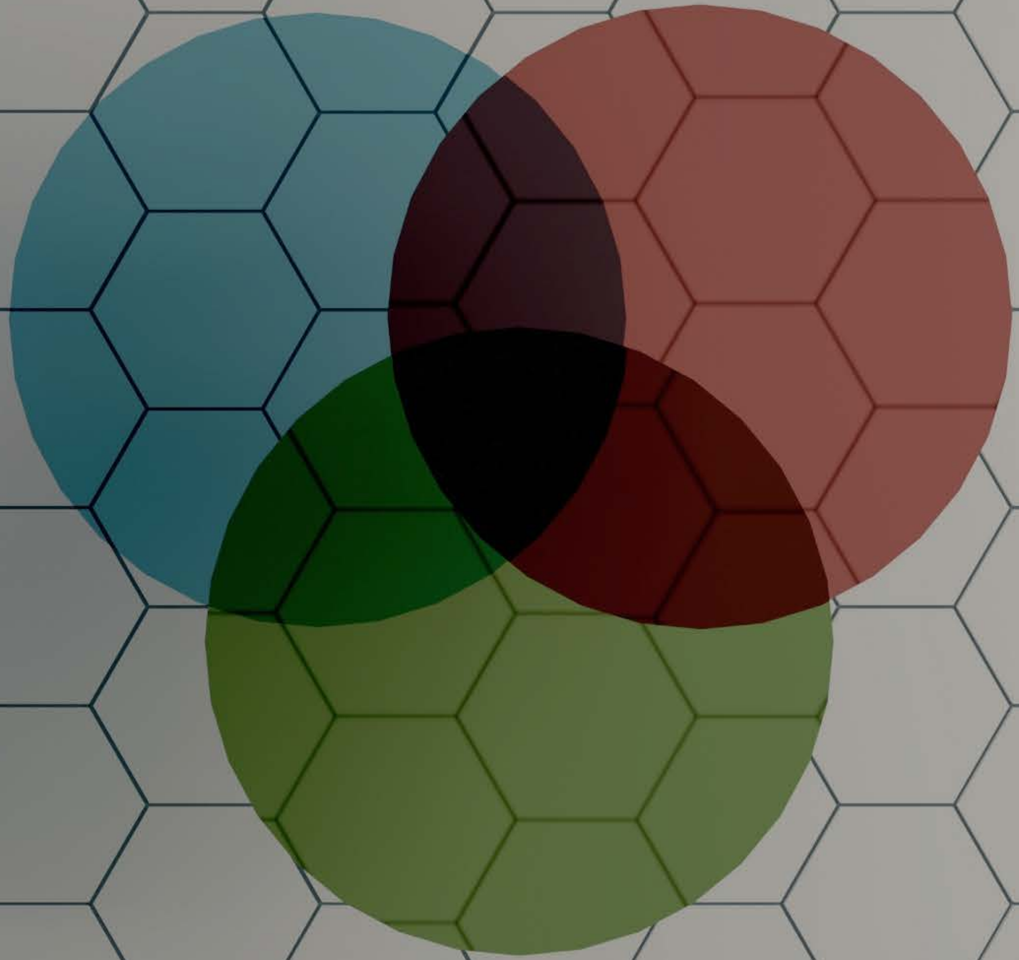
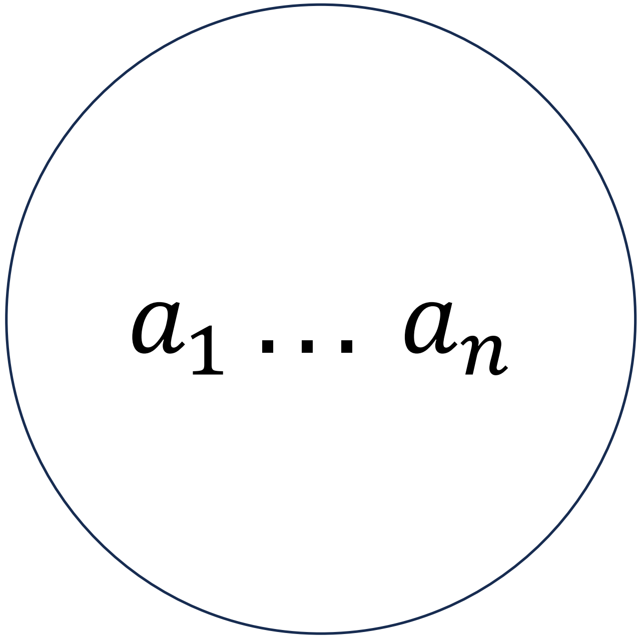
Введение в теорию множеств

Подготовил Машенцев Данил
группа 221-321



Основные понятия



Множество А

Множество А – набор различных элементов от a_1 до a_n, имеющих общие свойства.
Элементы от a_1 до a_n принадлежат множеству А

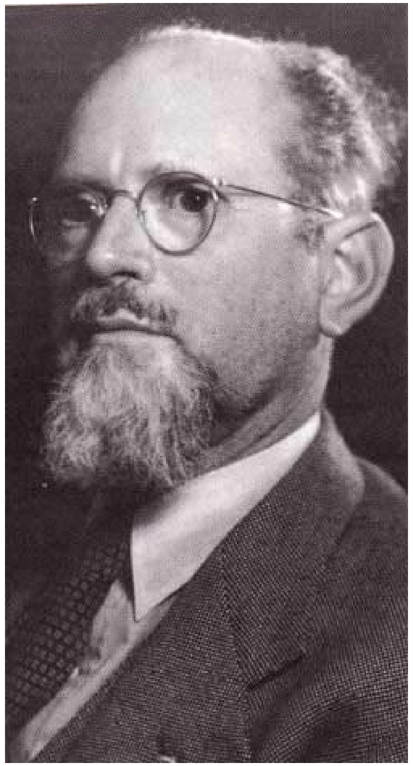
($a_1 \in$ А)

Теория множеств широко применяется на практике

Основные операции

Аксиоматика теории множеств

Эрнст Фри́дрих Фердина́нд Це́рмело
27 июля 1871, Берлин — 21 мая 1953, Фрайбург



Абраха́м Галеви (**Адо́льф**) **Фре́нкель**
17 февраля 1891, Мюнхен — 15 октября 1965, Иерусалим

Систе́ма аксио́м Це́рмело — Фре́нкеля (***ZF***) — наиболее широко используемый вариант аксиоматической теории множеств, являющийся фактическим стандартом для оснований математики. Сформулирована Эрнстом Цермело в 1908 году как средство преодоления парадоксов теории множеств, и уточнена Абрахамом Френкелем в 1921 году.

1. **Аксиома объёмности (экстенсиональности):** Эта аксиома утверждает, что множества равны, если и только если они имеют одни и те же элементы. Формально:
   $\forall A \forall B (A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B))$

2. **Аксиома объединения:** Эта аксиома позволяет построить объединение множеств. Для двух множеств A и B, объединение обозначается как $A \cup B$, и определяется следующим образом:
   $\forall x (x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$

3. **Аксиома булеана (степени множества):** Эта аксиома говорит о существовании степени (множества всех подмножеств) любого множества. Для множества A, степень обозначается как $\mathrm{P}(A)$ и определяется следующим образом:
   $\forall x (x \in \mathrm{P}(A) \Leftrightarrow x \subseteq A)$

4. **Аксиома бесконечности:** Эта аксиома утверждает существование бесконечного множества. Она часто формулируется через существование множества, содержащего пустое множество и такие элементы, которые образуют бесконечную последовательность. Формально:
   $\exists I (\emptyset \in I \wedge \forall x (x \in I \Longrightarrow x \cup \{x\} \in I))$

5. **Аксиома регулярности:** Эта аксиома утверждает, что каждое непустое множество имеет хотя бы один элемент, который не пересекается с самим собой. Формально:
   $\forall A (A \quad = \emptyset \Longrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \cap A = \emptyset))$

6. **Схема преобразования (аксиома замены):** Эта схема позволяет строить новые множества, используя отображения из существующих множеств. Формально, для любой формулы $F(x,y)$, схема преобразования гласит, что если для каждого элемента x существует не более одного элемента y, который удовлетворяет $F(x,y)(F(x,y) \wedge F(x,z) \Longrightarrow y = z)$, то можно построить множество, состоящее из всех таких y:
   $\forall A \exists B \forall y (y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A F(x,y))$

7. **Аксиома выбора:** Эта аксиома утверждает, что для любого семейства непустых непересекающихся множеств существует функция, которая выбирает по одному элементу из каждого множества. Формально: $\forall I ((\forall i \in I (Ai \quad = \emptyset)) \Longrightarrow (\exists f \forall i \in I (f(i) \in Ai)))$

   Все остальные аксиомы выводятся из данных аксиом (аксиома пары, аксиома пустого множества, аксиома выделения)

Мощность множества

Мощность множества — это количество элементов в этом множестве. Чем больше элементов в множестве, тем больше его мощность.

Чтобы определить мощность конечного множества, нужно просто посчитать количество элементов в нем. Например, если у нас есть множество {1, 2, 3, 4, 5}, то его мощность равна 5.

Континуум и счетное множество

Континуум в теории множеств — мощность (или кардинальное число) множества всех вещественных чисел. Множество, имеющее мощность континуум, называется континуа́льным множеством.

Счётное множество — **бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами**. Более формально: множество X является счётным, если существует биекция со множеством натуральных чисел: $X \leftrightarrow N$, другими словами, счётное множество — это множество, равномощное множеству натуральных чисел.