

1. Определите истинность заданных утверждений. Считайте, что $a \neq b$ – урэлементы.

- | | | |
|---|--|---|
| (a) $a \in \{\{a\}, b\}$ | (h) $\emptyset \in \emptyset$ | (o) $a \in 2^{\{a\}}$ |
| (b) $a \in \{a, \{b\}\}$ | (i) $\emptyset \subseteq \emptyset$ | (p) $2^{\{a, \emptyset\}} \subset 2^{\{a, b, \emptyset\}}$ |
| (c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$ | (j) $\emptyset \subset \emptyset$ | (q) $\{a, b\} \subseteq 2^{\{a, b\}}$ |
| (d) $\{a\} \subset \{a, b\}$ | (k) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | (r) $\{a, a\} \in 2^{\{a, a\}}$ |
| (e) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$ | (l) $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ | (s) $\{\{a\}, \emptyset\} \subseteq 2^{\{a, a\}}$ |
| (f) $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a, b\}\}$ | (m) $\{\emptyset, \emptyset\} \subset \{\emptyset\}$ | (t) $\{a, \{a\}\} \subset 2^{\{a, 2^{\{a\}}\}}$ |
| (g) $\{\{a\}, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$ | (n) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ | (u) $\{\{a, \{\emptyset\}\}\} \subseteq 2^{\{a, 2^{\emptyset}\}}$ |

2. Дано множество-универсум¹ $\mathfrak{U} = \{1, 2, \dots, 10\}$ и его подмножества: $A = \{x \mid x - \text{чётное}\}$, $B = \{x \mid x - \text{простое}\}$ ², $C = \{2, 4, 7, 9\}$. Нарисуйте диаграмму Венна для заданных множеств, отметьте на ней все элементы и найдите:

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $B \triangle (A \cap C)$ | (c) $\overline{A \cup C} \cup (C \triangle B)$ | (e) $(2^A \cap 2^C) \setminus 2^B$ |
| (b) $\overline{B} \setminus (A \triangle C)$ | (d) $ \{A \cup B \cup 2^{\emptyset} \cup 2^{\mathfrak{U}}\} $ | (f) $2^{B \cap C} \setminus \{2^{\{2^{\emptyset}\}}, \overline{B \cap C} \}$ |

3. Даны следующие множества³:

- | | | |
|--|--|--|
| * $A = \{1, 2, 4\}$ | * $C = 2^{\emptyset} \setminus \{\emptyset\}$ | * $E = 2^{A \setminus D} \cap 2^{\{B \setminus D\}}$ |
| * $B = \{\square, \blacktriangle\} \cup \emptyset$ | * $D = \{\blacktriangle, 2^{\{\emptyset, C\}} \}$ | * $F = 2^{\{\{\emptyset, \emptyset\} \setminus \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\} \triangle C, \{\emptyset, C\}, 2^{\emptyset}\}}$ |

Найти:

- | | | |
|-----------------------|--------------------|---------------|
| (a) $A \triangle D$ | (c) $B \times E$ | (e) $D^{ C }$ |
| (b) $E \triangle 2^C$ | (d) $E \times 2^B$ | (f) F^3 |

4. Найдите все множества A , B и C , которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} A &= \{1, |B|, |C|\} \\ B &= \{2, |A|, |C|\} \\ C &= \{1, 2, |A|, |B|\} \end{aligned}$$

5. Изобразите на графиках \mathbb{R}^2 следующие множества точек:

- | | |
|---|---|
| (a) $\{1, 2, 3\} \times [1; 3]$ | (d) $\{\langle x, y \rangle \in [1; 5] \times [1; 4] \mid (y > x) \vee (x \geq 4)\}$ |
| (b) $[1; 4) \times (2; 4] \setminus \{\langle 2, 3 \rangle\}$ | (e) $\{\langle x, y \rangle \in (1; 5]^2 \mid 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 \leq 36\}$ |
| (c) $([1; 6] \times (1; 5]) \setminus ([4; 5] \times (2; 4))$ | (f) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists z \in \mathbb{N} : x^3 + y^3 = z^3\}$ |

6. Подробно докажите (или опровергните) следующие утверждения:

- (a) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.
 (b) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
 (c) Множество рациональных⁴ чисел \mathbb{Q} счётно.
 (d) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ – несчётное множество.

¹ Здесь под универсумом имеется в виду множество доступных урэлементов. Считайте, что $\overline{A} = \mathfrak{U} \setminus A$.

² Считайте, что 1 не является простым числом.

³ \square – самый обыкновенный квадрат, \blacktriangle – самый обыкновенный кот.

⁴ Рациональное число можно представить в виде дроби m/n , где $m \in \mathbb{Z}$ – целое, а $n \in \mathbb{N}$ – натуральное.