ДИСЦИПЛИНА	**Модели и методы теории оптимального управления**
	(полное наименование дисциплины без сокращений)
ИНСТИТУТ	**информационных технологий**
КАФЕДРА	**прикладной математики**
	(полное наименование кафедры)
ВИД УЧЕБНОГО	**Методические указания к выполнению практических работ**
МАТЕРИАЛА	(в соответствии с пп.1-11)
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	**Пронина Елена Николаевна**
	(фамилия, имя, отчество)
СЕМЕСТР	**1, 2023-2024**
	(указать семестр обучения, учебный год)

Практическое занятие 1. Экстремум функций конечного числа переменных. Безусловный экстремум

Необходимый теоретический материал (см. лекция 1, учебное пособие стр. 11-17)

1. Понятие максимума и минимума функции. Экстремум абсолютный и относительный.
2. Необходимое условие экстремума для дифференцируемой функции, теорема Ферма:
$$df(\mathbf{x}^*) = 0 \leftrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = x^*} = 0.$$
3. Достаточное условие экстремума:
в стационарной точке $\mathbf{x}^*$ локальный максимум, если $d^2f(\mathbf{x}^*) < 0$;
в стационарной точке $\mathbf{x}^*$ локальный минимум, если $d^2f(\mathbf{x}^*) > 0$.
Исследование знака второго дифференциала может быть выполнено путем приведения квадратичной формы к каноническому виду. В случае симметричной матрицы Гессе (матрицы вторых производных) знак квадратичной формы определяется по критерию Сильвестра.
Если все угловые миноры матрицы положительны – матрица Гессе и квадратичная форма положительно определены (в стационарной точке – минимум),
когда же знаки угловых миноров чередуются, причем минор первого порядка – отрицательный, матрица Гессе и квадратичная форма отрицательно определены (в стационарной точке – максимум),
в третьем случае, исключающем первые два – знак матрицы Гессе и квадратичной формы не определен, экстремума нет, стационарная точка – седловая.
4. Обобщение понятий максимума и минимума – точная нижняя (inf) и точная верхняя границы (sup)
5. Абсолютный (глобальный экстремум). Теорема Вейерштрасса. Функция, дифференцируемая в ограниченной и замкнутой области, достигает своих наибольшего и наименьшего значений в этой области, или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Задания

1. Найдите минимум функции $f\ (x_1,\ x_2)$ и ее минимальное значение, $f(x_1, x_2) = \left|1 - \exp(x_1^2 + x_2^2 - 1)\right|$.

Замечание. Функция f не дифференцируема: в точках окружности $x_1^2+x_2^2=1$ первые производные функции претерпевают разрыв, следовательно, нарушены условия теоремы Ферма! Стационарная точка единственная – начало координат, однако она не является экстремальной, значение функции $f\,(0,0) = 1 - e^{-1} > \min f = 0$.

2. Покажите, что функция $f(x_1, x_2) = [1 + exp(x_2)]cos(x_1) - x_2 exp(x_2)$ имеет бесчисленное множество максимумов и ни одного минимума.
Постройте график функции $f(x_1, x_2)$ в программном пакете MathCAD. Существует ли аналог подобной функции на плоскости?

Замечание: для того, чтобы показать, что максимумы являются абсолютными, глобальными, здесь следует, кроме стационарных точек, рассмотреть поведение функции на бесконечности.

3. Найдите нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) функции
$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)e^{-(x+2y+3z)}$ в области $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Замечание: задача на условный экстремум, область определения ограничена, но не является компактной (не замкнута), по этой причине теорема Вейерштрасса не выполняется!
Здесь целесообразно перейти к функции одного аргумента: $f(u) = ue^{-u}$, где *$u=x+2y+3z$.*

Практическое занятие 2. Условный экстремум, ограничения типа равенств и неравенств. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Условия Каруши-Куна-Таккера

Теоретический материал: лекция 2, учебное пособие стр. 18-34
1. Постановка задачи на условный экстремум с ограничениями типа равенств, принципиально, что число ограничений менее числа независимых переменных.
2. Редукция задачи на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум для функции Лагранжа, неопределенные множители Лагранжа
3. Необходимые и достаточные условия экстремума функции Лагранжа
4. Содержательная интерпретация множителей Лагранжа
5. Обобщенная функция Лагранжа. Условие регулярности, $\lambda_0 \neq 0$
6. Теорема Каруши-Куна-Таккера.
7. Условие стационарности функции Лагранжа
8. Условия дополняющей нежесткости
9. Условия неотрицательности
10. Геометрическая интерпретация теоремы Каруши-Куна-Таккера

Задания
1. Данное положительное число a разложите на n положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.
2. С помощью метода неопределенных множителей Лагранжа решите задачу потребительского выбора при ограничениях на суммарный доход (модель Стоуна). Максимизируется целевая функция предпочтений (функция полезности):

$$u(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}(x_i-b_i)^{a_i}\to\max_{\mathbf{x}},$$

где a и b – заданные параметры, $b_i\geq 0$, $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$. Предполагается, что b_i – минимально необходимое количество i-го блага, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора.

Суммарный доход D полностью расходуется на приобретение набора предметов потребительской корзины в количествах x_1, x_2, …, x_n по фиксированным ценам p_1, p_2, …, p_n соответственно, то есть выполняется ограничение $\sum_i p_i x_i=D,\ \ x_i\geq 0,\ i=1,2,...,n$, где p_i, D – заданные параметры. Коэффициенты a_i характеризуют относительную «ценность» благ для потребителя. Получите типичные функции спроса на различные товары (зависимости между объемами предметов потребительской корзины, доходом и ценой). В частности, рассмотрите функцию спроса, когда все b_i = 0 и все $a_i=1/n$.

Указания.

1)*Запишите функцию Лагранжа и условия стационарности по x и по λ.*
2)*При дифференцировании степенной функции используйте следующее соотношение:* $\frac{\partial u}{\partial x_i}=a_i\frac{u}{x_i-b_i}$.
3)*Из условия стационарности функции Лагранжа выразите количество i-го блага* x_i
4)*Каждое i-е уравнение умножаем на* λp_i *и выполняем суммирование полученных результатов по i, с целью использования ограничения на суммарный доход D и ограничения* $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.
5)*Функция спроса в общем случае связывает количества приобретаемых благ с ценами. Ее можно интерпретировать следующим образом: в начале приобретается минимально необходимое количество каждого блага* b_i, *затем рассчитывается остающаяся сумма денег, остаток распределяется пропорционально «весам» важности* a_i. *Разделив количество денег на цену* p_i, *получаем дополнительное, сверх минимума, приобретаемое количество i-го блага и добавляем его к* b_i.
6)*В частном случае, когда все* $b_i=0$, *а все* a_i *равны между собой,* $x_i=D/(np_i)$. *Иначе, доход делится на n равных частей и спрос на i-й товар рассчитывается как частное от деления полученной суммы денег на его цену. В данном случае спрос растет при росте дохода с эластичностью, равной единице, и уменьшается с ростом цены с эластичностью, равной минус единице. В результате каждый товар в этой модели является нормальным и ценным. Кроме того, спрос растет до бесконечности при бесконечном росте*

дохода – в этом смысле каждый товар выступает в качестве предмета роскоши.

3. Решите задачу нелинейного программирования, в которой требуется минимизировать целевую функцию $f(x_1, x_2) = x_2$ при ограничениях:

$$g_1(x_1, x_2) = -(x_1 + 1)^2 - x_2^2 + 4 \geq 0,$$
$$g_2(x_1, x_2) = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 + 4 \geq 0,$$
$$g_3(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 2 \geq 0.$$

Дайте геометрическую интерпретацию теоремы Каруша-Куна-Таккера для данной задачи.
Какие ограничения задачи являются активными?
Какой множитель Лагранжа принимает нулевое значение?
Покажите, что точка (x_1*,x_2*,x_3*,λ*) является седловой точкой функции Лагранжа: $L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$.

Домашнее задание:

1. Методом неопределенных множителей Лагранжа найти прямоугольник максимальной площади S при заданном ограничении на периметр P.

2. Опишите разнообразные формы поведения спроса на различные товары для модели с функцией предпочтения $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta-\alpha}(x_1 + \beta - \alpha)^{-\beta}$,
где α и β – параметры. Получите для задачи Стоуна типичные функции спроса, как для предметов первой необходимости x_1, так и для предметов роскоши x_2.

Практическое занятие 3. Введение в вариационное исчисление: техника вычисления вариаций функции и функционала, уравнение Эйлера-Лагранжа (общий случай)

Теоретический материал: лекция 3, учебное пособие стр.35-57

1. Понятие вариации функции: $\delta \bar{y} = y(x) - \bar{y}(x)$
2. Вариация функционала – главная линейная относительно вариации его аргумента часть приращения функционала, $I[\bar{y} + \delta y] - I[\bar{y}] \approx I[\bar{y}(x), \delta y(x)] = \delta I$
3. Вариационная производная, $\delta I = \int\limits_{x_0}^{x_1} A(x)\delta y(x)dx$, $A(x) = \dfrac{\delta I}{\delta y}$
4. Техника вычисления вариаций совпадает с техникой вычисления дифференциалов и производных
5. Простейшая задача вариационного исчисления: $I[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \to \min, y(x) \in C_1[x_0, x_1], y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$

Необходимое условие экстремума функционала: $\delta I=0$, $\dfrac{\delta I}{\delta y}=0$ → уравнение Эйлера-Лагранжа, $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{\bar{y}(x)}=0\cdot$

Свойства вариаций:

1. Производная от вариации равна вариации от производной, $\dfrac{d}{dx}\ \delta y\ =\delta\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.
2. Вариация от интеграла равна интегралу от вариации, $\delta\int\limits_{x_0}^{x_1} y(x)dx=\int\limits_{x_0}^{x_1}\delta y(x)dx$.
3. Функционал $L[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\ p(x)y(x)+q(x)y'(x)\ dx$ является линейным, то есть удовлетворяет условиям:
$L[c\cdot y(x)]=cL[y(x)],\quad L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)]$.

Упражнение

Найдите первую вариацию и вариационную производную функционалов: $I(y)=\cos(y(1))$; $I(y)=\cos(y(1))+\sin(y(6))$; $I[y(x)]=\int\limits_1^2 ydx$;

$I[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}(xy'^2+y^3e^{2x})dx$.

Задания

1. Найдите эйлерову экстремаль функционала $\int\limits_0^1(4y-y'^2+12x^2y')dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=1$, $y(1)=4$.

2. Найдите эйлерову экстремаль функционала $\int\limits_0^{\pi/4}(y'^2-4y^2-2xe^xy)dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0$, $y(\pi/4)=0$.

3. Покажите, что в классе гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=0,\ \ y(\dfrac{\pi}{2})=1$, функционал $I[y(x)]=\int\limits_0^{\pi/2}(y'^2-y^2)dx$ достигает своего минимума на функции $\bar{y}(x)=\sin(x)$. Вычислите $I[\bar{y}(x)]$.

Запишите два уравнения – уравнение второго порядка в общем случае и его первый интеграл в частном случае, когда подынтегральная функция не зависит от x, сравните результаты.

4. Найдите экстремаль простейшего функционала для случая $F = x^n y'^2$ и докажите, что при $n \geq 1$ две точки, лежащие по разные стороны от оси y, не могут быть соединены экстремалью.

Указания.

В данной задаче уравнение Эйлера допускает понижение порядка, $F_y = 0$, следовательно, $F_{y'} = const$. Иначе говоря, приходим к дифференциальному уравнению не второго, а первого порядка: $x^n y' = C_1$, которое является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется. Его общее решение будет зависеть от двух постоянных C_1 и C_2, для их определения в условии задачи предлагаются две точки плоскости, лежащие по разные стороны от оси y, другими словами, ординаты этих точек совпадают, а абсциссы отличаются знаком. Подстановка таких координат в общее решение дифференциального уравнения приводит при $n \geq 1$ к несовместной алгебраической системе уравнений.

5. Найдите значение простейшего функционала для случая $F = y + xy',\ x_0 = y_0 = 0,\ x_1 = y_1 = 1.$

Указание. Представьте подынтегральное выражение Fdx в виде:

$F \cdot dx = y \cdot dx + x \cdot y' \cdot dx = y \cdot dx + x \cdot dy = d(x \cdot y)$.

Интегрируется функция, представимая в виде полного дифференциала, поэтому значение функционала определяется только граничными условиями, $I[y(\cdot)]^* = 1$.

Практическое занятие 4. Введение в вариационное исчисление – продолжение, задачи физического и геометрического содержания

Теоретический материл: лекция 4, учебное пособие стр. 58-63

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \to \min, y(x) \in C_1, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Bigg|_{\bar{y}(x)} = 0 \Leftrightarrow F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

$$F(y, y') \to y'F_{y'} - F = const$$

Задания

1. Рассмотрите принцип стационарного действия Гамильтона (принцип наименьшего действия), согласно которому материальная частица движется так, что интеграл действия $L = \int_{t_1}^{t_2} (W - U)dt$ принимает стационарное значение. Кинетическая энергия материальной точки определяется выражением $W = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$, потенциальная энергия равняется $U = \frac{1}{2} k y^2$.

Получите для пружинного маятника уравнения движения Лагранжа и закон сохранения энергии: *W*+*U*=*const.*

2. Решите задачу геометрической оптики при условии, что скорость света пропорциональна ординате,

$$T[y(x)] = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx \to \min, y(0)=0, y(1)=1\cdot$$

3. Решите задачу о наименьшей поверхности вращения: $I[y(x)] = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min,\ \ y(-1)=y(1)=1$

4. Обратная задача вариационного исчисления. Рассмотрите вертикальное движение материальной точки с массой *m* в поле тяготения Земли. Обозначьте через *y* расстояние, измеряемое от начальной точки, через *t* – время от начала движения. Из второго закона Ньютона следует, что траектория движения *y*(*t*) должна удовлетворять уравнению: $y''+g=0$, где *g* – ускорение свободного падения. Существует ли функция *F* (*t*, *y*, *y*′) такая, что относящееся к ней дифференциальное уравнение Эйлера-Лагранжа совпадает с уравнением $y''+g=0$?

5. Решите изопериметрическую задачу,

$$\mathrm{S}[y(x)] = \int_0^2 y\,dx \to \max, y(0)=0, y(2)=0, \int_0^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \pi\cdot$$

Указание: примените метод неопределенных множителей Лагранжа, функционал Лагранжа запишите в виде:

$$L[y(x)] = \int_0^2 \left[y+\lambda\ \sqrt{1+y'^2}\ \right]dx - \lambda\pi\cdot$$

Изопериметрическая задача (общий случай)

Постановка задачи. Найти экстремали функционала: $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} L(x,y,y')dx$ при условиях $\int_{x_0}^{x_1} G(x,y,y')dx = C$, $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$

Рассмотрим функционал Лагранжа

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \{L\,(x,y,y\,') + \lambda[G\,(x,y,y\,') - C]\}dx\,,$$

здесь λ – параметр, подлежащий определению, неопределенный множитель Лагранжа.

Когда изопериметрическое условие выполняется, функционал Лагранжа *I*[*y*] совпадает с исходным функционалом *J*[*y*], в результате исходная вариационная задача на условный экстремум для функционала *J*[*y*] при изопериметрическом условии сводится к задаче на безусловный экстремум для функционала Лагранжа *I*[*y*].

Запишем подынтегральную функцию функционала Лагранжа $I[y]$:

$$\Phi(x, y, y'; \lambda) = L(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')$$

и вычислим для нее производные:

$$\frac{\partial \Phi(x, y, y'; \lambda)}{\partial y}, \frac{\partial \Phi(x, y, y'; \lambda)}{\partial y'}, \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi(x, y, y'; \lambda)}{\partial y'}\right).$$

Составим уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала $I[y]$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi(x, y, y'; \lambda)}{\partial y'}\right) = \frac{\partial \Phi(x, y, y'; \lambda)}{\partial y}.$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение второго порядка. Общее решение: $y = y(x, C_1, C_2; \lambda)$.

Определяем константы интегрирования, используя граничные условия и получаем систему для определения постоянных С: $\begin{cases} y(x_0, C_1, C_2; \lambda) = y_0 \\ y(x_0, C_1, C_2; \lambda) = y_1 \end{cases}$

Они выражаются через неопределенный множитель Лагранжа λ:

$C_1 = C_1(x_0, x_1, y_0, y_1; \lambda)$, $C_2 = C_2(x_0, x_1, y_0, y_1; \lambda)$.

Для определения значения λ подставляем найденные значения констант в общее решение:

$$y_*(x; \lambda) = y(x, C_1(x_0, x_1, y_0, y_1; \lambda), C_2(x_0, x_1, y_0, y_1; \lambda))$$

и интегрируем изопериметрическое условие

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y_*(x, \lambda), y'_*(x, \lambda)dx = C(\lambda),$$

Находим значение λ из изопериметрического условия $C(\lambda) = C$.

Выписываем уравнение экстремали, подставляя в общее решение $y(x, C_1, C_2, \lambda))$ найденные значения постоянных.

Замечание. Если функции $L(x,y,y')$ и $G(x,y,y')$ не зависят от первого аргумента, то уравнение Эйлера-Лагранжа допускает понижение порядка и имеет первый интеграл: $y'\left(\frac{\partial \Phi(y, y'; \lambda)}{\partial y'}\right) - \Phi(y, y'; \lambda) = C_1$.

Задача Дидоны. Найти экстремали функционала

$J[y] = \int_0^1 y(x)dx$, при условиях $\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}dx = 2$, $y(0) = y(1) = 0$. Здесь граничные условия отличаются от задания.

Подынтегральные функции L и G не зависят от переменной x, поэтому уравнение Эйлера-Лагранжа допускает понижение порядка и имеет первый интеграл:

$$y'\frac{\partial}{\partial y'}\left(y + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right) - y + \lambda\sqrt{1+y'^2} = C_1 \text{ или } y' = \sqrt{\frac{\lambda^2}{(y+C_1)^2} - 1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{(y+C_1)dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y+C_1)^2}} = dx$$

Интегрируя, получим

$$x = \int \frac{(y + C_1)dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y + C_1)^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\lambda^2 - (y + C_1)^2)}{\sqrt{\lambda^2 - (y + C_1)^2}} = -\sqrt{\lambda^2 - (y + C_1)^2} + C_2$$

Таким образом, общее решение уравнения Эйлера-Лагранжа $y(x, C_1, C_2; \lambda) = \lambda^2 - (x - C_2)^2 - C_1$. Это уравнение окружности радиуса λ, с центром в точке с координатами (C_2, C_1).

Используя граничные условия, получаем систему для определения постоянных

$0 = \lambda^2 - (0 - C_2)^2 - C_1$, $0 = \lambda^2 - (1 - C_2)^2 - C_1 \Leftrightarrow C_2 = 1/2$, $C_1^2 = \lambda^2 - 1/4$.

Подставляем найденные значения констант в общее решение уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$y_*(x, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}}.$$

Заметим, что для определенности выражения должно выполняться неравенство $\lambda^2 > 1/4$.

Вычисляем производную: $y'_*(x, \lambda) = -\frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}}$.

Интегрируем: $\int_0^1 \sqrt{1 + {y_*'}^2}dx = \lambda \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = 2\lambda arcsin\frac{1}{2\lambda}$. Из изопериметрического условия следует, что $2\lambda arcsin\frac{1}{2\lambda} = 2$ или $\lambda sin\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$.

Полученное трансцендентное уравнение решаем численными методами, оно имеет единственный корень $\lambda_0 \approx 0{,}528$. Таким образом, искомая экстремаль Эйлера – дуга окружности: $y_*(x, \lambda_0) = \sqrt{\lambda_0^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{1}{4}}$.

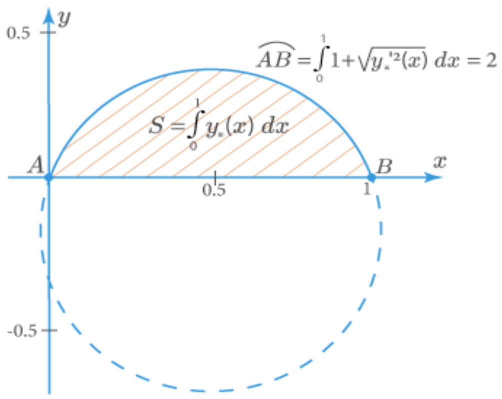


Рис.4.3. Решение изопериметрической задачи Дидоны

Практическое занятие 5. Задача Эйлера: различные типы индикатрис и соответствующие им режимы

Теоретический материал – см. лекции 5-6, учебное пособие стр. 73-101

Задания:

1. В задаче Эйлера с линейной индикатрисой $I(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^1 (x + 16t \cdot x^2 \cdot u)dt$ постройте последовательность, минимизирующую функционал I на множестве решений уравнения, $\frac{dx}{dt} = u$, с граничными условиями $x(0)=0$, $x(1)=0$.
2. Каким образом изменится решение примера пункта 1, если граничные условия задать в виде $x(0) = x(1) = -\frac{1}{4}$?

3. В задаче Эйлера с линейной индикатрисой $I(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^1 (x + 16t \cdot x^2 \cdot u)dt$ найдите минималь на множестве решений уравнения, $\frac{dx}{dt} = u$, с граничными условиями $x(0)=0$, $x(1)=0$ и ограничением на управление $|u(t)| \le 2$.
4. В задаче Эйлера с линейной индикатрисой $I(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^1 (x + 16t \cdot x^2 \cdot u)dt$ найдите минималь на множестве решений уравнения, $\frac{dx}{dt} = u$, с граничными условиями $x(0)=0$, $x(1)=0$ и ограничениями на управление и состояние $|u(t)| \le 2$, $x(t) \ge -t$.
5. Запишите для примера 1 дифференциальное уравнение Эйлера-Лагранжа. Проанализируйте результаты, сравните их с решением, полученным на основе достаточных условий оптимальности Кротова.
6. Решите задачу Эйлера о минимуме функционала $I(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^1 \underbrace{\left(1+x^2\right)}_{\ge 1}\underbrace{[1+\left(\dot{x}^2-1\right)^2]}_{\ge 1}dt \to \min$ при условиях $x(0)=x(1)=0$.

Сравните значения функционала для гладкого решения и скользящего режима.

Указания.

Индикатриса в данной задаче представляет собой произведение двух сомножителей. Первый сомножитель: $(1+x^2) \ge 1$. *Равенство возможно только в случае, когда* $x(t)=0$, *тогда* $u(t)=dx/dt=0$. *Граничные условия выполняются. Значение функционала* $I^*=2$. *Полученное решение*, $x(t)=u(t)=0$ *является допустимым, более того, траектория* $x(t)$ *- гладкая функция -*

непрерывная и непрерывно-дифференцируемая, а управление $u(t)$ – *непрерывная функция. Получена минималь в классе гладких функций.*

Однако, есть решение, на котором значение функционала $I<2$. *В самом деле, для второго сомножителя*: $[1+(u^2-1)^2]\geq 1$. *Равенство возможно только при* $u(t)=\pm 1$. *Однако пара функций* $x(t)=0$, $u(t)=\pm 1$ *множеству допустимых не принадлежит, так как на этой паре не выполняется дифференциальное уравнение,* $dx/dt=0\neq \pm 1$. *В то же время значение функционала для этого набора функций,* $I=1<2$. *Следовательно, наименьшее значение функционала* $\inf I=1$ *на допустимом множестве не достигается из-за нарушения дифференциальной связи, и решение задачи следует искать в форме минимизирующей последовательности, на которой соответствующая последовательность значений функционала будет сходиться к наименьшему значению, равному* 1. *Это решение называется скользящий режим с функцией нулевой близости* $x(t)=0$ *и базовыми управлениями* $u(t)\pm 1$.

Для построения минимизирующей последовательности отрезок [0,1] разбивается на n частей. На каждом подынтервале траектория $x(t)=0$ *заменяется ломаной: через левый конец проводится отрезок прямой с угловым коэффициентом* $+1$, *а через правый конец с угловым коэффициентом* -1, *до пересечения. Точка пересечения будет отстоять от* $x(t)=0$ *на расстояние* $1/(2n)$. *С ростом n его величина стремится к нулю, а значит последовательность ломаных будет стремиться к траектории* $x(t)=0$. *Итак,* $\lim x_s(t)=0$, $u_s(t)=\pm 1$. *Траектории* $x_s(t)$ *непрерывные функции, управления* $u_s(t)=\pm 1$ *разрывные*−*это последовательность релейных переключений.*
На рис. 1 дано изображение «зигзага», построить его возможно различными способами. Неважно, как именно зигзаг будет обвивать отрезок оси абсцисс. В любом случае пределом будет $x(t)=0$.

Итак, в результате расширения класса допустимых функций и переходу от гладких функций к кусочно-дифференцируемым значение критерия сократилось в два раза.

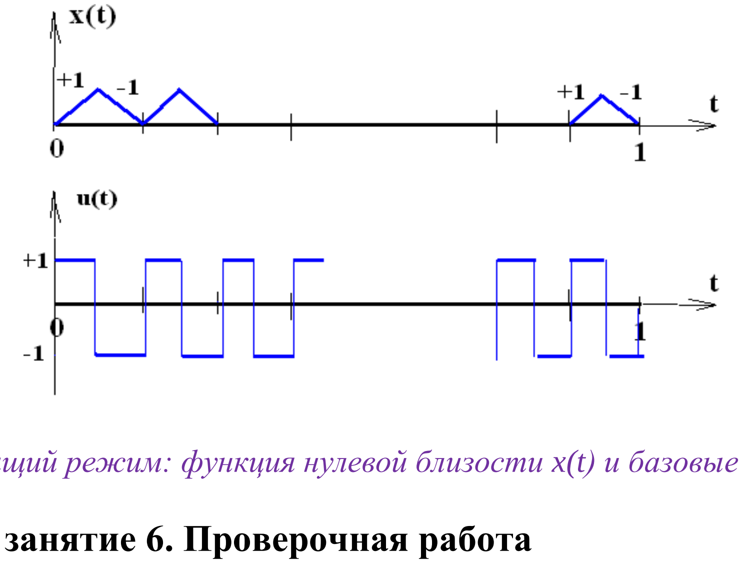


Рис.1. Скользящий режим: функция нулевой близости x(t) и базовые управления u(t)

Практическое занятие 6. Проверочная работа

1.Решите задачу Эйлера с линейной индикатрисой и ограничениями на состояние и управление:

$$I = \int_0^4 \left(8(t+1)x^2 + 8tx^2u\right)dt \to \max, \ \dot{x} = u, \ x(0) = 2, \ x(4) = 8, \ |u| \le 5, \ 2 \le x \le 10.$$

2.В задаче Эйлера о минимуме функционала $I(x(\cdot),u(\cdot)) = \int\limits_0^1 \sqrt{1+u^2}dt$ на множестве решений дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt} = u$, при заданных граничных условиях $x(0)=0$, $x(1)=1$, найдите

а) пару функций **(x(t), u(t)),** доставляющую минимум функционалу I в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $x(t) \in C^1_{[0,1]}$;

б) последовательность **{x$_s$(t), u$_s$(t)},** минимизирующую тот же функционал I в классе кусочно-непрерывных функций $x(t) \in D^1_{[0,1]}$.

Как можно интерпретировать полученный результат?

Каков смысл величины $I\,[\,\overline{y}(x)\,]$? Чему равна величина $I\,[\,\overline{y}(x)\,]$? Достигается ли наименьшее значение функционала на множестве гладких функций?

3. Какова типовая структура оптимального решения задачи Эйлера с линейной индикатрисой и ограничениями на управление?

4. Может ли отсутствовать решение в линейных по управлению задачах при наличии ограничений на управление?

5. Объясните понятие множество «достижимости» на примере задания 1.

Практическое занятие 7. Метод Лагранжа Понтрягина

Теоретический материал: см. лекции 7-8, а также учебное пособии стр. 102-107

Задания (неограниченное множество допустимых управлений *U*)

1. Покажите, что для задач, линейных относительно фазовых координат и управлений, с линейным функционалом, принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

2. Найдите управляемый процесс, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности метода Лагранжа-Понтрягина. Установите на основе достаточных условий оптимальности Кротова, является ли найденный процесс оптимальным:

2.1. Задачи со свободным правым концом (ограничений на управления нет)

Прямое и сопряженное уравнения интегрируются независимо друг от друга:

$$I = \int\limits_0^4 (2u + u^2 - x)dt + 2x(4) \to \min; \ \frac{dx}{dt} = 3x + 2u; \ x(0)=0.$$

В краевой двухточечной задаче принципа максимума нельзя по отдельности проинтегрировать прямое и сопряженное уравнения:

$$I=\int_0^4 (u+u^2+2x^2)\,dt \to \min; \quad \frac{dx}{dt}=x+2u; \; x(0)=0.$$

Практическое занятие 8

Тема: Метод Лагранжа Понтрягина, продолжение
Задания (свободный правый конец, ограниченное множество *U*)

1. $I=\int_0^{10} (u^2+x)dt \to \min; \quad \frac{dx}{dt}=x-u; \;\; 0\le u\le 4; \;\; x(0)=1.$

2. $I=\int_0^{4} (x+5u)dt - 2x(4) \to \min; \quad \frac{dx}{dt}=2x+u; \; |u|\le 1; \; x(0)=1.$

3. $I=\int_0^{3} (2u^2-4x)dt + x(3) \to \min; \quad \frac{dx}{dt}= x+u; \;\; |u|\le 1; \;\; x(0)=1.$

Практическое занятие 9

Тема: Метод Лагранжа Понтрягина, продолжение
Задания (оба конца траектории закреплены, ограниченное множество *U*)

1. Найдите управляемый процесс, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности метода Лагранжа-Понтрягина. Установите на основе достаточных условий оптимальности Кротова, является ли найденный процесс оптимальным:

1.1. Задачи с закрепленными концами и ограничениями на управление:

$$I=\int_0^5 (u^2-x)dt \to \min; \quad \frac{dx}{dt}=-(x+u); \; u\in[0;10]; \; x(0)=1; \; x(5)=-2.$$

1.2. Решение не зависит от траектории и определяется только начальной и конечной точкой на ней:

$$I=\int_0^{10} (2x-u)dt \to \min; \quad \frac{dx}{dt}=-2x+u; \; |u|\le 1; \; x(0)=1; \; x(10)=1.$$

Указание.

1)Нетрудно заметить, что индикатриса равняется правой части дифференциального уравнения с противоположным знаком, поэтому $\int(2x-u)dt=-\int(dx/dt)dt=-[x(10)-x(0)]=\text{const}.$

Иначе говоря, значение минимизируемого функционала $\boldsymbol{I}\,(\mathbf{x}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot))$ не зависит от самой траектории и определяется только ее начальной и конечной точками,

$x(0)$, $x(10)$. По условию задачи концы траектории закреплены, поэтому величина функционала равняется константе, и решением задачи будет любая допустимая пара функций ($x^*(t)$, $u^*(t)$), то есть удовлетворяющая дифференциальному уравнению, граничным условиям и ограничению на управление. Для нахождения такой пары функций применяем метод Лагранжа-Понтрягина.

2)Составим гамильтониан: $H(t,\psi,x,u)=\psi(u-2x)-2x+u=(\psi+1)u-2(\psi+1)x$

H от управления u зависит линейно, и значит достигает наибольшего значения на границе допустимой области. Если $\psi>-1$, максимум H будет на верхней границе интервала допустимых управлений, при $u=+1$. Если $\psi<-1$, на нижней границе, где $u=-1$. Наконец, при $\psi=-1$, оптимальное управление − любая функция $u(t)$, принимающая значения от −1 до +1.

3) Сопряженное уравнение: $d\psi/dt=-\partial H/\partial x$ или $d\psi/dt=2(\psi+1)$. Решение сопряженного уравнения $\psi(t)=C\exp(2t)-1$. Итак, краевую задачу составляют исходное дифференциальное уравнение и сопряженное. Граничных условий тоже два: фазовая переменная задана на левом и правом концах.

Условия трансверсальности в задачах с полностью закрепленными концами не будет!

4)В зависимости от величины и знака константы интегрирования C, возможны разные случаи. Первый: $C>0$, функция переключения $(\psi+1)=C\exp(2t)>0$, тогда $u(t)=+1$ для всех t от 0 до 10. Второй случай $C<0$, $(\psi+1)<0$, управление $u(t)=-1$ также для всех t. Наконец, $(\psi+1)=0$, здесь $C=0$ и управление u(t) - любая допустимая функция из интервала от −1 до +1.

Краевая задача включает исходное дифференциальное уравнение, замкнутое граничным управлением, и сопряженное уравнение – эти уравнения решаются независимо одно от другого. В первых двух случаях краевая задача решения не имеет, не удается удовлетворить граничным условиям на траекторию! В третьем случае, когда $(\psi+1)=0$, управление может быть любой функцией со значениями из заданного отрезка от −1 до +1, в частности, константой $u(t)=u^*$.

Будем искать управление в виде константы, замкнем ею исходное дифференциальное уравнение: $dx/dt=u^*-2x$, тогда $x(t)=A\exp(-2t)+(u^*/2)$. Здесь две неизвестные константы A, u^* и у нас есть два граничных условия.

Из начального условия: $A+u^*/2=1$,

из условия на правом конце: $A\exp(-20)+u^*/2=1$ -->>A=0-->>$u^*=2$.

По условию множество допустимых управлений представляет собой отрезок от −1 до +1. Для того, чтобы существовало решение следует либо изменить допустимую область управлений, например, потребовать, чтобы $-1\le u(t)\le 2$, тогда решение $u^*=2$, $x^*(t)=1$. Либо изменить граничные условия. Например, если $x(10)=\exp(-20)$, то $A=1$, $u^*=0$, $x^*(t)=\exp(-2t)$. Таким образом, даже в случае выполнения всех ограничений, требуемых для существования и единственности решения задачи Коши, краевая двухточечная задача решения может и не иметь. **Не из каждой начальной точки удастся попасть в заданную конечную - множество допустимых управлений u и граничные условия должны быть согласованы!**

Похожая задача, но правый конец траектории не закреплен, в результате величина функционала становится функцией конечного состояния x(10):

$$I = \int_0^{10} (-3x + 3u)dt + x^2(10) \to \min; \frac{dx}{dt} = -x + u\ ; \ |u| \le 2; \ x(0) = 2.$$

1.3. Размерность фазового пространства n=2:

$$I = \int_0^5 (x_1 + x_2 + 2u)\, dt - x_2(5) \to \min;$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 - u \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + u \end{cases} \qquad x_1(0) = 2;\ x_2(0) = 0,\ |u| \le 1$$

Практическое занятие 10. Задачи с подвижной границей. Оптимальное по быстродействию управление простейшим механическим движением

Теоретический материал: см. лекция 10, учебное пособие стр. 178-187

Задание

Решите задачу оптимального быстродействия механическим движением движущегося по инерции объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \qquad |u| \le 1$$

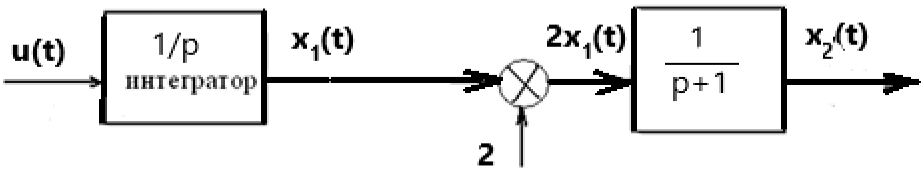
с граничными условиями $x_1(t_0) = x_{1,0}$; $x_2(t_0) = x_{2,0}$; $x_1(t_1) = x_{1,1}$; $x_2(t_1) = x_{2,1}$; конкретные значения выбираются по вариантам.

Практическое занятие 11. Метод Гамильтона-Якоби-Беллмана для задач с непрерывным временем

Теоретический материал см. лекция 11, учебное пособие стр. 119-124

Задания

1.Восстановите дифференциальные уравнения динамической системы по ее структурной схеме:



2.Постройте оптимальный регулятор для линейной дифференциальной системы с линейным критерием качества

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = u, \quad x_1(0) = 1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + 2x_1, \quad x_1(0) = 1 \end{cases} \qquad |u| \le 1,$$

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^2 (x_1 - 2x_2 + 3u)dt \to \min$$

Замечание. Функцию Кротова следует искать в виде линейной по состояниям формы: $\varphi(t, x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2$

3.Покажите, что синтез и программа управления в задаче с линейной системой и линейным критерием качества совпадают. Какая схема управления характерна для динамической системы в этом случае?

Практическое занятие 12. Задача аналитического конструирования оптимального регулятора для линейной системы с квадратичным критерием качества

Теоретический материал: см. лекция 12, учебное пособие стр. 124-135

Задание

1. Постройте синтез оптимального управления для линейной системы с квадратичным критерием качества:

$$I(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot) = \int_0^1 (y + u^2)dt \; + x(1) - y(1) \to min, \; \begin{cases} \dot{x} = -2y, x(0) = 1 \\ \dot{y} = u, \; y(0) = 1 \end{cases} .$$

2.Составьте схему формирования траектории динамической системы, покажите на ней структуру регулятора в цепи обратной связи.

Замечание. Функцию Кротова следует искать в виде:
$\varphi(t, x, y) = \psi_1(t)x + \psi_2(t)y$.

Практическое занятие 13. Проверочная работа
Задание

1. Найдите управляемый процесс, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности метода Лагранжа-Понтрягина. Установите на основе достаточных условий оптимальности Кротова, является ли найденный процесс оптимальным:

$$I = \int_0^4 (x + 2u)dt - 2x(4) \to \min; \quad \frac{dx}{dt} = 2x + u; \ |u| \le 1; \ x(0)=1.$$

2.Постройте синтез оптимального управления для линейной системы с квадратичным критерием качества: $I(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^T u^2 dt + 4x^2(T) \to \min$,

$$\frac{dx}{dt} = x - 2u, \ x(0)=1.$$

Практическое занятие 14. Метод Лагранжа-Понтрягина для многошаговых управляемых процессов (дискретный принцип максимума)

Теоретический материал: см. лекция 13, учебное пособие стр. 148-157

Задание

Методом Лагранжа-Понтрягина найдите оптимальные многошаговые процессы:

1. Задача со свободным правым концом

$$\sum_{t=0}^{3}[x^2(t) + u^2(t)] + 2x(4) \to \min;$$

$$x(t+1) = -x(t)+u(t); \ x(0) = 0.$$

2. Задача с закрепленными концами траектории

$$\sum_{t=0}^{4} [x(t) + 2u(t) + u^2(t)] \to \min;$$

$$x(t+1)= -x(t) + 2u(t); \ x(0) = 1, \ x(5) = 1.$$

3. Условие трансверсальности зависит от состояния на правом конце

$$\sum_{t=0}^{4} [x(t) + 2u^2(t)] - x(5) + 2x^2(5) \to \min;$$

$$x(t+1)= - x(t) + 2u(t); \ x(0) = 1.$$

Замечания к задаче 1. Составим гамильтониан:
$H(t,\psi(t+1),x(t),u(t)) = \psi(t+1)[-x(t)+u(t)] - x^2(t) - u^2(t)$.
Дискретный аналог принципа максимума Понтрягина не является необходимым условием оптимальности. Соответствующая теорема утверждает, что оптимальное управление всего лишь стационарная точка

функции H (см. конспект и учебное пособие - негативный пример). Поэтому управление находим из условия: $\partial H/\partial u=\psi(t+1) -2u(t)=0$ ->> $u(t)=\psi(t+1)/2$.

Сопряженное уравнение: $\psi(t)=\partial H/\partial x(t)=-\psi(t+1) -2x(t)$.

Условие трансверсальности: $\psi(4)=-\partial F(x(4))/\partial x(4)=-2$.

Краевая задача: $x(t+1)=-x(t)+(1/2)\psi(t+1)$, $x(0)=0$;

$$\psi(t)=-\psi(t+1) -2x(t),\ \psi(4)=-2;\ t=0,1,2,3$$

Краевая задача записана для разностной системы уравнений. Первое уравнение системы в прямом направлении времени, а вторая - в обратном. Так что, если одно уравнение устойчиво, то второе - неустойчиво. Поэтому одно из уравнений следует преобразовать так, чтобы оба уравнения были записаны в одном направлении времени. Например, из второго уравнения следует $\psi(t+1)=-\psi(t) -2x(t)$. Подставим это соотношение в первое уравнение, тогда $x(t+1)=-x(t)-(1/2)\psi(t)-x(t)$ или приведя подобные, $x(t+1) =-2x(t)-(1/2)\psi(t)$. В результате получили двухточечную краевую задачу для системы разностных уравнений, в которой оба уравнения записаны в прямом направлении времени. Эта система - линейная, с постоянными коэффициентами. Существуют специальные приемы решения таких систем. (Дисциплина Модели динамики информационных систем). В данном конкретном примере проще свести систему к одному разностному уравнению второго порядка. Для этого из первого уравнения выразим $\psi(t) =-4x(t)-2x(t+1)$. Подставим этот результат во второе уравнение, при этом в левой части придется сдвинуть аргумент на 1 единицу вправо, тогда $-4x(t+1)-2x(t+2)=4x(t)+2x(t+1)-2x(t)$. Приводим подобные ->> $x(t+2)+3x(t+1)+x(t)=0$.

Получено разностное уравнение второго порядка, линейное с постоянными коэффициентами, однородное. Решение также, как и для дифференциального уравнения, ищем в виде $x(t)=\lambda^t$ где λ - константа. Подставив это выражение в разностное уравнение $x(t+2)+3x(t+1)+x(t)=0$, получим характеристическое уравнение для определения λ: $\lambda^2 + 3\lambda+1=0$ -->> $\lambda_{1,2}=(-3\pm\sqrt{5})/2$. Общее решение разностного уравнения: $x(t)=C_1\lambda_1^t+C_2\lambda_2^t$. Сопряженная функция: $\psi(t) =-4x(t)-2x(t+1)=C_1(-1-\sqrt{5})\lambda_1^t+C_2(-1+\sqrt{5})\lambda_2^t$. Константы находим из начального условия: $x(0)=C_1+C_2=0$, ->> $C_2=-C_1$ и условия трансверсальности: $\psi(4) =C_1(-1-\sqrt{5})\lambda_1^4-C_1(-1+\sqrt{5})\lambda_2^4=-2$. Здесь вместо C_2 уже учтено $-C_1$. Осталось подставить константы в $x(t)$, $\psi(t)$ и не забыть, что $u(t)=\psi(t+1)/2$.

Практическое занятие 15. Метод Гамильтона-Якоби-Беллмана для многошаговых управляемых процессов

Теоретический материал: см. лекция 14, учебное пособие стр. 158-167
Задание

Методом Гамильтона-Якоби-Беллмана найдите оптимальные многошаговые процессы

1. $\sum_{t=0}^{3} [2x(t) + u^2(t)] \to \min;$

$x(t+1) = x(t) + 2u(t);\quad x(0) = 2;\ |u| \le t + 1.$

2. $\sum_{t=0}^{4} [x(t) - u(t)] - x(5) \to \min;$

$x(t+1) = u(t);\qquad |u(t)| \le 1;\ x(0) = 1.$

3. $\sum_{t=0}^{4} [x(t) + u(t)] + x(5) \to \min;$

$x(t+1) = x(t) - u(t);\ \ |u(t)| \le \frac{1}{t+1},\ \ x(0) = 0.$

Практическое занятие 16. Однопродуктовая макроэкономическая модель: золотое правило накопления

Теоретический материал: лекция 15, учебное пособие стр. 168-178

Задание

Определите оптимальную величину нормы накопления и отвечающий ей уровень фондовооруженности, которые обеспечивают максимальное значение среднедушевого конечного потребления c:

$\bar{c}(t) = (1-s)(1-a)\, f(k,t)\,.$

Роль уравнения связи в данной оптимизационной постановке играет стационарный режим однопродуктовой макроэкономической модели:

$$(1-a)sf(k,t) - (\mu + \omega)k = 0\ .$$

Он определяется как положение равновесия динамической системы указанной модели. Решение данной задачи следует провести с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Покажите, что для производственной функции Кобба-Дугласа f оптимальные нормы накопления и потребления совпадают с эластичностями $s^*=\alpha$, $u^*=1-s^*=\beta$. Этот результат составляет «золотое» правило накопления.