Z-преобразование

прямое

$$Z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

обратное

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c Z(z) z^{n-1} dz$$

Переход от преобразования Лапласа к Z-преобразованию

$$L(p) = \int_0^\infty x(t)\exp(-pt)dt \simeq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n\tau)\exp(-pn\tau)\tau = \tau \sum_{n=0}^{\infty} x(n\tau)\left(\exp(p\tau)\right)^{-n}$$

обозначим: $\boxed{\exp(p\tau) = z}$ тогда: $\frac{1}{\tau}L(p) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

$$\boxed{p = \frac{1}{\tau}\ln z}$$

Условия существования Z-преобразования

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| < \infty}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| x(n) \right| \left| z^{-n} \right| = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left| x(n) \right| \left| z^{-n} \right|$$

обозначим: $z = \rho \exp\left(j\phi \right)$

$$= x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left| x(n) \right|^{1/n}}{\rho} \right)^{n} \Rightarrow \frac{\left| x(n) \right|^{1/n}}{\rho} < 1$$

$\boxed{\left| x(n) \right| \le a^{n}}$ ← **условие**

$\boxed{\left| z \right| \ge a}$ ← **область сходимости**

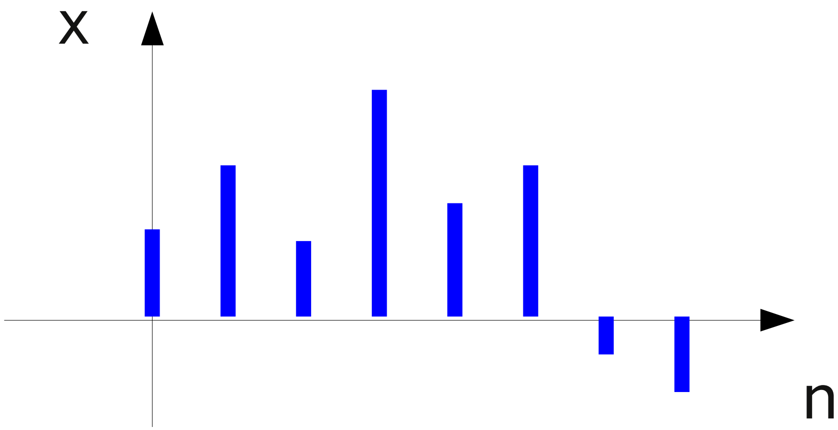
Свойства Z-преобразования

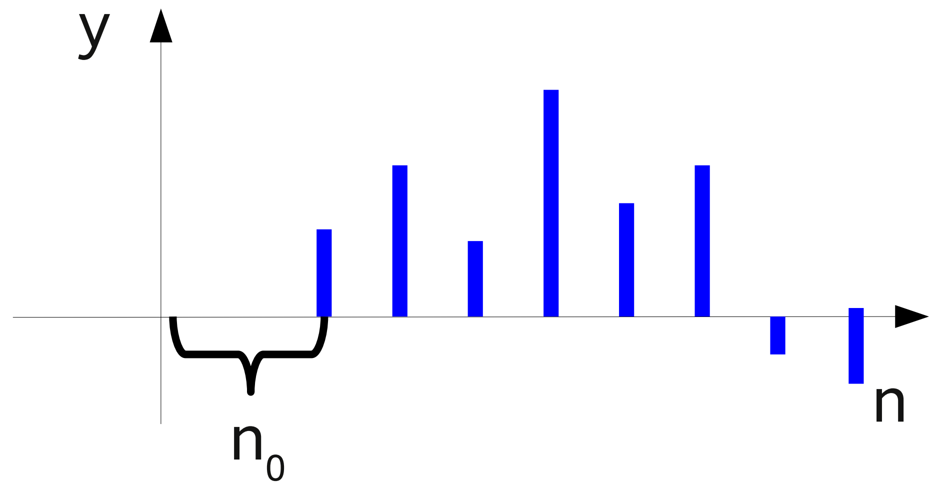
1) Линейность:

$$Z_{x+y}(z) = Z_x(z) + Z_y(z)$$

$$Z_{\alpha x}(z) = \alpha Z_x(z)$$

2) Теорема запаздывания: $y(n) = x(n-n_0)u(n-n_0)$





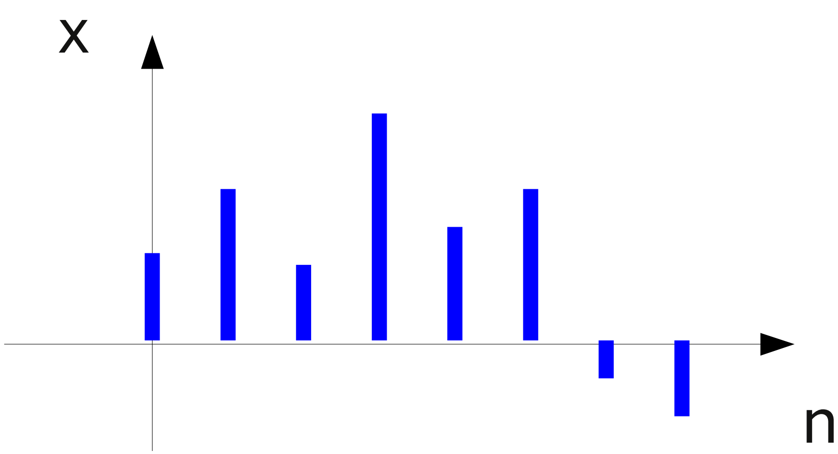
$$Z_y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-n_0)u(n-n_0)z^{-n} =$$

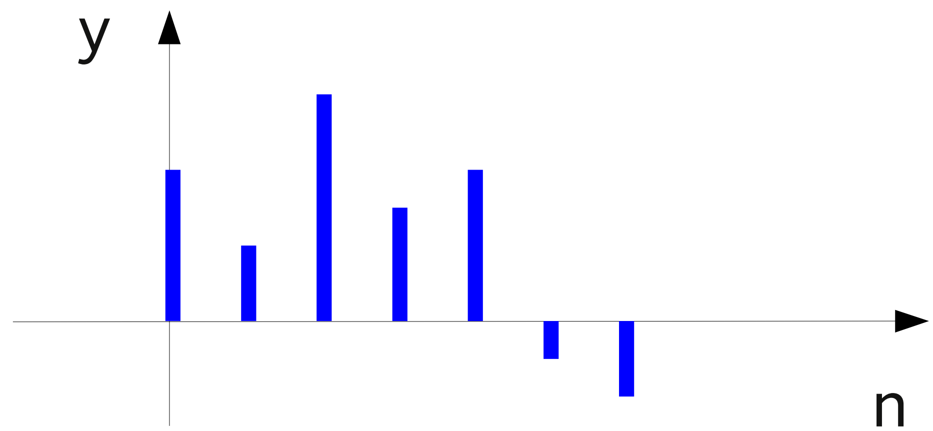
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x(n-n_0)z^{-(n-n_0)}x^{-n_0} = z^{-n_0}Z_x(z)$$

$$\boxed{Z_{x(n-n_0)}(z) = z^{-n_0}Z_{x(n)}(z), \quad n_0 > 0}$$

3) Теорема опережающего сдвига:

$$y(n) = x(n+1)$$





$$Z_y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1) z^{-(n+1)} z =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x(k) z^{-k} z = \left[Z_x(z) - x(0) \right] z$$

$$\boxed{Z_{x(n+1)} = z \left[Z_{x(n)}(z) - x(0) \right]}$$

4) Z-преобразование от сигнала, линейно возрастающего со временем: $y(n) = nx(n)$

$$\frac{dZ_x(z)}{dz} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-n) x(n) z^{-n-1} =$$

$$= -z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n x(n) z^{-n}$$

$$\boxed{Z_{nx(n)} = -z \frac{dZ_x(z)}{dz}}$$

5) Z-преобразование от произведения сигнала на показательную функцию

$$y(n) = x(n)a^n$$

$$Z_y(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

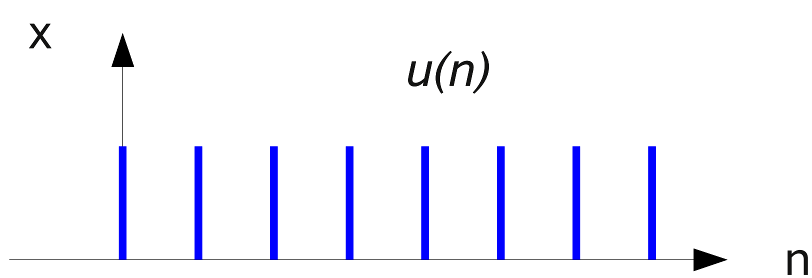
$$\boxed{Z_y(z) = Z_x\left(\frac{z}{a}\right)}$$

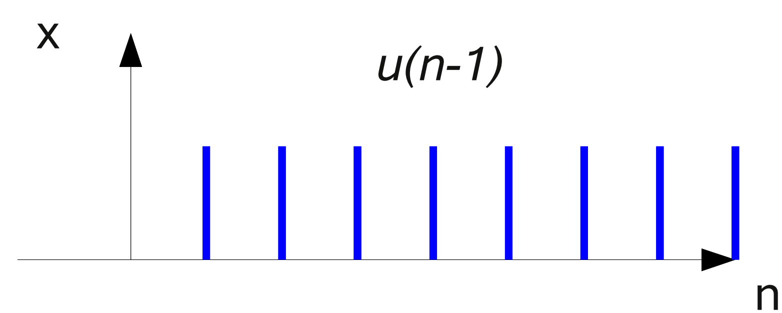
Z-изображение некоторых сигналов

1) единичный импульс:

$$\delta(n) \to Z_\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$$

2) единичный скачок: *u(n)*





$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \Rightarrow Z_u(z) - z^{-1} Z_u(z) = 1$$

$$\boxed{Z_u(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}}$$

3) показательная функция $x(n) = a^n$

$$\boxed{Z_x(z) = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}}}$$

Определение исходных сигналов по изображениям в виде дробно-линейных функций

$$Z_x(z) = \frac{a_i z^i + a_{i-1} z^{i-1} + ... + a_1 z + a_0}{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + ... + b_1 z + b_0} =$$

$$= \frac{(z - A_1)(z - A_2)...(z - A_i)}{(z - B_1)(z - B_2)...(z - B_k)} =$$

(A_n - нули, B_m - полюса)

$$= \frac{M_1 z^{-m_1}}{1 - \left(\frac{z}{B_1}\right)^{-1}} + \frac{M_2 z^{-m_2}}{1 - \left(\frac{z}{B_2}\right)^{-1}} + ... + \frac{M_k z^{-m_k}}{1 - \left(\frac{z}{B_k}\right)^{-1}}$$

$$Z_x(z) = \frac{M_1 z^{-m1}}{1 - \left(\frac{z}{B_1}\right)^{-1}} + \frac{M_2 z^{-m2}}{1 - \left(\frac{z}{B_2}\right)^{-1}} + \ldots + \frac{M_k z^{-m_k}}{1 - \left(\frac{z}{B_k}\right)^{-1}}$$

$$x(n) = M_1 B_1^{n-m_1} + M_2 B_2^{n-m_2} + \ldots + M_k B_k^{n-m_k}$$

Пример расчета

$$Z(z) = \frac{4 - z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$Z = \frac{4 - z}{(z-1)(z-2)} = \frac{M_1}{z-1} + \frac{M_2}{z-2} =$$

$$(M_1 = 4 \ M_2 = -5)$$

$$= \frac{4z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{5z^{-1}}{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^{-1}}$$

$$\boxed{x(n) = 4u(n-1) - 5 \times 2^{n-1}}$$