Математический анализ-3 семестр

Лекция 12

Тема 3. Интегрирование функций комплексного переменного

3.2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Тема 4. Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

4.1. Числовые ряды с комплексными членами

4.2. Ряд Тейлора

3.2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Теорема 2 (*теорема Коши для односвязной области*) Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D и C – замкнутый контур, принадлежащий области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования и

$$\oint_C f\,(z)dz = 0.$$

Напоминание: область называется односвязной, если любую замкнутую кривую, принадлежащую области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы области.

Доказательство.

$f(z) = u + iv$ – аналитична, следовательно, выполняются условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\oint_C (u + iv)d(x + iy) =$$

$$= \oint_C udx - vdy + i\oint_C udy + vdx =$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{применим Формулу Грина:} \\ \oint_C Pdx + Qdy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \end{matrix}\right\} =$$

$$= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Определение 2. Линия называется *связной*, если из любой ее точки можно пройти по этой линии в любую другую ее точку.

Определение 3. *Порядком связности* ограниченной области D называется число связных частей, на которое разбивается ее граница.

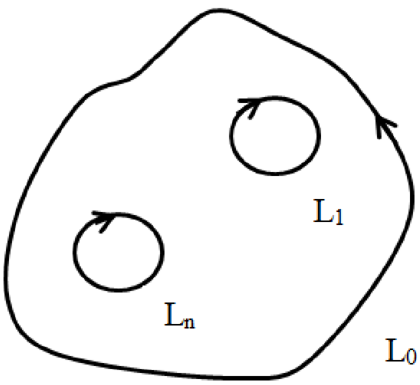
Например, круг $|z| \le 1$ – односвязная область, а кольцо

$1 \le |z| \le 2$ – двусвязная область.

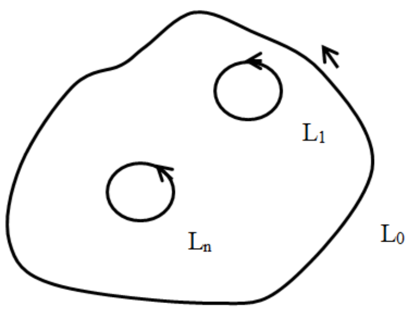
Теорема 3 *(теорема Коши для многосвязной области).*

Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кривыми $L_0, L_1, \ldots, L_n$, то

$\oint_L f\,(z)dz = 0, L = L_0 + L_1 + \cdots + L_n$ при условии, что обход всех контуров совершается так, что область $\overline{D}$ остается с одной стороны (слева).



<u>*Следствие.*</u> Если все контуры проходить в одном направлении (например, против часовой стрелки), то $\int_{L_0} f\,(z)dz = \int_{L_1} f\,(z)dz + \cdots + \int_{L_n} f\,(z)dz,$



т.е. интеграл по внешнему контуру L_0 равен сумме интегралов по внутренним контурам.

Теорема 4 *(интегральная формула Коши)*

Если $\boldsymbol{D}$ – односвязная или многосвязная область, ограниченная контуром $\boldsymbol{L}$, и $\boldsymbol{f(z)}$ – однозначная и аналитическая в $\overline{\boldsymbol{D}}$ функция, тогда для любой точки $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{D}$ справедлива формула

$$\boldsymbol{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz}.$$

Теорема 5. Если функция $\boldsymbol{f(z)}$ аналитична в области $\boldsymbol{D}$ и непрерывна в $\overline{\boldsymbol{D}}$, то во всех внутренних точках области у функции $\boldsymbol{f(z)}$ существуют производные любого порядка, причем справедлива формула

$$\boldsymbol{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz},$$

где $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{D}$, а $\boldsymbol{L}$ – граница области $\boldsymbol{D}$.

Этой формулой можно пользоваться для вычисления некоторых интегралов.

Примеры.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_L \frac{e^z}{z^2-4z}dz$, если

1) $L: |z-1| = \frac{1}{2}$,

2) $L: |z-1| = 2$,

3) $L: |z-1| = 4$.

Решение:

1) $L: |z-1| = \frac{1}{2}$. В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z-1| = \frac{1}{2}$, подынтегральная функция аналитическая, т. к. точки, в которых знаменатель обращается в нуль $z_1 = 0$, $z_2 = 4$ не входят в область. Тогда по теореме Коши

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^2-4z}dz = 0.$$

2) $L: |z-1| = 2$. Внутри области, ограниченной окружностью $|z-1| = 2$, находится одна точка $z_1 = 0$, в которой знаменатель обращается в ноль. Перепишем интеграл в виде

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2-4z} dz = \int_{|z-1|=2} \frac{\frac{e^z}{z-4}}{z} dz.$$

Функция $f(z) = \frac{e^z}{z-4}$ является аналитической в данной области.

Применяя интегральную формулу Коши $(z_0 = 0)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

получим

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2-4z} = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-4}\right) \Big|_{z=0} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

3) $L: |z-1| = 4$. В области, ограниченной окружностью $|z-1| = 4$, имеем две точки $z_1 = 0$, $z_2 = 4$ в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Применить сразу интегральную формулу Коши нельзя. Решить задачу можно двумя способами.

1 способ. Разложим дробь $\frac{1}{z^2-4z}$ на простейшие, получим

$$\frac{1}{z^2-4z} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z}.$$

Найдем A и B любым способом (например, методом неопределенных коэффициентов). $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, т.е.

$$\frac{1}{z^2-4z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z-4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z}.$$

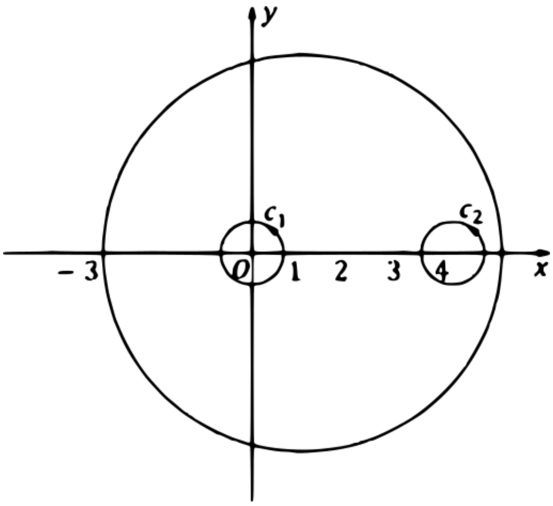
Подставляя в интеграл, получим

$$\int_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z(z-4)} = \frac{1}{4} \int_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z-4} dz - \frac{1}{4} \int_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z} dz =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2\pi i (e^z)\,|_{z=4} - \frac{1}{4} \cdot 2\pi i (e^z)\,|_{z=0} = \frac{2\pi i}{4}(e^4 - 1) = \frac{\pi i (e^4 - 1)}{2}.$$

2 способ. Построим окружности c_1 и c_2 с центром в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 4$ настолько малых радиусов, чтобы окружности c_1 и c_2 не пересекались и целиком лежали в круге $|z - 1| \leq 4$. В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z - 1| = 4$, c_1, c_2 подынтегральная функция аналитична. Тогда по теореме 3 Коши для многосвязной области (см. рис.)

$$\int_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z(z-4)} dz = \int_{c_1} \frac{e^z}{z(z-4)} dz + \int_{c_2} \frac{e^z}{z(z-4)} dz.$$



К каждому интегралу в правой части применим интегральную формулу Коши. Получим

$$\int_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z(z-4)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-4}\right)\,|_{z=0} + 2\pi i \left(\frac{e^z}{z}\right)\,|_{z=4} =$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi i \frac{e^4}{4} = \frac{\pi i (e^4 - 1)}{2}.$$

Получен тот же результат, что и первым способом.

<u>*Пример 2*</u>. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} \frac{sin2z}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3} dz$

Решение: точка $z_0 = \frac{\pi}{4}$ принадлежит кругу $|z| < 1$. Применим интегральную формулу Коши, $f(z) = sin2z$

$$\int_{|z|=1} \frac{sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (sin2z)'' \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = 4\pi i(-sin2z) \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = -4\pi i.$$

4. Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

4.1. Числовые ряды с комплексными членами

Определение 1. Последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}, n = 1,2, \ldots,$ называется сходящейся, если сходятся соответствующие последовательности действительной части $\{x_n\}$ и мнимой части $\{y_n\}$.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}, n = 1,2, \ldots.$ Составленное из членов этой последовательности выражение

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

называется *числовым рядом с комплексными членами*, z_n – общий член ряда.

Сумма $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ называется n-ой частичной суммой ряда. Частичные суммы образуют новую числовую последовательность $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$.

Определение 2. Числовой ряд с комплексными членами называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.

Числовой ряд называется *расходящимся*, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Исследование ряда с комплексными членами сводится к исследованию двух вещественных рядов на основании следующего утверждения.

Сходимость ряда с комплексными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ к сумме $S = A + iB$ равносильна сходимости двух вещественных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ соответственно к суммам A и B.

Определение 3. Ряд с комплексными членами называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n + iy_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2}$.

Теорема 1. Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам ряд с комплексными членами.

4.2. Ряд Тейлора. Коэффициенты ряда. Разложение функции, аналитической в круге, в степенной ряд

Пусть дана последовательность функций комплексной переменной $u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z), \dots$, определенных на некотором множестве D комплексной плоскости: $D \subset C$.

Выражение вида $u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется *функциональным* рядом с комплексными членами.

Определение 4. Множество значений переменной z, при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Определение 5. Ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

где c_n и z_0 – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная, называется *степенным рядом* в комплексной области.

При $z_0 = 0$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

Теорема 2 (теорема Абеля). Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n =$$

$$= c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$. Тогда этот ряд *абсолютно* сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0| = R$.

Следствие 1. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ расходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то этот ряд расходится в области

$|z - z_0| > |z_1 - z_0| = R$, т.е. вне круга $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0| = R$.

Следствие 2. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ существует число $R, 0 \leq R \leq +\infty$, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда, такое, что внутри круга $|z - z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга, т.е. в области $|z - z_0| > R$, ряд расходится.

Если R – радиус сходимости, то область $|z - z_0| < R$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. В точках границы $|z - z_0| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае требуется дополнительное исследование.

Теорема 3. Функция $f(z)$, аналитичная в круге $|z - z_0| < R$, разлагается в нем единственным образом в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, коэффициенты которого c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ (n = 0, 1, \ldots),$$

где L – окружность с центром z_0, целиком лежащая в круге сходимости ряда $|z - z_0| < R$.

Предполагается, что окружность проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Справедливы следующие разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R_{\text{сх}} = \infty$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R_{\text{сх}} = \infty$

$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R_{\text{сх}} = \infty$

$ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$, $R_{\text{сх}} = 1$

$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots$, $R_{\text{сх}} = 1$

при $\alpha = -1$

$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $R_{\text{сх}} = 1$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $R_{\text{сх}} = 1$.

Пример.

Разложить по степеням $(z-3)$ функцию $f(z) = \frac{1}{5-3z}$.

Сделаем замену $t = z - 3$, выразим $z = t + 3$ и подставим в функцию $f(z)$

$$f(t) = \frac{1}{5-3(t+3)} = \frac{1}{-4-3t} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{4}t}$$

Разложим полученную функцию в точке $z = 3$ $(t = 0)$. Воспользуемся стандартным разложением, подставляя вместо $z \to \frac{3}{4}t$:

$$f(t) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{4}t} = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{4}t + \left(\frac{3}{4}t\right)^2 - \ldots + (-1)^n \left(\frac{3}{4}t\right)^n + \ldots\right).$$

Сделаем обратную замену

$$f(z) = -\frac{1}{4}\left[1 - \frac{3}{4}(z-3) + \frac{3^2}{4^2}(z-3)^2 - \ldots + (-1)^n \frac{3^n}{4^n}(z-3)^n + \ldots\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{4^{n+1}} (z-3)^n$$

Этот ряд сходится при условии $\left|\frac{3}{4}(z-3)\right| < 1$, или $|z-3| < \frac{4}{3}$, т.е. радиус сходимости ряда $R = \frac{4}{3}$.