Задача 2

Кирилл Васильевич Новоселов

23 октября 2022 г.

1. Постановка задачи

Решается смешанная задача для уравнения Пуассона :

$$\begin{aligned}&\Delta u = -f,\\ &x \in \Omega,\\ &f = \omega^2(1+4y^2)sin(\omega(x+y^2)) - 2\omega cos(\omega(x+y^2))\end{aligned} \tag{1.1}$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned}u(x,y) &= u_{exact}, &\quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{in}},\\ u(x,y) &= \frac{\partial u_{exact}}{\partial \vec{n}}, &\quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{out}},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&u_{exact} = sin(\omega(x+y^2)),\\ &\omega = 0.1.\end{aligned}$$

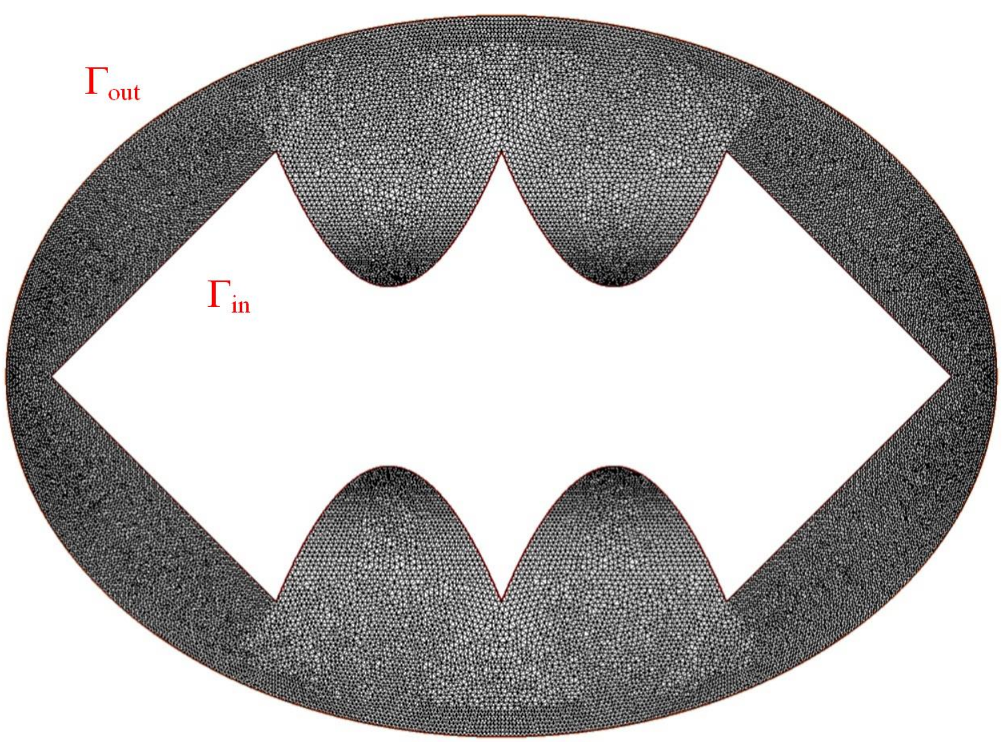


Рис. 1.1: Область в которой проводились рассчеты

2. МКЭ для смешанной задачи

Так как мы рассматриваем задачу Дирихле на внутренней границе и задачу Неймана на внешней границе, то выберем тестовую функцию

$$v|_{\Gamma_{\text{in}}=0,} \tag{2.1}$$

умножим (1.1) на нее и проинтегрируем по Ω

$$-\int_\Omega fvdxdy = \int_\Omega \Delta uvdxdy =$$

$$= \int_\Omega \text{div}(\nabla uv)dxdy - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdxdy =$$

$$= \int_{\Gamma_{\text{out}}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} vds - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdxdy.$$

В итоге, получаем, что нам нужно найти функцию $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую слабой постановке задачи

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdxdy = \int_\Omega fvdxdy + \int_{\Gamma_{\text{out}}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} vds. \tag{2.2}$$

3. Адаптация сетки

Для адаптации сетки были выбраны следующие параметры:

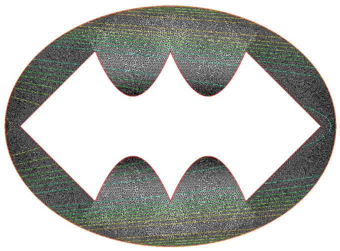
Таблица 3.1: Параметры adaptmesh

Параметры adaptmesh	Значение
err	0.01
nbvx	200000
hmin	0.0001
hmax5	0.1

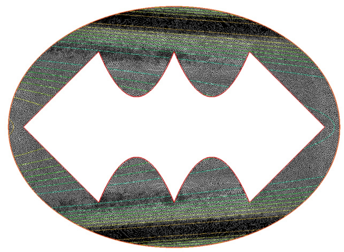
При таких паарметрах получились следующие значения относительной ошибки:

Таблица 3.2: Относительная ошибка при адаптации сетки

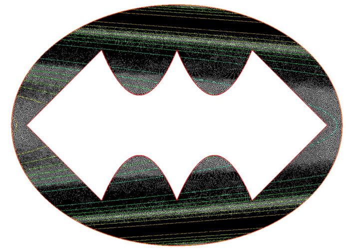
	Относительная ошибка
Без адаптации	0.0036659
Адаптация 1	0.00391167
Адаптация 2	0.0039602
Адаптация 3	0.0032328
Адаптация 4	0.00110871
Адаптация 5	0.000651272
Адаптация 6	0.000318812



а) Без адаптации.



б) Адаптация 3.



в) Адаптация 5.

Рис. 3.1: Изменение сетки при адаптации.

Так же было сследование поведения численного решения на отрезке с начальной точкой (0, -8) и конечной точкой (0, -6) при адаптации сетки. Полученные кривые представлены на рис.3.2. Так как относительная ошибка изначально была маленькая, все кривые лежат очень близко друг к другу и хорошо приближают точное решение.

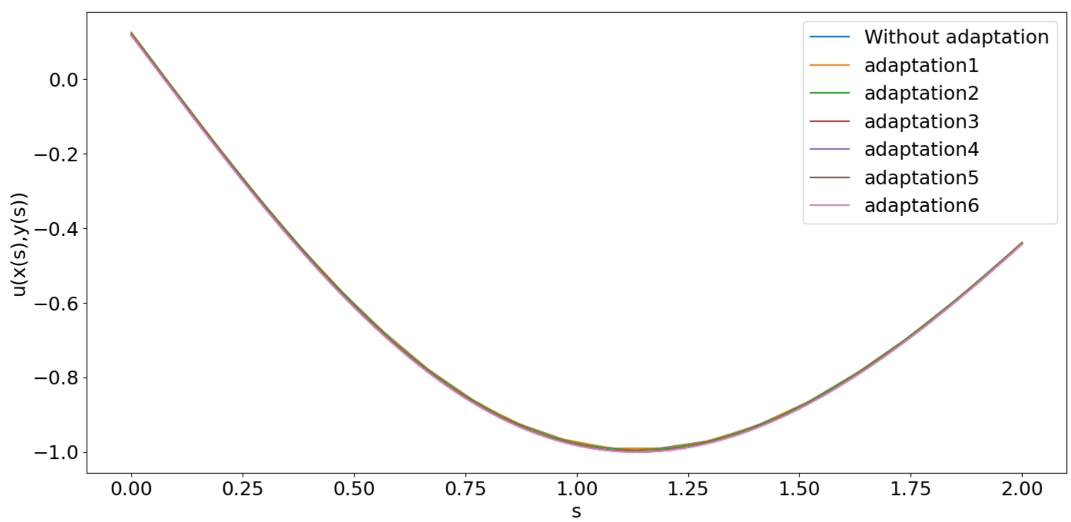


Рис. 3.2: Численное решение на отрезке при адаптации сетки

4. Выводы

После построения численного решения на адаптированной сетке было установлено, что при адаптации сетки относительная ошибка уменьшается.