Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Математика. Математический анализ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе на тему

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент гр.153501 Тимофеев К. А.

Руководитель: канд. ф.-м. н., доцент Анисимов В. Я.

Минск 2022

ДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

Целью данной работы является изучение непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных условий для нормальной системы. 3

Для Єтого были рассмотрены теория систем ДУ, понятие нормальной системы дифференциальных уравнений, ее свойства и геометрический смысл, метод исключения решения систем дифференциальных уравнений, постановка задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений, теоремы о существовании и единственности её решения, теорема о корректности задачи Коши для нормальной системы, а так же теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши для нормальной системы от начальных условий. Была рассмотрена связь между непрерывной зависимостью от начальных условий и корректностью задачи Коши. 3

При помощи системы компьютерной алгебры Maple были решены задачи, демонстрирующие справедливость теорем, а также изучающие случаи, выходящие за область применения Єтих утверждений. 3

Изученные материалы приведены в разделе "Список источников". 3

1 Аналитический обзор 4

1.1 Системы дифференциальных уравнений 5

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 16

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является изучение непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных условий для нормальной системы.

Для этого были рассмотрены теория систем ДУ, понятие нормальной системы дифференциальных уравнений, ее свойства и геометрический смысл, метод исключения решения систем дифференциальных уравнений, постановка задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений, теоремы о существовании и единственности её решения, теорема о корректности задачи Коши для нормальной системы, а так же теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши для нормальной системы от начальных условий. Была рассмотрена связь между непрерывной зависимостью от начальных условий и корректностью задачи Коши.

При помощи системы компьютерной алгебры Maple были решены задачи, демонстрирующие справедливость теорем, а также изучающие случаи, выходящие за область применения ∈тих утверждений.

Изученные материалы приведены в разделе "Список источников".

1 АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Условие Липшица

Пусть $f(x,y)$ – вектор-функция с заданными т компонентами в области $D \subseteq R^{n+1}_{(x,y)}$.

Определение: говорят, что $f(x,y)$ в области D удовлетворяет условию Липшица относительно y равномерно по x, если $\exists$ число $L > 0$ такое, что

$$| \ f(x,y_1) - \ f(x,y_2) \ | \ \le \ L| \ y_1 - y_2 \ |,$$

для любых точек $(x, y_1) \in D$ и $(x, y_2) \in D$. Число L называется постоянной Липшица.

Это условие ограничивает рост функции в области D.

Лемма о модулях

Пусть $\mathrm{C}_n(I)$ обозначает множество всех вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}(x)$ с n заданными непрерывными компонентами на промежутке I. Имеет место лемма об оценке модуля интеграла от вектор-функции.

Лемма: для $\forall \boldsymbol{\varphi}(x) \in \mathrm{C}_n(I)$ справедливо равенство

$$\left| \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\varphi}(\zeta) d\zeta \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} |\boldsymbol{\varphi}(\zeta)| d\zeta \right|,$$

где $x, x_0 \in I$.

Лемма Гронуолла

Пусть на промежутке $I \subseteq R^1_x$ скалярная функция $\varphi(x) \ge 0$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$\varphi(x) \le A + B \left| \int_{x_0}^{x} \varphi(\zeta) d\zeta \right|,$$

Где $A \ge 0, B > 0, x_0, x \in I$. Тогда для $\forall x \in I$

$$\varphi(x) \le A \cdot e^{B(x-x_0)}.$$

Метод последовательных приближений Пикара

Пусть есть задача Коши

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Тогда

$$y(x)' \equiv f(x, y(x))$$

Интегрируя, мы получим

$$\int_{x_0}^{x} y'(\zeta) d\zeta = \int_{x_0}^{x} f\big(\zeta, y(\zeta)\big) d\zeta$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(\zeta, y(\zeta)) d\zeta$$

Учитывая начальные условия, получаем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\zeta, y) d\zeta \quad (2)$$

Следовательно, решение задачи Коши (1) удовлетворяет интегральному уравнению (2). Т.к. в данном интегральном уравнении $y(x_0) = y_0$ и $y'(x) = f(x, y)$, то всякое решение этого уравнения будет решением задачи Коши (1).

В уравнении (2) в качестве начального приближения положим $y = y_0$ и определим функцию

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\zeta, y_0) d\zeta$$

Определим рекуррентную формулу

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\zeta, y_n(\zeta)) d\zeta \,, n = 0,1,2 \ldots \quad (3)$$

Теорема Коши-Пикара: Если в задаче Коши (1) функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y, то существует единственное решение задачи Коши, к которому равномерно сходятся при $n \to \infty$ приближения, определяемые формулой (3).

Также стоит заметить, что любая $y_n(x)$ непрерывна и определена на всем отрезке в силу непрерывности функции $f(x, y)$.

1.1 Системы дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида (чек чек чек)

$$\begin{cases} F_i \left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, \ldots, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)} \right) = 0 \end{cases}$$

называется системой дифференциальных уравнений, заданной в неявной форме.

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_i^{(k_i)} = f_i \left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, \ldots, y_i', \ldots, y_i^{(k_i - 1)}, y_n', \ldots, y_n^{(k_n)} \right) \end{cases}$$

является системой ДУ, заданной в канонической форме.

1.2 Нормальные системы дифференциальных уравнений

Нормальной системой n дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется система (1)

$$\begin{cases} {y_1}' = f_2(x, y_1, \dots, y_n); \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n); \end{cases}$$

где функции $f_i,\ i\ =\ 1,2, \dots\ n$, определены в некоторой $(n+1)$-мерной области D переменных $x, y_1, \dots, y_n$.

Решением системы на интервале (a, b) называется совокупность n функций $y_1\ =\ y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b) и удовлетворяющих системе.

Для удобства в дальнейшем будем записывать в векторном виде

$$\mathbf{y}'(x) = \ f(x, \mathbf{y}), \text{где } \mathbf{y}(x) = \ \left(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\right)^T,$$

$$\mathbf{y}'(x) = \ \left({y_1}'(x), {y_2}'(x), \dots, {y_n}'(x)\right)^T,$$

$$f(x, \mathbf{y}), = \ (f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n))^T$$

Пусть $\mathbf{y} = \ \left(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\right)^T$ – решение системы на интервале (a, b). Графиком этого решения служит множество точек из D, определяемое равенством $G_y = \{x, y_1(x), \dots, y_n(x) \mid x\ \in\ (a, b)\}$. Множество $G_{\mathbf{y}}$ представляет собой параметрически заданную кривую параметра $x\ \in\ (a, b)$ в $(n+1)$-мерной области переменных $x, y_1, \dots, y_n$. Эта кривая называется интегральной кривой системы (1). Решению $\mathbf{y} = \ \left(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\right)^T$ показывает движение точки в n-мерном пространстве переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$. Это пространство называют фазовым (при $n = 2$ оно называется фазовой плоскостью), а кривая, описываемая в нем движущейся точкой, – фазовой траекторией. Следовательно, фазовая траектория является проекцией интегральной кривой на n-мерное пространство переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$. Фазовая траектория обладает таким свойством, что в момент времени x её составляющие скорости $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ равны значениям правых частей системы (1).

1.3 Метод исключений

Дифференциальное уравнение n-го порядка $y^{(n)}\ =\ f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ можно свести к системе дифференциальных уравнений. Положим:

$$y\ =\ y_1, y'\ =\ y_2, \dots, \quad y^{(n-1)}\ =\ y_n$$

$$y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно нормальной системе дифференциальных уравнений. Решением такой системы будет вектор $\mathbf{y} = \ (y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$, где первая координатная функция $y = y(x)$ является решением исходного дифференциального уравнения.

Выполнимой, но в определенных условиях, является и обратная задача. Пусть дана нормальная система дифференциальных уравнений вида (1). Дифференцируя по x, получаем

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n$$
$$= F_2(x, y_1, \dots, y_n)$$
т.к. $y_i{}' = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Продолжая этот процесс относительно $y_1{}'$ получим систему дифференциальных уравнений, в которой при определенных условиях можно выразить $y_1^{(n)}$ как функцию от $x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

Преобразование нормальной системы n уравнений к дифференциальному уравнению порядка n является основой метода исключений решения систем дифференциальных уравнений.

1.4 Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Пусть дано начальное условие $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}, (x_0, \mathbf{y_0}) \in D$ (2). Точка $(x0, \mathbf{y}0) \in D$ называется начальной точкой, а ее координаты называются начальными условиями.

Задача нахождения решения нормальной системы (1) , удовлетворяющей начальному условию (2), называется задачей Коши для нормальной системы.

Пусть есть система уравнений вида

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}\big(\zeta, \mathbf{y}_0(\zeta)\big)\, d\zeta \qquad (3)$$

где $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D, \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \in C_n(D)$, называется системой интегральных уравнений. Вектор-функция $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ называется решением на промежутке I системы (3) если:

1. $\boldsymbol{\varphi}(x) \in C_n(I)$,
2. Точка $\big(x, \boldsymbol{\varphi}(x)\big) \in D, \forall x \in I$
3. $\boldsymbol{\varphi}(x) \equiv \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}\big(\zeta, \mathbf{y}_0(\zeta)\big)\, d\zeta\,, \forall x \in I$

Покажем, что разрешимость задачи Коши (1), (2) эквивалентна разрешимости системы интегральных уравнений (3).

Лемма об эквивалентности: вектор-функция $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ – решение задачи Коши (1), (2) на промежутке I тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ – решение на I системы интегральных уравнений (3).

Доказательство: если $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ – решение на I задачи Коши (1), (2), то $\mathbf{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))$ – непрерывная на I вектор-функция. Тогда интегрирование от x_0 до x тождества $\boldsymbol{\varphi}'(x) \equiv \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))$ на I с учётом (2) даёт тождество из третьего пункта определения решения (3), т.е. $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ решение (3) на I. Обратно, если $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ решение (3) на I, то $\mathbf{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))$ – непрерывная на I функция. Тогда можно дифференцировать тождество из третьего пункта определения решения. Полученное в результате тождество показывает, что $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ – решение уравнения (1). Полагая $x = x_0$ в тождестве п. 3 определения решения (3), находим, что $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ удовлетворяет начальному условию (2).

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальной системы уравнений: пусть вектор-функция $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \in C_n(D)$ и удовлетворяет на каждом ограниченном замкнутом множестве области D

условию Липшица по y равномерно по x и пусть, кроме того, $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$. Тогда:

1. Найдется такое число $\delta > 0$,что при $|x - x_0| \leq \delta$ решение задачи Коши существует,
2. Решение задачи Коши (1), (2) единственно в том смысле, что если $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ и $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Psi}(x)$ – два какие-либо решения задачи Коши (1), (2), то $\boldsymbol{\varphi}(x) \equiv \boldsymbol{\Psi}(x)$ на пересечении I промежутков определения этих решений ($x_0 \in I$).

Доказательство:

Существование: в силу леммы об эквивалентности достаточно доказать существование и единственность решения системы (3).

Поскольку $(x_0, \mathbf{y}_0) \in G$ и G – открытое множество, то $\exists$ такие числа $p > 0$ и $\mathbf{q} > 0$, что замкнутый ограниченный цилиндр $G_{pq} = \{(x, \mathbf{y}) \in G: |x - x_0| \leq p, |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| \leq \mathbf{q}\}$ принадлежит G. Цилиндр G_{pq} представляет собой выпуклую по $\mathbf{y}$ область. В силу того, что цилиндр G_{pq} – ограниченное замкнутое множество, то найдется такие числа $\mathbf{M} > 0$, что

$$|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})| \leq \mathbf{M}, \forall (x, \mathbf{y}) \in G_{pq}$$

По условию теоремы вектор-функция $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ в области G_{pq} удовлетворяет условию Липшица по $\mathbf{y}$ равномерно по x, т.е. $\exists$ число $L > 0$, зависящее от цилиндра G_{pq}, такое что

$$|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)| \leq L|\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2}|, \forall (x, \mathbf{y}_1), (x, \mathbf{y}_2) \in G_{pq} \quad (4)$$

Решение системы (3) будем искать при помощи приближений Пикара, где i-ое приближение при $|x - x_0| \leq \delta$, $\delta = \min\left(p, \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{M}}\right)$, где $\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{M}}$ – наименьший элемент вектора, полученного делением элементов вектора $\mathbf{q}$ на соответствующие элементы вектора $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{y}_0(x) = \mathbf{y}_0, \qquad \mathbf{y}_{n+1}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(\zeta, \mathbf{y}_n(\zeta)) d\zeta, n = 0,1,2 \ldots \quad (5)$$

Методом математической индукции докажем непрерывность $\mathbf{y}_i(x)$. Очевидно, что $\mathbf{y}_0(x)$ непрерывна. Для $\mathbf{y_1}(x)$ учитывая лемму о модулях при $|x - x_0| \leq \delta$

$$|\mathbf{y_1}(x) - \mathbf{y}_0| = \left|\int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(\zeta, \mathbf{y}_0) d\zeta\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |\mathbf{f}(\zeta, \mathbf{y}_0)| d\zeta\right| \leq$$

$$\left|\int_{x_0}^{x} \mathbf{M} d\zeta\right| = \mathbf{M}|x - x_0| \leq \mathbf{M}\delta \leq \mathbf{q} \quad (6)$$

Пусть при $|x - x_0| \leq \delta$ функция $\mathbf{y}_i(x)$ непрерывна и пусть $(x, \mathbf{y}_i(x)) \in G_{pq}$. Докажем что при $|x - x_0| \leq \delta$ функция $\mathbf{y}_{i+1}(x)$ непрерывна и $(x, \mathbf{y}_{i+1}(x)) \in G_{pq}$. Так как при $|x - x_0| \leq \delta$ $\mathbf{y}_i(x)$ непрерывна и $(x, \mathbf{y}_i(x)) \in G_{pq}$, то при $|x - x_0| \leq \delta$ функция $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_i(x))$ тоже непрерывна. Тогда из (5) следует непрерывность $\mathbf{y}_{i+1}(x)$ при $|x - x_0| \le \delta$. Кроме того, проводя аналогичные (6) рассуждения, мы получим

$$|\mathbf{y}_{i+1}(x) - \mathbf{y}_0| \le \mathbf{q}$$

Таким образом в δ-окрестности точки x_0 все последовательные приближения $\mathbf{y}_i(x)$ непрерывны и лежат внутри цилиндра G_{pq}.

Равномерная сходимость $\{\mathbf{y}_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ эквивалентна сходимости следующего ряда

$$\mathbf{y}_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty}(\,\mathbf{y}_{i+1}(x) - \mathbf{y}_i(x)) \quad (7)$$

С помощью метода математической индукции докажем следующую оценку при $|x - x_0| \le \delta$:

$$|\mathbf{y}_{i+1}(x) - \mathbf{y}_i(x)| \le L^i\mathbf{M}\frac{|x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!}, \;\; i = 0,1,2,\ldots \quad (8)$$

Для $i = 0$ оценка (8) была установлена выше. Теперь пусть

$$|\mathbf{y}_i(x) - \mathbf{y}_{i-1}(x)| \le L^{i-1}\mathbf{M}\frac{|x - x_0|^i}{i!}.$$

Так как $(x, \mathbf{y}_i(x)) \in G_{pq}$, $|x - x_0| \le \delta$, то из (4) получаем

$$|\mathbf{y}_{i+1}(x) - \mathbf{y}_i(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x}(\mathbf{f}(\zeta, \mathbf{y}_i) - \mathbf{f}(\zeta, \mathbf{y}_{i-1}))d\zeta\right| \le \left|\int_{x_0}^{x}|(\mathbf{f}(\zeta, \mathbf{y}_i) - \mathbf{f}(\zeta, \mathbf{y}_{i-1}))|d\zeta\right|$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x}|\mathbf{y}_i(x) - \mathbf{y}_{i-1}(x)|d\zeta\right| = \frac{L^i\mathbf{M}}{i!}\left|\int_{x_0}^{x}|\zeta - x_0|d\zeta\right| = L^i\mathbf{M}\frac{|x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!}$$

Таким образом оценка (8) обоснована. По признаку Вейерштрасса ряд (7) сходится равномерно при , $|x - x_0| \le \delta$ к некоторой вектор-функции $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$. Следовательно $\mathbf{y}_i(x) \rightrightarrows \boldsymbol{\varphi}(x)$ для $|x - x_0| \le \delta$ и $i \to \infty$. Т.к. сумма сходящегося ряда непрерывных функция является непрерывной, то $\mathbf{y}(x) = \boldsymbol{\varphi}(x)$ непрерывна при $|x - x_0| \le \delta$.

Покажем что $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ – решение системы (3) при $|x - x_0| \le \delta$. Так как $(x, \mathbf{y}_i(x)) \in G_{pq}$ и $(x, \boldsymbol{\varphi}(x)) \in G_{pq}$, $i = 0,1,2,\ldots$, для $|x - x_0| \le \delta$, то по условию Липшица:

$$\left|\mathbf{f}\big(x, \mathbf{y}_i(x)\big) - \mathbf{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))\right| \le L|\mathbf{y}_i(x) - \boldsymbol{\varphi}(x)| \le L\max\nolimits_{|x-x_0|\le\delta}(\mathbf{y}_i(x) - \boldsymbol{\varphi}(x))$$

Так как $\mathbf{y}_i(x) \rightrightarrows \boldsymbol{\varphi}(x)$ для $|x - x_0| \le \delta$, то из последней оценки следует, что $\mathbf{f}\big(x, \mathbf{y}_i(x)\big) \rightrightarrows \mathbf{f}\big(x, \boldsymbol{\varphi}(x)\big)$ для $|x - x_0| \le \delta$ и $i \to \infty$. Следовательно

$$\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}\big(x, \mathbf{y}_i(x)\big) \rightrightarrows \int_{x_0}^{x}\mathbf{f}\big(x, \boldsymbol{\varphi}(x)\big).$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$ в равенстве (5) получим

$$\boldsymbol{\varphi}(x) \equiv \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(\zeta, \boldsymbol{\varphi}(\zeta))d\zeta\,, |x - x_0| \le \delta.$$

Это значит, что $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ – решение системы (3) при $|x - x_0| \le \delta$, где $\delta = \min\left(p, \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{M}}\right)$.

Единственность: пусть $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ – решение системы на I_1 и $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Psi}(x)$ – решение системы на I_2, т.е.

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(\zeta, \boldsymbol{\varphi}(\zeta))d\zeta, \forall x \in I_1$$

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \mathbf{f}(\zeta, \boldsymbol{\Psi}(\zeta))d\zeta, \forall x \in I_2$$

Тогда на любом отрезке $[a, b]$ промежутка $I = I_1 \cap I_2$, содержащем x_0, справедлива оценка:

$$|\boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{\Psi}(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} |\mathbf{f}(\zeta, \boldsymbol{\varphi}(\zeta)) - \mathbf{f}(\zeta, \boldsymbol{\Psi}(\zeta))|d\zeta\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x} |\boldsymbol{\varphi}(\zeta) - \boldsymbol{\Psi}(\zeta)|d\zeta\right|.$$

По лемме Гронуолла $|\boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{\Psi}(x)| = \mathbf{0}$, $\forall x \in [a, b]$, т.е. $\boldsymbol{\varphi}(x) \equiv \boldsymbol{\Psi}(x)$ на $[a, b]$. Т.к. $[a, b]$ – любой отрезок I, то $\boldsymbol{\varphi}(x) \equiv \boldsymbol{\Psi}(x)$ на всем промежутке I.

Фактически эта теорема означает, что существует некоторая δ-окрестность, в которой решение задачи Коши для заданных начальных условий существует, и что через каждую точку $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ в некоторой окрестности проходит единственная интегральная кривая.

При помощи этой теоремы доказывается существование и единственность решения задачи Коши для дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения порядка n: рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ (3), где функция $f(x, y_1, \dots, y_n)$ – заданная непрерывная функция в некоторой непустой области $D \supseteq R^{n+1}_{x, y_1, \dots, y_n}$ и начальные условия $y(x_0) = y_1^{(0)}, y'(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^{(0)}$ (4), где $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \in D$. Пусть функция $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывна в области D, удовлетворяет условию Липшица по $y_1, \dots, y_n$ равномерно по x на каждом компакте D и пусть $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \in D$. Тогда

1. Найдется такое число $\delta > 0$,что при $|x - x_0| \le \delta$ решение задачи Коши (3), (4) существует,
2. Решение задачи Коши (3), (4) единственно в том смысле, что если $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x)$ и $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Psi}(x)$ – два какие-либо решения задачи Коши (3), (4), то $\boldsymbol{\varphi}(x) \equiv \boldsymbol{\Psi}(x)$ на пересечении I промежутков определения этих решений ($x_0 \in I$)

Доказательство получается при приведении исходного уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений, для которой теорема о существовании и единственности доказана.

Доказанные теоремы дают информацию о решении задачи Коши в тех случаях, когда нормальная система (1) или уравнение (3) не интегрируются в квадратурах. Примером такой ситуации является уравнение Рикатти. В таких случаях теоремы позволяют применять численные или асимптотические методы, т.к. теоремы показывают существование и единственность решения.

1.5 Общее решение

Пусть дана система (1), (2). Тогда общим решением этой системы называется вектор-функция

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}(x, x_0, \mathbf{y}_0)$$

называется общим решением в форме Коши. Это уравнение содержит два параметра $x_0, \mathbf{y}_0$, имеющих простой геометрический смысл: соответствующая интегральная кривая проходит через точку $(x_0, \mathbf{y}_0)$. Однако понятно, что параметры $x_0, \mathbf{y}_0$ не являются независимыми, например $\mathbf{y}_0 = \mathbf{\Phi}(x,\ x_0, \mathbf{y}_0)$. Различные значения параметров могут давать одну и ту же интегральную кривую уравнения при смещении точки $(x_0, \mathbf{y}_0)$ по фиксированной интегральной кривой. Если можно установить зависимость между x_0 и $\mathbf{y}_0$ вида $x_0 = x_0(t)$ и $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0(t)$ такую, что точка $(x_0, \mathbf{y}_0)$ пробегает все интегральные кривые, то общее решение в форме Коши становится функцией только одного параметра t:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}(x, t)$$

Непрерывная функция $\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}(x, C)$, где C – параметр, называется общим решением уравнения (1) в некоторой области $D_0 \subseteq D$, если для $\forall (x_0, y_0) \in D_0$ уравнение $\mathbf{y}_0 = \mathbf{\Phi}(x_0, C)$ имеет единственное решение $C_0 = C_0(x_0, \mathbf{y}_0)$ и функция $\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}(x, \boldsymbol{C}_0)$, является непродолжимым решением задачи Коши (1) (2) в D0.

Если x_0, $\mathbf{y}_0$ связаны зависимостью $x_0 = x_0(t)$ и $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0(t)$, удовлетворяющей выше сформулированным требованиям, то общее решение в форме Коши при $t = C$ становится общим решением уравнения.

Существование общего решения для произвольных уравнений $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ можно гарантировать лишь локально, т.е. в некоторой окрестности точки $(x_0, \mathbf{y}_0)$. Локальное существование такого решения гарантируется условием Липшица.

1.6 Зависимость решения задачи Коши для нормальной системы от параметров

Рассмотрим решение задачи Коши для нормальной системы

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0} \quad (6)$$

где $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ – заданная вектор-функция с n компонентами в области $D \subseteq R^{n+1}_{(x,y)}$, а начальная точка $(x_0, \mathbf{y}_0)$ принадлежит некоторому шару $S_r \subset D$ радиуса $r > 0$:

$$S_r = \{(x_0, \mathbf{y}_0) \in D : |x_0 - \widehat{x_0}|^2 + |\mathbf{y_0} - \widehat{\mathbf{y}_0}|^2 \leq r^2\}$$

Теорема о зависимости решения задачи Коши для нормальной системы от начальных условий: если $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ непрерывна в области D и удовлетворяет в D условию Липшица по y равномерно по x, то найдется число $\delta>0$ такое, что решение $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x,x_0,\mathbf{y}_0)$ задачи Коши (6) является непрерывной функцией $x,x_0,\mathbf{y}_0$ при $|x-x_0| \le \delta$, $(x_0,\mathbf{y}_0) \in S_r$.

Доказательство: при замене переменных $x - x_0 = t, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \mathbf{z}$ задача Коши переходит в эквивалентную задачу Коши

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(x_0 + t, \mathbf{y}_0 + \mathbf{z}) \equiv \mathbf{F}(t,\mathbf{z},x_0,\mathbf{y}_0), \qquad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}(0) = \mathbf{0} \quad (13)$$

В данной задаче параметры $x_0, \mathbf{y}_0$ уже входят в правую часть системы. Из условий теоремы следует, что $\mathbf{F}$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по $\mathbf{z}$ равномерно по $t, x_0, \mathbf{y}_0$ при всех $(t,\mathbf{z}) \in \widetilde{D}$ ($\widetilde{D}$ – область, полученная из области D при замене переменных) и всех $(x_0,\mathbf{y}_0) \in S_r$. Дальнейшая схема доказательства повторяет схему доказательства существования решения задачи Коши для нормальных систем. Поэтому остановимся лишь на основных моментах доказательства.

По лемме об эквивалентности задача Коши (13) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\mathbf{z}(t,x_0,\mathbf{y}_0) = \int_0^t \mathbf{F}(\zeta,\mathbf{z}(\zeta,x_0,\mathbf{y}_0),x_0,\mathbf{y}_0)d\zeta$$

Так как $(0,\mathbf{0}) \in \widetilde{D}$ и $\widetilde{D}$ – область, то найдутся такие числа $p > 0$ и $q > 0$, что цилиндр

$$\widetilde{D}_{pq} = \{(t,\mathbf{z}) \in \widetilde{D}: |t| \le p, |\mathbf{z}| \le q\}$$

лежит в $\widetilde{D}$. Поскольку $\widetilde{D}_{pq}$ – компакт, то $\exists$ число $M > 0$ такое, что

$$|\mathbf{F}(t,\mathbf{z},x_0,\mathbf{y}_0)| \le M, \forall (t,\mathbf{z}) \in \widetilde{D}_{pq}, \forall (x_0,\mathbf{y}_0) \in S_r.$$

По условию Липшица

$$|\mathbf{F}(t,\mathbf{z_1},x_0,\mathbf{y}_0) - \mathbf{F}(t,\mathbf{z_2},x_0,\mathbf{y}_0)| \le L|\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}|,$$
$$\forall (t,\mathbf{z_1}),(t,\mathbf{z_2}) \in \widetilde{D}, \forall (x_0,\mathbf{y}_0) \in S_r$$

Возьмем $\delta = \min\left(p, \frac{q}{M}\right)$ и при $t \le \delta$, $(x_0,\mathbf{y}_0) \in S_r$ рассмотрим последовательные приближения

$$\mathbf{z}(t,x_0,\mathbf{y}_0) = 0, \qquad \mathbf{z}_{i+1}(t,x_0,\mathbf{y}_0) = \int_0^t \mathbf{F}(\zeta,\mathbf{z}_i(\zeta,x_0,\mathbf{y}_0),x_0,\mathbf{y}_0)d\zeta\,, i = 0,1,2,\ldots$$

Как и при доказательстве существования решения задачи Коши, аналогично устанавливается, что все последовательные приближения $\mathbf{z}_i(t,x_0,\mathbf{y}_0)$ непрерывны при $t \le \delta$, $(x_0,\mathbf{y}_0) \in S_r$ и их графики полностью лежат в области, для которой $(t,\mathbf{z}) \in \widetilde{D}_{pq}$, $(x_0,\mathbf{y}_0) \in S_r$. При помощи метода математической индукции аналогично устанавливается оценка

$$|\mathbf{z}_{i+1}(t,x_0,\mathbf{y}_0) - \mathbf{z}_i(t,x_0,\mathbf{y}_0)| \le ML\frac{|t|^{i+1}}{(i+1)!}, i = 0,1,2,\ldots$$

Из признака Вейерштрасса тогда следует, что при $|t| \le \delta$, $(x_0,\mathbf{y}_0) \in S_r$

$$\mathbf{z}_i(t, x_0, \mathbf{y}_0) \rightrightarrows \mathbf{\Psi}(t, x_0, \mathbf{y}_0), i \to \infty.$$

Аналогично, $\mathbf{z}(t, x_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{\Psi}(t, x_0, \mathbf{y}_0)$ является непрерывной функцией при $|t| \leq \delta, (x_0, \mathbf{y}_0) \in S_r$, будучи суммой сходящегося ряда непрерывных при $|t| \leq \delta, (x_0, \mathbf{y}_0) \in S_r$ функций.

Повторяя приведенные в доказательстве теоремы о существовании решения задачи Коши для нормальной системы, получаем, что $\mathbf{z}(t, x_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{\Psi}(t, x_0, \mathbf{y}_0)$ является решением задачи Коши при $|t| \leq \delta, (x_0, \mathbf{y}_0) \in S_r$. Следовательно, решение изначально поставленной задачи (6) принимает вид

$$\boldsymbol{\varphi}(x, x_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{\Psi}(x - x_0, x_0, \mathbf{y}_0) \equiv \mathbf{y}_0 + \mathbf{\Psi}(x, x_0, \mathbf{y}_0),$$

исходя из чего можно сделать вывод, что $\boldsymbol{\varphi}(x, x_0, \mathbf{y}_0)$ – непрерывная функция $x, x_0, \mathbf{y}_0$ при $|x - x_0| \leq \delta$ и $(x_0, \mathbf{y}_0) \in S_r$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. - 10-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2014. - 256 с. : ил.

Карпук, А. А. Высшая математика для технических университетов : дифференциальные уравнения / А. А. Карпук, В. Ф. Бондаренко, О. Ф. Борисенко. - Минск : Харвест, 2010. - 304 с.

Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления : учебное пособие / В. К. Романко. - 2-е изд. - М. : Физматлит, 2001. - 344 с.

Карташёв, А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления : учебное пособие для вузов / А. П. Карташёв, Б. Л. Рождественский. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1986. - 272 с. : ил.

Богданов Ю. С. Дифференциальные уравнения : учебное пособие для факультетов прикладной математики и механико-математических факультетов вузов / Ю. С. Богданов, Ю. Б. Сыроид. - Минск : Вышэйшая школа, 1983. - 239 с. : ил.

Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие [доп. МО СССР] / Л. С. Понтрягин. - 5-е изд. - М. : Наука, 1982. - 332 с.

Нефёдов Н. Н. Дифференциальные уравнения – Задача Коши для нормальной системы ОДУ. ДУ n-го порядка [электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=CSENh4N1rqQ&ab_channel=teach-in

Метод последовательных приближений [электронный ресурс].– Режим доступа: https://matica.org.ua/metodichki-i-knigi-po-matematike/differentcialnye-uravneniia-pervogo-poriadka/3-6-metod-posledovatelnykh-priblizhenii

§ 2.3. Теорема Коши – Пикара [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/ode_unicode/m-23/m-23.html