

1. Определите истинность заданных утверждений. Считайте, что  $a$  и  $b$  — урэlementы,  $a \neq b$ .

- |  |  |   |
|--|--|---|
| (a) $a \in \{\{a\}, b\}$                                 | (i) $\{a, a\} \cup \{a, a, a\} = \{a\}$      | (r) $\{\emptyset, \emptyset\} \subset \{\emptyset\}$              |
| (b) $a \in \{a, \{b\}\}$                                 | (j) $\{a, a\} \cap \{a, a, a\} = \{a\}$      | (s) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$  |
| (c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$                             | (k) $\{a, a\} \cap \{a, a, a\} = \{a, a\}$   | (t) $a \in 2^{\{a\}}$   |
| (d) $\{a\} \subset \{a, b\}$                             | (l) $\{a, a, a\} \setminus \{a, a\} = \{a\}$ | (u) $2^{\{a, \emptyset\}} \subset 2^{\{a, b, \emptyset\}}$        |
| (e) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$                   | (m) $\emptyset \in \emptyset$                | (v) $\{a, b\} \subseteq 2^{\{a, b\}}$                             |
| (f) $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a, b\}\}$              | (n) $\emptyset \subseteq \emptyset$          | (w) $\{a, a\} \in 2^{\{a, a\}}$                                   |
| (g) $\{\{a\}, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$      | (o) $\emptyset \subset \emptyset$            | (x) $\{\{a\}, \emptyset\} \subseteq 2^{\{a, a\}}$                 |
| (h) $\{a, a\} \cup \{a, a, a\} =$<br>$\{a, a, a, a, a\}$ | (p) $\emptyset \in \{\emptyset\}$            | (y) $\{a, \{a\}\} \subset 2^{\{a, 2^{\{a\}}\}}$                   |
|  | (q) $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$  | (z) $\{\{a, \{\emptyset\}\}\} \subseteq 2^{\{a, 2^{\emptyset}\}}$ |

2. Дано множество-универсум<sup>1</sup>  $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, 10\}$  и его подмножества:  $A = \{x \mid x \text{ — чётное}\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{ — простое}\}$ <sup>2</sup>,  $C = \{2, 4, 7, 9\}$ . Нарисуйте диаграмму Венна для заданных множеств, отметьте на ней все элементы, а затем найдите:

- |                           |  |                                    |
|---------------------------|--|------------------------------------|
| (a) $B \setminus \bar{C}$ | (c) $\mathcal{U} \setminus (\bar{C} \cup A)$                 | (e) $ 2^{A \setminus C} $          |
| (b) $B \Delta (A \cap C)$ | (d) $ \{A \cup B \cup 2^{\emptyset} \cup 2^{\mathcal{U}}\} $ | (f) $(2^A \cap 2^C) \setminus 2^B$ |

3. Даны следующие множества<sup>3</sup>:  $A = \{1, 2, 4\}$ ,  $B = \{\square, \blacktriangle\} \cup \emptyset$ ,  $C = 2^{\emptyset} \setminus \{\emptyset\}$ ,  $D = \{4, |2^{\{\emptyset, C\}}|\}$ . Внезапно требуется найти:

- |                  |                          |  |
|------------------|--------------------------|--|
| (a) $A \Delta D$ | (c) $B \cap \bar{A}$     | (e) $D^{ C }$                              |
| (b) $C \times B$ | (d) $B \times 2^{\{C\}}$ | (f) $\{D \cap \{A\}\} \times (D \cup  D )$ |

4. Мера Жаккара<sup>4</sup>  $\mathcal{J}(A, B)$  для двух конечных множеств  $A$  и  $B$  определяет степень их похожести и задаётся следующим образом:

$$\mathcal{J}(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

При этом  $\mathcal{J}(\emptyset, \emptyset) = 1$ . Расстояние Жаккара  $d_{\mathcal{J}}(A, B)$  между двумя множествами  $A$  и  $B$  определяет степень их различия и задаётся как  $d_{\mathcal{J}}(A, B) = 1 - \mathcal{J}(A, B)$ .

Докажите следующие утверждения для произвольных конечных множеств  $A$  и  $B$ .

- $\mathcal{J}(A, A) = 1$  и  $d_{\mathcal{J}}(A, A) = 0$ .
- $\mathcal{J}(A, B) = \mathcal{J}(B, A)$  и  $d_{\mathcal{J}}(A, B) = d_{\mathcal{J}}(B, A)$ .
- $\mathcal{J}(A, B) = 1$  и  $d_{\mathcal{J}}(A, B) = 0$  тогда и только тогда, когда  $A = B$ .
- $0 \leq \mathcal{J}(A, B) \leq 1$  и  $0 \leq d_{\mathcal{J}}(A, B) \leq 1$ .
- Для произвольных (необязательно конечных) множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$  выполняется так называемое *неравенство треугольника*<sup>5</sup>:

$$d_{\mathcal{J}}(A, C) \leq d_{\mathcal{J}}(A, B) + d_{\mathcal{J}}(B, C)$$

5. Изобразите на графиках  $\mathbb{R}^2$  следующие множества точек:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\{1, 2, 3\} \times (1; 3]$                               | (d) $\{\langle x, y \rangle \mid y \in \{1, \dots, 5\}, x \in [1; 6 - y)\}$          |
| (b) $[1; 5) \times (1; 4] \setminus \{\langle 2, 3 \rangle\}$ | (e) $\{\langle x, y \rangle \in [1; 5] \times [1; 4] \mid (y \geq x) \vee (x > 4)\}$ |
| (c) $[1; 7] \times (1; 5] \setminus (1; 4] \times (1; 3)$     | (f) $\{\langle x, y \rangle \in (1; 5]^2 \mid 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 \leq 36\}$     |

<sup>1</sup> Здесь под универсумом имеется в виду множество доступных урэlementов. Считайте, что  $\bar{A} = \mathcal{U} \setminus A$ .

<sup>2</sup> Считайте, что 1 **не является** простым числом.

<sup>3</sup>  $\square$  — самый обыкновенный квадрат,  $\blacktriangle$  — самый обыкновенный кот.

<sup>4</sup> Jaccard index

<sup>5</sup> Из (a)-(c) и (e) следует, что  $d_{\mathcal{J}}$  является *метрикой*, что крайне интересно и полезно... для некоторых.

6. Найдите все множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , которые удовлетворяют следующим условиям:

$$A = \{1, |B|, |C|\}$$

$$B = \{2, |A|, |C|\}$$

$$C = \{1, 2, |A|, |B|\}$$

7. Нечёткие множества<sup>6</sup> — обобщение множеств для случаев, когда необходимо описать *вероятностный* или *частичный* характер нахождения элементов во множестве. Каждому элементу  $x \in X$  заданного универсума  $X$  сопоставляется *степень принадлежности*  $\mu(x) \in [0; 1] \subseteq \mathbb{R}$ , задаваемая в виде действительного числа от 0 до 1. Нечёткие множества задаются с помощью перечисления элементов вместе со степенями принадлежности, например,  $F = \{a : 0.4, b : 0.8, c : 0.2, d : 0.9, e : 0.7\}$  и  $R = \{a : 0.6, b : 0.9, c : 0.4, d : 0.1, e : 0.5\}$ .

(a) Дополнение нечёткого множества  $S$  обозначается  $\bar{S}$  и задаётся как множество, в котором степень принадлежности каждого элемента равна  $\mu_{\bar{S}}(x) = 1 - \mu_S(x)$ . Найдите  $\bar{F}$  и  $\bar{R}$ .

(b) Объединение нечётких множеств  $S$  и  $T$  обозначается  $S \cup T$  и задаётся как множество, в котором степень принадлежности каждого элемента есть *максимум* из степеней принадлежности данного элемента в двух исходных множествах  $S$  и  $T$ . Найдите  $F \cup R$ .

(c) Пересечение нечётких множеств  $S \cap T$  задаётся аналогично объединению:  $\mu_{S \cap T}(x) = \min\{\mu_S(x), \mu_T(x)\}$ . Найдите  $F \cap R$ .

(d) Самостоятельно придумайте определение для разности нечётких множеств  $S \setminus T$ . Найдите  $F \setminus R$  и  $R \setminus F$ .

8. Определите счётность или несчётность следующих множеств:

(a) Множество рациональных<sup>7</sup> чисел  $\mathbb{Q}$ .

(b) Объединение *счётного* числа счётных множеств.

(c) Булеан множества натуральных чисел  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

(d) Множество всех функций вида  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

(e) Множество действительных корней всех уравнений вида  $ax^2 + bx + c = 0$  с целочисленными коэффициентами  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

9. Докажите или опровергните следующие утверждения:

(a) Если  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$ , то  $A \subseteq C$ .

(b)  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .

(c)  $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$ , то есть множества комплексных и действительных чисел равномощны.

(d)  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$  при использовании определения пары по Куратовскому:  $\langle x, y \rangle_K = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ .

<sup>6</sup> Fuzzy sets

<sup>7</sup> Рациональное число можно представить в виде дроби  $m/n$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  — целое, а  $n \in \mathbb{N}$  — натуральное.