Задача 4

Кирилл Васильевич Новоселов

19 ноября 2022 г.

1. Постановка задачи

Смоделировать дорожку Кармана, при помощи решения нестационарного уравнения Навье-Стокса.
Рассмотрим нестационарное уравнение Навье-Стокса и регулярзованное уравнение неразрывности

$$\begin{cases} \rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 \\ \varepsilon p + \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \end{cases}$$

где ε имеет смысл слабой сжимаемости, в области Ω с условиями прилипания на стенках и на круглом препятствии

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{wall}} = 0,$$

заданным профилем скорости на Γ_{in}

$$u(y)|_{\Gamma_{in}} = u_0 + \varepsilon\sin(t)\cos(y/H).$$

На выходе было поставлено условие свободного стока :

$$p|_{\Gamma_{\text{out}}} = p_0 \text{ - давление равно давлению окружающего воздуха,}$$

$$v = 0 - \text{ течение горизонтальное,}$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ - горизонтальная компонента сохраняется в частице.}$$

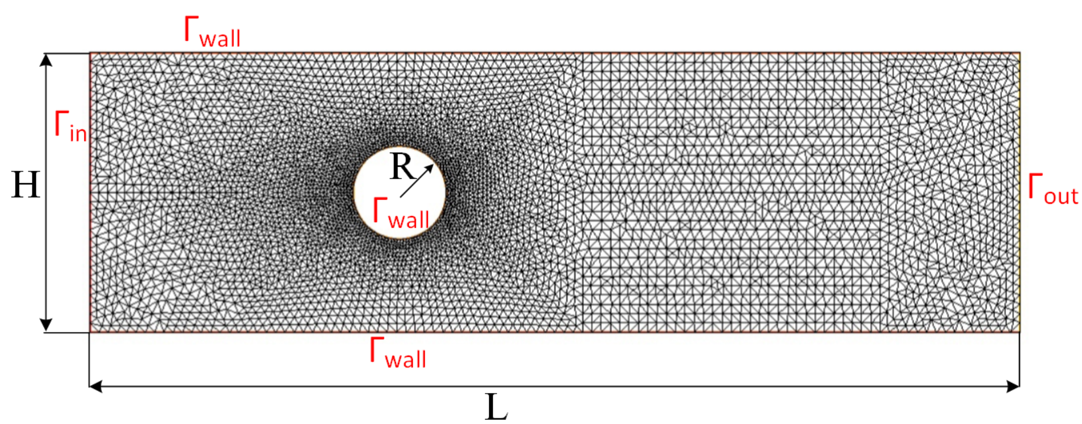

Рис. 1.1: Расчетная область. H = 3 м, L = 10 м, R = 0.5 м

2. Слабая постановка

Подействуем на нашу систему уравнений пробной функцией ($\mathbf{\Psi}$, q)

$$\begin{cases} \int_\Omega (\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{\Psi} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{\Psi} - \mu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{\Psi} + \nabla p \cdot q) = 0 \\ \int_\Omega (\varepsilon p \cdot q + \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot q) = 0, \end{cases}$$

Вычтем одно уравнение из другого и перебросим действия векторных операторов на пробные функции, тогда получим итоговый вид слабой постановки

$$\int_\Omega (\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{\Psi} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{\Psi} + \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{\Psi} - p \operatorname{div} \mathbf{\Psi} - \varepsilon p \cdot q - \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot q) dxdy +$$
$$+ \int_{\Gamma_{out}} \psi_1 \left(p - \mu \frac{du_1}{dx} \right) ds = 0,$$

для любых $\mathbf{\Psi}$ таких, что $\mathbf{\Psi} = 0$ на $\Gamma_{wall}, \Gamma_{in}$ и $\psi_2 = 0$ на Γ_{out}.

В качестве апроксимаци субстанциональной производной использовалась функция convect

$$\rho \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx$$

$$\rho \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t^{n+1}) - [convect(v_1(\mathbf{x}, t^n), v_2(\mathbf{x}, t^n), -\Delta t, u(\mathbf{x}, t)), convect(v_1(\mathbf{x}, t^n), v_2(\mathbf{x}, t^n), -\Delta t, v(\mathbf{x}, t))]}{\Delta t}$$

3. Начальное приближение (задача Стокса)

В качестве начального приближения было выбрано решение задачи Стокса

$$\int_\Omega \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\psi} dxdy - \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} dxdy = 0$$

$$\int_\Omega \varepsilon pq dxdy + \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} dxdy = 0$$

4. Численный эксперимент

В геометрии данной задачи с начальной скоростью $u_0 = 5$ м/с и давлением на внешней границе $p_0 = 10^5$ Па был проведен численный эксперимент. Шаг по времени был взят 0.1 с, время до которого проводились рассчеты равно 40 с. В результате которого, было замечено образование и срывание вихрей после круглого препятствия.

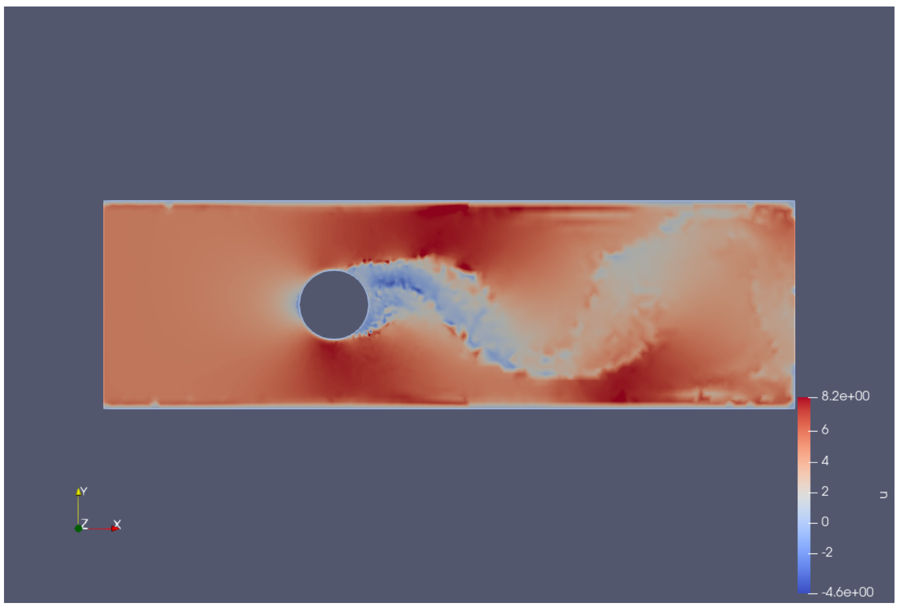

Рис. 4.1: Дорожка Кармана