

# 1 Set Theory Cheatsheet

## 1.1 Терминология и обозначения

- \* **Множество** — неупорядоченный набор уникальных элементов. Set
- \* Множество может быть задано с помощью: Set-builder notation
  - перечисления элементов:  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  — множество, состоящее из  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Urelement
  - Например,  $\{\square, \clubsuit, 42\}$  — множество, содержащее квадрат, кошку (или кота) и число 42. 42
  - характеристического свойства:  $\{x \mid P(x)\}$  — множество элементов, обладающих **свойством**  $P$ . Predicate
  - Например,  $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — простое}\}$  — множество простых чисел. Prime number
- \*  $\emptyset = \{\}$  — **пустое** множество. Empty set
- \*  $\mathcal{U}$  — **универсальное** множество (**универсум**). Universal set
- \*  $x \in A$  — элемент  $x$  **принадлежит** множеству  $A$ . Element
  - $1 \in \{1, 2, 3\}$        $\square \in \{\triangle, \square, \circ\}$        $1.25 \in \mathbb{Q}$        $2 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — простое}\}$
- \*  $x \notin A$  — элемент  $x$  **не принадлежит** множеству  $A$ .
  - $9 \notin \{1, 2, 3\}$        $\clubsuit \notin \{\square, 42, \{\clubsuit\}\}$        $\pi \notin \mathbb{Q}$        $42 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — простое}\}$
- \*  $A \subseteq B$  — множество  $A$  является **подмножеством** множества  $B$ , т.е.  $\forall x : x \in A \rightarrow x \in B$ . Subset
  - $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$        $\{\{42\}\} \subseteq \{\{42\}\}$        $\{\square, \square\} \not\subseteq \{a, \square, 9\}$        $\{5\} \not\subseteq \{7, \{5\}\}$
- \*  $A \subset B$  — множество  $A$  является **строгим подмножеством** множества  $B$ , т.е.  $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ . Strict subset
  - $\{c\} \subset \{a, b, c\}$        $\{42\} \not\subset \{42\}$        $\{9, \clubsuit\} \not\subset \{a, \square, 9\}$        $\{5\} \not\subset \{7, \{5\}\}$
- \*  $A = B$  — множества  $A$  и  $B$  содержат одинаковые элементы, т.е.  $\forall x : x \in A \leftrightarrow x \in B$ . Extensionality
  - $\{\triangle, a, \{5\}\} = \{a, \{5\}, \triangle\}$        $\{2, \{\square, \square, \square\}, 2\} = \{2, \{\square\}\}$        $\{6, \emptyset\} \neq \{6\}$

## 1.2 Операции над множествами

- \*  $|A|$  — **мощность** множества  $A$  (число элементов). Cardinality
  - $|\{4, \square, d\}| = 3$        $|\{1, 9, 9, 9, 1\}| = 2$        $|\{\{a, b, c\}, \{3, 5, 9\}\}| = 2$        $|\{1, \{2, 3, 4, \{5\}\}\}| = 2$
- \*  $2^A = \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$  — **булеан** множества  $A$  (множество всех подмножеств). Powerset
  - $\mathcal{P}(\{1, \square, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\square\}, \{\emptyset\}, \{1, \square\}, \{1, \emptyset\}, \{\square, \emptyset\}, \{1, \square, \emptyset\}\}$
- \*  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$  — **пересечение** множеств  $A$  и  $B$ . Intersection
- \*  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$  — **объединение** множеств  $A$  и  $B$ . Union
- \*  $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$  — **разность** множеств  $A$  и  $B$  (дополнение  $A$  до  $B$ ). Set difference
- \*  $\overline{A} = \mathcal{U} \setminus A = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$  — **дополнение** (до универсума) множества  $A$ . Complement
- \*  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  — **симметрическая разность** множеств  $A$  и  $B$ . Symmetric difference
- \*  $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$  — **декартово произведение** множеств  $A$  и  $B$ . Cartesian product
- \*  $\underbrace{A_1 \times \dots \times A_n}_{n \text{ sets}} = \{\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n\text{-tuple}} \mid a_i \in A_i, i \in [1; n]\}$  —  **$n$ -арное декартово произведение** множеств  $A_1, \dots, A_n$ .
- \*  $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}} = \{\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n\text{-кортеж}} \mid a_i \in A, i \in [1; n]\}$  — **декартова степень** множества  $A$ . Tuple

## 1.3 Некоторые свойства и законы

- \* Свойства операций над множествами ( $\forall A$ ):
 

$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \triangle \emptyset = A$
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	$A \cap \mathcal{U} = A$	$A \triangle \mathcal{U} = \overline{A}$
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	$A \triangle A = \emptyset$
$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \triangle \overline{A} = \mathcal{U}$
$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$	$\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$
$ \emptyset  = 0$	$ 2^A  = 2^{ A }$	$ A^n  =  A ^n$
$ \mathbb{N}  =  \mathbb{Q}  = \aleph_0$	$ \mathbb{R}  = \mathfrak{c} =  2^{\mathbb{N}}  = \beth_1$	$ A \times B  =  A  \cdot  B $
$\emptyset \subseteq A$	$2^\emptyset = \{\emptyset\}$	$A^0 = \{()\}$
- \* Законы де Моргана: De Morgan's laws
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- \* Законы поглощения: Absorption law
  - $A \cup (A \cap B) = A$
  - $A \cap (A \cup B) = A$
- \* Мистические законы:
  - $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
  - $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

## 1.4 Диаграммы Венна

## Venn diagram



На предоставленной слева диаграмме Венна для трёх множеств  $A, B, C$  и универсума  $\mathcal{U}$  области отмечены номерами. Для заданного списка областей нарисуйте диаграмму Венна и составьте соответствующую формулу, используя термы  $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  и операторы  $\cup, \cap$ .

1.  $S(1, 4, 6, 8) = S(1, 4, 6) + S(8) =$  // Wolfram //

$= S(1, 4, 6) = A \text{ without } ABC,$

$S(8) = \text{outside of } (A + B + C) //$

$= (A - ABC) + \overline{A + B + C} =$

$= \overline{A} \overline{B} \overline{C} + A + B + C =$

$= A \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \overline{A \cdot A} + \overline{A \cdot B} + \overline{A \cdot C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{A} \cdot \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

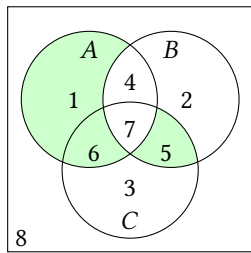
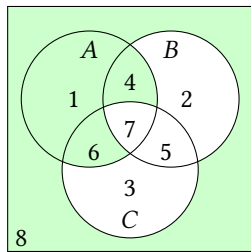
$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} =$



2.  $S(1, 5, 6) = S(1, 6) + S(5) =$  // Wolfram //

$= S(1, 6) = A \text{ without } AB,$

$S(5) = BC \text{ without } ABC //$

$= (A - AB) + (BC - ABC) =$

$= \overline{A \cdot B} + BC \cdot \overline{A \cdot B \cdot C} =$

$= A \cdot (\bar{A} + \bar{B}) + BC \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) =$

$= \overline{A \cdot A} + \overline{A \cdot B} + \overline{A \cdot B \cdot C} + \overline{B \cdot C} + \overline{B \cdot C \cdot A} + \overline{B \cdot C \cdot C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

$= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} =$

## 1.5 Декартово произведение множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$

## $\mathbb{R}^2$ coordinate space

Декартово произведение двух множеств — множество пар. Если представить, что такие пары — элементы пространства  $\mathbb{R}^2$  (точки на плоскости), то возможна следующая геометрическая интерпретация:

