



## Математический анализ-3 семестр

### Лекция 5

#### Тема 5. Степенные ряды

5.1. Определение. Теорема Абеля

5.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

5.3. Равномерная сходимость степенного ряда, его почленное интегрирование и дифференцирование

#### 5. Степенные ряды

##### 5.1. Определение. Теорема Абеля

**Определение 1.** Степенным рядом называется функциональный ряд вида:  
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Рассматриваются также степенные ряды более общего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots,$$

которые с помощью замены  $(x - x_0)$  на новую переменную сводятся к рядам вида  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , изучением которых можно ограничиться.

Выясним, какой вид имеет область сходимости степенного ряда.

#### **Теорема 1 (Абеля).**

Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится в некоторой точке  $x_0 \neq 0$ , то он абсолютно сходится в любой точке  $x$ , такой что  $|x| < |x_0|$ .

Доказательство. Из сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  следует, что его общий член стремится к нулю, а, значит, ограничен, т.е. существует положительное число  $M$  такое, что:

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$



Возьмем произвольное  $x$ , для которого  $|x| < |x_0|$  и рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ . Оценим его общий член:

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= \left| a_n x_0^n \cdot \left( \frac{x}{x_0} \right)^n \right| = \\ &= |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot q^n, \quad \text{где } q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1. \end{aligned}$$

Общий член рассматриваемого ряда меньше, чем соответствующие члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, степенной ряд сходится абсолютно в точке  $x$ . Теорема доказана.

## 5.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Заметим, что любой степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится при  $x = 0$ .

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ . Применим для нахождения его области сходимости признак Даламбера:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$ , если  $x \neq 0$ .

Значит, данный ряд сходится только в одной точке  $x_0 = 0$ .

Предположим, что для степенного ряда существуют отличные от нуля значения  $x$ , при которых он сходится. Если множество этих значений не ограничено, то согласно теореме Абеля ряд сходится всюду, причем абсолютно.

Пусть множество значений  $x$ , при которых степенной ряд сходится, ограничено, и положительное число  $R$  – точная верхняя грань этого множества.

Если  $|x| < R$ , то найдется значение  $x_0$  такое, что  $|x| < |x_0| \leq R$ , при котором ряд сходится. Тогда согласно теореме Абеля ряд сходится абсолютно в точке  $x$ . Итак, степенной ряд сходится абсолютно в интервале  $(-R, R)$  и расходится вне этого интервала.

На концах интервала, т.е. при  $x = \pm R$  может иметь место как сходимость, так и расходимость ряда.



**Определение 2.** Интервал  $(-R, R)$  называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а число  $R$  – *радиусом сходимости*. Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то его радиус сходимости  $R = \infty$ , а если ряд сходится только в одной точке  $x = 0$ , то  $R = 0$ .

Замечание 1. Степенной ряд вида  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  сходится или в интервале  $(x_0 - R, x_0 + R)$  с центром в точке  $x_0$ , или на всей числовой оси, или только в точке  $x = x_0$ .

Замечание 2. Интервал сходимости степенного ряда может быть найден с помощью признаков Даламбера или Коши. Для установления сходимости или расходимости на концах интервала требуется дополнительное исследование с помощью других теорем.

Пример 1.

Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n$ .

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(n+1)x^n} \right| = \frac{|x|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{|x|}{2} < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

$(-2, 2)$  – интервал сходимости,  $R = 2$  – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах  $(-2, 2)$ .

При  $x = 2$ :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n \Big|_{x=2}$  получим положительный числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$ .

Не выполняется необходимое условие сходимости, ряд расходится.

При  $x = -2$  получим числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ . Аналогично, ряд расходится.

Ответ: область сходимости данного ряда  $(-2, 2)$ ,  $R = 2$ .

Пример 2.



Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{3^n \cdot \ln n}$ .

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot \ln(n+1)} \cdot \frac{3^n \cdot \ln n}{(x+1)^n} \right| =$$
$$= \frac{|x+1|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|x+1|}{3}.$$

При вычислении  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$  используется правило Лопиталя:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{\ln(t+1)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1}{t} = 1.$$

Интервал сходимости определяется из неравенства:

$$\frac{|x+1|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 3 \Leftrightarrow$$

$$-3 < x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2.$$

$(-4, 2)$  – интервал сходимости,

$R = 3$  – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах интервала:

При  $x = -4$ :  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{3^n \cdot \ln n}$ , получим положительный ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ .

Сравним его с гармоническим рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Покажем, что для любого номера  $n = 2, 3, 4, \dots$  выполнено неравенство:  $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{\ln n}{n} < 1$ .

Для этого рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  и вычислим ее производную:  
 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$  при  $x > e$ .

Так как  $f(2) = \frac{\ln 2}{2} < 1$ ,  $f(3) = \frac{\ln 3}{3} < 1$ , а при  $x > e$   $f(x)$  убывает, то ее значения меньше 1 при всех  $n = 2, 3, 4, \dots$



Члены полученного ряда больше, чем соответствующие члены гармонического ряда, т.е. при  $x = -4$  ряд расходится.

При  $x = 2$  получим знакочередующийся ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ , который сходится условно как знакочередующийся ряд Лейбница.

Ответ: область сходимости данного ряда  $(-4, 2]$ ,  $R = 3$ .

### Пример 3.

Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{при всех } x.$$

Следовательно, область сходимости данного ряда – вся числовая ось.  $R = \infty$ .

### Пример 4.

Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot n!$ .

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \quad x \neq 0.$$

Ответ: данный ряд сходится при  $x = 0$ .  $R = 0$ .

### Пример 5.

Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ .

Применим признак Коши:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n} \right|} = |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ .

$x = -1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(-1)^n}{n} &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$



Ряд расходится.

$x = 1$ . Получаем знакочередующийся ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ , который сходится условно как знакочередующийся ряд Лейбница.

Ответ: область сходимости данного ряда  $(-1, 1]$ ,  $R = 1$ .

Пример 6.

Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$ .

Применим признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^{2n}}{n^2} \right|} = |x^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

При  $x = \pm 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  – ряд Дирихле, сходится.

Ответ: область сходимости данного ряда  $[-1, 1]$ ,  $R = 1$ .

Пример 7.

Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} (x + 2)^n$ .

Применим признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} (x + 2)^n \right|} = \frac{|x+2|}{2} < 1,$$

$$|x + 2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x + 2 < 2$$

$$\Leftrightarrow -4 < x < 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} (x + 2)^n.$$

$$x = -4.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n \cdot 2}}{n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ – ряд Лейбница, сходится.}$$

$$x = 0. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \text{ – расходится (гармонический ряд).}$$

Ответ: область сходимости данного ряда  $[-4, 0)$ ,  $R = 2$ .



### Пример 8.

Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} (x-3)^n$ .

Применим признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n}{\sqrt{n}} (x-3)^n \right|} = 2 \cdot |x-3| < 1$$

$$|x-3| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2} < x < 3 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} (x-3)^n.$$

$$x = \frac{5}{2}. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \text{ряд Лейбница, сходится.}$$

$$x = \frac{7}{2}. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \text{ряд Дирихле, расходится.}$$

Ответ: область сходимости данного ряда  $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ,  $R = \frac{1}{2}$ .

### 5.3. Равномерная сходимость степенного ряда, его почленное интегрирование и дифференцирование

**Теорема 2** (о равномерной сходимости степенного ряда).  
Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

Доказательство. Пусть  $(-R, R)$  – интервал сходимости степенного ряда и  $[a, b]$  – произвольный отрезок, принадлежащий этому интервалу. Обозначим  $x_0 = \max\{|a|, |b|\}$ .

Тогда для всех  $x \in [a, b]$  будет выполняться неравенство  $|x| < |x_0|$ . Степенной ряд сходится абсолютно в точке  $x_0$ , т.к.  $x_0 \in (-R, R)$ . Кроме того:  $|a_n x^n| \leq |a_n x_0^n|$ .



Т.е. степенной ряд мажорируется на отрезке  $[a, b]$  сходящимся положительным числовым рядом, а, значит, согласно теореме Вейерштрасса, сходится на этом отрезке равномерно.

Теорема доказана.

Степенные ряды обладают свойствами равномерно сходящихся функциональных рядов.

1). Сумма степенного ряда непрерывна на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, а, значит, непрерывна на всем интервале.

2). Интеграл от суммы степенного ряда  $S(x)$  на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, равен сумме ряда, полученного из данного степенного ряда путем почленного интегрирования на том же отрезке:

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x) dx &= \int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.\end{aligned}$$

Если в качестве отрезка интегрирования взять отрезок  $[0, x]$ , где  $x \in (-R, R)$ , то равенство приобретает вид:

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n,$$

т.е. в результате почленного интегрирования степенного ряда на отрезке  $[0, x]$  получается также степенной ряд.

Пользуясь, например, признаком Даламбера, можно показать, что радиус сходимости полученного ряда совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

3). При почленном дифференцировании степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  получим также степенной ряд:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' =$$





$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1)x^n$$

с тем же радиусом сходимости.

Это означает, что сумма степенного ряда дифференцируема на интервале сходимости, и производная суммы равна сумме ряда из производных.

Замечание. Почленное дифференцирование можно применить повторно к ряду из производных первого порядка, второго и т.д.. Значит, сумма степенного ряда имеет внутри интервала сходимости производные всех порядков.

Замечание. При почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда интервал сходимости сохраняется. Сходимость на концах интервала может появляться или исчезать.

Пример 9. Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ .

Данный ряд сходится на промежутке  $(-1, 1]$ . Обозначим  $S(x)$  его сумму и применим теорему о почленном дифференцировании:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Полученный в результате почленного дифференцирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале  $(-1, 1)$ .

$$\begin{aligned} \int_0^x S'(x) dx &= S(x) - S(0) = \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x). \end{aligned}$$

Пример 10. Найти сумму ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$ .



Данный ряд сходится на интервале  $(-1,1)$ . Обозначим  $S(x)$  его сумму и применим теорему о почленном интегрировании:

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Полученный в результате почленного интегрирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале  $(-1,1)$ .

$$S(x) = \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$