1.4. Порядок аппроксимации разностной схемы

Рассмотрим РКЗ

$$L_h U^{(h)} = f^{(h)}, \qquad (6.13)$$

где

$$L_h U^{(h)} = \begin{cases} a_{k-1}U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k-1}, \ \ k = \overline{1, n-1} \\ U_0, \\ U_n, \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} f_k, \ \ k = \overline{1, n-1} \\ \varphi, \ \ k = 0 \\ \psi, \ \ k = n. \end{cases}$$

Предположим она имеет единственное решение и ее решением является сеточная функция $U^{(h)}$.

Пусть сеточная функция $[U]_h$ построена из значений решения $U(x)$ ДКЗ в узлах сетки. Поставим ее в уравнение (6.13) и получим:

$$L_h[U]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}.$$

Величину $\delta f^{(h)}$ называют невязкой.

Введем F_h − пространство обобщенных правых частей или пространство невязок, элементами которого являются $f^{(h)}$ и $\delta f^{(h)}$.

Введем норму в пространстве F_h следующим способом:

$$\left\| f^{(h)} \right\|_{F_h} = \left\| f^{(h)} \right\| = \max\{|\varphi|, |\psi|, \max_k |f_k|\}.$$

Отметим, что, как и в случае пространства U_h, существует широкий выбор возможной нормы в пространстве невязок, отличный от введенного выше определения нормы.

Определение 2. Будем говорить, что разностная схема (6.13) *аппроксимирует ДКЗ* на решении *U(x)* с порядком h^m, если выполняется следующее условие:

$\left\|\delta f^{(h)}\right\| \le Ch^m$, где *C* не зависит от *h*.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальную краевую задача

$$\begin{cases} U' + AU = 0 \\ U(0) = b, \end{cases} \quad x \in [0,1].$$

Легко проверить, что ее решением является функция $U(x) = be^{-Ax}$**.**
Рассмотрим несколько разностных схем, аппроксимирующих данную задачу.
а) Рассмотрим разностную схему, построенную на аппроксимации производной:

$$U'(x) \approx \frac{U(x+h) - U(x-h)}{h}.$$

Запишем РКЗ

$$\begin{cases} \dfrac{U(x_k + h) - U(x_k)}{h} + AU(x_k) = 0 \\ U(0) = b, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{U_{k+1} - U_k}{h} + AU_k = 0 \\ U_0 = b. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} U_{k+1} + (Ah - 1)U_k = 0 \\ U_0 = b, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} U_{k+1} = (1 - Ah)U_k \\ U_0 = b. \end{cases}$$

Порядок аппроксимации производной равен $O(h)$ и начальные условия выполнены точно, то есть разностное решение аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком $O(h)$.

Соответствующая решению ДКЗ сеточная функция будет иметь вид:

$[U]_h = \{be^{-Ax_k}\}$.

Выясним порядок сходимости разностной схемы. Для этого используем разложение в ряд:

$$\ln(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots .$$

Получим следующую цепочку преобразований:

$$U_k = U(x_k) = b(1-Ah)^k = be^{\ln(1-Ah)^K} =$$
$$= be^{k\ln(1-Ah)} = be^{\left(\frac{x_k}{h}\ln(1-Ah)\right)} = be^{\left(\frac{x_k}{h}(-Ah+O(h^2))\right)} =$$
$$= be^{-Ax_K+O(h)} = be^{-Ax_K}(1+O(h)) = be^{-Ax_K} + O(h).$$

То есть

$$[U]_h - U_k = O(h),$$

а это значит, что мы имеем сходимость порядка *O(h).*

б) Возьмем теперь более точную аппроксимацию производной:

$$\begin{cases} U'(x) \approx \dfrac{U(x+h)-U(x-h)}{2h} \\ U_0 = b \end{cases},$$

и получим разностную схему

$$\begin{cases} \dfrac{U_{k+1}-U_{k-1}}{2h} + AU_k = 0 \\ U_0 = b. \end{cases}$$

Преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} U_{k+1} + 2AhU_k - U_{k-1} = 0 \\ U_0 = b. \end{cases}$$

Для решения требуется U_1. Найдем его, поступая следующим образом:

$$U'(0) \approx \frac{U(h)-U(0)}{h},$$

значит

$$\frac{U_1 - U_0}{h} = -AU_0 + O(h),$$

и, следовательно

$$U_1 = U_0 - hAU_0 + hO(h) = U_0(1-Ah) + O(h^2).$$

Разностная аппроксимация при подстановке точного решения в схему дает порядок аппроксимации *O(h²)*.

Выясним порядок сходимости. Запишем соответствующее характеристическое уравнение:

$$q^2 + 2Ahq - 1 = 0.$$

Решая его, имеем

$$q_{1,2} = -Ah \pm \sqrt{A^2h^2+1},$$

откуда общее решение имеет вид

$$U_k = \alpha \cdot q_1^k + \beta \cdot q_2^k.$$

Используя начальные условия, найдем α и β из системы уравнений:

$b = \alpha + \beta$, $\quad b \cdot (1 - Ah) = \alpha \cdot q_1 + bq_2$.

Получим

$\alpha = b + O(h^2)$, $\beta = O(h^2)$.

Тогда решение РКЗ имеет вид:

$U_k = bq_1^k + O(h^2)$.

Так как $(1+x)^m = 1 + mx + \ldots$, **получим**

$$q_1 = -Ah + \sqrt{A^2h^2 + 1} = 1 - Ah + \frac{1}{2}A^2h^2 + O(h^4).$$

Тогда

$$q_1^k = q_1^{x_K/h} = e^{x_K/h \ln q_1} = e^{x_K/h \ln(1 - Ah + \frac{1}{2}A^2h^2 + O(h^4))} = e^{x_K/h \ln(-Ah + \frac{1}{6}A^3h^3 + O(h^4))} =$$

$$= e^{-Ax_k} \cdot e^{\frac{1}{6}A^3x_kh^2 + O(h^4)} = e^{-Ax_k(1 + \frac{1}{6}A^3x_kh^2 + O(h^4))}.$$

Следовательно

$U^{(h)} = be^{-Ax_k} + O(h^2)$,

$[U]_h = U(x_k) = be^{-Ax_k}$.

То есть $[U]_h - U_k = O(h^2)$.

В рассмотренном выше примере порядки аппроксимации и сходимости совпадают, то есть, какой порядок аппроксимации разностной схемы, такой и порядок ее сходимости. Следующий пример показывает, что это далеко не всегда верно.

Пример 4. Рассмотрим еще одну разностную схему, основанную на следующей аппроксимации производной

$$\mu\frac{U(x+h) - U(x-h)}{2h} + (1-\mu)\frac{U(x+h) - U(x)}{h} \approx U'(x).$$

Предыдущие схемы были частными случаями данной схемы при $\mu = 0$ и $\mu = 1$. Если взять в разностной схеме $\mu = 4$, то порядок аппроксимации будет *O(h)*, но сходимости, как можно показать, не будет.

Вывод о совпадении порядков аппроксимации и сходимости разной схемы верен только для так называемых устойчивых разностных схем.

6.5. Устойчивость разностных схем

Рассмотрим ДКЗ

$$LU = f \qquad (6.14)$$

и соответствующую ей разностную схему

$$L_hU^{(h)} = f^{(h)}. \qquad (6.15)$$

Пусть $U = U(x)$ - решение задачи (1) и построена сеточная функция $[U]_h$.

Построим невязку

$$\delta f^{(h)} = L_h[U]_h - f^{(h)}.$$

Напомним, что разностная схема аппроксимирует решение $U(x)$ с порядком *m*, если справедливо соотношение:

$\left\|\delta f^{(h)}\right\| \le Ch^m$,

где C – постоянная, не зависящая от *h*.

Рассмотрим возмущенную разностную схему:

$L_h \cdot Z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}$, где $\varepsilon^{(h)} \in F_n$. (6.16)

Т.е. схема (6.16) получена добавлением к правой части разностной схемы (6.15) возмущения $\varepsilon^{(h)} \in F_n$. Новое решение обозначим через $Z^{(h)}$.

Определение 3. *Разностную схему* (6.15) будем называть *устойчивой*, если существуют числа $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при всех $0 < h < h_0$ и всех $\varepsilon^{(h)} \in F_h$ таких, что $\left\|\varepsilon^{(h)}\right\| < \delta$, возмущенная разностная схема (11.16) имеет единственное решение, и это решение удовлетворяет оценке

$$\left\|Z^{(h)} - U^{(h)}\right\| \le C \cdot \left\|\varepsilon^{(h)}\right\| \quad , \qquad (6.17)$$

где C=const и не зависит от h.

Необходимо подчеркнуть, что устойчивость не связана с дифференциальной краевой задачей (6.14), а имеет отношение только к разностной краевой задаче (6.15). То есть устойчивость – это внутреннее свойство разностной схемы.

Пусть задачи (6.14) и (6.15) линейны, тогда можно дать равносильное определение устойчивости разностной схемы.

Определение 4. В случае линейной РКЗ *разностная схема* (6.15) называется *устойчивой,* если существует число $h_0 > 0$ такое, что при любом $h < h_0$ разностное задача (6.15) имеет единственное решение при любой правой части $f^{(h)}$, и это решение удовлетворяет соотношению

$$\left\|U^{(h)}\right\| \le C \cdot \left\|f^{(h)}\right\|, \qquad (6.18)$$

где С – независимая от шага h константа.

Убедимся в равносильности этих определений в случае линейной разностной краевой задачи. Пусть задача (6.15) линейна и устойчива по определению 4 . Наряду с задачей (6.15)

$$L_h U^h = f^{(h)},$$

рассмотрим возмущенную задачу (6.16)

$$L_h Z^h = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)},$$

которая имеет решение, причем единственное. Вычтем (6.15) из (6.16), используя линейность разностного оператора. Получим

$$L_h (Z^h - U^{(h)}) = \varepsilon^{(h)},$$

$$L_h W^{(h)} = \varepsilon^{(h)}, \qquad (6.19)$$

где $W^{(h)} = Z^{(h)} - U^{(h)}$.

Разностная задача (6.19) имеет единственное решение по определению 4, причем выполнено условие (6.18):

$$\left\|W^{(h)}\right\| \le C \cdot \left\|\varepsilon^{(h)}\right\|.$$

С учетом введенных обозначений выполнено также условие **(**6.17**),** то есть

$$\left\|Z^{(h)} - U^{(h)}\right\| \le C \cdot \left\|\varepsilon^{(h)}\right\|.$$

То есть из определения 4 следует определение 3. Нетрудно показать, что справедливо и обратное.

Замечания.

1) Понятие устойчивости зависит от определения нормы. За счет выбора подходящей нормы можно в известных пределах добиться устойчивости разностной схемы, неустойчивой в другой норме.

2) Понятие хорошей обусловленности представляет собой частный случай устойчивости, когда разностное уравнение линейно, второго порядка и выбор нормы зафиксирован (как выше).

Пример 5. Рассмотрим ДКЗ

$$\begin{cases} U'' - (1+x^2)U = \sqrt{x+1}, \quad 0 \le x \le 1 \\ U(0) = 2 \\ U(1) = 1. \end{cases}$$

Для данной задачи построим разностную схему:

$U(x_i + h) - 2U(x_i) + U(x_i - h) - (1 - x^2)U(x_i) = \sqrt{x_i + 1}$,   *i=0,…,n.*

Она аппроксимирует задачу с порядком аппроксимации $O(h^2)$.

Тогда имеем РКЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} - (1 + x_i^2)U_i = \sqrt{x_i + 1} \\ U_0 = 2, \qquad U_n = 1. \end{cases}$$

Покажем, что задача хорошо обусловлена.

$|b_i| = \left| \dfrac{2}{h^2} + (1 + x_i) \right|,$

$|a_i| + |c_i| = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{h^2}, \quad |b_i| \ge |a_i| + |c_i| + \delta .$

При $\delta = 1$ задача является хорошо обусловленной. Из этого следует устойчивость задачи.

Теорема 3. Если разностная схема (6.15) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (6.14) на решении *U(x)* с порядком аппроксимации $O(h^m)$ и разностная схема (6.15) устойчива, то имеет место сходимость разностной схемы (6.15) на решении *U(x)* с порядком сходимости $O(h^m)$.

Доказательство. Рассмотрим решение *U(x)* задачи (6.14) и сеточную функцию $[U]_h$.

Запишем невязку:

$\delta \cdot f^{(h)} = L_h[U]_h - f^{(h)}.$

Преобразуем это выражение в

$L_h[U]_h = f^{(h)} + \delta \cdot f^{(h)}.$

Мы получили возмущенную задачу, где $Z^{(h)} = [U]_h$ и $\delta \cdot f^{(h)}$ − возмущение.

Так как разностная схема устойчива, то

$\left\| U^{(h)} - [U]_h \right\| \le C \cdot \left\| \delta \cdot f^{(h)} \right\| \le CC_1 h^m .$

Последнее означает, что имеет место сходимость порядка *m*.

Теорема доказана.

Возвращаясь к примеру 3, можем сделать вывод, что порядок сходимости разностной схемы в данном примере равен $O(h^2)$.

Следующий пример показывает применение теоремы 1 для доказательства устойчивости разностных схем.

Пример 6. Рассмотрим разностную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} - G(x,u) = g(x) \qquad 0 \le x \le 1 \\ U(0) = \varphi. \end{cases}$$

Будем предполагать функции *G* и g непрерывными по совокупности переменных, а функцию *G* дополнительно непрерывно дифференцируемой по *u*. Тогда в некоторой замкнутой ограниченной области на плоскости *Oxu*, содержащей внутри себя точку (0, φ) , будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial G}{\partial u}(x,u)\right| \le M \ ,$$

где M=const.

Запишем разностную схему:

$$\frac{U(x_i+h)-U(x_i)}{h} - G(x_i, U(x_i)) = g(x_i)$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{U_{i+1}-U_i}{h} - G(x_i, U_i) = g_i \\ U_0 = U. \end{cases} \qquad (6.20)$$

Очевидно, разностная схема (6.20) представляет собой известную схему Эйлера.

Рассмотрим возмущенную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{Z_{i+1}-Z_i}{h} - G(x_i, Z_i) = g_i + \varepsilon_i \\ Z_0 = \varphi + \varepsilon, \end{cases} \qquad (6.21)$$

или $L_h Z^{(h)} = g^{(h)} + \varepsilon^{(h)}$.

Обозначим $\omega_i = Z_i - U_i$ и, вычитая из (6.21) равенство (6.20) и применяя формулу Лагранжа, получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_{i+1}-\omega_i}{h} - G_U^{'}(x_i, \xi_i)\omega_i = \varepsilon_i \\ \omega_0 = \varepsilon. \end{cases}$$

Отсюда

$\omega_{i+1} = \omega_i + hM_i\omega_i + \varepsilon_i h$, где $M_i = G_U^{'}(x_i, \xi_i)$, ξ_i - некоторое промежуточное значение между U_i и Z_i . Очевидно $|M_i| \le M$, и, следовательно,

$$\omega_{i+1} \le (1+hM)\cdot|\omega_i| + h|\varepsilon_i| \le (1+hM)\cdot|\omega_i| + h\left\|\varepsilon^{(h)}\right\|,$$

где

$$\left\|\varepsilon^{(h)}\right\| = \max\left\{|\varepsilon|, \max_{i=\overline{0,n}}|\varepsilon_i|\right\}.$$

Тогда $|\omega_i| \le (1+hM)\cdot|\omega_{i-1}| + h\left\|\varepsilon^{(h)}\right\|$,

и

$$|\omega_{i+1}| \le (1+hM)^2|\omega_{i-1}| + h(1+hM)\left\|\varepsilon^{(h)}\right\| + h\left\|\varepsilon^{(h)}\right\| \le (1+hM)^2|\omega_{i-1}| + 2(1+hM)\left\|\varepsilon^{(h)}\right\|,$$

$$|\omega_{i+1}| \le (1+hM)^{i+1}|\omega_0| + (i+1)(1+hM)^i\left\|\varepsilon^{(h)}\right\| \le (1+hM)^h\left\|\varepsilon^{(h)}\right\| + (1+Mh)^h\left\|\varepsilon^{(h)}\right\|,$$

$$|\omega_{i+1}| \le 2(1+hM)^h\left\|\varepsilon^{(h)}\right\|, \ \ \forall \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Поскольку

$$(1+hM)^h = (1+\frac{M}{h})^h \le e^M \ ,$$

то

$$|\omega_{i+1}| \le 2e^M\left\|\varepsilon^{(h)}\right\|,$$

и значит

$$\left\|\omega^{(h)}\right\| \le 2e^{M}\left\|\varepsilon^{(h)}\right\|.$$

Таким образом, выполнено условие (6.17), и, по определению 3, разностная схема устойчива. Тогда, согласно теореме 1, схема Эйлера сходится с порядком сходимости *O(h)*.