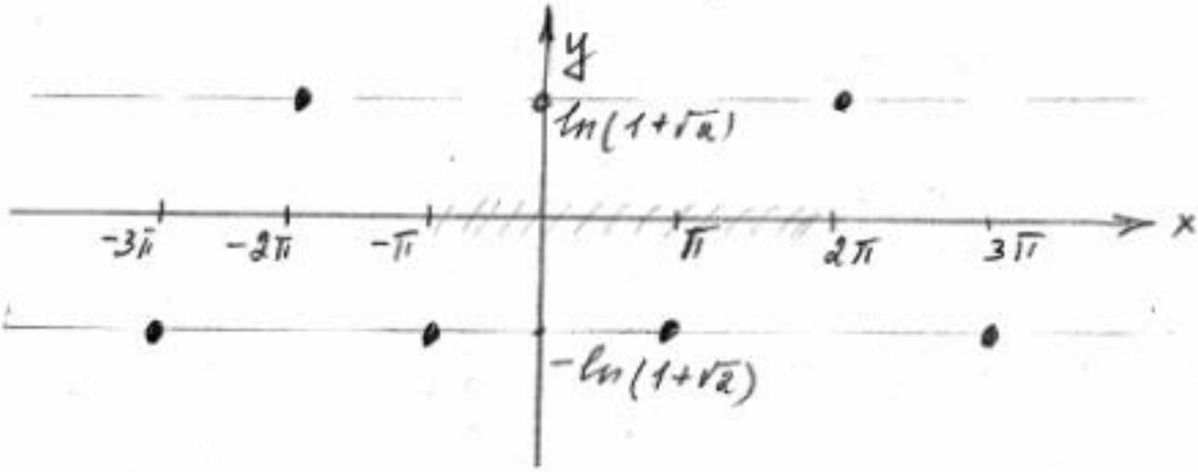
$$z = 2\pi k - i\ln(\sqrt{2}-1) = \boxed{2\pi k + i\ln(\sqrt{2}+1)}$$

$$\ln(\sqrt{2}-1) = \ln\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \ln\frac{1}{\sqrt{2}+1} = -\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$e^{iz} = -1 - \sqrt{2}$$

$$iz = Ln(-1-\sqrt{2}) = \ln(1+\sqrt{2}) + i(\pi + 2\pi k)$$

$$z = \pi + 2\pi k - i\ln(1+\sqrt{2})$$



$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 0 + i\ln(\sqrt{2}+1) \\ z_2 &= \pi - i\ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}\right\} \qquad Re\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} \in (-\pi; 2\pi)$$

$$z_1 + z_2 = \pi.$$

Ответ: $180°$

7) $\operatorname{ch} z = i$

$$\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}) = i$$

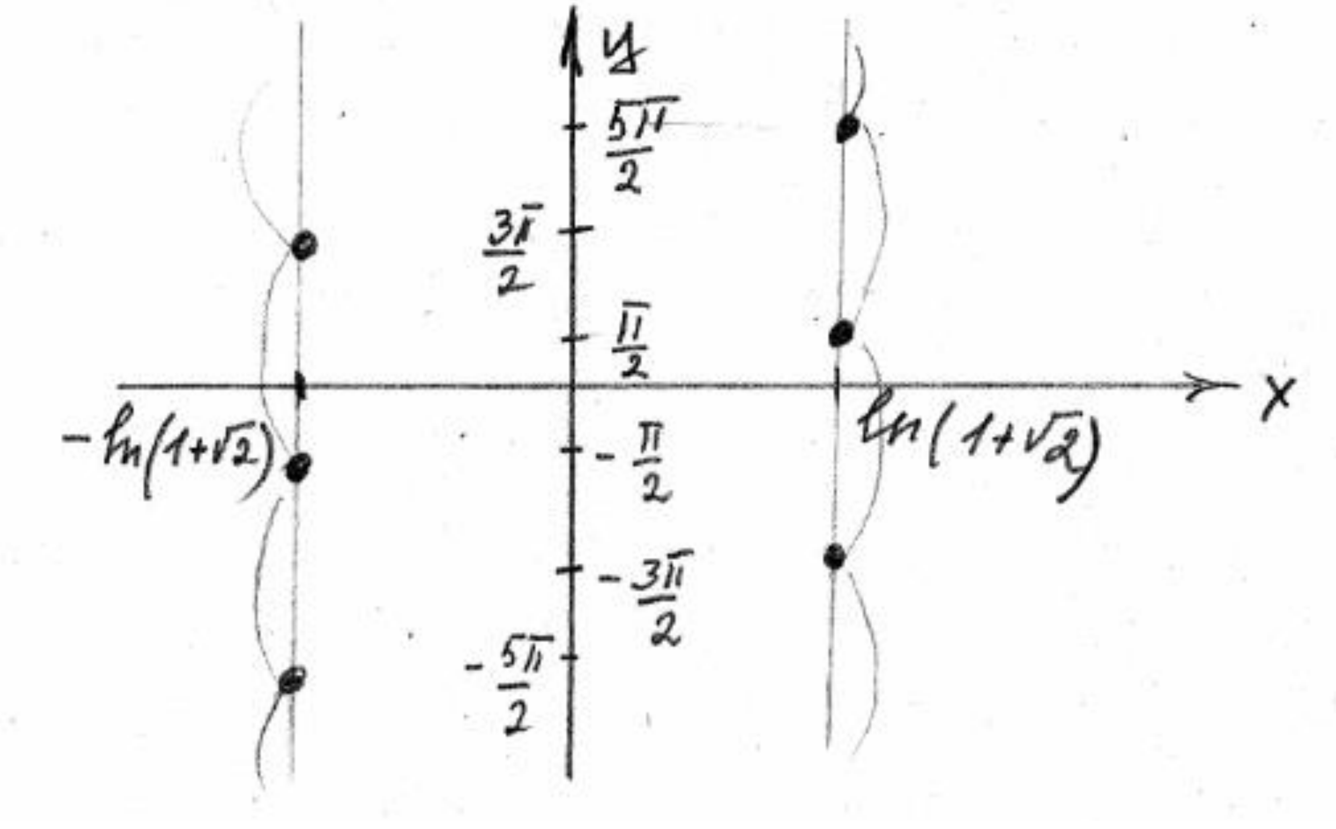
$$e^z+e^{-z}-2i=0$$

$$(e^z)^2-2ie^z+1=0\ ;\quad e^z=\frac{2i\pm\sqrt{-8}}{2}=i\pm\sqrt{2}i$$

$$z=\operatorname{Ln}(i(1+\sqrt{2}))=\ln(1+\sqrt{2})+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$$

$$z=\operatorname{Ln}(i(1-\sqrt{2}))=\ln(\sqrt{2}-1)+i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)=$$

$$=-\ln(1+\sqrt{2})+i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$$



4. Вычислить:

1) $(-3)^{2i}$

2) $(3i)^{-\sqrt{2}}$

3) $(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{i}$

Решения:

1) $(-3)^{2i} = e^{2i\mathrm{Ln}(-3)} = e^{2i(ln3+i(\pi+2\pi k))} = e^{2iln3-2(\pi+2\pi k)} =$

$= e^{-2(\pi+2\pi k)}\big(\cos(2\ln3) + \mathrm{i}\sin(2\ln3)\big), k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

2) $(3i)^{-\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}\mathrm{Ln}(3\mathrm{i})} = e^{-\sqrt{2}(ln3+i(\frac{\pi}{2}+2\pi k))} = e^{-\sqrt{2}ln3-i\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$

3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{i} = e^{i\mathrm{Ln}(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)} = e^{i(ln1+i(-\frac{\pi}{3}+2\pi k))} = e^{-\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)} = e^{\frac{\pi}{3}+2\pi k}$,

$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Решить уравнения

1) $e^{2z} + 5i = 0$

2) $tgz = -4i$

3) $cos\mathrm{z} = 3\mathrm{i}$

2. Найти $(-i)^{\frac{3}{2}i}$

Домашнее задание: типовой расчет стр. 23 задача 18 (№5-12), стр.32 задача 6.