Дискретная математика

Отношения.

Бинарные отношения

и их свойства

Корнелюк Владислав гр.221-323

- **Определение.** ***Отношение*** есть взаимная формальная связь различных величин, предметов, действий, то есть элементов некоторого множества.

Отношения в некоторых числовых множествах могут выражаться терминами: «быть равным», «быть больше», «быть не меньше», «быть делителем» и т.д.

Отношения во множестве линий на плоскости могут выражаться терминами: «быть параллельными», «пересекаться», «касаться» и т.д.

- ***Декартовым*** (*прямым*) ***произведением*** множеств A×B называется множество всех упорядоченных пар (всех кортежей), в которых первый элемент принадлежит множеству *A*, а второй элемент принадлежит множеству *B*.

Пример Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}; \ |A \times B| = 9.$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots a_n \in A_n\}$$

Определение

Пусть задано множество М. Рассмотрим декартово произведение этого множества на себя М х М.

Определение

Пусть задано множество M. Рассмотрим декартово произведение этого множества на себя M x M.

- *Подмножество R множества M* x *M называется бинарным отношением R на множестве M. Если пара (x;y) принадлежит множеству R, говорят, что элемент x находится в отношении R с элементом y, и записывают xRy.*

Подмножество $R \subset M^n$ называется ***n*-местным отношением** *R* на непустом множестве *M*. При *n*=2 отношение *R* называется ***бинарным***.

То есть ***бинарным*** отношением между элементами множеств А и В называют любое подмножество R множества АxВ и записывают $R \subset A \times B$.

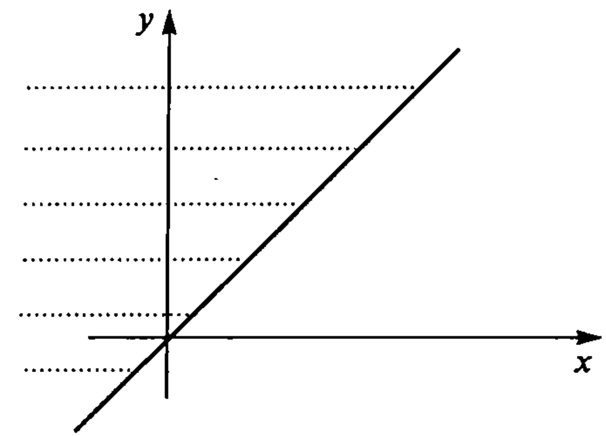
Для отношения R ***обратным*** является отношение $R^{-1} \subset B \times A$.

Бинарные отношения принято записывать в виде *aRb*, где *a, b* $\in$ *M*. Запись читается как «*a и b находятся в отношении R*».

Например, a||b (параллельные прямые), a $\leq$b (действительные числа), a = $\log_c$ b и т.д.

<u>Рассмотрим примеры бинарных отношений</u>.

Бинарное отношение R: x $\leq$ y показано на рис. Заштриховано множество точек, для координат которых это отношение выполняется (истинно).



Графики прямых и обратных бинарных отношений, определенных на множестве действительных чисел, симметричны относительно биссектрисы I и III квадрантов.

Это свойство обратных бинарных отношений используют при построении графиков обратных функций, например: $y = \log_2 x$ и $y=2^x$

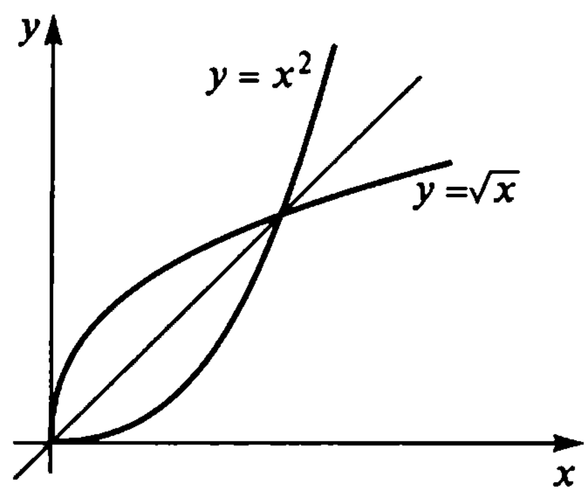
<u>Пример 1.</u>

$y = x^2$ и

$y = \sqrt{x}$,

где $x \geq 0$

(рис. а);



a

Способы задания бинарных отношений.

1. Перечислением элементов

- *V={a, b, c, d, e}, $T \subset V^2$*

$$T=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(b,e),(c,a),$$
$$(c,b),(c,d),(c,e),(d,b),(d,c),(e,c),(d,e)\}$$

2. Характеристическим свойством

A={1, 2, 3, 4, 5}, $R \subset Z^2$

*R={(x,y)| **x<y**}*

R={(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5) }

Способы задания бинарных отношений.

3. С помощью графа

Граф

Def: граф – это совокупность множества V с заданным на нем отношением $U \subset V^2$:

$$G = \langle V, U \rangle$$

V – носитель графа (множество вершин),

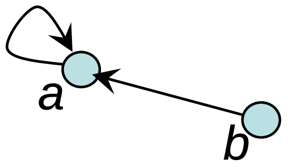
U – сигнатура графа (множество ребер или дуг).

Пример

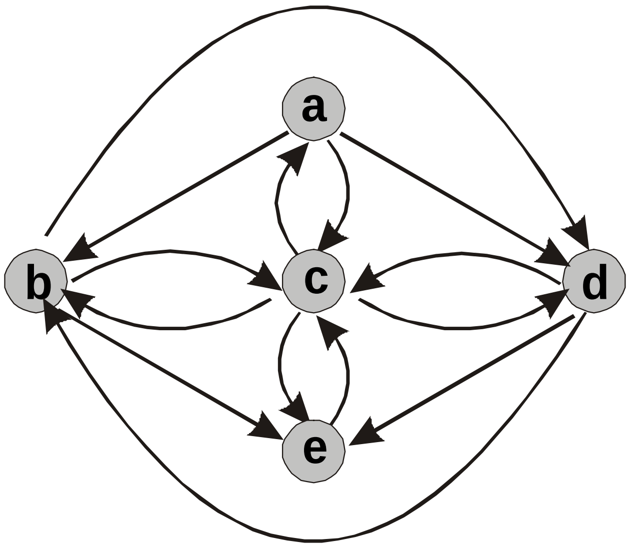
Дано: $A = \{a, b\}$,

$R_2 = \{(a,a), (b,a)\} \subset A^2$

Граф бинарного отношения R_2 изображается так:



Пример: информационный обмен между устройствами ЭВМ



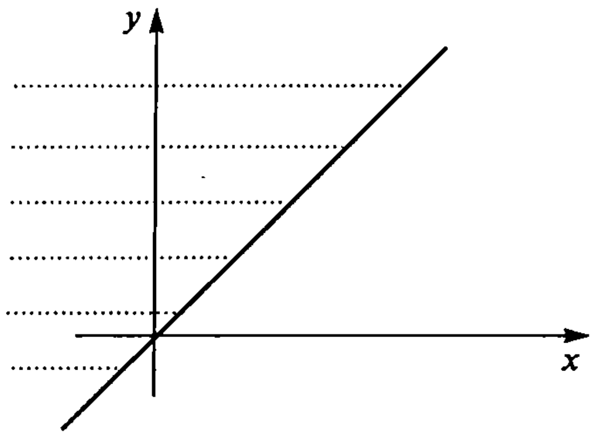
- $V=\{a, b, c, d, e\}$, $T \subset V^2$

$$T=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(b,e),(c,a),(c,b),(c,d),(c,e),(d,b),(d,c),(e,c),(d,e)\}$$

- *a – устройство ввода;*
- *b – процессор;*
- *c – устройство управления;*
- *d – запоминающее устройство;*
- *e – устройство вывода.*

- 4. С помощью графика

Бинарное отношение R: x ≤ y показано на рис. Заштриховано множество точек, для координат которых это отношение выполняется (истинно).



Способы задания бинарных отношений.

5. Матрица смежности

Def: матрица смежности бинарного отношения на множестве $A=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ – это таблица размера $n\times n$, в которой элемент c_{ij}, определяется следующим образом:

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } a_i R a_j; \\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

Пример

Дано: $A=\{a, b\}$, $R_2=\{(a,a), (b,a)\}\subset A^2$

Матрица смежности бинарного отношения R_2 представляется так:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}$$

Пример: На множестве М натуральных чисел от 1 до 5 построим бинарное отношение R={(a,b)|mod(a,b)=0}.

Решение. На множестве натуральных чисел *M* строим такие пары *(a, b)*, что, *a* делится на *b* без остатка (mod(a,b)=0). Получаем *R={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (4,2)}*.

Граф и матрица данного бинарного отношения:

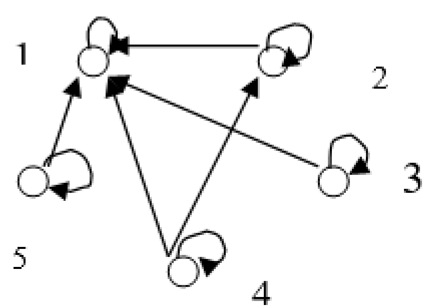


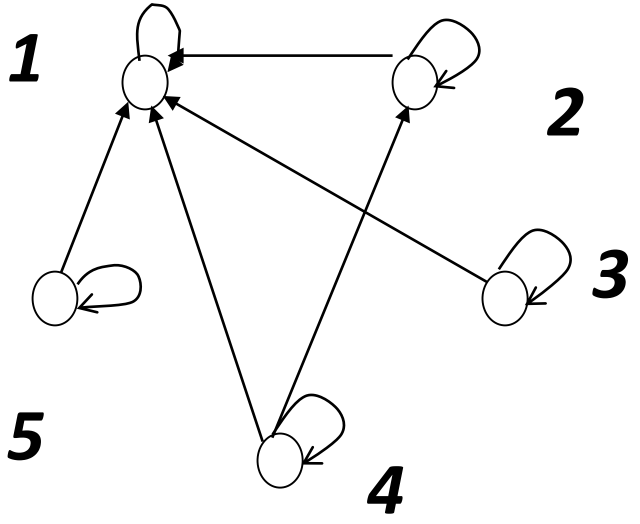
Рис.1.1. Граф бинарного отношения.

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0
5	1	0	0	0	1

Пример

Матрица смежности

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0
5	1	0	0	0	1



Графическое задание

Свойства бинарных отношений:

1) рефлексивность:

$$(\forall a \in M)((a,a) \in R)$$

Например: «быть не больше»; «быть делителем» на множестве N; «быть коллинеарным» на множестве векторов;

Свойства бинарных отношений:

2) антирефлексивность:

$$(\forall a \in M)((a,a) \notin R)$$

Это отношение имеет место, когда оно не обладает свойством 1 для любых а, например: «быть больше», «быть младше», «быть перпендикулярной» на множестве прямых и др.

Свойства бинарных отношений:

3) симметричность:

$$\left(\forall a, b \in M\right)\left(\left(a, b\right) \in R \rightarrow \left(b, a\right) \in R\right)$$

Отношение R на множестве M называется *симметричным*, если для любых *a, b* $\in$ *M*

одновременно справедливо *aRb* и *bRa* (т.е.$R=R^{-1}$). Например:

Симметрична параллельность прямых, так как если a || b, то b || a. Симметрично отношение «быть равным» на любом множестве или «быть взаимно-простым» на N.

Свойства бинарных отношений:

4) антисимметричность:

$$\left(\forall a, b \in M\right)\left(\left(\left(a, b\right) \in R, \left(b, a\right) \in R\right) \leftrightarrow a = b\right)$$

Если для несовпадающих элементов a $\neq$ b верно отношение aRb, то ложно bRa. Антисимметричными являются отношения «быть больше», «не меньше» на множестве R, «быть делителем» на множестве N и др.

Свойства бинарных отношений:

5) транзитивность:

$$\left(\forall a,b,c \in M\right)\left(\left(\left(a,b\right)\in R,\left(b,c\right)\in R\right)\rightarrow\left(a,c\right)\in R\right)$$

Если aRb и bRc, то aRc для любых a, b, c $\in$ M.

Транзитивны отношения «быть больше», «быть параллельным», «быть равным» и др.

Свойства бинарных отношений:

6) антитранзитивность:

$$\left(\forall a,b,c \in M\right)\left(\left(\left(a,b\right) \in R, \left(b,c\right) \in R\right) \to \left(a,c\right) \notin R\right)$$

Имеет место, когда отношение не обладает свойством 5. Например, «быть перпендикулярным» на множестве прямых плоскости (a $\perp$ b, b $\perp$ c, но неверно a$\perp$c).

Свойства бинарных отношений:

7) *асимметричность:*

$$\left(\forall a,b\in M\right)\left(\left(a,b\right)\in R\rightarrow\left(b,a\right)\notin R\right)$$

Ни для одной пары a и b не выполняется одновременно aRb и bRa.

Например: «быть больше»; «быть меньше»; «быть отцом».

Свойства бинарных отношений:

8) *связность:*

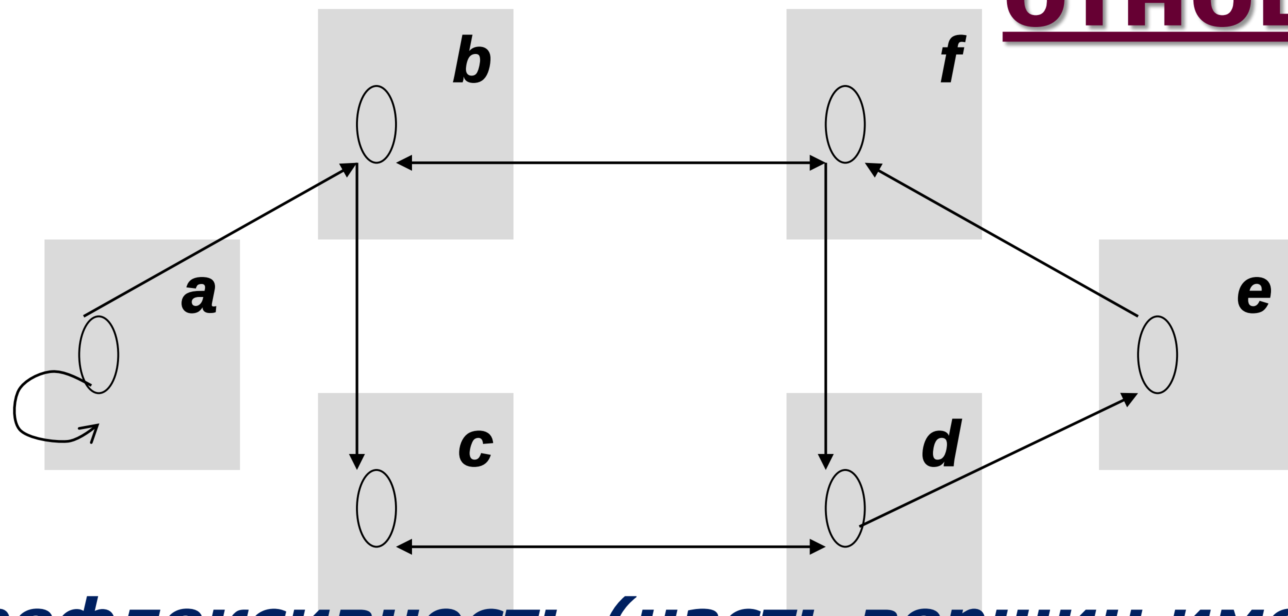
$$\left(\forall a, b \in M\right)\left(\left(a, b\right) \in R \text{ или } \left(b, a\right) \in R\right)$$

Для любых a и b, если a $\neq$ b, то aRb или bRa.

Например: «быть больше», «быть меньше» на множестве N, R; «быть больше или равным», «быть меньше или равным» на множестве обыкновенных дробей.

Каждое конкретное отношение может обладать или не обладать указанным свойством.

Пример свойств бинарных отношений



- ***нерефлексивность (часть вершин имеет петли, часть –нет)***
- ***несимметричность (есть симметричные и антисимметричные дуги)***
- ***интранзитивность (бинарное отношение обладает несколькими путями длины два, но ни на один из них нет транзитивного замыкания)***

Основные виды бинарных отношений.

Бинарное отношение R называется ***отношением эквивалентности***, если оно одновременно обладает тремя свойствами: рефлективностью, симметричностью и транзитивностью, т.е. если для любых x, y, z выполняется:

- xRx (рефлективность);
- если xRy, то yRx (симметричность);
- если xRy, а yRz, то xRz (транзитивность).

Отношение толерантности

рефлексивность | *симметричность*

Отношения «быть другом», «быть знакомым», - отношения толерантности, так как они рефлексивны, симметричны, но не транзитивны.

Отношение «иметь непустое пересечение» для множеств – отношение толерантности.

Отношение доминирования

антирефлексивность

антисимметричность

- **Отношение доминирования.** Отношение, наделенное свойствами антирефлексивности и антисимметричности, называют отношением доминирования.

Отношение «быть начальником» - отношение доминирования, так как оно рефлексивно, симметрично, но не транзитивно.

Отношение эквивалентности

рефлексивность

симметричность

транзитивность

Примеры отношений эквивалентности:

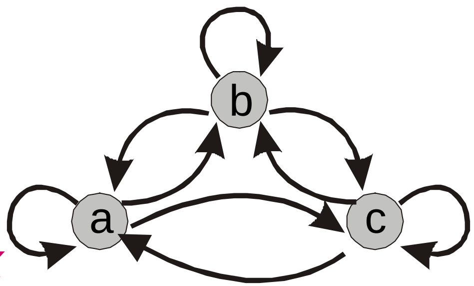
Отношение «быть равным на множестве чисел», быть подобным на множестве геометрических фигур.

Обозначение эквивалентных отношений:

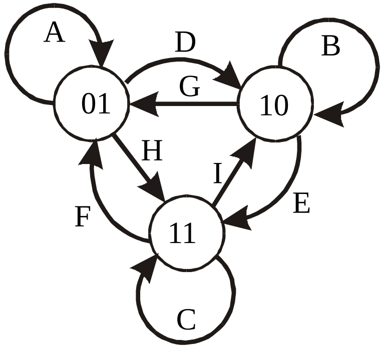
a Q b или a ~ b, что означает «a эквивалентно b в отношении Q»

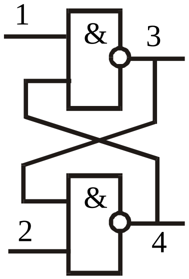
Бинарное отношение эквивалентности

- *Обозначение*: $\mathbf{R}_{\sim}$
- *Граф*



- *Рефлексивность*: $x \sim x$
- *Симметричность*: $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$
- *Транзитивность*: $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$
- **Пример**





Бинарное отношение эквивалентности $R_{\sim}$

=

Рефлексивность

+

Симметричность

+

Транзитивность

Отношения

Пример 1

Выписать упорядоченные пары, принадлежащие следующим бинарным отношениям между множествами $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$:

a) $U = \{(x, y) |\, x + y = 9\}$;

b) $V = \{(x, y) |\, \mathrm{x} < \mathrm{y}\}$.

Решение

a) $U = \{(3, 6), (5, 4), (7, 2)\}$;

b) $V = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$. ■

Отношения

Пример 2

Множество $R = \{(x, y) \mid x\ -$ делитель $y\}$ определяет отношение на множестве
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Найдите все упорядоченные пары, принадлежащие R.

Решение

$R = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ ■

Отношения

Пример 5

Что можно сказать о свойствах рефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности следующих отношений:

a) «x делит y» на множестве натуральных чисел;

b) «x не равно y» на множестве целых чисел;

c) «возраст x совпадает с возрастом y» на множестве всех людей?

Отношение эквивалентности

Определение 1

Отношение R на множестве S называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношения эквивалентности играют важную роль во всех разделах математики!

Примеры отношений эквивалентности:

- отношение ***подобия*** в множестве треугольников в евклидовой плоскости;
- отношение ***равенства*** в произвольной системе множеств;
- отношение ***равночисленности***, т.е. иметь одинаковое число элементов, в системе конечных множеств;
- отношение ***равносильности*** в множестве формул логики высказываний;
- отношение ***«учиться в одной группе»*** в множестве студентов факультета кибернетики;

Примеры отношений эквивалентности

Пример 1

Пусть R – отношение на множестве целых чисел $\boldsymbol{Z}$, определенное следующим образом:

$aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a = b$ или $a = -b$.

R – отношение эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примеры отношений эквивалентности

Пример 2

Пусть R – отношение на множестве вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, определенное следующим образом:

$aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a - b$ является целым числом.

R – отношение эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Примеры отношений эквивалентности

Пример 3

Пусть m – целое число, большее 1. Пусть $a, b \in \boldsymbol{Z}$.

$$a \equiv b(mod\ m) \overset{def}{\Longleftrightarrow} m \mid (a - b)$$

$R = \{(a, b) | a \equiv b(mod\ m)\}$ – отношение эквивалентности на $\boldsymbol{Z}$, так как оно

1) рефлексивно: $m \mid (a - a), \forall a \in \boldsymbol{Z}$,
2) симметрично: $m \mid (a - b) \Rightarrow m \mid (b - a)$,
3) транзитивно: $\left(m \mid (a - b)\right) \wedge \left(m \mid (b - c)\right) \Rightarrow \left(m \mid (a - c)\right)$

Примеры отношений эквивалентности

Пример 4

Пусть R – отношение на множестве строк, составленных из букв английского алфавита, определенное следующим образом:

$aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} l(a) = l(b)$, где $l(x)$ – длина строки x.

R – отношение эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

«Антипримеры» отношений эквивалентности

Пример 6

Пусть $\mid$ – отношение «делит» на множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$.

Отношение $\mid$ не является отношением эквивалентности, так как оно не симметрично:

$2 \mid 4$, но $4 \nmid 2$.

«Антипримеры» отношений эквивалентности

Пример 7

Пусть R – отношение на множестве вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, определенное следующим образом:

$$xRy \overset{def}{\Longleftrightarrow} |x-y|<1$$

R не является отношением эквивалентности, так как оно не транзитивно:

$$2{,}8\ R\ 1{,}9 \iff |2{,}8-1{,}9|<1$$

$$1{,}9\ R\ 1{,}1 \iff |1{,}9-1{,}1|<1$$

$$2{,}8\ \cancel{R}\ 1{,}1 \iff |2{,}8-1{,}1|\geq 1$$

Классы эквивалентности

<u>Определение 3</u>

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве A и пусть a – элемент множества A.

Множество всех элементов из A, эквивалентных элементу a, называется **классом эквивалентности** элемента a.

Класс эквивалентности элемента a относительно R обозначается через $[a]_R$ или через $[a]$, если из контекста ясно, о каком отношении идет речь.

$$[a]_R = \{s | (a, s) \in R\}$$

Если $b \in [a]_R$, то b называется **представителем** этого класса эквивалентности.

Разбиение множества

- **Def:** *разбиение* ***Г*** *множества* ***A*** – *семейство непустых попарно непересекающихся подмножеств, объединение которых совпадает с* ***A***
- ***Свойства*** $\Gamma \subset B(A)$
- $\forall K_i \in \tilde{A}: K_i \neq \varnothing$
- $\forall K_i, K_j \in \Gamma: K_i \cap K_j = \varnothing$
-

$$\bigcup_{K_j \in \Gamma} K_j = A$$

- ***Пример***

Для трехэлементного множества A={a,b,c} разбиениями являются

- $\Gamma_1=\{ \{a, b, c\} \}$
- $\Gamma_2=\{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$
- $\Gamma_3=\{ \{a\}, \{b,c\} \}$
- $\Gamma_4=\{ \{b\}, \{a,c\} \}$
- $\Gamma_5=\{ \{c\}, \{a,b\} \}$

Непересекающиеся подмножества, на которые разбивается множество M отношением эквивалентности, называются классами эквивалентности.

На множестве обыкновенных дробей все классы эквивалентности по отношению равенства состоят из дробей, равных по своей величине.

На множестве треугольников все классы эквивалентности по отношению подобия состоят из треугольников, подобных между собой.

Матрица бинарного отношения эквивалентности

Матрицу бинарного отношения эквивалентности можно представить в блочно-диагональном виде, где каждая подматрица, состоящая из единиц, соответствует классу эквивалентности

	a	b	c	…	…	…	x	y	z
a	1	1	1						
b	1	1	1						
c	1	1	1						
.				1	1				
.				1	1				
.						1	1	1	
x						1	1	1	
y						1	1	1	
z									1

Отношение порядка

антисимметричность

транзитивность

Множество М, которое обладает отношением порядка, называется упорядоченным.

+ рефлексивность $\rightarrow$ Отношение нестрогого порядка $\leq$

+ антирефлексивность $\rightarrow$ Отношение строгого порядка $<$

Отношение называется отношением полного порядка, если сравнимы все элементы множества, на котором задано это отношение.

Пример. Отношения «больше» и «меньше» на множестве действительных чисел.

Отношение называется отношением частичного порядка, если сравнимы не все элементы множества, на котором задано это отношение.

Пример. Отношение «быть подмножеством» на множестве B(U) (булеан).

Отношение частичного порядка

Определение 5

Множество S, на котором задано отношение частичного порядка R, называется **частично упорядоченным множеством** и обозначается (S, R).

Примеры частично упорядоченных множеств

Пример 11

Отношение «больше или равно» ($\geq$) на множестве целых чисел $\boldsymbol{Z}$ является отношением частичного порядка.

Примеры частично упорядоченных множеств

<u>Пример 12</u>

Отношение «делит» ($|$) на множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ является отношением частичного порядка.

Примеры частично упорядоченных множеств

<u>Пример 13</u>

Отношение «содержится в» ($\subseteq$) на множестве всех подмножеств $P(S)$ множества S является отношением частичного порядка.

«Антипример» частично упорядоченного множества

Пример 14

Отношение «x старше y», определенное на множестве всех людей, не является отношением частичного порядка.

Действительно, это отношение не является рефлексивным.

Отношение частичного порядка

Определение 6

Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Два элемента a и b из S называются **сравнимыми**, если $a \prec b$ или $b \prec a$.

Отношение частичного порядка

<u>Определение 7</u>

Если $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество, любые два элемента которого сравнимы, то S называется **линейно упорядоченным множеством** или **цепью**, а отношение $\prec$ называется **линейным порядком**.

Пример линейно упорядоченного множества

Пример 15

Частично упорядоченное множество $(\boldsymbol{Z}, \leq)$ является цепью.

«Антипример» линейно упорядоченного множества

<u>Пример 16</u>

Частично упорядоченное множество $(\boldsymbol{N}, |)$ не является цепью, так как 5 и 7 несравнимы.

Определим несколько понятий относительно отношения $\rho \subseteq M \times M$:

Обратное отношение $\rho^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in \rho\}$;

Дополнительное отношение $\overline{\rho} = \{(x, y) | (x, y) \notin \rho\}$;

Тождественное отношение $U = \{(x, x) | \ x \in M\}$;

Универсальное отношение $I = \{(x, y) | x \in M \ и \ \ y \in M\}$.

Пример 1.

- *Введем отношение сравнимости R: x сравнимо с y по модулю m тогда и только тогда, когда x и y имеют одинаковые остатки от деления на m. То есть x = y* (mod *m).*
- Рассмотрим введенное отношение R для случая *m* = 3 на множестве M = {1; 2; 3; 4; 5; б}; тогда M x M

Пример 1.

- *Введем отношение сравнимости R: x сравнимо с y по модулю m тогда и только тогда, когда x и y имеют одинаковые остатки от деления на m. То есть x = y* (mod *m).*
- Рассмотрим введенное отношение R для случая *m* = 3 на множестве M = {1; 2; 3; 4; 5; б}; тогда M x M

(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1:4)	(1;5)	(1;6)
(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2; 4)	(2;5)	(2; 6);
(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6);
(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4; 4)	(4;5)	(4; 6);
(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5; 4)	(5;5)	(5; 6);
(б;1)	(6;2)	(6;3)	(6; 4)	(6;5)	(6; 6)

Получим:

Свойства бинарных отношений

Множества	Отношение	Рефлективность	Симметричность	Асимметричность	Антисимметричность	Транзитивность	Антитранзитивность
Любые	$A \subset B$	+	–	–	+	+	–
Любые непустые	$A \cap B \neq \varnothing$	+	+	–	–	–	–
Любые	$B = A'$	–	+	–	–	–	–
Любые	$a = b$	+	+	–	–	+	–
Любое	$a \neq b$	–	+	–	–	–	+
$\mathbb{N}$	$a \vdots b,\ a = bq$	+	–	–	+	+	–
$\mathbb{R}$	$a > b$	–	–	+	–	+	+
$\mathbb{R}$	$a \geq b$	+	–	–	+	+	+
$\mathbb{R}$	$a < b$	–	–	+	–	+	+
$\mathbb{R}$	$a \leq b$	+	–	–	+	+	+
Прямые плоскости	$a \| b$	+	+	–	–	+	–
Прямые плоскости	$a \perp b$	–	+	–	–	–	–
Векторы $\forall a,\ \forall b$	Коллинеарность $a = \lambda b$	+	+	–	–	+	–
Окружности	Касание	+	+	–	–	–	–
Окружности	Концентричность	+	+	–	–	+	–
$\mathbb{N}$	Взаимная простота	–	+	–	–	–	–
$\mathbb{N}$	$a = b \pmod{m}$ (сравнение по модулю m)	+	+	–	–	+	–