

1. Определите истинность заданных утверждений. Считайте, что  $a \neq b$  – урэлементы.

- |   |  |   |
|---|--|---|
| (a) $a \in \{\{a\}, b\}$                            | (h) $\emptyset \in \emptyset$                                    | (o) $a \in 2^{\{a\}}$   |
| (b) $a \in \{a, \{b\}\}$                            | (i) $\emptyset \subseteq \emptyset$                              | (p) $2^{\{a, \emptyset\}} \subset 2^{\{a, b, \emptyset\}}$        |
| (c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$                        | (j) $\emptyset \subset \emptyset$                                | (q) $\{a, b\} \subseteq 2^{\{a, b\}}$                             |
| (d) $\{a\} \subset \{a, b\}$                        | (k) $\emptyset \in \{\emptyset\}$                                | (r) $\{a, a\} \in 2^{\{a, a\}}$                                   |
| (e) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$              | (l) $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$                      | (s) $\{\{a\}, \emptyset\} \subseteq 2^{\{a, a\}}$                 |
| (f) $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a, b\}\}$         | (m) $\{\emptyset, \emptyset\} \subset \{\emptyset\}$             | (t) $\{a, \{a\}\} \subset 2^{\{a, 2^{\{a\}}\}}$                   |
| (g) $\{\{a\}, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$ | (n) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ | (u) $\{\{a, \{\emptyset\}\}\} \subseteq 2^{\{a, 2^{\emptyset}\}}$ |

2. Дано множество-универсум<sup>1</sup>  $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, 10\}$  и его подмножества:  $A = \{x \mid x - \text{чётное}\}$ ,  $B = \{x \mid x - \text{простое}\}$ <sup>2</sup>,  $C = \{2, 4, 7, 9\}$ . Нарисуйте диаграмму Венна для заданных множеств, отметьте на ней все элементы и найдите:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| (a) $B \triangle (A \cap C)$                 | (c) $\overline{A \cup C} \cup (C \triangle B)$               | (e) $(2^A \cap 2^C) \setminus 2^B$  |
| (b) $\overline{B} \setminus (A \triangle C)$ | (d) $ \{A \cup B \cup 2^{\emptyset} \cup 2^{\mathcal{U}}\} $ | (f) $2^{B \cap C} \setminus \{2^{\{2^{\emptyset}\}},  \overline{B \cap C} \}$ |

3. Даны следующие множества<sup>3</sup>:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| * $A = \{1, 2, 4\}$                                | * $C = 2^{\emptyset} \setminus \{\emptyset\}$      | * $E = 2^{A \setminus D} \cap 2^{\{B \setminus D\}}$   |
| * $B = \{\square, \blacktriangle\} \cup \emptyset$ | * $D = \{\blacktriangle,  2^{\{\emptyset, C\}} \}$ | * $F = 2^{\{\{\emptyset, \emptyset\} \setminus \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\} \triangle C, \{\emptyset, C\}, 2^{\emptyset}\}}$ |

Найти:

- |                       |                    |               |
|-----------------------|--------------------|---------------|
| (a) $A \triangle D$   | (c) $B \times E$   | (e) $D^{ C }$ |
| (b) $E \triangle 2^C$ | (d) $E \times 2^B$ | (f) $F^3$     |

4. Найдите все множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} A &= \{1, |B|, |C|\} \\ B &= \{2, |A|, |C|\} \\ C &= \{1, 2, |A|, |B|\} \end{aligned}$$

5. Изобразите на графиках  $\mathbb{R}^2$  следующие множества точек:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\{1, 2, 3\} \times [1; 3]$                               | (d) $\{\langle x, y \rangle \in [1; 5] \times [1; 4] \mid (y > x) \vee (x \geq 4)\}$            |
| (b) $[1; 4) \times (2; 4] \setminus \{\langle 2, 3 \rangle\}$ | (e) $\{\langle x, y \rangle \in (1; 5]^2 \mid 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 \leq 36\}$                |
| (c) $([1; 6] \times (1; 5]) \setminus ([4; 5] \times (2; 4))$ | (f) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists z \in \mathbb{N} : x^3 + y^3 = z^3\}$ |

6. Подробно докажите (или опровергните) следующие утверждения:

- (a) Если  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq C$ , то  $A \subseteq C$ .  
 (b)  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .  
 (c) Множество рациональных<sup>4</sup> чисел  $\mathbb{Q}$  счётно.  
 (d)  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  – несчётное множество.

<sup>1</sup> Здесь под универсумом имеется в виду множество доступных урэлементов. Считайте, что  $\overline{A} = \mathcal{U} \setminus A$ .

<sup>2</sup> Считайте, что 1 не является простым числом.

<sup>3</sup>  $\square$  – самый обыкновенный квадрат,  $\blacktriangle$  – самый обыкновенный кот.

<sup>4</sup> Рациональное число можно представить в виде дроби  $m/n$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  – целое, а  $n \in \mathbb{N}$  – натуральное.