Лекция 13

Тема 4. Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

4.3. Ряд Лорана, его область сходимости

4.4. Примеры разложения функций в ряд Лорана

4.3. Ряд Лорана, его область сходимости

Определение 6. Рядом Лорана называется ряд вида

$$\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

$$+c_n(z-z_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где z_0, c_n – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная.

Областью сходимости ряда Лорана является общая часть областей сходимости рядов: $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$

Областью сходимости первого ряда является внутренность круга $|z-z_0|<R$.

Найдем область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$, сделав замену $t=\frac{1}{z-z_0}$. Полученный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}t^n$ сходится в круге $|t|<\frac{1}{r}$, следовательно, рассматриваемый ряд сходится в области $|z-z_0|>r$.

Если $r<R$, областью сходимости ряда Лорана является кольцо $r<|z-z_0|<R$. Здесь $r\geq 0$, $0\leq R\leq+\infty$.

Теорема 4. Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$ (не исключаются случаи $r=0$ и $R=+\infty$), разлагается в этом кольце единственным образом в сходящийся к ней ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Здесь L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащей внутри данного кольца.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называется *главной частью ряда* Лорана.

Замечание. Так как кольцо является областью аналитичности функции $f(z)$, то на границах кольца имеется хотя бы по одной точке, в которой аналитичность функции нарушается.

На практике при нахождении коэффициентов c_n используют готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций.

4.3. Примеры разложения функций в ряд Лорана

Пример 1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = (z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}}$ в окрестности точки $z_0 = 2$.

Сделаем замену $t = \frac{1}{z-2}$, получим $f(t) = \frac{1}{t^3}e^t$.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

Тогда

$$f(z) = (z-2)^3\left(1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!\,(z-2)^2} + \frac{1}{3!\,(z-2)^3} + \frac{1}{4!\,(z-2)^4} + \right.$$

$$\left. + \ldots\right) = (z-2)^3 + (z-2)^2 + \frac{1}{2!}(z-2) + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!\,(z-2)} + \ldots =$$

$$= (z-2)^3 + (z-2)^2 + \frac{1}{2!}(z-2) + \frac{1}{3!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!\,(z-2)^n}$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 2$, т.е. в кольце

$0 < |z-2| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$.

В указанной области $f(z)$ – аналитическая.

Пример 2. Получить все разложения в ряд Лорана по степеням z $(z_0 = 0)$

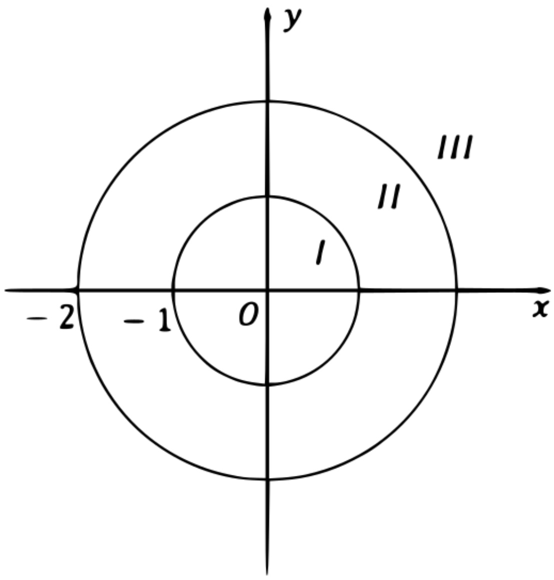
функции $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$.

Определим области аналитичности функции, приравняв знаменатель дроби к нулю: $z^2 + z - 2 = (z+2)(z-1) = 0$, отсюда $z_1 = -2$, $z_2 = 1$. Изобразим на комплексной плоскости возможные области. Для этого проведем окружности с центром в $z_0 = 0$ и радиусом равным расстоянию до ближайшей особой точки. Имеем три «кольца» с центром в точке $z_0 = 0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

1) круг $|z| < 1$,

2) кольцо $1 < |z| < 2$,

3) $2 < |z| < +\infty$ – внешность круга $|z| \leq 2$.



Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей. Для этого представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}.$$

A и B нашли методом неопределенных коэффициентов.

1) Рассмотрим круг $|z| < 1$. Преобразуем $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z}.$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}-\dots\right)-(1+z+z^2+z^3+\dots)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z^3+\dots-1-z-z^2-z^3-\dots=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3-\dots$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$, при этом ряд для функции

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\dots$$

сходится при $|z|<1$, а

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\dots$$

сходится при $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ или $|z|<2$, т.е. внутри круга $|z|<1$ оба ряда сходятся.

2) Рассмотрим кольцо $1<|z|<2$.

Ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ остается сходящимся в этом кольце, т.е. $|z|<2$, а ряд для функции $\frac{1}{1-z}$ расходится при $|z|>1$.

Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right)$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т.е. при $|z|>1$.

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\dots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\dots+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^3}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

3) Рассмотрим $|z|>2$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}.$$

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+\ldots$$

Первый ряд сходится при $|z|>1$, второй – при $|z|>2$.

В кольце $2<|z|<+\infty$ сходятся оба ряда.

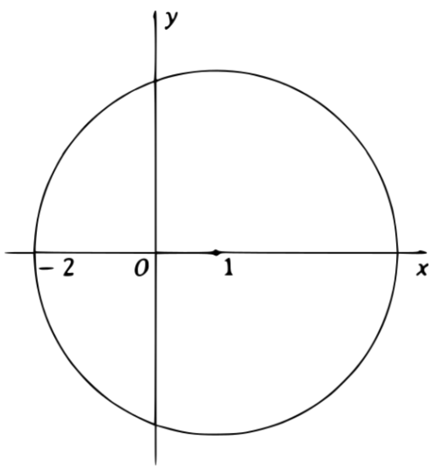
Таким образом, в разных областях функция $f(z)$ представима разными рядами.

Пример 3. Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в окрестности $z_0=1$.

Найдем особые точки функции $f(z)$, для этого приравняем знаменатель к нулю $z^2+z-2=0$,

$z_1=1$, $z_2=-2$, т.е. разложение необходимо осуществить в окрестности особой точки $z_1=1$, т.е. в кольце $0<|z-1|<3$. Число 3 найдено, как расстояние между центром разложения $z=1$ и ближайшей особой точкой $z=-2$ (см. рис.).



Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}.$$

Первое слагаемое – дробь, содержащая $(z-1)^{-1}$. Дальнейшего разложения не требует.

Введем новую переменную $z-1=t$, т.е. $z=t+1$ и перепишем функцию

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}.$$

Используя табличное разложение, получим

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{9}-\frac{(z-1)^3}{27}+\ldots\right]$$

Область сходимости этого ряда $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ или $|z-1|<3$. Таким образом, разложение в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<3$ имеет вид

$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}-\frac{z-1}{9}+\frac{(z-1)^2}{27}-\frac{(z-1)^3}{81}+\ldots$$

Слагаемое $\frac{1}{z-1}$ является степенью $(z-1)^{-1}$ и поэтому не требует дальнейшего разложения.

Пример 4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{2z-3}{z^2-4z+3}$

в окрестности ее особых точек.

Найдем особые точки функции $f(z)$: $z^2-4z+3=0$, $z_1=1$, $z_2=3$.

Получим разложение функции в окрестности точки $z_1=1$. Ближайшая область аналитичности - кольцо $0<|z-1|<2$. Число 2 найдено, как расстояние между центром разложения $z=1$ и ближайшей особой точкой $z=3$.

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z-3}{z^2-4z+3}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-3}.$$

Сделаем замену: $z-1=t$, т.е. $z=t+1$ и перепишем функцию

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2-t}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}$$

Область сходимости этого ряда $0<\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$ или $0<|z-1|<2$.

Получим разложение функции в окрестности точки $z_2=3$. Ближайшая область аналитичности - кольцо $0<|z-3|<2$. Число 2 найдено, как расстояние между центром разложения $z=3$ и ближайшей особой точкой $z=1$.

Сделаем замену: $z-3=t$, т.е. $z=t+3$ и перепишем функцию

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{2}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^n}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^n}{2^n}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-3}$$

Область сходимости этого ряда $0\le\left|\frac{z-3}{2}\right|<1$ или $0<|z-3|<2$.

<u>*Пример 5.*</u> Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=(z-3)^4 cos\frac{1}{z-3}$ в окрестности точки $z_0=3$.

Решение: сделаем замену $t = \frac{1}{z-3}$, получим $f(t) = \frac{1}{t^4} cost$. Используя табличное разложение для функции $\cos t$:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

получим

$$cos\frac{1}{z-3} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \ldots,$$

тогда

$$f(z) = (z-3)^4 \left(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \right.$$

$$\left. + \ldots\right) = (z-3)^4 - \frac{(z-3)^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!\,(z-3)^2} + \ldots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 3$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z = 3$. Его можно определить так: $0 < |z-3| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$. В указанной области $f(z)$ – аналитическая.

Пример 6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z^2-z-6}$

в окрестности точки $z_0 = 0$.

Найдем особые точки функции $f(z)$:

$z^2 - z - 6 = 0$, $z_1 = -2$, $z_2 = 3$.

Области аналитичности функции:

а) $|z| < 2$,

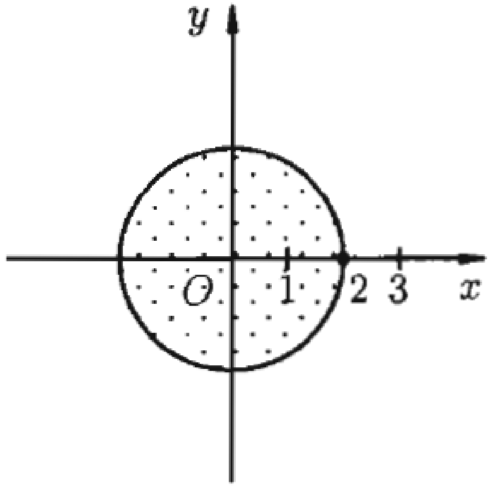
б) $2 < |z| < 3$,

в) $|z| > 3$.

Представим функцию в виде суммы простейших дробей:

$$f(z)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}\right).$$

а) $|z|<2$.



$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\cdots\right)=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Область сходимости ряда: $\left|\frac{z}{3}\right|<1,$ т. е. $|z|<3.$

$$-\frac{1}{z+2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\cdots\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

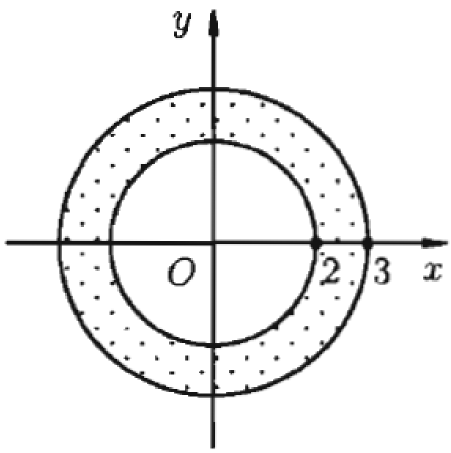
Область сходимости ряда: $\left|\frac{z}{2}\right|<1,$ т. е. $|z|<2.$

Следовательно,

$$f(z)=\frac{1}{z^2-z-6}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}\right)=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

Ряд Лорана функции $f(z)$ обращается в ряд Тейлора.

б) $2<|z|<3$, в этом кольце получим:



$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\cdots\right)=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}},|z|<3$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\cdots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}},\qquad |z|>2$$

Следовательно, $f(z)=\frac{1}{z^2-z-6}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}\right)=$

$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

Выделим в полученном ряду главную и правильную части:

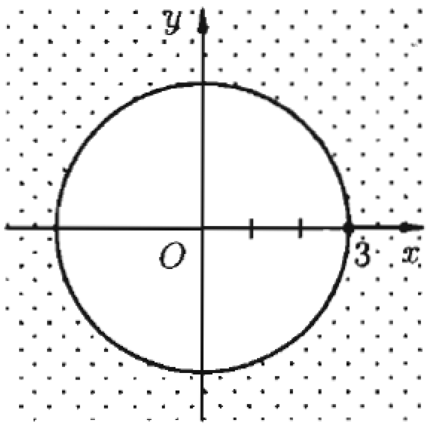
$-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$ - правильная часть,

$-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}$ – главная часть.

в) $|z|>3$.

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}-\cdots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}},|z|>3$$



$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\cdots\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}},|z|>2$$

Следовательно,

$$f(z)=\frac{1}{z^2-z-6}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-(-1)^n\cdot 2^n}{z^{n+1}}$$

В полученном ряду нет правильной части.