𝒟омашнее задание #1 — **Теория множеств**

𝒟искретная математика — **Осень 2024**

1. Определите истинность заданных утверждений. Считайте, что a и b — урэлементы, $a \neq b$.
   (a) $a \in \{\{a\}, b\}$
   (b) $a \in \{a, \{b\}\}$
   (c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$
   (d) $\{a\} \subset \{a, b\}$
   (e) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$
   (f) $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a, b\}\}$
   (g) $\{\{a\}, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$
   (h) $\{a, a\} \cup \{a, a, a\} = \{a, a, a, a, a\}$
   (i) $\{a, a\} \cup \{a, a, a\} = \{a\}$
   (j) $\{a, a\} \cap \{a, a, a\} = \{a\}$
   (k) $\{a, a\} \cap \{a, a, a\} = \{a, a\}$
   (l) $\{a, a, a\} \setminus \{a, a\} = \{a\}$
   (m) $\varnothing \in \varnothing$
   (n) $\varnothing \subseteq \varnothing$
   (o) $\varnothing \subset \varnothing$
   (p) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
   (q) $\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$
   (r) $\{\varnothing, \varnothing\} \subset \{\varnothing\}$
   (s) $\{\{\varnothing\}\} \subset \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$
   (t) $a \in 2^{\{a\}}$
   (u) $2^{\{a,\varnothing\}} \subset 2^{\{a,b,\varnothing\}}$
   (v) $\{a, b\} \subseteq 2^{\{a,b\}}$
   (w) $\{a, a\} \in 2^{\{a,a\}}$
   (x) $\{\{a\}, \varnothing\} \subseteq 2^{\{a,a\}}$
   (y) $\{a, \{a\}\} \subset 2^{\{a,2^{\{a\}}\}}$
   (z) $\{\{a, \{\varnothing\}\}\} \subseteq 2^{\{a,2^{\varnothing}\}}$

2. Дано множество-универсум[1] $\mathfrak{U} = \{1, 2, \ldots, 10\}$ и его подмножества: $A = \{x \mid x$ — чётное$\}$, $B = \{x \mid x$ — простое[2]$\}$, $C = \{2, 4, 7, 9\}$. Нарисуйте диаграмму Венна для заданных множеств, отметьте на ней все элементы, а затем найдите:
   (a) $B \setminus \overline{C}$
   (b) $B \triangle (A \cap C)$
   (c) $\mathfrak{U} \setminus (\overline{C} \cup A)$
   (d) $|\{A \cup B \cup 2^{\varnothing} \cup 2^{\mathfrak{U}}\}|$
   (e) $|2^{A \setminus C}|$
   (f) $(2^A \cap 2^C) \setminus 2^B$

3. Даны следующие множества[3]: $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{\square,$ 🐈‍⬛$\} \cup \varnothing$, $C = 2^{\varnothing} \setminus \{\varnothing\}$, $D = \{4, |2^{\{\varnothing, C\}}|\}$. Внезапно требуется найти:
   (a) $A \triangle D$
   (b) $C \times B$
   (c) $B \cap \overline{A}$
   (d) $B \times 2^{\{C\}}$
   (e) $D^{|C|}$
   (f) $\{D \cap \{A\}\} \times (D \cup \{|D|\})$

4. Мера Жаккара[4] $\mathcal{J}(A, B)$ для двух конечных множеств A и B определяет степень их похожести и задаётся следующим образом:
$$\mathcal{J}(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$
   При этом $\mathcal{J}(\varnothing, \varnothing) = 1$. Расстояние Жаккара $d_{\mathcal{J}}(A, B)$ между двумя множествами A и B определяет степень их различия и задаётся как $d_J(A, B) = 1 - \mathcal{J}(A, B)$.
   Докажите следующие утверждения для произвольных конечных множеств A и B.
   (a) $\mathcal{J}(A, A) = 1$ и $d_{\mathcal{J}}(A, A) = 0$.
   (b) $\mathcal{J}(A, B) = \mathcal{J}(B, A)$ и $d_{\mathcal{J}}(A, B) = d_{\mathcal{J}}(B, A)$.
   (c) $\mathcal{J}(A, B) = 1$ и $d_{\mathcal{J}}(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$.
   (d) $0 \leq \mathcal{J}(A, B) \leq 1$ и $0 \leq d_{\mathcal{J}}(A, B) \leq 1$.
   (e) Для произвольных множеств A, B и C выполняется *неравенство треугольника*[5]:
$$d_{\mathcal{J}}(A, C) \leq d_{\mathcal{J}}(A, B) + d_{\mathcal{J}}(B, C)$$

5. Изобразите на графиках $\mathbb{R}^2$ следующие множества точек:
   (a) $\{1, 2, 3\} \times (1; 3]$
   (b) $[1; 5) \times (1; 4] \setminus \{\langle 2, 3\rangle\}$
   (c) $[1; 7] \times (1; 5] \setminus (1; 4] \times (1; 3)$
   (d) $\{\langle x, y\rangle \mid y \in \{1, \ldots, 5\}, x \in [1; 6 - y)\}$
   (e) $\{\langle x, y\rangle \in [1; 5] \times [1; 4) \mid (y \geq x) \vee (x > 4)\}$
   (f) $\{\langle x, y\rangle \in (1; 5]^2 \mid 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 \leq 36\}$

---

[1] Здесь под универсумом имеется в виду множество доступных урэлементов. Считайте, что $\overline{A} = \mathfrak{U} \setminus A$.
[2] Считайте, что 1 не является простым числом.
[3] $\square$ — самый обыкновенный квадрат, 🐈‍⬛ — самый обыкновенный кот.
[4] Jaccard index
[5] Из (a)-(c) и (e) следует, что $d_{\mathcal{J}}$ является *метрикой*, что крайне интересно и полезно... *для некоторых.*

6. Найдите все множества A, B и C, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$A = \{1, |B|, |C|\}$$
$$B = \{2, |A|, |C|\}$$
$$C = \{1, 2, |A|, |B|\}$$

7. Нечёткие множества[6] — обобщение множеств для случаев, когда необходимо описать *вероятностный* или *частичный* характер нахождения элементов во множестве. Каждому элементу $x \in X$ заданного универсума X сопоставляется *степень принадлежности* $\mu(x) \in [0; 1] \subseteq \mathbb{R}$, задаваемая в виде действительного числа от 0 до 1. Нечёткие множества задаются с помощью перечисления элементов вместе со степенями принадлежности, например, $F = \{a : 0.4, b : 0.8, c : 0.2, d : 0.9, e : 0.7\}$ и $R = \{a : 0.6, b : 0.9, c : 0.4, d : 0.1, e : 0.5\}$.
   (a) Дополнение нечёткого множества S обозначается $\overline{S}$ и задаётся как множество, в котором степень принадлежности каждого элемента равна $\mu_{\overline{S}}(x) = 1 - \mu_S(x)$. Найдите $\overline{F}$ и $\overline{R}$.
   (b) Объединение нечётких множеств S и T обозначается $S \cup T$ и задаётся как множество, в котором степень принадлежности каждого элемента есть *максимум* из степеней принадлежности данного элемента в двух исходных множествах S и T. Найдите $F \cup R$.
   (c) Пересечение нечётких множеств $S \cap T$ задаётся аналогично объединению: $\mu_{S \cap T}(x) = \min\{\mu_S(x), \mu_T(x)\}$. Найдите $F \cap R$.
   (d) Самостоятельно придумайте определение для разности нечётких множеств $S \setminus T$. Найдите $F \setminus R$ и $R \setminus F$.

8. Определите счётность или несчётность следующих множеств:
   (a) Множество рациональных[7] чисел $\mathbb{Q}$.
   (b) Булеан множества натуральных чисел $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   (c) Множество всех функций вида $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
   (d) Объединение *счётного* числа счётных множеств.
   (e) Множество действительных корней всех уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ с целочисленными коэффициентами a, b и c.

9. Докажите или опровергните следующие утверждения:
   (a) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.
   (b) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
   (c) $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$, то есть множества комплексных и действительных чисел равномощны.
   (d) $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \leftrightarrow (a = c) \land (b = d)$ при использовании определения упорядоченной пары по Куратовскому: $\langle x, y \rangle_K = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

---
[6] Fuzzy sets
[7] Рациональное число можно представить в виде дроби m/n, где $m \in \mathbb{Z}$ — целое, а $n \in \mathbb{N}$ — натуральное.