Кафедра Прикладной математики

Института информационных технологий

РТУ МИРЭА

Дисциплина «Вычислительная математика»

2023-2024 уч.г.

Наполнение курса

➢ **Объем курса**

8 лекционных и 16 практических занятий

➢ **Темы практических занятий**

1. Элементы теории погрешностей
2. Методы приближения и аппроксимация функций
3. Численные методы решений трансцендентных и алгебраических уравнений
4. Численное интегрирование
5. Численные методы линейной алгебры
6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений
7. Численное решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных
8. Быстрое дискретное преобразование Фурье

Практика 6.
Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.1. Задача Коши.
1.2. Классификация приближенных методов решения ДУ.
1.3. Метод изоклин.
1.4. Метод последовательных приближений.
1.5. Одношаговые численные методы. Метод Эйлера.
1.6. Одношаговые численные методы. Метод Рунге-Кутта.

Часть 1.
Задача Коши.

В области теории ДУ О. Коши принадлежат: постановка «задачи Коши», основные теоремы существования решений и методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка (1820-е). Публикация «Дифференциальное и интегральное исчисление» (1831).

Постановка задачи решения нелинейных уравнений.

ДУ первого порядка в каноническом виде называют уравнение следующего вида:

$$F(x,y,y') = 0 \tag{6.1}$$

а дифференциальное уравнение:

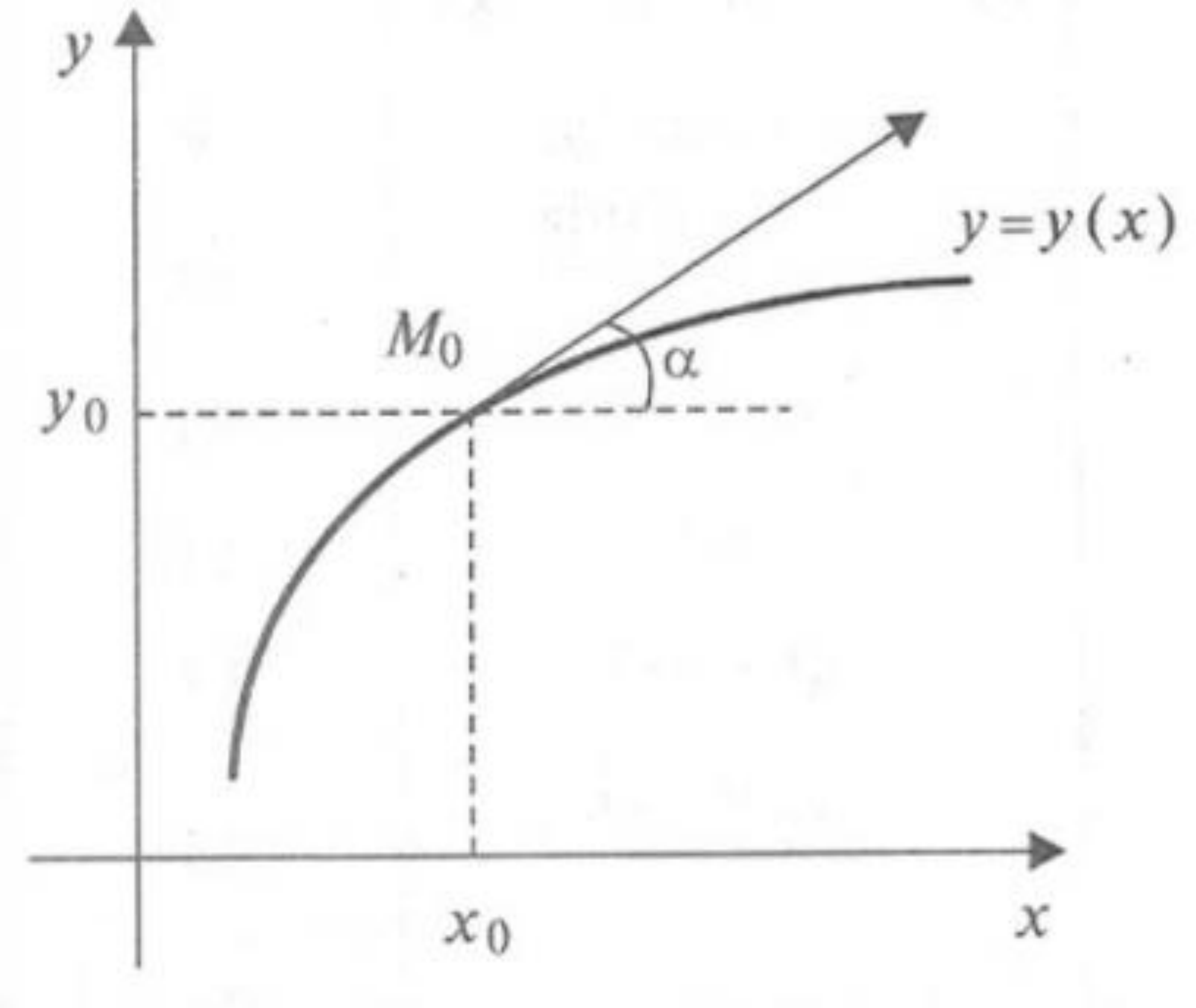
$$y' = f(x,y) \tag{6.2}$$

где $f(x,y)$ – заданная функция двух переменных, называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Задача Коши – нахождение решения уравнения (7.2) в виде функции $y(x)$ с начальным условием:

$$y(x_0) = y_0 \tag{6.3}$$

Графическая интерпретация заключается в том, что требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$, которая проходит через заданную точку $M_0 = M(x_0, y_0)$ при выполнении равенства (6.2).



! *Замечание 6.1*. Доказано существование единственного решения задачи Коши (Теорема Пикара) для дифференциальных уравнений (6.1) и (6.2).

Задача Коши для ДУ n-го порядка.

ДУ n-го порядка в каноническом виде называют уравнение следующего вида:

$$F(x,y,y',y'',\dots y^{(n)}) = 0$$

или:

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\dots y^{(n-1)}) \qquad (6.4)$$

для которого задача Коши состоит в нахождении решения $y = y(x)$, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\dots y_0^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)} \qquad (6.5)$$

здесь y_0, y_0', $y_0^{(n)}$ – заданные числа.

Решением уравнения (6.4) является некоторая функциональная зависимость $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Существует множество решений (частных решений) дифференциального уравнения (7.4), которые могут быть объединены в общее решение вида:

$$y = y(x,C_1,C_2,\dots C_n) \qquad (6.6)$$

здесь,$C_1,C_2,\dots C_n$ – произвольные константы.

Задача Коши для дифференциального уравнения (6.4) n-го порядка может быть сведена к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y'(x) = y_1(x) \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = (y'(x))' = y_1'(x) = y_2(x) \\ \dots \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_{n-2}'(x) = y_{n-1}(x) \\ \dfrac{d^ny}{dx} = y_{n-1}'(x) = f(x, y, y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)) \end{cases} \qquad (6.7)$$

с начальными условиями: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\dots\ y_0^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Пример 6.1. Пример сведения ДУ второго порядка к СДУ первого порядка.

$y'' = f(x,y,y')$ можно записать в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} y'(x) = y_1(x) \\ y_1'(x) = f(x, y, y_1(x)) \end{cases} \qquad (6.8)$$

Методы решений дифференциальных уравнений.

Методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) подразделяются на три основные группы:

1) аналитические методы;
2) графические методы;
3) численные методы.

Задачу нахождения решений дифференциального уравнения называют задачей *интегрирования* дифференциального уравнения.

Часть 2.
Классификация приближенных методов решения ДУ.

Приближенно-аналитические методы.

Приближенно-аналитическими называются методы, позволяющие получить приближенное решение дифференциального уравнения в виде *аналитического выражения*.

Асимптотические методы: базирующиеся на разложении искомого решения в формальный ряд по степеням некоторого малого параметра, последующем усечении ряда и использовании его частичных сумм в качестве приближенных решений (метод малого параметра, возмущений, осреднения, пограничного слоя, методы Ляпунова, Пуанкаре и др.).

Целью асимптотических методов является получение приближенной аналитической формулы, позволяющей качественно оценить поведение решения дифференциального уравнения на некотором конечном интервале изменения независимой переменной.

Метод *последовательных приближений* (*Пикара*), метод *разложения в ряд Тей*лора по независимой переменной, методы *Чаплыгина*, *Ньютона-Канторовича* и др.

Численные методы.

Численные методы предполагают получение приближенного решения дифференциального уравнения в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$ для ряда значений независимой переменной x из интервала $[x_0,x_n]$

Для численного решения краевых задач применяются конечно-разностные методы, проекционные методы Ритца и Галеркина, метод конечных элементов и др.

Численные методы позволяют получить искомое решение $y(x)$ ДУ (7.2) или (7.4) в форме таблицы его приближенных значений $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ для заданной последовательности значений аргумента $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Непрерывный отрезок $[x_0,x_n]$, на котором требуется получить решение ДУ (7.2) заменяют конечной последовательностью дискретных $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, называемых *узлами* (*сетки*). Величина $h = x_i - x_{i-1}$ – расстояние между соседними узлами – называется *шагом интегрирования* (*шагом сетки*).

Функция дискретного аргумента $y[x_i]$, определенная только в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

Численные приближенные методы делятся на два класса: одношаговые и многошаговые.

Одношаговые методы:

$$y_{i+1} = F(y_i) \tag{6.9}$$

т. е. для расчета следующего значения решения y_{i+1} в точке $i+1$ достаточно знать только одно текущее значение y_i в точке i (методы Эйлера, Рунге-Кутта, Кутта-Мерсона, Фельберга и др.).

Многошаговые методы:

$$y_{i+1} = F(y_{i-k}, y_{i-k+1}, \ldots, y_{i-1}, y_i) \tag{6.10}$$

т. е. для расчета следующего значения решения y_{i+1} в точке $i+1$ используется k+1 значений решения y_i, вычисленных на предыдущих шагах. К многошаговым относятся методы Адамса-Мултона, Адамса-Башфорта, Милна, Гира, прогноза-коррекции и т. д.

Часть 3.
Метод изоклин.

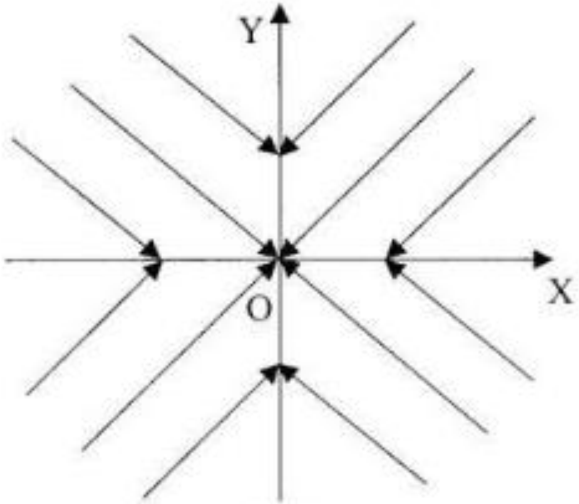
Основы методологии описаны Бернулли и другими математиками XVIII века.
Термин изоклина введен Ж. Массо в книге «Мемуары о графическом интегрировании и его применении» (1880-е) и метод получил свое прикладное значение.
(греч. ἴσος «равный, одинаковый» + κλίνω «наклонять»)

Метод изоклин – это метод графического решения ДУ. Семейство изоклин ДУ (7.2) определяется уравнением (*C* – параметр):

$$F(x,y) = C \qquad (6.11)$$

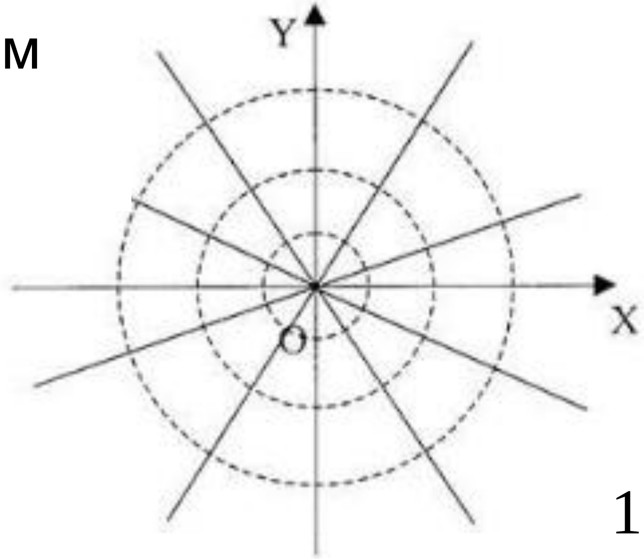
Метод изоклин заключается в построении семейства изоклин с нанесенными на них отрезками касательных.

Множество отрезков касательных образует поле направлений касательных интегральных кривых. Главное соединение касательных дает семейство интегральных кривых.



Пример 6.2. Решение методом изоклин ДУ: $y' = -x/y_0$

Уравнение изоклины (-x/y) = k. В данном случае уравнение изоклины совпадает с уравнением нормали y = (-1/k)x. Запишем несколько уравнений изоклин для фиксированных угловых коэффициентов касательных, если



k = ±∞ $\Rightarrow y = 0$; k= ±1 $\Rightarrow y = \pm x$; k= 0 $\Rightarrow x = 0$.

Поле направлений касательных дает семейство интегральных кривых в виде окружностей.

Часть 4.
Метод последовательных приближений.

Метод итераций относится к классу аналитических методов. Дифференциальное уравнение (6.2) преобразуется в интегральное уравнение с учетом начального условия (6.3):

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)dx \tag{6.12}$$

Действительно, для x=x_0 имеем:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f\big(x, y(x_0)\big)dx = y_0$$

Интегральное уравнение (6.12) позволяет использовать метод последовательных приближений (итераций). Пусть $y(x) = y_0$ является начальным приближением. Используя (6.12), получим первое приближение (итерацию) искомой функции $y(x)$:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx \tag{6.13}$$

Интеграл в правой части (6.13), содержит только переменную x. После нахождения (6.13) будет получено аналитическое выражение приближения $y_1(x)$ как функции переменной x. Далее заменим в правой части уравнения (6.12) $y(x)$ найденным значением $y_1(x)$ и получим второе приближение (итерацию):

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx \tag{6.14}$$

и т.д. В общем случае итерационная формула имеет вид (n=1,2,3…):

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx \tag{6.15}$$

Итерационный процесс по формуле (6.15) дает последовательность функций:

$$y_1(x),\ y_2(x), \dots,\ y_n(x) \tag{6.16}$$

Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока модуль разности значений функций на (k−1)-й и k-й итерациях станет не больше заданной точности ε:

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \varepsilon$$

Часть 5.
Одношаговые численные методы.
Метод Эйлера.

Впервые описан Л. Эйлером (1768) в работе «Интегральное исчисление».
Исторически первый метод численного решения ОДУ 1-го порядка с начальными условиями (задачи Коши). О. Коши использовал этот метод для доказательства существования решения задачи Коши.

Одношаговые методы.

Искомое решение y_i дифференциального уравнения в окрестности текущей точки x=x_i можно представить в виде ряда Тейлора.

Учитывая, что $y(x_i) = y_i$, получим:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \frac{y_i'''}{3!} h^3 + \cdots \qquad (6.17)$$

Далее производится усечение ряда Тейлора. Количество оставшихся членов ряда определяет порядок численного метода и, соответственно, его точность. При этом операция вычисления производных y', y'', y''', ..., $y^{(k)}$ заменяется последовательностью простейших алгебраических операций над значениями функции $f(x,y)$ в нескольких точках интервала $[x_i, x_i+h]$.

Таким образом, исходная дифференциальная задача заменяется конечноразностной. Численный метод задает порядок действий (вычислительную схему) для перехода от уже найденного значения решения y_i (или начального) к следующему y_{i+1}. Разностная вычислительная схема строится на основе рекуррентных соотношений.

Численные методы позволяют найти частное решение ДУ.

Метод Эйлера.

Метод Эйлера состоит в приближенной замене производной в уравнении $y' = f(x,y)$ ее разностным аналогом. Тогда ДУ можно записать в виде:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, y_i) \qquad (6.18)$$

Расчетная формула метода Эйлера имеет следующий вид

$$\boxed{\begin{gathered} y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{gathered}} \qquad (6.19)$$

Результатом численного решения задачи Коши − таблица значений:

n	x	y
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
	...	…
n	x_n	y_n

Локальная погрешность δ_M метода Эйлера, которая присутствует на каждом шаге, определяется разностью между точным значением функции и соответствующим значением касательной ~ h^2

Первый порядок точности: $\delta_M = O(h^2)$

Метод Эйлера модифицированный (прямоугольников).

Расчетные формулы для ДУ в виде (6.4):

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, K_1)$$

$$K_1 = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \qquad (6.20)$$

Второй порядок точности (погрешность):
$\delta_M = O(h^3)$

Пример 6.3. Итерация численного решения ДУ методом Эйлера (а) и модифицированным методом Эйлера (б).

$y' - 2y + x^2 = 1$, $y(0) = 0$. На отрезке [0,1], n=10.

Запишем в каноническом виде (6.4): $y' = f(x,y) = 1 + 2y - x^2 = 0$.

h=(1-0)/10=0.1. $x_1=x_0+h=0+0.1=0.1$.

а): $$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot f(0,1) = 1 + 0.1 \cdot (1 + 2 \cdot 1 - 0^2) = 1.3$$

б): $$K_1 = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = 1 + \frac{0.1}{2} \cdot f(0,1) = 1 + 0.05 \cdot (1 + 2 \cdot 1 - 0^2) = 1.15$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, K_1\right) = 1 + 0.1 \cdot f\left(1 + \frac{0.1}{2}, 1.15\right) = 1.32975$$

Аналогично для следующих шагов 2,3,…,10: $x_2=x_1+h=0.1+0.1=0.2$ и т.д.

Российский
технологический
университет

Часть 6.
Одношаговые численные методы. Метод Рунге-Кутта.

Предложены и развиты К. Рунге (1895) и М. Кутта (1901).

Метод Рунге-Кутта 3-го порядка.

Расчетные формулы для ДУ в виде (6.4):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \qquad (6.21)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(x_i + h, y_i - hK_1 + 2hK_2)$$

Третий порядок точности (погрешность): $\delta_M = O(h^4)$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка.

Усреднение проводится по трём точкам, формула Эйлера на каждом отрезке используется 4 раза: в начале отрезка, дважды в его середине и в конце отрезка.

Расчетные формулы для ДУ в виде (6.4):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \qquad (6.22)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2)$$

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$$

Четвертый порядок точности (погрешность): $\delta_M = O(h^5)$

Пример 6.4. Итерация численного решения ДУ методом Рунге-Кутта 4-го порядка.

$y' - 2y + x^2 = 1$, $y(0) = 0$. На отрезке [0,1], n=10.

Запишем в каноническом виде (6.4): $y' = f(x,y) = 1 + 2y - x^2 = 0$.

h=(1-0)/10=0.1. $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$.

$$K_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 1 + 2 \cdot 1 - 0^2 = 3$$

$$K_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} K_1) = f(0.05, 1.15) = 1 + 2 \cdot 1.155 - 0.05^2 = 3.2975$$

$$K_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} K_2) = f(0.05, 1.164875) = 1 + 2 \cdot 1.164875 - 0.05^2 = 3.32725$$

$$K_4 = f(x_0 + h, y_0 + hK_3) = f(0.1, 1.33275) = 1 + 2 \cdot 1.33275 - 0.1^2 = 3.655$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 1 + \frac{0.1}{6}(3 + 2 \cdot 3.2975 + 2 \cdot 3.32725 + 3.655\ )$$

$y_1 = 1.33175$ Аналогично для следующих шагов 2,3,…,10.