

> #Вариант 5

> #Задание 1

#Создайте пользовательскую процедуру-функцию, осуществляющую построение  
#тригонометрического ряда Фурье для произвольной функции, удовлетворяющей теореме  
Дирихле

# Постройте в одной системе координат на промежутке  $[-3\pi, 3\pi]$  графики

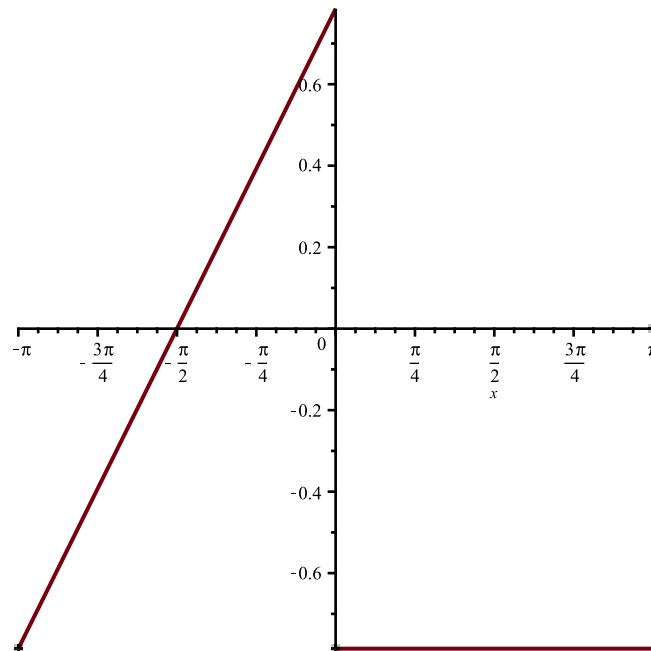
#частичных сумм  $S_1(x)$ ,  $S_3(x)$ ,  $S_7(x)$  ряда и его суммы  $S(x)$ .

#Сравните полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде.

#Анимлируйте процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра  
порядковый номер частичной суммы.

>  $f := x \rightarrow \text{piecewise}\left(-\text{Pi} \leq x < 0, \frac{\text{Pi}}{4} + \frac{x}{2}, 0 \leq x < \text{Pi}, -\frac{\text{Pi}}{4}\right);$   
 $\text{plot}(f(x), x = -\text{Pi}..\text{Pi}, \text{discont} = \text{true})$

$$f := x \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} & -\pi \leq x < 0 \\ -\frac{\pi}{4} & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



>  $a0 := \text{simplify}\left(\frac{1}{\text{Pi}} \cdot \text{int}(f(x), x = -\text{Pi}..\text{Pi})\right) \text{ assuming } n :: \text{posint};$

$a_n := \text{simplify}\left(\frac{1}{\text{Pi}} \cdot \text{int}(f(x) \cdot \cos(n \cdot x), x = -\text{Pi}..\text{Pi})\right) \text{ assuming } n :: \text{posint};$

$b_n := \text{simplify}\left(\frac{1}{\text{Pi}} \cdot \text{int}(f(x) \cdot \sin(n \cdot x), x = -\text{Pi}..\text{Pi})\right) \text{ assuming } n :: \text{posint};$

$$a0 := -\frac{\pi}{4}$$

$$an := \frac{-(-1)^n + 1}{2 \pi n^2}$$

$$bn := -\frac{1}{2 n}$$

(1)

```

> furSum := proc(f, k)
  local a0, an, bn, n :
  a0 := simplify(int(f(x), x = -pi..pi) / pi) :
  assume(n::posint) :
  an := simplify(int(f(x) * cos(n * x), x = -pi..pi) / pi) :
  bn := simplify(int(f(x) * sin(n * x), x = -pi..pi) / pi) :
  return 1/2 * a0 + sum(an * cos(n * x) + bn * sin(n * x), n = 1..k) :
end proc:

```

```

> s1 := furSum(f, 1);
s3 := furSum(f, 3);
s7 := furSum(f, 7);
s := furSum(f, infinity);
sinf := furSum(f, 10000) :

```

$$s1 := -\frac{\pi}{8} + \frac{\cos(x)}{\pi} - \frac{\sin(x)}{2}$$

$$s3 := -\frac{\pi}{8} + \frac{\cos(x)}{\pi} - \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{9\pi} - \frac{\sin(3x)}{6}$$

$$s7 := -\frac{\pi}{8} + \frac{\cos(x)}{\pi} - \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{9\pi} - \frac{\sin(3x)}{6} - \frac{\sin(4x)}{8} \\ + \frac{\cos(5x)}{25\pi} - \frac{\sin(5x)}{10} - \frac{\sin(6x)}{12} + \frac{\cos(7x)}{49\pi} - \frac{\sin(7x)}{14}$$

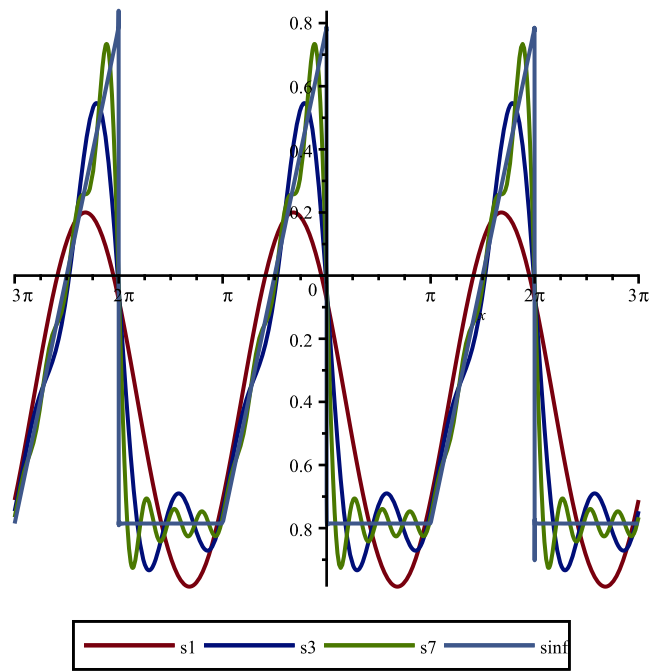
$$s := -\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-(-1)^n + 1) \cos(nx)}{2 n^2 \pi} - \frac{\sin(nx)}{2 n} \right)$$

(2)

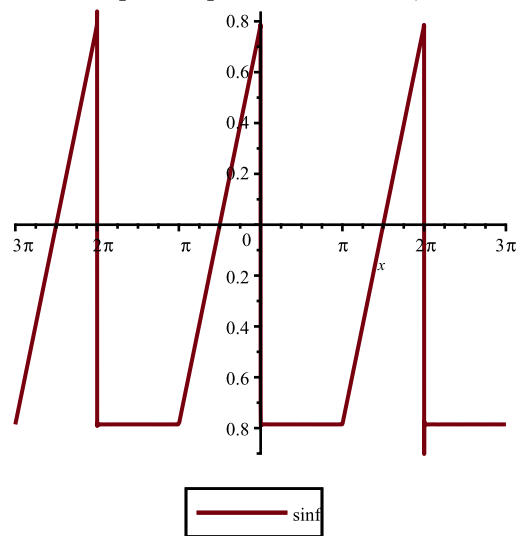
```

> pl := plot([s1, s3, s7, sinf], x = -3pi..3pi, legend = ["s1", "s3", "s7", "sinf"], discount = true)

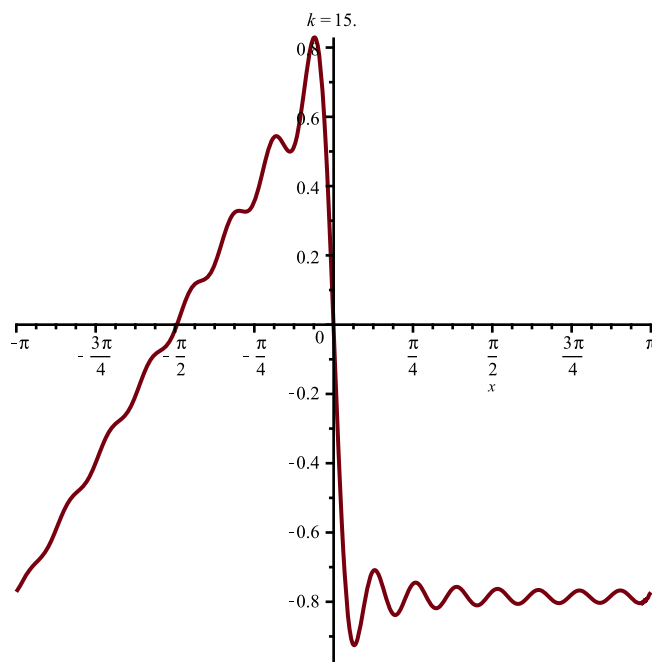
```



> `plot(sinf, x = -3 * pi..3 * pi, legend = ["sinf"], discount = true)`



> `plots[animate](plot, [furSum(f, k), x = -Pi..Pi], k = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15])`



> #Анимация

> #Задание 2

#Разложите в ряд Фурье 5-периодическую функцию  $y = f(x)$ ,

#заданную на промежутке  $(0, 3)$  формулой  $y = -\frac{1}{2}x - 2$ , а на промежутке  $[3,$

$5]$  формулой  $y = 3$

#Модифицируйте созданную ранее процедуру.

# Постройте в одной системе координат на промежутке  $[-10, 10]$  графики

#частичных сумм  $S_1(x)$ ,  $S_3(x)$ ,  $S_7(x)$  ряда и его суммы  $S(x)$ .

#Сравните полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде.

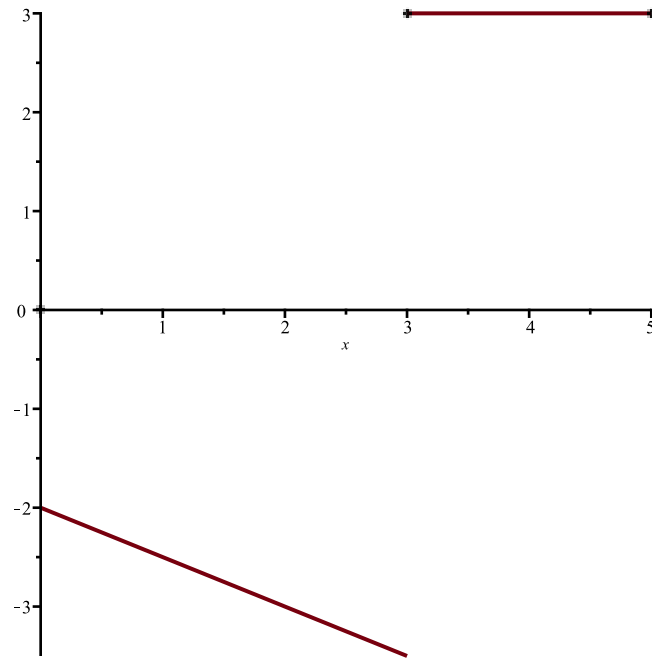
#Анимлируйте процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

>  $f := x \rightarrow \text{piecewise}\left(0 < x < 3, -\frac{1}{2} \cdot x - 2, 3 \leq x \leq 5, 3\right);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} -\frac{x}{2} - 2 & 0 < x < 3 \\ 3 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

(3)

>  $\text{plot}(f(x), x = 0..5, \text{discont} = \text{true})$



>  $l := \frac{5}{2};$

$a0 := \text{simplify}\left(\frac{1}{l} \cdot \text{int}(f(x), x=0 \dots 2 \cdot l)\right);$

$an := \text{simplify}\left(\frac{1}{l} \cdot \text{int}\left(f(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x=0 \dots 5\right)\right) \text{ assuming } n :: \text{posint};$

$bn := \text{simplify}\left(\frac{1}{l} \cdot \text{int}\left(f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x=0 \dots 5\right)\right) \text{ assuming } n :: \text{posint};$

$$l := \frac{5}{2}$$

$$a0 := -\frac{9}{10}$$

$$an := \frac{-26 \pi n \sin\left(\frac{6 \pi n}{5}\right) - 5 \cos\left(\frac{6 \pi n}{5}\right) + 5}{4 \pi^2 n^2}$$

$$bn := \frac{26 \pi n \cos\left(\frac{6 \pi n}{5}\right) - 20 \pi n - 5 \sin\left(\frac{6 \pi n}{5}\right)}{4 \pi^2 n^2}$$

(4)

>  $\text{furSum} := \text{proc}(f, k, x1, x2)$

**local**  $a0, an, bn, n, l;$

$\text{assume}(n :: \text{posint}) :$

$l := 1/2 * (x2 - x1);$

$a0 := \text{int}(f(x), x=x1 \dots x2) / l;$

```

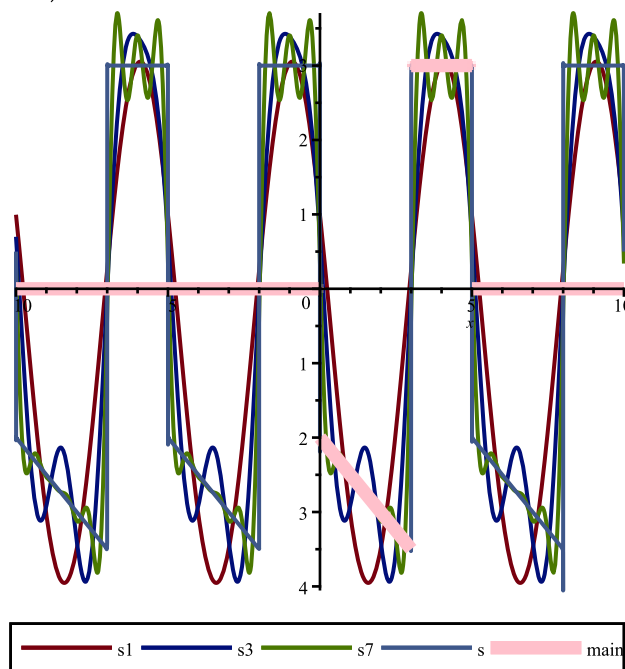
    an := int(f(x) * cos(π * n * x / l), x = x1 .. x2) / l;
    bn := int(f(x) * sin(π * n * x / l), x = x1 .. x2) / l;
    return 1 / 2 * a0 + sum(an * cos(π * n * x / l) + bn * sin(π * n * x / l), n = 1 .. k)
end proc :

```

```

> s1 := furSum(f, 1, 0, 5) :
s3 := furSum(f, 3, 0, 5) :
s7 := furSum(f, 7, 0, 5) :
s := furSum(f, infinity, 0, 5) :
sinf := furSum(f, 10000, 0, 5) :
> pl := plot([s1, s3, s7, sinf], x = -10..10, legend = ["s1", "s3", "s7", "s"], discount = true) :
main := plot(f(x), x = -10..10, legend = ["main"], discount = true, color = pink, thickness
= 5) :
plots[display](pl, main)

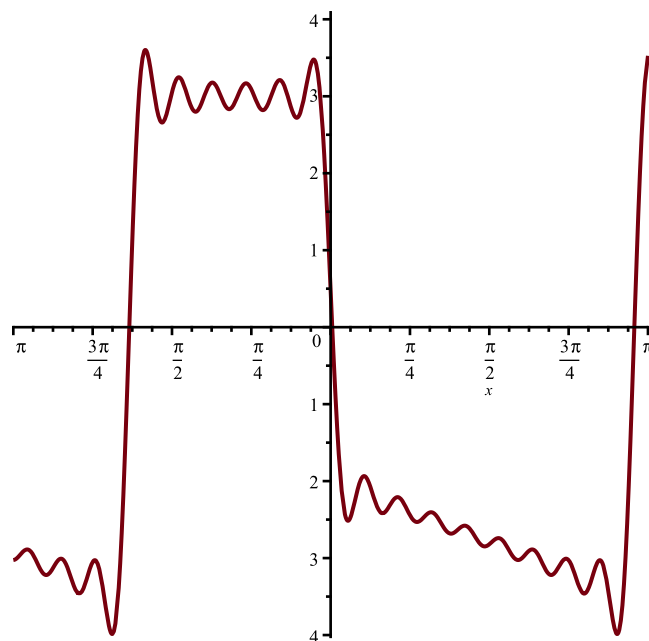
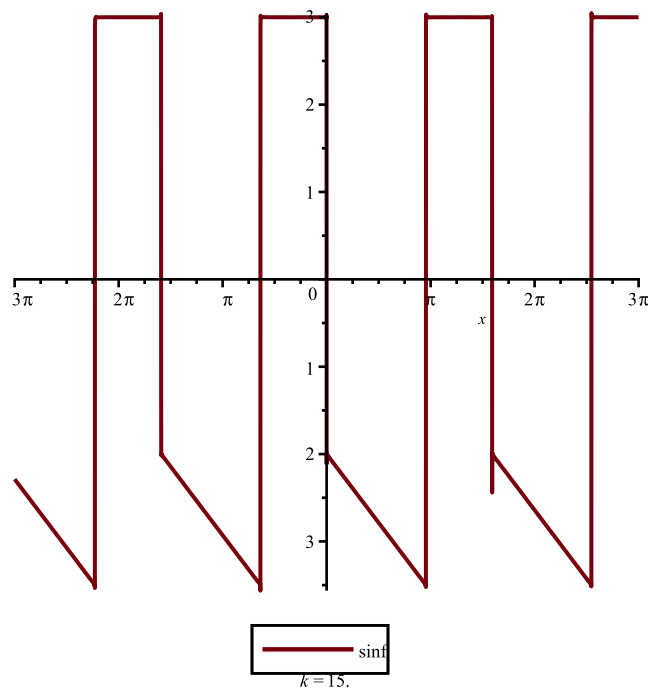
```



```

> plot(sin f, x = 3 π .. 3 π, legend = ["sin f"], discount = true);
plots[animate](plot, [furSum(f, k, 0, 5), x = Pi .. Pi], k = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,
14, 15])

```



### > #Задание 3

# Для графически заданной на промежутке функции как комбинации квадратичной и линейной постройте три разложения в тригонометрический ряд Фурье, считая что функция определена:

# — на полном периоде;

# — на полупериоде (является четной);

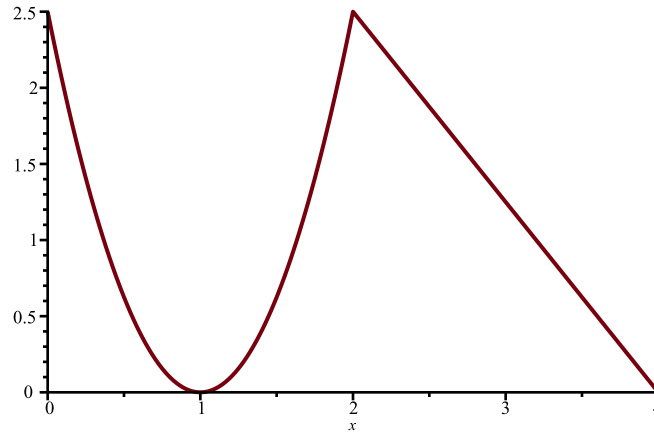
# — на полупериоде (является нечетной).

# Постройте графики сумм полученных рядов на промежутке, превышающем длину заданного в 3 раза. Сравните с графиками порождающих их функций.

>  $f := x \rightarrow \text{piecewise}\left(0 \leq x \leq 2, \frac{5}{2} \cdot (x - 1)^2, 2 < x < 4, \frac{5}{4} \cdot (4 - x)\right);$   
 $l := 2 :$

$$f := x \mapsto \begin{cases} \frac{5 \cdot (x-1)^2}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - \frac{5 \cdot x}{4} & 2 < x < 4 \end{cases} \quad (5)$$

> `plot(f(x), x=0..4, scaling=constrained)`



> `a0 := simplify(1/l * int(f(x), x=0..2*l));`  
`an := simplify(1/l * int(f(x) * cos(pi*n*x/l), x=0..2*l)) assuming n :: posint;`  
`bn := simplify(1/l * int(f(x) * sin(pi*n*x/l), x=0..2*l)) assuming n :: posint;`  
`S := k → a0/2 + sum(an*cos(pi*n*x/l) + bn*sin(pi*n*x/l), n=1..k);`

$$a0 := \frac{25}{12}$$

$$an := \frac{5 (3 + 5 (-1)^n)}{2 \pi^2 n^2}$$

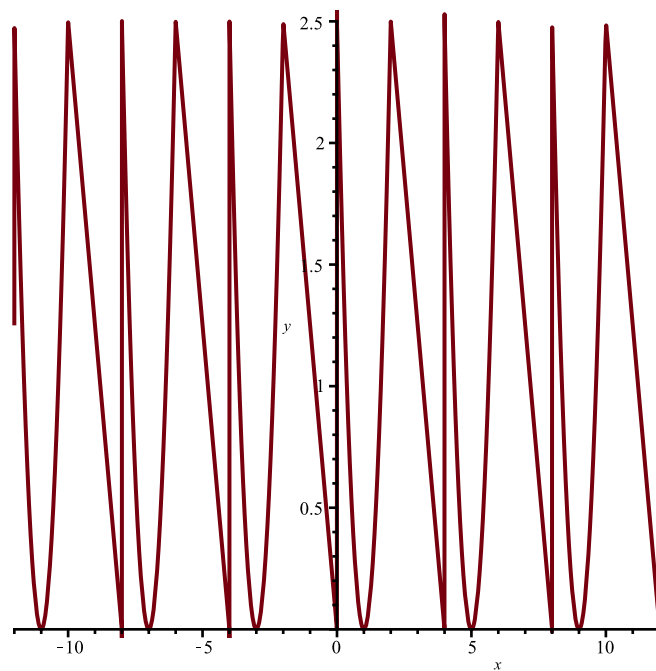
$$bn := \frac{5 (\pi^2 n^2 + 8 (-1)^n - 8)}{2 \pi^3 n^3}$$

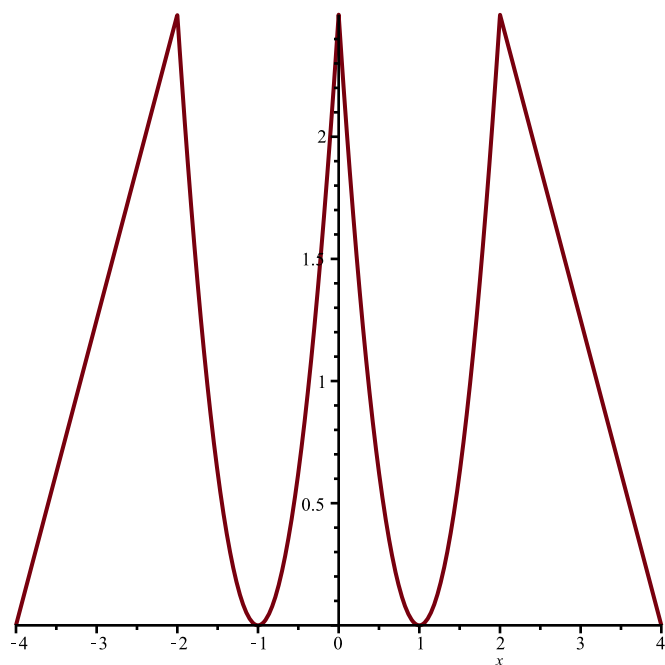
$$S := k \mapsto \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^k \left( an \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) + bn \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) \right)$$

> `plot(S(10000), x=-12..12, y=0..2.5, discontinuity=true)`

(6)







>  $l := 4 :$

$a0 := \text{simplify}\left(\frac{1}{l} \cdot \text{int}(\text{feven}(x), x = -l..l)\right);$

$an := \text{simplify}\left(\frac{1}{l} \cdot \text{int}\left(\text{feven}(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = -l..l\right)\right) \text{ assuming } n :: \text{posint};$

$bn := \text{simplify}\left(\frac{1}{l} \cdot \text{int}\left(\text{feven}(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = -l..l\right)\right) \text{ assuming } n :: \text{posint};$

$S := k \mapsto \frac{a0}{2} + \text{sum}\left(an \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) + bn \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right), n = 1..k\right);$

$$a0 := \frac{25}{12}$$

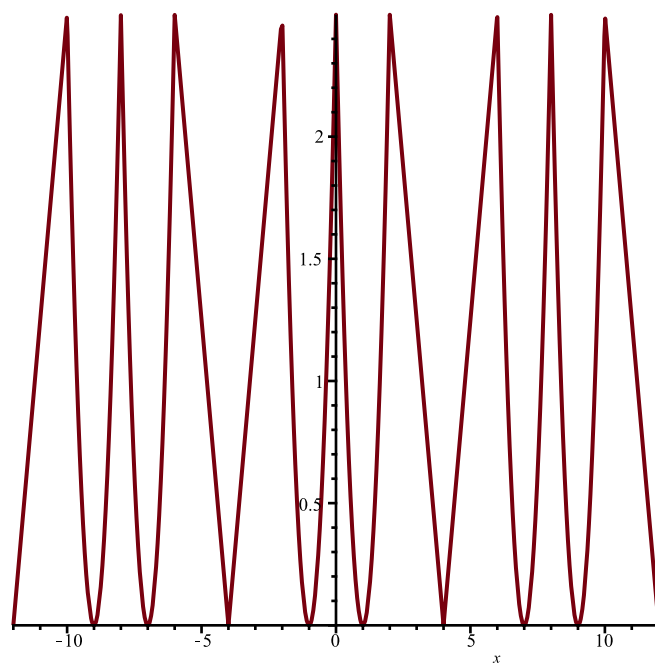
$$an := \frac{50 \pi n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 10 \pi (-1)^n n + 40 \pi n - 160 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^3 n^3}$$

$$bn := 0$$

$$S := k \mapsto \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^k \left( an \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) + bn \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) \right)$$

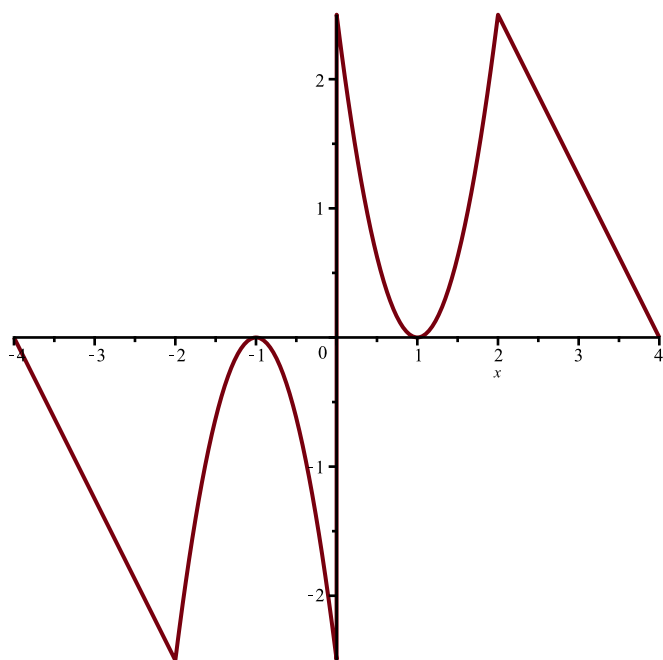
(7)

>  $\text{plot}(S(10000), x = -12..12, \text{discont} = \text{true});$



>  $fodd := x \rightarrow \text{piecewise}\left(-4 < x < -2, -\frac{5}{4} \cdot (4 + x), -2 \leq x \leq 0, -\frac{5}{2} \cdot (-x - 1)^2, 0 \leq x \leq 2, \right.$   
 $\left. \frac{5}{2} \cdot (x - 1)^2, 2 < x < 4, \frac{5}{4} \cdot (4 - x) \right);$   
 $\text{plot}(fodd(x), x = -4 .. 4);$

$$fodd := x \mapsto \begin{cases} -5 - \frac{5 \cdot x}{4} & -4 < x < -2 \\ -\frac{5 \cdot (-x - 1)^2}{2} & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{5 \cdot (x - 1)^2}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - \frac{5 \cdot x}{4} & 2 < x < 4 \end{cases}$$



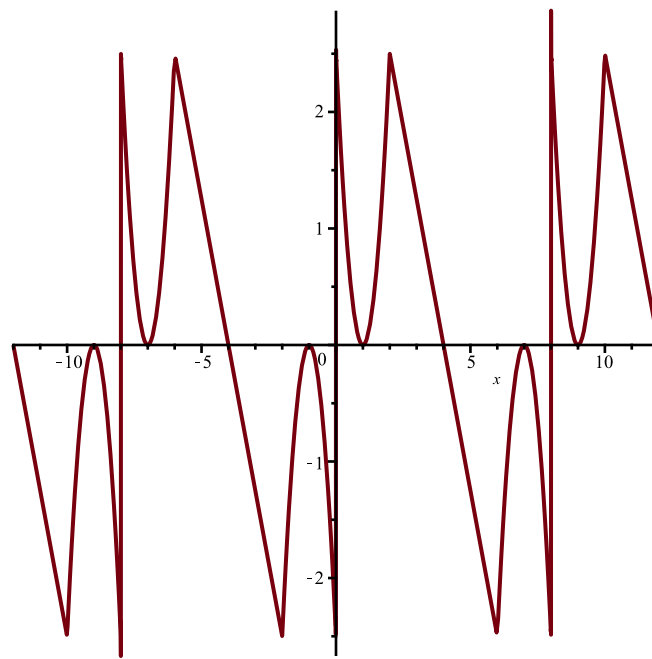
```
> bn := simplify( ( 1/l * int( fodd(x) * sin( (pi*n*x)/l ), x=-l..l ) ) assuming n :: posint;
S := k -> sum( bn * sin( (Pi*n*x)/l ), n = 1..k );
```

$$bn := \frac{5 \pi^2 n^2 + 50 \pi n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 160 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 160}{\pi^3 n^3}$$

$$S := k \mapsto \sum_{n=1}^k bn \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right)$$

(8)

```
> plot(S(10000), x = -12..12, discontinuous = true);
```



> #Задание 4

> #Разложите функцию в ряд Фурье по многочленам Лежандра и Чебышёва на промежутке  $[-1, 1]$ .

#Создайте пользовательские процедуры, осуществляющие построение частичной суммы ряда

#для абсолютно интегрируемой функции по этим ортогональным полиномам.

#Постройте в одной системе координат на промежутке  $[-1, 1]$  графики

#заданной функции и построенных частичных сумм ряда Фурье.

#Экспериментально найдите наименьший порядок частичной суммы,

#равномерно аппроксимирующей на всем промежутке заданную функцию с точностью 0, 1.

#Разложите функцию в тригонометрический и степенной ряды на промежутке  $[-1, 1]$ .

#Найдите наименьший порядок частичных сумм,

#равномерно аппроксимирующих на всем промежутке заданную функцию с точностью 0, 1.

#Изобразите в одной системе координат на промежутке  $[-1, 1]$

#графики заданной функции и всех построенных аппроксимирующих многочленов.

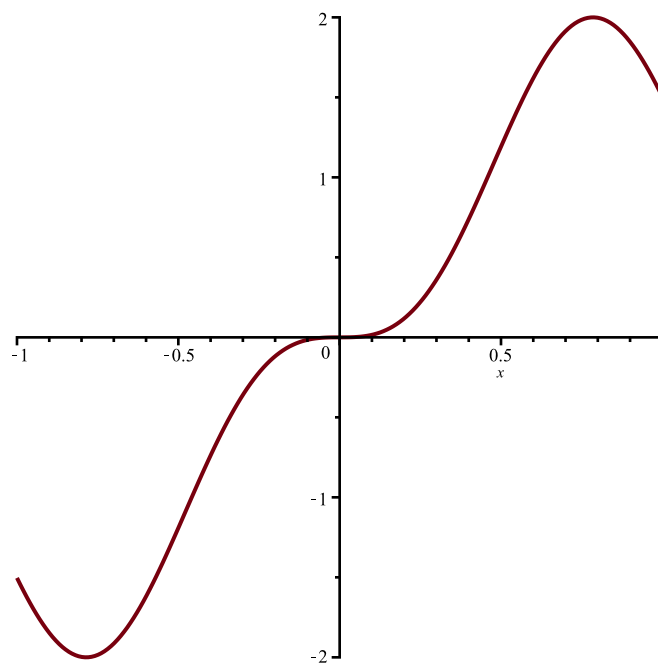
> #1

$f := 2 \cdot \sin^3(2 \cdot x)$

$f := 2 \sin(2 x)^3$

(9)

> main\_plot := plot(f, x = -1 .. 1)



> *with(orthopoly) :*

> *#Разложение по многочленам Лежандра*

**for** *n* **from** 0 **to** 7 **do**  $c[n] := \frac{\int_{-1}^1 f \cdot P(n, x) \, dx}{\int_{-1}^1 P(n, x)^2 \, dx}$ ; **end do**;

$$c_0 := 0$$

$$c_1 := -\sin(2)^2 \cos(2) - 2 \cos(2) + \frac{\sin(2)^3}{6} + \sin(2)$$

$$c_2 := 0$$

$$c_3 := -\frac{49 \sin(2)^2 \cos(2)}{36} + \frac{133 \cos(2)}{9} + \frac{77 \sin(2)}{18} + \frac{469 \sin(2)^3}{216}$$

$$c_4 := 0$$

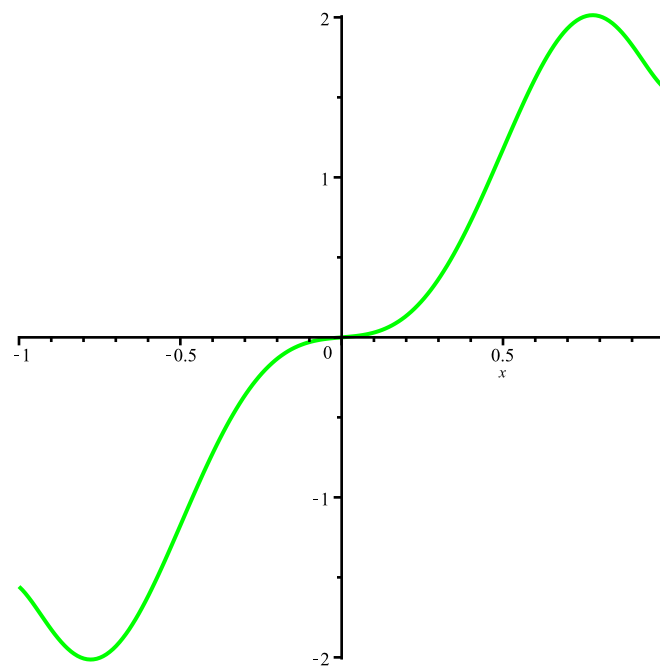
$$c_5 := -\frac{6215 \sin(2)}{48} - \frac{6721 \cos(2)}{24} + \frac{715 \sin(2)^3}{288} + \frac{209 \sin(2)^2 \cos(2)}{48}$$

$$c_6 := 0$$

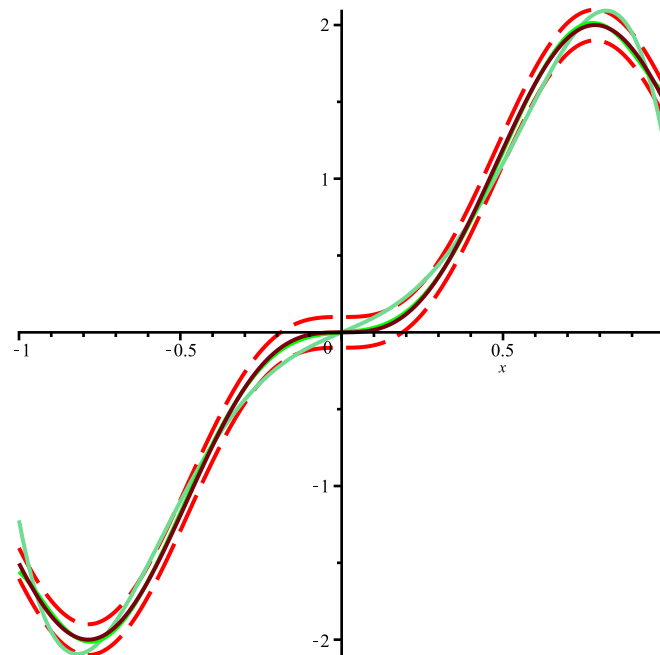
$$c_7 := \frac{681785 \cos(2)}{54} + \frac{2499805 \sin(2)}{432} - \frac{123305 \sin(2)^3}{10368} - \frac{8395 \sin(2)^2 \cos(2)}{1728}$$

(10)

> *legendre\_6 := plot(add(c[n]·P(n, x), n = 0 ..6), x = -1 ..1, color = aquamarine) :*  
*legendre\_7 := plot(add(c[n]·P(n, x), n = 0 ..7), x = -1 ..1, color = green);*



```
> bord1 := plot(f + 0.1, x=-1 ..1, linestyle=dash, color=red) :
  bord2 := plot(f - 0.1, x=-1 ..1, linestyle=dash, color=red) :
  plots[display]([bord1, bord2, legendre_6, legendre_7, main_plot])
```



```
> #Разложение по многочленам Чебышева
```

```
for n from 0 to 7 do c[n] :=  $\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f \cdot T(n, x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ ; end do
```

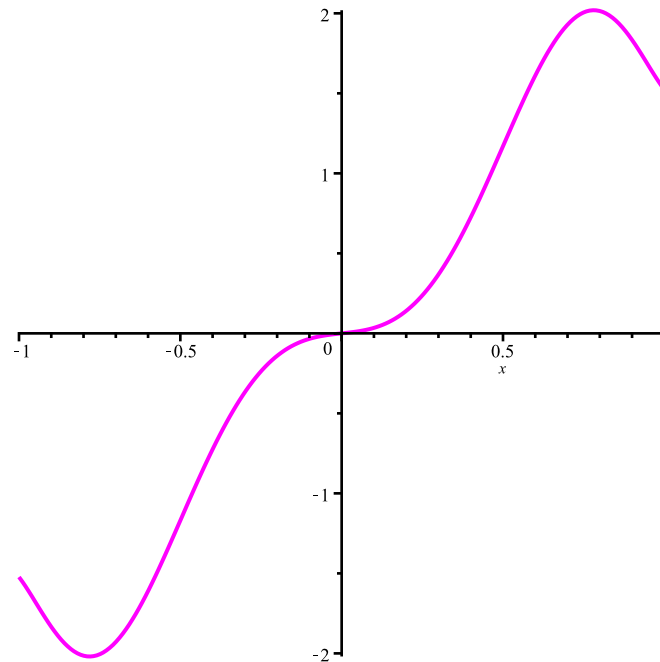
$c_0 := 0$

$$\begin{aligned}
c_1 &:= \frac{2 \left( \int_{-1}^1 \frac{2 \sin(2x)^3 x}{\sqrt{-x^2 + 1}} dx \right)}{\pi} \\
c_2 &:= 0 \\
c_3 &:= \frac{2 \left( \int_{-1}^1 \frac{2 \sin(2x)^3 (4x^3 - 3x)}{\sqrt{-x^2 + 1}} dx \right)}{\pi} \\
c_4 &:= 0 \\
c_5 &:= \frac{2 \left( \int_{-1}^1 \frac{2 \sin(2x)^3 (16x^5 - 20x^3 + 5x)}{\sqrt{-x^2 + 1}} dx \right)}{\pi} \\
c_6 &:= 0 \\
c_7 &:= \frac{2 \left( \int_{-1}^1 \frac{2 \sin(2x)^3 (64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x)}{\sqrt{-x^2 + 1}} dx \right)}{\pi}
\end{aligned} \tag{11}$$

```

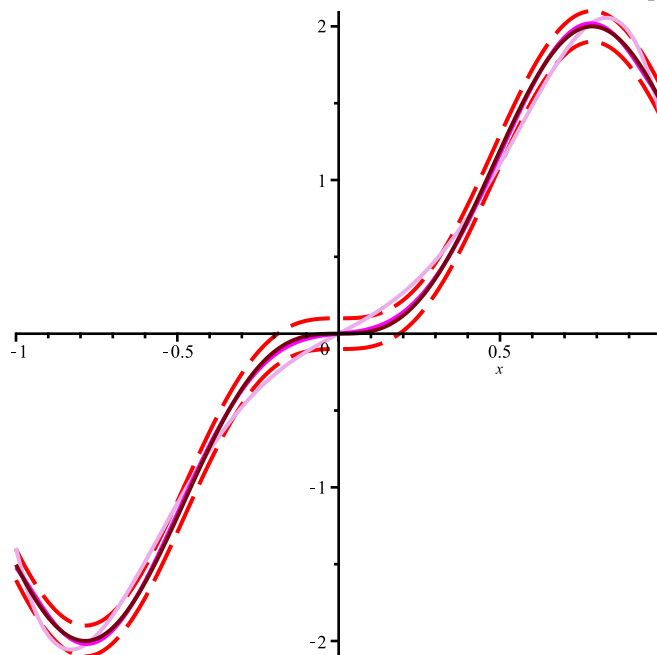
> chebyshev_6 := plot( (c[0]/2 + add(c[n]*T(n,x), n=1..6)), x=-1..1, color=plum ):
chebyshev_7 := plot( (c[0]/2 + add(c[n]*T(n,x), n=1..7)), x=-1..1, color=magenta );

```





> `plots[display]([bord1, bord2, chebyshev_6, chebyshev_7, main_plot])`



> *#Разложение в тригонометрический ряд*

> `bm := simplify(int(f·sin(Pi·m·x), x=-1..1)) assuming m :: posint;`

`S := k→sum(bm·sin(Pi·m·x), m=1..k);`

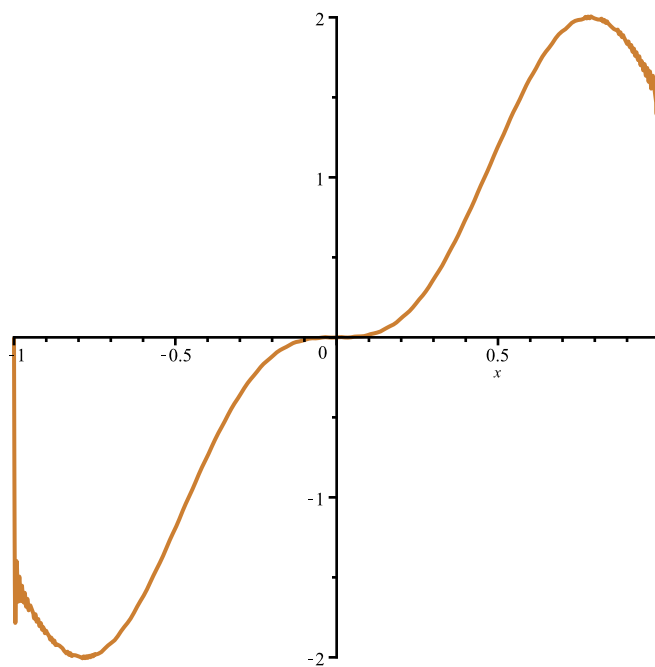
$$bm := \frac{\pi (-1)^m m (\sin(6) \pi^2 m^2 - 3 \pi^2 \sin(2) m^2 - 4 \sin(6) + 108 \sin(2))}{\pi^4 m^4 - 40 \pi^2 m^2 + 144}$$

$$S := k \mapsto \sum_{m=1}^k bm \cdot \sin(\pi \cdot m \cdot x)$$

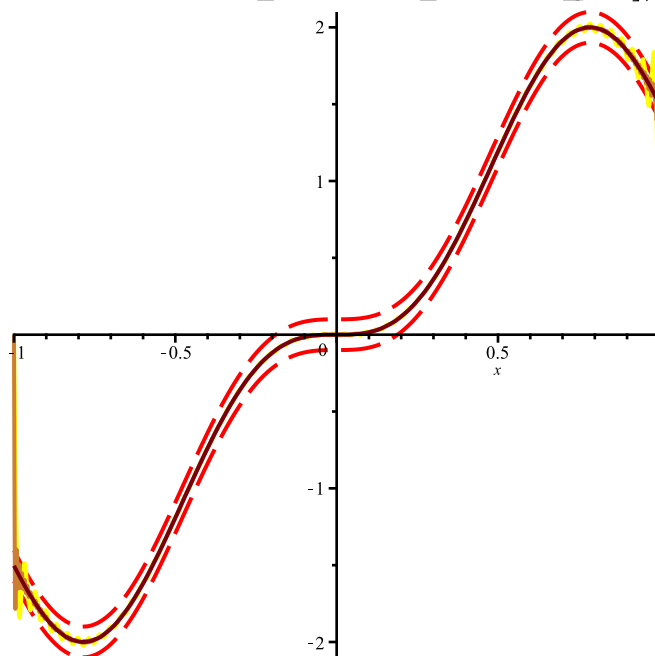
(12)

> `Fourier_60 := plot(S(60), x=-1..1, discontinuity=true, color=yellow);`

`Fourier_240 := plot(S(240), x=-1..1, discontinuity=true, color=gold);`



> `plots[display]([bord1, bord2, Fourier_60, Fourier_240, main_plot])`



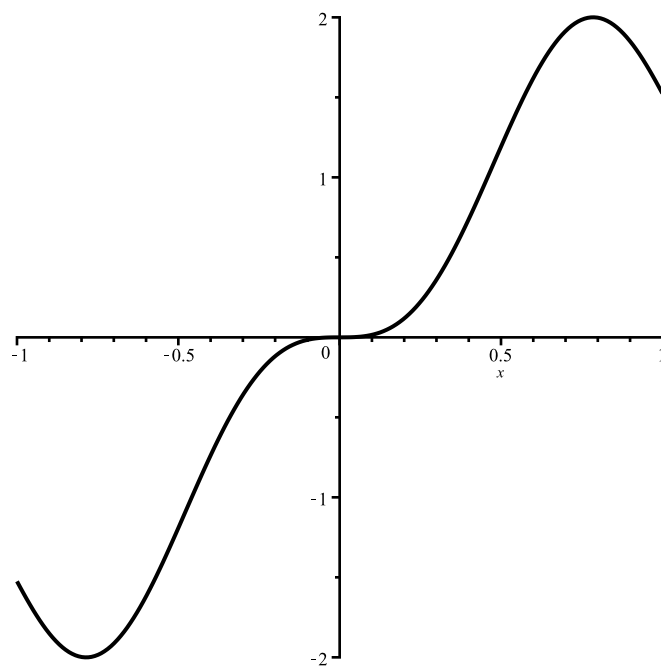
> *#Разложение в степенной ряд*

> `S := k → convert(taylor(f, x = 0, k), polynom)`

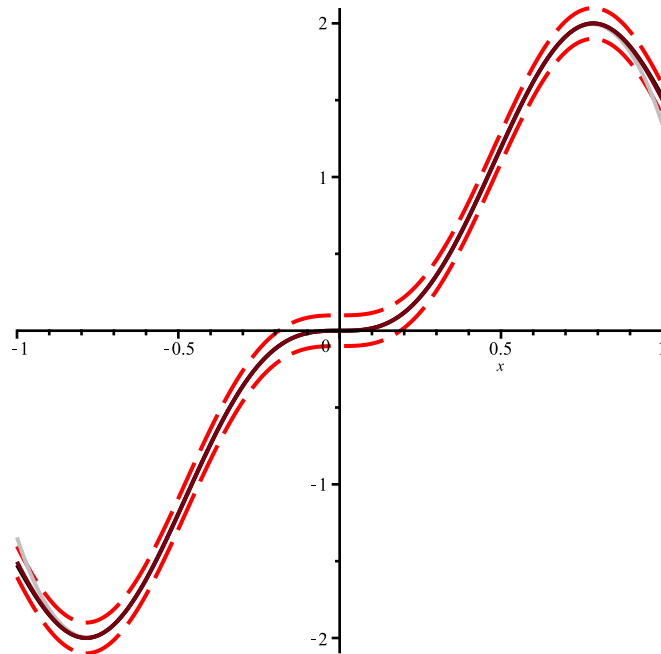
*S := k ↦ convert(taylor(f, x = 0, k), polynom)*

> `taylor_15 := plot(S(15), x = -1 .. 1, color = gray) :`  
`taylor_16 := plot(S(16), x = -1 .. 1, color = black)`

(13)



```
> plots[display]([bord1, bord2, taylor_15, taylor_16, main_plot])
```



```
> #2
```

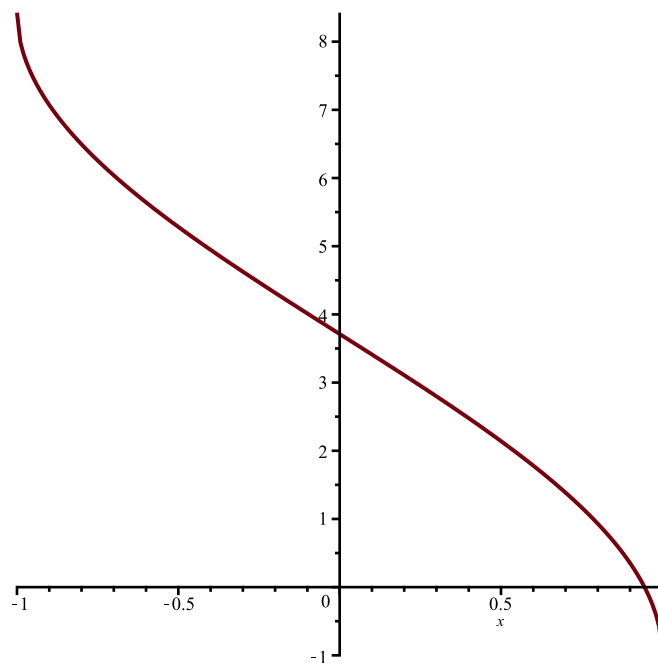
```
restart
```

```
> f := 3*arccos(x) - 1
```

$f := 3 \arccos(x) - 1$

```
> main_plot := plot(f, x = -1 .. 1)
```

(14)



> *with(orthopoly) :*

> *#Разложение по многочленам Лежандра*

**for** *n* **from** 0 **to** 5 **do**  $c[n] := \frac{\int_{-1}^1 f \cdot P(n, x) \, dx}{\int_{-1}^1 P(n, x)^2 dx}$ ; **end do**;

$$c_0 := -1 + \frac{3\pi}{2}$$

$$c_1 := -\frac{9\pi}{8}$$

$$c_2 := 0$$

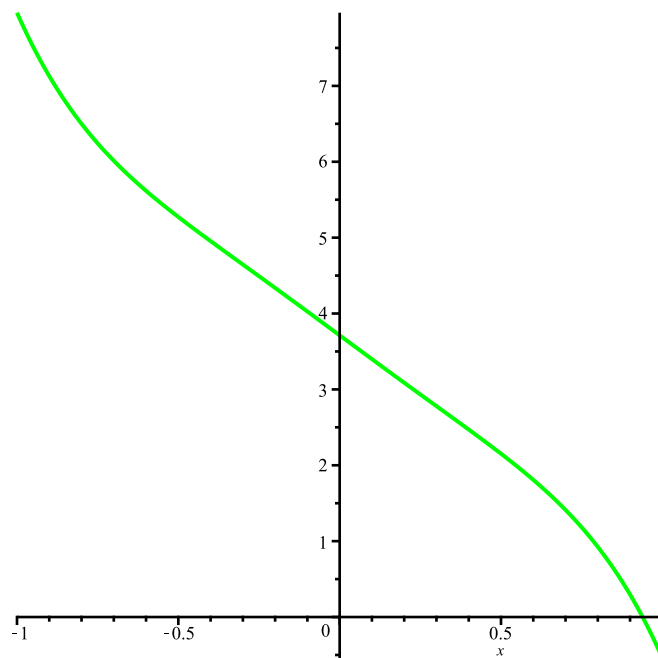
$$c_3 := -\frac{21\pi}{128}$$

$$c_4 := 0$$

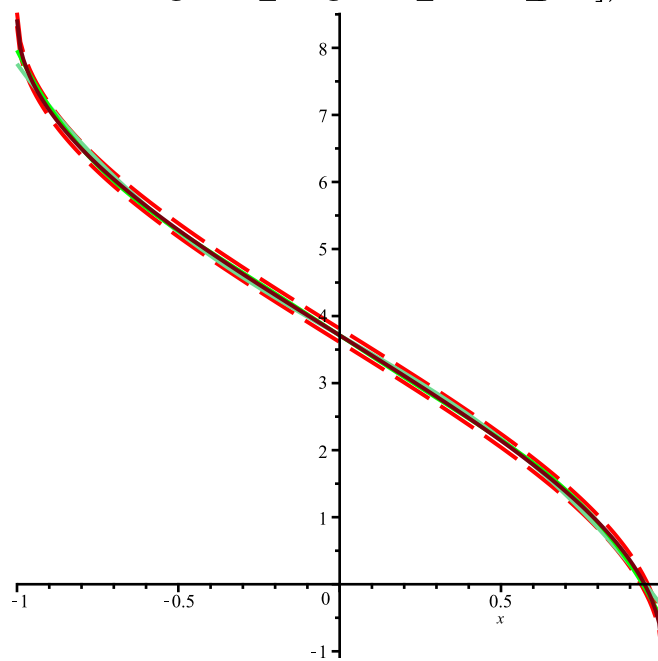
$$c_5 := -\frac{33\pi}{512}$$

(15)

> *legendre\_3 := plot(add(c[n]·P(n, x), n=0..3), x=-1..1, color=aquamarine) :*  
*legendre\_5 := plot(add(c[n]·P(n, x), n=0..5), x=-1..1, color=green);*



```
> bord1 := plot(f + 0.1, x=-1..1, linestyle=dash, color=red) :
  bord2 := plot(f - 0.1, x=-1..1, linestyle=dash, color=red) :
  plots[display]([bord1, bord2, legendre_3, legendre_5, main_plot])
```



```
> #Разложение по многочленам Чебышева
```

```
for n from 0 to 5 do c[n] :=  $\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f \cdot T(n, x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ; end do
```

$$c_0 := \frac{2 \left( \frac{3}{2} \pi^2 - \pi \right)}{\pi}$$

$$c_1 := -\frac{12}{\pi}$$

$$c_2 := 0$$

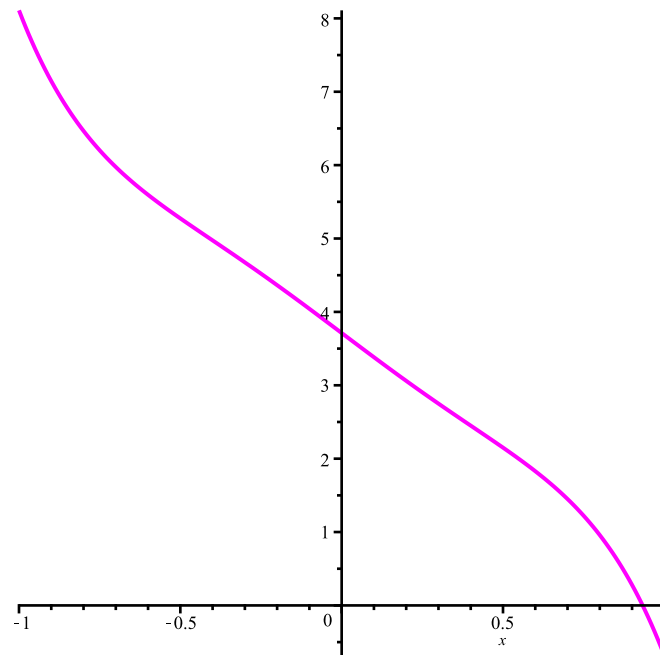
$$c_3 := -\frac{4}{3\pi}$$

$$c_4 := 0$$

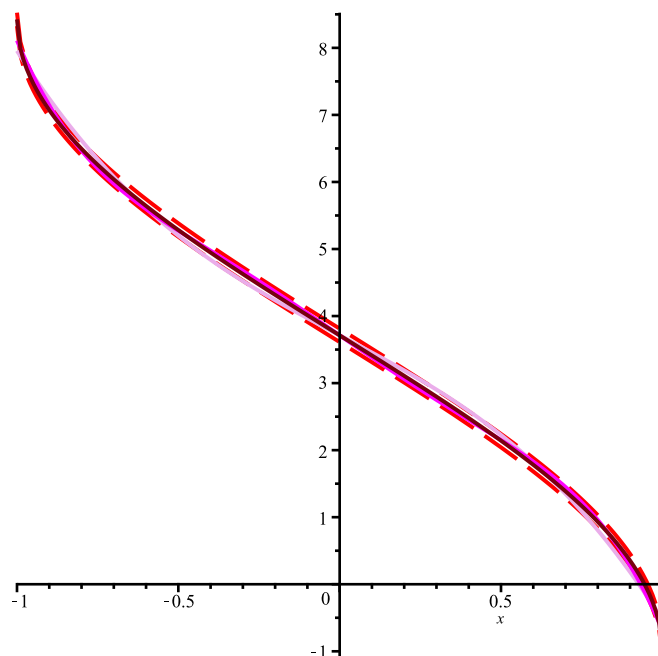
$$c_5 := -\frac{12}{25\pi}$$

(16)

```
> chebyshev_3 := plot( (c[0]/2 + add(c[n]*T(n,x), n=1..3), x=-1..1, color=plum ) :  
chebyshev_5 := plot( (c[0]/2 + add(c[n]*T(n,x), n=1..5), x=-1..1, color=magenta ) ;
```



```
> plots[display]([bord1, bord2, chebyshev_3, chebyshev_5, main_plot])
```



> #Разложение в тригонометрический ряд

>  $a0 := \text{simplify}(\text{int}(f, x=-1..1));$   
 $am := \text{simplify}(\text{int}(f \cdot \cos(\text{Pi} \cdot m \cdot x), x=-1..1)) \text{ assuming } m :: \text{posint};$   
 $bm := \text{simplify}(\text{int}(f \cdot \sin(\text{Pi} \cdot m \cdot x), x=-1..1)) \text{ assuming } m :: \text{posint};$   
 $S := k \mapsto \frac{a0}{2} + \text{sum}(bm \cdot \sin(\text{Pi} \cdot m \cdot x), m=1..k);$

$$a0 := -2 + 3 \pi$$

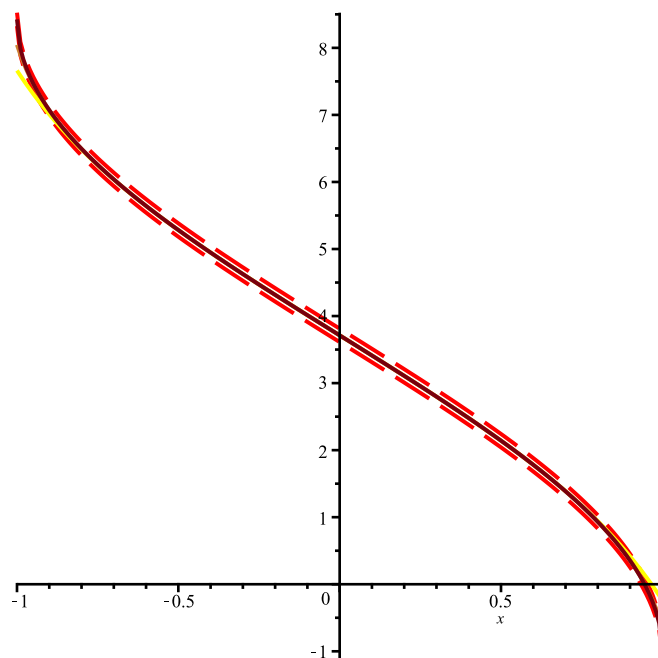
$$am := 0$$

$$bm := \int_{-1}^1 (3 \arccos(x) - 1) \sin(\pi m x) dx$$

$$S := k \mapsto \frac{a0}{2} + \left( \sum_{m=1}^k bm \cdot \sin(\pi \cdot m \cdot x) \right)$$

(17)

>  $\text{Fourier\_10} := \text{plot}(S(10), x=-1..1, \text{discont}=\text{true}, \text{color}=\text{yellow});$   
 $\text{Fourier\_40} := \text{plot}(S(40), x=-1..1, \text{discont}=\text{true}, \text{color}=\text{gold});$   
>  $\text{plots}[\text{display}](\text{[bord1, bord2, Fourier\_10, Fourier\_40, main\_plot]})$



> #Разложение в степенной ряд

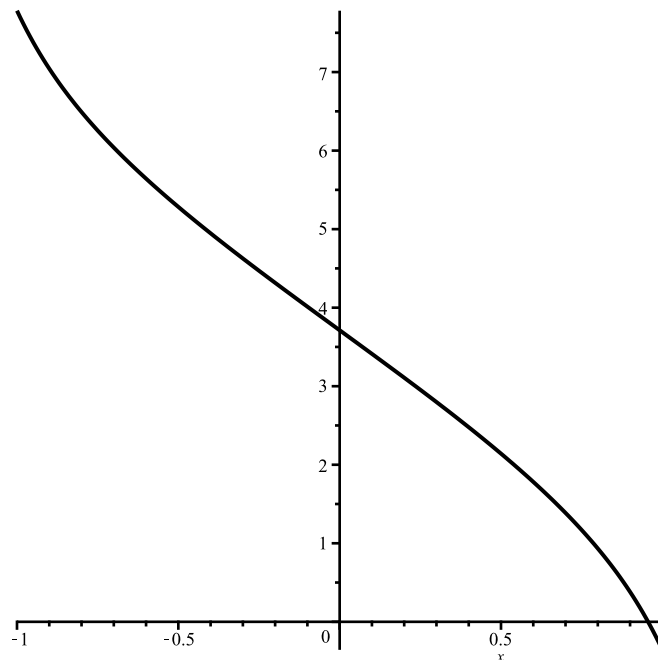
>  $S := k \rightarrow \text{convert}(\text{taylor}(f, x=0, k), \text{polynom})$

$S := k \mapsto \text{convert}(\text{taylor}(f, x=0, k), \text{polynom})$

(18)

>  $\text{taylor\_8} := \text{plot}(S(8), x = -1 .. 1, \text{color} = \text{gray}) :$

$\text{taylor\_15} := \text{plot}(S(15), x = -1 .. 1, \text{color} = \text{black})$



>  $\text{plots}[\text{display}]([\text{bord1}, \text{bord2}, \text{taylor\_8}, \text{taylor\_15}, \text{main\_plot}])$



