Задача 3

Кирилл Васильевич Новоселов

11 ноября 2022 г.

1. Постановка задачи

Нужно было реализовать с помощью операций FreeFem++ над разреженными матрицами и векторами стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStub). На рис.1 представлен алгоритм данного метода.

Algorithm 2.3 Biconjugate Gradient Stabilized (BICGSTAB)

Compute $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0$, choose $\boldsymbol{r}'_0$ such that $\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{r}'_0 \neq 0$
Set $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{r}_0$
for $j = 0, 1, \cdots$ **do**
    $\alpha_j = (\boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{r}'_0)/((A\boldsymbol{p}_j) \cdot \boldsymbol{r}'_0)$
    $\boldsymbol{s}_j = \boldsymbol{r}_j - \alpha_j A\boldsymbol{p}_j$
    $\omega_j = ((A\boldsymbol{s}_j) \cdot \boldsymbol{s}_j)/((A\boldsymbol{s}_j) \cdot (A\boldsymbol{s}_j))$
    $\boldsymbol{x}_{j+1} = \boldsymbol{x}_j + \alpha_j \boldsymbol{p}_j + \omega_j \boldsymbol{s}_j$
    $\boldsymbol{r}_{j+1} = \boldsymbol{s}_j - \omega_j A\boldsymbol{s}_j$
    if $||\boldsymbol{r}_{j+1}|| < \varepsilon_0$ **then**
        Break;
    end if
    $\beta_j = (\alpha_j/\omega_j) \times (\boldsymbol{r}_{j+1} \cdot \boldsymbol{r}'_0)/(\boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{r}'_0)$
    $\boldsymbol{p}_{j+1} = \boldsymbol{r}_{j+1} + \beta_j(\boldsymbol{p}_j - \omega_j A\boldsymbol{p}_j)$
end for
Set $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{j+1}$

Рис. 1.1: Алгоритм

Для проверки данного алгоритма решалось следующее матричное уравнение:

$$Ax = b,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Тогда точное решение данного уравнения будет вектор

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -6.5 \\ -2.5 \\ 9.5 \end{pmatrix},$$

а численно получился следующий вектор $x_{numeric} = \begin{pmatrix} 0.9999993394 \\ -6.499993924 \\ -2.499996283 \\ 9.499995477 \end{pmatrix}$,

что почти совпадает.

Далее, используя данный алгоритм, нужно было решить СЛАУ для задачи Дирихле уравнения Лапласа и сравнить его решение с решением, которое дает солвер MUMPS. В качестве результатов была получена таблица относительных погрешностей решений, полученных разными методам с разными значениями tgv.

Таблица 1.1: Относительные погрешности решений

значение tgv	MUMPS	BiCGStub
-1	5.4902e-05	5.4902e-05
1e5	6.67341e-05	6.67277e-05
1e8	5.49116e-05	0.000501237
1e10	5.49021e-05	0.0724702
1e30	5.4902e-05	0.315599

2. Выводы

Был реализован стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStub). Однако было обнаружено, что при больших значениях tgv число обусловленности матрицы становится большим, что ухудшает сходимость метода BiCGStub.