andr_lux@mail.ru

Автоматизированные построения в математике

Люксембург Андрей Анатольевич

- В математике можно понятия последовательно определять через другие.
- Впервые несколько тысяч лет назад геометрия Евклида. Логика. Формальные доказательства. Сигнатура. Аксиоматика.
- Много понятий не в системе аксиом и сигнатуре . Как они устроены? Как устроены теоремы? Методы доказательств?
- Историческое развитие математики. Топологии 100 лет. Вместо метрики понятие близости, привело к созданию новой теории. Развитие математики при обучении для школьника студента. Многие понятия кажутся неестественными надуманными.
- 6 класс информатика. Род, вид понятия, объём содержания понятия, операции над понятиями.
- Анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение. FCA.
- Неевклидовы геометрии. Лобачевского, через одну точку бесконечное количество параллельных. Геометрия Римана, любые две прямые пересекаются. Сферическая, через два полюса бесконечное количество прямых. В сферической геометрии нет предиката «между» для трёх точек на прямой. Конечные геометрии.

Евклидова геометрия

- Аксиомы принадлежности точек и прямых
- Понятие отрезка. Предикат между.
- Понятие окружности. Понятия чертежа.
- Теория доказательств (Как доказать теорему Пифагора?)
- Аналитическая геометрия. Алгоритм Тарского. Разрешимость евклидовой геометрии.

Математические теории

- Геометрия Евклида
- Арифметика Пеано
- Теория множеств
- Теория групп
- Теория графов
- Топология

- Объекты, определения, аксиомы, теоремы, леммы, задачи, доказательства

Автоматизация в математике

- Численные преобразования, вычисления
- Аналитические (символьные)
- Решение задач
- Доказательство теорем

- MathCad, MatLab, Maple, Matematica,
- GAP, MIZAR
- Пруверы: SPASS, Coq, Vampire, САД, Microsoft Z3
- Методы формального доказательства:

  Натуральный вывод (Генцен)

  Обратный метод (Маслов)

  Метод резолюций (Робинсон)

  Метод аналитических или семантических таблиц (Бет, Смалиан)

Понятия теории

- Теория графов

Путь, цикл, вершина, ребро, степень вершины

- Теория групп

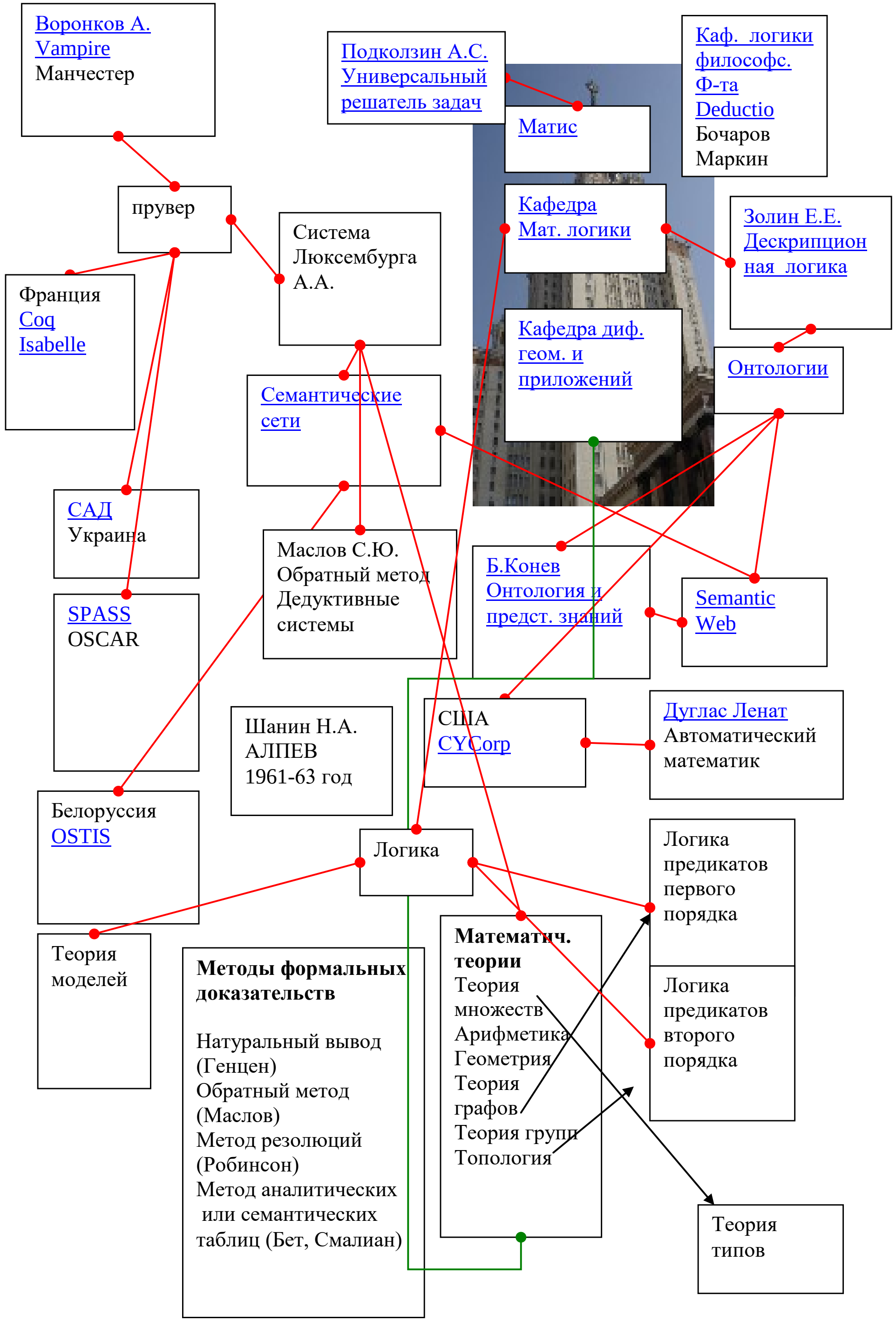
Центр группы, класс смежности, орбита, централизатор, факторгруппа, образующие

- Геометрия

Точка, прямая, плоскость, треугольник окружность, медиана

- Топология

Линия, сфера, тор, гомотопия, гомологии



Семантическая сеть

- Алгебраическая система

AS=<M;Pi,Fj,Ck>

M - множество

Pi — множество символов для отношений (предикатов),

Fj — множество функциональных символов,

Ck - множество символов констант

множество (*носитель*) с заданным на нём набором операций и отношений (*сигнатура*), удовлетворяющим некоторой системе аксиом.

Примеры: группа, кольцо, алгебра, решетка, поле

Дедуктивная система

- DS=<On,Ri,Ok>

On-начальные объекты

Ri-правила построения объектов

Ok-построенные объекты

Примеры: <аксиомы, правила вывода, теоремы>

<отрезок; декартовое произведение,склейка по границе; квадрат, тор, сфера,..>

Сравнение AS и DS

- Различия

нач. объекты

- Общее

Правила можно сопоставить функциям и операциям

Логика предикатов

- *Язык* **логики первого порядка** строится на основе сигнатуры, состоящей из множества функциональных символов F и множества предикатных символов P. С каждым функциональным и предикатным символом связана арность, то есть число возможных аргументов. Допускаются как функциональные, так и предикатные символы арности 0. Первые иногда выделяют в отдельное множество *констант*. Кроме того, используются следующие дополнительные символы
- Символы переменных (обычно x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, ….),
- Пропозициональные связки: /\ (&),\/ ,=>, ¬
- Кванторы: всеобщности ∀ и существования ∃
- Служебные символы: скобки и запятая.
- Перечисленные символы вместе с символами из и образуют *Алфавит* **логики первого порядка**. Более сложные конструкции определяются индуктивно:
- Терм есть символ переменной, либо имеет вид f(t1,…,tn) , где f — функциональный символ арности n, а t1,t2,...,tn— термы.
- Атом имеет вид p(t1,…,tn) , где p — предикатный символ арности n , а t1,t2,...,tn— термы.
- Формула — это либо атом, либо одна из следующих конструкций: ¬F1,F1/\F2, F1\/F2, F1=>F2, ∀ xF1, ∃ xF1
- где Fi — формулы, а x— переменная.
- Есть свободные и связанные переменные
- Формулу без свободных переменных называют *замкнутой формулой*, или *предложением*. *Теорией первого порядка* называют любое множество предложений.

Определимость и выразимость

- Пусть фиксирована некоторая сигнатура и ее интерпретация с носителем М. Мы хотим определить понятие выразимого (с помощью формулы данной сигнатуры в данной интерпретации) k-местного предиката.
- Выберем k переменных x1, x2,…xk . Рассмотрим произвольную формулу F , все параметры которой содержатся в списке x1, x2,…xk . Истинность этой формулы зависит только от значений переменных x1, x2,…xk M^k-> {И,Л}. Тем самым возникает отображение , то есть некоторый k- местный предикат на М . Говорят, что этот предикат выражается формулой F. Все предикаты, которые можно получить таким способом, называются выразимыми. (Ясно, что конкретный выбор списка переменных роли не играет.) Соответствующие им подмножества множества (области истинности выразимых предикатов) также называют выразимыми.

- Будем говорить, что предикат P на множестве M выразим из предикатов P1, P2,…, Pk на множестве M если мы можем выразить некоторое предложение на русском языке, оперирующее только предикатами P1, P2,…, Pk и такое что, оно истинно в том и только в том случае если истинен предикат P. Кроме самих предикатов можно использовать логические связки и кванторы.
- Пример: Можно ли трехместный предикат «лежать между» для трех точек на прямой выразить через отношение порядка на прямой?

Формальный язык

Естественный язык-ForTheL-Язык логики предикатов

- Язык ForTheL (Formal Theory Language) представляет собой средство формализации знаний на языке близком к естественному английскому языку технических публикаций. Это достигается путём использования специальной грамматики английского языка и возможностью непосредственного её расширения в ForTheL тексте. Мощность языка ограничена выразительной силой формул логики первого порядка. Кроме того, существует алгоритм, позволяющий эффективно транслировать высказывания языка в логические формулы и далее обрабатывать их.

Основные структуры в математике

1. Алгебраические
2. Структуры порядка
3. Топологические

Множества образуют булеву алгебра ($\cup, \cap$)

$\supset$ Порядок

Аксиомы топологии записываются через $\cup, \cap$

Выразительная сила теории множеств.

Правила построения формул

- Основная идея. У нас есть предикат принадлежности. Рассмотрим предикаты, которые можно выразить через него и выразимые множества этих предикатов.
- Атомарными считаются формулы: P0(xi, Aj):=xi$\in$Aj

1. Отрицание $P_j: =\neg P_i$

2. Объединение с помощью логических связок $P_k:=P_i \wedge P_j$,

   $P_k:=P_i \vee P_j$, $P_k:=P_i => P_j$

3. Навешивание кванторов. Для любой свободной переменной x в предикате Pi можно построить новые предикаты:

   $P_j:=(\forall x)P_i$, $P_k:= (\exists x)$ Pi

4. Пусть есть конечный набор переменных $x_1, x_2,\ldots, x_n$ тогда можно определить строку $\langle x_1, x_2,\ldots,x_n \rangle$ -это кортеж из n переменных

5. Построение математического объекта (понятия). Пусть есть предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, (где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ –свободные переменные), тогда можно построить множество

$$M(x_{n+1}, \ldots, x_k) := \{ \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_k) \}$$

это можно рассматривать как синтаксическое определение множества истинности предиката. Семантически это означает (если задана интерпретация и логическая эквивалентность):

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in M(x_{n+1}, \ldots, x_k) \Leftrightarrow P(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_k) \}$$

или

$$P0(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, M(x_{n+1}, \ldots, x_k)) \Leftrightarrow P(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_k)$$

6. Подстановка переменных. В предикате P или объекте M можно заменять переменные. Т.к. математические объекты, по сути, являются множествами их можно подставлять в качестве переменных в предикаты.

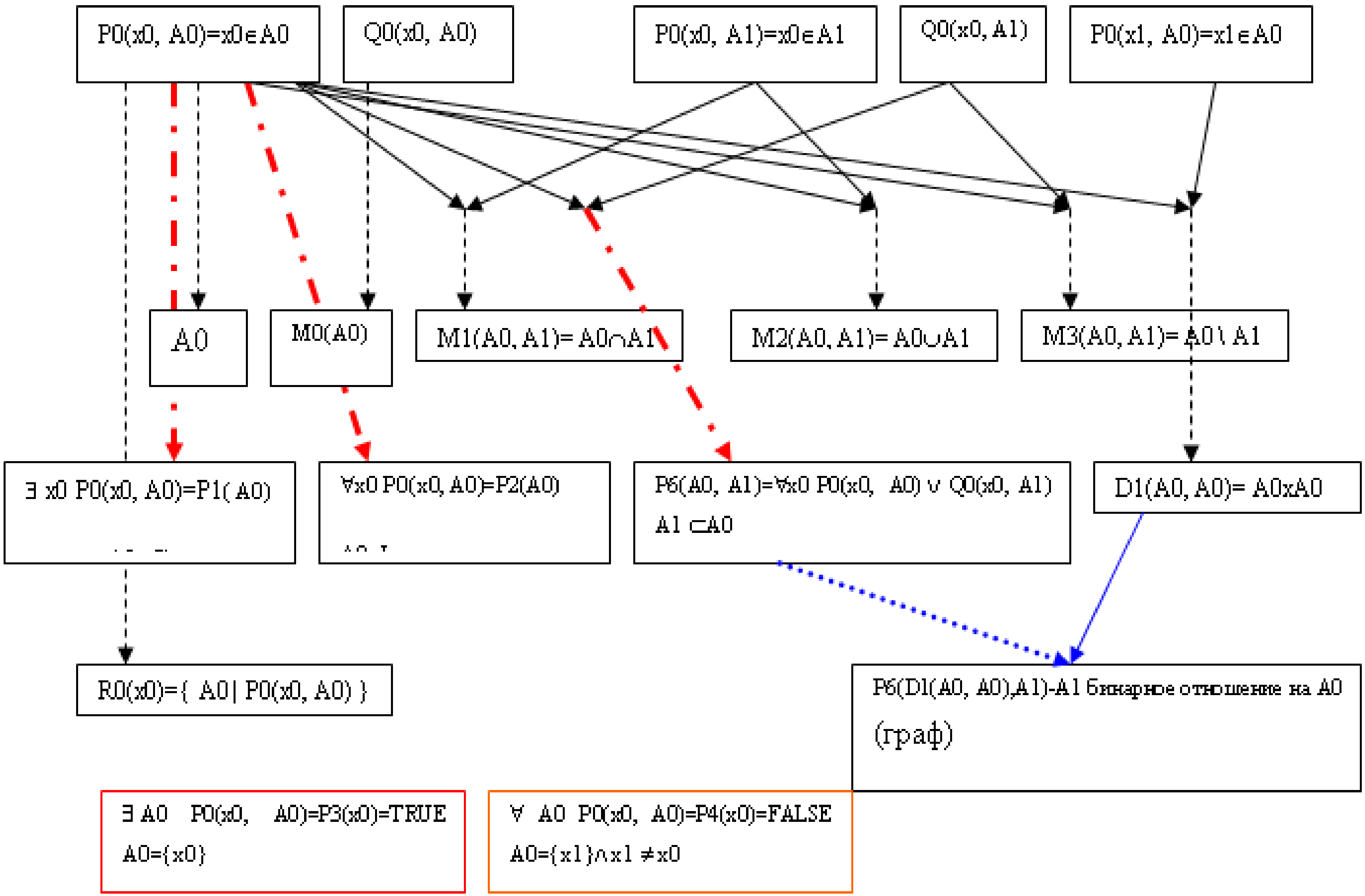
- Окружность

  $Окр(O,R)=\{ a \mid (a,O)=R\}$

Обозначения:

конъюнкция, дизъюнкция

- навешивание квантора
- построение мат. объекта (множества)
- подстановка переменных



Пример доказательства теоремы.

$(A \subset B \wedge B \subset C => A \subset C) = TRUE$

Заменяется по определению включение:

$\forall x\ (x \in A => x \in B) \wedge \forall x\ (x \in B => x \in C) => \forall x\ (x \in A => x \in C)$

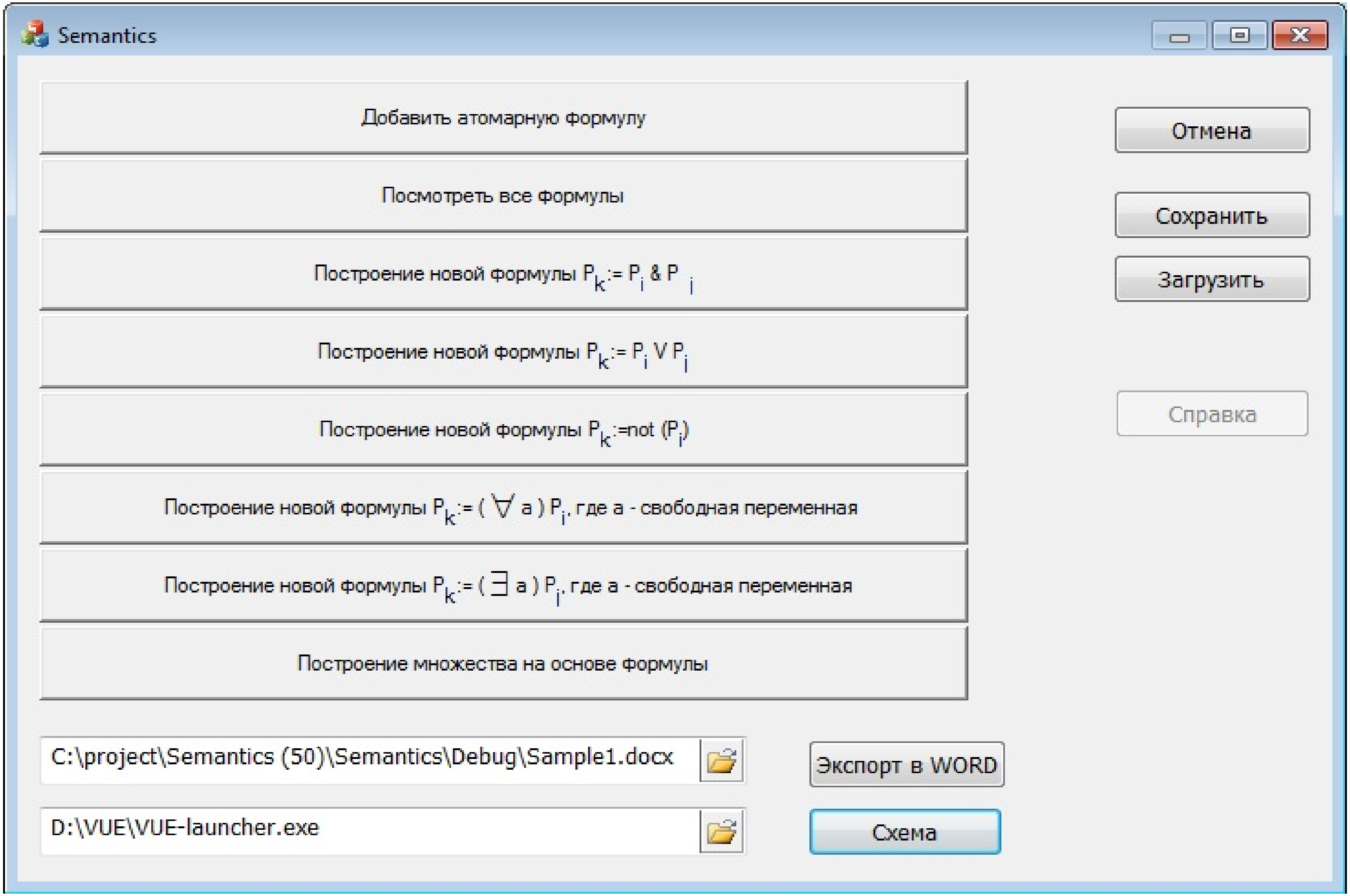
$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in A \Rightarrow x \in A \qquad \dfrac{x \in B \Rightarrow x \in B \quad x \in C \Rightarrow x \in C}{x \in B, x \in B \to x \in C \Rightarrow x \in C}}{x \in A, x \in A \to x \in B, x \in B \to x \in C \Rightarrow x \in C}}{x \in A \to x \in B, x \in B \to x \in C \Rightarrow x \in A \to x \in C}}{x \in A \to x \in B, \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow x \in A \to x \in C}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B), \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow x \in A \to x \in C}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B), \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C)}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B), \forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C)}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C), \forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C)}}{\forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C) \Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in C)}}{\Rightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \to x \in C) \to \forall x\,(x \in A \to x \in C)}
$$

Программа

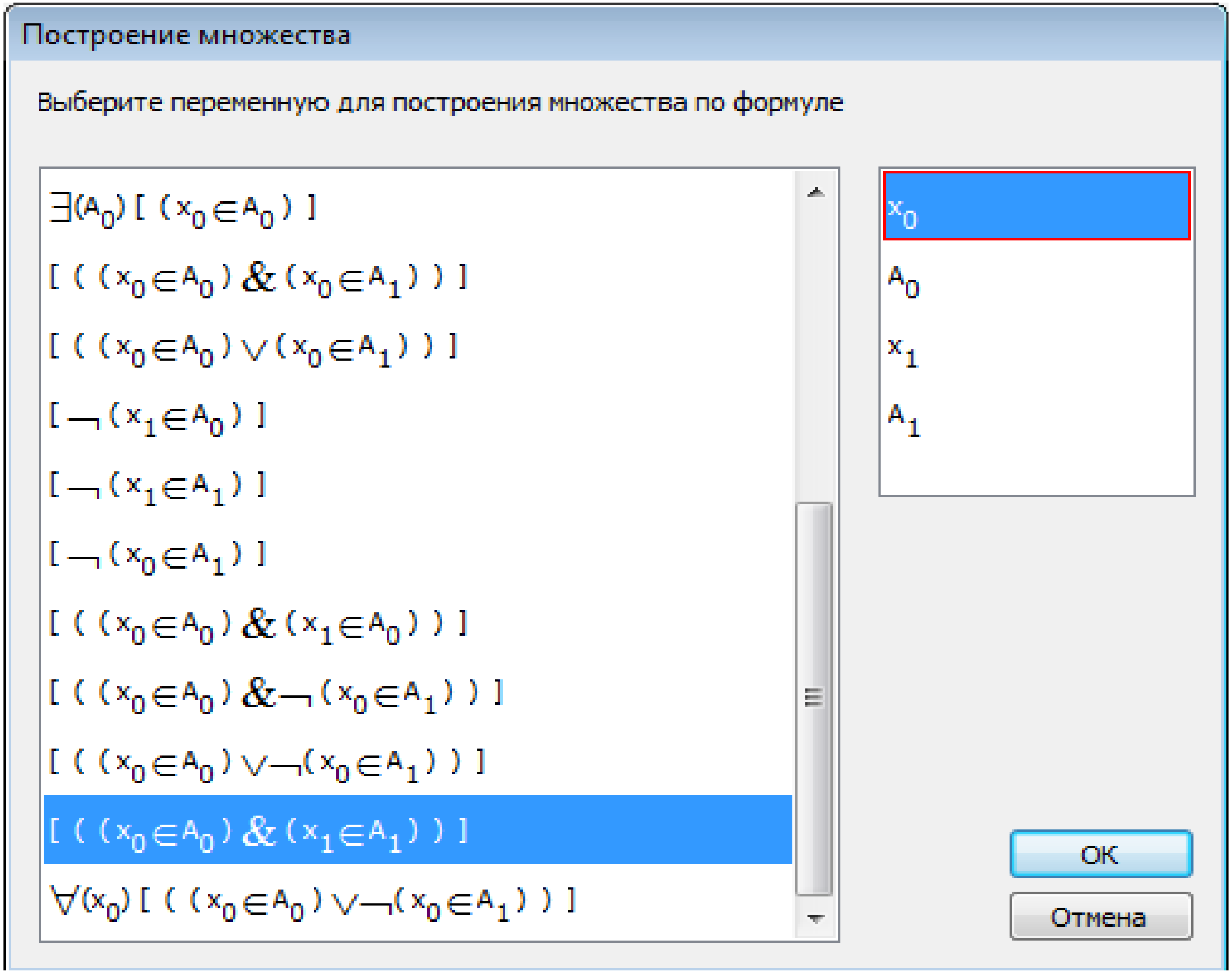
- Для построения семантических сетей используются программа VUE (Visual Understanding Environment) написанная в американском университете и свободно распространяемая [12]. На данный момент в программе реализован только синтаксис, семантика планируется в будущем.
- В программе из атомарных формул в «ручном» режиме строятся более сложные. Есть возможность сохранять построенные формулы с их описанием в вордовском файле. Есть возможность загружать из Word файл.

- Ниже приведен пример построения около 80 формул. В начале есть четыре атомарные формулы: ($x_0 \in A_0$), ($x_0 \in B_0$), ($x_1 \in A_0$), ($x_1 \in B_0$). С помощью описанных выше правил строятся новые формулы. Интересно, что все основные понятия (сигнатура) теории множеств строится из формул, чья длина по количеству атомарных не превышает двух.

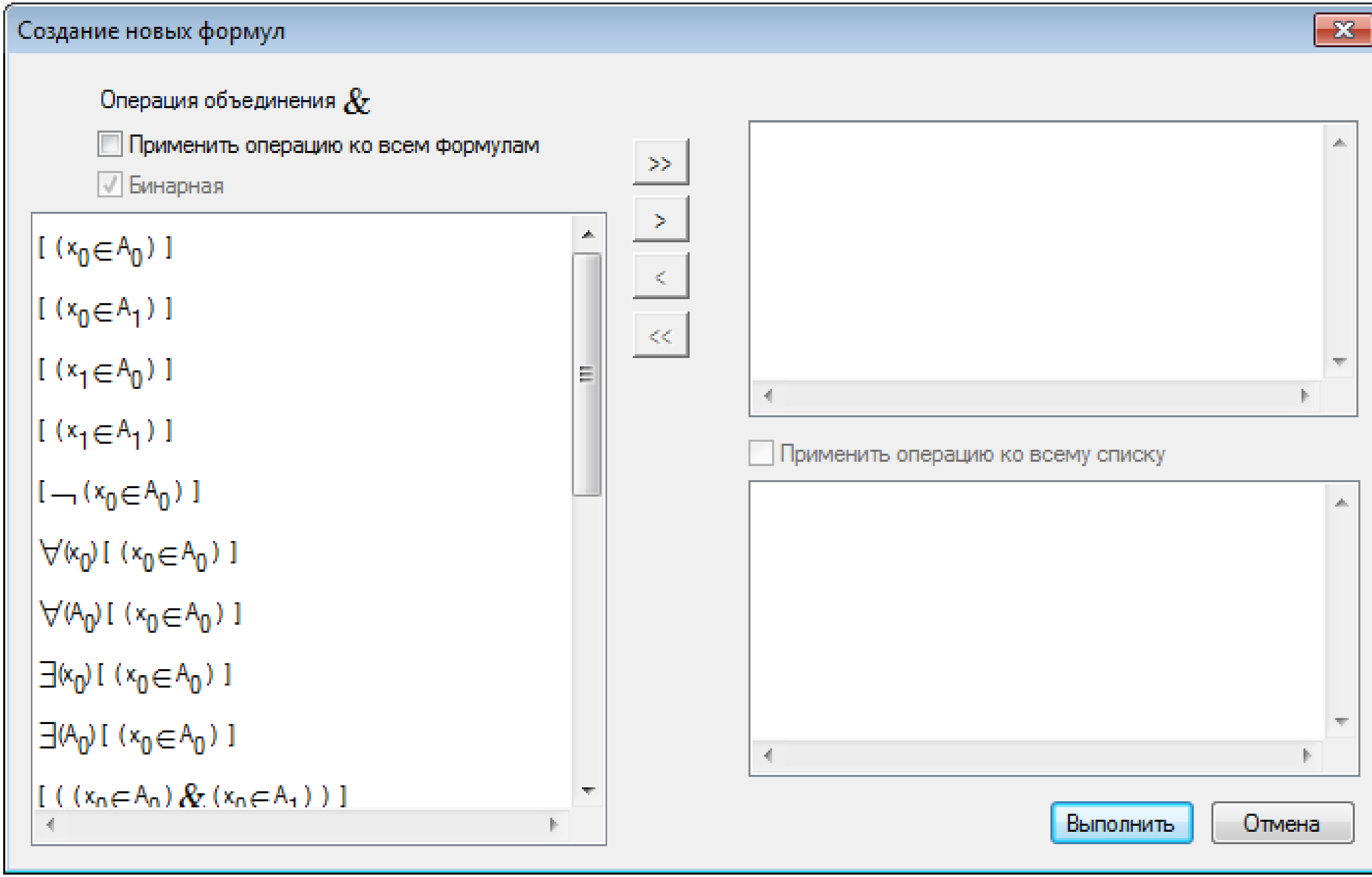
Стартовый интерфейс



Интерфейс для построения множества по предикату.



Интерфейс для логического объединения формул.



Первая часть построенных формул

Список формул

Ном...	Формула	Тип	Свободные...	Описание	Add...	Обозначение
1	$[\ (x_0 \in A_0)\ ]$	выполнима	$x_0 . A_0$			$P_0(x_0 . A_0)$
2	$[\ (x_0 \in A_1)\ ]$	выполнима	$x_0 . A_1$			$P_0(x_0 . A_1)$
3	$[\ (x_1 \in A_0)\ ]$	выполнима	$x_1 . A_0$			$P_0(x_1 . A_0)$
4	$[\ (x_1 \in A_1)\ ]$	выполнима	$x_1 . A_1$			$P_0(x_1 . A_1)$
5	$[\neg (x_0 \in A_0)\ ]$	выполнима	$x_0 . A_0$			$P_1(x_0 . A_0)$
6	$\forall(x_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$		A_0	A0 -универсум		$P_2(A_0)$
7	$\forall(A_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$		x_0	false		$P_3(x_0)$
8	$\exists(x_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$		A_0	A0 не пустое		$P_4(A_0)$
9	$\exists(A_0)[\ (x_0 \in A_0)\ ]$		x_0	true		$P_5(x_0)$
10	$\{x_0 \mid P_0(x_0 . A_0)\ \}$		$x_0 . A_0$	A0		$M_0(A_0)$
11	$\{A_0 \mid P_0(x_0 . A_0)\ \}$		$x_0 . A_0$			$R_0(x_0)$
12	$[\ (\ (x_0 \in A_0)\ \&\ (x_0 \in A_1)\ )\ ]$		$x_0 . A_0 . A_1$			$P_6(x_0 . A_0 . A_1)$
13	$[\ (\ (x_0 \in A_0) \vee (x_0 \in A_1)\ )\ ]$		$x_0 . A_0 . A_1$			$P_7(x_0 . A_0 . A_1)$
14	$[\neg (x_1 \in A_0)\ ]$	выполнима	$x_1 . A_0$			$P_8(x_1 . A_0)$
15	$[\neg (x_1 \in A_1)\ ]$	выполнима	$x_1 . A_1$			$P_9(x_1 . A_1)$
16	$[\neg (x_0 \in A_1)\ ]$	выполнима	$x_0 . A_1$			$P_{10}(x_0 . A_1)$

OK Отмена

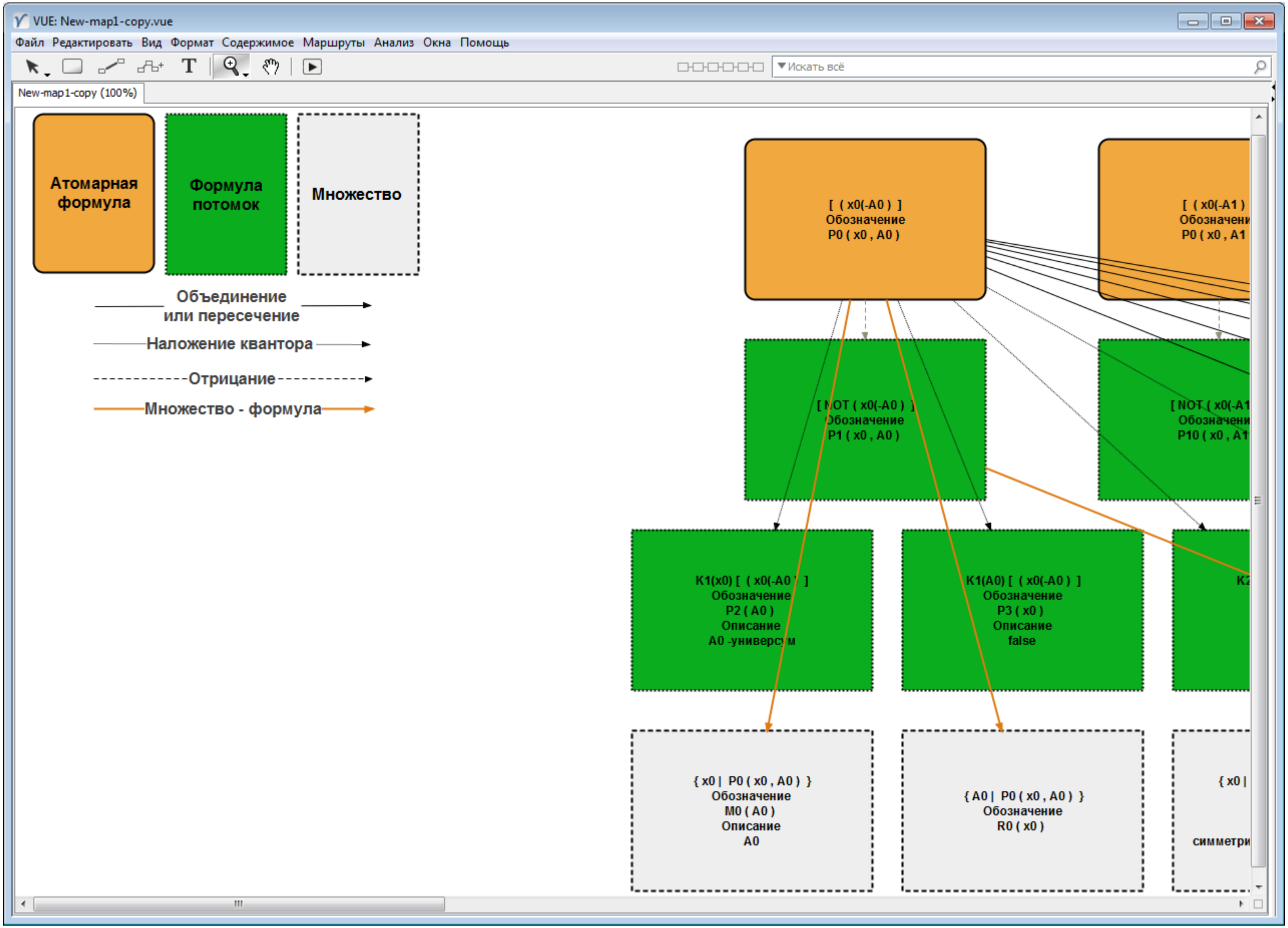
Вторая часть построенных формул

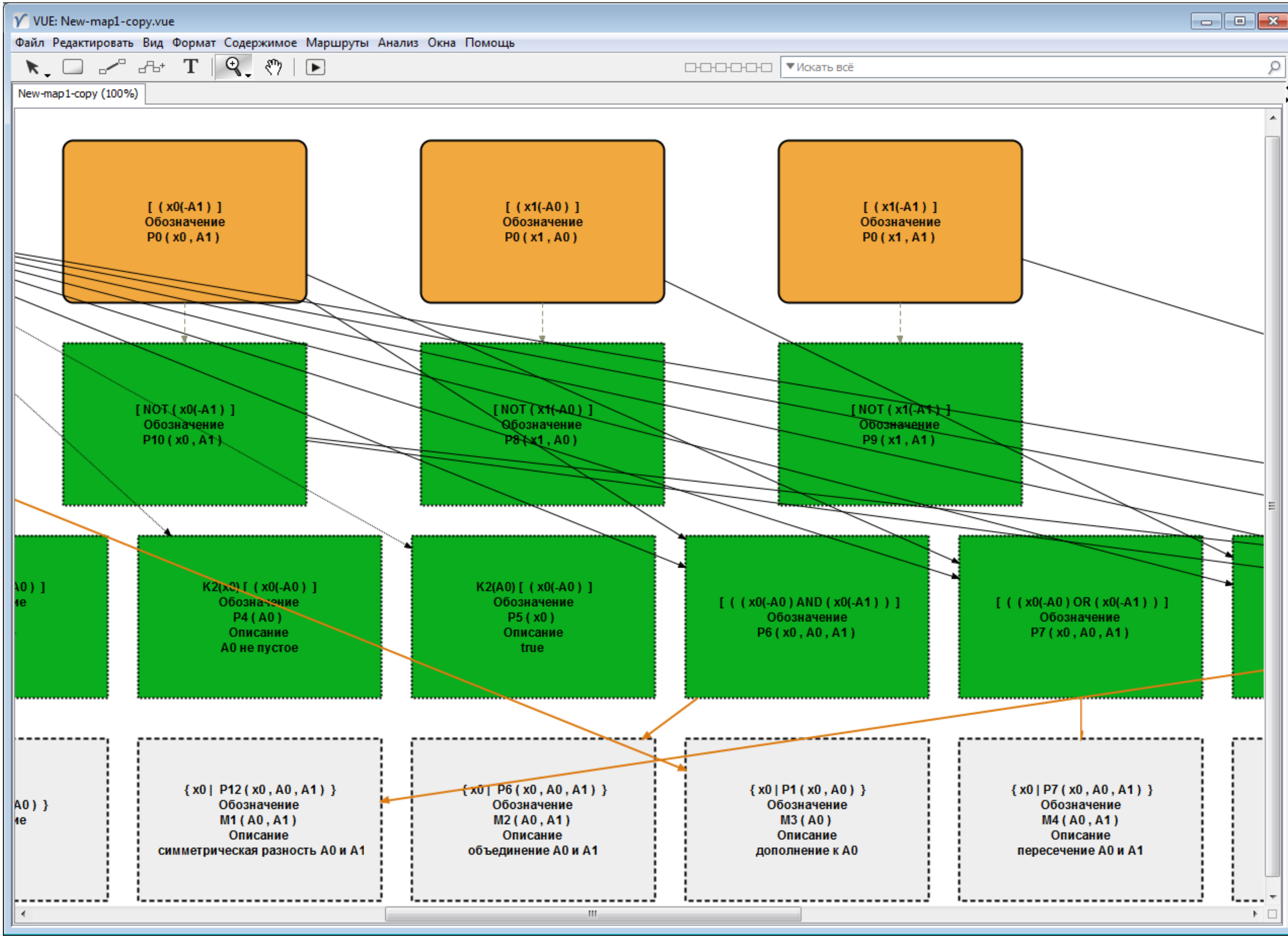
Список формул

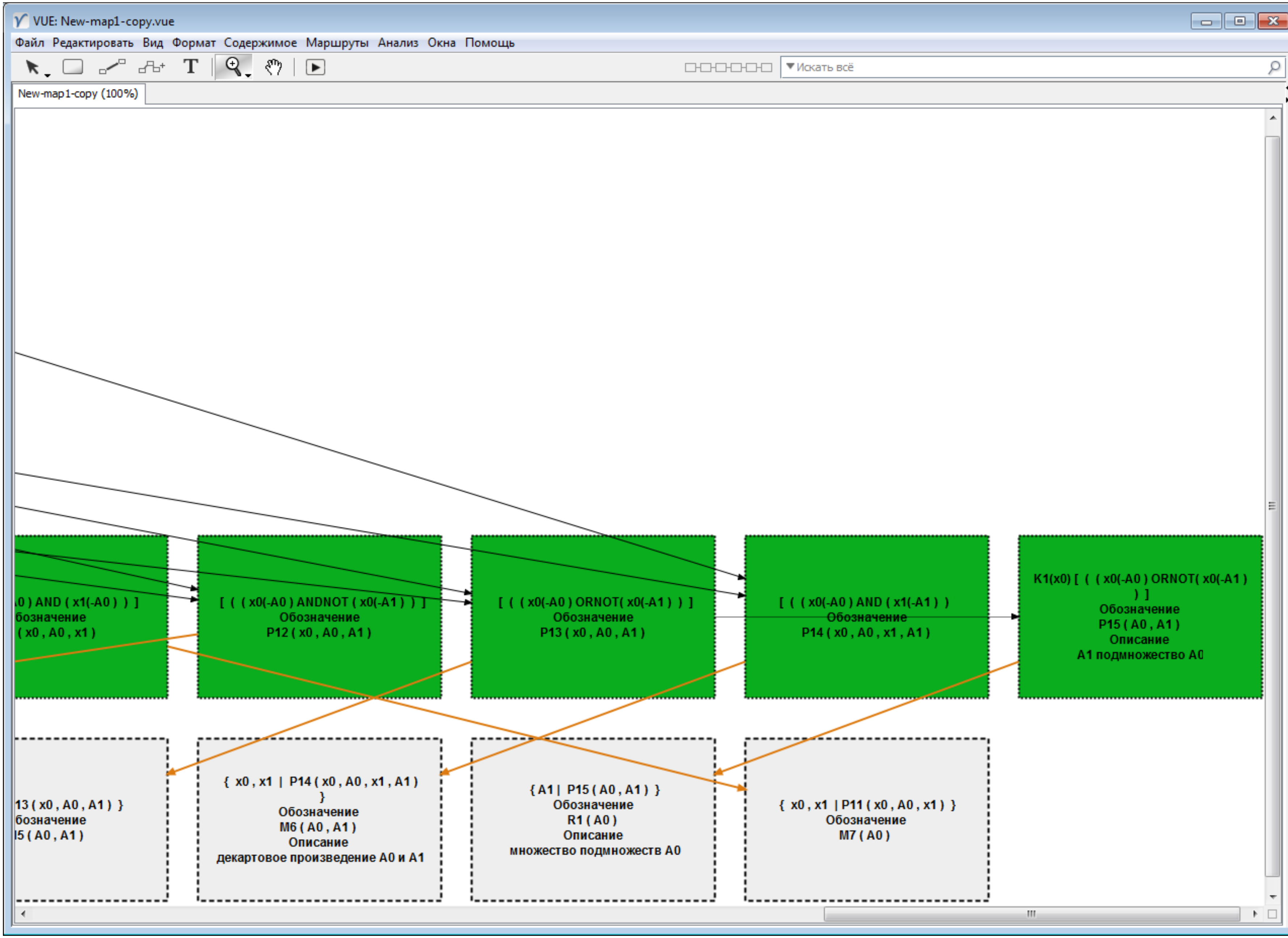
Ном...	Формула	Тип	Свободные...	Описание	Add...	Обозначение
14	$[\neg(x_1 \in A_0)]$	выполнима	$x_1 . A_0$			$P_8(x_1 . A_0)$
15	$[\neg(x_1 \in A_1)]$	выполнима	$x_1 . A_1$			$P_9(x_1 . A_1)$
16	$[\neg(x_0 \in A_1)]$	выполнима	$x_0 . A_1$			$P_{10}(x_0 . A_1)$
17	$[((x_0 \in A_0) \,\&\, (x_1 \in A_0))]$		$x_0 . A_0 . x_1$			$P_{11}(x_0 . A_0 . x_1)$
18	$[((x_0 \in A_0) \,\&\, \neg(x_0 \in A_1))]$		$x_0 . A_0 . A_1$			$P_{12}(x_0 . A_0 . A_1)$
19	$\{x_0 \mid P_{12}(x_0 . A_0 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . A_1$	симметрическая разность A0 и A1		$M_1(A_0 . A_1)$
20	$\{x_0 \mid P_6(x_0 . A_0 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . A_1$	объединение A0 и A1		$M_2(A_0 . A_1)$
21	$\{x_0 \mid P_1(x_0 . A_0)\}$		$x_0 . A_0$	дополнение к A0		$M_3(A_0)$
22	$\{x_0 \mid P_7(x_0 . A_0 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . A_1$	пересечение A0 и A1		$M_4(A_0 . A_1)$
23	$[((x_0 \in A_0) \vee \neg(x_0 \in A_1))]$		$x_0 . A_0 . A_1$			$P_{13}(x_0 . A_0 . A_1)$
24	$\{x_0 \mid P_{13}(x_0 . A_0 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . A_1$			$M_5(A_0 . A_1)$
25	$[((x_0 \in A_0) \,\&\, (x_1 \in A_1))]$		$x_0 . A_0 . x_1 . A_1$			$P_{14}(x_0 . A_0 . x_1 . A_1)$
26	$\{<x_0 . x_1> \mid P_{14}(x_0 . A_0 . x_1 . A_1)\}$		$x_0 . A_0 . x_1 . A_1$	декартовое произведение A0 и A1		$M_6(A_0 . A_1)$
27	$\forall(x_0)[((x_0 \in A_0) \vee \neg(x_0 \in A_1))]$		$A_0 . A_1$	A1 подмножество A0		$P_{15}(A_0 . A_1)$
28	$\{A_1 \mid P_{15}(A_0 . A_1)\}$		$A_0 . A_1$	множество подмножеств A0		$R_1(A_0)$
29	$\{<x_0 . x_1> \mid P_{11}(x_0 . A_0 . x_1)\}$		$x_0 . A_0 . x_1$			$M_7(A_0)$

OK Отмена

В верхнем ряду атомарные формулы. Во втором их отрицания. Дальше построенные предикаты и множества




VUE: New-map1-copy.vue
Файл Редактировать Вид Формат Содержимое Маршруты Анализ Окна Помощь
Искать всё
New-map1-copy (100%)
[(x0(-A1)]
Обозначение
P0 (x0 , A1)
[(x1(-A0)]
Обозначение
P0 (x1 , A0)
[(x1(-A1)]
Обозначение
P0 (x1 , A1)
[NOT (x0(-A1)]
Обозначение
P10 (x0 , A1)
[NOT (x1(-A0)]
Обозначение
P8 (x1 , A0)
[NOT (x1(-A1)]
Обозначение
P9 (x1 , A1)
K2(x0) [(x0(-A0)]
Обозначение
P4 (A0)
Описание
A0 не пустое
K2(A0) [(x0(-A0)]
Обозначение
P5 (x0)
Описание
true
[((x0(-A0) AND (x0(-A1))]
Обозначение
P6 (x0 , A0 , A1)
[((x0(-A0) OR (x0(-A1))]
Обозначение
P7 (x0 , A0 , A1)
{ x0 | P12 (x0 , A0 , A1) }
Обозначение
M1 (A0 , A1)
Описание
симметрическая разность A0 и A1
{ x0 | P6 (x0 , A0 , A1) }
Обозначение
M2 (A0 , A1)
Описание
объединение A0 и A1
{ x0 | P1 (x0 , A0) }
Обозначение
M3 (A0)
Описание
дополнение к A0
{ x0 | P7 (x0 , A0 , A1) }
Обозначение
M4 (A0 , A1)
Описание
пересечение A0 и A1


VUE: New-map1-copy.vue
Файл Редактировать Вид Формат Содержимое Маршруты Анализ Окна Помощь
Искать всё
New-map1-copy (100%)
0) AND (x1(-A0))]
бозначение
(x0 , A0 , x1)
[((x0(-A0) ANDNOT (x0(-A1))]
Обозначение
P12 (x0 , A0 , A1)
[((x0(-A0) ORNOT(x0(-A1))]
Обозначение
P13 (x0 , A0 , A1)
[((x0(-A0) AND (x1(-A1))
Обозначение
P14 (x0 , A0 , x1 , A1)
K1(x0) [((x0(-A0) ORNOT(x0(-A1))]
Обозначение
P15 (A0 , A1)
Описание
A1 подмножество A0
13 (x0 , A0 , A1) }
бозначение
I5 (A0 , A1)
{ x0 , x1 | P14 (x0 , A0 , x1 , A1) }
Обозначение
M6 (A0 , A1)
Описание
декартовое произведение A0 и A1
{ A1 | P15 (A0 , A1) }
Обозначение
R1 (A0)
Описание
множество подмножеств A0
{ x0 , x1 | P11 (x0 , A0 , x1) }
Обозначение
M7 (A0)

N	Формула	Свободные переменные	Обозначение	Символьное	Перевод на естественный язык
1	$[\ (x_0 \in A_0)\ ]$	x_0, A_0	$P_0(x_0, A_0)$		
2	$[\ (x_0 \in B_0)\ ]$	x_0, B_0	$P_0(x_0, B_0)$		
3	$[\ (x_1 \in A_0)\ ]$	x_1, A_0	$P_0(x_1, A_0)$		
4	$[\ (x_1 \in B_0)\ ]$	x_1, B_0	$P_0(x_1, B_0)$		
5	$[\ \neg((x_0 \in A_0))\ ]$	x_0, A_0	$P_1(x_0, A_0)$		
6	$\forall(x_0)\ [\ (x_0 \in A_0)\ ]$	A_0	$P_2(A_0)$	$A_0=U$	A_0-универсум
7	$\forall(A_0)\ [\ (x_0 \in A_0)\ ]$	x_0	$P_3(x_0)$		
8	$\exists(x_0)\ [\ (x_0 \in A_0)\ ]$	A_0	$P_4(A_0)$	$A_0 \neq \varnothing$	
9	$\exists(A_0)\ [\ (x_0 \in A_0)\ ]$	x_0	$P_5(x_0)$		
10	$\forall(x_0)\ [\ \neg((x_0 \in A_0))\ ]$	A_0	$P_6(A_0)$	$A_0=\varnothing$	A_0-пустое множество
11	$\exists(A_0)\ \exists(x_0)\ [\ (x_0 \in A_0)\ ]$		$P_7(\ )$		TRUE аксиома
12	$\{\ x_0 \mid (x_0 \in A_0)\ \}$	A_0	$A_1(A_0)$		A_0
13	$\{\ A_0 \mid (x_0 \in A_0)\ \}$	x_0	$R_0(x_0)$		
14	$[\ (\ (x_0 \in A_0)\ \&\ (x_0 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, B_0	$P_8(x_0, A_0, B_0)$		
15	$[\ (\ (x_0 \in A_0) \vee (x_0 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, B_0	$P_9(x_0, A_0, B_0)$		
16	$[\ (\ \neg((x_0 \in A_0)) \vee (x_0 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, B_0	$P_{10}(x_0, A_0, B_0)$		
17	$[\ (\ \neg((x_0 \in A_0))\ \&\ (x_0 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, B_0	$P_{11}(x_0, A_0, B_0)$		
18	$\{\ x_0 \mid (\ (x_0 \in A_0)\ \&\ (x_0 \in B_0)\ )\ \}$	A_0, B_0	$M_0(A_0, B_0)$	$A_0 \cap B_0$	Пересечение множеств

19	$x_0 \in M_0(A_0, B_0)$	x_0, A_0, B_0	$P_{08}(x_0, A_0, B_0)$		
20	$\langle x_0 \rangle \in M_1(A_0, B_0)$	x_0, M_1	$P_{12}(x_0, M_1)$		
21	$M_1(A_0, B_0) \subset M_0(A_0, B_0)$	A_0, B_0, M_1	$P_{13}(A_0, B_0, M_1)$		
22	$\{ x_0 \mid ((x_0 \in A_0) \vee (x_0 \in B_0)) \}$	A_0, B_0	$N_0(A_0, B_0)$	$A_0 \cup B_0$	Объединение множеств
23	$x_0 \in N_0(A_0, B_0)$	x_0, A_0, B_0	$P_{09}(x_0, A_0, B_0)$		
24	$\langle x_0 \rangle \in N_1(A_0, B_0)$	x_0, N_1	$P_{14}(x_0, N_1)$		
25	$N_1(A_0, B_0) \subset N_0(A_0, B_0)$	A_0, B_0, N_1	$P_{15}(A_0, B_0, N_1)$		
26	$\{ x_0 \mid (\neg((x_0 \in A_0)) \& (x_0 \in B_0)) \}$	A_0, B_0	$M_2(A_0, B_0)$	$B_0 \setminus A_0$	Разность множеств
27	$[((x_0 \in A_0) \& (x_1 \in A_0))]$	x_0, A_0, x_1	$P_{16}(x_0, A_0, x_1)$		
28	$\{ \langle x_0, x_1 \rangle \mid ((x_0 \in A_0) \& (x_1 \in A_0)) \}$	A_0	$D_0(A_0)$	$A_0 x A_0$	
29	$\langle x_0, x_1 \rangle \in D_0(A_0)$	x_0, A_0, x_1	$P_{016}(x_0, A_0, x_1)$		
30	$\langle x_0, x_1 \rangle \in G_0(A_0)$	x_0, x_1, G_0	$P_{17}(x_0, x_1, G_0)$		
31	$G_0(A_0) \subset D_0(A_0)$	A_0, G_0	$P_{18}(A_0, G_0)$		G_0 граф на A_0 (бинарное отношение на A_0

32	$[\ (\ (x_0 \in A_0)\ \&\ (x_1 \in B_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, x_1, B_0	$P_{19}(x_0, A_0, x_1, B_0)$	
33	$(A_0 x B_0)$	A_0, B_0	$D_1(A_0, B_0)$	
34	$\langle x_0, x_1 \rangle \in (A_0 x B_0)$	x_0, A_0, x_1, B_0	$P_{019}(x_0, A_0, x_1, B_0)$	
35	$\langle x_0, x_1 \rangle \in H_0(A_0, B_0)$	x_0, x_1, H_0	$P_{20}(x_0, x_1, H_0)$	
36	$H_0(A_0, B_0) \subset (A_0 x B_0)$	A_0, B_0, H_0	$P_{21}(A_0, B_0, H_0)$	
37	$\langle x_0, x_2 \rangle \in G_0(A_0)$	x_0, x_2, G_0	$P_{22}(x_0, x_2, G_0)$	
38	$\langle x_1, x_2 \rangle \in G_0(A_0)$	x_1, x_2, G_0	$P_{23}(x_1, x_2, G_0)$	
39	$\langle x_1, x_0 \rangle \in G_0(A_0)$	x_1, x_0, G_0	$P_{24}(x_1, x_0, G_0)$	
40	$\langle x_0, x_0 \rangle \in G_0(A_0)$	x_0, x_0, G_0	$P_{25}(x_0, x_0, G_0)$	
41	$[\ (\neg(\ (x_0 \in A_0)\ ) \vee \langle x_0, x_0 \rangle \in G_0(A_0)\ )\ ]$	x_0, A_0, G_0	$P_{26}(x_0, A_0, G_0)$	
42	$\forall(x_0)\ [\ (\neg(\ (x_0 \in A_0)\ ) \vee \langle x_0, x_0 \rangle \in G_0(A_0)\ )\ ]$	A_0, G_0	$P_{27}(A_0, G_0)$	G_0-рефлексивное отношение
43	$[\neg(\langle x_0, x_1 \rangle \in G_0(A_0))]$	x_0, x_1, G_0	$P_{28}(x_0, x_1, G_0)$	
44	$[\ (\neg(\langle x_0, x_1 \rangle \in G_0(A_0)) \vee \langle x_1, x_0 \rangle \in G_0(A_0)\ )\ ]$	x_0, x_1, G_0	$P_{29}(x_0, x_1, G_0)$	

45	$\forall(x_0)\,[\ (\neg(\langle x_0, x_1\rangle \in G_0(A_0))\vee\langle x_1, x_0\rangle \in G_0(A_0))\ ]$	x_1, G_0	$P_{30}(x_1, G_0)$	
46	$\forall(x_1)\,\forall(x_0)\,[\ (\neg(\langle x_0, x_1\rangle \in G_0(A_0))\vee\langle x_1, x_0\rangle \in G_0(A_0))\ ]$	G_0	$P_{31}(G_0)$	G_0-симметричное отношение
47	$[\neg\langle x_1, x_2\rangle \in G_0(A_0)]$	x_1, x_2, G_0	$P_{32}(x_1, x_2, G_0)$	
48	$[\ (\neg(\langle x_0, x_1\rangle \in G_0(A_0))\vee\neg\langle x_1, x_2\rangle \in G_0(A_0))\ ]$	x_0, x_1, G_0, x_2	$P_{33}(x_0, x_1, G_0, x_2)$	
49	$[\ (\ (\neg(\langle x_0, x_1\rangle \in G_0(A_0))\vee\neg\langle x_1, x_2\rangle \in G_0(A_0))\vee\langle x_0, x_2\rangle \in G_0(A_0))\ ]$	x_0, x_1, G_0, x_2	$P_{34}(x_0, x_1, G_0, x_2)$	
50	$\forall(x_0)\,[\ (\ (\neg(\langle x_0, x_1\rangle \in G_0(A_0))\vee\neg\langle x_1, x_2\rangle \in G_0(A_0))\vee\langle x_0, x_2\rangle \in G_0(A_0))\ ]$	x_1, G_0, x_2	$P_{35}(x_1, G_0, x_2)$	
51	$\forall(x_1)\,\forall(x_0)\,[\ (\ (\neg(\langle x_0, x_1\rangle \in G_0(A_0))\vee\neg\langle x_1, x_2\rangle \in G_0(A_0))\vee\langle x_0, x_2\rangle \in G_0(A_0))\ ]$	G_0, x_2	$P_{36}(G_0, x_2)$	
52	$\forall(x_2)\,\forall(x_1)\,\forall(x_0)\,[\ (\ (\neg(\langle x_0, x_1\rangle \in G_0(A_0))\vee\neg\langle x_1, x_2\rangle \in G_0(A_0))\vee\langle x_0, x_2\rangle \in G_0(A_0))\ ]$	G_0	$P_{37}(G_0)$	G_0-транзитивное отношение

53	$\{ x_0 \mid \langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0) \}$	x_1 , G_0	$O_1 (x_1 , G_0)$	окрестность x_1-вершины из которых рёбра входят в x_1
54	$x_0 \in O_1 (x_1 , G_0)$	x_0 , x_1 , G_0	$P_{017} (x_0 , x_1 , G_0)$	
55	$\langle x_0 \rangle \in Q_1(x_1 , G_0)$	x_0 , Q_1	$P_{38} (x_0 , Q_1)$	
56	$Q_1(x_1 , G_0) \subset O_1 (x_1 , G_0)$	x_1 , G_0 , Q_1	$P_{39}(x_1 , G_0 , Q_1)$	
57	$\{ x_0 \mid \langle x_1 , x_0 \rangle \in G_0(A_0) \}$	x_1 , G_0	$O_2 (x_1 , G_0)$	окрестность x_1-вершины в которые рёбра входят из x_1
58	$x_1 \in O_2 (x_0 , G_0)$	x_1 , x_0 , G_0	$P_{021} (x_1 , x_0 , G_0)$	
59	$\langle x_1 \rangle \in Q_2(x_0 , G_0)$	x_1 , Q_2	$P_{40} (x_1 , Q_2)$	
60	$Q_2(x_0 , G_0) \subset O_2 (x_0 , G_0)$	x_0 , G_0 , Q_2	$P_{41}(x_0 , G_0 , Q_2)$	
61	$\exists(x_0)\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0)$	x_1 , G_0	$P_{42} (x_1 , G_0)$	
62	$\exists(x_1)\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0)$	x_0 , G_0	$P_{43} (x_0 , G_0)$	
63	$\{ x_1 \mid \exists(x_0)\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0) \}$	G_0	$E_0 (G_0)$	область значений G_0
64	$x_1 \in E_0 (G_0)$	x_1 , G_0	$P_{038} (x_1 , G_0)$	
65	$\{ x_0 \mid \exists(x_1)\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0) \}$	G_0	$F_0 (G_0)$	область определения G_0
66	$x_0 \in F_0 (G_0)$	x_0 , G_0	$P_{039} (x_0 , G_0)$	

67	$(A_0 \subset B_0)$	A_0 , B_0	$P_{44} (A_0 , B_0)$		$\forall(x_0) [(\neg((x_0 \in A_0)) \& (x_0 \in B_0))]$
68	$\{ A_0 \mid (A_0 \subset B_0) \}$	B_0	$R_1 (B_0)$	множество подмножеств B_0	
69	$A_0 \in R_1 (B_0)$	A_0 , B_0	$P_{040} (A_0 , B_0)$		
70	$\{ B_0 \mid (A_0 \subset B_0) \}$	A_0	$S_0 (A_0)$		
71	$B_0 \in S_0 (A_0)$	A_0 , B_0	$P_{040} (A_0 , B_0)$		
72	$[(x_2 \in A_0)]$	x_2 , A_0	$P_{49}(x_2 , A_0)$		
73	$[((\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0)) \&[(x_2 \in A_0)])]$	$x_0 , x_1 , G_0 , x_2 , A_0$	$P_{50} (x_0 , x_1 , G_0 , x_2 , A_0)$		
74	$\{ \langle x_0 , x_1 , x_2 \rangle \mid ((\langle x_0 , x_1 \rangle \in G_0(A_0)) \&[(x_2 \in A_0)]) \}$	G_0 , A_0	$G_1 (G_0 , A_0)$	$A_0 \times A_0 \rightarrow A_0$	
75	$\langle x_0 , x_1 , x_2 \rangle \in G_1 (G_0 , A_0)$	$x_0 , x_1 , G_0 , x_2 , A_0$	$P_{041} (x_0 , x_1 , G_0 , x_2 , A_0)$		
76	$\langle x_0 , x_1 , x_2 \rangle \in G_2(x_1 , G_0 , A_0)$	x_0 , x_1 , x_2 , G_2	$P_{51} (x_0 , x_1 , x_2 , G_2)$		
77	$G_2(G_0 , A_0) \subset G_1 (G_0 , A_0)$	G_0 , A_0 , G_2	$P_{52}(G_0 , A_0 , G_2)$		

Расширение языка

- Из предиката принадлежности мы получили включение, пересечение, объединение, дополнение, разность, декартовое произведение множеств, множество-степень.
- $<$**Set**;$\in$$>$$\to$ $<$**Set;** $\in, \cap, \cup, \times, \subset$ $>$

- Мы из предиката принадлежности получили всю сигнатуру теории множеств комбинаторно. В языке первого порядка сигнатура задается как правило изначально, в этом есть отличие. Новые обозначения вписываются в таблицу (четвертый столбец) человеком, т.к. компьютер их не знает. Затем они переносятся в первый столбец, и программа продолжает работать уже с новыми обозначениями.

Первые натуральные числа

Натуральные числа

$\forall B\ P6(A, B) \wedge B \neq \varnothing => A = B \equiv |A| = 1$

$\forall B\ (P6(A, B) \wedge B \neq \varnothing => (A = B \vee |B| = 1)) \equiv |A| = 2$

$\forall B\ (P6(A, B) \wedge B \neq \varnothing \wedge |B| \neq 1 => A = B\ ) \equiv |A| = 2$

$\forall B\ (P6(A, B) \wedge B \neq \varnothing \wedge |B| \neq 1 \wedge |B| \neq 2 => A = B\ ) \equiv |A| = 3$

и т.д. по индукции

Определение чисел

- N—натуральные числа
  $|A|=n$ & $|B|=m \Leftrightarrow |A\cup B|=n+m$,если $A\cap B=\varnothing$
  $|A|=n$ & $|B|=m \Leftrightarrow |A\mathrm{x}B|=n\mathrm{x}m$
- Отрицательные числа

Вычитание операция обратная сложению

$x+n=m \quad <<x,n>,m> \forall n \forall m \exists\, x <<x,n>,m> \in Z$

Деление операция обратная умножению

$x\cdot n=m <<x,n>,m> \forall n \forall m \exists\, x <<x,n>,m> \in Q$

Функции

$(\forall x0\ |M8(x0)|=1)=P22(A, B)$ A->B функция

$(\forall x0\ |M7(x0)|=1)=P23(A, B)$ A->B инъекция

или сюръекция?

$\forall B\ (P6(A, B) \vee Q6(B, A) \vee B=\varnothing) \equiv |A|=1$

Группы

$<<x0, x1>,x2> \in G$ G= Ax A ->A

$P24(G)=\exists x1\ \forall x0 <<x0, x1>,x0> \in G$ в G есть единица

$P25(x1)= \forall x0 <<x0, x1>,x0> \in G$ x1-единица

$P26(G)= \exists x2\ \forall x0\ (<<x0, x2>,x1> \in G \wedge P25(x1))$ для всех элементов есть обратный: x2 обратный к x0.

Многообразия (Графоиды)

$\forall x0 \in A$ $|M8(x0)|=2 \wedge P27(A)$ одномерная поверхность (цикл) A- неориентированный граф

$P27(A)= \neg$ ($\exists$ C $\exists$ B A0=M2(C x C, B x B)$\wedge$ Q2(M1(C,B))) -A связный

$\forall x0 \in A$ $|M8(x0)|=2 \vee |M8(x0)|=1 \wedge P27(A)$ одномерная поверхность с границей. Граница $|M8(x0)|=1$

$\forall x0 \in A$ $|M8(x0)|=3 \vee |M8(x0)|=2 \wedge P27(A)$ двухмерная поверхность с границей. Граница $|M8(x0)|=2$

Структуры множеств

R1(B)={A| P6(B, A)} множество подмножеств B

R2(B)={A| P6(A, B)} все множества, куда включается B

P21(R)= $\forall$A $\forall$B (P0(A, R) $\wedge$ P0(B, R)=>(Mi(A, B), R)) R-кольцо, алгебра множеств

Функции

$F \subset A x B \;\; x0 \in A \; x1 \in B$

$(P6(AxB,F) \wedge (\forall x0\ (P0(x0,A)\ |M8(x0)|=1)))=P22(F, A, B)$ A->B функция

$(P6(AxB,F) \wedge\ (\forall x0\ |M7(x0)|=1)=P23(F,A,B)$ A->B инъекция или сюръекция? исправить

$\forall B\ (P6(A, B) \vee Q6(B, A) \vee B=\varnothing) \equiv |A|=1$

Группы

$<<x0, x1>,x2> \in G \;\; G= Ax\ A \to A$

$P24(G)=\exists x1\ \forall x0 <<x0, x1>,x0> \in G$ в G есть единица

$P25(x1)= \forall x0 <<x0, x1>,x0> \in G$ x1-единица

$P26(G)= \forall x0\ \exists x2\ (<<x0, x2>,x1> \in G \wedge P25(x1))$ для всех элементов есть обратный: x2 обратный к x0.

+ассоциативность

Включение, пересечение, объединение, дополнение и т.д. это семантические понятия теории множеств. Отношения меду ними в нашей сети связаны со способом построения формул, которые обозначают эти понятия. Поэтому мы построили одновременно и синтаксическую и семантическую сеть.

С помощью программы **MathSem** можно построить, например, теоремы:

$(A \subset B \wedge B \subset C) => A \subset C = TRUE$;

$(A_0 \cap A_1) \subset A_1 = TRUE$; $(A_0 \cup A_1) \subset A_1 = A_0 \subset A_1$; $A_1 \subset (A_0 \cup A_1) = TRUE$; $A_1 \subset (A_1 \cap A_0) = A_1 \subset A_0$.

Интерпретация нашей системы задается на конечном или счетном наборе x_i, A_i, M_i, R_i.

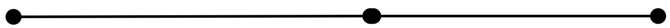
Для доказательств теорем мы используем классическую логику и законы и правила вывода в этой логике, плюс мы можем подставлять множество истинности как терм в предикат.

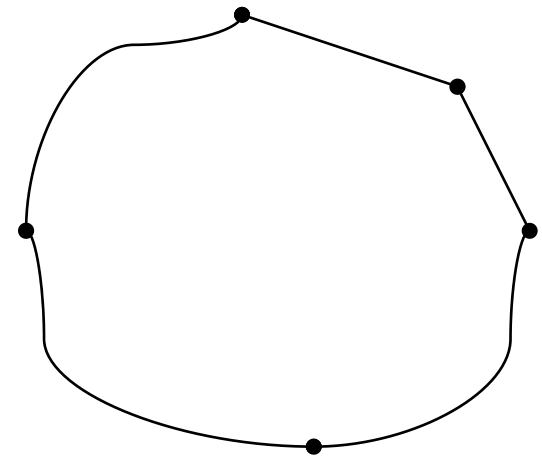
Для логики предикатов первого порядка существует стандартные алгоритмы автоматического доказательства. Метод резолюций и метод аналитических (семантических) таблиц описаны в [2,11].

Построили семантическую сеть понятий и утверждений из теории множеств. Интересно проследить связь построенной системы с аксиоматикой ZFC теории множеств[4]. Часть аксиом ZFC синтаксически выводится в нашей системе.

Компьютерная программа MathSem может использоваться как компьютерный практикум, например, по дискретной математике. Используя это программу, можно изучать математическую логику, теорию множеств, теорию отношений, теорию графов, теорию групп. Это знакомит студентов с такими современными направлениями в науке как семантические сети, представление знаний, онтологии, логический вывод.

Пути и циклы



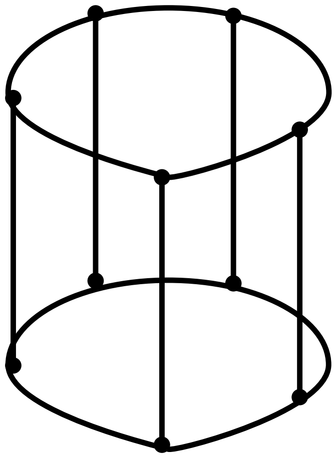


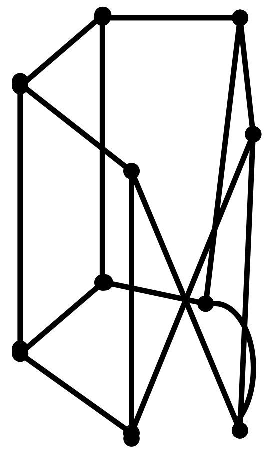
- Определение. *Циклом* называется связный одномерный граф без границы. У всех вершин степень равна двум.
-
- Определение. *Путем* называется связный одномерный граф с границей. Степени вершин два или один.

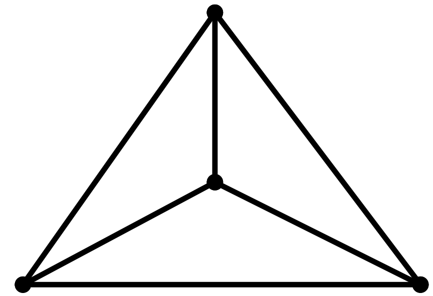
- <u>Определение.</u> Две вершины в графоиде *G* называются *близкими*, если они соединены ребром.
- Определение. Два пути (цикла) в графоиде *G* называются *близкими*, если для каждой вершины одного пути (цикла) существует вершина в другом пути (цикле), совпадающая с данной или соединенная с данной ребром. При этом близкие вершины переходят в близкие.
- Понятие близости есть отношение на циклах и путях.
- Определение. *Гомотопными* называются пути(циклы) L_1 и L_N если существует последовательность близких путей(циклов) $L_1, L_2, \dots, L_N$, таких, что L_i близко к L_{i+1}.
- Отношение гомотопии это транзитивное замыкание отношения близости.
- Можно факторизовать циклы по отношению гомотопии. Получим фактор-множество состоящее из классов эквивалентности гомотопных циклов.

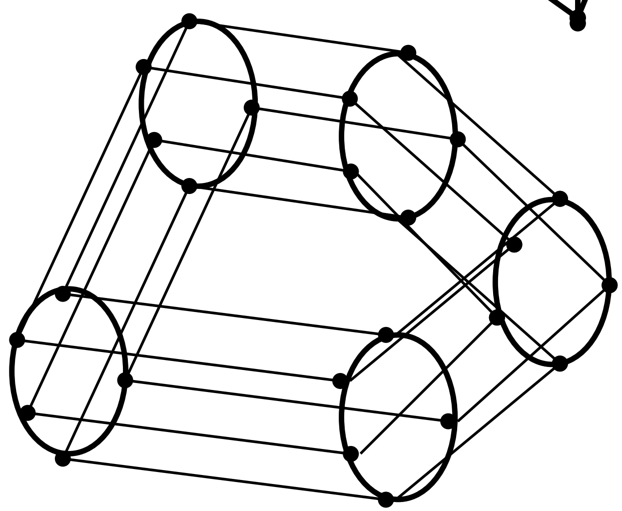
- Определение. *Двумерный графоид* (соответствует двумерной поверхности)– это граф, каждое ребро которого и вершина принадлежат хотя бы одному минимальному циклу, каждый минимальный цикл содержит ребро, через которое проходит ровно один другой минимальный цикл (такие циклы будем называть гранями). Все грани соединены по одному смежному ребру (они называются смежными). Через ребро проходит максимум две грани. По смежным граням можно дойти до любой грани.
-
- Определение. *Границей двумерного графоида* (поверхности) называется набор ребер, которые не являются смежными (общими) для двух граней.
-
- Определение Поверхность называется *односвязной*, если содержит один класс эквивалентности по гомотопии.

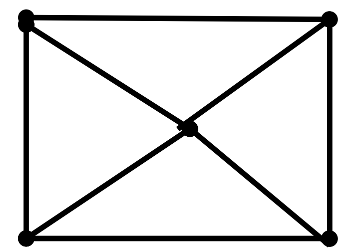
- Определение. *Диском* называется односвязная поверхность со связной границей (один одномерный цикл)
-
- Определение. *Лентой Мебиуса* называется неодносявязная поверхность со связной границей (одномерный цикл).
-
- Определение. *Цилиндром* называется поверхность с несвязной границей из двух одномерных циклов.
-
- Определение. *Сферой* называется односвязная поверхность без границы (число вершин и граней конечно)
-
- Определение *Тором* называется неодносвязная поверхность без границы с двумя классами гомотопных циклов.











- Определение. *Минимальным по данному свойству P* называется графоид $G(P)$ с минимальным числом вершин, для которого выполняется свойство *P.*
-

Литература

1. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. – М.: Изд-во МЦНМО. – 2008. – 288 с.
2. Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В. . Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах.-М:Физматлит-2004.-704 с.
3. Захаров В.К. Локальная теория множеств.// Математические заметки- 2005 , с.194–212
4. Лавров И.А. Математическая логика. – М. :Академия. – 2006. – 240 с.
5. Люксембург А.А. Автоматизированное построение математических теорий. – М.: Изд-во УРСС. – 2005. – 30 с.
6. Маслов С.Ю. Теория дедуктивных систем и ее применения - М.: Радио и связь-1986.
7. Непейвода Н.Н. Прикладная логика. Учебное пособие. — Новосибирск, 2000. — 521 с
8. Осипов Г.С. Лекции по искусственному интеллекту.-М.: Красанд-2009.-272 с.
9. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов**.** Архитектура и языки решателя задач. -М.: Физматлит.- 2008. - 1024 с.
10. Давыденко И.Т., Житко В.А., Заливако С.С., Корончик Д.Н., Мошенко С.Г., Савельева О.Ю., Старцев С.С., Шункевич Д.В. Интеллектуальная справочная система по геометрии - Минск -Труды конференции OSTIS-2011.
11. Robinson J.A., Voronkov A. (Eds.). Handbook of Automated Reasoning (in 2 volumes). Elsevier and MIT Press-2001.
12. Интернет, программа VUE *http://vue.tufts.edu/about/index.cfm*