1 Set Theory Cheatsheet

1.1 Терминология и обозначения

- **Множество** — *неупорядоченный* набор *уникальных* элементов. Set
- Множество может быть задано с помощью: Set-builder notation
  - перечисления элементов: $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — множество, состоящее из n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Urelement
    - Например, $\{\square, 🐈, 42\}$ — множество, содержащее квадрат, кошку (или кота) и число 42. 42
  - характеристического свойства: $\{x \mid P(x)\}$ — множество элементов, обладающих **свойством** P. Predicate
    - Например, $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — простое}\}$ — множество простых чисел. Prime number
- $\varnothing = \{\}$ — **пустое** множество. Empty set
- $\mathfrak{U}$ — **универсальное** множество (**универсум**). Universal set
- $x \in A$ — элемент x **принадлежит** множеству A. Element
  - $1 \in \{1, 2, 3\}$ $\quad \square \in \{\triangle, \square, \bigcirc\}$ $\quad 1.25 \in \mathbb{Q}$ $\quad 2 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — простое}\}$
- $x \notin A$ — элемент x **не принадлежит** множеству A.
  - $9 \notin \{1, 2, 3\}$ $\quad 🐈 \notin \{\square, 42, \{🐈\}\}$ $\quad \pi \notin \mathbb{Q}$ $\quad 42 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ — простое}\}$
- $A \subseteq B$ — множество A является **подмножеством** множества B, т.е. $\forall x : x \in A \to x \in B$. Subset
  - $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ $\quad \{\{42\}\} \subseteq \{\{42\}\}$ $\quad \{\bigcirc, \square\} \nsubseteq \{a, \bigcirc, 9\}$ $\quad \{5\} \nsubseteq \{7, \{5\}\}$
- $A \subset B$ — множество A является **строгим подмножеством** множества B, т.е. $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Strict subset
  - $\{c\} \subset \{a, b, c\}$ $\quad \{42\} \not\subset \{42\}$ $\quad \{9, 🐈\} \not\subset \{a, \bigcirc, 9\}$ $\quad \{5\} \not\subset \{7, \{5\}\}$
- $A = B$ — множества A и B содержат одинаковые элементы, т.е. $\forall x : x \in A \leftrightarrow x \in B$. Extensionality
  - $\{\triangle, a, \{5\}\} = \{a, \{5\}, \triangle\}$ $\quad \{2, \{\square, \square, \square\}, 2\} = \{2, \{\square\}\}$ $\quad \{6, \varnothing\} \neq \{6\}$

1.2 Операции над множествами

- $|A|$ — **мощность** множества A (число элементов). Cardinality
  - $|\{4, \square, d\}| = 3$ $\quad |\{1, 9, 9, 9, 1\}| = 2$ $\quad |\{\{a, b, c\}, \{3, 5, 9\}\}| = 2$ $\quad |\{1, \{2, 3, 4, \{5\}\}\}| = 2$
- $2^A = \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ — **булеан** множества A (множество всех подмножеств). Powerset
  - $\mathcal{P}(\{1, \square, \varnothing\}) = \{\varnothing,\ \{1\}, \{\square\}, \{\varnothing\},\ \{1, \square\}, \{1, \varnothing\}, \{\square, \varnothing\},\ \{1, \square, \varnothing\}\}$
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$ — **пересечение** множеств A и B. Intersection
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$ — **объединение** множеств A и B. Union
- $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \ \land\ x \notin B\}$ — **разность** множеств A и B (дополнение A до B). Set difference
- $\overline{A} = \mathfrak{U} \setminus A = \{x \in \mathfrak{U} \mid x \notin A\}$ — **дополнение** (до универсума) множества A. Complement
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ — **симметрическая разность** множеств A и B. Symmetric difference
- $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A,\ b \in B\}$ — **декартово произведение** множеств A и B. Cartesian product
- $\underbrace{A_1 \times \dots \times A_n}_{n \text{ sets}} = \{\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n\text{-tuple}} \mid a_i \in A_i,\ i \in [1; n]\}$ — n-**арное декартово произведение** множеств $A_1, \dots, A_n$.
- $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}} = \{\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n\text{-кортеж}} \mid a_i \in A,\ i \in [1; n]\}$ — **декартова степень** множества A. Tuple

1.3 Некоторые свойства и законы

- Свойства операций над множествами ($\forall A$):

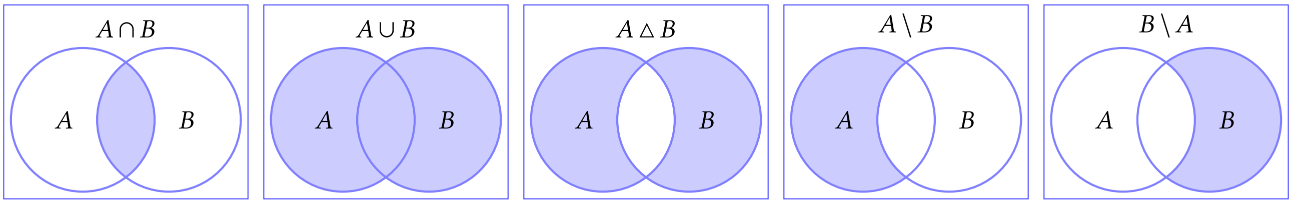
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \triangle \varnothing = A$
$A \cup \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$	$A \cap \mathfrak{U} = A$	$A \triangle \mathfrak{U} = \overline{A}$
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	$A \triangle A = \varnothing$
$A \cup \overline{A} = \mathfrak{U}$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	$A \triangle \overline{A} = \mathfrak{U}$
$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\varnothing} = \mathfrak{U}$	$\overline{\mathfrak{U}} = \varnothing$
$\lvert\varnothing\rvert = 0$	$\lvert 2^A\rvert = 2^{\lvert A\rvert}$	$\lvert A^n\rvert = \lvert A\rvert^n$
$\lvert\mathbb{N}\rvert = \lvert\mathbb{Q}\rvert = \aleph_0$	$\lvert\mathbb{R}\rvert = \mathfrak{c} = \lvert 2^{\mathbb{N}}\rvert = \beth_1$	$\lvert A \times B\rvert = \lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$
$\varnothing \subseteq A$	$2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$	$A^0 = \{()\}$

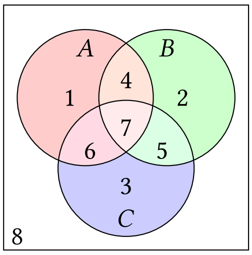
- Законы де Моргана: De Morgan's laws
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Законы поглощения: Absorption law
  - $A \cup (A \cap B) = A$
  - $A \cap (A \cup B) = A$
- Мистические законы:
  - $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
  - $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Source code can be found at https://github.com/Lipen/discrete-math-course

1.4 Диаграммы Венна

Venn diagram





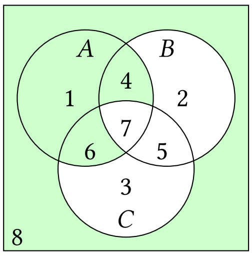
На предоставленной слева диаграмме Венна для трёх множеств A, B, C и универсума $\mathfrak{U}$ области отмечены номерами. Для заданного списка областей нарисуйте диаграмму Венна и составьте соответствующую формулу, используя термы A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ и операторы $\cup$, $\cap$.

1. $\mathcal{S}(1,4,6,8) = \mathcal{S}(1,4,6) + \mathcal{S}(8) =$ // Wolfram //

$= // \ \mathcal{S}(1,4,6) = A$ without ABC,

$\mathcal{S}(8) =$ outside of $(A+B+C)$ // $=$

$$= (A - ABC) + \overline{A+B+C} = \quad \textit{правило: } A - B = A\overline{B}$$
$$= A\overline{ABC} + \overline{A+B+C} = \quad \textit{два де Моргана}$$
$$= A\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} = \quad \textit{раскрываем скобку, сокращаем } A\overline{A} = \varnothing$$
$$= \cancel{A\overline{A}}^{\varnothing} + A\overline{B} + A\overline{C} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} = \quad \textit{выносим } \overline{B} \textit{ за скобку}$$
$$= \overline{B}\cdot(A + \overline{A}\cdot\overline{C}) + A\overline{C} = \quad \textit{закон поглощения: } A + \overline{A}B = A + B$$
$$= \overline{B}\cdot(A + \overline{C}) + A\overline{C} = \quad \textit{раскрываем скобку}$$
$$= A\cdot\overline{B} + \overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{C}$$

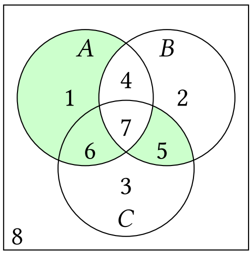


2. $\mathcal{S}(1,5,6) = \mathcal{S}(1,6) + \mathcal{S}(5) =$ // Wolfram //

$= // \ \mathcal{S}(1,6) = A$ without AB,

$\mathcal{S}(5) = BC$ without ABC // $=$

$$= (A - AB) + (BC - ABC) = \quad \textit{правило: } A - B = A\overline{B}$$
$$= A\overline{AB} + BC\overline{ABC} = \quad \textit{два де Моргана}$$
$$= A\cdot(\overline{A}+\overline{B}) + BC\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) = \quad \textit{раскрываем скобку}$$
$$= \cancel{A\overline{A}}^{\varnothing} + A\overline{B} + \overline{A}BC + \cancel{BC\overline{B}}^{\varnothing} + \cancel{BC\overline{C}}^{\varnothing} = \quad \textit{сокращаем } A\overline{A} = \varnothing$$
$$= A\overline{B} + \overline{A}BC$$

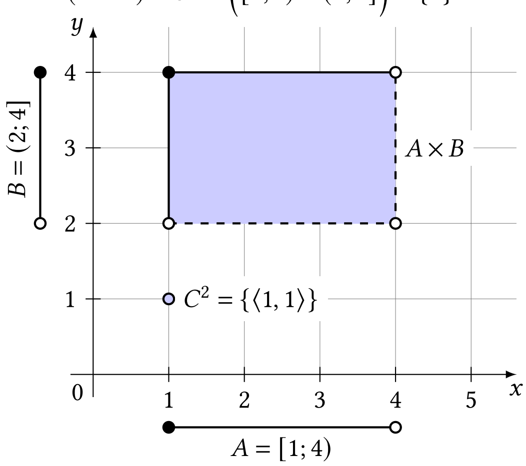


1.5 Декартово произведение множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ coordinate space

Декартово произведение двух множеств — множество пар. Если представить, что такие пары — элементы пространства $\mathbb{R}^2$ (точки на плоскости), то возможна следующая геометрическая интерпретация:

$$(A \times B) \cup C^2 = \Big([1;4) \times (2;4]\Big) \cup \{1\}^2$$



$$(A \times B) \setminus (C \times D) = \Big((1;5] \times (1;4]\Big) \setminus \Big([2;3] \times (2;3)\Big)$$