Математический анализ-3 семестр

Часть II. Теория функции комплексного переменного

Лекция 9

Тема 1. Комплексные числа и действия над ними

1.1. Алгебраическая форма комплексного числа

1.2. Геометрическое представление комплексного числа

1.3. Действия над комплексными числами

1.4. Тригонометрическая форма комплексного числа

1.5. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

1.6. Показательная форма записи комплексного числа

1.7. Изображение множеств на комплексной плоскости

1.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 1. Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая условием $i^2 = -1$.

Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются

$x = \mathrm{Re}z,\ y = \mathrm{Im}z.$

Такое представление комплексного числа z называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

Пример 1. 1) $z = 2 + i,\quad \bar{z} = 2 - i,$

2) $z = -5 - 3i,\ \bar{z} = -5 + 3i$

Комплексные числа $\boldsymbol{z_1 = x_1 + iy_1}$ *и* $\boldsymbol{z_2 = x_2 + iy_2}$ считаются равными тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x_1 = x_2,\ y_1 = y_2}$.

<u>Пример 2.</u>

Решить уравнение $(5 - i)x + (3 + 2i)y = 1 + 5i$.

Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$(5x + 3y) + (-x + 2y)i = 1 + 5i$.

Из определения равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ -x + 2y = 5. \end{cases}$$

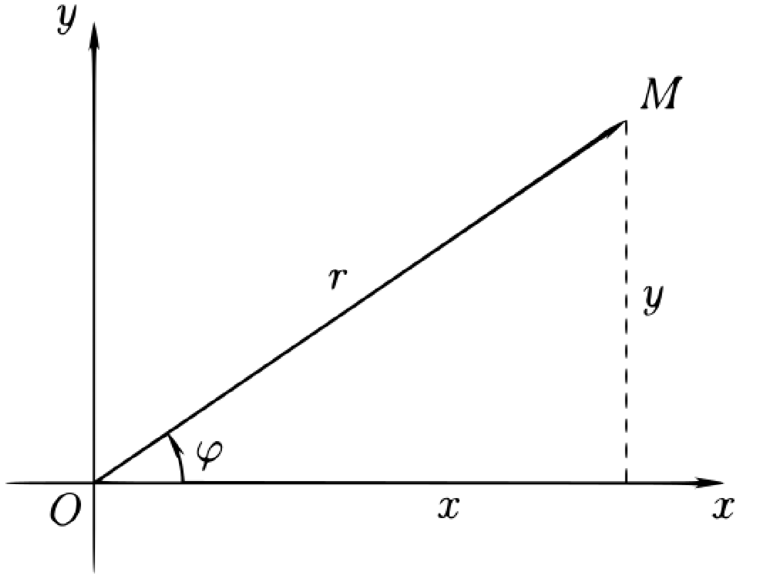
Решая эту систему, находим $x = -1$, $y = 2$.

1.2. Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой M с координатами (x, y), либо вектором $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$ ($\vec{r}$ – радиус-вектор из начала координат).

И наоборот, каждой точке $M(x, y)$ соответствует одно комплексное число $z = x + iy$.

Сопряженные числа на комплексной плоскости расположены симметрично относительно оси OX.



Если $y = 0$, то $z = x + i \cdot 0 = x$, то есть получаем обычное вещественное, расположенное на оси OX, число.

Если $x = 0$, то $z = iy$. Такие числа называются чисто мнимыми. Они изображаются точками на оси OY.

Определение 2. Длина вектора $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\right)$ называется *модулем* комплексного числа и обозначается $|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$.

Определение 3. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси OX, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = Argz$; определяется с точностью до слагаемого $2\pi k (k = 0, \pm 1, \ldots)$:

$$Argz = argz + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

где $argz$ есть *главное значение* $Argz$, определяемое условиями $-\pi < atgz \leq \pi$.

В зависимости от положения точки на комплексной плоскости,

$$argz == \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если z в I , IV четверти,} \\ \pi - arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{если z во II четверти,} \\ -\pi + arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{если z в III четверти,} \\ 0, & \text{если x>0, y=0,} \\ \pi, & \text{если x<0, y=0,} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если x=0, y>0,} \\ \dfrac{-\pi}{2}, & \text{если x=0, y<0.} \end{cases}$$

Примеры.

Найти модуль и аргумент комплексного числа.

1) $z = 1 + i$.

$|z| = r = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Для нахождения аргумента определим положение числа на комплексной плоскости: $z = 1 + i$ лежит в I четверти.

$argz = arctg\frac{y}{x} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

$z=-2+2\sqrt{3}i$, II четверть

$|z|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4,$

$argz=\pi-arctg\left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right|=\pi-arctg\sqrt{3}=\frac{2\pi}{3}$

2) $z=-\sqrt{3}-i$, III четверть

$|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2,$

$argz=-\pi+arctg\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right|=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$

3) $z=1-i$, IV четверть

$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},$

$argz=-arctg\left|\frac{-1}{-1}\right|=-\frac{\pi}{4}$

4) $z=2$ $\quad |z|=2,$ $\quad argz=0$

5) $z=3i$ $\quad |z|=3,$ $\quad argz=\frac{\pi}{2}$

6) $z=-5$ $\quad |z|=5,$ $\quad argz=\pi$

7) $z=-2i$ $\quad |z|=2,$ $\quad argz=-\frac{\pi}{2}$

1.3. Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение и деление)

Пусть даны два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$.

Определение 4. Суммой $\boldsymbol{z_1+z_2}$ комплексных чисел $\boldsymbol{z_1}$ и $\boldsymbol{z_2}$ называется комплексное число

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Определение 5. Разностью $\boldsymbol{z_1-z_2}$ комплексных чисел $\boldsymbol{z_1}$ и $\boldsymbol{z_2}$ называется комплексное число

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Определение 6. Произведением $\boldsymbol{z_1z_2}$ комплексных чисел $\boldsymbol{z_1}$ и $\boldsymbol{z_2}$

называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Определение *7.* Частным $\frac{z_1}{z_2}$ от деления комплексного числа $\boldsymbol{z_1}$ на комплексное число $\boldsymbol{z_2 \neq 0}$ называется такое комплексное число $\boldsymbol{z}$, которое удовлетворяет уравнению $\boldsymbol{z z_2 = z_1}$.

Для частного имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Примеры. $z_1 = 5 - i, z_2 = -1 - 2i$

1) $z_1 + z_2 = 4 - 3i$

2) $z_1 - z_2 = 6 + i$

3) $z_1 z_2 = (5 - i)(-1 - 2i) = -5 + i - 10i + 2i^2 = -7 - 9i$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5-i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} = \frac{-5+i+10i+2}{1+4} = -\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$

5) Вычислить i^{27}.

Так как

$i^1 = i,$ $i^2 = -1,$ $i^3 = -i,$ $i^4 = 1,$ $i^5 = i,$

$i^6 = -1,$ $i^7 = -i,$ $i^8 = 1,$ и т. д.,

то $i^{27} = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$

1.4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ можно записать в тригонометрической форме

$$z = |z| \cdot \left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = r(cos\varphi + isin\varphi),$$

где $r = |z|, \varphi = argz$.

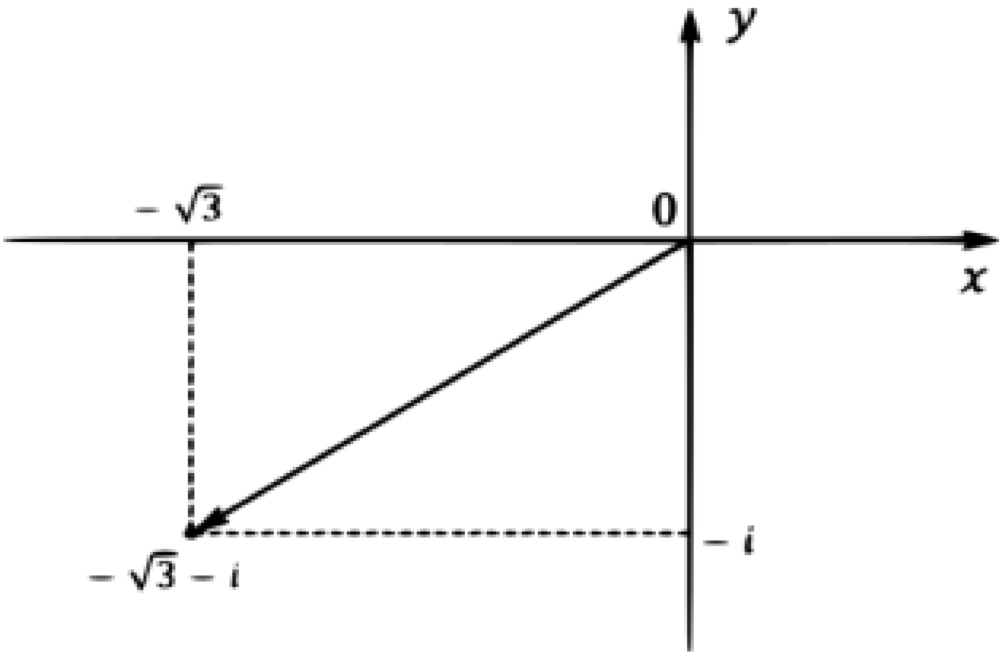
Пример. Записать число в тригонометрической форме:

$z = -\sqrt{3} - i.$

$$|z| = r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$$

Для нахождения аргумента определим положение z на комплексной плоскости: z лежит в III четверти, тогда

$$argz = -\pi + arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$



Подставляя значения модуля и аргумента в формулу, получим

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left[cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

1.5. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$.

1. Произведение $z_1 z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 находится по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т.е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad argz(z_1 z_2) = argz_1 + argz_2.$$

2. Частное двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

т.е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, arg\frac{z_1}{z_2} = argz_1 - argz_2.$$

3. Возведение комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ в натуральную степень n производится по формуле

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + isin(n\varphi)),$$

т. е. $|z^n| = |z|^n, \quad arg(z^n) = n \cdot argz$

Формула Муавра:

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + isin(n\varphi).$$

4. Корень n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\varphi = argz, k = 0,1,2,\ldots,n-1.$

Пример. Вычислить $(2-2i)^{10}$.

Решение: представим число $z = 2 - 2i$ в тригонометрической форме:

$$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

$$(2-2i)^{10} = \left(2\sqrt{2}\right)^{10}\left[cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^{15}\left[cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - isin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right] = -2^{15} \cdot i.$$

Пример. Вычислить $\sqrt[4]{-16}$.

Решение: представим число -16 в тригонометрической форме. Число лежит на действительной оси:

$x < 0, y = 0.$

$|-16| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16, \varphi = \pi.$

$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + isin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right) =$

$= 2\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + isin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3.$

Полагая последовательно $k = 0,1,2,3$, выпишем все корни

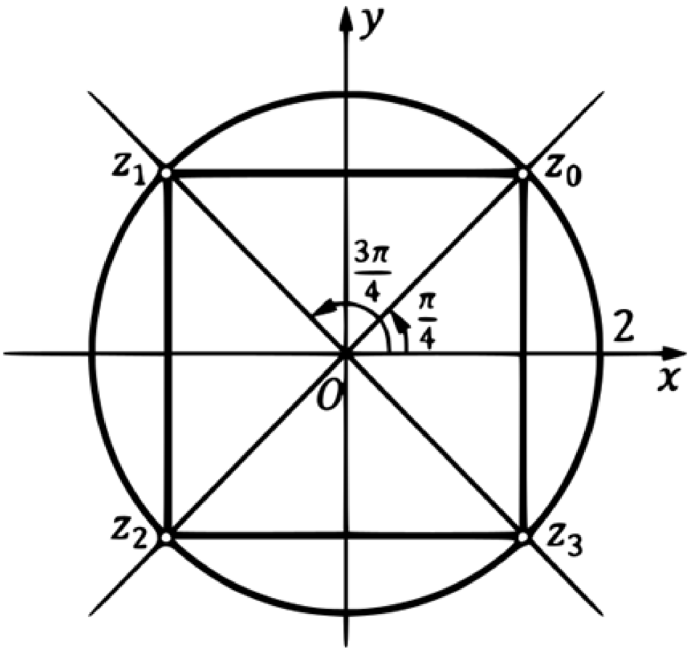
$k = 0: z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right),$

$k = 1: z_1 = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right),$

$k = 2: z_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right),$

$k = 3: z_3 = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right).$

На плоскости корни располагаются на окружности радиуса 2 в вершинах правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат:



5) Решить уравнение $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Обозначим $t = z^2$. Тогда уравнение примет вид $t^2 - 2t + 4 = 0$.

Корни этого уравнения

$$t_1 = 1 + \sqrt{3}i, \qquad t_2 = 1 - \sqrt{3}t,$$

откуда $z_{1,2} = \sqrt{t_1}$, $\quad z_{3,4} = \sqrt{t_2}$.

Пусть $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$.

Представим в тригонометрической форме:

$1 + \sqrt{3}i = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$.

Число $1 + \sqrt{3}i$ находится в I четверти, найдем модуль и аргумент:

$$\left|1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, \qquad arg\left(1 + \sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$z_{1,2} = \sqrt{1 + \sqrt{3}i} = \sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} + isin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right), k = 0,1,$$

т.е.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right), k = 0,$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6}\right), k = 1.$$

Пусть $z = \sqrt{1 - \sqrt{3}i}$.

Представим в тригонометрической форме:

$1 - \sqrt{3}i$.

Число $1 - \sqrt{3}i$ находится в IV четверти, найдем модуль и аргумент:

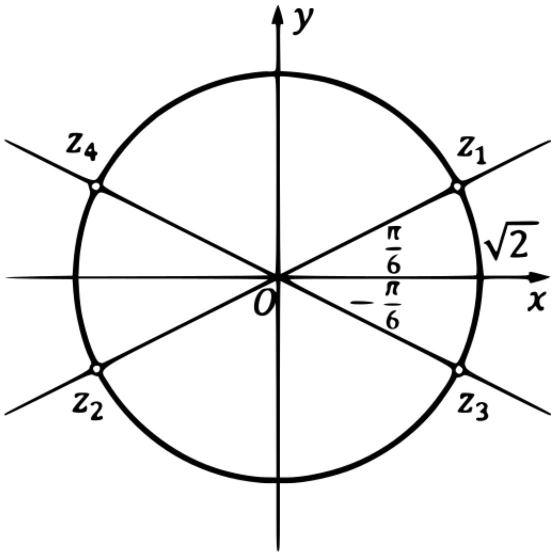
$\left|1 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, \qquad arg\left(1 - \sqrt{3}i\right) = -\frac{\pi}{3}$

т. е. $1 - \sqrt{3}i = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

$$z_{3,4} = \sqrt{2}\left(cos\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} + isin\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right), k = 0,1.$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right), k = 0,$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right), k = 1.$$



Все корни находятся на окружности радиуса $R = \sqrt{2}$.

1.6. Показательная форма записи комплексного числа

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$,

перепишем тригонометрическую форму записи комплексного числа в виде

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$, $\varphi = argz$.

Отметим, что $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Пример. Записать комплексное число $z = -3 - 3i$ в тригонометрической и показательной форме.

Число находится в III четверти. Найдем модуль и аргумент:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$argz = -\pi + arctg\left|\frac{y}{x}\right| = -\pi + arctg\left(\frac{-3}{-3}\right) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма записи z

$$z = 3\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

Показательная форма записи $z = 3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$.

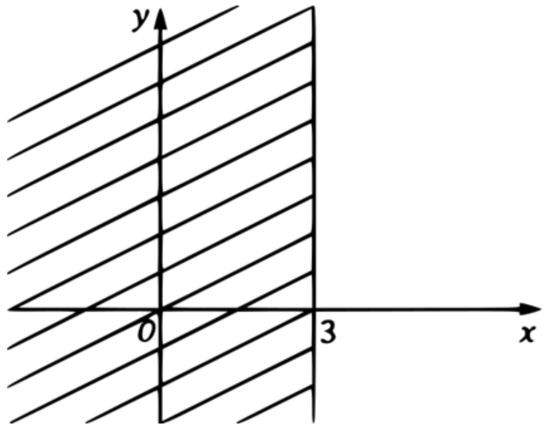
1.7. Изображение множеств на комплексной плоскости

Изобразить на комплексной плоскости линии и области, заданные уравнениями и неравенствами.

Пример 1.

$\operatorname{Re} z \leq 3$.

Т.к. $\operatorname{Re} z = x$, то неравенство можно переписать так: $x \leq 3$. На плоскости xOy это определяет полуплоскость левее прямой $x = 3$.

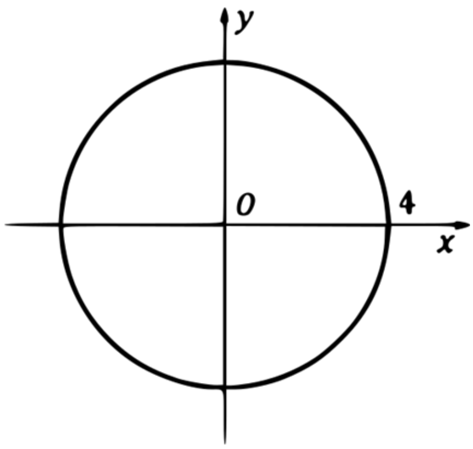


Пример 2.

$|z| = 4$

По определению, $|z|$ – это расстояние от начала координат до точки z, т.е. $|z| = 4$ – это геометрическое множество точек, равноудаленных от начала координат. Таким геометрическим местом является окружность с центром в начале координат радиуса $R = 4$.

Также можно вывести уравнение кривой алгебраическим способом. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. уравнение переписывается в виде $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$, или $x^2 + y^2 = 4^2$ – это и есть уравнение окружности с центром в точке O и $R = 4$).

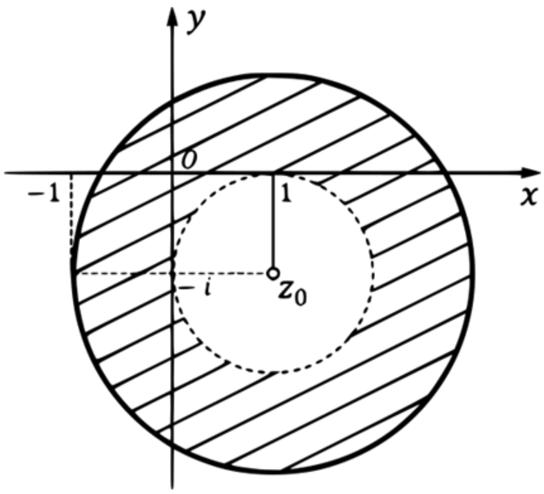


Пример 3.

$1 < |z - 1 + i| \leq 2.$

$|z - 1 + i| = |z - (1 - i)| \leq 2$

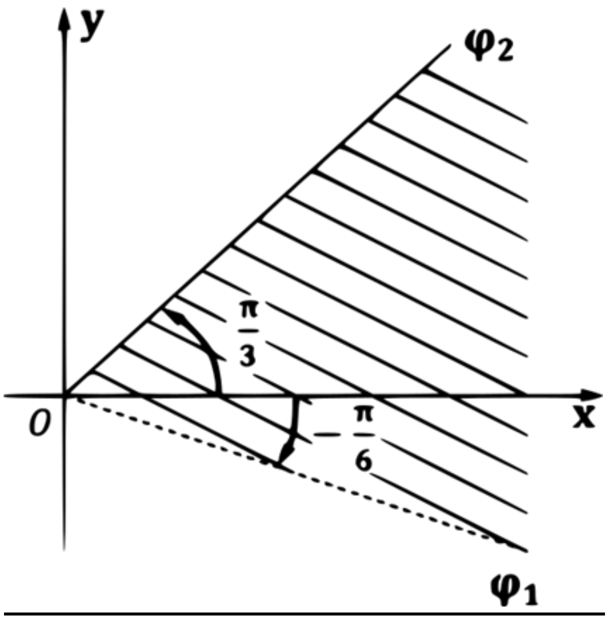
Это множество точек z, расстояние которых от точки $1 - i$ не больше 2, то есть круг с центром в $1 - i$ радиуса 2. Множество точек z таких, что $1 \leq |z - (1 - i)|$, представляет собой внешность круга радиуса 1 с центром в точке $1 - i$. Таким образом, исходное множество – кольцо с центром в точке $1 - i$.



Пример 4.

$-\frac{\pi}{6} < argz \leq \frac{\pi}{3}.$

Множество точек, удовлетворяющих двойному неравенству, совпадает с точками угла с вершиной в начале координат, заключенного между лучами $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$. Луч $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ входит в данное множество, а луч $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ не входит.


y
φ2
π/3
0
x
−π/6
φ1