Кафедра Прикладной математики

Института информационных технологий

РТУ МИРЭА

Дисциплина «Вычислительная математика»

2023-2024 уч.г.

Наполнение курса

- **Объем курса**

8 лекционных и 16 практических занятий

- **Темы практических занятий**

1. Элементы теории погрешностей
2. Методы приближения и аппроксимация функций
3. Численные методы решений трансцендентных и алгебраических уравнений
4. Численное интегрирование
5. Численные методы линейной алгебры
6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений
7. Численное решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных
8. Быстрое дискретное преобразование Фурье

Практика 3.
Численные методы решений трансцендентных и алгебраических уравнений.

1.1. Решение нелинейных уравнений.
1.2. Основные этапы отыскания решения.
1.3. Метод деления отрезка пополам (бисекции).
1.4. Метод простых итераций.
1.5. Метод Ньютона (касательных).
1.6. Метод секущих (хорд).

Часть 1.
Решение нелинейных уравнений: постановка задачи.

Постановка задачи решения нелинейных уравнений.

Дана некоторая функция $f(x)$ и требуется найти все (или некоторые) значения x:

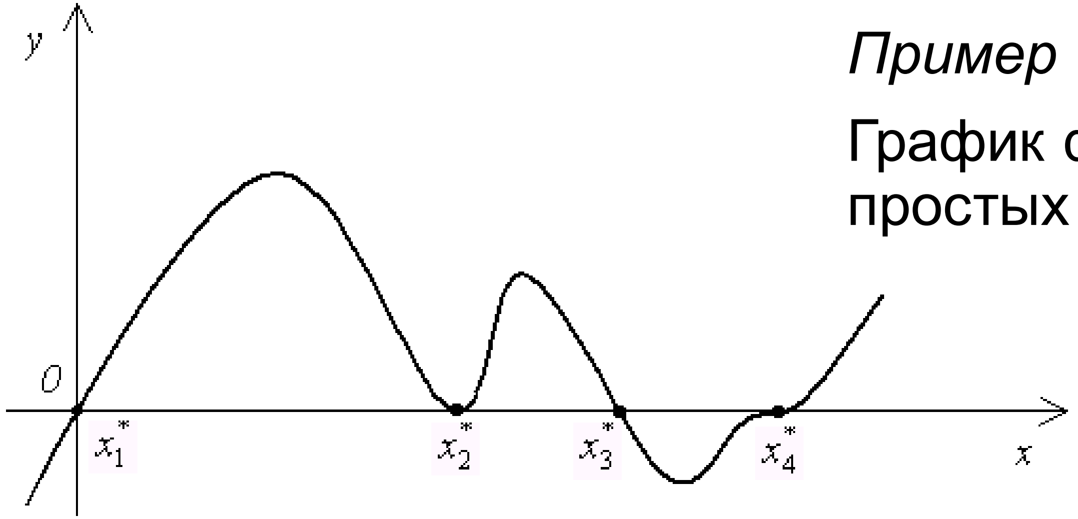
$$f(x) = 0 \qquad (3.1)$$

Значение x^*, при котором $f(x^*) = 0$, – *корень* (или *решение*) уравнения (3.1).

! *Замечание 3.1*. Относительно функции $f(x)$ часто предполагается, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня.

Корень x^* уравнения (3.1) называется *простым*, если $f'(x^*) \neq 0$.
Если же $f'(x^*) = 0$, то корень x^* называется *кратным* корнем.

Геометрически корень уравнения (3.1) – точка пересечения функции $y = f(x)$ с Оx.



Пример 3.1. Графическое представление корней.

График функции $y = f(x)$, имеющей четыре корня: два простых (x_1^* и x_3^*) и два кратных (x_2^* и x_4^*).

! *Замечание 3.2*. Большинство методов решения уравнения (3.1) ориентировано на отыскание простых корней.

Часть 2.
Основные этапы отыскания решения.

Этапы приближенного отыскания корней уравнения (3.1):
локализация (или *отделение*) корня и *уточнение* корня.

Локализация корня – определение отрезка $[a,b]$, содержащего один и только один x^*.

! *Замечание 3.3*. $\nexists$ универсальный алгоритм локализации корня. Отрезок может быть локализован из физических соображений или построением графика (таблицы значений) функции $y = f(x)$. На наличие корня на отрезке $[a,b]$ указывает различие знаков функции на концах отрезка.

Теорема 3.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, так, что $f(a)\cdot f(b) < 0$, то отрезок $[a,b]$ содержит по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$.

! *Замечание 3.3*. Корень четной кратности таким образом локализовать нельзя, так как в окрестности такого корня функция $f(x)$ имеет постоянный знак.

На этапе уточнения корня вычисляют приближенное значение корня с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Приближенное значение корня уточняют с помощью различных итерационных методов. Суть этих методов состоит в последовательном вычислении значений $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, которые являются приближениями к корню x^*.

Часть 3.
Метод деления отрезка пополам (бисекции).

Метод дихотомии – самый простой и надежный способ решения нелинейного уравнения.

Пусть из предварительного анализа известно, что корень уравнения (3.1) находится на отрезке $[a_0,b_0]$, т. е. $x^* \in [a_0,b_0]$, так, что $f(x^*) = 0$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a_0,b_0]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, т.е.

$$f(a_0)\cdot f(b_0) < 0 \tag{3.2}$$

Разделим отрезок $[a_0,b_0]$ пополам. Получим точку $x_0=(b_0 - a_0)/2$. Если $f(x_0)=0$, то x_0 – искомый корень, и задача решена. Если $f(x_0) \neq 0$, то $f(x_0)$ – число определенного знака: $f(x_0) > 0$, либо $f(x_0) < 0$. Тогда либо на концах отрезка $[a_0,x_0]$, либо на концах $[x_0,b_0]$ значения функции $f(x)$ имеют разные знаки.

Обозначим такой отрезок $[a_1,b_1]$. Очевидно, что $x^* \in [a_1,b_1]$, и длина отрезка $[a_1,b_1]$ в два раза меньше, чем длина отрезка $[a_0,b_0]$. Поступим аналогично с отрезком $[a_1,b_1]$. В результате получим либо корень x^*, либо новый отрезок $[a_2,b_2]$, и т.д.

Середина n-го отрезка $x_n = (b_n - a_n)/2$. Длина отрезка $[a_n,b_n]$ будет равна: $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$

Т.к. $x^* \in [a_0,b_0]$, то:

$$|x_n - x^*| \le \frac{b_0 - a_0}{2^n} \tag{3.3}$$

Погрешность метода. Оценка (3.3) характеризует погрешность метода дихотомии и указывает на скорость сходимости: метод сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой q = 1/2. Оценка (3.3) является априорной.

Критерий окончания. Из соотношения (3.3) следует, что при заданной точности приближения ε вычисления заканчиваются, когда будет выполнено неравенство

$b_n - a_n < 2$ или неравенство $n > \log_2((b_0 - a_0)/\varepsilon) - 1$.

$$b_n - a_n < 2\varepsilon \qquad \text{или} \qquad n > \frac{log_2(b_0 - a_0)}{\varepsilon} - 1$$

Таким образом, количество итераций можно определить заранее. За приближенное значение корня берется величина x_n.

Пример 3.2. Нахождение корня методом дихотомии.

Найдем приближенно $x = \sqrt[5]{2}$ с точностью ε = 0,01.

Задача эквивалентна решению уравнения $x^5 - 2 = 0$, или нахождению нуля функции $f(x) = x^5 - 2$. Очевидно начальное приближение отрезка $[a_0,b_0]$=[1,2]. На концах этого отрезка $f(x)$ принимает значения с разными знаками: $f(1)\cdot f(2) < 0$.

Найдем число n делений отрезка [1,2], необходимых для достижения точности ε:

$$|x_n - x^*| \le \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \le 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad n \ge 6$$

Следовательно, не позднее 6-го деления найдем $\sqrt[5]{2}$ с точностью ε = 0,01.

№	a_n	b_n	x_n	знак $f(a_n)$	знак $f(b_n)$	$f(x_n)$	b_n - a_n
0	1,0000	2,0000	1,5000	–	+	5,5938	1,0000
1	1,0000	1,5000	1,2500	–	+	0,7585	0,5000
2	1,0000	1,2500	1,1250	–	+	-0,2959	0,2500
3	1,1250	1,2500	1,1875	–	+	0,1812	0,1250
4	1,1250	1,1875	1,1406	–	+	-0,0691	0,0625
5	1,1406	1,1875	1,1562	–	+	0,0532	0,0312
6	1,1406	1,1562	1,1484	–	+	-0,0078	0,0156

$\sqrt[5]{2}$ =1,1484

Часть 4.
Метод простых итераций.

Пусть уравнение (3.1) можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x) \tag{3.4}$$

Пример 3.3. Замена исходного уравнения эквивалентным ему уравнением.

$$\frac{x}{\sin(x)} - 0{,}5 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0{,}5\sin(x)$$

Выберем каким-либо образом начальное приближение x_0. Вычислим значение функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$ и найдем уточненное значение $x_1 = \varphi(x_0)$. Подставим теперь x_1 в уравнение (3.4) и получим новое приближение $x_2 = \varphi(x_1)$ и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \tag{3.5}$$

Формула (3.5) – *расчетная формула* метода простых итераций.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится при $n\to\infty$, т.е. существует

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{3.6}$$

и функция $\varphi(x)$ непрерывна, то, учитывая (3.6) перейдем к пределу в (3.5):

$x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n-1})\right) = \varphi(x^*) \;\Rightarrow x^*$ – корень уравнения (3.4).

Сходимость метода. Сходимость устанавливает теорема (3.2).

Теорема 3.2. Если в интервале, содержащем корень x^* уравнения (3.4), а также его последовательные приближения x_0, x_1, …, x_n, …, вычисляемые по формуле (3.5), выполнено условие:

$$\varphi'(x) \leq q < 1 \tag{3.7}$$

то $$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

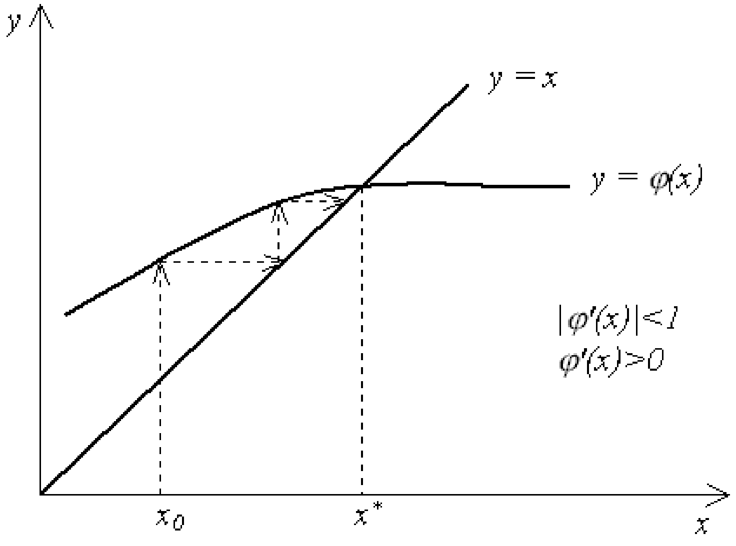
т. е. итерационный процесс сходится и справедлива оценка погрешности:

$$|x_n - x^*| \leq q|x_0 - x^*| \tag{3.8}$$

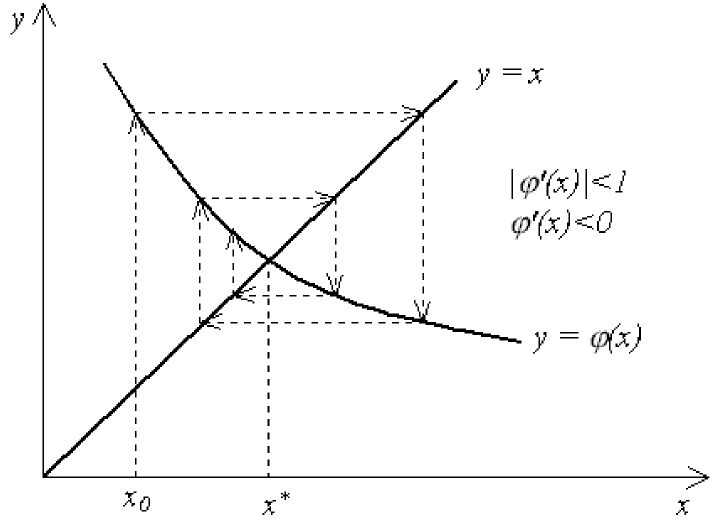
Оценка (3.8) априорная. Она показывает, что метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии с знаменателем q. Чем меньше q, тем выше скорость сходимости.

! *Замечание 3.4*. Как следует из теоремы (3.2), условие (3.7) является *достаточным* для сходимости метода простых итераций. Его выполнение гарантирует сходимость итерационного процесса (3.5), но невыполнение условия (3.7), вообще говоря, не означает, что итерационный процесс будет расходиться.

Случаи взаимного расположения линий $y = x$ и $y = \varphi(x)$ и соответствующие итерационные процессы: $|\varphi'(x)| < 1$ – итерационный процесс *сходится*.

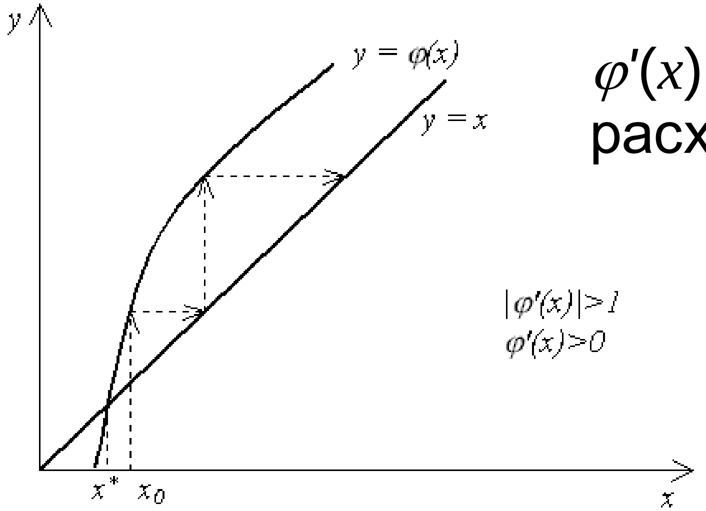


$\varphi'(x) > 0$, сходимость носит *односторонний* характер



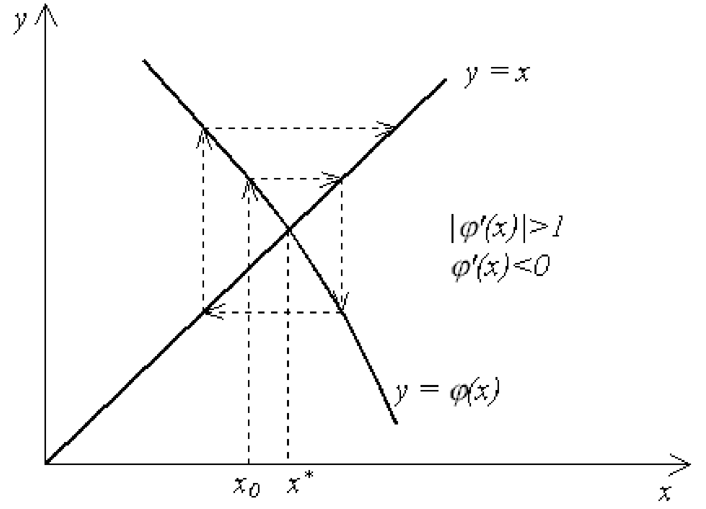
$\varphi'(x) < 0$, сходимость носит *двусторонний, колебательный* характер

$|\varphi'(x)| > 1$, итерационный процесс *расходится*



$\varphi'(x) > 1$, *односторонняя* расходимость

$\varphi'(x) < -1$, *двусторонняя* расходимость



Погрешность метода. Если известна величина *q* в условии (3.7), то применима следующая апостериорная оценка погрешности (n>1):

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \tag{3.9}$$

Критерий окончания. Из оценки (3.9) $\Rightarrow$ критерий окончания итерационного процесса. Вычисления следует продолжать до выполнения неравенства:

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Если это условие выполнено, то x_n – приближение к x^* с точностью ε.

Если $q \leq 0.5$, то можно пользоваться более простым критерием окончания:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

Пример 3.4. Решение уравнения методом простой итерации.

$f(x) = \sin(x) - x^2 = 0$, $\varepsilon = 0{,}001$.

$$x = \frac{\sin(x)}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

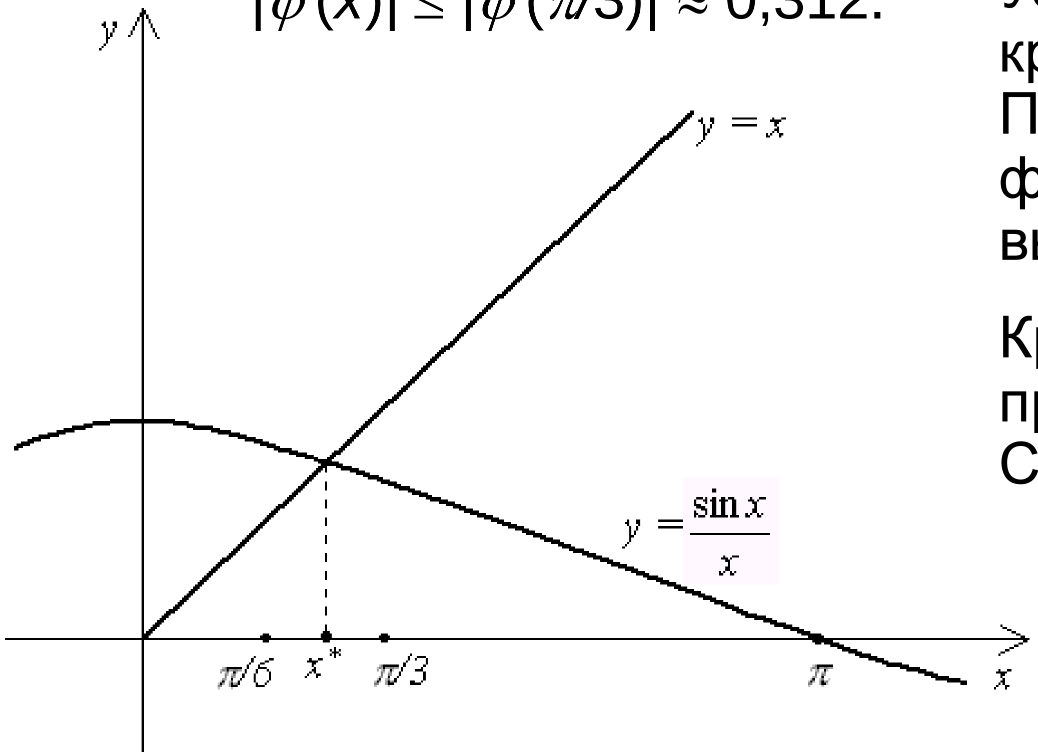
Корень уравнения находится на отрезке [$\pi/6, \pi/3$] (вычислим значения $f(x)$ на концах отрезка, получим: $f(\pi/6)> 0$, а $f(\pi/3)< 0$: теорема (3.2)).

Первая и вторая производные функции $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \qquad \varphi''(x) = \frac{(2 - x^2)\sin(x)}{x^3}$$

На отрезке [$\pi/6, \pi/3$], $\varphi''(x) > 0 \Rightarrow \varphi'(x)$ монотонно возрастает и max на правом конце отрезка, т. е. в точке $\pi/3$. Поэтому, справедлива оценка:

$$|\varphi'(x)| \le |\varphi'(\pi/3)| \approx 0{,}312.$$



Условие (3.7) выполнено, $q < 0{,}5 \Rightarrow$ воспользуемся критерием окончания вычислений в виде (3.10). Приведены приближения, полученные по расчетной формуле (3.5). В качестве начального приближения выбрано значение $x_0 = 1$.

Критерий окончания выполняется при $n = 5$, $|x_5 - x_4| < 0{,}001$. Сходимость двусторонняя.

$$x^* \approx 0.8765$$

n	x_n
0	1
1	0,8415
2	0,8861
3	0,8742
4	0,8774
5	0,8765

Часть 5.
Метод Ньютона (касательных).

Впервые описан И. Ньютоном (1669-1671).
Опубликован (1685).
По мере развития мат. аппарата описан в виде похожем на привычный нам (1740).

Наиболее эффективный метод решения нелинейных уравнений.

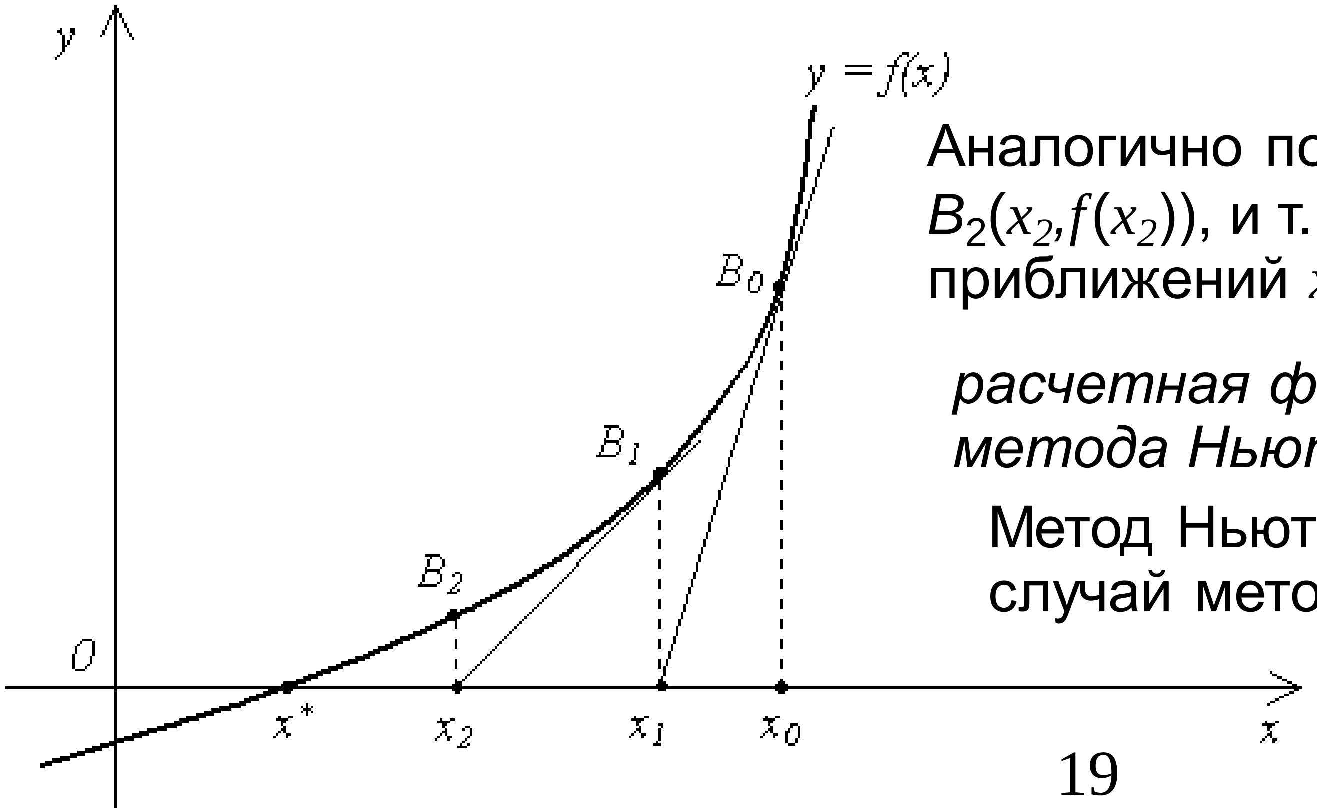
Пусть $x^* \in [a,b]$: $f(x^*) = 0$; функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a)\cdot f(b) < 0$ и дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a,b). Положим $x_0 = b$. Проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $B_0 = (x_0, f(x_0))$.

Уравнение касательной будет иметь вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (3.10)$$

Первое пересечение получим, взяв абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox, т. е. положив в (3.11) $y = 0$, $x = x_1$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (3.11)$$



Аналогично поступим с точкой $B_1(x_1, f(x_1))$, затем с точкой $B_2(x_2, f(x_2))$, и т. д. $\Rightarrow$ получим последовательность приближений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, причем

расчетная формула метода Ньютона.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (3.12)$$

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, для которого

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (3.13)$$

Сходимость метода. Сходимость устанавливает теорема (3.3).

Теорема 3.3. Пусть x^* – простой корень уравнения $f(x) = 0$, и в некоторой окрестности x^* функция f дважды непрерывно дифференцируема. Тогда найдется такая малая σ-окрестность корня x^*, что при произвольном выборе начального приближения x_0 из этой окрестности итерационная последовательность, определенная по формуле (3.13) не выходит за пределы этой окрестности и справедлива оценка ($n \geq 0$):

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2 \qquad (3.14)$$

где $C = \sigma^{-1}$. Оценка (3.15) означает, что метод сходится с квадратичной скоростью.

! *Замечание 3.4*. Сходимость метода Ньютона зависит от того, насколько близко к корню выбрано начальное приближение. Неудачный выбор начального приближения может дать расходящуюся последовательность.

Достаточное условие сходимости метода: $x^* \in [a,b]$: $f(x^*) = 0$. Если в качестве начального приближения x_0 выбрать тот из концов отрезка, для которого

$$f(x)f''(x) \geq 0 \qquad (3.15)$$

то итерации (2.14) сходятся, причем монотонно.

Погрешность метода. Оценка (3.15) априорна и неудобна на практике. Удобно пользоваться следующей апостериорной оценкой погрешности:

$$|x_n - x^*| \leq |x_n - x_{n-1}| \tag{3.17}$$

Критерий окончания. Из оценки (3.17) $\Rightarrow$ при заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления нужно вести до тех пор, пока не будет выполнено неравенство:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \tag{3.18}$$

Пример 3.5. Вычисление $\sqrt[p]{a}$ методом Ньютона ($a > 0$, $p \in \mathbb{N}$).

Вычисление $\sqrt[p]{a}$ $\Leftrightarrow$ решению уравнения $x^p = a$. Т.о., нужно найти корень уравнения $f(x) = 0$; $f(x) = x^p - a$; $f'(x) = px^{p-1}$. Итерационная формула метода (3.13) примет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^p - a}{p(x_n)^{p-1}} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p(x_n)^{p-1}} \tag{3.19}$$

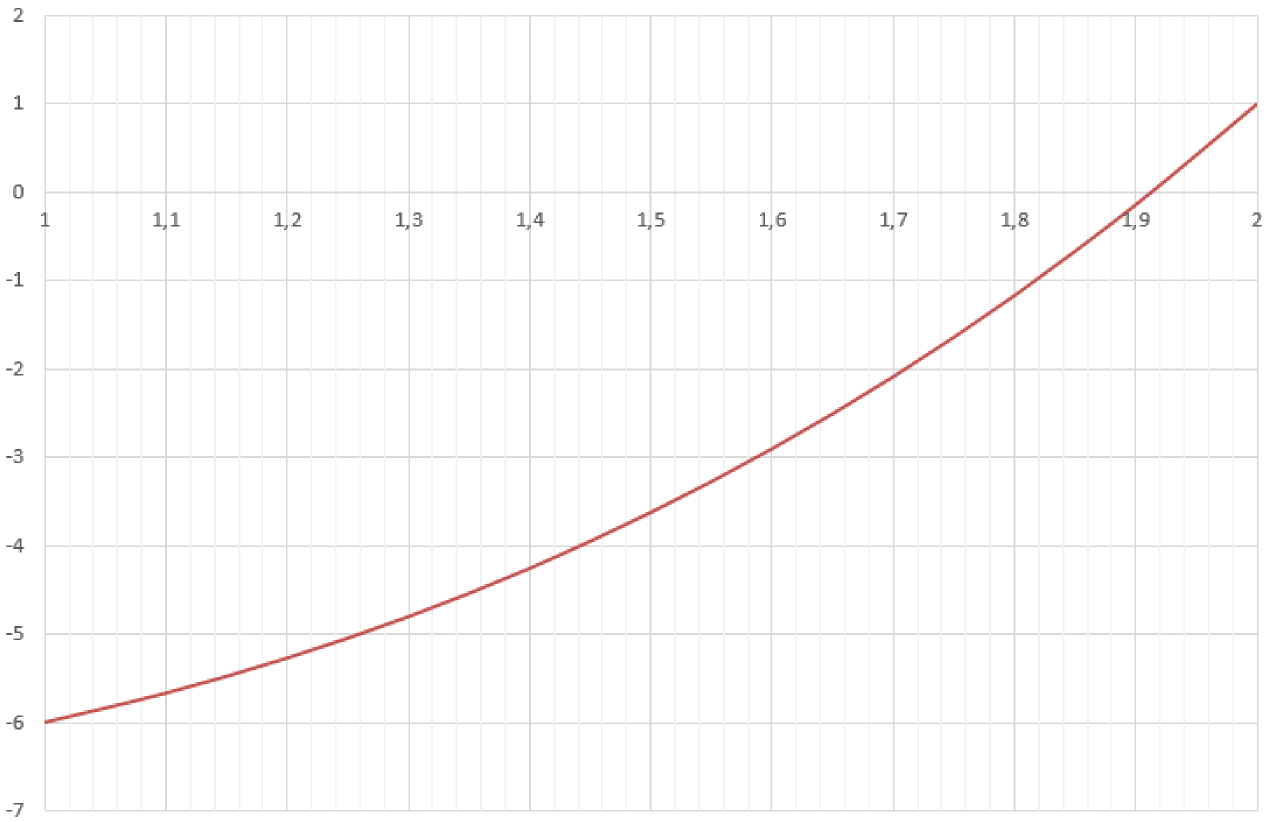
Вычислим $\sqrt[3]{7}$ используя формулу (3.19), $\varepsilon = 0{,}001$.

$$x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n + \frac{7}{3(x_n)^2}$$

Простой корень уравнения $x^3 - 7 = 0$ расположен на отрезке [1,2].

Действительно, на концах отрезка [1,2] функция $f(x) = x^3 - 7$ принимает разные знаки: $f(1) < 0$, $f(2) > 0$. Также при $x = 2$: достаточное условие сходимости (3.16): $f(2) \cdot f''(2)$ [$= (x^3 - 7)(6x)$] $= (8 - 7)(12) \geq 0$. $\Rightarrow$ в качестве начального приближения можно взять $x_0 = 2$.

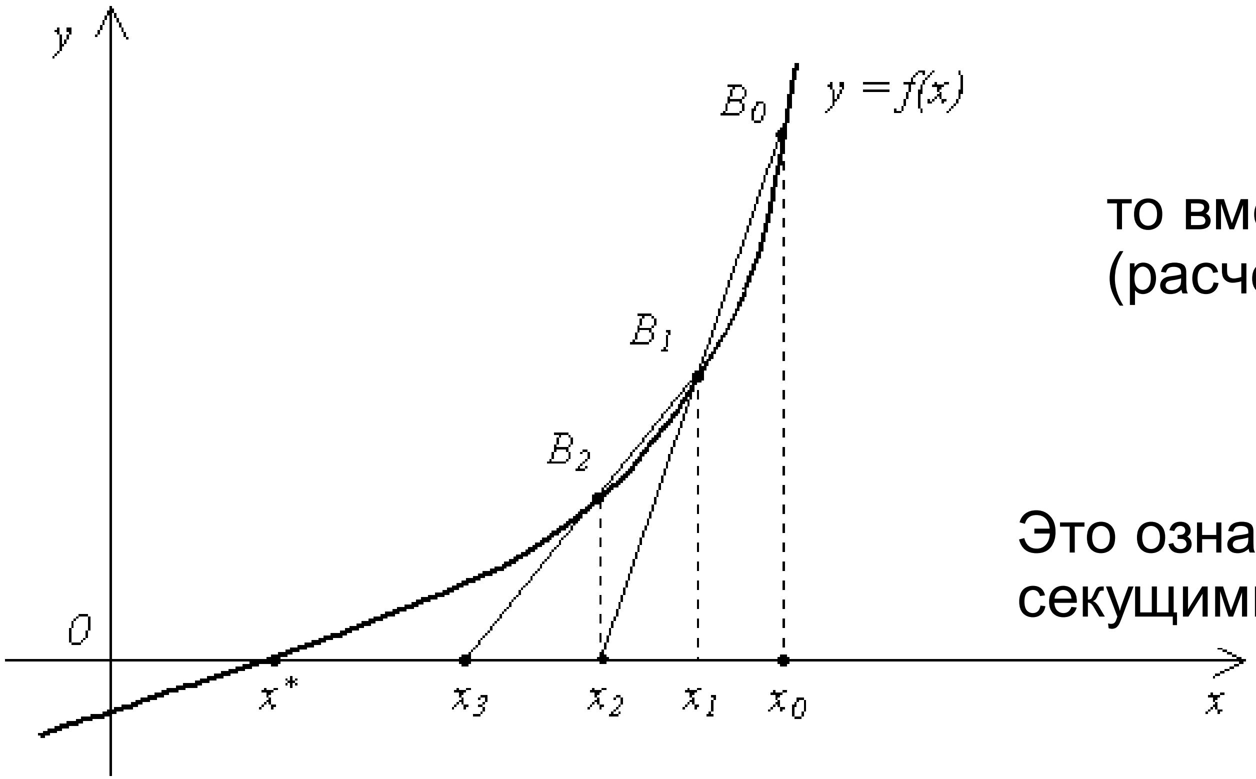
n	x_n
0	2
1	1,91666666667
2	1,91293845830
3	1,91293118280
4	1,91293118277
5	1,91293118277



Часть 6.
Метод секущих (хорд).

Впервые найдены решения кубических уравнений инструментами метода хорд (Диофант, III в. н.э.).
Понял и интерпретировал (Ферма, 1630-е).
Объяснил и опубликовал (Ньютон, 1670-е).

Как видно из формулы (3.13), метод Ньютона требует для своей реализации вычисления производной, что ограничивает его применение. Метод секущих лишен этого недостатка. Если производную заменить ее приближением:



$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})}$$

то вместо формулы (3.13) получим (расчетная формула метода секущих):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (3.20)$$

Это означает, что касательные заменены секущими. Метод секущих – двухшаговый метод:

для вычисления приближения x_{n+1} необходимо вычислить два предыдущих приближения x_n и x_{n-1}, и, в частности, на первой итерации надо знать два начальных значения x_0 и x_1.

Очередное приближение x_{n+1} – точка пересечения с осью Ox секущей, соединяющей точки графика функции $f(x)$ с координатами $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$.

Сходимость метода. Сходимость устанавливает теорема (3.4).

Теорема 3.3. Пусть x^* – простой корень уравнения $f(x) = 0$, и в некоторой окрестности x^* функция f дважды непрерывно дифференцируема, $f''(x) \neq 0$. Тогда найдется такая малая σ-окрестность корня x^*, что при произвольном выборе начального приближения x_0 и x_1 из этой окрестности итерационная последовательность, определенная по формуле (3.20) сходится и справедлива оценка ($n \geq 0$, $p = (\sqrt{5}+1)/2$):

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p \qquad (3.21)$$

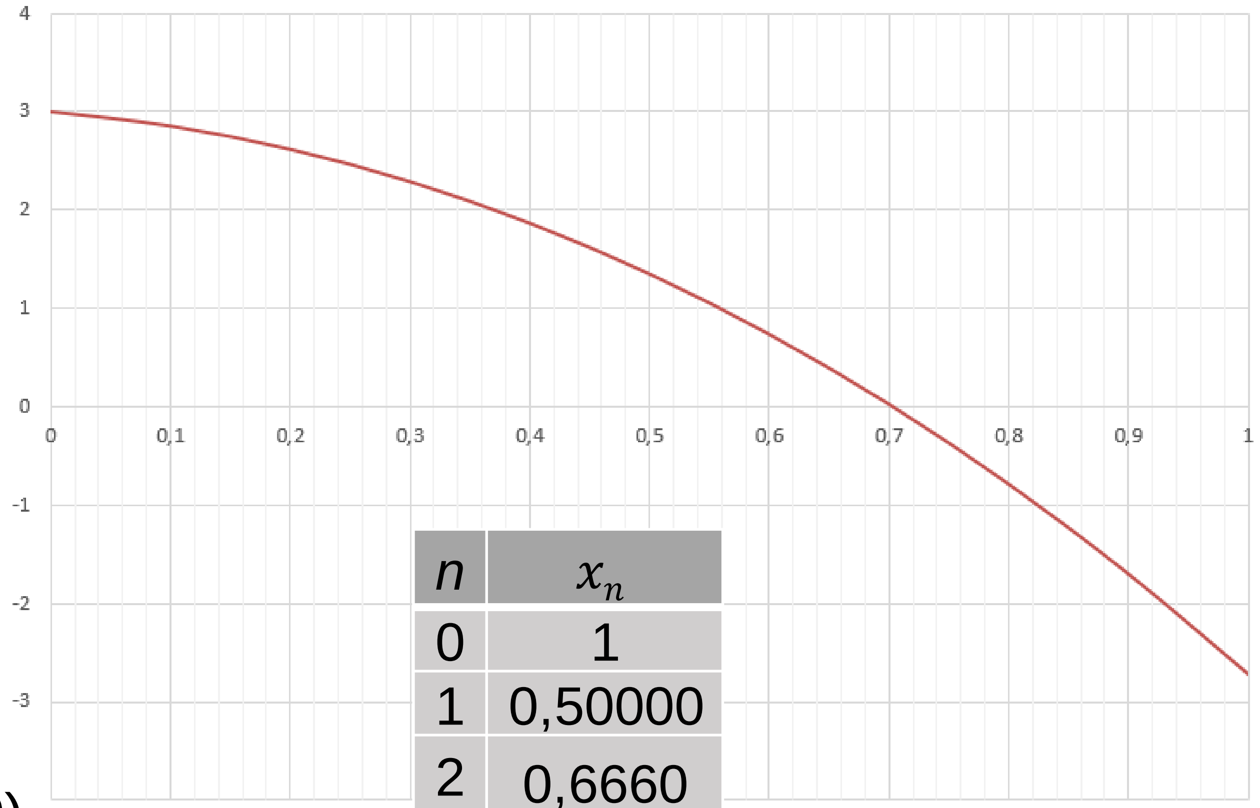
! *Замечание 3.5*. Сравнение оценок (3.15) и (3.21) показывает, что $p < 2$, и метод секущих сходится медленнее, чем метод Ньютона. Но в методе Ньютона на каждой итерации надо вычислять и функцию, и производную, а в методе секущих – только функцию. Поэтому при одинаковом объеме вычислений в методе секущих можно сделать примерно вдвое больше итераций и получить более высокую точность.

! *Замечание 3.6*. При неудачном выборе начальных приближений (вдали от корня) метод секущих (как и метод Ньютона) может расходиться. Кроме того применение метода секущих осложняется из-за того, что в знаменатель расчетной формулы метода (3.20) входит разность значений функции. Вблизи корня эта разность мала, и метод теряет устойчивость.

Критерий окончания. Такой же как в методе Ньютона:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \tag{3.22}$$

Пример 3.6. Вычисление положительного корня уравнения $4(1 - x^2) - e^x = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.



Корень этого уравнения находится на отрезке [0,1], Действительно, на концах отрезка [0,1] $f(x) = 4(1 - x^2) - e^x$ принимает разные знаки:
$f(0) < 0$, $f(1) > 0$. $f''(x) = -8 - e^x$.
При $x = 1$: достаточное условие сходимости (3.16):
$f(1) \cdot f''(1) = (-e)(-8 - e) \geq 0$.
$\Rightarrow$ начальное приближение $x_0 = 1$,
второе начальное значение $x_1 = 0,5$.

Вычисления по расчетной формуле (3.20)

n	x_n
0	1
1	0,50000
2	0,6660
3	0,7093
4	0,7033
5	0,7034