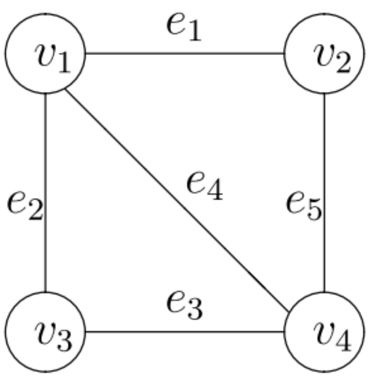
Теория графов

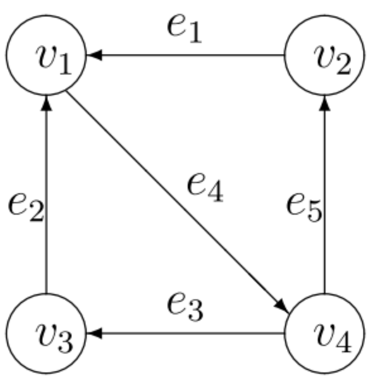
1.1. Определение графов и родственных объектов

- **Определение.** *Простым* графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V и множества E неупорядоченных пар различных элементов множества V. Множество V называется *множеством вершин*, множество E называется *множеством ребер*.
- **Обозначения:** p – число вершин, q – число ребер.
- **Пример.** $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = v_1 v_2$, $e_2 = v_3 v_1$, $e_3 = v_4 v_3$, $e_4 = v_1 v_4$, $e_5 = v_4 v_2$.



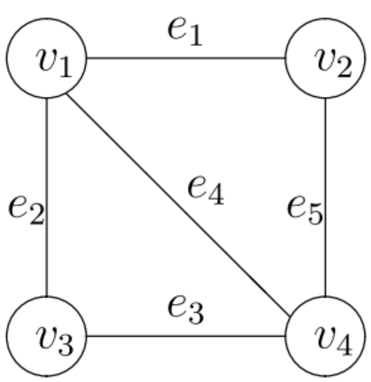
Определение графов и родственных объектов

- **Определение.** Если элементами множества E являются *упорядоченные пары* (т.е. пары, в которых фиксирован порядок элементов), то граф называется *ориентированным* (или *орграфом*). В этом случае элементы множества V называются *узлами,* а элементы множества E – *дугами*. Первую вершину упорядоченной пары называют *началом дуги,* вторую – *концом*.
- **Пример.** $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_3v_1$, $e_3 = v_4v_3$, $e_4 = v_1v_4$, $e_5 = v_4v_2$.



Смежность вершин и ребер

- **Определение.** Пусть v_1, v_2 – вершины, $e = v_1v_2$ – соединяющее их ребро. Тогда вершина v_1 и ребро e инцидентны, вершина v_2 и ребро e также инцидентны. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются *смежными*, две вершины, инцидентные одному ребру, также называются *смежными*.
- **Определение.** Множество вершин, смежных с вершиной v, называется *множеством смежности* вершины v и обозначается $\Gamma(v) = \{u: vu \in E\}$. Если $A \subset V$ – множество вершин, то $\Gamma(A)$ – множество всех вершин, смежных с вершинами из A : $\Gamma(A) = \bigcup_{v\in A} \Gamma(v)$.
- **Пример.**
- Вершины v_1, v_2 смежны
- Вершины v_2, v_3 не смежны
- Ребра v_1v_2 и v_1v_3 смежны
- $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$

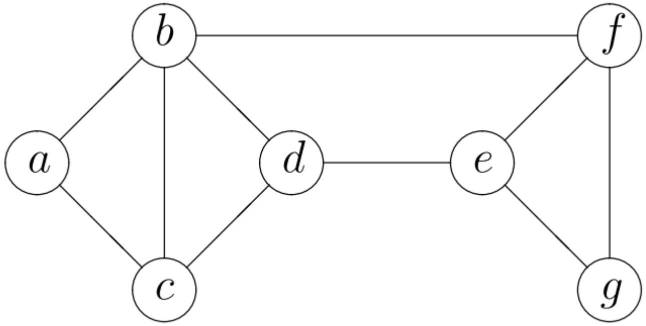


Маршруты, цепи, циклы

- **Определение.** *Маршрутом* в графе называется последовательность вершин и ребер вида $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots\ v_{k-1} e_k v_k$, в которой $e_i = v_{i-1} v_i$. Вершина v_0 называется *начальной*, а v_k – *конечной* вершиной маршрута.
- Для графа без кратных ребер достаточно указать только последовательность вершин.
- **Определение.** Если все ребра в маршруте различны, то маршрут называется *цепью*. Если все вершины (а значит и ребра) в маршруте различны, то маршрут называется *простой цепью*.
- **Определение.** Если $v_0 = v_k$, маршрут называется замкнутым.
- **Определение.** Если все ребра в замкнутом маршруте различны, то он называется *циклом*. Если все вершины в замкнутом маршруте, кроме первой и последней, различны, то он называется *простым циклом*.
- В орграфе цепь называется *путем*, а цикл – *контуром*.

Маршруты, цепи, циклы

- **Примеры.**

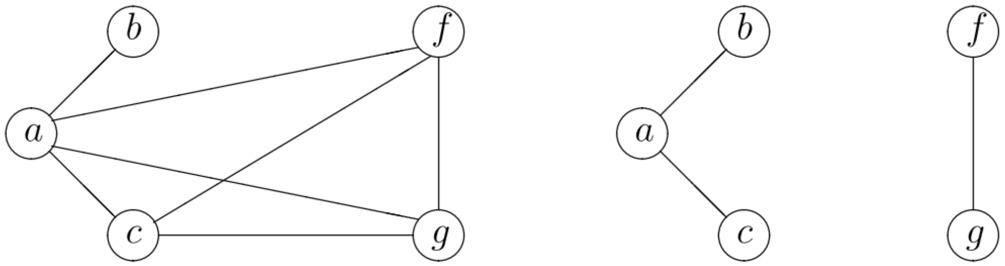


$abdbc$ – маршрут, но не цепь;
$abdcb$ – цепь, но не простая цепь;
$abcde$ – простая цепь;
$abdbca$ – замкнутый маршрут, но не цикл;
$abfedbca$ – цикл, но не простой цикл;
$abca$ – простой цикл.

- **Лемма о цепи.** Если есть цепь, соединяющая вершины *u*, *v*, то есть и простая цепь, соединяющая вершины *u*, *v*.

Связность неориентированных графов

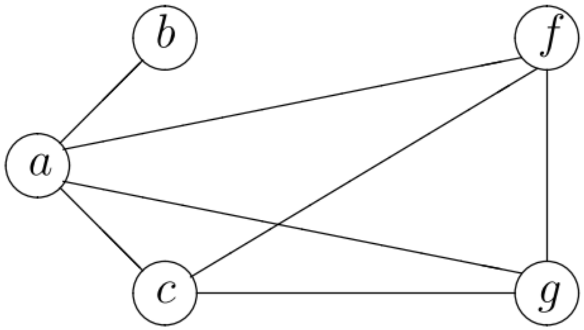
- **Определение.** Две вершины в графе *связны*, если существует соединяющая их цепь.
- **Определение**. Граф называется *связным*, если любые две вершины в нем связны.
- **Определение.** *Компонентой связности* графа $G(V,E)$ называется его правильный связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа $G(V,E)$.
- **Примеры.**

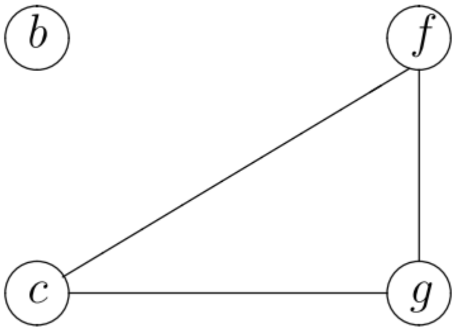


Связный граф　　Граф с двумя компонентами связности

Связность неориентированных графов

- **Определение.** Вершина графа $G(V,E)$ называется *точкой сочленения*, если ее удаление (вместе с инцидентными ей ребрами) увеличивает число компонент связности графа.
- **Пример.** Для графа слева a – точка сочленения. Результат ее удаления (граф с двумя компонентами связности) показан на рисунке справа.

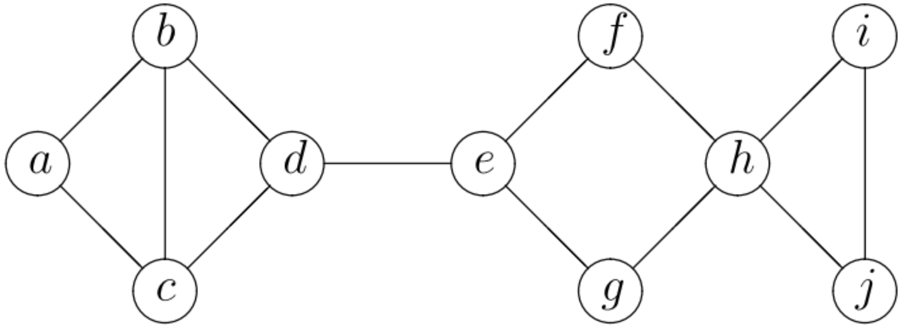




- **Лемма о точках сочленения.** В любом графе $G(V,E)$ с $p \geq 2$ есть по крайней мере две вершины, не являющиеся точками сочленения.

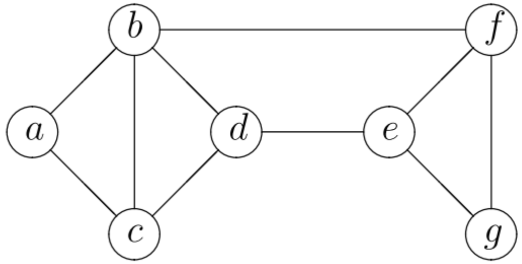
Связность неориентированных графов

- **Определение.** Ребро графа $G(V,E)$ называется *мостом*, если его удаление увеличивает число компонент связности графа.
- **Пример.** Мостом является ребро de.



Связность неориентированных графов

- **Определение.** *Числом вершинной связности* графа $G(V,E)$ (обозначается $\kappa(G)$) называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Граф $G(V,E)$ называется *m-связным*, если $\kappa(G) = m$.
- **Определение.** *Числом реберной связности* графа $G(V,E)$ (обозначается $\lambda(G)$) называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.
- **Примеры.** Здесь $\kappa(G) = 2$ (удаление вершин b и c приведет к несвязному графу), $\lambda(G) = 2$ (например, можно удалить ребра bf и de).



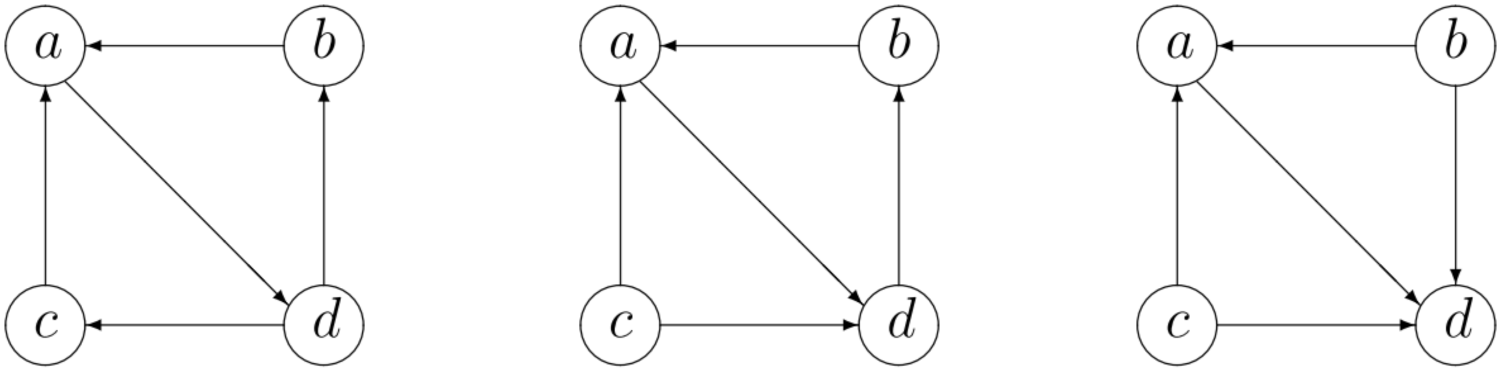
$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

2.5. Связность орграфов

- **Определение.** Говорят, что два узла v_1 и v_2 *сильно связны* в орграфе $D(V,E)$, если существует путь из v_1 в v_2 и из v_2 в v_1.
- **Определение.** Говорят, что два узла v_1 и v_2 *односторонне связны* в орграфе $D(V,E)$, если есть путь либо из v_1 в v_2, либо из v_2 в v_1.
- **Определение.** Говорят, что два узла v_1 и v_2 *слабо связны* в орграфе $D(V,E)$, если они связны в графе $D'(V',E')$, полученном из $D(V,E)$ отменой ориентации ребер.

Связность орграфов

- **Определение.** Орграф $D(V,E)$ называется *сильно* (*односторонне*, *слабо*) *связным*, если любые два узла в нем сильно (односторонне, слабо) связны.
- **Пример.** Слева – сильно связный орграф, в центре – односторонне связный (нет путей до узла c из остальных), справа – слабо связный (нет путей между узлами b и c).



Связность орграфов

- **Определение.** *Компонентой сильной связности* орграфа $D(V,E)$ называется его правильный сильно связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа орграфа $D(V,E)$.
- **Определение.** *Конденсацией* (*фактор-графом*) орграфа $D(V,E)$ называется орграф, который получается стягиванием в один узел каждой компоненты сильной связности орграфа $D(V,E)$.
- **Пример.**