> #Лабораторная работа #1

#Операции с математическими выражениями и функциями в Maple

#Задание 1
#Упростить выражение(разделить две алгебраические дроби)

> $$expr := \frac{\frac{9(x)^5 + 36x^4 + 9x^3 - 90x^2 - 36x + 72}{x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4}}{\frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^3 + 3x^2 - 4x}};$$
$simplify\_expr := simplify(expr);$

$$expr := \frac{(9x^5 + 36x^4 + 9x^3 - 90x^2 - 36x + 72)(x^3 + 3x^2 - 4x)}{(x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4)(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)}$$

$$simplify\_expr := 9x \qquad \textbf{(1)}$$

> $sub\_expr\_1 := (9x^5 + 36x^4 + 9x^3 - 90x^2 - 36x + 72);$
$sub\_expr\_2 := (x^3 + 3x^2 - 4x);$
$sub\_expr\_3 := (x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4);$
$sub\_expr\_4 := (x^3 + 6x^2 + 12x + 8);$

$$9(x-1)^2(x+2)^3 \qquad \textbf{(2)}$$

> $factor\_sub\_expr\_1 := factor(sub\_expr\_1);$
$factor\_sub\_expr\_2 := factor(sub\_expr\_2);$
$factor\_sub\_expr\_3 := factor(sub\_expr\_3);$
$factor\_sub\_expr\_4 := factor(sub\_expr\_4);$
$$factor\_expr := \frac{factor\_sub\_expr\_1 \cdot factor\_sub\_expr\_2}{factor\_sub\_expr\_3 \cdot factor\_sub\_expr\_4}$$

$$factor\_sub\_expr\_1 := 9(x-1)^2(x+2)^3$$
$$factor\_sub\_expr\_2 := x(x+4)(x-1)$$
$$factor\_sub\_expr\_3 := (x+4)(x-1)^3$$
$$factor\_sub\_expr\_4 := (x+2)^3$$
$$factor\_expr := 9x \qquad \textbf{(3)}$$

> #Задание 2
#Приведите выражение к многочлену стандартного вида

> $expand((5x-4)\cdot(3x^2+2)\cdot(4x+1));$

$$60x^4 - 33x^3 + 28x^2 - 22x - 8 \qquad \textbf{(4)}$$

> $factor(60x^4 - 33x^3 + 28x^2 - 22x - 8);$

$$(5x-4)(3x^2+2)(4x+1) \qquad \textbf{(5)}$$

> #Задание 3

> #Разложить многочлен на множители

> $factor(6x^4 + 23x^3 - 9x^2 - 92x - 60);$

$$(6x+5)(x-2)(x+3)(x+2) \tag{6}$$

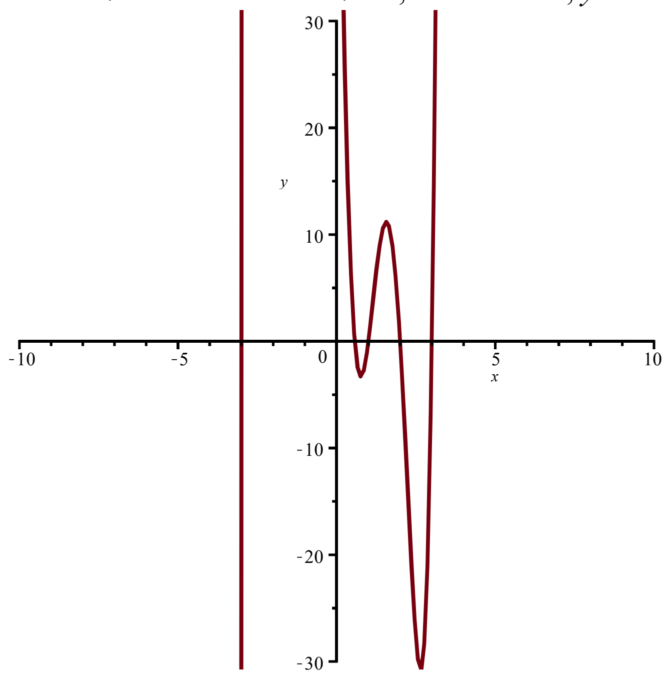
> $expand((6x+5)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x+2));$

$$6x^4 + 23x^3 - 9x^2 - 92x - 60 \tag{7}$$

> *#Задание 4*

> *# Постройте график многочлена $P_5(x)$ и найдите все его корни.*

> $plot(7x^5 - 25x^4 - 37x^3 + 217x^2 - 234x + 72, x = -10..10, y = -30..30);$



> $solve(7x^5 - 25x^4 - 37x^3 + 217x^2 - 234x + 72 = 0);$

$$1, 2, 3, -3, \frac{4}{7} \tag{8}$$

> $fsolve(7x^5 - 25x^4 - 37x^3 + 217x^2 - 234x + 72 = 0);$

$$-3., 0.5714285714, 1., 2., 3. \tag{9}$$

> *#Задание 5*
#Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей

> $convert\left(\dfrac{3x^4 + 7x^3 + 2x - 4}{(x^2+1)\cdot(x-4)^2\cdot(x^2-9)}, parfrac\right);$

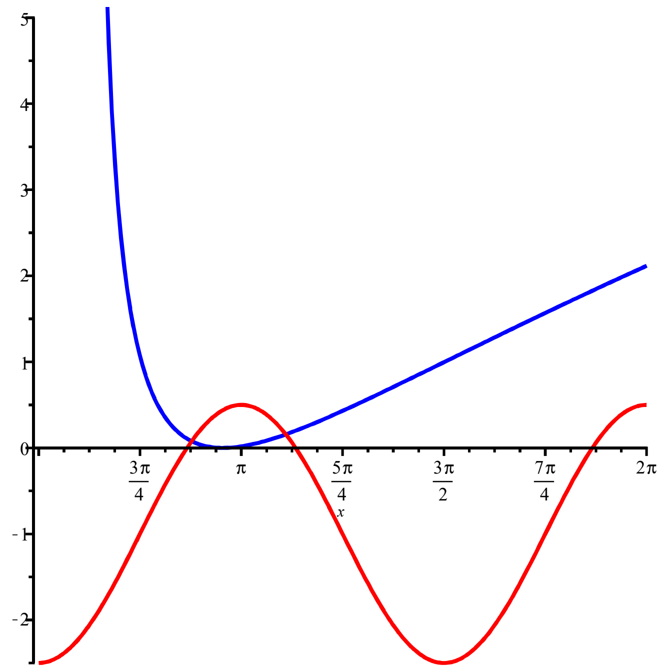
$$\frac{217}{30(x-3)} - \frac{11}{735(x+3)} + \frac{83x - 25}{2890(x^2+1)} + \frac{1220}{119(x-4)^2} - \frac{102626}{14161(x-4)} \tag{10}$$

> *#Задание 6*
#Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10^{-5}

> $ln\_plot := plot\left(\ln^2(x-2), x = \dfrac{\mathrm{Pi}}{2} .. 2\cdot\mathrm{Pi}, color = blue\right):$

$cos\_plot := plot\left(1.5\cos(2x) - 1, x = \dfrac{\mathrm{Pi}}{2} .. 2\cdot\mathrm{Pi}, color = red\right):$

> $display([ln\_plot, cos\_plot]);$



> $evalf\left(fsolve\left(\ln^2(x-2) = 1.5\cos(2x) - 1, x = \frac{3\pi}{4}..\pi\right), 6\right);$
$evalf\left(fsolve\left(\ln^2(x-2) = 1.5\cos(2x) - 1, x = \pi..\frac{5\pi}{4}\right), 6\right);$

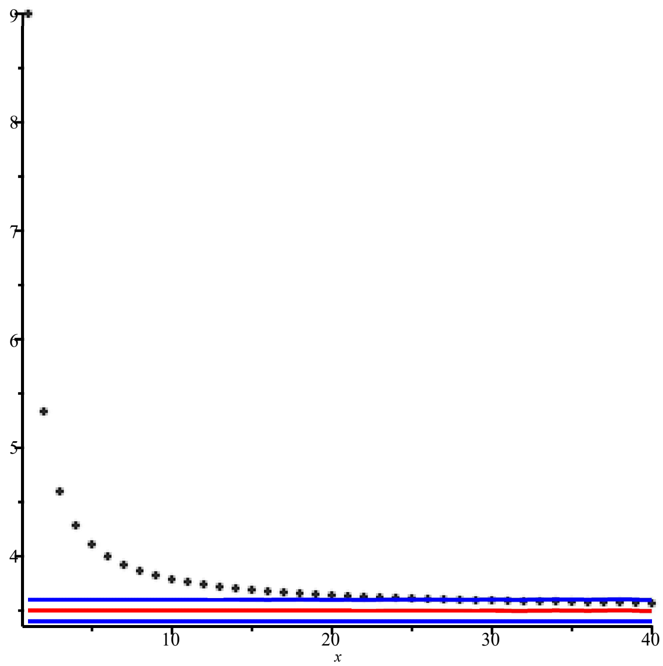
$$2.75692$$
$$3.48646 \tag{11}$$

> *#Задание 7*
#Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ *, определив номер* n_ε,
начиная с *которого все члены последовательности·* (a_n) *попадут* в ε
— *окрестность точки* a
. *Проиллюстрируйте полученный результат* с *помощью чертежа* в *Maple, положив* ε
= 0, 1

> $a\_n := \frac{7n+2}{2n-1}:$
$a := \frac{7}{2}:$
$e := 0.1:$

> $solve(a\_n < a + e)$
$$(-\infty, 0.5000000000), (28., \infty) \tag{12}$$

> $y1 := plots[pointplot](\{seq([n, a\_n], n = 1..40)\}):$
$y2 := plot([a - 0.1, a, a + 0.1], x = 1..40, color = [blue, red, blue]):$
$plots[display](y1, y2);$



> *#Задание 8*
> *#Вычислите пределы числовых последовательностей*

> $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$

$$\frac{3}{2} \tag{13}$$

> $limit\left(\left(\frac{(n^2-6n+5)}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}, n=\text{infinity}\right)$

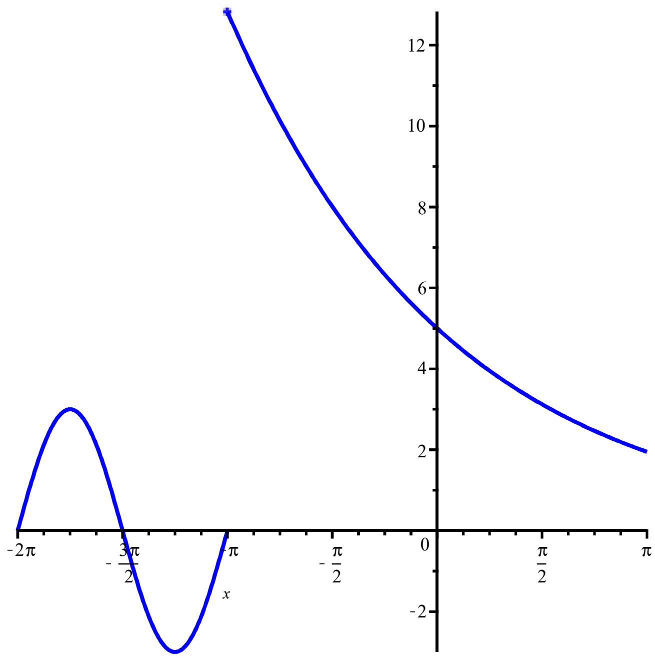
$$e^{-3} \tag{14}$$

> *#Задание 9*
> *# Для заданной кусочно −непрерывной функции выполните следующие действия:*
> *#1. Определите ее через функциональный оператор и постройте график.*
> *#2. В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.*
> *#3. Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.*
> *#4. Постройте в одной системе координат графики функции, производной*
> *#и какой −нибудь первообразной.*
> *#5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком*
> *#функции и прямыми*
> *# x = 1, x = 5, y = 0. Сделайте чертеж.*

> *#1)*
> $func := x \rightarrow piecewise\left(x \geq -\mathrm{Pi}, 5\cdot e^{-0.3\,x}, x < \mathrm{Pi}, 3\cdot\sin(2\,x)\right)$:
> $func(x)$;

$$\begin{cases} 5\,e^{-0.3\,x} & -\pi \leq x \\ 3\sin(2\,x) & x < \pi \end{cases} \tag{15}$$

> $plot(func(x), x=-2\,\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}, discont=true, color=blue)$;



> #2)
limit(func(x), x = -Pi, left);
limit(func(x), x = -Pi, right);
limit(func(x), x = -infinity);
limit(func(x), x = infinity);

$$0.$$
$$12.83166198$$
$$-3. ..3.$$
$$0. \qquad (16)$$

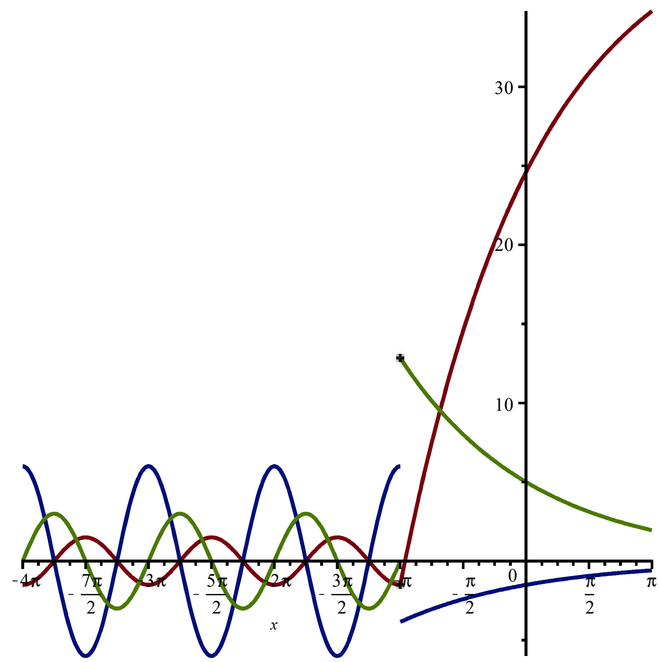
> f_int := int(func(x), x) :
evalf(f_int, 5);

$$\begin{cases} -1.5000\cos(2.\,x) & x \leq -3.1416 \\ -16.667\,\mathrm{e}^{-0.30000\,x} + 41.272 & -3.1416 < x \end{cases} \qquad (17)$$

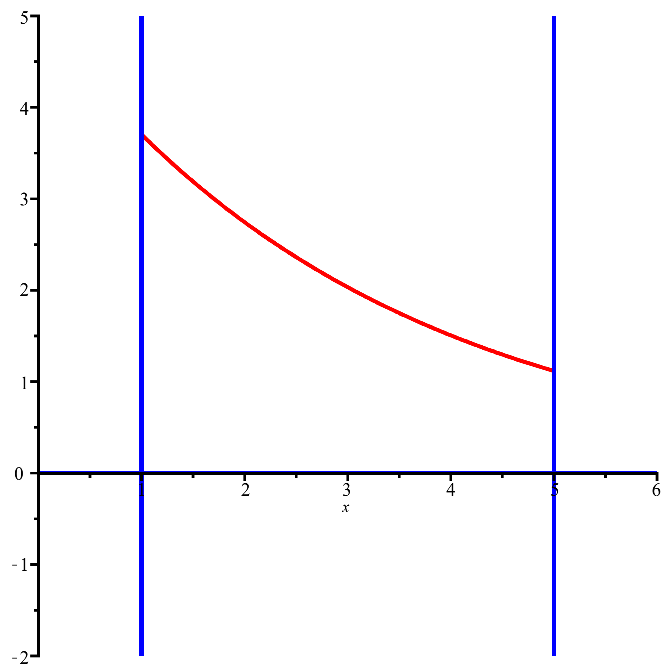
> f_diff := diff(func(x), x) :
evalf(f_diff, 5);

$$\begin{cases} 6.\cos(2.\,x) & x < -3.1416 \\ \mathrm{Float}(\mathrm{undefined}) & x = -3.1416 \\ -1.5000\,\mathrm{e}^{-0.30000\,x} & -3.1416 < x \end{cases} \qquad (18)$$

> plot([int(func(x), x), diff(func(x), x), func(x)], discont = true, x = -4 Pi ..Pi, legend = [ ]);



> $p1ot1 := plot(\,func(x), discont = true, x = 1 ..5, color = red)$:
$plot2 := plot([\,[\,[1,-2], [1, 5]], [\,[5,-2], [5, 5]], 0], x = 0 ..6, y = -2 ..5, color = blue)$:
$plots[display](plot1, plot2)$;
$result\ := convert(int(\,func(x), x = 1 ..5\,), rational)$;



$$result := \frac{75013}{8694} \qquad \textbf{(19)}$$

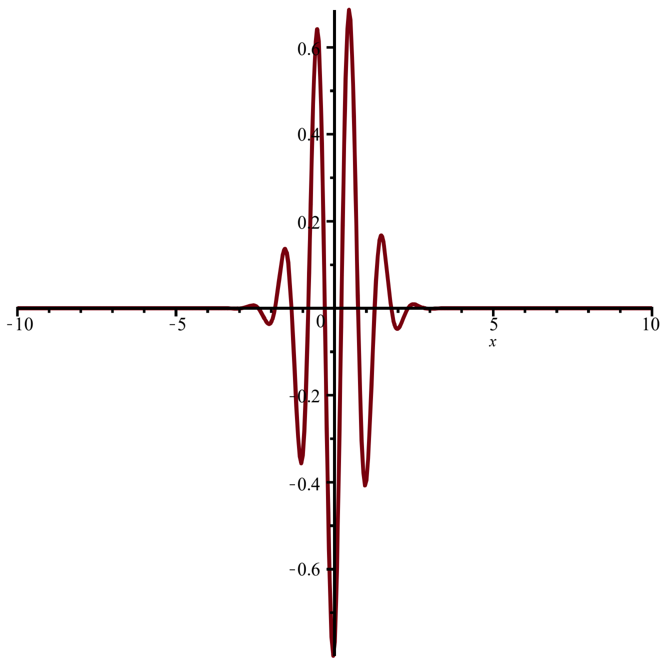
> #Задание 10
#1. Постройте кривые на плоскости. Для кривой 2-го порядка
#2. Найдите каноническое уравнение с помощью ортогонального преобразования

> #1)

$f1 := 0.8\,\exp^{-0.7\,x}\sin(6\,x+5);$

$$f1 := 0.8\,\exp^{-0.7\,x}\sin(6\,x+5)$$
$$f2 := 4\,x^2 + y^2 + 16\,x + 4\,xy + 8\,y + 15$$
$$f3\_x = 2\cos(t) + 2\,t\sin(t)$$
$$f3\_y := 2\sin(t) - 2\,t\cos(t)$$
$$f4 := 1 - 2\sin\left(3\,\phi + \frac{\pi}{4}\right) \tag{20}$$

> $plot(f1(x));$

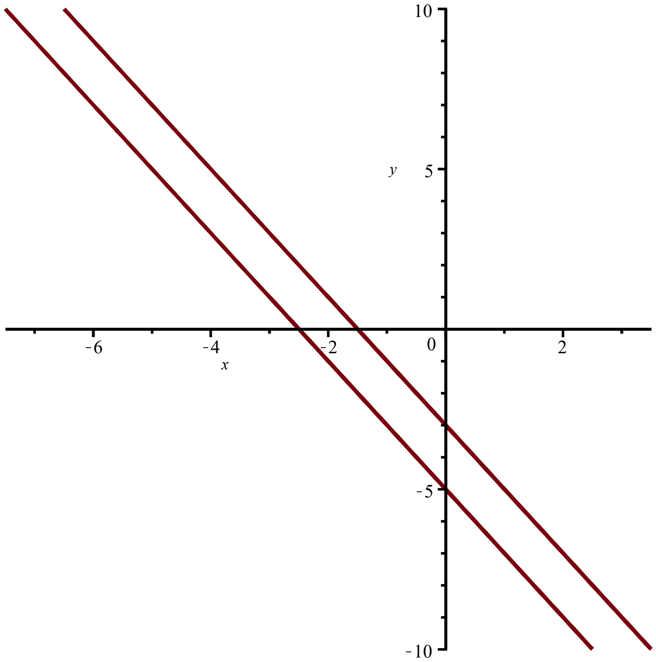


> *#Используем функцию implicitplot из пакета plots для построения графика неявно заданной функции, задав диапазоны значений переменных x и y*

$f2 := 4\,x^2 + 4\,x\cdot y + y^2 + 16\,x + 8\,y + 15;$

$plots[implicitplot](f2 = 0, x = -10..10, y = -10..10);$

$$f2 := 4\,x^2 + 4\,x\,y + y^2 + 16\,x + 8\,y + 15$$

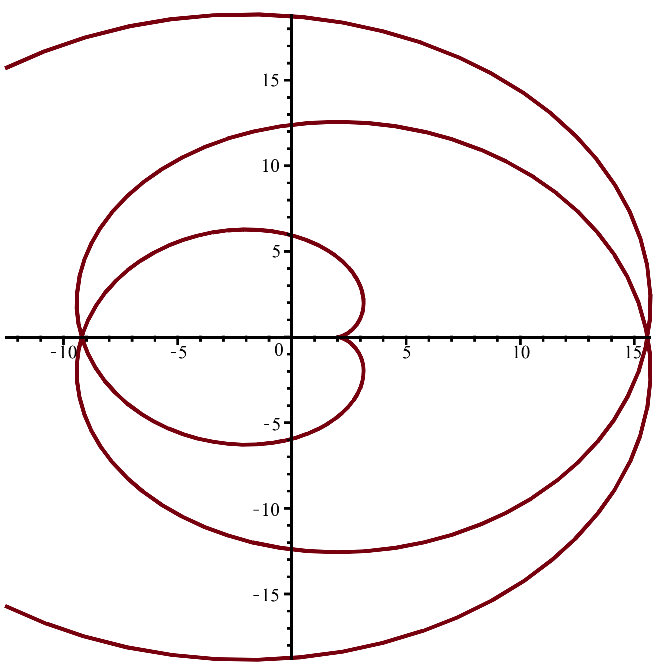


> *#Определили параметрическую функцию $f3\_x(t)$ и $f3\_y(t)$. Затем выведем график, создав список точек, вычислив значения x и y для диапазона значений параметра t*

$f3\_x := t \to 2(\cos(t) + t\cdot\sin(t));$
$f3\_y := t \to 2(\sin(t) - t\cdot\cos(t));$
$plot([f3\_x(t), f3\_y(t),\ t = -10..10]);$

$$f3\_x := t \mapsto 2\cdot\cos(t) + 2\cdot t\cdot\sin(t)$$

$$f3\_y := t \mapsto 2\cdot\sin(t) - 2\cdot t\cdot\cos(t)$$

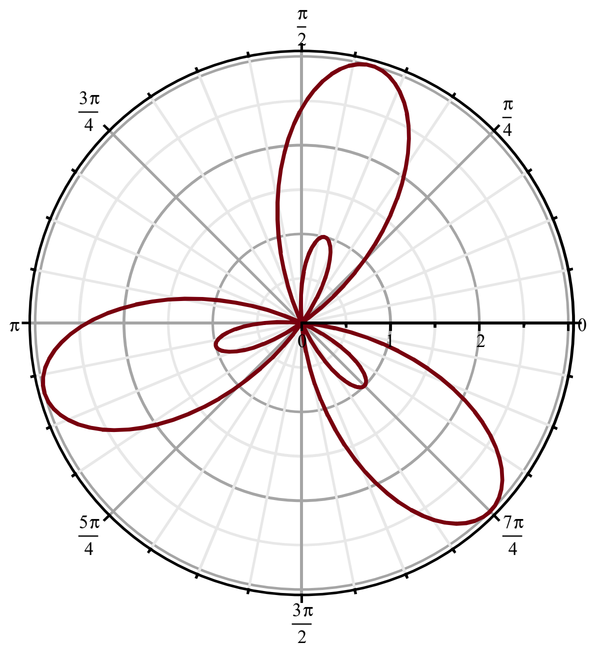


> *#Используем функцию implicitplot из пакета plots для построения графика в полярных координатах.*

$f4 := 1\ -2\ \sin\left(3\ t + \frac{\text{Pi}}{4}\right);$

$plots[polarplot](f4, t = 0 ..2 \text{Pi})$;

$$f4 := 1 - 2\sin\left(3\,t + \frac{\pi}{4}\right)$$



> *#2)*
#Построим матрицу коэффециентов квадратичной формы

with(*plots*) :
with(*LinearAlgebra*) :

$M := Matrix([[4, 2], [2, 1]]);$

$$M := \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(21)}$$

> *#Найдём собственные векторы этой матрицы*
$v := LinearAlgebra[Eigenvectors](M)$;

$$v := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(22)}$$

> *#Нормализуем полученные векторы*
$v1 := Normalize(Column(v[2], [1]), Euclidean);$
$v2 := Normalize(Column(v[2], [2]), Euclidean);$

$$v1 := \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(23)}$$

> #При помощи нормализованных собственных векторов получим значения новых x и y для подстановки
> #x1 = v1[2]·x2 + v2[1]·y2;
> #y1=v1[2]·x2 + v2[2]·y2;
> $subs\left(x1 = v1[1]\cdot x2 + v2[1]\cdot y2,\ y1 = v1[2]\cdot x2 + v2[2]\cdot y2,\ 4\cdot x1^2 + 4\cdot x1\cdot y1 + y1^2 + 16\cdot x1 + 8\cdot y1 + 15\right);$
> $expr := simplify(\%);$

$$4\left(\frac{2\,x2\sqrt{5}}{5} - \frac{y2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{2\,x2\sqrt{5}}{5} - \frac{y2\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{x2\sqrt{5}}{5} + \frac{2\,y2\sqrt{5}}{5}\right) + \left(\frac{x2\sqrt{5}}{5} + \frac{2\,y2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 8\,x2\sqrt{5} + 15$$

$$expr := 5\,x2^2 + 8\,x2\sqrt{5} + 15 \qquad \textbf{(24)}$$

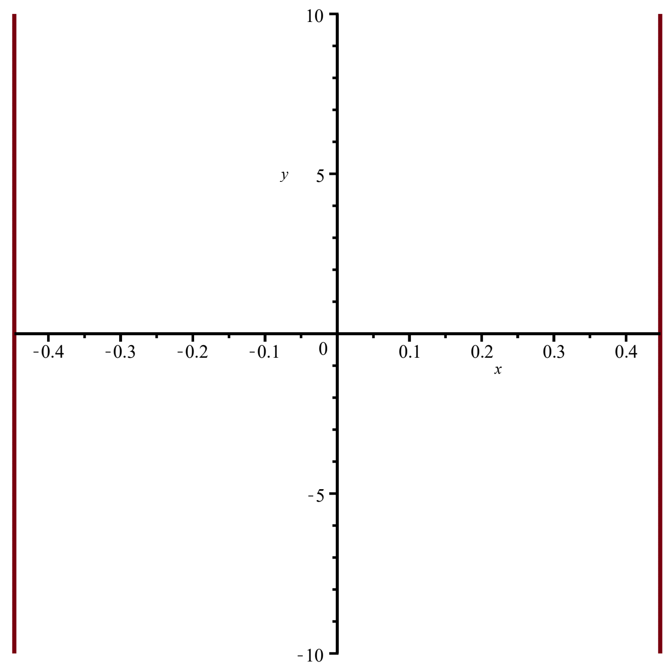
> #Выделим из этого выражения полный квадрат
> $sq\_expr := Student[Precalculus][CompleteSquare](expr);$

$$sq\_expr := 5\left(x2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 \qquad \textbf{(25)}$$

> #Приведём полученное выражение к каноническому виду
> $can\_expr := subs\left(x2 = x - \frac{4\sqrt{5}}{5}, sq\_expr\right);$

$$can\_expr := 5\,x^2 - 1 \qquad \textbf{(26)}$$

> #Изобразим график полученного уравнения
>
> $plots[implicitplot](can\_expr, x = -10..10, y = -10..10);$



10
y
5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
x
-5
-10