

2 Binary Relations Cheatsheet

2.1 Терминология и обозначения

- * $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$ — **декартово произведение** множеств A и B . Cartesian product
- * $A^2 = A \times A$ — **декартов квадрат** множества A . Cartesian square
- * $R \subseteq A \times B$ — **бинарное отношение** R , определённое на паре множеств A и B . Binary relation
- * $R \subseteq A^2$ — (гомогенное) бинарное отношение на множестве A . Homogeneous relation (endorelation)
- * $a R b$ — элементы a и b **находятся в отношении** R , т.е. $\langle a, b \rangle \in R$. Ordered pair
- * $\mathcal{E}_A = \emptyset$ — **пустое** отношение. Empty relation
- * $\text{id}_A = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ — **тождественное (диагональное)** отношение. Identity relation
- * $\mathcal{U}_A = A^2 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A\}$ — **полное (универсальное)** отношение. Universal relation

2.2 Операции над отношениями

- * $R \cup S = \{\langle a, b \rangle \mid (a R b) \vee (a S b)\}$ — **объединение** отношений R и S . Union of relations
- * $R \cap S = \{\langle a, b \rangle \mid (a R b) \wedge (a S b)\}$ — **пересечение** отношений R и S . Intersection of relations
- * $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\} \subseteq B \times A$ — отношение, **обратное** к $R \subseteq A \times B$. Converse relation
- * $\bar{R} = \{\langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \notin R\}$ — **дополнение** отношения R . Complementary relation
- * $R; S = S \circ R = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z : (x R z) \wedge (z S y)\}$ — **композиция** отношений R и S . Composition of relations
 - Если $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$, то $R; S \subseteq A \times C$.
- * $R^{oi+1} = R \circ R^{oi}$ — «**композиционная**» (**функциональная**) **степень** отношения R . Functional power

При этом $R^{o1} = R$, $R^{o0} = \text{id}_A$. Чаше используется нотация R^i , совпадающая с нотацией *Декартовой степени*.
- * $R[M] = \{y \mid \exists x \in M : x R y\}$ — **применение** отношения R ко множеству M .
- * **Замыкание отношения** R относительно свойства P — минимальное (по включению) надмножество R , обладающее свойством P . Closure
 - $R^= = R^r = R \cup \text{id}_A$ — **рефлексивное замыкание** отношения $R \subseteq A^2$. Reflexive closure
 - $R^\sim = R^s = R \cup R^{-1}$ — **симметричное замыкание** отношения R . Symmetric closure
 - $R^+ = R^t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$ — **транзитивное замыкание** отношения R , где $R^1 = R$, $R^{k+1} = R^k \circ R$. Transitive closure
 - $R^\equiv = ((R^r)^s)^t$ — **рефлексивное симметричное транзитивное замыкание** отношения R . Минимальное отношение эквивалентности, содержащее R . Reflexive symmetric transitive closure
- * **Сокращение отношения** R — минимальное отношение, замыкание которого совпадает с замыканием R .
 - Рефлексивное сокращение** $R^\# = R \setminus \text{id}_A$ — минимальное отношение, рефлексивное замыкание которого совпадает с рефлексивным замыканием R , то есть $(R^\#)^= = R^=$. Reflexive reduction
 - Симметричное сокращение** R^* — минимальное отношение, симметричное замыкание которого совпадает с симметричным замыканием R , то есть $(R^*)^\sim = R^\sim$.
 - Транзитивное сокращение** R^- — минимальное отношение, транзитивное замыкание которого совпадает с транзитивным замыканием R , то есть $(R^-)^+ = R^+$. Transitive reduction

Транзитивное сокращение R^- отношения R без циклов (в том числе, без петель) можно найти, используя его транзитивное замыкание: $R_{\text{DAG}}^- = R \setminus (R \circ R^+) = R \setminus \bigcup_{n \geq 2} R^n$.

Для нахождения транзитивного сокращения отношения без циклов, но с петлями, необходимо запомнить существующие петли, убрать их, осуществить транзитивное сокращение (см. выше), а затем вернуть исходные петли: $R_{\text{loop-DAG}}^- = (R^\#)^- \cup \{(x, x) \mid x R x\}$.

2.3 Некоторые свойства гомогенных бинарных отношений

Возможные свойства гомогенного бинарного отношения $R \subseteq M^2$:

[Properties of homogeneous relations](#)

Свойство	Формальное определение
Рефлексивность	Reflexive $\forall x \in M : x R x$
Иррефлексивность	Irreflexive $\forall x \in M : \neg(x R x)$
Корефлексивность	Coreflexive $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (x = y)$
Симметричность	Symmetric $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (y R x)$
Антисимметричность	Antisymmetric $\forall x, y \in M : (x R y) \wedge (y R x) \rightarrow (x = y)$
Асимметричность	Asymmetric $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow \neg(y R x)$
Транзитивность	Transitive $\forall x, y, z \in M : (x R y) \wedge (y R z) \rightarrow (x R z)$
Антитранзитивность	Antitransitive $\forall x, y, z \in M : (x R y) \wedge (y R z) \rightarrow \neg(x R z)$
Евклидовость (правая)	Right Euclidean $\forall x, y, z \in M : (x R y) \wedge (x R z) \rightarrow (y R z)$
Евклидовость (левая)	Left Euclidean $\forall x, y, z \in M : (y R x) \wedge (z R x) \rightarrow (y R z)$
Связность	Semiconnex $\forall x, y \in M : (x \neq y) \rightarrow (x R y) \vee (y R x)$
Сильная связность	Connex $\forall x, y \in M : (x R y) \vee (y R x)$
Плотность	Dense $\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow \exists z \in M : (x R z) \wedge (z R y)$

2.4 Отношения эквивалентности

- * **Отношение толерантности** — рефлексивное и симметричное.
- * **Отношение эквивалентности** — рефлексивное, симметричное и транзитивное.
- * $[x]_R = \{y \in A \mid x R y\}$ — **класс эквивалентности** элемента $x \in A$.
- * $A/R = [A]_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ — **разбиение** множества A на **классы эквивалентности**.

[Tolerance relation](#)

[Equivalence relation](#)

[Equivalence class](#)

[Quotient set](#)

2.5 Отношения порядка

- * **Предпорядок** (квазипорядок) — рефлексивное и транзитивное отношение.
- * **Частичный порядок** — рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение.
- * **Линейный (полный) порядок** — сильно-связный частичный порядок.
- * **Строгий частичный порядок** — иррефл., антисимм. и транзитивное отношение.
- * **Строгий линейный (полный) порядок** — связный строгий частичный порядок.
- * **Частично упорядоченное множество** — упорядоченная пара $\langle M, R \rangle$, где M — произвольное множество, $R \subseteq M^2$ — отношение **частичного порядка** на M .
- * Элемент упорядоченного множества $\langle M, R \rangle$ называется **максимальным**, если он не меньше других элементов, то есть не существует элемента больше. Дуально, элемент называется **минимальным**, если он не больше других, то есть нет элемента меньше.
- * Элемент упорядоченного множества $\langle M, R \rangle$ называется **наибольшим**, если он больше всех элементов. Дуально, элемент называется **наименьшим**, если он меньше всех элементов.
- * $(x < y) \leftrightarrow (x < y) \wedge \nexists z : ((x < z) \wedge (z < y))$ — **отношение покрытия** (y «покрывает» x).
- * **Диаграмма Хассе** — визуализация частично упорядоченного множества $\langle M, R \rangle$ в виде графа транзитивного сокращения R^- . Вершины такого графа — элементы множества M , а рёбра (изображаются по возможности направленными вверх) соответствуют отношению покрытия.

[Preorder](#)

[Partial order](#)

[Linear \(total\) order](#)

[Strict partial order](#)

[Strict total order](#)

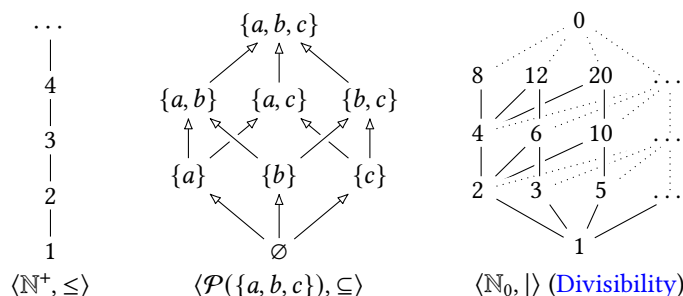
[Partially ordered set \(Poset\)](#)

[Maximal and minimal elements](#)

[Greatest and least elements](#)

[Covering relation](#)

[Hasse diagram](#)



2.6 Некоторые свойства гетерогенных бинарных отношений

Возможные свойства гетерогенного бинарного отношения $R \subseteq X \times Y$:

Special types of binary relations

Отношение	Формальное определение
Injective (left-unique)	$\forall x, z \in X \forall y \in Y : (x R y) \wedge (z R y) \rightarrow (x = z)$
Functional (right-unique)	$\forall x \in X \forall y, z \in Y : (x R y) \wedge (x R z) \rightarrow (y = z)$
One-to-One	Injective and Functional
One-to-Many	Injective and not Functional
Many-to-One	Not Injective and Functional
Many-to-Many	Not Injective and not Functional
Serial (left-total)	$\forall x \in X : \exists y \in Y : (x R y)$
Surjective (right-total)	$\forall y \in Y : \exists x \in X : (x R y)$

2.7 Функции как отношения

- * **Частичная функция** $f : X \rightarrowtail Y$ — Functional бинарное отношение.
- * **Функция** $f : X \rightarrow Y$ — Functional и Serial бинарное отношение.

Partial function
Function

2.8 Матричное представление отношений

Любое бинарное отношение $R \subseteq A \times B$, определённое на паре множеств $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ может быть представлено в виде матрицы $\|R\|$ размера $n \times m$, элементы которой — 0 или 1: [Logical matrix](#)

$$\|R\| = [r_{i,j}] \quad r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \in R \leftrightarrow a_i R b_j \\ 0 & \text{если } \langle a_i, b_j \rangle \notin R \leftrightarrow a_i \not R b_j \end{cases}$$

Пусть $R \subseteq M^2$ — гомогенное бинарное отношение, определённое на множестве $M = \{m_1, \dots, m_4\}$. Примеры матриц отношений, обладающих некоторыми свойствами:

Reflexive

$\forall x \in M : x R x$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	1	·	·	·
m_2	·	1	·	·
m_3	·	·	1	·
m_4	·	·	·	1

Irreflexive

$\forall x \in M : \neg(x R x)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	0	·	·	·
m_2	·	0	·	·
m_3	·	·	0	·
m_4	·	·	·	0

Coreflexive

$\forall x, y \in M : (x R y) \rightarrow (x = y)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	·	0	0	0
m_2	0	·	0	0
m_3	0	0	·	0
m_4	0	0	0	·

Symmetric

$\forall x, y \in M :$
 $(x R y) \rightarrow (y R x)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	·	1	0	1
m_2	1	·	0	0
m_3	0	0	·	0
m_4	1	0	0	·

Antisymmetric

$\forall x, y \in M :$
 $(x R y) \wedge (y R x) \rightarrow (x = y)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	·	0	·	0
m_2	1	·	0	0
m_3	0	1	·	·
m_4	1	1	0	·

Asymmetric

$\forall x, y \in M :$
 $(x R y) \rightarrow \neg(y R x)$

m_1

m_2

m_3

m_4

m_1	0	0	·	0
m_2	1	0	·	·
m_3	0	0	0	·
m_4	1	0	0	0

Легенда:

m_i	m_j	1	— m_i и m_j находятся в отношении R , т.е. $m_i R m_j$
m_i	m_j	0	— m_i и m_j не находятся в отношении R , т.е. $m_i \not R m_j$
m_i	m_j	·	— m_i и m_j могут находиться в отношении R , а могут и не находиться