Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ

к лабораторной работе
на тему
Интерполяционные многочлены

Выполнил: студент группы 153501
Тимофеев Кирилл Андреевич

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

Вариант 8

Цель выполнения задания:

- Изучить интерполяцию функций с помощью интерполяционных многочленов Ньютона и Лагранжа

Краткие теоретические сведения:

Пусть *f(x)* – функция, непрерывная на отрезке [*a*,*b*]. Выберем на этом отрезке точки, называемые *узлами интерполяции*:

$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$.

Предположим, что известны значения функции в узлах интерполяции:

$f(x_k) = y_k, \quad k = 0,1,\ldots,n$.

Ставится задача найти многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$P_n(x_k) = y_k, \qquad \forall k = 0,1,\ldots n. \qquad (6.1)$$

Такой многочлен $P_n(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, а задача его нахождения – *задачей интерполяции.*

1) Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$,

$\omega_j(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

Положим $l_j(x) = \dfrac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)}$,

т. е. $$l_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_n)}.$$

Очевидно $l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & при\ i \neq j \\ 1, & при\ i = j. \end{cases}$

Построим многочлен $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j$.

Легко видеть, что $L_n(x_i) = l_i(x_i) y_i = 1 \cdot y_i = y_i$, $i = \overline{0, n}$, т. е. это интерполяционный многочлен. Его *называют интерполяционным многочленом Лагранжа.*

2) Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть $x_0, x_1, ..., x_n$ - набор узлов интерполирования,

$y_0, y_1, ..., y_n$ - значения функции $f(x)$ в узлах.

Величину $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ называют конечной разностью первого порядка в *к*-ом узле.

Аналогично определяются конечные разности высших порядков.

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

……………………………………………………………………………

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i} \ \Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i}.$$

Разделенной разностью второго порядка называется выражение

$$f_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{f_1(x_{k+1}, x_{k+2}) - f_1(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}$$ и т. д.

Пусть *x* – любая точка отрезка, не совпадающая с узлами. Тогда

$$f_1(x, x_0) = \frac{y_0 - f(x)}{x_0 - x},$$

откуда $f(x) = y_0 + f_1(x, x_0)(x - x_0)$.

(6.2)

Далее $f_2(x, x_0, x_1) = \dfrac{f_1(x_0, x_1) - f_1(x, x_0)}{x_1 - x}$,

откуда $f_1(x, x_0) = f_1(x_0, x_1) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_1)$.

Подставляя в (6.2), получаем:

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1).$$

(6.3)

Далее $f_3(x,x_0,x_1,x_2) = \dfrac{f_2(x_0,x_1,x_2) - f_2(x,x_0,x_1)}{x_2 - x}$,

откуда $f_2(x,x_0,x_1) = f_2(x_0,x_1,x_2) + f_3(x,x_0,x_1,x_2)(x - x_2)$.

Подставляя в (6.3), имеем:

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0,x_1)(x - x_0) + f_2(x,x_0,x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ + f_3(x,x_0,x_1,x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \quad (6.4)$$

Продолжая процесс, получим:

$$f(x) = N_n(x) + f_{n+1}(x,x_0,\ldots,x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_n),$$

где $N_n(x) = y_0 + f_1(x_0,x_1)(x - x_0) + \ldots + f_n(x_0,\ldots,x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$.

Очевидно при $x = x_i$, $\forall i = \overline{0,n}$, $f(x_i) = N_n(x_i)$, $i = \overline{0,n}$,

т. е. $N_n(x)$ - интерполяционный многочлен. Его называют *интерполяционным многочленом Ньютона.*

Достоинство интерполяционного многочлена Ньютона: он удобен при расширении интерполяции и добавлении узлов.

Недостаток: в какой-то степени он сложнее в подсчете конечных разностей по сравнению с многочленом Лагранжа.

Многочлены наилучшего приближения удобно искать через метод наименьших квадратов. Суть его заключается в поиске такой функции, чтобы сумма квадратов отклонений от заданных точек была наименьшей

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

Фактически задача сводится к поиску минимума функции суммы отклонений через частные производные по постоянным коэффициентам функции f.

Для многочлена первой степени коэффициенты будут корнями слау

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Для многочлена второй степени

$$expr := n\,c^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(a^2 x_i^4 + 2\,a\,b\,x_i^3 + 2\,a\,c\,x_i^2 - 2\,a\,x_i^2 y_i + b^2 x_i^2 + 2\,b\,c\,x_i - 2\,b\,x_i y_i - 2\,c\,y_i + y_i^2\right)$$

#частные производные по искомым коэффициентам

simplify(*diff* (*expr*, *a*)) = 0;

$$2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(a x_i^2 + b x_i + c - y_i\right)\right) = 0$$

simplify(*diff* (*expr*, *b*)) = 0;

$$2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\left(a x_i^2 + b x_i + c - y_i\right)\right) = 0$$

simplify(*diff* (*expr*, *c*)) = 0;

$$2\,n\,c + 2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a x_i^2 + b x_i - y_i\right)\right) = 0$$

Решение системы нелинейных уравнений можно записать в конечном виде, зависящем только от заданных точек

#Получение конечных формул для коэффициетов

solve({%, %%, %%%}, [*a*, *b*, *c*]);

$$\left[\left[a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^3}, b = \right.\right.$$

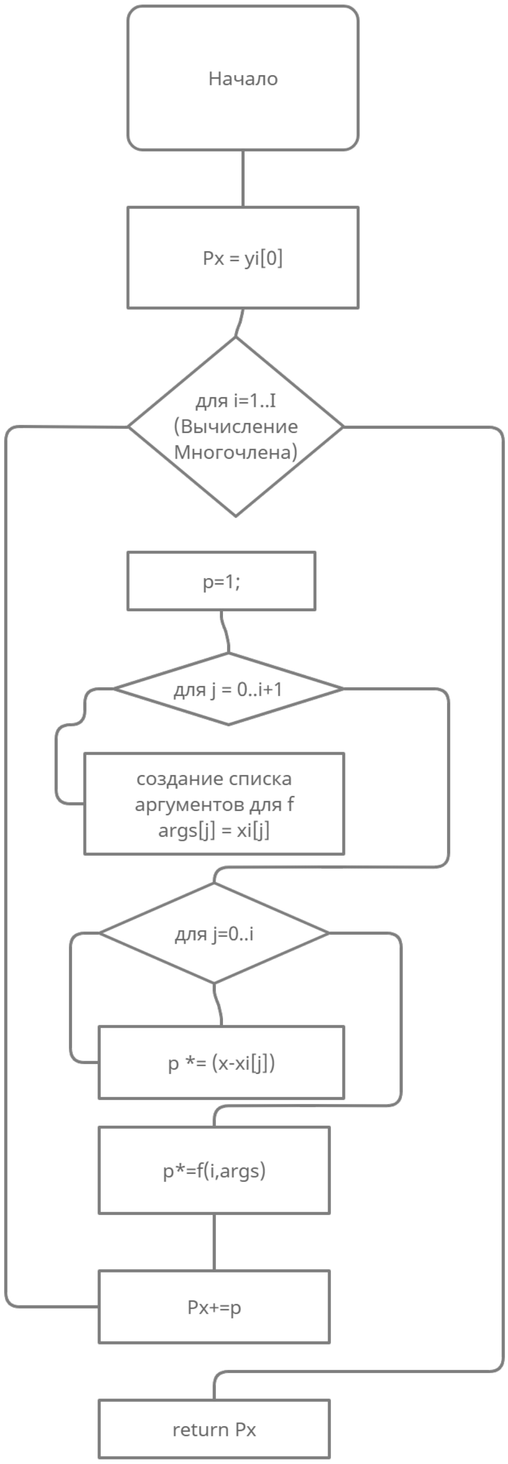
$$-\frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^3}, c$$

$$\left. \left. = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^3}\right]\right]$$

Программная реализация

Алгоритм метода Ньютона

1. - Select an object to view the quick toolbar. You can use it to edit text, customize colors, create links etc.
2. - Use the (+) icon on **left bottom** to browse frames, templates, shape libraries, icons and more
3. - You can add/remove libraries by clicking "Browse More Shapes" in shapes section. We have over 130 libraries to choose from.
4. - Use the toolbar appearing on the **top right** to add comments, notes, change shape properties, add custom fields etc.
5. Hover over the small icon on the bottom right on this sticky for more details!



Алгоритм метода Лагранжа

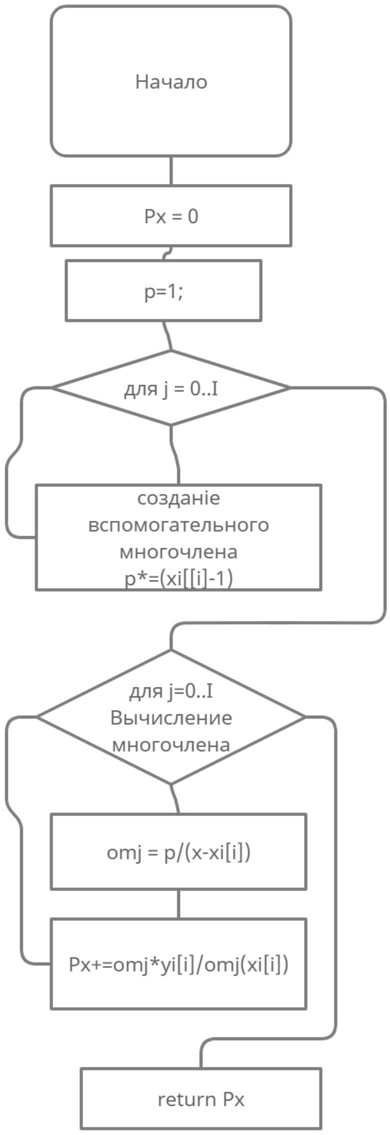
1 - Select an object to view the quick toolbar. You can use it to edit text, customize colors, create links etc.

2 - Use the (+) icon on **left bottom** to browse frames, templates, shape libraries, icons and more

3 - You can add/remove libraries by clicking "Browse More Shapes" in shapes section. We have over 130 libraries to choose from.

4 - Use the toolbar appearing on the **top right** to add comments, notes, change shape properties, add custom fields etc.

5 Hover over the small icon on the bottom right on this sticky for more details!




```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Collections;
using System.Linq;
using System.Runtime.InteropServices;

namespace lab6
{
    class Program
    {
```

```
        static int I = 11;
        static decimal[] xi = new decimal[I];
        static int k = 8;
        static decimal m = 4m;
        static decimal[] pi = { 0, 0.41m, 0.79m, 1.13m, 1.46m, 1.76m, 2.04m, 2.3m, 2.55m,
2.79m, 3.01m};
        static decimal[] y;
        static void Main(string[] args)
        {
            for (int i = 0; i < I; ++i) xi[i] = i / 10.0M;

            decimal[] yi = new decimal[I];
            for (int i = 0; i < I; ++i) yi[i] = pi[i] + m;

            thing(yi);

            Console.WriteLine("Тестовый пример x^2 + 7x -8 + +-0.1");
            for (int i = 0, l = 1; i < I; ++i, l *= -1) yi[i] = (xi[i] * xi[i] + 7 * xi[i] -
8) + 0.1m * l;
            thing(yi);

            Console.WriteLine("Тестовый пример sin(x)\n");
            for (int i = 0; i < I; ++i) yi[i] =
Convert.ToDecimal(Math.Sin(Convert.ToDouble(xi[i])));
            thing(yi);

            Console.WriteLine("Тестовый пример e^x");
            for (int i = 0; i < I; ++i) yi[i] =
Convert.ToDecimal(Math.Exp(Convert.ToDouble(xi[i])));
            thing(yi);
        }

        static void thing(decimal[] yi)
        {
            Polynom approx = ApproximateL(yi);
```

```
            Polynom app = ApproximateSqr(yi);
            Console.WriteLine("МНП 1 степени: " + approx);
            Console.WriteLine("МНП 2 степени: " + app);

            Console.WriteLine("\nLagr\n");
            Polynom lagr = Lagr(yi);
            Check(lagr, approx, app, yi);

            Console.WriteLine("\nNewton\n");
            Polynom newt = Newton(yi);
            Check(newt, approx, app, yi);
        }

        static Polynom Lagr(decimal[] yi)
        {
            Polynom om = new Polynom(new decimal[] {1});
            for (int i = 0; i < yi.Length; ++i) om *= new Polynom(new decimal[] { -xi[i],
1 });
            Polynom Px = new Polynom(new decimal[] { 0 });
            for(int i = 0; i < yi.Length; ++i)
            {
                Polynom omj = om / (new Polynom(new decimal[] { -xi[i], 1 }));
                Px += omj * yi[i] / omj.Count(xi[i]);
            }

            return Px;
        }

        static void Check(Polynom check, Polynom approx, Polynom app, decimal[] yi)
        {
            int round = 4;

            Console.WriteLine(check);
            for (int i = 0; i < I; ++i)
```

```
            {
                Console.WriteLine(xi[i] + " : Полученный многочлен: " +
Math.Round(check.Count(xi[i]),round) + " = " + yi[i] + " = " +
Math.Round(approx.Count(xi[i]),round) + " (МНП первой степени) = " +
Math.Round(app.Count(xi[i]), round) + " (МНП второй степени)");
            }

            Console.WriteLine(0.47m + " : Полученный многочлен: " +
Math.Round(check.Count(0.47m), round) + " = " + Math.Round(approx.Count(0.47m),round) + " (МНП
первой степени) = " + Math.Round(app.Count(0.47m), round) + " (МНП второй степени)");
        }

        static Polynom Newton(decimal[] yi)
        {
            y = yi;

            Polynom Px = new Polynom(new decimal[] { y[0] });
            for(int i = 1; i < yi.Length; ++i)
            {
                decimal[] args = new decimal[i + 1];
                for (int j = 0; j < i + 1; ++j) args[j] = xi[j];
                Polynom p = new Polynom(new decimal[] { 1 });
                for (int j = 0; j < i; ++j) p *= new Polynom(new decimal[] { -xi[j], 1 });

                p *= f(i, args);
               // Console.WriteLine("f = " + f(i, args));
                Px += p;
                //Console.WriteLine(Px);
            }

            return Px;
        }

        static decimal f(int n, decimal[] args)
        {
```

```
    if (n == 0) return y[Convert.ToInt32(args[0]*10)];

    decimal[] args1 = args.Skip(1).ToArray();
    decimal[] args2 = args.Take(args.Length - 1).ToArray();

    return (f(n-1, args1) - f(n-1, args2)) / (args[args.Length - 1] - args[0]);
}

static Polynom ApproximateL(decimal[] yi)
{
    Matrix s = new Matrix(2, 3);
    for(int i = 0; i < I; ++i)
    {
        s[0, 0] += xi[i] * xi[i];
        s[0, 1] += xi[i];
        s[0, 2] += xi[i] * yi[i];

        s[1, 2] += yi[i];
    }

    s[1, 0] = s[0, 1];
    s[1, 1] = I;

    s.ToUpTriangle();

    //Console.WriteLine(s);



    Polynom Pn = new Polynom(1);
    Pn[1] = s[0,2] - s[0,1] * s[1,2];
    Pn[0] = s[1, 2];
```

```
            return Pn;
        }

        static Polynom ApproximateSqr(decimal[] yi)
        {
            Matrix m = new Matrix(5, 2);

            static decimal pow(decimal n, int pow)
            {
                decimal t = 1;
                for (int i = 0; i < pow; ++i) t *= n;
                return t;
            }

            for (int i = 0; i < I; ++i)
            {
                for (int j = 0; j < 5; ++j)
                    for (int k = 0; k < 2; ++k)
                        m[j, k] += pow(xi[i], j) * pow(yi[i], k);
            }

            decimal zn = I * m[4, 0] * m[2, 0] - I * pow(m[3, 0], 2) - m[4, 0] * pow(m[1, 0],
2) + 2 * m[3, 0] * m[2, 0] * m[1, 0] - pow(m[2, 0], 3);

            decimal a = (I * m[2, 1] * m[2, 0] - I * m[1, 1] * m[3, 0] - m[2, 1] * pow(m[1,
0], 2) + m[1, 1] * m[2, 0] * m[1, 0] + m[3, 0] * m[1, 0] * m[0, 1] - pow(m[2, 0], 2) * m[0,
1]);
            a /= zn;
            decimal b = -(I * m[2, 1] * m[3, 0] - I * m[1, 1] * m[4, 0] - m[2, 1] * m[2, 0] *
m[1, 0] + m[1, 1] * pow(m[2, 0], 2) + m[4, 0] * m[1, 0] * m[0, 1] - m[3, 0] * m[2, 0] * m[0,
1]);
            b /= zn;
            decimal c = m[2, 1] * m[3, 0] * m[1, 0] - m[2, 1] * pow(m[2, 0], 2) - m[1, 1] *
m[4, 0] * m[1, 0] + m[1, 1] * m[3, 0] * m[2, 0] + m[4, 0] * m[2, 0] * m[0, 1] - pow(m[3, 0],
2) * m[0, 1];
            c /= zn;
```

```
            Polynom Pn = new Polynom(2);
            Pn[0] = c;
            Pn[1] = b;
            Pn[2] = a;

            return Pn;
        }

    }
}
```

Результаты расчетов программы:

```
МНП 1 степени:  2,9791x+4,1686
МНП 2 степени:  -1,0105x2+3,9896x+4,0171

Lagr

 3279,3210x10-16823,7434x9+37136,2434x8-46113,5913x7+35322,1644x6-17192,6215x5+5268,1269x4-966,2670x3+92,7493x2+0,6282x+4
0 : Полученный многочлен: 4 = 4 = 4,1686 (МНП первой степени) = 4,0171 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 4,4100 = 4,41 = 4,4665 (МНП первой степени) = 4,4059 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 4,7900 = 4,79 = 4,7645 (МНП первой степени) = 4,7746 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 5,1300 = 5,13 = 5,0624 (МНП первой степени) = 5,1230 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 5,4600 = 5,46 = 5,3603 (МНП первой степени) = 5,4512 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 5,7600 = 5,76 = 5,6582 (МНП первой степени) = 5,7592 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 6,0400 = 6,04 = 5,9561 (МНП первой степени) = 6,0470 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 6,3000 = 6,3 = 6,2540 (МНП первой степени) = 6,3146 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 6,5500 = 6,55 = 6,5519 (МНП первой степени) = 6,5620 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 6,7900 = 6,79 = 6,8498 (МНП первой степени) = 6,7892 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 7,0100 = 7,01 = 7,1477 (МНП первой степени) = 6,9962 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 5,6727 = 5,5688 (МНП первой степени) = 5,6689 (МНП второй степени)

Newton

 3279,3210x10-16823,7434x9+37136,2434x8-46113,5913x7+35322,1644x6-17192,6215x5+5268,1269x4-966,2670x3+92,7493x2+0,6282x+4,00
0 : Полученный многочлен: 4,00 = 4 = 4,1686 (МНП первой степени) = 4,0171 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 4,4100 = 4,41 = 4,4665 (МНП первой степени) = 4,4059 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 4,7900 = 4,79 = 4,7645 (МНП первой степени) = 4,7746 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 5,1300 = 5,13 = 5,0624 (МНП первой степени) = 5,1230 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 5,4600 = 5,46 = 5,3603 (МНП первой степени) = 5,4512 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 5,7600 = 5,76 = 5,6582 (МНП первой степени) = 5,7592 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 6,0400 = 6,04 = 5,9561 (МНП первой степени) = 6,0470 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 6,3000 = 6,3 = 6,2540 (МНП первой степени) = 6,3146 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 6,5500 = 6,55 = 6,5519 (МНП первой степени) = 6,5620 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 6,7900 = 6,79 = 6,8498 (МНП первой степени) = 6,7892 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 7,0100 = 7,01 = 7,1477 (МНП первой степени) = 6,9962 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 5,6727 = 5,5688 (МНП первой степени) = 5,6689 (МНП второй степени)
```

```
Тестовый пример x^2 + 7x -8 + +-0.1
МНП 1 степени:  8,0000x-8,1409
МНП 2 степени:  1,2331x2+6,7669x-7,9559

Lagr

 282186,9489x10-1410934,7443x9+3026455,0265x8-3640211,6402x7+2692148,1481x6-1261629,6296x5+371679,7178x4-65687,4780x3+6231,9587x2-230,3079x-7,9
0 : Полученный многочлен: -7,9 = -7,9 = -8,1409 (МНП первой степени) = -7,9559 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: -7,3900 = -7,39 = -7,3409 (МНП первой степени) = -7,2669 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: -6,4600 = -6,46 = -6,5409 (МНП первой степени) = -6,5532 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: -5,9100 = -5,91 = -5,7409 (МНП первой степени) = -5,8149 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: -4,9400 = -4,94 = -4,9409 (МНП первой степени) = -5,0519 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: -4,3500 = -4,35 = -4,1409 (МНП первой степени) = -4,2642 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: -3,3400 = -3,34 = -3,3409 (МНП первой степени) = -3,4519 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: -2,7100 = -2,71 = -2,5409 (МНП первой степени) = -2,6149 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: -1,6600 = -1,66 = -1,7409 (МНП первой степени) = -1,7532 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: -0,9900 = -0,99 = -0,9409 (МНП первой степени) = -0,8669 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 0,1000 = 0,1 = -0,1409 (МНП первой степени) = 0,0441 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: -4,5597 = -4,3809 (МНП первой степени) = -4,5031 (МНП второй степени)

Newton

 282186,9489x10-1410934,7443x9+3026455,0265x8-3640211,6402x7+2692148,1481x6-1261629,6296x5+371679,7178x4-65687,4780x3+6231,9587x2-230,3079x-7,9
0 : Полученный многочлен: -7,9 = -7,9 = -8,1409 (МНП первой степени) = -7,9559 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: -7,3900 = -7,39 = -7,3409 (МНП первой степени) = -7,2669 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: -6,4600 = -6,46 = -6,5409 (МНП первой степени) = -6,5532 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: -5,9100 = -5,91 = -5,7409 (МНП первой степени) = -5,8149 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: -4,9400 = -4,94 = -4,9409 (МНП первой степени) = -5,0519 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: -4,3500 = -4,35 = -4,1409 (МНП первой степени) = -4,2642 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: -3,3400 = -3,34 = -3,3409 (МНП первой степени) = -3,4519 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: -2,7100 = -2,71 = -2,5409 (МНП первой степени) = -2,6149 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: -1,6600 = -1,66 = -1,7409 (МНП первой степени) = -1,7532 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: -0,9900 = -0,99 = -0,9409 (МНП первой степени) = -0,8669 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 0,1000 = 0,1 = -0,1409 (МНП первой степени) = 0,0441 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: -4,5597 = -4,3809 (МНП первой степени) = -4,5031 (МНП второй степени)
```

```
Тестовый пример sin(x)

МНП 1 степени:  0,8518x+0,0299
МНП 2 степени:  -0,2348x2+1,0866x-0,0053

Lagr

 -0,0002x7+0,0083x5-0,1667x3+x
0 : Полученный многочлен: 0 = 0 = 0,0299 (МНП первой степени) = -0,0053 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 0,0998 = 0,0998334166468282 = 0,1151 (МНП первой степени) = 0,1010 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 0,1987 = 0,198669330795061 = 0,2003 (МНП первой степени) = 0,2026 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 0,2955 = 0,29552020666134 = 0,2854 (МНП первой степени) = 0,2995 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 0,3894 = 0,38941834230865 = 0,3706 (МНП первой степени) = 0,3918 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 0,4794 = 0,479425538604203 = 0,4558 (МНП первой степени) = 0,4793 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 0,5646 = 0,564642473395035 = 0,5410 (МНП первой степени) = 0,5621 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 0,6442 = 0,644217687237691 = 0,6262 (МНП первой степени) = 0,6403 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 0,7174 = 0,717356090899523 = 0,7114 (МНП первой степени) = 0,7137 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 0,7833 = 0,783326909627484 = 0,7965 (МНП первой степени) = 0,7824 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 0,8415 = 0,841470984807896 = 0,8817 (МНП первой степени) = 0,8465 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 0,4529 = 0,4303 (МНП первой степени) = 0,4535 (МНП второй степени)

Newton

 -0,0002x7+0,0083x5-0,1667x3+x
0 : Полученный многочлен: 0 = 0 = 0,0299 (МНП первой степени) = -0,0053 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 0,0998 = 0,0998334166468282 = 0,1151 (МНП первой степени) = 0,1010 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 0,1987 = 0,198669330795061 = 0,2003 (МНП первой степени) = 0,2026 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 0,2955 = 0,29552020666134 = 0,2854 (МНП первой степени) = 0,2995 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 0,3894 = 0,38941834230865 = 0,3706 (МНП первой степени) = 0,3918 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 0,4794 = 0,479425538604203 = 0,4558 (МНП первой степени) = 0,4793 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 0,5646 = 0,564642473395035 = 0,5410 (МНП первой степени) = 0,5621 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 0,6442 = 0,644217687237691 = 0,6262 (МНП первой степени) = 0,6403 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 0,7174 = 0,717356090899523 = 0,7114 (МНП первой степени) = 0,7137 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 0,7833 = 0,783326909627484 = 0,7965 (МНП первой степени) = 0,7824 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 0,8415 = 0,841470984807896 = 0,8817 (МНП первой степени) = 0,8465 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 0,4529 = 0,4303 (МНП первой степени) = 0,4535 (МНП второй степени)
```

```
Тестовый пример e^x
МНП 1 степени:  1,6981x+0,8833
МНП 2 степени:  0,8417x2+0,8565x+1,0096

Lagr

 +0,0002x7+0,0014x6+0,0083x5+0,0417x4+0,1667x3+0,5000x2+x+1
0 : Полученный многочлен: 1 = 1 = 0,8833 (МНП первой степени) = 1,0096 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 1,1052 = 1,10517091807565 = 1,0531 (МНП первой степени) = 1,1036 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 1,2214 = 1,22140275816017 = 1,2229 (МНП первой степени) = 1,2145 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 1,3499 = 1,349858807576 = 1,3928 (МНП первой степени) = 1,3423 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 1,4918 = 1,49182469764127 = 1,5626 (МНП первой степени) = 1,4868 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 1,6487 = 1,64872127070013 = 1,7324 (МНП первой степени) = 1,6482 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 1,8221 = 1,82211880039051 = 1,9022 (МНП первой степени) = 1,8265 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 2,0138 = 2,01375270747048 = 2,0720 (МНП первой степени) = 2,0215 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 2,2255 = 2,22554092849247 = 2,2418 (МНП первой степени) = 2,2334 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 2,4596 = 2,45960311115695 = 2,4116 (МНП первой степени) = 2,4621 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 2,7183 = 2,71828182845904 = 2,5815 (МНП первой степени) = 2,7077 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 1,6000 = 1,6814 (МНП первой степени) = 1,5980 (МНП второй степени)

Newton

 +0,0002x7+0,0014x6+0,0083x5+0,0417x4+0,1667x3+0,5000x2+x+1
0 : Полученный многочлен: 1 = 1 = 0,8833 (МНП первой степени) = 1,0096 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 1,1052 = 1,10517091807565 = 1,0531 (МНП первой степени) = 1,1036 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 1,2214 = 1,22140275816017 = 1,2229 (МНП первой степени) = 1,2145 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 1,3499 = 1,349858807576 = 1,3928 (МНП первой степени) = 1,3423 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 1,4918 = 1,49182469764127 = 1,5626 (МНП первой степени) = 1,4868 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 1,6487 = 1,64872127070013 = 1,7324 (МНП первой степени) = 1,6482 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 1,8221 = 1,82211880039051 = 1,9022 (МНП первой степени) = 1,8265 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 2,0138 = 2,01375270747048 = 2,0720 (МНП первой степени) = 2,0215 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 2,2255 = 2,22554092849247 = 2,2418 (МНП первой степени) = 2,2334 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 2,4596 = 2,45960311115695 = 2,4116 (МНП первой степени) = 2,4621 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 2,7183 = 2,71828182845904 = 2,5815 (МНП первой степени) = 2,7077 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 1,6000 = 1,6814 (МНП первой степени) = 1,5980 (МНП второй степени)
```

Оценка:

Относительная погрешность приближенного числа:

Учитывая формулу

$$\left|\frac{a-a^{*}}{a}\right| = \frac{\beta_{l+1} r^{-(l+1)} + \beta_{l+1} r^{-(l+2)} + \ldots}{\beta_1 r^{-1} + \beta_2 r^{-2} + \ldots} \le \frac{r^{-l}}{\beta_1 r^{-1}} \le r^{1-l}$$

где r-основание системы исчисления

И параметры используемого типа double

Ниже в таблице даны параметры стандартных форматов чисел с плавающей запятой. Здесь: **w** — ширина битового поля для представления порядка, **t** — ширина битового поля для представления мантиссы, **k** — полная ширина битовой строки.

Параметр	*Binary32*	*Binary64*	*Binary128*	*Decimal64*	*Decimal128*
			Параметры формата		
b	2	2	2	10	10
p, цифры	24	53	113	16	34
emax	127	1023	16383	384	6144
			Параметры кодирования		
BIAS	127	1023	16383	398	6176
w, биты	8	11	15	13	17
t, биты	23	52	112	50	110
k, биты	32	64	128	64	128

То относительная погрешность приближенного числа не превышает 2^(1 – 52) = 4,4*10^(-16)

Как видно при запуске версии программы с уменьшенным окургением погрешность многочленов не превышает 1*10^(-10)

```
Тестовый пример e^x
МНП 1 степени:  1,6981x+0,8833
МНП 2 степени:  0,8417x2+0,8565x+1,0096

Lagr

 +0,0002x7+0,0014x6+0,0083x5+0,0417x4+0,1667x3+0,5000x2+x+1
0 : Полученный многочлен: 1 = 1 = 0,8833144240 (МНП первой степени) = 1,0095653792 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 1,1051709181 = 1,10517091807565 = 1,0531292815 (МНП первой степени) = 1,1036296636 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 1,2214027582 = 1,22140275816017 = 1,2229441391 (МНП первой степени) = 1,2145274087 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 1,3498588076 = 1,349858807576 = 1,3927589966 (МНП первой степени) = 1,3422586145 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 1,4918246976 = 1,49182469764127 = 1,5625738541 (МНП первой степени) = 1,4868232810 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 1,6487212707 = 1,64872127070013 = 1,7323887116 (МНП первой степени) = 1,6482214082 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 1,8221188004 = 1,82211880039051 = 1,9022035692 (МНП первой степени) = 1,8264529961 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 2,0137527075 = 2,01375270747048 = 2,0720184267 (МНП первой степени) = 2,0215180446 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 2,2255409285 = 2,22554092849247 = 2,2418332842 (МНП первой степени) = 2,2334165539 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 2,4596031112 = 2,45960311115695 = 2,4116481418 (МНП первой степени) = 2,4621485238 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 2,7182818285 = 2,71828182845904 = 2,5814629993 (МНП первой степени) = 2,7077139545 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 1,5999941932 = 1,6814442544 (МНП первой степени) = 1,5980344567 (МНП второй степени)

Newton

 +0,0002x7+0,0014x6+0,0083x5+0,0417x4+0,1667x3+0,5000x2+x+1
0 : Полученный многочлен: 1 = 1 = 0,8833144240 (МНП первой степени) = 1,0095653792 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 1,1051709181 = 1,10517091807565 = 1,0531292815 (МНП первой степени) = 1,1036296636 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 1,2214027582 = 1,22140275816017 = 1,2229441391 (МНП первой степени) = 1,2145274087 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 1,3498588076 = 1,349858807576 = 1,3927589966 (МНП первой степени) = 1,3422586145 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 1,4918246976 = 1,49182469764127 = 1,5625738541 (МНП первой степени) = 1,4868232810 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 1,6487212707 = 1,64872127070013 = 1,7323887116 (МНП первой степени) = 1,6482214082 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 1,8221188004 = 1,82211880039051 = 1,9022035692 (МНП первой степени) = 1,8264529961 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 2,0137527075 = 2,01375270747048 = 2,0720184267 (МНП первой степени) = 2,0215180446 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 2,2255409285 = 2,22554092849247 = 2,2418332842 (МНП первой степени) = 2,2334165539 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 2,4596031112 = 2,45960311115695 = 2,4116481418 (МНП первой степени) = 2,4621485238 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 2,7182818285 = 2,71828182845904 = 2,5814629993 (МНП первой степени) = 2,7077139545 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 1,5999941932 = 1,6814442544 (МНП первой степени) = 1,5980344567 (МНП второй степени)
```

```
Тестовый пример sin(x)

МНП 1 степени:  0,8518x+0,0299
МНП 2 степени:  -0,2348x2+1,0866x-0,0053

Lagr

 -0,0002x7+0,0083x5-0,1667x3+x
0 : Полученный многочлен: 0 = 0 = 0,0298978952 (МНП первой степени) = -0,0053158948 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 0,0998334166 = 0,0998334166468282 = 0,1150797885 (МНП первой степени) = 0,1009942725 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 0,1986693308 = 0,198669330795061 = 0,2002616819 (МНП первой степени) = 0,2026092679 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 0,2955202067 = 0,29552020666134 = 0,2854435752 (МНП первой степени) = 0,2995290912 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 0,3894183423 = 0,38941834230865 = 0,3706254686 (МНП первой степени) = 0,3917537425 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 0,4794255386 = 0,479425538604203 = 0,4558073619 (МНП первой степени) = 0,4792832218 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 0,5646424734 = 0,564642473395035 = 0,5409892553 (МНП первой степени) = 0,5621175292 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 0,6442176872 = 0,644217687237691 = 0,6261711486 (МНП первой степени) = 0,6402566646 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 0,7173560909 = 0,717356090899523 = 0,7113530420 (МНП первой степени) = 0,7137006280 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 0,7833269096 = 0,783326909627484 = 0,7965349353 (МНП первой степени) = 0,7824494193 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 0,8414709848 = 0,841470984807896 = 0,8817168287 (МНП первой степени) = 0,8465030388 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 0,4528862854 = 0,4302527939 (МНП первой степени) = 0,4535173711 (МНП второй степени)

Newton

 -0,0002x7+0,0083x5-0,1667x3+x
0 : Полученный многочлен: 0 = 0 = 0,0298978952 (МНП первой степени) = -0,0053158948 (МНП второй степени)
0,1 : Полученный многочлен: 0,0998334166 = 0,0998334166468282 = 0,1150797885 (МНП первой степени) = 0,1009942725 (МНП второй степени)
0,2 : Полученный многочлен: 0,1986693308 = 0,198669330795061 = 0,2002616819 (МНП первой степени) = 0,2026092679 (МНП второй степени)
0,3 : Полученный многочлен: 0,2955202067 = 0,29552020666134 = 0,2854435752 (МНП первой степени) = 0,2995290912 (МНП второй степени)
0,4 : Полученный многочлен: 0,3894183423 = 0,38941834230865 = 0,3706254686 (МНП первой степени) = 0,3917537425 (МНП второй степени)
0,5 : Полученный многочлен: 0,4794255386 = 0,479425538604203 = 0,4558073619 (МНП первой степени) = 0,4792832218 (МНП второй степени)
0,6 : Полученный многочлен: 0,5646424734 = 0,564642473395035 = 0,5409892553 (МНП первой степени) = 0,5621175292 (МНП второй степени)
0,7 : Полученный многочлен: 0,6442176872 = 0,644217687237691 = 0,6261711486 (МНП первой степени) = 0,6402566646 (МНП второй степени)
0,8 : Полученный многочлен: 0,7173560909 = 0,717356090899523 = 0,7113530420 (МНП первой степени) = 0,7137006280 (МНП второй степени)
0,9 : Полученный многочлен: 0,7833269096 = 0,783326909627484 = 0,7965349353 (МНП первой степени) = 0,7824494193 (МНП второй степени)
1 : Полученный многочлен: 0,8414709848 = 0,841470984807896 = 0,8817168287 (МНП первой степени) = 0,8465030388 (МНП второй степени)
0,47 : Полученный многочлен: 0,4528862854 = 0,4302527939 (МНП первой степени) = 0,4535173711 (МНП второй степени)
```

Вывод:

В ходе лабораторной работы были освоены методы получения интерполяционных многочленов Лагранжа, Ньютона и наименьших квадратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ: БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И АЛГОРИТМЫ / Б.В, Фалейчик, 2010
2. КОМПЕНСАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ОПЕРАЦИЯХ С ЧИСЛАМИ С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ[Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/266023/