# 2 Binary Relations Cheatsheet

## 2.1 Терминология и обозначения

* $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A,\ b \in B\}$ — **декартово произведение** множеств $A$ и $B$. Cartesian product
* $A^2 = A \times A$ — **декартов квадрат** множества $A$. Cartesian square
* $R \subseteq A \times B$ — **бинарное отношение** $R$, определённое на паре множеств $A$ и $B$. Binary relation
* $R \subseteq A^2$ — (гомогенное) бинарное отношение на множестве $A$. Homogeneous relation (endorelation)
* $a\ R\ b$ — элементы $a$ и $b$ **находятся в отношении** $R$, т.е. $\langle a, b\rangle \in R$. Ordered pair
* $\mathcal{E}_A = \varnothing$ — **пустое** отношение. Empty relation
* $\mathrm{id}_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$ — **тождественное (диагональное)** отношение. Identity relation
* $\mathfrak{U}_A = A^2 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A\}$ — **полное (универсальное)** отношение. Universal relation

## 2.2 Операции над отношениями

* $R \cup S = \{\langle a, b\rangle \mid (a\ R\ b) \vee (a\ S\ b)\}$ — **объединение** отношений $R$ и $S$. Union of relations
* $R \cap S = \{\langle a, b\rangle \mid (a\ R\ b) \wedge (a\ S\ b)\}$ — **пересечение** отношений $R$ и $S$. Intersection of relations
* $R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\} \subseteq B \times A$ — отношение, **обратное** к $R \subseteq A \times B$. Converse relation
* $\overline{R} = \{\langle a, b\rangle \mid \langle a, b\rangle \notin R\}$ — **дополнение** отношения $R$. Complementary relation
* $R\,;S = S \circ R = \{\langle x, y\rangle \mid \exists z : (x\ R\ z) \wedge (z\ S\ y)\}$ — **композиция** отношений $R$ и $S$. Composition of relations
  - Если $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$, то $R\,;S \subseteq A \times C$.
* $R^{\circ i+1} = R \circ R^{\circ i}$ — **«композитная» (функциональная) степень** отношения $R$. Functional power
  При этом $R^{\circ 1} = R$, $R^{\circ 0} = \mathrm{id}_A$. Чаще используется нотация $R^i$, совпадающая с нотацией *Декартовой степени.*
* $R[M] = \{y \mid \exists x \in M : x\ R\ y\}$ — **применение** отношения $R$ ко множеству $M$.
* **Замыкание отношения** $R$ относительно свойства $P$ — минимальное (по включению) надмножество $R$, обладающее свойством $P$. Closure
  - $R^{=} = R^{r} = R \cup \mathrm{id}_A$ — **рефлексивное замыкание** отношения $R \subseteq A^2$. Reflexive closure
  - $R^{\sim} = R^{s} = R \cup R^{-1}$ — **симметричное замыкание** отношения $R$. Symmetric closure
  - $R^{+} = R^{t} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$ — **транзитивное замыкание** отношения $R$, где $R^1 = R$, $R^{k+1} = R^k \circ R$. Transitive closure
  - $R^{\equiv} = ((R^{r})^{s})^{t}$ — **рефлексивное симметричное транзитивное замыкание** отношения $R$. Минимальное отношение эквивалентности, содержащее $R$. Reflexive symmetric transitive closure
* **Сокращение отношения** $R$ — минимальное отношение, *замыкание* которого совпадает с *замыканием* $R$.
  - **Рефлексивное сокращение** $R^{\neq} = R \setminus \mathrm{id}_A$ — минимальное отношение, рефлексивное замыкание которого совпадает с рефлексивным замыканием $R$, то есть $(R^{\neq})^{=} = R^{=}$. Reflexive reduction
  - **Симметричное сокращение** $R^{\not\sim}$ — минимальное отношение, симметричное замыкание которого совпадает с симметричным замыканием $R$, то есть $(R^{\not\sim})^{\sim} = R^{\sim}$.
  - **Транзитивное сокращение** $R^{-}$ — минимальное отношение, транзитивное замыкание которого совпадает с транзитивным замыканием $R$, то есть $(R^{-})^{+} = R^{+}$. Transitive reduction
    Транзитивное сокращение $R^{-}$ отношения $R$ без циклов (в том числе, без петель) можно найти, используя его транзитивное замыкание: $R^{-}_{\text{DAG}} = R \setminus (R \circ R^{+}) = R \setminus \bigcup\limits_{n \geq 2} R^n$.

    Для нахождения транзитивного сокращения отношения без циклов, но с петлями, необходимо запомнить существующие петли, убрать их, осуществить транзитивное сокращение (см. выше), а затем вернуть исходные петли: $R^{-}_{\text{loop-DAG}} = (R^{\neq})^{-} \cup \{(x, x) \mid x\ R\ x\}$.

## 2.3 Некоторые свойства гомогенных бинарных отношений

Возможные свойства гомогенного бинарного отношения $R \subseteq M^2$: Properties of homogeneous relations

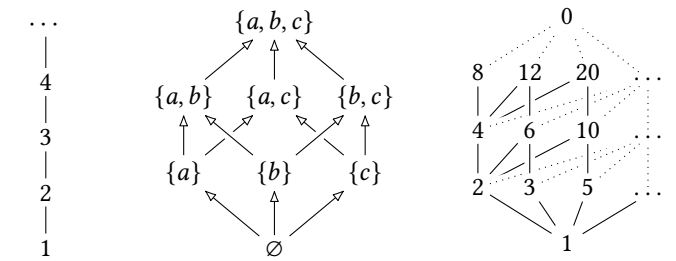
| Свойство | | Формальное определение |
|---|---|---|
| Рефлексивность | Reflexive | $\forall x \in M : x\,R\,x$ |
| Иррефлексивность | Irreflexive | $\forall x \in M : \neg(x\,R\,x)$ |
| Корефлексивность | Coreflexive | $\forall x, y \in M : (x\,R\,y) \to (x = y)$ |
| Симметричность | Symmetric | $\forall x, y \in M : (x\,R\,y) \to (y\,R\,x)$ |
| Антисимметричность | Antisymmetric | $\forall x, y \in M : (x\,R\,y) \wedge (y\,R\,x) \to (x = y)$ |
| Асимметричность | Asymmetric | $\forall x, y \in M : (x\,R\,y) \to \neg(y\,R\,x)$ |
| Транзитивность | Transitive | $\forall x, y, z \in M : (x\,R\,y) \wedge (y\,R\,z) \to (x\,R\,z)$ |
| Антитранзитивность | Antitransitive | $\forall x, y, z \in M : (x\,R\,y) \wedge (y\,R\,z) \to \neg(x\,R\,z))$ |
| Евклидовость (правая) | Right Euclidean | $\forall x, y, z \in M : (x\,R\,y) \wedge (x\,R\,z) \to (y\,R\,z)$ |
| Евклидовость (левая) | Left Euclidean | $\forall x, y, z \in M : (y\,R\,x) \wedge (z\,R\,x) \to (y\,R\,z)$ |
| Связность | Semiconnex | $\forall x, y \in M : (x \neq y) \to (x\,R\,y) \vee (y\,R\,x)$ |
| Сильная связность | Connex | $\forall x, y \in M : (x\,R\,y) \vee (y\,R\,x)$ |
| Плотность | Dense | $\forall x, y \in M : (x\,R\,y) \to \exists z \in M : (x\,R\,z) \wedge (z\,R\,y)$ |

## 2.4 Отношения эквивалентности

* **Отношение толерантности** — *рефлексивное* и *симметричное*. Tolerance relation
* **Отношение эквивалентности** — *рефлексивное*, *симметричное* и *транзитивное*. Equivalence relation
* $[x]_R = \{y \in A \mid x\,R\,y\}$ — **класс эквивалентности** элемента $x \in A$. Equivalence class
* $A/_R = [A]_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ — **разбиение** множества $A$ **на классы эквивалентности**. Quotient set

## 2.5 Отношения порядка — Order theory

* **Предпорядок (квазипорядок)** — *рефлексивное* и *транзитивное* отношение. Preorder
* **Частичный порядок** — *рефлексивное*, *антисимметричное* и *транзитивное* отношение. Partial order
* **Линейный (полный) порядок** — *сильно-связный* частичный порядок. Linear (total) order
* **Строгий частичный порядок** — *иррефл.*, *антисимм.* и *транзитивное* отношение. Strict partial order
* **Строгий линейный (полный) порядок** — *связный* строгий частичный порядок. Strict total order
* **Частично упорядоченное множество** — упорядоченная пара $\langle M, R\rangle$, где $M$ — произвольное множество, $R \subseteq M^2$ — отношение *частичного порядка* на $M$. Partially ordered set (Poset)
* Элемент упорядоченного множества $\langle M, R\rangle$ называется **максимальным**, если он *не меньше других* элементов, то есть *не существует элемента больше*. Дуально, элемент называется **минимальным**, если он *не больше других*, то есть *нет элемента меньше*. Maximal and minimal elements
  $a \in M$ is **maximal** $\leftrightarrow \forall b \neq a : \neg(a\,R\,b) \;\equiv\; \nexists b \neq a : (a\,R\,b) \;\equiv\; \forall b \in M : (a\,R\,b) \to (a = b)$
  $a \in M$ is **minimal** $\leftrightarrow \forall b \neq a : \neg(b\,R\,a) \;\equiv\; \nexists b \neq a : (b\,R\,a) \;\equiv\; \forall b \in M : (b\,R\,a) \to (a = b)$
* Элемент упорядоченного множества $\langle M, R\rangle$ называется **наибольшим**, если он *больше всех* элементов. Дуально, элемент называется **наименьшим**, если он *меньше всех* элементов. Greatest and least elements
  $a \in M$ is **maximum (greatest)** $\leftrightarrow \forall b : (b\,R\,a)$
  $a \in M$ is **minimum (least)** $\leftrightarrow \forall b : (a\,R\,b)$
* $(x \lessdot y) \leftrightarrow (x < y) \wedge \nexists z : ((x < z) \wedge (z < y))$ — **отношение покрытия** ($y$ «*покрывает*» $x$). Covering relation
  - «$<$» — индуцированный *строгий частичный порядок*: $(x < y) \leftrightarrow (x \leq y) \wedge (x \neq y)$
* **Диаграмма Хассе** — визуализация частично упорядоченного множества $\langle M, R\rangle$ в виде графа *транзитивного сокращения* $R^-$. Вершины такого графа — элементы множества $M$, а рёбра (изображаются по возможности направленными вверх) соответствуют *отношению покрытия*. Hasse diagram




$\langle \mathbb{N}^+, \leq\rangle$ $\langle \mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq\rangle$ $\langle \mathbb{N}_0, |\rangle$ (Divisibility)

## 2.6 Некоторые свойства гетерогенных бинарных отношений

Возможные свойства гетерогенного бинарного отношения $R \subseteq X \times Y$: Special types of binary relations

| Отношение | Формальное определение |
|---|---|
| Injective (left-unique) | $\forall x, z \in X\ \forall y \in Y : (x\ R\ y) \wedge (z\ R\ y) \to (x = z)$ |
| Functional (right-unique) | $\forall x \in X\ \forall y, z \in Y : (x\ R\ y) \wedge (x\ R\ z) \to (y = z)$ |
| One-to-One | Injective and Functional |
| One-to-Many | Injective and not Functional |
| Many-to-One | Not Injective and Functional |
| Many-to-Many | Not Injective and not Functional |
| Serial (left-total) | $\forall x \in X : \exists y \in Y : (x\ R\ y)$ |
| Surjective (right-total) | $\forall y \in Y : \exists x \in X : (x\ R\ y)$ |

## 2.7 Функции как отношения

* **Частичная функция** $f : X \nrightarrow Y$ — Functional бинарное отношение. Partial function
* **Функция** $f : X \to Y$ — Functional и Serial бинарное отношение. Function

## 2.8 Матричное представление отношений

Любое бинарное отношение $R \subseteq A \times B$, определённое на паре множеств $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ может быть представлено в виде матрицы $\|R\|$ размера $n \times m$, элементы которой — 0 или 1: Logical matrix

$$\|R\| = \left[r_{i,j}\right] \qquad r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \in R \leftrightarrow a_i \; R \; b_j \\ 0 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \notin R \leftrightarrow a_i \not R \; b_j \end{cases}$$

Пусть $R \subseteq M^2$ — гомогенное бинарное отношение, определённое на множестве $M = \{m_1, \ldots, m_4\}$. Примеры матриц отношений, обладающих некоторыми свойствами:

Reflexive
$\forall x \in M : x \; R \; x$

| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_1$ | 1 | · | · | · |
| $m_2$ | · | 1 | · | · |
| $m_3$ | · | · | 1 | · |
| $m_4$ | · | · | · | 1 |

Irreflexive
$\forall x \in M : \neg(x \; R \; x)$

| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_1$ | 0 | · | · | · |
| $m_2$ | · | 0 | · | · |
| $m_3$ | · | · | 0 | · |
| $m_4$ | · | · | · | 0 |

Coreflexive
$\forall x, y \in M : (x \; R \; y) \to (x = y)$

| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_1$ | · | 0 | 0 | 0 |
| $m_2$ | 0 | · | 0 | 0 |
| $m_3$ | 0 | 0 | · | 0 |
| $m_4$ | 0 | 0 | 0 | · |

Symmetric
$\forall x, y \in M :$
$(x \; R \; y) \to (y \; R \; x)$

| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_1$ | · | 1 | 1 | 1 |
| $m_2$ | 1 | · | 1 | 0 |
| $m_3$ | 1 | 1 | · | 1 |
| $m_4$ | 1 | 0 | 1 | · |

Antisymmetric
$\forall x, y \in M :$
$(x \; R \; y) \wedge (y \; R \; x) \to (x = y)$

| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_1$ | · | · | 0 | 0 |
| $m_2$ | 0 | · | · | · |
| $m_3$ | 1 | 0 | · | · |
| $m_4$ | 1 | 0 | 0 | · |

Asymmetric
$\forall x, y \in M :$
$(x \; R \; y) \to \neg(y \; R \; x)$

| | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_1$ | 0 | 0 | · | · |
| $m_2$ | 1 | 0 | · | · |
| $m_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m_4$ | 0 | 0 | 1 | 0 |

**Легенда:**

| | $m_j$ |
|---|---|
| $m_i$ | 1 |

— $m_i$ и $m_j$ находятся в отношении $R$, т.е. $m_i \; R \; m_j$

| | $m_j$ |
|---|---|
| $m_i$ | 0 |

— $m_i$ и $m_j$ не находятся в отношении $R$, т.е. $m_i \not R \; m_j$

| | $m_j$ |
|---|---|
| $m_i$ | · |

— $m_i$ и $m_j$ могут находиться в отношении $R$, а могут и не находиться