2 Binary Relations Cheatsheet

2.1 Терминология и обозначения

- $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A,\ b \in B\}$ — **декартово произведение** множеств A и B. Cartesian product
- $A^2 = A \times A$ — **декартов квадрат** множества A. Cartesian square
- $R \subseteq A \times B$ — **бинарное отношение** R, определённое на паре множеств A и B. Binary relation
- $R \subseteq A^2$ — (гомогенное) бинарное отношение на множестве A. Homogeneous relation (endorelation)
- $a\,R\,b$ — элементы a и b **находятся в отношении** R, т.е. $\langle a, b\rangle \in R$. Ordered pair
- $\mathcal{E}_A = \varnothing$ — **пустое** отношение. Empty relation
- $\mathrm{id}_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$ — **тождественное (диагональное)** отношение. Identity relation
- $\mathfrak{U}_A = A^2 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A\}$ — **полное (универсальное)** отношение. Universal relation

2.2 Операции над отношениями

- $R \cup S = \{\langle a, b\rangle \mid (a\,R\,b) \vee (a\,S\,b)\}$ — **объединение** отношений R и S. Union of relations
- $R \cap S = \{\langle a, b\rangle \mid (a\,R\,b) \wedge (a\,S\,b)\}$ — **пересечение** отношений R и S. Intersection of relations
- $R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\} \subseteq B \times A$ — отношение, **обратное** к $R \subseteq A \times B$. Converse relation
- $\overline{R} = \{\langle a, b\rangle \mid \langle a, b\rangle \notin R\}$ — **дополнение** отношения R. Complementary relation
- $R\,;S = S \circ R = \{\langle x, y\rangle \mid \exists z : (x\,R\,z) \wedge (z\,S\,y)\}$ — **композиция** отношений R и S. Composition of relations
  - Если $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$, то $R\,;S \subseteq A \times C$.
- $R^{\circ i+1} = R \circ R^{\circ i}$ — **«композитная» (функциональная) степень** отношения R. Functional power
  При этом $R^{\circ 1} = R$, $R^{\circ 0} = \mathrm{id}_A$. Чаще используется нотация R^i, совпадающая с нотацией *Декартовой степени.*
- $R[M] = \{y \mid \exists x \in M : x\,R\,y\}$ — **применение** отношения R ко множеству M.
- **Замыкание отношения** R относительно свойства P — минимальное (по включению) надмножество R, обладающее свойством P. Closure
  - $R^{=} = R^{r} = R \cup \mathrm{id}_A$ — **рефлексивное замыкание** отношения $R \subseteq A^2$. Reflexive closure
  - $R^{\sim} = R^{s} = R \cup R^{-1}$ — **симметричное замыкание** отношения R. Symmetric closure
  - $R^{+} = R^{t} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$ — **транзитивное замыкание** отношения R, где $R^1 = R$, $R^{k+1} = R^k \circ R$. Transitive closure
  - $R^{\equiv} = ((R^r)^s)^t$ — **рефлексивное симметричное транзитивное замыкание** отношения R. Минимальное отношение эквивалентности, содержащее R. Reflexive symmetric transitive closure
- **Сокращение отношения** R — минимальное отношение, *замыкание* которого совпадает с *замыканием* R.
  - **Рефлексивное сокращение** $R^{\neq} = R \setminus \mathrm{id}_A$ — минимальное отношение, рефлексивное замыкание которого совпадает с рефлексивным замыканием R, то есть $(R^{\neq})^{=} = R^{=}$. Reflexive reduction
  - **Симметричное сокращение** $R^{\nsim}$ — минимальное отношение, симметричное замыкание которого совпадает с симметричным замыканием R, то есть $(R^{\nsim})^{\sim} = R^{\sim}$.
  - **Транзитивное сокращение** R^{-} — минимальное отношение, транзитивное замыкание которого совпадает с транзитивным замыканием R, то есть $(R^{-})^{+} = R^{+}$. Transitive reduction
    Транзитивное сокращение R^{-} отношения R без циклов (в том числе, без петель) можно найти, используя его транзитивное замыкание: $R^{-}_{\text{DAG}} = R \setminus (R \circ R^{+}) = R \setminus \bigcup\limits_{n \geq 2} R^n$.
    Для нахождения транзитивного сокращения отношения без циклов, но с петлями, необходимо запомнить существующие петли, убрать их, осуществить транзитивное сокращение (см. выше), а затем вернуть исходные петли: $R^{-}_{\text{loop-DAG}} = (R^{\neq})^{-} \cup \{(x, x) \mid x\,R\,x\}$.

2.3 Некоторые свойства гомогенных бинарных отношений

Возможные свойства гомогенного бинарного отношения $R \subseteq M^2$: Properties of homogeneous relations

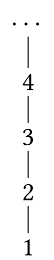
Свойство		Формальное определение
Рефлексивность	Reflexive	$\forall x \in M : x \mathrel{R} x$
Иррефлексивность	Irreflexive	$\forall x \in M : \neg(x \mathrel{R} x)$
Корефлексивность	Coreflexive	$\forall x, y \in M : (x \mathrel{R} y) \to (x = y)$
Симметричность	Symmetric	$\forall x, y \in M : (x \mathrel{R} y) \to (y \mathrel{R} x)$
Антисимметричность	Antisymmetric	$\forall x, y \in M : (x \mathrel{R} y) \land (y \mathrel{R} x) \to (x = y)$
Асимметричность	Asymmetric	$\forall x, y \in M : (x \mathrel{R} y) \to \neg(y \mathrel{R} x)$
Транзитивность	Transitive	$\forall x, y, z \in M : (x \mathrel{R} y) \land (y \mathrel{R} z) \to (x \mathrel{R} z)$
Антитранзитивность	Antitransitive	$\forall x, y, z \in M : (x \mathrel{R} y) \land (y \mathrel{R} z) \to \neg(x \mathrel{R} z))$
Евклидовость (правая)	Right Euclidean	$\forall x, y, z \in M : (x \mathrel{R} y) \land (x \mathrel{R} z) \to (y \mathrel{R} z)$
Евклидовость (левая)	Left Euclidean	$\forall x, y, z \in M : (y \mathrel{R} x) \land (z \mathrel{R} x) \to (y \mathrel{R} z)$
Связность	Semiconnex	$\forall x, y \in M : (x \neq y) \to (x \mathrel{R} y) \lor (y \mathrel{R} x)$
Сильная связность	Connex	$\forall x, y \in M : (x \mathrel{R} y) \lor (y \mathrel{R} x)$
Плотность	Dense	$\forall x, y \in M : (x \mathrel{R} y) \to \exists z \in M : (x \mathrel{R} z) \land (z \mathrel{R} y)$

2.4 Отношения эквивалентности

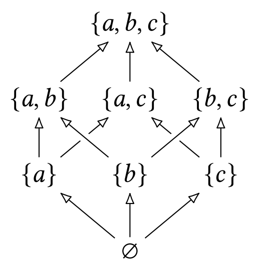
* **Отношение толерантности** — *рефлексивное* и *симметричное.* Tolerance relation
* **Отношение эквивалентности** — *рефлексивное*, *симметричное* и *транзитивное.* Equivalence relation
* $[x]_R = \{y \in A \mid x \mathrel{R} y\}$ — **класс эквивалентности** элемента $x \in A$. Equivalence class
* $A/_R = [A]_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ — **разбиение** множества A **на классы эквивалентности**. Quotient set

2.5 Отношения порядка Order theory

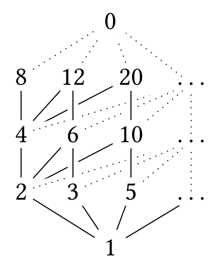
* **Предпорядок (квазипорядок)** — *рефлексивное* и *транзитивное* отношение. Preorder
* **Частичный порядок** — *рефлексивное*, *антисимметричное* и *транзитивное* отношение. Partial order
* **Линейный (полный) порядок** — *сильно-связный* частичный порядок. Linear (total) order
* **Строгий частичный порядок** — *иррефл.*, *антисимм.* и *транзитивное* отношение. Strict partial order
* **Строгий линейный (полный) порядок** — *связный* строгий частичный порядок. Strict total order
* **Частично упорядоченное множество** — упорядоченная пара $\langle M, R\rangle$, где M — произвольное множество, $R \subseteq M^2$ — отношение *частичного порядка* на M. Partially ordered set (Poset)
* Элемент упорядоченного множества $\langle M, R\rangle$ называется **максимальным**, если он *не меньше других* элементов, то есть *не существует элемента больше*. Дуально, элемент называется **минимальным**, если он *не больше других*, то есть *нет элемента меньше*. Maximal and minimal elements
  $a \in M$ is **maximal** $\leftrightarrow \forall b \neq a : \neg(a \mathrel{R} b) \;\equiv\; \nexists b \neq a : (a \mathrel{R} b) \;\equiv\; \forall b \in M : (a \mathrel{R} b) \to (a = b)$
  $a \in M$ is **minimal** $\leftrightarrow \forall b \neq a : \neg(b \mathrel{R} a) \;\equiv\; \nexists b \neq a : (b \mathrel{R} a) \;\equiv\; \forall b \in M : (b \mathrel{R} a) \to (b = a)$
* Элемент упорядоченного множества $\langle M, R\rangle$ называется **наибольшим**, если он *больше всех* элементов. Дуально, элемент называется **наименьшим**, если он *меньше всех* элементов. Greatest and least elements
  $a \in M$ is **maximum (greatest)** $\leftrightarrow \forall b : (b \mathrel{R} a)$
  $a \in M$ is **minimum (least)** $\leftrightarrow \forall b : (a \mathrel{R} b)$
* $(x \lessdot y) \leftrightarrow (x < y) \land \nexists z : ((x < z) \land (z < y))$ — **отношение покрытия** (y «*покрывает*» x). Covering relation
  * «$<$» — индуцированный *строгий частичный порядок*: $(x < y) \leftrightarrow (x \leq y) \land (x \neq y)$
* **Диаграмма Хассе** — визуализация частично упорядоченного множества $\langle M, R\rangle$ в виде графа *транзитивного сокращения* R^{-}. Вершины такого графа — элементы множества M, а рёбра (изображаются по возможности направленными вверх) соответствуют *отношению покрытия*. Hasse diagram



$\langle \mathbb{N}^{+}, \leq \rangle$



$\langle \mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$



$\langle \mathbb{N}_0, | \rangle$ (Divisibility)

2.6 Некоторые свойства гетерогенных бинарных отношений

Возможные свойства гетерогенного бинарного отношения $R \subseteq X \times Y$: Special types of binary relations

Отношение	Формальное определение
Injective (left-unique)	$\forall x, z \in X\ \forall y \in Y : (x\ R\ y) \land (z\ R\ y) \to (x = z)$
Functional (right-unique)	$\forall x \in X\ \forall y, z \in Y : (x\ R\ y) \land (x\ R\ z) \to (y = z)$
One-to-One	Injective and Functional
One-to-Many	Injective and not Functional
Many-to-One	Not Injective and Functional
Many-to-Many	Not Injective and not Functional
Serial (left-total)	$\forall x \in X : \exists y \in Y : (x\ R\ y)$
Surjective (right-total)	$\forall y \in Y : \exists x \in X : (x\ R\ y)$

2.7 Функции как отношения

* **Частичная функция** $f : X \nrightarrow Y$ — Functional бинарное отношение. Partial function
* **Функция** $f : X \to Y$ — Functional и Serial бинарное отношение. Function

2.8 Матричное представление отношений

Любое бинарное отношение $R \subseteq A \times B$, определённое на паре множеств $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ может быть представлено в виде матрицы $\|R\|$ размера $n \times m$, элементы которой — 0 или 1: Logical matrix

$$\|R\| = \left[r_{i,j}\right] \qquad r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \in R \leftrightarrow a_i \mathrel{R} b_j \\ 0 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \notin R \leftrightarrow a_i \not\mathrel{R} b_j \end{cases}$$

Пусть $R \subseteq M^2$ — гомогенное бинарное отношение, определённое на множестве $M = \{m_1, \dots, m_4\}$. Примеры матриц отношений, обладающих некоторыми свойствами:

Reflexive
$\forall x \in M : x \mathrel{R} x$

	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1	1	·	·	·
m_2	·	1	·	·
m_3	·	·	1	·
m_4	·	·	·	1

Irreflexive
$\forall x \in M : \neg(x \mathrel{R} x)$

	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1	0	·	·	·
m_2	·	0	·	·
m_3	·	·	0	·
m_4	·	·	·	0

Coreflexive
$\forall x, y \in M : (x \mathrel{R} y) \to (x = y)$

	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1	·	0	0	0
m_2	0	·	0	0
m_3	0	0	·	0
m_4	0	0	0	·

Symmetric
$\forall x, y \in M :$
$(x \mathrel{R} y) \to (y \mathrel{R} x)$

	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1	·	0	1	0
m_2	0	·	0	0
m_3	1	0	·	1
m_4	0	0	1	·

Antisymmetric
$\forall x, y \in M :$
$(x \mathrel{R} y) \land (y \mathrel{R} x) \to (x = y)$

	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1	·	·	0	·
m_2	0	·	0	0
m_3	1	1	·	0
m_4	0	1	1	·

Asymmetric
$\forall x, y \in M :$
$(x \mathrel{R} y) \to \neg(y \mathrel{R} x)$

	m_1	m_2	m_3	m_4
m_1	0	·	·	·
m_2	0	0	·	0
m_3	0	0	0	·
m_4	0	1	0	0

Легенда:

$\begin{array}{cc} & m_j \\ m_i & \boxed{1} \end{array}$ — m_i и m_j находятся в отношении R, т.е. $m_i \mathrel{R} m_j$

$\begin{array}{cc} & m_j \\ m_i & \boxed{0} \end{array}$ — m_i и m_j не находятся в отношении R, т.е. $m_i \not\mathrel{R} m_j$

$\begin{array}{cc} & m_j \\ m_i & \boxed{\cdot} \end{array}$ — m_i и m_j могут находиться в отношении R, а могут и не находиться