Кафедра Прикладной математики
Института информационных технологий
РТУ МИРЭА

Дисциплина «Вычислительная математика»

2023-2024 уч.г.

Наполнение курса

- **Объем курса**

8 лекционных и 16 практических занятий

- **Темы практических занятий**

1. Элементы теории погрешностей
2. Методы приближения и аппроксимация функций
3. Численные методы решений трансцендентных и алгебраических уравнений
4. Численное интегрирование
5. Численные методы линейной алгебры
6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений
7. Численное решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных
8. Быстрое дискретное преобразование Фурье

Практика 2. Интерполирование и экстраполирование функций.

1.1. Интерполяция: многочлен Лагранжа.
1.2. Интерполяция: формула Ньютона.
1.3. Экстраполяция: метод наименьших квадратов.
1.4. Решение типового задания.

Часть 1.
Интерполяция:
многочлен Лагранжа.

Постановка задачи приближения функций

Задача приближения функций возникает при решении многих задач и состоит в представлении некоторых известных или неизвестных функций с помощью других, более простых функций и формулируется в виде:

∃ конечное число точек x_i, $i=0..n$ евклидова пространства, и определены значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках. Требуется построить максимально простую функцию $g(x)$, значения которой совпадают со значениями $f(x)$ в заданных точках.

Поставленная задача может иметь бесконечное множество решений или не иметь решений. Эта задача имеет однозначное решение, если в качестве функции $g(x)$ выбирается многочлен возможно меньшей степени.

Задача приближения функций возникает, например, когда аналитическое выражение функции $f(x)$, известно, но оно громоздко для вычислений, и тогда построение более простой функции $g(x)$ позволяет существенно сократить время вычислений. В этом случае для замены функции выбирается многочлен возможно меньшей степени.

Замена функции $f(x)$ на $g(x)$ – *аппроксимация*; (ad+proximus лат. – «ближайший»).

i	x_i	$f(x_i)$
0	x_0	$f(x_0)$
1	x_1	$f(x_1)$
2	x_2	$f(x_2)$
…	…	…
n	x_n	$f(x_n)$

Задача приближения функций возникает также при обработке результатов эксперимента. Как правило, такие результаты могут быть представлены в виде следующей таблицы:

Экспериментатор на основе практического опыта предполагает, что полученная таблица представляет некоторый эмпирический закон $g(x)$. В этом случае функцию $g(x)$ также стремятся представить как многочлен возможно меньшей степени.

Для задачи нахождения значений функции на отсутствующих аргументах также стремятся найти многочлен *n*-й степени, значения которого в точках x_i, i=0..n совпадают со значением данной функции $f(x)$.

Если $x \in [x_0,x_n]$, ($x \neq x_i$, i=0..n): x – точка *интерполяции*.

Если $x \notin [x_0,x_n]$: x – точка *экстраполяции*.

! *Замечание 1.1*. При оценке погрешности результатов учитывают как погрешность интерполяции, так и погрешность вычислений.

Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Приближение функции $y = f(x)$, заданной таблицей многочленом *n*-й степени:

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s x^s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \qquad (2.1)$$

Многочлен Лагранжа L_n(x), который определяется только значениями функции $y_i = f(x_i)$ в точках x_i, *i=0..n* из условия:

$$L_n(x_i) = y_i, \; i=0..n. \qquad (2.2)$$

Условие (2.2) означает, что график многочлена $L_n(x)$ должен проходить через точки (x_i,y_i) координатной плоскости xOy.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \qquad (2.3)$$

Конечные разности.

При постоянном изменении аргумента задача приближения функции $y = f(x)$, заданной таблицей многочленом n-й степени упрощается:

$y = f(x_i)$ задана в точках $x_i + i \cdot h$; $i=0..n$; $h = \Delta x = x_{i+1} - x_i$ = const.

Вычисляется: $t = (x - x_0)/\text{h}$; $\Pi_{n+1}(t)$; $(t_i - i), C_i$, $y_i/((t_i - i)C_i)$.

$$\Pi_{n+1}(t) = t(t-1)...(t-n) \tag{2.4}$$

$$C_i = (-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)! \tag{2.5}$$

Вычисляется $\Sigma\, y_i/((t_i - i)C_i)$.

$$y(x) = f(x) \approx \Pi_{n+1}(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(t-i)C_i} \tag{2.6}$$

Часть 2.
Интерполяция:
формулы Ньютона.

Интерполяционные формулы Ньютона используются, если заданные точки – узлы интерполяции – расположены на равном расстоянии друг от друга.

Первая интерполяционная формула Ньютона.

Первая интерполяционная формула используется для интерполирования в точках, близких к началу промежутка $[x_0, x_n]$.

$y = f(x_i)$ задана в точках $x_i + i \cdot h$; $i = 0..n$; $h = \Delta x = x_{i+1} - x_i = \text{const}$.

Вычисляем конечные разности:

$\Delta y = f(x_{i+1}) - f(x_i)$.

$\Delta^2 y = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$.

$\Delta^3 y = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$.

…

$\Delta^n y = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$.

$$\Delta^n y_1 = y_{i+1} - C_n^1 y_{i+n-1} + C_n^2 y_{i+n-2} - \cdots + (-1)^n y_i$$

$$C_i = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \tag{2.7}$$

$$+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

Такая форма интерпол. многочлена удобна тем, что каждое слагаемое появляется при увеличении числа заданных точек и повышает степень многочлена на единицу.

Подставляя в (2.7) вместо x значения заданных точек, получим коэфициенты a_i:

$$a_0 = y_0 \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h} \qquad a_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}$$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3} \qquad \cdots \qquad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}$$

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta \quad y_0}{h}(x - x_0) + 2!\,h^2\,(x - x_0)(x - x_1) + \tag{2.8}$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$N2_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

(2.9)

$$+ a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_0)$$

Подставляя в (2.8) вместо x значения заданных точек, получим коэффициенты a_i:

$$a_0 = y_n \qquad a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h} \qquad a_2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}$$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\,h^3} \qquad \cdots \qquad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона:

$$N2_n(x) = y_n + \frac{\Delta \ \ y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

(2.10)

$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\,h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_0)$$

Часть 3.
Экстраполяция:
метод наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов (МНК) – один из наиболее часто используемых методов при обработке эмпирических данных, построении и анализе физических, биологических, технических, экономических и социальных моделей.

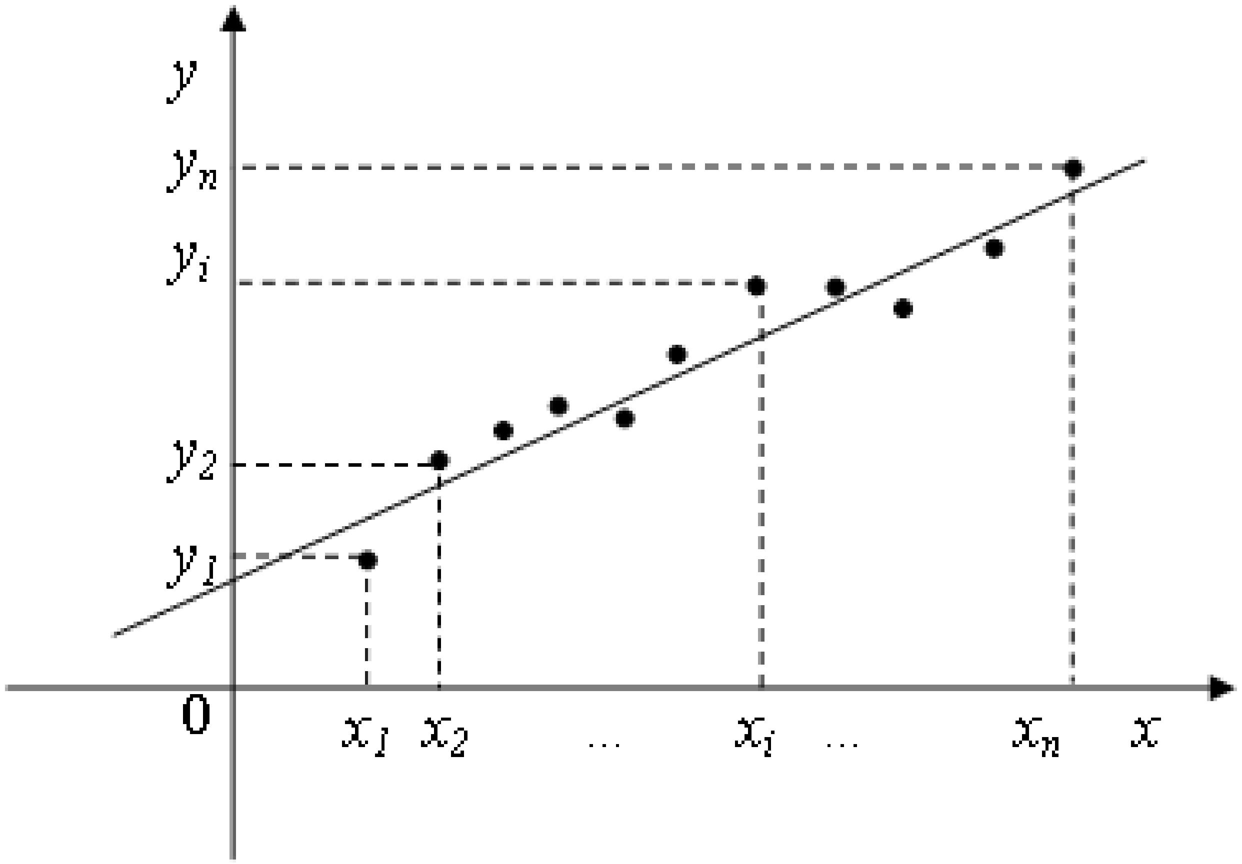
Предложен К. Гауссом (1795) и А. Лежандром (1805). Первоначально МНК использовался для обработки результатов астрономических и геодезических наблюдений. Строгое математическое обоснование и установление границ содержательной применимости МНК даны А. А. Марковым и А. Н. Колмогоровым (начало XX в.).

С помощью МНК решают задачу выбора параметров функции (заранее заданного вида) для приближённого описания зависимости величины *y* от величины *x*.

Базовые
Функциональные
зависимости
?

Необходимо установить функциональную зависимость между двумя эмпирическими данными x и y, значения которых занесены в таблицу:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

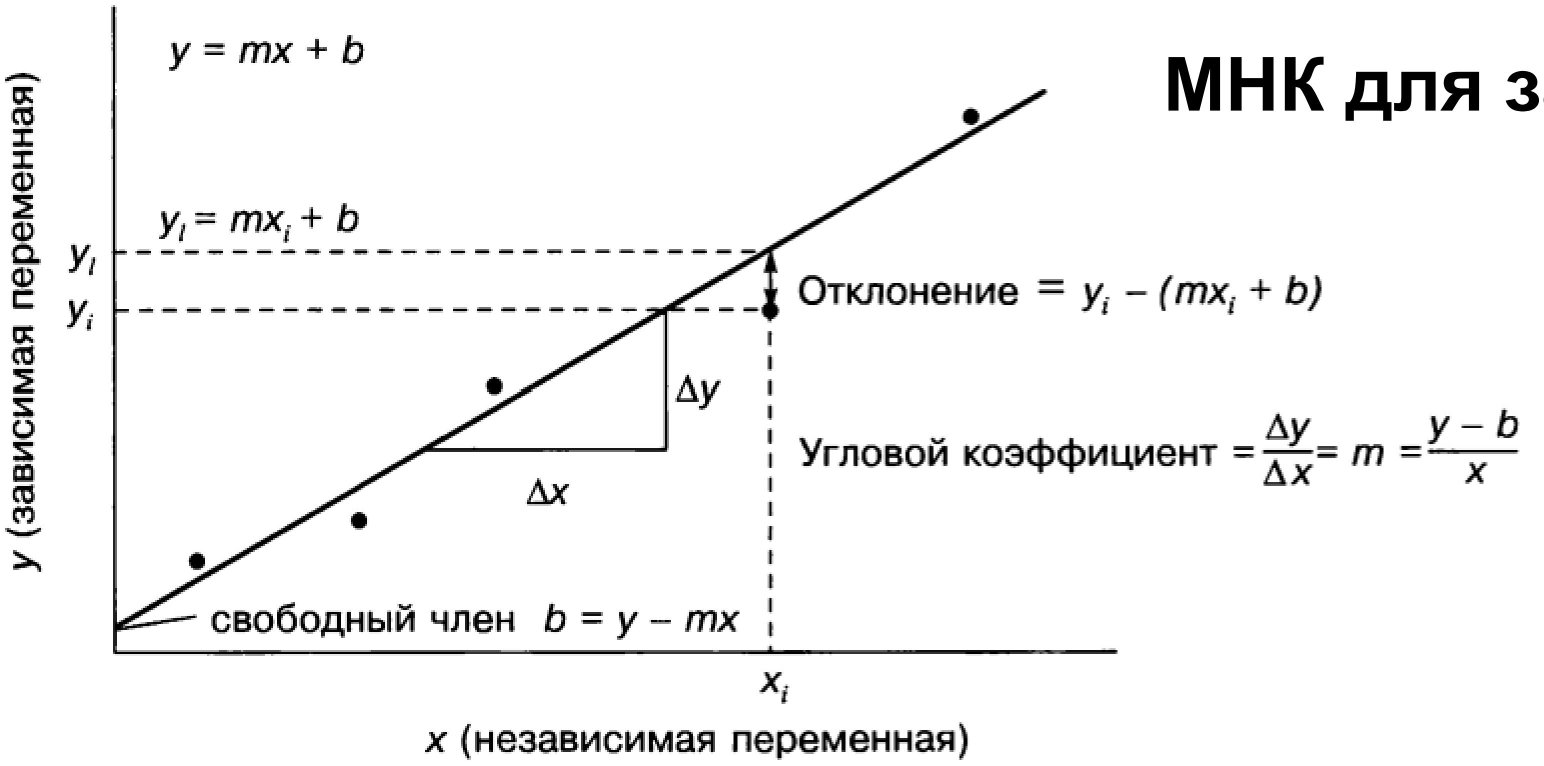


Точки (x_i,y_i) – *экспериментальные*.

Установим вид функции $y = f(x)$ по характеру расположения на координатной плоскости экспериментальных точек

Гипотеза: между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся формулой:

$$y = k \cdot x + b \tag{2.11}$$



МНК для зависимости: *y = kx + b*

Уравнение (2.11) можно представить в виде

$$y - (k \cdot x + b) = 0 \qquad (2.12)$$

В общем случае точки (x_i,y_i) не лежат на одной прямой $\Rightarrow$ подставляя вместо x и y значения координат этих точек в выражение ***y* = *kx* + *b*** получаем равенства:

$$y_1 - (\mathrm{k}\cdot x_1 + \mathrm{b}) = \delta_1$$

$$y_2 - (\mathrm{k}\cdot x_2 + \mathrm{b}) = \delta_2$$

$$\cdots$$

$$y_n - (\mathrm{k}\cdot x_n + \mathrm{b}) = \delta_n$$

Здесь δ_1, δ_2, … δ_n – *невязка* (или отклонение от аппроксимирующей зависимости)

Как влияет совокупность абсолютных величин δ_1, δ_2, … δ_n на адекватность описания экспериментальных точек аппроксимирующей зависимостью ***y* = *kx* + *b***.

Сущность метода наименьших квадратов заключается в подборе коэффициентов *k* и *b* таким образом, чтобы сумма квадратов погрешностей была как можно меньшей:

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (k\cdot x_i + b))^2 \to min \qquad (2.13)$$

! *Замечание 1.5*. В (2.13) находится сумма квадратов погрешностей, так как в случае суммирования самих погрешностей δ_2 сумма будет некорректной из-за разных знаков погрешностей. А если брать сумму модулей, то такое выражение сложнее исследовать.

В (2.13) (x_i,y_i) – заданные числа, а *k* и *b* – неизвестные, то сумму S можно рассмотреть как функцию двух переменных *k* и *b*: S=S(*k*,*b*).

Исследование на экстремум S=S(*k*,*b*).

Необходимые условия ∃ экстремума функции двух переменных:

Непрерывность, дифференцируемость.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial k} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0; \end{cases} \qquad (2.14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(kx_i+b))(-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(kx_i+b))\,x_i,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(kx_i+b))(-1) = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(kx_i+b)).$$

Приравнивая эти частные производные к нулю, получаем линейную систему двух уравнений с двумя переменными *k* и *b*:

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(kx_i+b))\,x_i = 0, \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(kx_i+b)) = 0. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Преобразуем первое уравнение из (2.15): $-\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Преобразуем второе уравнение из (2.15): $-\sum_{i=1}^{n} y_i + k\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = 0$

Получим систему:

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ k\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Система (2.16) – нормальная система.

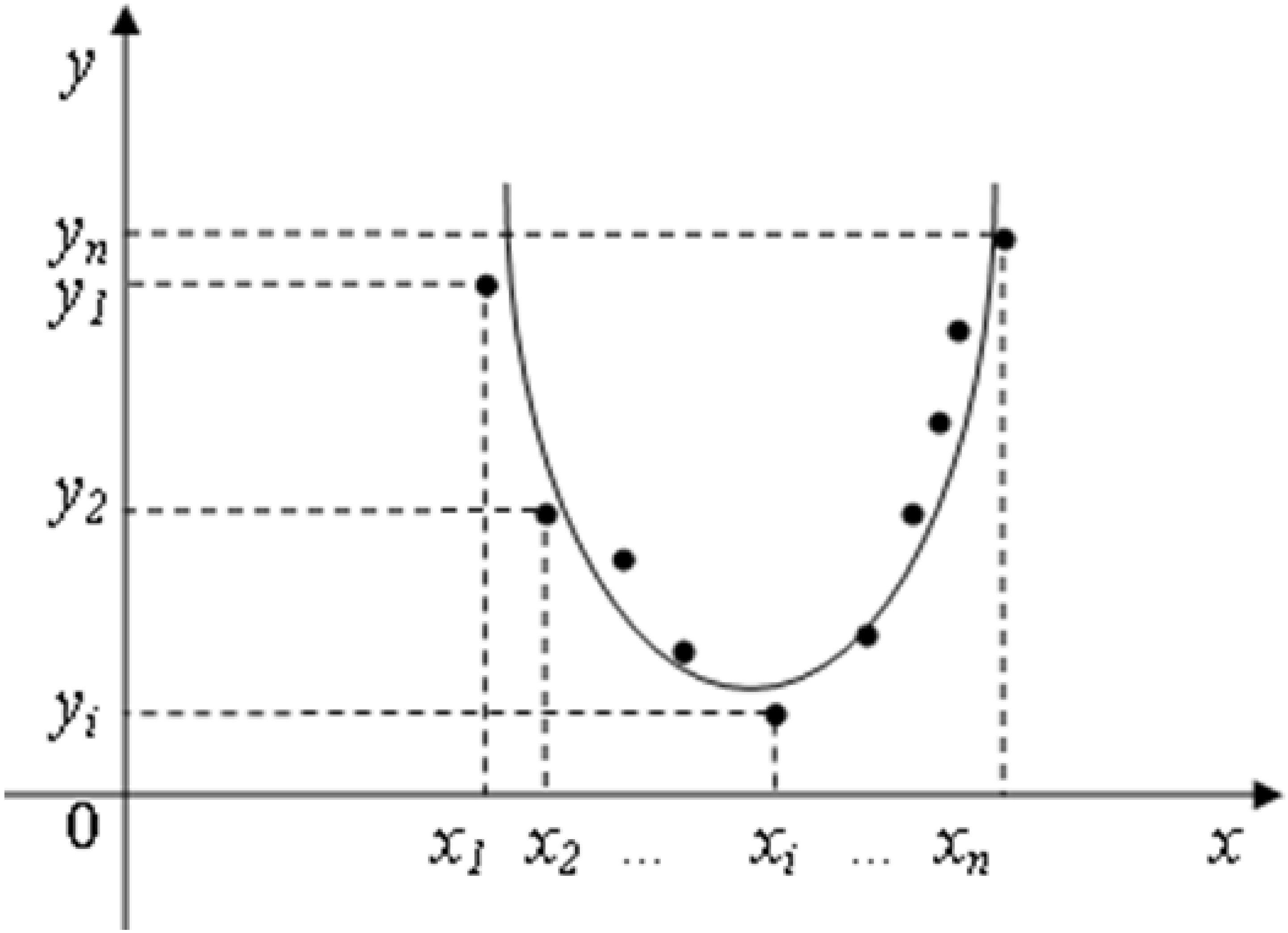
Из (2.16) находим *k* и *b*, которые затем подставляем в уравнение (2.11) и получаем искомое уравнение прямой.

y* = *kx* + *b называется *линейной регрессией*, а коэффициенты *k* и *b* – *коэффициентами регрессии* (величины y на x)

МНК для зависимости:

$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Если зависимость между экспериментально полученными величинами может быть близка к квадратичной, то задача состоит в нахождении коэффициентов a_2, a_1, a_0 для составления уравнения вида



$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (2.17)$$

Можно доказать, что для определения коэффициентов a_2, a_1, a_0 следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} n\,a_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i\,, \\ a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,, \\ a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\,. \end{cases} \qquad (2.18)$$

На практике в качестве приближающих функциональных зависимостей в зависимости от характера точечного графика часто используются:

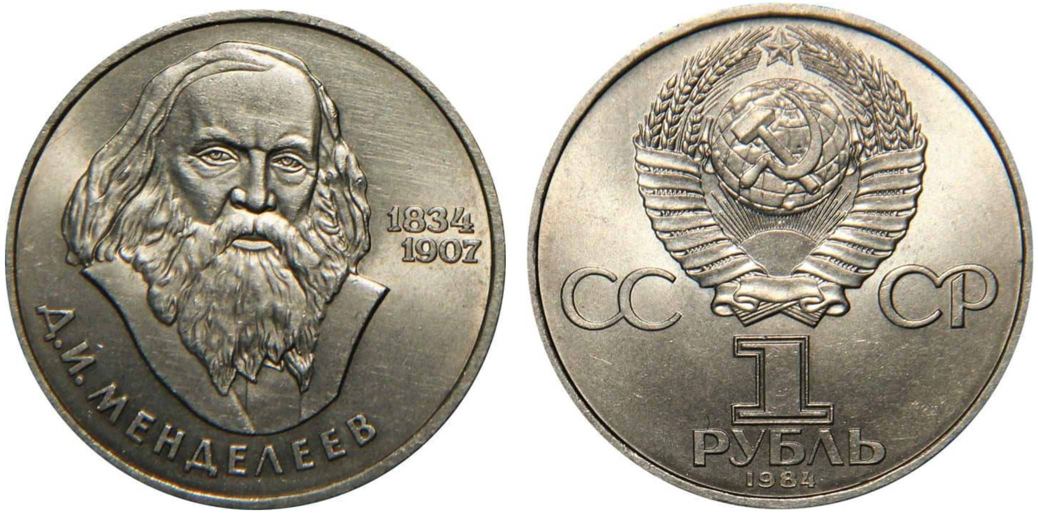
$$y = ax^m \qquad y = ae^{mx} \qquad y = \frac{1}{ax+b} \qquad y = \frac{a}{x} + b \qquad y = \frac{x}{ax+b} \qquad y = a\ln x + b$$

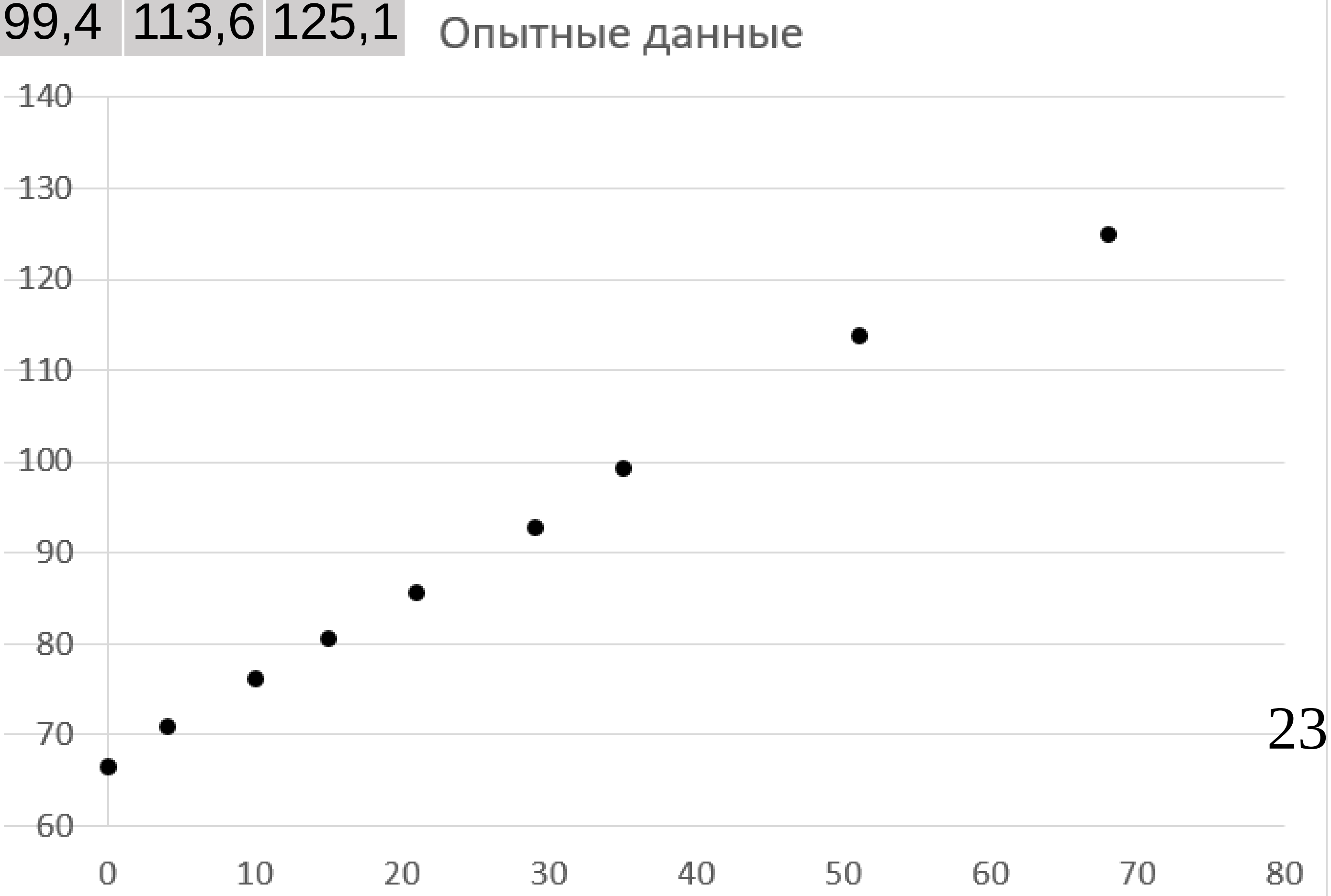
Когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию значений параметров.

Пример 1.1. Аппроксимация опытных данных растворимости натриевой селитры в воде в зависимости от температуры.

Д.И. Менделеев в труде «Основы химии» приводит данные растворимости у натриевой селитры $NaNO_3$ в воде в зависимости от температуры *T*.

T_i	0	4	10	15	21	29	35	51	68
y_i	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1





Аппроксимирующая функция предполагается линейной.

Пример 1.1. (продолжение).

Найдем коэффициенты *k* и *b*: $y = k \cdot T + b$

Составим и решим нормальную систему уравнений (2.16) с числом эмпирических точек, *n* = 9.

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} T_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} y_i T_i, \\ k\sum_{i=1}^{n} T_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

№	T_i	y_i	T_i^2	$T_i y_i$
1	0	66,7	0	0
2	4	71,0	16	284
3	10	76,3	100	763
4	15	80,6	225	1209
5	21	85,7	441	1799,7
6	29	92,9	841	2694,1
7	35	99,4	1225	3479
8	51	113,6	2601	5793,6
9	68	125,1	4624	8506,8

Пример 1.1. (продолжение).

Нормальная система принимает вид

$$\begin{cases} k \cdot 10073 + b \cdot 233 = 24529{,}2 \\ k \cdot 233 + b \cdot 9 = 811{,}3. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $k \approx 0{,}87$; $b \approx 67{,}55$.

$$y = 0{,}87 \cdot T + 67{,}55$$

Вычислим теперь для исходных значений T_i расчетные значения $\widehat{y_i}$, невязки δ_i и δ_i^2 занесем полученные результаты в таблицу.

$$\widehat{y_i} = k \cdot T_i + b$$

№	T_i	y_i	T_i^2	$T_i y_i$	$\widehat{y_i}$	δ_i	δ_i^2
1	0	66,7	0	0	67,55	–0,85	0,7225
2	4	71,0	16	284	71,03	-0,03	0,0009
3	10	76,3	100	763	76,25	0,05	0,0025
4	15	80,6	225	1209	80,6	0	0
5	21	85,7	441	1799,7	85,82	-0,12	0,0144
6	29	92,9	841	2694,1	92,78	0,12	0,0144
7	35	99,4	1225	3479	98	1,4	1,96
8	51	113,6	2601	5793,6	111,92	1,68	2,8224
9	68	125,1	4624	8506,8	126,71	-1,61	2,5921

Часть 4.
Решение типового задания 2.

Задание 2.1 (а).

Найти приближенное значение функции при заданном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа при задании функции с <u>неравными</u> интервалами между аргументами.

Дано:

Найти значение функции $f(x) = y(x)$ при x = 0,263:

№	x_i	y_i
0	0,05	0,050042
1	0,1	0,100335
2	0,17	0,171657
3	0,25	0,255342
4	0,3	0,309336
5	0,36	0,376403

x-x_i
0,213
0,163
0,093
0,013
-0,037
-0,097

Π	1,5065·10^-7

$$...(x_i - x_{i-1})(x - x_i)(x_i - x_{i+1})...$$

0,213	-0,050	-0,120	-0,200	-0,250	-0,310
0,050	0,163	-0,070	-0,150	-0,200	-0,260
0,120	0,070	0,093	-0,080	-0,130	-0,190
0,200	0,150	0,080	0,013	-0,050	-0,110
0,250	0,200	0,130	0,050	-0,037	-0,060
0,310	0,260	0,190	0,110	0,060	-0,097

D_i	y_i/D_i
$-1{,}9809\cdot10^{-5}$	-2526,225
$4{,}4499\cdot10^{-6}$	22547,698
$-1{,}5437\cdot10^{-6}$	-111201,935
$1{,}7160\cdot10^{-7}$	1488006,993
$7{,}2150\cdot10^{-7}$	428740,125
$-9{,}8040\cdot10^{-6}$	-38392,710

Σ	1787173,95

Решение:

1) Вычисляем $x - x_i$:

2) Вычисляем: $\Pi_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$

3) Вычисляем: $D_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x - x_i)(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)$

Решение: (продолжение)

4) Вычисляем: $f(x) \approx \Pi_{5+1}(x) \cdot \sum_{i=0}^{5} (y_i / D_i(x))$

Π	1,5065·10^{-7}

Σ	1787173,95

$$f(0{,}263) \approx 1{,}5065 \cdot 10^{-7} \cdot 1787174$$

$$f(0{,}263) = \boxed{0{,}269678}$$

Задание 2.1 (б).

Найти приближенное значение функции при заданном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа при задании функции с равными интервалами между аргументами.

Найти значение функции $f(0{,}1157)$:

Дано:

№	x_i	y_i	$t-i$	C_i	$(t_i-i)C_i$	$y_i/((t_i-i)C_i)$
0	0,101	1,26183	2,94	-120	-352,80	-0,00358
1	0,106	1,27644	1,94	24	46,56	0,02741
2	0,111	1,29122	0,94	-12	-11,28	-0,11447
3	0,116	1,30617	-0,06	12	-0,72	-1,81412
4	0,121	1,3213	-1,06	-24	25,44	0,05194
5	0,126	1,3366	-2,06	120	-247,20	-0,00541

Π	$-7{,}0243\cdot 10^{-1}$

Σ	-1,85823

Решение:

1) Вычисляем шаг аргумента h:

$$h = \Delta x = 0{,}005.$$

2) Вычисляем t и $(t - i)$:

$$t = (x - x_0)/h.$$

3) Вычисляем:

$$\Pi_{n+1}(t) = t(t-1)\ldots(t-n)$$

4) Вычисляем C_i:

$$C_i = (-1)^{n-i} \cdot i! \cdot (n-i)!$$

5) Вычисляем $(t_i - i)C_i$, $y_i/((t_i - i)C_i)$.

6) Вычисляем $\Sigma\, y_i/((t_i - i)C_i)$.

Решение: (продолжение)

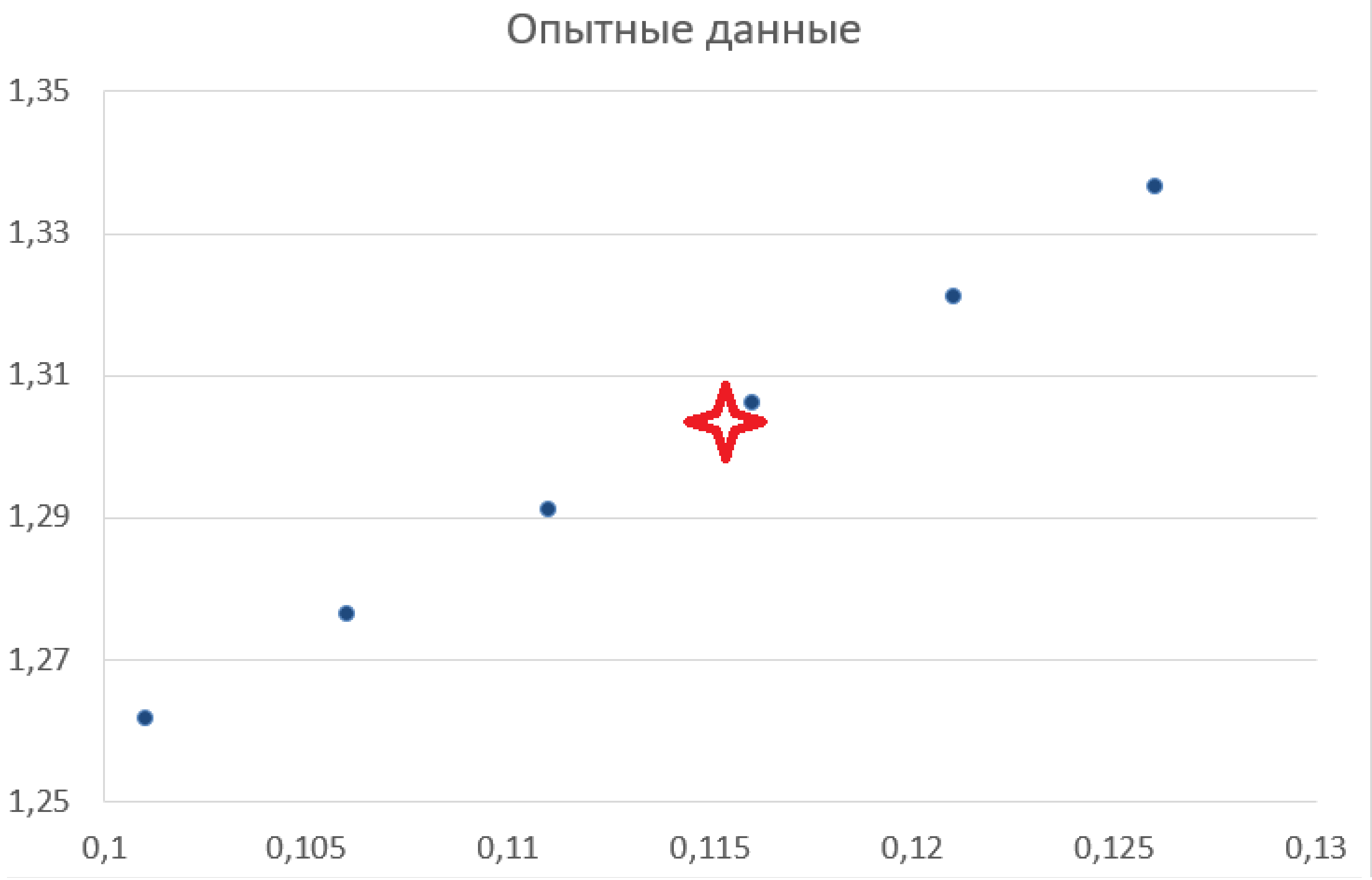
7) Вычисляем: $f(x) \approx \Pi_{n+1}(t) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(t-i)C_i}$

Π	-7,0243·10⁻¹

Σ	-1,85823

$$f(0{,}1157) \approx -7{,}0243 \cdot 10^{-1} \cdot (-1{,}85823)$$

$$f(0{,}1157) = \boxed{1{,}30527}$$



Задание 2.2 (а,б).

Найти приближенное значение функции при заданном значении аргумента с помощью формул Ньютона.

Найти значение функции *в точках* x_1 = 1,21; x_2 = 1,2273; x_3 = 1,253; x_4= 1,2638.

Решение: (а)

Дано:

№	x_i	y_i
0	1,215	0,106044
1	1,22	0,113276
2	1,225	0,119671
3	1,23	0,125324
4	1,235	0,130328
5	1,24	0,134776
6	1,245	0,138759
7	1,25	0,142367
8	1,255	0,145688
9	1,26	0,148809

Точки x_1 = 1,2273; x_2 = 1,210 принадлежат началу интервала $\Rightarrow$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед:

$$y(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

1) Вычисляем *q*: *q* = $(x - x_0)/h$.

1.1) q для точки x = 1,210: *q* = (1,215 – 1,21)/0,005.

q = – 1

Решение: (а) продолжение

1.2) Вычисляем конечные разности:

№	x_i	y_i	Δy	$Δ^2y$	$Δ^3y$
0	1,215	0,106044	0,007232	-0,000837	9,5E-05
1	1,22	0,113276	0,006395	-0,000742	9,3E-05
2	1,225	0,119671	0,005653	-0,000649	9,3E-05
3	1,23	0,125324	0,005004	-0,000556	9,1E-05
4	1,235	0,130328	0,004448	-0,000465	9E-05
5	1,24	0,134776	0,003983	-0,000375	8,8E-05
6	1,245	0,138759	0,003608	-0,000287	8,7E-05
7	1,25	0,142367	0,003321	-0,0002	-
8	1,255	0,145688	0,003121	-	-
9	1,26	0,148809	-	-	-

$$\Delta y = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

$$\Delta^2 y = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i.$$

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i.$$

1.3) ограничиваемся разностями третьего порядка, так как они практически постоянны:

$$y(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$y(1{,}21) \approx 0{,}106044 + q0{,}007232 + \frac{q(q-1)}{2!}(-0{,}000837) + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}0{,}000095. \quad = \boxed{0{,}09788}$$

Решение: (а) продолжение

№	x_i	y_i	Δy	Δ²y	Δ³y
0	1,215	0,106044	0,007232	-0,000837	9,5E-05
1	1,22	0,113276	0,006395	-0,000742	9,3E-05
2	1,225	0,119671	0,005653	-0,000649	9,3E-05
3	1,23	0,125324	0,005004	-0,000556	9,1E-05
4	1,235	0,130328	0,004448	-0,000465	9E-05
5	1,24	0,134776	0,003983	-0,000375	8,8E-05
6	1,245	0,138759	0,003608	-0,000287	8,7E-05
7	1,25	0,142367	0,003321	-0,0002	-
8	1,255	0,145688	0,003121	-	-
9	1,26	0,148809	-	-	-

2.1) q для точки x = 1,2273:

q = (1,2273 – 1,21)/0,005.

q = 2,46

2.2) Вычисляем $y(x)$:

$$y(x) \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$y(1{,}2273) \approx 0{,}106044 + q0{,}119671 + \frac{q(q-1)}{2!}(-0{,}005653) + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}0{,}000093. \quad = \boxed{0{,}12236}$$

Задание 2.2 (а,б).

Найти приближенное значение функции при заданном значении аргумента с помощью формул Ньютона.

Найти значение функции *в точках* x_1 = 1,210; x_2 = 1,2273; x_3 = 1,253; x_4= 1,2638.

Решение: (б)

Точки x_1 = 1,253; x_2 = 1,2273 принадлежат концу интервала $\Rightarrow$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад:

$$y(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots$$

1.1) q для точки x = 1,253: q = (1,255 – 1,253)/0,005.

q = – 0,4

Дано:

№	x_i	y_i
0	1,215	0,106044
1	1,22	0,113276
2	1,225	0,119671
3	1,23	0,125324
4	1,235	0,130328
5	1,24	0,134776
6	1,245	0,138759
7	1,25	0,142367
8	1,255	0,145688
9	1,26	0,148809

Решение: (б) продолжение

№	x_i	y_i	Δy	Δ²y	Δ³y
0	1,215	0,106044	0,007232	-0,000837	9,5E-05
1	1,22	0,113276	0,006395	-0,000742	9,3E-05
2	1,225	0,119671	0,005653	-0,000649	9,3E-05
3	1,23	0,125324	0,005004	-0,000556	9,1E-05
4	1,235	0,130328	0,004448	-0,000465	9E-05
5	1,24	0,134776	0,003983	-0,000375	8,8E-05
6	1,245	0,138759	0,003608	-0,000287	8,7E-05
7	1,25	0,142367	0,003321	-0,0002	-
8	1,255	0,145688	0,003121	-	-
9	1,26	0,148809	-	-	-

1.2) Вычисляем $y(x)$:

$$y(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}$$

$y(1{,}253) = \boxed{0{,}14439}$

Решение: (б) продолжение

№	x_i	y_i
0	1,215	0,106044
1	1,22	0,113276
2	1,225	0,119671
3	1,23	0,125324
4	1,235	0,130328
5	1,24	0,134776
6	1,245	0,138759
7	1,25	0,142367
8	1,255	0,145688
9	1,26	0,148809

Δy	Δ²y	Δ³y
0,007232	-0,000837	9,5E-05
0,006395	-0,000742	9,3E-05
0,005653	-0,000649	9,3E-05
0,005004	-0,000556	9,1E-05
0,004448	-0,000465	9E-05
0,003983	-0,000375	8,8E-05
0,003608	-0,000287	8,7E-05
0,003321	-0,0002	-
0,003121	-	-
-	-	-

2.1) q для точки x = 1,2638:

q = (1,26385 – 1,26)/0,005.

q = 1,76

1.2) Вычисляем $y(x)$:

$$y(x) \approx y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}$$

y(1,2638) = $\boxed{0,15101}$

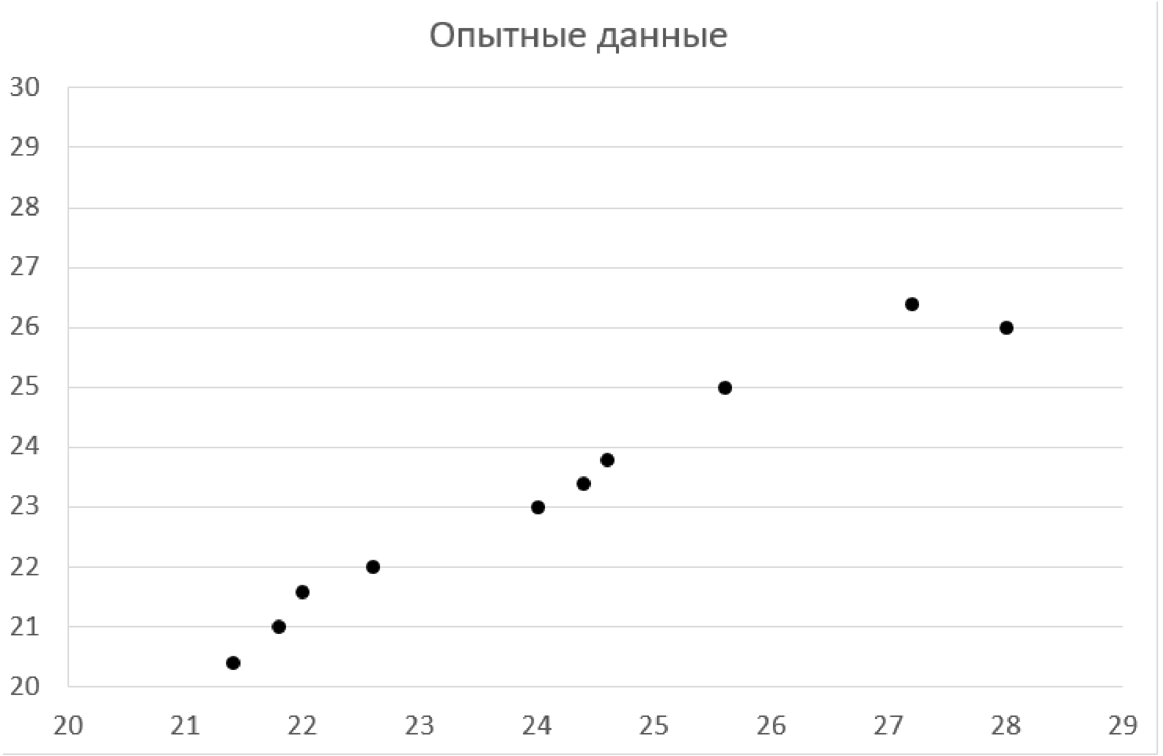
Задание 2.3.

Для анализа зависимости объема потребления y (в тыс. руб.) от располагаемого дохода x (в тыс. руб.) в таблице представлена выборка объема n=10 (помесячно с сентября по июнь включительно). Определить МНК параметры линейной регрессии.

Дано:

x_i	21,4	21,8	22,0	22,6	24,0	24,4	24,6	25,6	27,2	28,0
y_i	20,4	21,0	21,6	22,0	23,0	23,4	23,8	25,0	26,4	26,0

Решение: (на примере табличного процессора Excel)



1) Ввести в таблицу согласно варианта эмпирические данные.

№	x_i	y_i
1	21,4	20,4
2	21,8	21
3	22	21,6
4	22,6	22
5	24	23
6	24,4	23,4
7	24,6	23,8
8	25,6	25
9	27,2	26,4
10	28	26

Решение: (продолжение)

2) Вводим формулы и рассчитываем x_i^2, $x_i y_i$.

3) Вводим формулу суммы и рассчитываем суммы по всем столбцам.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	21,4	20,4	457,96	436,56
2	21,0	21	475,24	457,8
3	22	21,6	484	475,2
4	22,6	22	510,76	497,2
5	24	23	576	552
6	24,4	23,4	595,36	570,96
7	24,6	23,8	605,16	585,48
8	25,6	25	655,36	640
9	27,2	26,4	739,84	718,08
10	28	26	784	728
Σ	241,6	232,6	5883,68	5661,28

Решение: (продолжение)

4) СЛУ для нахождения коэффициентов *k* и *b*

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ k\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Записываем для рассчитанных значений

$$\begin{cases} k\cdot 5883{,}7 + b\cdot 241{,}6 = 5661{,}3 \\ k\cdot 241{,}6 + b\cdot 10 = 232{,}6. \end{cases}$$

?

5) Ищем любым известным способом решение СЛУ (например, методом Крамера).

Δ - определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных в СЛУ;

Δ_1, Δ_2 - определители, составленные из определителя Δ заменой 1-го (2-го) столбца на столбец свободных членов;

$$k = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

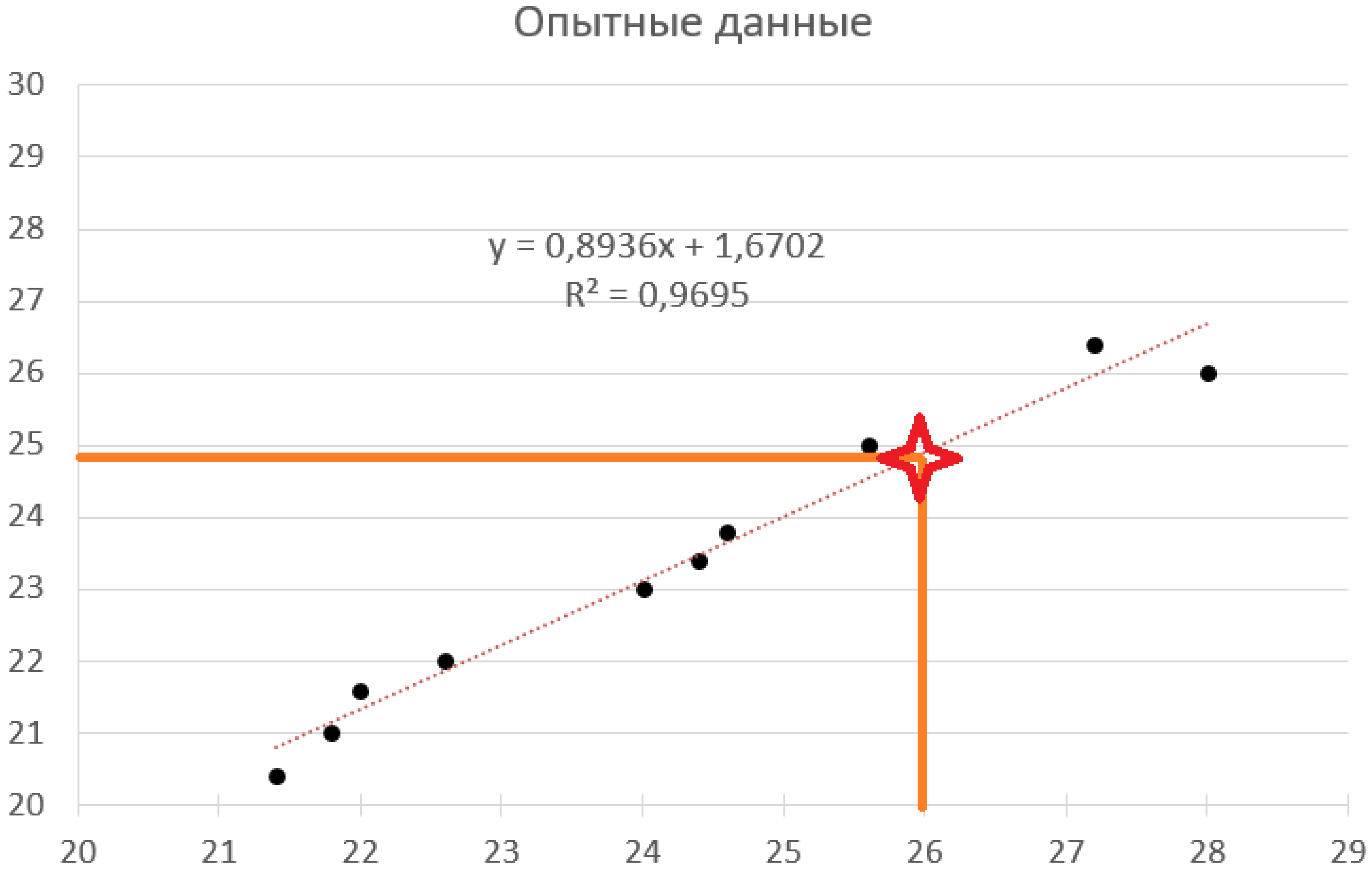
Δ	466
Δ_1	417
Δ_1	779
k	0,89
b	1,67

Решение: (продолжение)

6) Записываем уравнение: $y = 0{,}89 \cdot x + 1{,}67$

7) Вычисляем расчетное y и невязки: $\widehat{y_i}$, δ_i, δ_i^2. Строим график.

№	x_i	y_i		$\widehat{y_i}$	δ_i	δ_i^2
1	21,4	20,4		20,8	0,393	0,155
2	21,8	21		21,2	0,151	0,023
3	22	21,6		21,3	-0,271	0,073
4	22,6	22		21,9	-0,134	0,018
5	24	23	…	23,1	0,117	0,014
6	24,4	23,4		23,5	0,074	0,005
7	24,6	23,8		23,7	-0,147	0,022
8	25,6	25		24,5	-0,454	0,206
9	27,2	26,4		26,0	-0,424	0,180
10	28	26		26,7	0,691	0,477



7) Прогнозируем потребление при доходе 26 тыс. руб.:

24,8 тыс. руб.

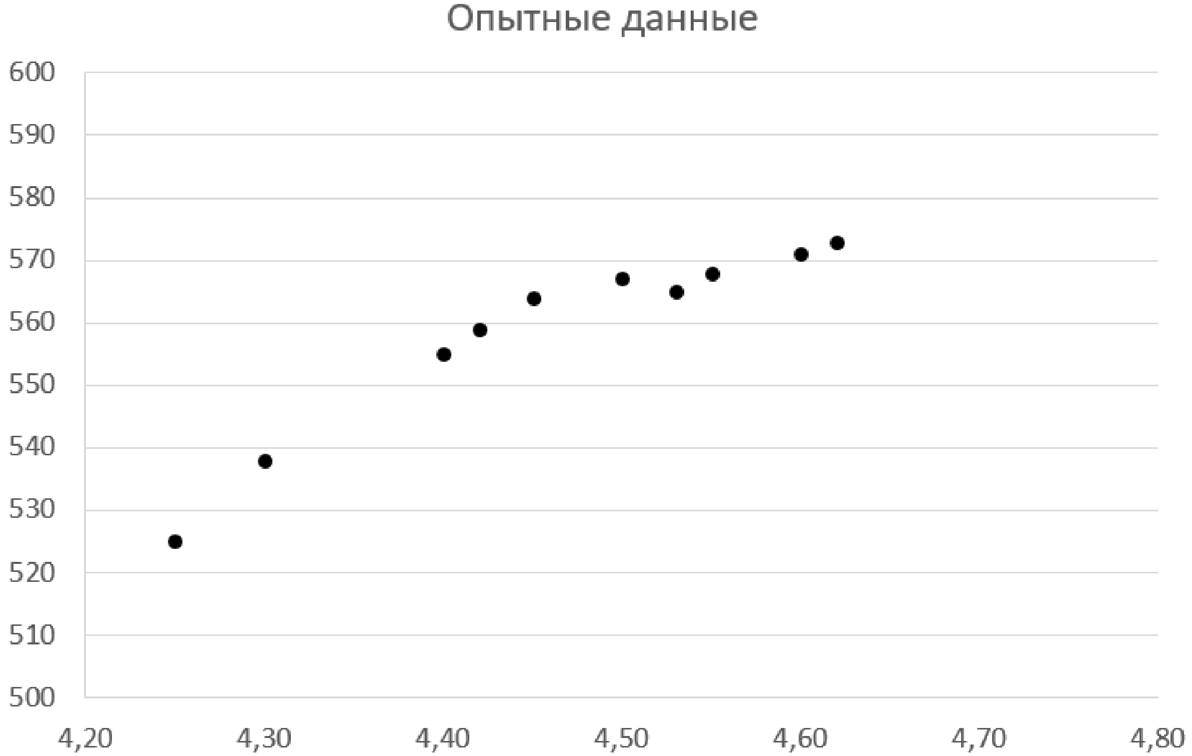
Задание 2.4.

Приведены данные о результатах деятельности некоторой торговой сети: выручке – y, (тыс. руб.) и количестве покупателей – x, (тыс. чел.) за некоторый период. Определить МНК параметры квадратичной регрессии.

Дано:

x_i	4,25	4,3	4,4	4,42	4,45	4,5	4,53	4,55	4,6	4,62
y_i	525	538	555	559	564	567	565	568	571	573

Решение: (на примере табличного процессора Excel)



1) Ввести в таблицу согласно варианта эмпирические данные.

№	x_i	y_i
1	4,25	525
2	4,30	538
3	4,40	555
4	4,42	559
5	4,45	564
6	4,50	567
7	4,53	565
8	4,55	568
9	4,60	571
10	4,62	573

Решение: (продолжение)

2) Вводим формулы и рассчитываем x_i^2, x_i^3, x_i^4, $x_i^2 y_i$, $x_i y_i$.

№	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$	$x_i y_i$
1	21,4	20,4	18,06	76,77	326,25	2 231,25	9 482,81
2	21,0	21	18,49	79,51	341,88	2 313,40	9 947,62
3	22	21,6	19,36	85,18	374,81	2 442,00	10 744,80
4	22,6	22	19,54	86,35	381,67	2 470,78	10 920,85
5	24	23	19,80	88,12	392,14	2 509,80	11 168,61
6	24,4	23,4	20,25	91,13	410,06	2 551,50	11 481,75
7	24,6	23,8	20,52	92,96	421,11	2 559,45	11 594,31
8	25,6	25	20,70	94,20	428,59	2 584,40	11 759,02
9	27,2	26,4	21,16	97,34	447,75	2 626,60	12 082,36
10	28	26	21,34	98,61	455,58	2 647,26	12 230,34
Σ	44,62	5585	199,2	890,1	3979,8	24 936,4	111 412,4

3) Вводим формулу суммы и рассчитываем суммы по всем столбцам.

Решение: (продолжение)

4) СЛУ для нахождения коэффициентов a_2, a_1, a_0

$$\begin{cases} n\,a_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

2) Записываем для рассчитанных значений

$$\begin{cases} 10\,a_0 + a_1\cdot 44{,}62 + a_2\cdot 199{,}2 = 5585 \\ a_0\cdot 44{,}62 + a_1 199{,}2 + a_2\cdot 890{,}1 = 24936{,}5 \\ a_0\cdot 199{,}2 + a_1\cdot 890{,}1 + a_2\cdot 3979{,}9 = 11412{,}5 \end{cases}$$

5) Ищем любым известным способом решение СЛУ.

a_2 = -337,3; a_1 = 3114,1; a_0 = -6616.

6) Записываем уравнение:

$$\boxed{y = -337{,}32x^2 + 3114{,}1x - 6616}$$

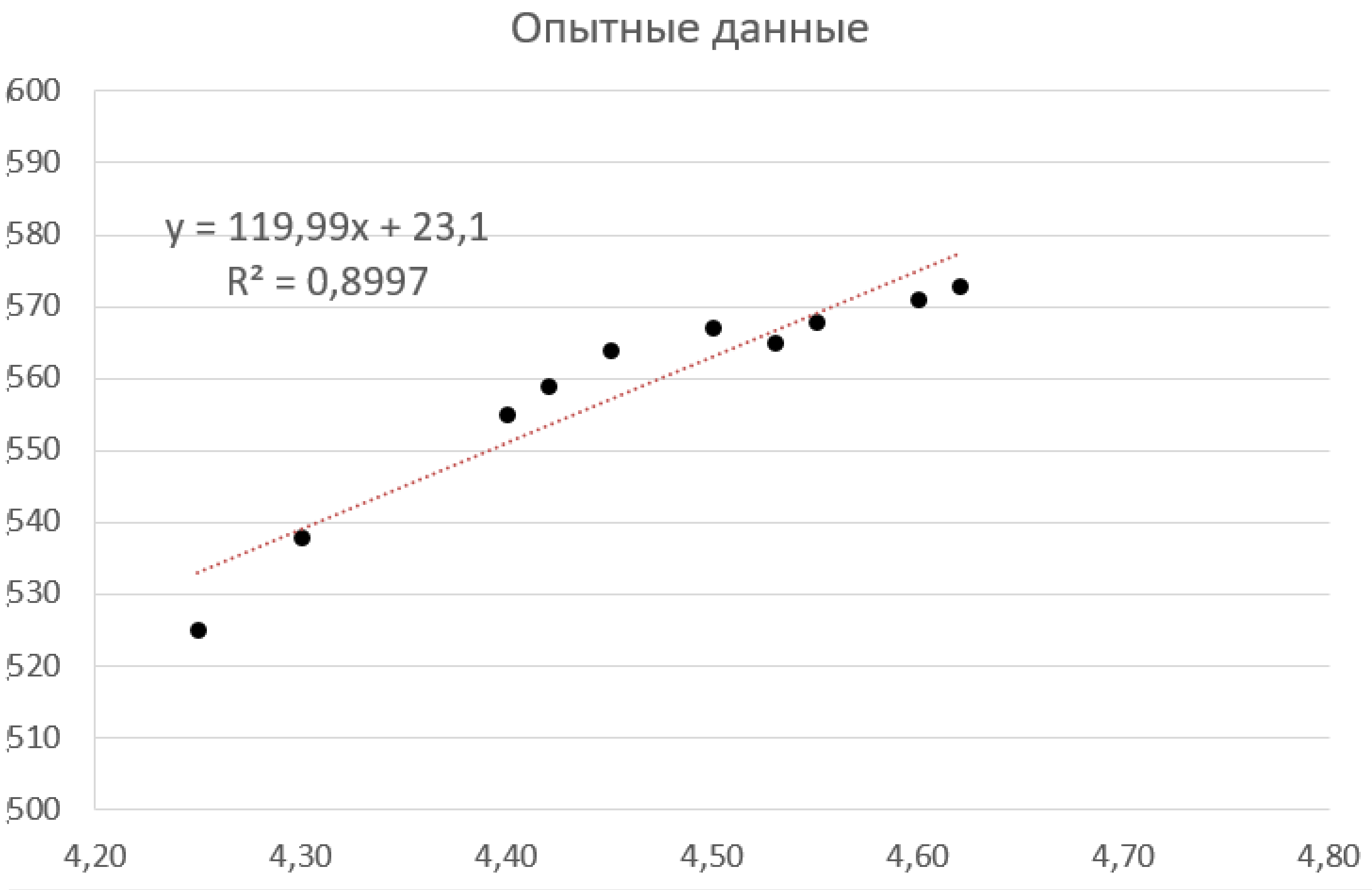
Решение: (продолжение)

7) Вычисляем расчетное y и невязки: $\widehat{y_i}$, δ_i, δ_i^2. Строим график.

№	x_i	y_i
1	4,25	525
2	4,30	538
3	4,40	555
4	4,42	559
5	4,45	564
6	4,50	567
7	4,53	565
8	4,55	568
9	4,60	571
10	4,62	573

…

$\widehat{y_i}$	δ_i	δ_i^2
531,4	6,438	41,441
543,1	5,070	25,705
561,3	6,280	39,438
564,1	5,113	26,145
567,9	3,858	14,880
572,8	5,750	33,063
574,9	9,877	97,549
576,0	7,957	63,322
577,5	6,480	41,990
577,6	4,617	21,319



7) Прогнозируем выручку при числе покупателей 4,35 тыс. чел.:

553 тыс. руб.