Решение дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта и методом стрельбы

Метод Рунге-Кутта

Пусть надо решить дифференциальное уравнение

$$y'' - xy' + 2xy = 0.8$$

с краевыми (граничными) условиями

$$y(1,5) = -0,2$$

$$y'(1,5) = 2$$

1) Диапазон изменения аргумента [1,5; 2,5]

2) Шаг изменения аргумента $h = 0,1$

3) Решение – значения y при $x = 1,5;\ 1,6;\ \ldots\ 2,5$

$$y'' - xy' + 2xy = 0.8$$

Заменяем уравнение второго порядка на систему уравнений первого порядка, введя функцию $z(x) = y'(x)$ и выразив производные:

$z' = U(x,y,z) = xz - 2xy + 0,8$

$y' = V(x,y,z) = z$

при краевых условиях

$y(1,5) = -0,2$

$z(1,5) = 2$

Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов

Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа

Метод Рунге-Кутта

$z' = U(x,y,z) = xz – 2xy + 0,8$

$y' = V(x,y,z) = z$

В методе Рунге-Кутта значение функции в узле ищут по значению функции в предыдущем узле:

$z_{i+1} = z_i + h/6(q_0 + 2q_1 + 2q_2 + q_3)$

$y_{i+1} = y_i + h/6(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$,

где

$q_0 = U(x_i, y_i, z_i)$; $k_0 = V(z_i)$

$q_1 = U(x_i + h/2, y_i + k_0h/2, z_i + q_0h/2)$; $k_1 = V(z_i + q_0h/2)$

$q_2 = U(x_i + h/2, y_i + k_1h/2, z_i + q_1h/2)$; $k_2 = V(z_i + q_1h/2)$

$q_3 = U(x_i + h, y_i + k_2h, z_i + q_2h)$; $k_3 = V(z_i + q_2h)$

Пример реализации метода

Решить задачу Коши методом Рунге-Кутта четвертого порядка, разделив интервал на 10 частей.

h=	0.1	x0=	1.5	y0=	-0.2	z0=	2
i	x	y	z	k	q	Dy	Dz
0	1.5	-0.2	2	2	4.4	2	4.4
	1.55	-0.1	2.22	2.22	4.551	4.44	9.102
	1.55	-0.0890	2.2276	2.2276	4.5286	4.4551	9.0572
	1.6	0.0228	2.4529	2.4529	4.6518	2.4529	4.6518
						0.2225	0.4535
1	1.6	0.0225	2.4535	2.4535	4.6537	2.4535	4.6537
	1.65	0.1451	2.6862	2.6862	4.7533	5.3724	9.5065
	1.65	0.1568	2.6912	2.6912	4.7231	5.3824	9.4462
	1.7	0.2916	2.9258	2.9258	4.7825	2.9258	4.7825
						0.2689	0.4731
2	1.7	0.2914	2.9267	2.9267	4.7847	2.9267	4.7847
	1.75						
	1.75						
	1.8						

Последовательность вычислений

1 строка:

$x=x_0$; $y=y_0$; $z=z_0$; $k_0=V(z_0)=z_0$; $q_0=U(x_0, y_0, z_0)$; $Dy=k_0$; $Dz=q_0$

2 строка:

$x=x_0+h/2$; $y=y_0+ k_0h/2$; $z=z_0+q_0h/2$; $k_1=z_0+q_0h/2$;

$q_1=U(x_0+h/2, y_0+ k_0h/2, z_0+q_0h/2)$; $Dy=2k_1$; $Dz=2q_1$

3 строка:

$x=x_0+h/2$; $y=y_0+ k_1h/2$; $z=z_0+q_1h/2$; $k_2=z_0+q_1h/2$;

$q_2=U(x_0+h/2, y_0+ k_1h/2, z_0+q_1h/2)$; $Dy=2k_2$; $Dz=2q_2$

4 строка:

$x=x_0+h$; $y=y_0+ k_2h$; $z=z_0+q_2h$; $k_3=z_0+q_2h$;

$q_3=U(x_0+h, y_0+ k_2h, z_0+q_2h)$; $Dy=k_3$; $Dz=q_3$

6 строка:

$x=x_0+h$; $y=y_0+ h/6\Sigma Dy$; $z=z_0+h/6\Sigma Dz$

Метод стрельбы

Пусть надо решить дифференциальное уравнение

$$y'' - xy' + 2xy = 0.8$$

с краевыми (граничными) условиями

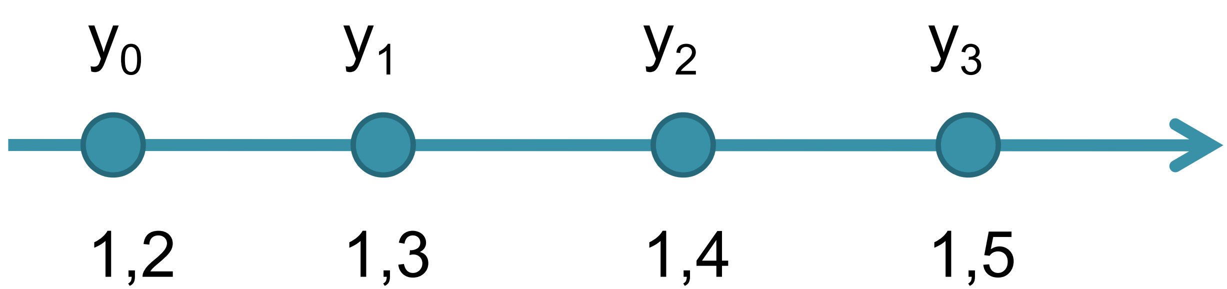
$$y(1{,}2) - 0{,}5y'(1{,}2) = 1$$

$$y'(1{,}5) = 2$$

1) Диапазон изменения аргумента [1,2; 1,5]

2) Шаг изменения аргумента $h = 0{,}1$

3) Решение – значения y при $x = 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4,\ 1{,}5$



$y'' - xy' + 2xy = 0.8$

Заменяем уравнение второго порядка на систему уравнений первого порядка, введя функцию $z(x) = y'(x)$ и выразив производные:

$z' = U(x,y,z) = xz - 2xy + 0,8$

$y' = V(x,y,z) = z$

при краевых условиях

$y(1,2) - 0,5z(1,2) = 1$

$z(1,5) = 2$

Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах

Метод стрельбы

Принимаем произвольно $z(1,2) = A0$, тогда имеем систему с краевыми условиями

$z(1,2) = A0$

$y(1,2) = 1 + 0,5z(1,2) = 1 + 0,5A0$

Решаем эту систему, например, методом Рунге-Кутта.

Находим $z(1,5) = B0$, которое может быть не равно $z(1,5)=2$ (пусть меньше 2, $B0 – 2 < 0$).

Тогда принимаем другое $z(1,2) = A1$, решаем систему и находим $z(1,5) = B1$. Нужно найти такое $A1$, чтобы получить $B1 – 2 > 0$ (сделать вилку)

Или наоборот, при $z(1,2) = A0$ получим $B0 – 2 > 0$, а при $z(1,2) = A1$ имеем $B1 – 2 < 0$

Пример реализации метода

Решаем задачу методом Рунге-Кутта четвертого порядка							
h=	0.1	x0=	1.5	y0=	-0.2	z0=	2
i	x	y	z	k	q	Dy	Dz
0	1.5	-0.2	2	2	4.4	2	4.4
	1.55	-0.1	2.22	2.22	4.551	4.44	9.102
	1.55	-0.0890	2.2276	2.2276	4.5286	4.4551	9.0572
	1.6	0.0228	2.4529	2.4529	4.6518	2.4529	4.6518
						0.2225	0.4535
1	1.6	0.0225	2.4535	2.4535	4.6537	2.4535	4.6537
	1.65	0.1451	2.6862	2.6862	4.7533	5.3724	9.5065
	1.65	0.1568	2.6912	2.6912	4.7231	5.3824	9.4462
	1.7	0.2916	2.9258	2.9258	4.7825	2.9258	4.7825
						0.2689	0.4731
2	1.7	0.2914	2.9267	2.9267	4.7847	2.9267	4.7847
	1.75						
	1.75						
	1.8						

Метод дихотомии

Интервал между A0 и A1 надо поделить пополам:

$$A2 = (A0 + A1)/2$$

и снова решаем систему и находим B2.

В зависимости от знака

$$B2 - z(1,5)$$

делим пополам отрезок [A0, A2] или [A2, A1] и снова решаем систему. Продолжаем до тех пор, пока разница не станет меньше

$$|B2 - z(1,5)| < 0.001$$

Для последнего А (для которого В наиболее точно соответствует z(1,5)) выписываем y0, y1, y2, и y3

Метод секущих

- Уточняем значение А с помощью формулы:

$$A_{k+1} = A_k - \frac{\left(B_k - z(1.5)\right)\left[A_k - A_{k-1}\right]}{\left(B_k - z(1.5)\right) - \left(B_{k-1} - z(1.5)\right)}$$

и снова решаем систему и находим В2.

Продолжаем уточнять А до тех пор, пока разница не станет меньше

$$|Bk - z(1,5)| < 0.001$$

Для последнего А (для которого В наиболее точно соответствует z(1,5)) находим y0, y1, y2, и y3

Линейная краевая задача

- Пусть надо решить дифференциальное уравнение

$$y'' - xy' + 2xy = 0.8$$

с краевыми (граничными) условиями

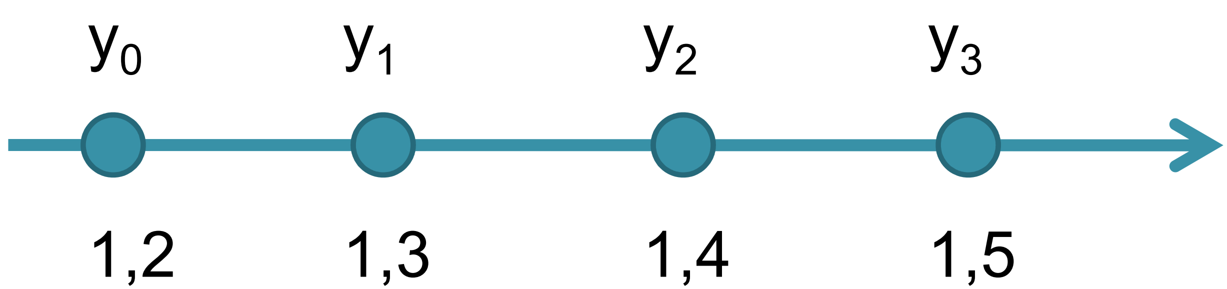
$$y(1,2) - 0,5y'(1,2) = 1$$

$$y'(1,5) = 2$$

1) Диапазон изменения аргумента [1,2; 1,5]

2) Шаг изменения аргумента $h = 0,1$

3) Решение – значения y при x = 1,2; 1,3; 1,4, 1,5



$y'' - xy' + 2xy = 0.8$

Заменяем уравнение второго порядка на систему уравнений первого порядка, введя функцию $z(x) = y'(x)$ и выразив производные:

$z' = U(x,y,z) = xz - 2xy + 0,8$

$y' = V(x,y,z) = z$

при краевых условиях

$$y(1,2) - 0,5z(1,2) = 1$$

$$z(1,5) = 2$$

Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах

Линейная краевая задача

Принимаем произвольно y(1,2) = A0, тогда имеем систему с краевыми условиями

z(1,2) = (y(1,2) – 1)/0,5 = (A0 – 1)/0,5

y(1,2) = A0

Решаем эту систему, например, методом Рунге-Кутта.

Находим z(1,5) = B0.

Принимаем другое произвольное y(1,2) = A1, решаем систему и находим z(1,5) = B1.

Уточняем A

$$A_2 = A_1 - \frac{\left(B_1 - z(1.5)\right)\left[A_1 - A_0\right]}{\left(B_1 - z(1.5)\right) - \left(B_0 - z(1.5)\right)}$$

Продолжаем уточнять A до тех пор, пока разница не станет меньше |Bk – z(1,5)| < 0.001

Для последнего A находим y0, y1, y2, и y3