

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ
к лабораторной работе
на тему

МЕТОД АДАМСА

Выполнил: студент группы 153501
Тимофеев Кирилл Андреевич

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

Вариант 5

Цель выполнения задания:

- Изучить численное решение Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса

Краткие теоретические сведения:

Пусть есть дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y),$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Разбиваем отрезок $[a, b]$ с шагом h на n частей. То есть, по

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = \overline{0, n}, \quad \text{где } x_0 = a.$$

Пусть $y = y(x)$ - решение. Тогда на $[x_k, x_{k+1}]$ справедливо равенство

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Применим формулу левых прямоугольников для вычисления интеграла.

Получим

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad \text{то есть формулу Эйлера.}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx = A_0 f(x_k, y_k) + A_1 f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad \text{где}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^m f(x_i) A_i, \quad A_i = \int_a^b l_i(x) dx; \quad l_i(x) = \frac{\varpi_i(x)}{\varpi_i(x_i)}.$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx = A_0 + A_1;$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} x dx = A_0 x_k + A_1 x_{k+1}.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_0 = h - A_1 \\ \frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = A_0 x_k + A_1 x_{k+1}. \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = (h - A_1)x_k + A_1 x_{k+1};$$

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = hx_k - A_1(x_k - x_{k+1});$$

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = hx_k - A_1 h;$$

$$A_1 = -\frac{h}{2};$$

$$A_0 = h - A_1 = \frac{3h}{2}.$$

Откуда

~

Следовательно, получим

$$y_{k+1} = y_k + h \left(\frac{3}{2} f(x_k, y_k) - \frac{1}{2} f(x_{k+1}, y_{k+1}) \right) \quad k = \overline{1, n-1}$$

Это формула Адамса второго порядка, которая испол
выполнения задания.

Существенным недостатком метода Адамса второго порядка
обстоятельство, что для его применения надо знать доп
начальному условию еще

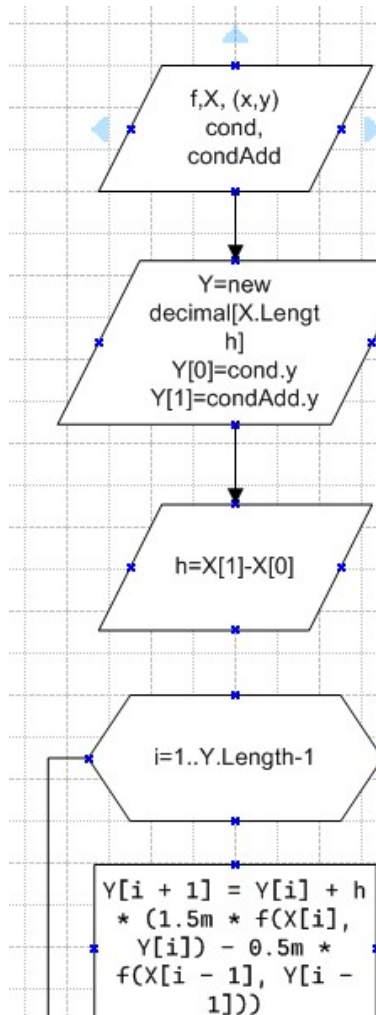
$$y_{-1} = y(x_0 - h) \text{ или } y_1 = y(x_0 + h).$$

Программная реализация

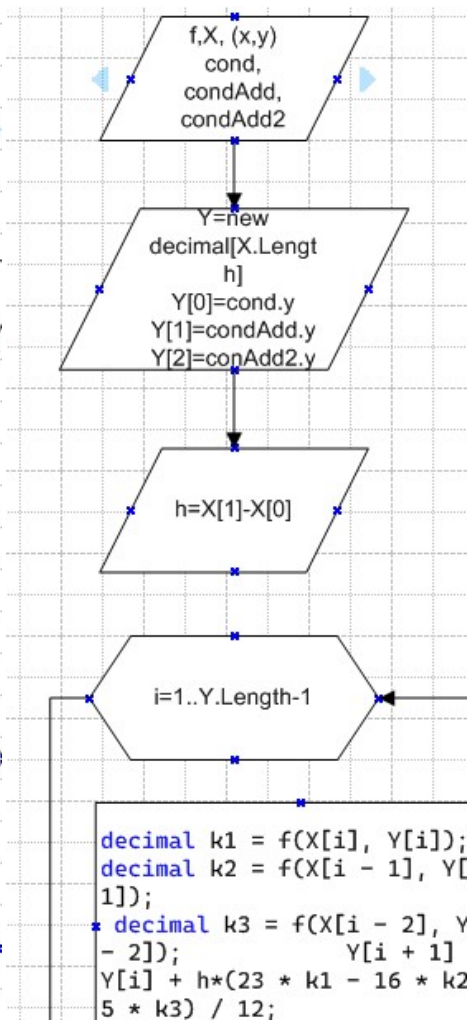
```
static decimal[] Adams2(Foo f, decimal[] X, (decimal x, decimal y) cond, (decimal x, decimal  
y) condAdd)  
{  
    decimal[] Y = new decimal[X.Length];  
    Y[1] = condAdd.y;  
    Y[0] = cond.y;  
  
    decimal h = X[1] - X[0];  
    for (int i = 1; i < Y.Length - 1; i++)  
    {  
        Y[i + 1] = Y[i] + h * (1.5m * f(X[i], Y[i]) - 0.5m * f(X[i - 1], Y[i - 1]));  
    }  
  
    return Y;  
}  
  
static decimal[] Adams3(Foo f, decimal[] X, (decimal x, decimal y) cond, (decimal x, decimal  
y) condAdd, (decimal x, decimal y) condAdd2)  
{  
    decimal[] Y=new decimal[X.Length];  
    Y[0] = cond.y;  
    Y[1] = condAdd.y;  
    Y[2] = condAdd2.y;  
    decimal h = X[1] - X[0];  
    for (int i = 2; i < Y.Length - 1; ++i)  
    {  
        decimal k1 = f(X[i], Y[i]);  
        decimal k2 = f(X[i - 1], Y[i - 1]);  
        decimal k3 = f(X[i - 2], Y[i - 2]);  
        Y[i + 1] = Y[i] + h*(23 * k1 - 16 * k2 + 5 * k3) / 12;  
    }  
  
    return Y;  
}
```

Алгоритмы

Второго порядка



Третьего порядка



Результаты расчетов программы:

```

e^x
Второго Порядка
Погрешность: 0,00096, количество отрезков 52
Третьего порядка
Погрешность: 0,00004, количество отрезков 2

sin x
Второго Порядка
Погрешность: 0,0009, количество отрезков 21
Третьего порядка
Погрешность: 0,00001, количество отрезков 2

x^2+2
Второго Порядка
Погрешность: 0,00097, количество отрезков 62
Третьего порядка
Погрешность: 0, количество отрезков 2

Пример из задания
Второго Порядка
: 0,00098, количество отрезков 42
Третьего порядка
: 0,00098, количество отрезков 26

```

Оценка:

Относительная погрешность приближенного числа:

Учитывая формулу

$$\left| \frac{a - a^*}{a} \right| = \frac{\beta_{l+1}r^{-(l+1)} + \beta_{l+1}r^{-(l+2)} + \dots}{\beta_1 r^{-1} + \beta_2 r^{-2} + \dots} \leq \frac{r^{-1}}{\beta_1 r^{-1}} \leq r^{1-l}$$

где r -основание системы исчисления

И параметры используемого типа decimal

Ниже в таблице даны параметры стандартных форматов чисел с плавающей запятой. Здесь: **w** — ширина битового поля для представления порядка, **t** — ширина битового поля для представления мантииссы, **k** — полная ширина битовой строки.

Параметр	Binary32	Binary64	Binary128	Decimal64	Decimal128
<i>Параметры формата</i>					
<i>b</i>	2	2	2	10	10
<i>p, цифры</i>	24	53	113	16	34
<i>еtах</i>	127	1023	16383	384	6144
<i>Параметры кодирования</i>					
<i>BIAS</i>	127	1023	16383	398	6176
<i>w, биты</i>	8	11	15	13	17
<i>t, биты</i>	23	52	112	50	110
<i>k, биты</i>	32	64	128	64	128

То относительная погрешность приближенного числа не превышает $2^{-(1-110)} = 1,54 \cdot 10^{(-33)}$.

Метод Адамса 2-го порядка показал неплохие результаты для всех тестовых примеров, однако метод Адамса 3-го порядка показал себя гораздо лучше. Но большим недостатком метода 3-го порядка является необходимость задания 3-х начальных условий, лежащих на одной интегральной кривой, в то время как метод 2-го порядка требует всего 2-ух. В случаях, когда количество отрезков 2, в методе Адамса 3 его порядка вычисления не проходят, т.к. все 3 значения получены методом Рунге-Кутты.

Вывод: был изучен метод Адамса численного решения дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ: БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И АЛГОРИТМЫ / Б.В, Фалейчик, 2010
2. КОМПЕНСАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ОПЕРАЦИЯХ С ЧИСЛАМИ С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ[Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://habr.com/ru/post/266023/>