1.1. Разностные уравнения первого и второго порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

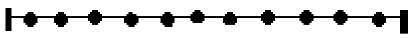
$U' + AU = f(x), \qquad x \in [a,b]$.

Пусть его решением является функция $U=U(x)$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей с шагом h, то есть построим последовательность $\{x_k\}$:

$$x_0 = a, \; x_k = x_0 + kh, \; k = \overline{0,n}, \text{ где } h = \frac{b-a}{n}.$$

Множество узлов x_k на отрезке $[a,b]$ образует *сетку* D_h с шагом h.



D_h

При этом, любую функцию g_k $k=0, 1,...,n$, определенную на сетке D_h , будем называть сеточной функцией. В частности, сеточной функцией будет последовательность $U(x_k)$ $k = 0,...,n$, порожденная решением $U(x)$ дифференциального уравнения.

Заменим производные функции во внутренних узлах их разностными аппроксимациями:

$$U'(x_k) \approx \frac{U(x_k + h) - U(x_k)}{h}.$$

Значение функции U в k–ом узле обозначим

$$L_h U^{(h)} = \begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1}, & k = \overline{1, n-1} \\ U_0 \\ U_n, \end{cases}$$

$U(x_k) = U_k$, а функции f

$$\left\| U^{(h)} \right\|_{U_h} = \left\| U^{(h)} \right\| = \max_{k=\overline{0,n}} |U_k|$$

соответственно через $f_k = f(x_k)$. В новых обозначениях получим разностное уравнение:

$$\frac{U_{k+1} - U_k}{h} + AU_k = f_k.$$

С большей точностью первую производную можно также представить в виде:

$U'(x_k) \approx \dfrac{U(x_k + h) - U(x_k - h)}{2h}$, тогда уравнение будет иметь вид

$$\frac{U_{k+1} - U_{k-1}}{2h} + AU_k = f_k.$$

Рассмотрим теперь на данном отрезке дифференциальное уравнение второго порядка

$$U'' + AU' + BU = f(x).$$

Аналогично, заменив производные их разностными аппроксимациями, получим:

$$\frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{h^2} + A\frac{U_{k+1} - U_{k-1}}{2h} + BU_k = f_k.$$

Преобразуем полученное разностное уравнение:

$$\left(\frac{A}{2h}+\frac{1}{h^2}\right)U_{k+1}+\left(B-\frac{2}{h^2}\right)U_k+\left(\frac{1}{h^2}-\frac{A}{2h}\right)U_{k-1}=f_k.$$

Полученные разностные уравнения будем также называть *разностными схемами* для соответствующих дифференциальных уравнений.

Таким образом, мы перешли от дифференциальных уравнений к разностным уравнениям вида:

$$a_kU_k+b_kU_{k+1}=f_k \tag{11.1}$$

и

$$a_kU_{k-1}+b_kU_k+c_kU_{k+1}=f_k, \tag{6.2}$$

где a_k, b_k, c_k − некоторые коэффициенты. Уравнения (6.1) и (6.2) будем называть соответственно *линейными разностными уравнениями первого и второго порядка* (при условии, что $a_k, b_k \neq 0$ в (6.1) и $a_k, c_k \neq 0$ в (6.2)).

Заметим, что при переходе от дифференциального уравнения к разностному уравнению, порядок уравнения не обязательно сохраняется.

Рассмотрим свойства линейных разностных уравнений (6.1) и (6.2) , абстрагируясь от дифференциальных уравнений, их породивших. Их решениями будем называть сеточные функции $\{U_k\}$, удовлетворяющие соответствующим уравнениям при *k=0, 1,….,n.*

Очевидно, что для однозначного решения разностного уравнения (6.1) необходимо знать начальное значение сеточной функции U_k в нулевом узле, то есть U_0. Для решения разностного уравнения (6.2) необходимо знать два начальных значения U_0 ,U_1.

Назовем разностное уравнение (6.1) линейным разностным уравнением первого порядка, а уравнение (6.2) линейным разностным уравнением второго порядка.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (6.1):

$$a_k U_k + b_k U_{k+1} = 0 . \tag{6.3}$$

Легко видеть, что если $\{U_k^{(1)}\}$ его решение, то решением также будет и сеточная функция$\{\alpha U_k^{(1)}\}$. Тогда, очевидно, что любое другое решение уравнения (6.3) можно получить при определенном численном значении α . То есть, если известно$\{\alpha U_k^{(1)}\}$, то любое решение $\tilde{U}_k$ представимо в виде $\tilde{U}_k = \alpha_0 U_k^{(1)}$.

Таким образом, $\{\alpha U_k^*\}$ представляет собой общее решение уравнения (6.3), из которого получаются выбором постоянной α все остальные решения. Легко видеть, что общим решением разностного уравнения (6.1) будет сеточная функция $U_k = U_k^* + \alpha U_k^{(1)}$, где U_k^* произвольное решение уравнения (6.1).

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (6.2):

$$a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = 0. \tag{6.4}$$

Пусть $\{U_k^{(1)}\}$ и $\{U_k^{(2)}\}$ – решения (6.4), причем векторы $(U_0^{(1)}, U_1^{(1)})$ и $(U_0^{(2)}, U_1^{(2)})$ – линейно независимы, т. е.

$$\begin{vmatrix} U_0^{(1)} & U_1^{(1)} \\ U_0^{(2)} & U_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Подстановка показывает, что при любых α и β сеточная функция $U_k = \alpha U_k^{(1)} + \beta U_k^{(2)}$ является тоже решением. Покажем, что $U_k = \alpha U_k^{(1)} + \beta U_k^{(2)}$ – общее решение, т.е. любое решение $\{U_k^*\}$ можно представить в виде

$$U_k^* = \alpha_0 U_k^{(1)} + \beta_0 U_k^{(2)} .$$

Действительно, полагая

$$\left(U_0^*, U_1^*\right) = \alpha\left(U_0^{(1)}, U_1^{(1)}\right) + \beta\left(U_0^{(2)}, U_1^{(2)}\right),$$

получим

$$\begin{cases} \alpha U_1^{(1)} + \beta U_1^{(2)} = U_1^* \\ \alpha U_1^{(1)} + \beta U_1^{(2)} = U_1^* . \end{cases}$$

Поскольку

$\Delta \neq 0$, то решение системы $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ существует и является единственным.

Легко убедиться также, что, если U_k^* – частное решение уравнения (6.2), то общим решением уравнения (6.2) будет:

$$U_k = U_k^* + \alpha U_k^{(1)} + \beta U_k^{(2)} .$$

Теперь рассмотрим линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$aU_{k-1} + bU_k + cU_{k+1} = 0, \qquad (6.5)$$

где $a, c \neq 0$.

Составим уравнение $a + bq + cq^2 = 0$, которое будем называть характеристическим для (6.5). Найдем его корни q_1 и q_2. Возможны следующие ситуации:

1). Пусть $q_1 \neq q_2$. Тогда подстановкой легко проверить, что

$U_k^{(1)} = q_1^k, \quad U_k^{(2)} = q_2^k$ – решения. Здесь q_1 и q_2 – действительные числа, отличные от нуля.

Подставив в уравнение (6.5), получим:

$aq_1^k + bq_1^{k+1} + cq_1^{k+2} = 0$ или $a + bq_1 + cq_1^2 = 0$.

Поскольку

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 \\ 1 & q_2 \end{vmatrix} = q_1 - q_2 \neq 0,$$

то общее решение имеет вид $U_k = \alpha q_1^k + \beta q_2^k$.

2. Пусть $q_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то есть корни комплексные. Тогда

$$U_k = q_1^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Это комплексное решение. Отделяя его действительную и мнимую части, получим действительные частные решения

$$\begin{cases} U_k^{(1)} = r^k \cos k\varphi \\ U_k^{(2)} = r^k \sin k\varphi. \end{cases}$$

Значит, общее решение совпадает с линейной комбинацией

$$U_k = \alpha r^k \cos k\varphi + \beta r^k \sin k\varphi .$$

3. Пусть $q_1 = q_2 = q$, то есть корни кратные.

Очевидно $U_k = q^k$ будет решением. Найдем второе решение.

Положим $\tilde{U}_k = y_k q^k$ и подставим в (6.5):

$$a y_{k-1} q^{k-1} + b y_k q^k + c y_{k+1} q^{k+1} = 0 ,$$

откуда

$$a y_{k-1} + b y_k q + c y_{k+1} q^2 = 0 .$$

По теоремы Виета для корней квадратного уравнения получаем

$$-\frac{b}{c} = 2q \ , \qquad \frac{a}{c} = q^2 \ . \tag{6.6}$$

Поделим квадратное уравнение на c:

$$\frac{a}{c} y_{k-1} + \frac{b}{c} a y_k + y_{k+1} q^2 = 0 .$$

Тогда, согласно (6.6), получим:

$$q^2 y_{k-1} + 2q^2 y_k + q^2 y_{k+1} = 0$$

или

$$y_{k-1} - y_k = y_k - y_{k+1} \ .$$

Решением такого разностного уравнения будет любая арифметическая прогрессия, в том числе последовательность целых чисел $y_k = k$. То есть

$$\tilde{U}_k = kq^k \ .$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} U_0 & U_1 \\ \tilde{U}_0 & \tilde{U}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & q \\ 0 & q \end{vmatrix} = q \neq 0,$$

то общим решением будет

$$U_k = \alpha q^k + \beta k q^k \ .$$