Математический анализ-3 семестр

Лекция 15

Тема 6. Вычеты функций

6.1. Вычет функции в изолированной особой точке

6.2. Вычет функции в бесконечно удаленной точке

6.1. Вычет функции в изолированной особой точке

Рассмотрим точку $z_0 -$ изолированную особую точку функции $f(z)$. Тогда существует R: в кольце $0 < |z - z_0| < R$ $f(z) -$ аналитична, разложима в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

С – любой замкнутый контур, принадлежащий кольцу $0 < |z - z_0| < R$.

Определение 1. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, обозначаемое $resf(z_0) = res_{z_0} f(z)$ и определяемое равенством $res_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$, где C – любой контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, содержащий внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

Замечание 1. Если точка $z_0 -$ правильная, то интеграл в правой части определения равен нулю (по теореме Коши), следовательно, вычет функции в правильной точке равен нулю.

Замечание 2. Так как

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

$$c_n|_{n=-1} = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = resf(z_0)$$

то есть $resf(z_0) = c_{-1}$.

Определение 2. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$:

1. Если z_0 – правильная точка функции $f(z)$, то $resf(z_0) = 0$.

2. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то $resf(z_0) = 0$ (в ряде Лорана нет главной части, $c_{-1} = 0$).

3. Если z_0 – простой полюс, то ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$f(z)(z - z_0) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = c_{-1}, \qquad resf(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$$

4. Если $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима как частное двух аналитических функций $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\Psi(z_0) = 0$, $\Psi'(z_0) \neq 0$, т.е. z_0 – простой полюс функции $f(z)$, $z_0 = \frac{\text{H}(0)}{\text{H}(1)} = \Pi(1)$, то

$$resf(z_0) = res_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}(z - z_0) =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\Psi(z) - \Psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z)}{\Psi'(z_0)}$$

5. Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

$$f(z)(z - z_0)^n = c_{-n} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+n}$$

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n] = (n-1)!\,c_{-1} + n!\,c_0(z-z_0) + \cdots, \text{при } z \to z_0$$

$$c_{-1} = resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n].$$

6. Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 $(resf(z_0) = c_{-1})$.

Примеры. Найти вычеты функции в ее особых точках.

1) $f(z) = \frac{1}{z-z^3} = \frac{1}{z(1-z)(1+z)}$

Особыми точками функции $f(z)$ являются точки

$z_1 = 0,\ z_2 = 1, z_3 = -1$, это простые полюса.

В точке $z_1 = 0$

$$\underset{z_1=0}{res} f(z) = \lim_{z\to 0}(f(z)\cdot z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(1-z)(1+z)} = 1$$

В точке $z_2 = 1$

$$\underset{z_2=1}{res} f(z) = \lim_{z\to 1}(f(z)\cdot(z-1)) = \lim_{z\to 1}\frac{-1}{z(1+z)} = -\frac{1}{2}$$

В точке $z_3 = -1$

$$\underset{z_3=-1}{res} f(z) = \lim_{z\to -1}(f(z)\cdot(z+1)) = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{2}$$

2) $f(z) = \frac{cosz - 1}{z^2(z-\pi)}$

Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 0,\ z_2 = \pi$.

В точке $z = 0$

$$\lim_{z\to 0} f\,(z) = \lim_{z\to 0}\frac{cosz-1}{z^2(z-\pi)} = \lim_{z\to 0}\frac{-z^2}{2z^2(z-\pi)} = \frac{1}{2\pi}.$$

Следовательно, $z = 0$ – устранимая особая точка и $\underset{z=0}{res} f(z) = 0$.

В точке $z = \pi$ имеем полюс первого порядка. Тогда

$$\underset{z=\pi}{res} f(z) = \lim_{z\to\pi} \frac{(cosz - 1)(z - \pi)}{z^2(z - \pi)} = \frac{-1 - 1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

3) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 + 1}$

Особые точки функции $f(z)$ – нули знаменателя, т.е. корни уравнения $z^3 + 1 = 0$. Решая это уравнение, получим

$$z_k = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{3}}, k = -1,0,1,$$

т.е. $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $(k = -1)$, $z_2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ $(k = 0)$, $z_3 = e^{i\pi}$ $(k = 1)$ – нули первого порядка знаменателя, т.е. полюса первого порядка функции $f(z)$.

$$\underset{z=z_k}{res} f(z) = \frac{z^2}{3z^2}\,\Big|_{z=z_k} = \frac{1}{3},$$

т.е. вычеты по всех особых точках функции z_k равны $\frac{1}{3}$.

3) $f(z) = \dfrac{z^4}{z^4 + 1}$

Особые точки функции $f(z)$ – нули знаменателя, т.е. корни уравнения

$z^4 + 1 = 0$. Решая это уравнение, получим $z_k = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}$, $k = 0,1,2,3,$

т.е. $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ $(k = 0)$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $(k = 1)$,

$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $(k = 2)$, $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ $(k = 3)$ – нули первого порядка знаменателя, т.е. полюса первого порядка функции $f(z)$,

$z_k = \frac{\mathrm{H}(0)}{\mathrm{H}(1)} = \Pi(1)$. Воспользуемся формулой из п.4.

$$\underset{z=z_k}{res} f(z) = \frac{z^4}{4z^3}\,\Big|_{z=z_k} = \frac{z_k}{4}$$

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} + i\frac{\sqrt{2}}{8}, \quad \underset{z=z_1}{res} f(z) = -\frac{\sqrt{2}}{8} + i\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\underset{z=z_2}{res} f(z) = -\frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8}, \quad \underset{z=z_3}{res} f(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8}$$

5) $f(z) = \dfrac{1}{z^5 + 4z^3}$

Особые точки функции находятся из уравнения $z^5 + 4z^3 = 0$ или $z^3(z + 2i)(z - 2i) = 0$.

$z_1 = 0$ – полюс третьего порядка,

$z_{2,3} = \pm 2i$ – полюса первого порядка.

Найдем вычеты в точках $z_2,\ z_3$

$$\underset{z=2i}{res} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(2i)^3 4i} = \frac{1}{32}$$

$$\underset{z=-2i}{res} f(z) = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-2i)^3(-4i)} = \frac{1}{32}$$

и в точке z_1 по формуле вычисления вычета в полюсе 3-го порядка:

$$\underset{z=0}{res} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1 \cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z\to 0} \frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}$$

6) $f(z) = \dfrac{sinz^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2} = \dfrac{sinz^2}{z^2(z - \frac{\pi}{4})}$

Особые точки функции $f(z)$ – $z_1 = 0, z_2 = \frac{\pi}{4}$.

$z_1 = 0$ является нулем второго порядка для знаменателя.

Рассмотрим числитель:

$$sinz^2|_{z=0} = 0, (sinz^2)' = 2zcosz^2|_{z=0} = 0,$$

$$(sinz^2)'' = 2cosz^2 - 2z \cdot 2z(-sinz^2)|_{z=0} = 2 \neq 0$$

следовательно, для числителя точка $z_1 = 0$ является также нулем второго порядка.

Итак, $z_1 = \frac{\text{Н}(2)}{\text{Н}(2)} = \text{УОТ}$ – устранимая особая точка. $\underset{z_1=0}{res} f(z) = 0.$

$z_2 = \frac{\pi}{4}$ является нулем первого порядка для знаменателя,

$sinz^2|_{z=\frac{\pi}{4}} \neq 0$, следовательно, $z_2 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \Pi(1)$ – полюс первого порядка.

$$\underset{z_2}{res} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{sinz^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2} sin\frac{\pi^2}{16}.$$

6) $f(z) = \dfrac{sin2z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}$

Особая точка функции $f(z)$: $z = \frac{\pi}{4} = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(3)} = \Pi(3)$ – полюс третьего порядка.

$$\underset{\frac{\pi}{4}}{res} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{d^2}{dz^2}\left(f(z)\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{d^2}{dz^2}(sin2z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}(-4sin2z) = -2.$$

8) $f(z) = z^3 \cdot sin\frac{1}{z^2}$

Особая точка функции $f(z)$: $z = 0$.

Она является существенно особой точкой функции $f(z)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно выписать лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 0$:

$$f(z) = z^3\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!\,z^6} + \frac{1}{5!\,z^{10}} - \ldots\right) = z - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^7} + \ldots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет функции в точке $z = 0$ есть коэффициент $c_{-1} = 0$, т.е. $\underset{z=0}{res} f(z) = 0.$

9) $f(z) = (z-2)^2 \cdot e^{\frac{1}{z-2}}$

Особая точка функции $f(z)$: $z = 2$.

Она является существенно особой точкой функции $f(z)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно выписать лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 2$:

$$f(z) = (z-2)^2\left(1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!\,(z-2)^2} + \frac{1}{3!\,(z-2)^3} + \dots\right) =$$

$$= (z-2)^2 + (z-2) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!\,(z-2)} + \dots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет функции в точке $z = 2$ есть коэффициент $c_{-1} = \frac{1}{6}$, т.е. $\underset{z=2}{res} f(z) = \frac{1}{6}$.

10) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^3 - z^4} = \dfrac{z+2}{z^3(1-z)}$

Особые точки функции: $z_1 = 0, z_2 = 1$.

$$z_1 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(3)} = \Pi(3), \quad z_2 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \Pi(1)$$

$$\underset{z_1}{res} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(f(z)z^3)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1 - z + z + 2}{(1-z)^2}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{6}{(1-z)^3} = 3$$

$$\underset{z_2}{res} f(z) = \lim_{z\to 1} -\frac{z+2}{z^3} = -3$$

11) $f(z) = \dfrac{3z^6 + z^2 + 1}{z^7}$

Особая точка функции $f(z)$: $z = 0 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(7)} = \Pi(7)$.

Преобразуем функцию, поделив почленно на z^7:

$$f(z) = \frac{3}{z} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7}$$

получили разложение в ряд Лорана по степеням z. Вычет функции в точке $z = 0$ есть коэффициент $c_{-1} = 3$, т.е. $\underset{z=0}{res} f(z) = 3$.

<u>6.2. Вычет функции в бесконечно удаленной точке</u>

В теории функции комплексного переменного кроме конечных комплексных чисел вводится понятие бесконечного комплексного числа, называемого *бесконечно удаленной точкой*.

ε-окрестностью точки $z = \infty$ называется внешность круга радиуса ε с центром в начале координат: $|z| > \varepsilon$. Для точки $z = \infty$ нет понятия действительной и мнимой частей, отсутствует понятие аргумента, $|\infty| = +\infty$.

Определение 2. Функция $f(z)$ аналитична в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, если функция $g(\zeta) = \mathrm{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ аналитична в $\zeta = 0$.

Например, $f(z) = sin\frac{1}{z}$, $g(\zeta) = \sin\zeta$ – аналитична в т. $\zeta = 0$. Следовательно, $f(z) = sin\frac{1}{z}$ аналитична в т. $z = \infty$.

Определение 3. Точка $z = \infty$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек функции $f(z)$.

Например, $f(z) = \frac{1}{sinz}$, особые точки: $sinz = 0, z_k = \pi k$ – полюсы. При $k \to \infty$ полюсы накапливаются в бесконечности, следовательно, не являются ИОТ.

Определение 4. Если $\zeta = 0$ – правильная, устранимая, полюс или существенно особая точка функции $g(\zeta)$, то точка $z = \infty$ называется правильной, устранимой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$.

Определение 5. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ называется комплексное число, равное значению интеграла $res\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz$ по любому замкнутому контуру, проходимому по часовой стрелке, вне которого функция аналитична и не имеет особых точек, отличных от $z = \infty$, т.е.

$$res_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)dz\,,$$

$$res_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Примеры.

1) $f(z) = \frac{z+1}{z}$. Найти $res_{z=\infty} f(z)$.

Сделаем замену $z = \frac{1}{\zeta}$, $f(\zeta) = \frac{\frac{1}{\zeta}+1}{\frac{1}{\zeta}} = 1 + \zeta$. $\zeta = 0$ $(z = \infty)$ − устранимая особая точка.

$f(z) = 1 + \frac{1}{z}$, $c_{-1} = 1$, $res_{z=\infty} f(z) = -1$.

Если $z = \infty$ - устранимая особая точка, вычет в ней не обязательно равен нулю!

2) Найти вычет в $z = \infty$ для функции $f(z) = \cos z$.

Сделаем замену $z = \frac{1}{\zeta}$, тогда лорановское разложение $\cos\frac{1}{\zeta}$ в окрестности точки $z = \infty$ $(\zeta = 0)$ имеет вид

$$g(\zeta) = \cos\frac{1}{\zeta} = 1 - \frac{1}{2!\,\zeta^2} + \frac{1}{4!\,\zeta^4} - \cdots,$$

т.е. $\zeta = 0$ – существенно особая точка.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots,$$

Коэффициент c_{-1} в разложении $\cos z$ равен нулю: $c_{-1} = 0$, т.е. $res_{z=\infty} f(z) = 0$.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ аналитична на полной комплексной плоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = \infty$, то $\sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z) = 0$ или $res_\infty f(z) = -\sum_{k=1}^{n-1} res_{z_k} f(z)$.