1.3 Методы решения РКЗ

1.3.1 Метод прогонки.

Так как РКЗ представляет собой линейную трехдиагональную систему из *(n+1)* уравнений с *(n+1)* неизвестными, то для ее решения можно применить метод прогонки. Он обладает рядом преимуществ.

Достоинства:

а) число арифметических операций при использовании данного метода составляет *O(n)*, т. е. не превосходит *Kn* , где *K= const* .

б) при выполнении условия преобладания диагональных элементов $|b_k| \geq |a_k| + |c_k| + \delta$ метод прогонки оказывается слабо чувствительным к ошибкам вычислений: вычислительная погрешность не накапливается с ростом числа узлов *n*.

1.3.2. Метод стрельбы.

Рассмотрим РКЗ:

$$\begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = f_k, \quad k = 0,\dots,n \\ U_0 = \varphi, \qquad U_n = \psi \end{cases}$$

Вначале находим частное решение, решая задачу Коши с начальными условиями:

$$U_0 = \varphi, \qquad U_1 = 0, \qquad \Rightarrow \left\{ U_k^{(1)} \right\}.$$

Затем находим второе частное решение

$$U_0 = \varphi, \qquad U_1 = 1, \qquad \Rightarrow \left\{ U_k^{(2)} \right\}.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} \varphi & 0 \\ \varphi & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

общее решение можно записать в виде линейной комбинации этих двух частных решений

$$U_k = \sigma U_k^{(1)} + (1-\sigma) U_k^{(2)}.$$

Нужно выбрать σ так, чтобы выполнялись граничные условия:

$$U_n = \sigma U_k^{(1)} + (1-\sigma) U_k^{(2)} = \psi .$$

Отсюда: $\sigma = \dfrac{\psi - U_k^{(2)}}{U_k^{(1)} - U_k^{(2)}}$.

Достоинством метода стрельбы является его исключительная простота.

Однако он очень неустойчив. Приведем пример.

Пример 2. Рассмотрим РКЗ

$$\begin{cases} 5U_{k-1} - 26U_k + 5U_{k+1} = 0 \\ U_0 = \varphi, \quad U_n = \psi \end{cases}.$$

Данная РКЗ хорошо обусловлена. Это легко проверить, используя критерий хорошей обусловленности. Хорошая обусловленность означает устойчивость к ошибкам в правой части и начальных условиях.

Однако уже при вычислении *1-σ* появляется ошибка округления *ε*. Можно показать, что данная ошибка имеет экспоненциальный рост при уменьшении шага *h*, именно $\Delta U_n \sim 5^n \cdot \varepsilon$.

Отсюда видно, что уменьшение шага вычисления не дает положительного результата в виду роста ошибок. То есть, фактически метод стрельбы вследствие его неустойчивости не может иметь широкого применения.