Практическое занятие 5

Функциональные ряды. Область сходимости. Теорема Вейерштрасса

Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости

Теоретический материал

1. Функциональные ряды. Область сходимости.

Определение. Пусть дана последовательность функций: $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$, определенных на некотором множестве X. Выражение вида: $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *функциональным рядом*, а множество X – *областью определения* этого ряда.

При подстановке произвольного значения x из множества X функциональный ряд становится числовым, причем при одних значениях x числовой ряд может быть сходящимся, а при других – расходящимся.

Определение. Множество значений переменной x, при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряд.

В области сходимости можно говорить о:

а) *сумме* функционального ряда $S(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$;

б) *частичной сумме* $S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$;

в) *остаточном члене* $r_n(x) = u_{n+1}(x) + \cdots$

Пример 1. $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^{n-1} + \cdots; a \neq 0.$

Решение. Областью сходимости данного ряда является область $|x| < 1$, для всех x из этой области сумма ряда $S = \frac{a}{1-x}$.

Пример 2. $\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\cdots+\frac{1}{n^x}+\cdots$

Решение. Областью сходимости данного ряда является область $x>1$.

Пример 3. $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2^2+x^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+x^2}+\cdots$

Решение. Оценим общий член данного ряда $\frac{1}{n^2+x^2}\le\frac{1}{n^2}$, отсюда следует, что ряд сходится $\forall x$, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как ряд Дирихле с показателем $\alpha=2$.

Пример 4. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n n!$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Для этого рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot(n+1)!}{x^n n!}\right|=|x|=D$; условие $D<1$ выполняется только при $x=0$.

Пример 5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+\sin x}$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения. Для сравнения возьмем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится при $\forall x$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+\sin x}:\frac{1}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n(1+\frac{\sin x}{n})}\right|=1$. Следовательно, данный ряд тоже расходится.

Пример 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n+1}$.

Решение. Вычислим предел общего члена при различных значениях x:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|x^n+1|}=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{при } x=1\\ 0, \text{при } |x|>1\\ 1, \text{при } |x|<1\end{cases}$, таким образом необходимый признак выполняется только при $|x|>1$.

Воспользуемся признаком Даламбера, вычислим:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x^n+1|}{|x^{n+1}+1|} = \frac{1}{|x|} < 1$ при $|x| > 1$.

Т.е. область сходимости: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Замечание. Для нахождения области сходимости функционального ряда можно использовать те же признаки сравнения, что и для числовых рядов (признак Даламбера, радикальный признак Коши). При этом члены функционального ряда необходимо брать **по модулю**, так как признаки применимы к рядам с положительными членами, то есть в области сходимости ряд будет **сходиться абсолютно**.

2. Равномерная сходимость функционального ряда.

Определение. Сходящийся в области D функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в этой области, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что для остатка ряда $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ $\forall n > N$ и $x \in D$ имеет место оценка $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Пример 1. Исследовать характер сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $0 < x < +\infty$.

Решение. Представим $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}$.

Найдем частичную сумму ряда: $S_n = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \cdots +$

$$+\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} = \frac{n}{(x+1)(x+n+1)}.$$

Тогда сумма ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(x+1)(x+n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(x+1)\left(\frac{x+1}{n}+1\right)} =$

$$= \frac{1}{x+1}.$$

Найдем остаток ряда $|R_n(x)| = |S - S_n| = \left|\frac{1}{x+1} - \frac{n}{(x+1)(x+n+1)}\right| =$

$$= \left|\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x+n+1-n}{(x+1)(x+n+1)}\right| = \left|\frac{1}{x+1+n}\right|.$$

Оценим остаток ряда $|R_n(x)| = \left|\frac{1}{x+1+n}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$

Следовательно, $\forall\varepsilon > 0$ найдется $N = \frac{1}{\varepsilon}$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ $|R_n(x)| < \varepsilon$, а значит, ряд сходится равномерно.

<u>*Пример 2.*</u> Исследовать характер сходимости $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, $0 \le x \le 1$.

<u>*Решение.*</u> Найдем остаток ряда $R_n(x) = (1-x)[x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots]=$
$= (1-x)x^{n+1}[1 + x + x^2 + \cdots] = (1-x)x^{n+1}\frac{1}{1-x} = x^{n+1}$ (воспользовались формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии).

Для равномерной сходимости необходимо, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$:
$\forall n > N$ и $x \in D$ $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Предположим, что верно $x^{n+1} < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, найдем N: но для $x_0 = 1$ не выполняется $1^{n+1} < \frac{1}{2}$, а значит, равномерной сходимости нет.

<u>*Теорема Вейерштрасса*</u> (*достаточное условие равномерной сходимости)*.

Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при всех *x*, принадлежащих множеству *X*, удовлетворяют неравенству: $|u_n(x)| \le a_n, n = 1,2,3,\cdots$, где $a_n \ge 0$ – члены некоторого сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве *X*.

<u>*Определение.*</u> Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условиям теоремы Вейерштрасса, называется *мажорирующим* числовым рядом для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или *числовой мажорантой*.

Пример 1. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно при всех x.

Решение. Мажорирующим числовым рядом для данного функционального ряда является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, т.к. $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ при всех x. Т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как ряд Дирихле, то данный функциональный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

Пример 2. Найти область равномерной сходимости функционального ряда: $\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n^n}$.

Решение. Оценим ряд из модулей: $\left|\frac{\sin nx}{n^n}\right| \le \frac{1}{n^n}$. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ с помощью радикального признака Коши:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$ сходится, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ является мажорантой исходного ряда. А значит, по теореме Вейерштрасса, данный функциональный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

Пример 3. Найти область равномерной сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3+x^{2n}}$.

Решение. Оценим общий член ряда. Для любого значения x, $x^{2n} \ge 0$, поэтому выполняется неравенство: $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^3+x^{2n}}\right| \le \frac{1}{n^3}$. Т.к. мажорирующим числовым рядом является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, который сходится как ряд Дирихле (показатель α=3>1), значит данный функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси $(-\infty \le x \le +\infty)$ по теореме Вейерштрасса.

Пример 4. Найти область равномерной сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n^4+x^2}}$, $x \in [-2; 2]$.

Решение. Оценим общий член ряда: $\left|\frac{x^n}{2^n\sqrt{n^4+x^2}}\right| \le \frac{2^n}{2^n\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – мажоранта, сходится как ряд Дирихле (показатель α=2>1), значит данный функциональный ряд сходится равномерно на $x \in [-2; 2]$ по теореме Вейерштрасса.

3. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости.

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Рассматриваются также степенные ряды более общего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots,$$

которые с помощью замены $(x-x_0)$ на новую переменную сводятся к рядам вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в любой точке x, такой что $|x| < |x_0|$.

Определение. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а число R – *радиусом сходимости*.

Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то его радиус сходимости $R = \infty$, а если ряд сходится только в одной точке $x = 0$, то $R = 0$.

Замечание 1. Степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится или в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ с центром в точке x_0, или на всей числовой оси,или только в точке $x = x_0$.

Замечание 2. Интервал сходимости степенного ряда может быть найден с помощью признаков Даламбера или Коши. Для установления сходимости или расходимости на концах интервала требуется дополнительное исследование с помощью других теорем.

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n$.

Решение. Обозначим общий член ряда $u_n(x)$.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(n+1)x^n}\right| = \frac{|x|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{|x|}{2} < 1 \iff$$

$$\iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2.$$

Значит $x \in (-2,2)$ – интервал сходимости, $R = 2$ – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах интервала:

1) $x = 2$.

Ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$.

Проверим необходимый признак: $\lim_{n\to\infty} |n+1| = \infty \ (\neq 0)$, т.е. необходимый признак не выполнен и ряд расходится.

2) пусть $x = -2$.

Ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} (-1)^n 2^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$.

Проверим необходимый признак: $\lim_{n\to\infty} |u_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |(-1)^n(n+1)| = \infty \ (\neq 0)$, т.е. необходимый признак не выполнен и ряд расходится.

Окончательно имеем область сходимости $(-2,2)$, радиус сходимости $R = 2$.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Решение. Обозначим общий член ряда $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Применим признак Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = |x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ при всех x. Следовательно, область сходимости данного ряда – вся числовая ось.

<u>*Пример 3.*</u> Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

<u>*Решение.*</u> Обозначим общий член ряда $u_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

Применим признак Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)}\cdot\frac{n}{(-1)^n x^n}\right| = |x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$,

ряд сходится при $|x| < 1$, т.е. область сходимости $(-1;1)$, радиус сходимости $R = 1$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала:

1) $x = 1$.

При подстановке в исходный ряд получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

- Проверим абсолютную сходимость, для этого рассмотрим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, про который известно, что он расходится, т.е. абсолютной сходимости у ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ нет.
- Проверим выполнение теоремы Лейбница:

  а) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = 0$ – условие выполняется;

  б) монотонное убывание следует из свойств функции $\frac{1}{n}$: $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.

  Таким образом признак Лейбница выполнен, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится условно.

2) $x = -1$.

При подстановке в исходный ряд получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а это гармонический ряд, который расходится.

Окончательно получаем область сходимости $(-1; 1]$ и радиус сходимости $R = 1$.

<u>Пример 4.</u> Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{3^n \ln n}$.

<u>Решение.</u> Обозначим общий член ряда $u_n(x) = (-1)^n\frac{(x+1)^n}{3^n \ln n}$.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}\ln(n+1)}\cdot\frac{3^n \ln n}{(x+1)^n}\right| = \frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|x+1|}{3}$$

(при вычислении $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$ воспользовались правилом Лопиталя).

Интервал сходимости определяется из неравенства:

$$\frac{|x+1|}{3} < 1 \;\Leftrightarrow\; |x+1| < 3 \;\Leftrightarrow\; -3 < x+1 < 3 \;\Leftrightarrow\; -4 < x < 2.$$

Тогда интервал сходимости будет $(-4,2)$, а радиус схоимости $R = 3$.

Исследуем сходимость на концах интервала:

1) $x = -4$.

При подстановке в исходный ряд получаем ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Сравним его с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Известно, что $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, значит, данный числовой ряд тоже расходится по первому признаку сравнения.

2) $x = 2$.

При подстановке в исходный ряд получаем ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$. Проверим его на абсолютную сходимость.

Возьмем ряд из модулей: $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Этот ряд рассмотрен в пункте 1), он расходится, т.е. абсолютной сходимости нет.

Проверим выполнение теоремы Лейбница:

- $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| = 0$ – условие выполняется;
- функция $\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| > \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}\right|$, т.е. условие монотонного убывания выполнено и, значит, исходный ряд сходится условно.

Окончательно получаем область сходимости $(-4; 2]$ и радиус сходимости $R = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область сходимости степенного ряда:

   1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\ln^n(n+1)}$ (Ответ: $R = +\infty$).
   2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n}$ (Ответ: $R = 1,\ [-1,1]$).
   3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n n!}{3^n}$ (Ответ: $R = 0,\ x = 1$).
   4. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\, tg\, \frac{1}{n}$ (Ответ: $R = 1,\ [-1,1)$).
   5. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\, n!$ (Ответ: $R = 0,\ x = 0$).

2. Типовой расчет для факультетов ИИТ и ФТИ: № 1.8, 1.10, 1.11 – по 5 задач; № 2.2-2.3 (по номеру варианта).