𝒟омашнее задание #1 — **𝒟искретная математика**

Теория множеств — **Осень 2023**

---

1. Определите истинность заданных утверждений. Считайте, что $a \neq b$ – урэлементы.

   (a) $a \in \{\{a\}, b\}$
   (b) $a \in \{a, \{b\}\}$
   (c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$
   (d) $\{a\} \subset \{a, b\}$
   (e) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$
   (f) $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a, b\}\}$
   (g) $\{\{a\}, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$
   (h) $\varnothing \in \varnothing$
   (i) $\varnothing \subseteq \varnothing$
   (j) $\varnothing \subset \varnothing$
   (k) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
   (l) $\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$
   (m) $\{\varnothing, \varnothing\} \subset \{\varnothing\}$
   (n) $\{\{\varnothing\}\} \subset \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$
   (o) $a \in 2^{\{a\}}$
   (p) $2^{\{a,\varnothing\}} \subset 2^{\{a,b,\varnothing\}}$
   (q) $\{a, b\} \subseteq 2^{\{a,b\}}$
   (r) $\{a, a\} \in 2^{\{a,a\}}$
   (s) $\{\{a\}, \varnothing\} \subseteq 2^{\{a,a\}}$
   (t) $\{a, \{a\}\} \subset 2^{\{a,2^{\{a\}}\}}$
   (u) $\{\{a, \{\varnothing\}\}\} \subseteq 2^{\{a,2^{\varnothing}\}}$

2. Дано множество-универсум[1] $\mathfrak{U} = \{1, 2, \ldots, 10\}$ и его подмножества: $A = \{x \mid x$ – чётное$\}$, $B = \{x \mid x$ – простое[2]$\}$, $C = \{2, 4, 7, 9\}$. Нарисуйте диаграмму Венна для заданных множеств, отметьте на ней все элементы и найдите:

   (a) $B \triangle (A \cap C)$
   (b) $\overline{B} \setminus (A \triangle C)$
   (c) $\overline{A \cup C} \cup (C \triangle B)$
   (d) $|\{A \cup B \cup 2^{\varnothing} \cup 2^{\mathfrak{U}}\}|$
   (e) $(2^A \cap 2^C) \setminus 2^B$
   (f) $2^{B \cap C} \setminus \{2^{|2^{\{\varnothing\}}|}, |\overline{B \cap C}|\}$

3. Даны следующие множества[3]:

   * $A = \{1, 2, 4\}$
   * $B = \{\square, \text{🐈‍⬛}\} \cup \varnothing$
   * $C = 2^{\varnothing} \setminus \{\varnothing\}$
   * $D = \{\text{🐈‍⬛}, |2^{\{\varnothing, C\}}|\}$
   * $E = 2^{A \setminus D} \cap 2^{\{|B \setminus D|\}}$
   * $F = 2^{\{\{\varnothing,\varnothing\} \setminus \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\} \triangle C, \{\varnothing, C\}, 2^{\varnothing}\}}$

   Найти:

   (a) $A \triangle D$
   (b) $E \triangle 2^C$
   (c) $B \times E$
   (d) $E \times 2^B$
   (e) $D^{|C|}$
   (f) F^3

4. Найдите все множества A, B и C, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$A = \{1, |B|, |C|\}$$
$$B = \{2, |A|, |C|\}$$
$$C = \{1, 2, |A|, |B|\}$$

5. Изобразите на графиках $\mathbb{R}^2$ следующие множества точек:

   (a) $\{1, 2, 3\} \times [1; 3]$
   (b) $[1; 4) \times (2; 4] \setminus \{\langle 2, 3 \rangle\}$
   (c) $([1; 6] \times (1; 5]) \setminus ([4; 5] \times (2; 4))$
   (d) $\{\langle x, y \rangle \in [1; 5] \times [1; 4] \mid (y > x) \vee (x \geq 4)\}$
   (e) $\{\langle x, y \rangle \in (1; 5]^2 \mid 4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 \leq 36\}$
   (f) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists z \in \mathbb{N} : x^3 + y^3 = z^3\}$

6. Подробно докажите (или опровергните) следующие утверждения:

   (a) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.
   (b) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
   (c) Множество рациональных[4] чисел $\mathbb{Q}$ счётно.
   (d) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ — несчётное множество.

---

[1] Здесь под универсумом имеется в виду множество доступных урэлементов. Считайте, что $\overline{A} = \mathfrak{U} \setminus A$.

[2] Считайте, что 1 не является простым числом.

[3] $\square$ – самый обыкновенный квадрат, 🐈‍⬛ – самый обыкновенный кот.

[4] Рациональное число можно представить в виде дроби m/n, где $m \in \mathbb{Z}$ — целое, а $n \in \mathbb{N}$ — натуральное.