1.2. Разностная краевая задача

Рассмотрим задачу вида:

$$\begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = f_k \ , \qquad k = \overline{1, n-1}\,, \\ U_0 = \varphi, \qquad U_k = \psi,. \end{cases} \tag{6.7}$$

называемую разностной краевой задачей (РКЗ).

Данную задачу можно коротко переписать в виде

$$\begin{cases} LU_k = f_k\,, \qquad k = \overline{1, n-1}\,, \\ \quad U_0 = \varphi, \qquad U_k = \psi\,, \end{cases}$$

где линейный разностный оператор LU_k или $L(U_k)$ имеет вид

$$LU_k = a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1}\,.$$

Пример 1. Найти решение РКЗ $U_{k-1} - U_k + U_{k+1} = 0, \qquad k = 1,\ldots,299$,

где $U_0 = 0$, $U_{300} = 1$.

Запишем характеристическое уравнение $1 - q + q^2 = 0$. Отсюда

$q = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, и общее решение разностного уравнения имеет вид:

$$U_k = \alpha \cos\frac{k\pi}{3} + \beta \sin\frac{k\pi}{3}\,.$$

Подставляя значения U_0 и U_n, получаем $\alpha = 0$, $\beta = 1$. То есть рассматриваемая краевая задача не имеет решения.

Возьмем другие граничные условия

$U_0 = 0$, $U_{300} = 0$.

Решая задачу с данными условиями, получим, что решений бесконечно много.

То есть в отличие от задачи Коши для разностного уравнения, в случае РКЗ возникают проблемы:

1) существования решения;

2) единственности решения.

Выделим класс задач РКЗ, которые эффективно решаются.

Пусть $|a_k|$, $|b_k|$, $|c_k| < K$, где $K = const > 0$.

Задачу РКЗ будем называть *хорошо обусловленной*, если она имеет решение, причем единственное, при любых значениях φ, ψ, f_k, и, кроме того, это решение $\{U_k\}$ удовлетворяет соотношению:

$$|U_k| \le M \max\{|\varphi|, \quad |\psi|, \quad \max_i |f_i|\}, \tag{6.8}$$

где $M = const$, не зависящая от n.

Покажем, что условие (8) фактически означает слабую чувствительность задачи к ошибкам в граничных условиях и в правой части.

Рассмотрим возмущенную задачу:

$$\begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = f_k + \Delta f_k \\ U_0 = \varphi + \Delta\varphi, U_n = \psi + \Delta\psi. \end{cases}$$

Возмущенное решение имеет вид $U_k + \Delta U_k$, где ΔU_k − ошибка решения.

Оценим ΔU_k:

$$L\ (U_k + \Delta U_k) = f_k + \Delta f_k,$$

$$L\ (U_k) + L(\Delta U_k) = f_k + \Delta f_k.$$

Тогда

$$\begin{cases} L(\Delta U_k) = \Delta f_k, \\ \Delta U_0 = \Delta\varphi,\ \ \Delta U_n = \Delta\psi. \end{cases}$$

Из условия (6.8) получаем оценку:

$$|\Delta U_k| \le M\ \max\{|\Delta\varphi|,\quad |\Delta\psi|,\quad \max_i |\Delta f_i|\}.$$

Следовательно, ошибка в решении ограничена последним соотношением и при уменьшении шага ошибка не увеличивается. Растет лишь число узлов.

Сформулируем теперь достаточный признак хорошей обусловленности.

Теорема1 (достаточный признак хорошей обусловленности). Пусть выполнимо следующее условие:

$$|b_k| \ge |a_k| + |c_k| + \delta, \qquad \delta > 0. \tag{6.9}$$

Тогда задача РКЗ (6.3) хорошо обусловлена, а условие (8) имеет следующий вид:

$$|U_k| \le \max\{|\varphi|,\quad |\psi|,\quad \frac{1}{\delta}\max_i |f_i|\}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Докажем сначалда, что если РКЗ имеет решение, то это решение удовлетворяет (6.10). Пусть есть некоторое решение U_k и пусть

$\max\limits_k |U_k| = |U_m|$.

Возможны следующие ситуации:

1) $m=0$ или $m=n$. Тогда (6.10) − тривиально выполняются.

2) $0< m < n$. Тогда

$$b_m U_m = -a_m U_{m-1} - c_m U_{m+1} + f_m ,$$

следовательно

$$|b_m| \cdot |U_m| = |b_m U_m| = |-a_m U_{m-1} - c_m U_{m+1} + f_m| \le |a_m| \cdot |U_m| + |c_m||U_m| + |f_m| .$$

Поскольку

$$|U_{m-1}| \le |U_m| ,\ |U_{m+1}| \le |U_m| ,$$

то, принимая во внимание (6.9), получаем

$$|U_m| \le \frac{|f_m|}{|b_m| - |a_m| - |c_m|} \le \frac{|f_m|}{\delta} .$$

То есть $|U_k| \le |U_m| \le \dfrac{1}{\delta} \max\limits_k |f_k|$ для всех $k = \overline{0,n}$. Следовательно, соотношение (6.10) справедливо.

Теперь покажем, что решение задачи РКЗ (6.9) существует и единственно.

При $k = \overline{0,n}$ задача РКЗ сводится к неоднородной линейной системе из $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестным. Она имеет единственное решение и то, тогда и только тогда, если соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. Соответствующая однородная система имеет вид:

$$\begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = 0 \\ U_0 = 0, \qquad U_n = 0. \end{cases}$$

Тогда по условию (6.10) для этой системы $|U_k| \le 0$. Значит, $U_k \equiv 0$.

То есть однородная система имеет только нулевое решение, и, значит, РКЗ имеет единственное решение.

Теорема доказана.

Теорема 2 (критерий хорошей обусловленности). Пусть $a_k = a, \quad b_k = b, \quad c_k = c$. Тогда задача является хорошо обусловленной тогда и только тогда, когда корни $q_1, \ q_2$ характеристического уравнения удовлетворяют условиям $|q_1| < 1, \ |q_2| > 1$.