1.4. Сходимость разностных схем

Выявим связь между дифференциальной краевой задачей (ДКЗ)

$$\begin{cases} U'' + a_1(x)U' + a_2(x)U = f(x) \\ U(a) = \varphi, \quad U(b) = \psi. \end{cases} \tag{6.11}$$

и соответствующей ей разностной краевой задачей (РКЗ).

Будем применять в дальнейшем для сокращения записи обозначение

$$LU = f,$$

где

$$LU = \begin{cases} U'' + a_1(x)U' + a_2(x)U, & a \le x \le b \\ U(a) \\ U(b), \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} f(x), & a \le x \le b \\ \varphi, & x = a \\ \psi, & x = b. \end{cases}$$

Пример 3. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} U' + AU = 0 \\ U(0) = b \end{cases}, \quad x \in [0,1].$$

Запишем ее в виде:

$LU = f$, где

$$LU = \begin{cases} U' + AU, & x \in [0,1] \\ U(0) \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

Интервал [0,1] разбиваем на множество узлов с шагом *h*, то есть строим сетку:

$$D_h = \begin{cases} x_k = x_0 + kh, & k = \overline{0,n} \\ x_0 = 0 \\ x_n = 1 \end{cases} .$$

Следует отметить, что дифференциальная краевая задача может не иметь решений или ее решение может быть не единственным. Однако данное обстоятельство относится к структуре этой задачи, а не к численным методам ее решения. Поэтому будем считать, что решение ДКЗ существует ит единственно. Пусть *U(x)* – единственное решение ДКЗ (6.11). По нему можно построить следующую сетчатую функцию из значений функции в узлах:

$$[U]_h = (U(x_0),...,U(x_n)) .$$

Постоим такую последовательность сетчатых функций $U^{(h)} = \{U_0,\ U_1\ ,.....,U_n\}$, которая приближается к $[U]_h$ при убывании шага *h*.

Разностная схема для нашей задачи имеет вид:

$$\begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = f_k\ , & k = \overline{1, n-1}, \\ U_0 = \varphi, \quad U_k = \psi,. \end{cases}$$

или

$$L_h U^{(h)} = f^{(h)}, \qquad (6.12)$$

где

$$L_h U^{(h)} = \begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1}, & k = \overline{1, n-1} \\ U_0 \\ U_n, \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} f_k \ , \ k = \overline{1, n-1}\,, \\ \varphi, \\ \psi. \end{cases}$$

Отметим, что задача (6.12) представляет собой семейство задач для разных значений шага *h*. Эта задача в свою очередь может не иметь решения или ее решение может быть не единственным. Предположим, что задача (6.12) при любом шаге *h* имеет единственное решение $U^{(h)}$.

Обозначим U_h − линейное пространство всех сетчатых функций на D_h.

Введем в этом пространстве норму:

$$\left\| U^{(h)} \right\|_{U_h} = \left\| U^{(h)} \right\| = \max_{k=0,n} |U_k|\,.$$

Следует подчеркнуть, что это не единственный возможный выбор нормы в пространстве U_h. Существует большой набор норм, отличных от введенной выше.

Определение 1. Будем говорить, что сетчатая функция $U^{(h)}$ *сходится* к решению *U(x)* ДКЗ, если выполняется следующее условие:

$\left\| U^{(h)} - [U]_h \right\| \to 0$ при $h \to 0$.

При этом, если выполняется условие $\left\| U^{(h)} - [U]_h \right\| \le C_1 h^m$, где C_1 не зависит от h и n, говорят, что имеет место сходимость порядка h^m или $O(h^m)$.

Отметим, что сходимость – это фундаментальное свойство разностных схем, причем для одной и той же ДКЗ могут существовать разностные схемы как сходящиеся, так и расходящиеся. Более того, сходимость или расходимость разностной схемы существенно зависит от выбора нормы в пространстве сеточных функций. Примерами других возможных норм в пространстве U_h являются нормы

$$\left\| U^{(h)} \right\|_{U_h} = h \max_{k=\overline{0,n}} \left| U_k \right|,$$

$$\left\| U^{(h)} \right\|_{U_h} = \sqrt{h \sum_k U_k^2}$$

и другие.