

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ

к лабораторной работе
на тему

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)
методом Гаусса и с помощью его модификаций

Выполнил: студент группы 153501
Тимофеев Кирилл Андреевич

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

Вариант 8

Цель выполнения задания:

- изучить метод Гаусса и его модификации, составить алгоритм метода и программу его реализации, получить численное решение заданной СЛАУ;
- составить алгоритм решения СЛАУ указанными методами, применимый для организации вычислений на ЭВМ;
- составить программу решения СЛАУ по разработанному алгоритму;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программы.

Краткие теоретические сведения:

СЛАУ обычно записывается в виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i; i \leq 1 \leq n, \text{ или коротко } Ax = b, \quad (1.1)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Здесь A и b заданы, требуется найти x .

Методы решения СЛАУ делятся на прямые и итерационные.

Метод Гаусса прекрасно подходит для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Он обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами:

- во-первых, нет необходимости предварительно исследовать систему уравнений на совместность;
- во-вторых, методом Гаусса можно решать не только СЛАУ, в которых число уравнений совпадает с количеством неизвестных переменных и основная матрица системы невырожденная, но и системы уравнений, в которых число уравнений не совпадает с количеством неизвестных переменных или определитель основной матрицы равен нулю;
- в-третьих, метод Гаусса приводит к результату при сравнительно небольшом количестве вычислительных операций.

Процесс последовательного исключения неизвестных называется прямым ходом метода Гаусса. После завершения прямого хода у нас появляется возможность вычислить неизвестную переменную, находящуюся в последнем уравнении. С ее помощью из предпоследнего уравнения

находим следующую неизвестную переменную и так далее. Процесс последовательного нахождения неизвестных переменных при движении от последнего уравнения к первому называется обратным ходом метода Гаусса.

Рассмотрим сначала простейший вариант метода Гаусса, называемый *схемой единственного деления*.

Прямой ход состоит из $n - 1$ шагов исключения.

1-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x_1 из уравнений с номерами $i = 2, 3, \dots, n$. Предположим, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Будем называть его *главным элементом 1-го шага*.

Найдем величины

$$q_{i1} = a_{i1}/a_{11} \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

называемые *множителями 1-го шага*. Вычтем последовательно из второго, третьего, ..., n -го уравнений системы первое уравнение, умноженное соответственно на q_{21} , q_{31} , ..., q_{n1} . Это позволит обратить в нуль коэффициенты при x_1 во всех уравнениях, кроме первого. В результате получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)}, \\ &\vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}. \end{aligned}$$

в которой $a_{ij}^{(1)}$ и $b_{ij}^{(1)}$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - q_{i1}a_{1j} \quad , \quad b_i^{(1)} = b_i - q_{i1}b_1.$$

Аналогично проводятся остальные шаги. Опишем очередной k -й шаг.

к-й шаг. В предположении, что главный(ведущий) элемент к-ого шага отличен от нуля, вычислим множители к-ого шага

$$q_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \quad (i = k + 1, \dots, n)$$

и вычтем последовательно из (k+1)-ого, ..., n-го уравнений полученной на предыдущем шаге системы k-е уравнение, умноженное соответственно на $q_{k+1,k}, q_{k+2,k}, \dots, q_{nk}$.

После $(n-1)$ -го шага исключения получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \end{aligned}$$

$$a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)},$$

.....

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)},$$

матрица которой является верхней треугольной. На этом вычисления прямого хода заканчиваются.

Обратный ход. Из последнего уравнения системы находим x_n . Подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, получим x_{n-1} .

Осуществляя обратную подстановку, далее последовательно находим x_{n-2} , ..., x_1 . Вычисления неизвестных здесь проводятся по формулам

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)},$$

$$x_k = (b_k^{(k-1)} - a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} - \dots - a_{kn}^{(k-1)}x_n) / a_{kk}^{(k-1)}, (k = n - 1, \dots, 1).$$

Необходимость отличия от 0 главных элементов. Заметим, что вычисления множителей, а также обратная подстановка требуют деления на главный

$$a_{kk}^{(k-1)}.$$

элемент. Поэтому если один из главных элементов оказывается равным нулю, то схема не может быть реализована. Здравый смысл подсказывает, что в ситуации, когда все главные элементы отличны от нуля, но среди них есть близкие к нулю, возможен неконтролируемый рост погрешности.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу(схема частичного выбора). На k -м шаге прямого хода коэффициенты уравнений системы с номерами $i = k + 1, \dots, n$ преобразуются по формулам

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - q_{ik}a_{kj}, b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - q_{ik}b_k^{(k-1)}, i = k + 1, \dots, n.$$

Интуитивно ясно, что во избежание сильного роста коэффициентов системы и связанных с этим ошибок нельзя допускать появления больших множителей q_{ik} . В методе Гаусса с выбором главного элемента по столбцу гарантируется, что $|q_{ik}| \leq 1$ для всех $k = 1, 2, \dots, n - 1$ и $i = k + 1, \dots, n$. Отличие этого варианта метода Гаусса от схемы единственного деления заключается в том, что на k -м шаге исключения в качестве главного

$$a_{ikk}$$

элемента выбирают максимальный по модулю коэффициент при неизвестных x_k в уравнениях с номерами $i = k + 1, \dots, n$. Затем соответствующее выбранному коэффициенту уравнение с номером i_k

меняют местами с k -м уравнением системы для того, чтобы главный

элемент занял место коэффициента $a_{kk}^{(k-1)}$. После этой перестановки исключение неизвестного x_k производят, как в схеме единого деления.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора). В этой схеме допускается нарушение естественного порядка исключения неизвестных. На 1-м шаге метода среди элементов a_{ij}

определяют максимальный по модулю элемент $a_{i_1 j_1}$. Первое уравнение системы и уравнение с номером i_1 меняют местами. Далее стандартным

образом производят исключение неизвестного x_{i_1} из всех уравнений, кроме первого.

На k -ом шаге метода среди коэффициентов $a_{ij}^{(k-1)}$ при неизвестных в уравнениях системы с номерами $i = k, \dots, n$ выбирают максимальный по

модулю коэффициент $a_{i_k j_k}^{(k-1)}$ при неизвестных в уравнениях системы с номерами $i = k, \dots, n$ выбирают максимальный по модулю коэффициент,

меняют местами и исключают неизвестное x_{j_k} из уравнений с номерами $i = k + 1, \dots, n$.

На этапе обратного хода неизвестные вычисляют в следующем порядке:

$x_{j_n}, x_{j_{n-1}}, \dots, x_{j_1}$.

ЗАДАНИЕ.

Методом Гаусса и методом выбора главного элемента найти с точностью 0,0001 численное решение системы $Ax=b$,

где $A = kC + D$, A – исходная матрица для расчёта, k – номер варианта (0-15), матрицы C , D и вектор свободных членов b задаются ниже.

Исходные данные:

Вектор $b = (4,2; 4,2; 4,2; 4,2; 4,2)^T$,

$$C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2,33 & 0,81 & 0,67 & 0,92 & -0,53 \\ -0,53 & 2,33 & 0,81 & 0,67 & 0,92 \\ 0,92 & -0,53 & 2,33 & 0,81 & 0,67 \\ 0,67 & 0,92 & -0,53 & 2,33 & 0,81 \\ 0,81 & 0,67 & 0,92 & -0,53 & 2,33 \end{bmatrix}.$$

Программная реализация:

```
using System;
using System.IO;

namespace MNA_
{
    class Program
    {
        String projectLocation = "D:\\Mocha\\MNA!\\\";
        decimal k = 8;
        int rows = 5;
        int columns = 5;
        Matrix A, b, C, D, tmp;
```



```

public Program()
{
    double[] solution = new double[columns];
    A = new Matrix(rows, columns + 1);
    b = new Matrix(rows, 1);
    C = new Matrix(rows, columns);
    D = new Matrix(rows, columns);
}

string[] BPath = new string[2] { "BDefault.txt", "B.txt" };
string[] CPath = new string[2] { "CDefault.txt", "C.txt" };
string[] DPath = new string[2] { "DDefault.txt", "D.txt" };

void ReadData(int mode)
{
    ReadB(mode);
    ReadC(mode);
    ReadD(mode);
}

void ReadB(int mode)
{
    StreamReader sr = new StreamReader(projectLocation + BPath[mode]);
    string line = sr.ReadLine();
    for (int i = 0; i < rows; ++i)
    {
        int f = line.IndexOf(' ');
        //Console.WriteLine("f = " + f);
        if (f != -1) b[i,0] = Convert.ToDecimal(line.Substring(0, f));
        else b[i,0] = Convert.ToDecimal(line);
        line = line.Substring(f + 1);
    }
}
}

```

```

void ReadC(int mode)
{
    StreamReader sr = new StreamReader(projectLocation + CPath[mode]);
    for (int i = 0; i < rows; ++i)
    {
        string line = sr.ReadLine();

        for (int j = 0; j < columns; ++j)
        {
            int f = line.IndexOf(' ');
            //Console.WriteLine("f = " + f);
            if (f != -1) C[i, j] = Convert.ToDecimal(line.Substring(0, f));
            else C[i, j] = Convert.ToDecimal(line);
            line = line.Substring(f + 1);
        }
    }
}

void ReadD(int mode)
{
    StreamReader sr = new StreamReader(projectLocation + DPath[mode]);
    for (int i = 0; i < rows; ++i)
    {
        string line = sr.ReadLine();

        for (int j = 0; j < columns; ++j)
        {
            int f = line.IndexOf(' ');
            //Console.WriteLine("f = " + f);
            if (f != -1) D[i, j] = Convert.ToDecimal(line.Substring(0, f));
            else D[i, j] = Convert.ToDecimal(line);
            line = line.Substring(f + 1);
        }
    }
}

```

```

}

public void run()
{
    Console.WriteLine("1. Решение тестового уравнения");
    Console.WriteLine("2. Решение своего уравнения");
    int a = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
    ReadData(a - 1);

    tmp = k*C;
    tmp += D;

    for(int i = 0; i < tmp.Rows; ++i)
    {
        for(int j = 0; j < tmp.Columns; ++j)
        {
            A[i, j] = tmp[i, j];
        }
    }

    for(int i = 0; i < A.Rows; ++i)
    {
        A[i, columns] = b[i, 0];
    }

    Matrix A2 = new Matrix(A);
    Matrix A3 = new Matrix(A);

    //Console.WriteLine(A.ToString());
    A.ToUpTriangle();
    A2.ToUpTriangleModified();
    A3.ToUpTriangle3RetutrnOfTheAElenaDmitrievna();
    //Console.WriteLine(A.ToString());

```

```

var x1 = backMove(A);

printResults(A, x1);
checkResults(x1);

Console.WriteLine("\n\nВторой метод(с выбором по столбцу)\n");
x1 = backMove(A2);

printResults(A2, x1);
checkResults(x1);

Console.WriteLine("\n\nТретий метод(с выбором по матрице)\n");
x1 = decrypt(A3);

printResults(A3, x1);
checkResults(x1);

}

void printResults(Matrix slau, Matrix x)
{
    printx(x);

    Console.WriteLine(" \nРезультаты подстановки");
    for (int i = 0; i < rows; ++i)
    {
        decimal sum = 0;
        for (int j = 0; j < columns; ++j)
        {
            sum += slau[i, j] * x[0, j];
        }
    }
}

```

```

        Console.WriteLine(i + ". " + Math.Round(sum, 4) + " = " + Math.Round(slau[i,
columns], 4));
    }
}

void checkResults(Matrix x)
{
    Console.WriteLine(" \nРезультаты подстановки в исходное уравнение");
    for (int i = 0; i < rows; ++i)
    {
        decimal sum = 0;
        for (int j = 0; j < columns; ++j)
        {
            sum += tmp[i, j] * x[0, j];

            Console.WriteLine(i + ". " + sum + " = " + b[i,0] + " ==>> Невязка = " + (b[i,0] -
sum) );
        }
    }

    Matrix decrypt(Matrix slau)
    {
        Matrix _slau = new Matrix(slau);
        var x = new Matrix(1, _slau.Columns - 1);
        int[] _checked = new int[0];
        for (int g = 1; g <= _slau.Rows; ++g)
        {
            int i = 0, j = 0;
            for (i = 0; i < _slau.Rows; ++i)
            {
                int counter = 0;
                for (j = 0; j < _slau.Columns - 1; ++j)
                {
                    if (Math.Round(_slau[i, j], 4) != 0)

```

```

        {
            ++counter;
        }
    }
    if (counter == g) break;
}

decimal sum = _slau[i, slau.Columns - 1];
for(int k = 0; k < _checked.Length; ++k)
{
    sum -= x[0, _checked[k]] * slau[i, _checked[k]];
    _slau[i, _checked[k]] = 0;
}

int c = 0;
for (; c < _slau.Columns - 1; ++c) if (Math.Round(_slau[i, c], 4) != 0) break;
x[0, c] = sum;
Array.Resize(ref _checked, _checked.Length + 1);
_checked[_checked.Length - 1] = c;

}
return x;
}

```

```

Matrix backMove(Matrix slau)
{
    var x = new Matrix(1, slau.Columns - 1);

    for (int i = slau.Rows - 1; i >= 0; --i)
    {
        int k = i + 1;
        decimal d = slau[i, columns];
        for (; k < x.Columns; ++k)
        {

```

```

        d -= slau[i, k] * x[0, k];
    }

    x[0, i] = d;
}

return x;
}

void printx(Matrix x)
{
    for (int i = 0; i < columns; ++i)
    {
        Console.WriteLine(" x" + i + " = " + Math.Round(x[0, i], 4));
    }
}

}

class MainClass
{
    static void Main()
    {
        Program program = new Program();
        program.run();
    }
}
}

```

Результаты расчетов программы:


```
x0 = 0,9181
x1 = 0,8624
x2 = 0,1645
x3 = 0,2454
x4 = 0,6601
```

0. 0,1645 = 0,1645
1. 0,1412 = 0,1412
2. 0,6968 = 0,6968
3. 1,0687 = 1,0687
4. 1,1800 = 1,1800

[illegible]

Подсчет абсолютной погрешности приближенного решения:

$$\|\mathbf{r}\| \leq \|A^{-1}\| \|\eta\|.$$

Имеем для метода Гаусса и метода Гаусса с выбором по столбцу

[illegible]

Для метода Гаусса с выбором по матрице

$$b := \begin{bmatrix} 0.000000000000000000000000011 \\ 0.000000000000000000000000007 \\ 0.000000000000000000000000005 \\ 0.000000000000000000000000004 \\ 0.000000000000000000000000014 \end{bmatrix}$$
$$b := \begin{bmatrix} 1.1 \cdot 10^{-27} \\ 7 \cdot 10^{-28} \\ 5 \cdot 10^{-28} \\ 4 \cdot 10^{-28} \\ 1.4 \cdot 10^{-28} \end{bmatrix}$$
$$r \leq \text{norm}(AI, 1) \cdot \text{norm}(b, 1);$$
$$r \leq 2.8399999999999992 \cdot 10^{-27}$$

Относительная погрешность приближенного числа:

Учитывая формулу

$$\left| \frac{a - a^*}{a} \right| = \frac{\beta_{l+1}r^{-(l+1)} + \beta_{l+2}r^{-(l+2)} + \dots}{\beta_1r^{-1} + \beta_2r^{-2} + \dots} \leq \frac{r^{-l}}{\beta_1r^{-1}} \leq r^{1-l}$$

где r -основание системы исчисления

И параметры используемого типа `decimal`

Ниже в таблице даны параметры стандартных форматов чисел с плавающей запятой. Здесь: w — ширина битового поля для представления порядка, t — ширина битового поля для представления мантииссы, k — полная ширина битовой строки.

Параметр	Binary32	Binary64	Binary128	Decimal64	Decimal128
<i>Параметры формата</i>					
b	2	2	2	10	10
p , цифры	24	53	113	16	34
e_{max}	127	1023	16383	384	6144
<i>Параметры кодирования</i>					
$BIAS$	127	1023	16383	398	6176
w , биты	8	11	15	13	17
t , биты	23	52	112	50	110
k , биты	32	64	128	64	128

То относительная погрешность приближенного числа не превышает $2^{-(1 - 110)} = 1,50463 \cdot 10^{-36}$

Вывод:

В ходе лабораторной работы был изучен метод Гаусса и его модификации (метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу (схема частичного выбора) и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора)) для решения системы линейных уравнений, составлены алгоритмы и написаны реализации соответствующих программ на языке C# для решения поставленной задачи. Проведена оценка погрешности. Благодаря точности типа `decimal` результаты более чем удовлетворительны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deverstudents / Метод Гаусса: описание алгоритма решения системы линейных уравнений, примеры, решения [Электронный ресурс]. - http://www.cleverstudents.ru/systems/solving_systems_Gauss_method.html
2. Лабораторный практикум(краткая теоретические сведения)
3. KURSAK / МЕТОД ГАУССА С ВЫБОРОМ ГЛАВНОГО ЭЛЕМЕНТА [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://kursak.net/metod-gaussa-s-vyborom-glavnogo-elementa/>
4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ: БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И АЛГОРИТМЫ / Б.В, Фалейчик, 2010