

2 Binary Relations Cheatsheet

2.1 Терминология и обозначения

- * $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$ — **декартово произведение** множеств A и B . Cartesian product
- * $A^2 = A \times A$ — **декартов квадрат** множества A . Cartesian square
- * $R \subseteq A \times B$ — **бинарное отношение** R , определённое на паре множеств A и B . Binary relation
- * $R \subseteq A^2$ — (гомогенное) бинарное отношение на множестве A . Homogeneous relation (endorelation)
- * $a R b$ — элементы a и b **находятся в отношении** R , т.е. $\langle a, b \rangle \in R$. Ordered pair
- * $\mathcal{E}_A = \emptyset$ — **пустое** отношение. Empty relation
- * $\text{id}_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ — **тождественное (диагональное)** отношение. Identity relation
- * $\mathcal{U}_A = A^2 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A\}$ — **полное (универсальное)** отношение. Universal relation

2.2 Операции над отношениями

- * $R \cup S = \{\langle a, b \rangle \mid (a R b) \vee (a S b)\}$ — **объединение** отношений R и S . Union of relations
- * $R \cap S = \{\langle a, b \rangle \mid (a R b) \wedge (a S b)\}$ — **пересечение** отношений R и S . Intersection of relations
- * $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\} \subseteq B \times A$ — отношение, **обратное** к $R \subseteq A \times B$. Converse relation
- * $\bar{R} = \{\langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \notin R\}$ — **дополнение** отношения R . Complementary relation
- * $R; S = S \circ R = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z : (x R z) \wedge (z S y)\}$ — **композиция** отношений R и S . Composition of relations
 - Если $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$, то $R; S \subseteq A \times C$.
- * $R^{oi+1} = R \circ R^{oi}$ — «**композиционная**» (**функциональная**) **степень** отношения R . Functional power

При этом $R^{o1} = R$, $R^{o0} = \text{id}_A$. Чаше используется нотация R^i , совпадающая с нотацией *Декартовой степени*.
- * $R[M] = \{y \mid \exists x \in M : x R y\}$ — **применение** отношения R ко множеству M .
- * **Замыкание отношения** R относительно свойства P — минимальное (по включению) надмножество R , обладающее свойством P . Closure
 - $R^= = R^r = R \cup \text{id}_A$ — **рефлексивное замыкание** отношения $R \subseteq A^2$. Reflexive closure
 - $R^\sim = R^s = R \cup R^{-1}$ — **симметричное замыкание** отношения R . Symmetric closure
 - $R^+ = R^t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$ — **транзитивное замыкание** отношения R , где $R^1 = R$, $R^{k+1} = R^k \circ R$. Transitive closure
 - $R^\equiv = ((R^r)^s)^t$ — **рефлексивное симметричное транзитивное замыкание** отношения R . Минимальное отношение эквивалентности, содержащее R . Reflexive symmetric transitive closure
- * **Сокращение отношения** R — минимальное отношение, замыкание которого совпадает с замыканием R .
 - Рефлексивное сокращение** $R^\# = R \setminus \text{id}_A$ — минимальное отношение, рефлексивное замыкание которого совпадает с рефлексивным замыканием R , то есть $(R^\#)^= = R^=$. Reflexive reduction
 - Симметричное сокращение** R^* — минимальное отношение, симметричное замыкание которого совпадает с симметричным замыканием R , то есть $(R^*)^\sim = R^\sim$.
 - Транзитивное сокращение** R^- — минимальное отношение, транзитивное замыкание которого совпадает с транзитивным замыканием R , то есть $(R^-)^+ = R^+$. Transitive reduction

Транзитивное сокращение R^- отношения R без циклов (в том числе, без петель) можно найти, используя его транзитивное замыкание: $R_{\text{DAG}}^- = R \setminus (R \circ R^+) = R \setminus \bigcup_{n \geq 2} R^n$.

Для нахождения транзитивного сокращения отношения без циклов, но с петлями, необходимо запомнить существующие петли, убрать их, осуществить транзитивное сокращение (см. выше), а затем вернуть исходные петли: $R_{\text{loop-DAG}}^- = (R^\#)^- \cup \{(x, x) \mid x R x\}$.

2.3 Некоторые свойства гомогенных бинарных отношений

Возможные свойства гомогенного бинарного отношения $R \subseteq M^2$:

Properties of homogeneous relations

Свойство	Формальное определение
Рефлексивность	Reflexive $\forall x \in M : x R x$
Иррефлексивность	Irreflexive $\forall x \in M : \neg(x R x)$
Корефлексивность	Coreflexive $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (x = y)$
Симметричность	Symmetric $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (y R x)$
Антисимметричность	Antisymmetric $\forall x, y \in M : (x R y) \wedge (y R x) \rightarrow (x = y)$
Асимметричность	Asymmetric $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow \neg(y R x)$
Транзитивность	Transitive $\forall x, y, z \in M : (x R y) \wedge (y R z) \rightarrow (x R z)$
Антитранзитивность	Antitransitive $\forall x, y, z \in M : (x R y) \wedge (y R z) \rightarrow \neg(x R z)$
Евклидовость (правая)	Right Euclidean $\forall x, y, z \in M : (x R y) \wedge (x R z) \rightarrow (y R z)$
Евклидовость (левая)	Left Euclidean $\forall x, y, z \in M : (y R x) \wedge (z R x) \rightarrow (y R z)$
Связность	Semiconnex $\forall x, y \in M : (x \neq y) \rightarrow (x R y) \vee (y R x)$
Сильная связность	Connex $\forall x, y \in M : (x R y) \vee (y R x)$
Плотность	Dense $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow \exists z \in M : (x R z) \wedge (z R y)$

2.4 Отношения эквивалентности

- * **Отношение толерантности** — рефлексивное и симметричное.
- * **Отношение эквивалентности** — рефлексивное, симметричное и транзитивное.
- * $[x]_R = \{y \in A \mid x R y\}$ — **класс эквивалентности** элемента $x \in A$.
- * $A/R = [A]_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ — **разбиение** множества A на **классы эквивалентности**.

Tolerance relation
Equivalence relation
Equivalence class
Quotient set

2.5 Отношения порядка

- * **Предпорядок** (квазипорядок) — рефлексивное и транзитивное отношение.
- * **Частичный порядок** — рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение.
- * **Линейный (полный) порядок** — сильно-связный частичный порядок.
- * **Строгий частичный порядок** — иррефл., антисимм. и транзитивное отношение.
- * **Строгий линейный (полный) порядок** — связный строгий частичный порядок.
- * **Частично упорядоченное множество** — упорядоченная пара $\langle M, R \rangle$, где M — произвольное множество, $R \subseteq M^2$ — отношение **частичного порядка** на M .
- * Элемент упорядоченного множества $\langle M, R \rangle$ называется **максимальным**, если он не меньше других элементов, то есть не существует элемента больше. Дуально, элемент называется **минимальным**, если он не больше других, то есть нет элемента меньше.
- * Элемент упорядоченного множества $\langle M, R \rangle$ называется **наибольшим**, если он больше всех элементов. Дуально, элемент называется **наименьшим**, если он меньше всех элементов.
- * $(x < y) \leftrightarrow (x < y) \wedge \nexists z : ((x < z) \wedge (z < y))$ — **отношение покрытия** (y «покрывает» x).
- * **Диаграмма Хассе** — визуализация частично упорядоченного множества $\langle M, R \rangle$ в виде графа транзитивного сокращения R^- . Вершины такого графа — элементы множества M , а рёбра (изображаются по возможности направленными вверх) соответствуют отношению покрытия.

Order theory
Preorder
Partial order
Linear (total) order
Strict partial order
Strict total order

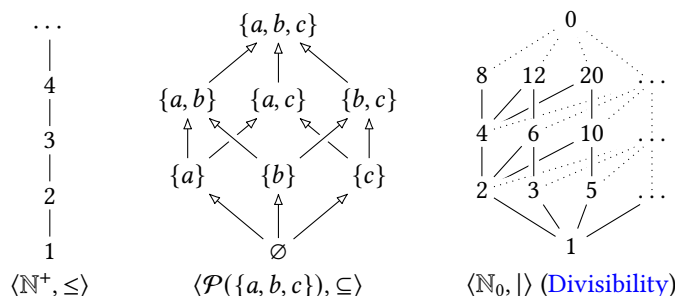
Partially ordered set (Poset)

Maximal and minimal elements

Greatest and least elements

Covering relation

Hasse diagram



2.6 Некоторые свойства гетерогенных бинарных отношений

Возможные свойства гетерогенного бинарного отношения $R \subseteq X \times Y$:

Special types of binary relations

Отношение	Формальное определение
Injective (left-unique)	$\forall x, z \in X \forall y \in Y : (x R y) \wedge (z R y) \rightarrow (x = z)$
Functional (right-unique)	$\forall x \in X \forall y, z \in Y : (x R y) \wedge (x R z) \rightarrow (y = z)$
One-to-One	Injective and Functional
One-to-Many	Injective and not Functional
Many-to-One	Not Injective and Functional
Many-to-Many	Not Injective and not Functional
Serial (left-total)	$\forall x \in X : \exists y \in Y : (x R y)$
Surjective (right-total)	$\forall y \in Y : \exists x \in X : (x R y)$

2.7 Функции как отношения

- * Частичная функция $f : X \rightarrowtail Y$ – Functional бинарное отношение.
 - * Функция $f : X \rightarrow Y$ – Functional и Serial бинарное отношение.
- Partial function
Function

2.8 Матричное представление отношений

Любое бинарное отношение $R \subseteq A \times B$, определённое на паре множеств $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ может быть представлено в виде матрицы $\|R\|$ размера $n \times m$, элементы которой — 0 или 1: [Logical matrix](#)

$$\|R\| = [r_{i,j}] \quad r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \in R \leftrightarrow a_i R b_j \\ 0 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \notin R \leftrightarrow a_i \not R b_j \end{cases}$$

Пусть $R \subseteq M^2$ — гомогенное бинарное отношение, определённое на множестве $M = \{m_1, \dots, m_4\}$. Примеры матриц отношений, обладающих некоторыми свойствами:

Reflexive

$\forall x \in M : x R x$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	1	·	·	·
m_2	·	1	·	·
m_3	·	·	1	·
m_4	·	·	·	1

Irreflexive

$\forall x \in M : \neg(x R x)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	0	·	·	·
m_2	·	0	·	·
m_3	·	·	0	·
m_4	·	·	·	0

Coreflexive

$\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (x = y)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	·	0	0	0
m_2	0	·	0	0
m_3	0	0	·	0
m_4	0	0	0	·

Symmetric

$\forall x, y \in M :$
 $(x R y) \rightarrow (y R x)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	·	1	0	1
m_2	1	·	0	1
m_3	0	0	·	0
m_4	1	1	0	·

Antisymmetric

$\forall x, y \in M :$
 $(x R y) \wedge (y R x) \rightarrow (x = y)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	·	0	·	·
m_2	1	·	0	0
m_3	0	1	·	·
m_4	0	1	0	·

Asymmetric

$\forall x, y \in M :$
 $(x R y) \rightarrow \neg(y R x)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	0	·	·	0
m_2	0	0	·	0
m_3	0	0	0	0
m_4	1	1	1	0

Легенда:

m_i	m_j	1	— m_i и m_j находятся в отношении R , т.е. $m_i R m_j$
m_i	m_j	0	— m_i и m_j не находятся в отношении R , т.е. $m_i \not R m_j$
m_i	m_j	·	— m_i и m_j могут находиться в отношении R , а могут и не находиться