Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ
к лабораторной работе
на тему

Интерполяция сплайнами

Выполнил: студент группы 153502
Богданов Александр Сергеевич

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

Содержание

Цель работы

1. Изучить построение кубических интерполяционных сплайнов
2. Составить алгоритм решения задачи
3. Реализовать программу, выполняющую построение кубических интерполяционных сплайнов
4. Проверить работу программы на тестовых примерах

Теоретические сведения

Интерполяция сплайнами

Рассмотрим задачу интерполяции функции *f(x)* на отрезке [*a, b*]. Пусть мы имеем узлы $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и значения функции $y_0,...,y_n$ в данных узлах. Отрезок разбивается узлами на *n* элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $h_i = x_i - x_{i-1}$ − длина элементарного отрезка, $i = \overline{1,n}$.

Сплайном называется функция *S(x)*, которая на каждом элементарном отрезке является многочленом и непрерывна на всем отрезке [*a, b*], вместе со своими производными до некоторого порядка.

Степенью сплайна называется наивысший порядок степени многочлена.

Дефектом сплайна называется разность между его степенью и наивысшим порядком непрерывной на [*a, b*] производной.

Пример. Рассмотрим функцию

$$S(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ \dfrac{x^3}{27} - x + 4, & 3 \le x < 4. \end{cases}$$

Очевидно, функция $S(x)$ является кубическим сплайном на отрезке [*0, 4*], так как она непрерывна в узловых точках.

Действительно,

$S(1-0) = S(1+0) = 1,\ S(2-0) = S(2+0) = 2,\ S(3-0) = S(3+0) = 2.$

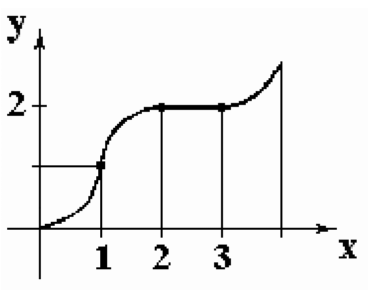


Рис. 7.3.

Найдем дефект сплайна.

$S'(1-0) = S'(1+0) = 2,\ S'(2-0) = S'(2+0) = 0,\ S'(3-0) = S'(3+0) = 0.$

В то же время $S''(2-0) = -2,\ \ S''(2+0) = 0.$

Таким образом, наибольший порядок непрерывной производной функции S на отрезке $[0,4]$ равен 1 и, следовательно, дефект сплайна равен 2. (См. рис. 7.3).

Отметим, что в общем случае сам сплайн многочленом не является. Чтобы он был многочленом, необходимо и достаточно, чтобы его дефект равнялся нулю.

Будем рассматривать кубические сплайны, у которых непрерывны первая и вторая производные.

Тогда на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн *S(x)* имеет вид

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad i = \overline{1,n}.$$

Очевидно, $S(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$. Найдем *S(x)*. Для этого требуется определить значения *4n* неизвестных коэффициентов. Очевидно, для этого необходимо иметь *4n* уравнений для определения коэффициентов.

Подставим левый конец отрезка (x_{i-1}) в уравнение:

$$S(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \qquad i = \overline{1,n}$$

$$S(x_{i+1}) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \qquad i = \overline{1,n}.$$

В итоге получаем *2n* уравнений:

$$\begin{cases} y_{i-1} = a_i & i = \overline{1,n} \\ a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i & i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Далее во всех внутренних узлах должны совпадать первая и вторая производные *S(x)*. Имеем

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \qquad i = \overline{1,n-1}.$$

Приравниваем во внутренних узлах значения левых и правых производных. Получим:

$$\begin{cases} b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} & i = \overline{1,n}, \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, \end{cases}$$

т. е. (*2n-2*) уравнений.

Недостающие два уравнения можно задать разными способами. Обычно берут $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.

Отсюда

$$2c_1 = 0, \qquad 2c_n + 6d_n h_n = 0.$$

Для удобства положим еще $c_{n+1} = 0$.

Объединяя все уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y_{i-1} = a_i & i = \overline{1,n} \\ a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i & i = \overline{1,n} \\ b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} & i = \overline{1,n-1} \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} & i = \overline{1,n-1} \\ c_n + 3d_n h_k = 0 & \\ c_1 = 0 & \\ c_{n+1} = 0. & \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$\begin{cases} b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} - b_i & i = \overline{1,n-1} \\ d =_i \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} & \\ c_1 = c_{n+1} = 0, & \end{cases}$$

далее

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ b_i h_i + c_i h_i^2 + \left(\dfrac{(c_{i+1} - c_i) h_i^2}{3} \right) = y_i - y_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ 2c_i h_i + (c_{i+1} - c_i) h_i = b_{i+1} - b_i & i = \overline{1,n-1} \\ d =_i \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} & i = \overline{1,n} \\ c_1 = c_{n+1} = 0. & \end{cases}$$

Откуда

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - \frac{(c_{i+1} - c_i) h_i}{3}, \qquad i = \overline{1,n}.$$

$$2c_i h_i + (c_{i+1} - c_i) h_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - c_{i+1} h_{i+1} - \frac{(c_{i+2} - c_{i+1}) h_{i+1}}{3} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + c_i h_i + \frac{(c_{i+1} - c_i) h_i}{3}.$$

Таким образом, задача определения коэффициентов сплайна свелась к решению системы

$$c_i \left(\frac{h_i}{3}\right) + c_{i+1} \left(\frac{2}{3} h_i + \frac{2}{3} h_{i+1}\right) + c_{i+2} \left(\frac{h_{i+1}}{3}\right) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \qquad i = \overline{1,n-1}$$

$$c_1 = c_{n+1} = 0.$$

Система трехдиагональна. Будем решать ее методом прогонки. Поскольку для матрицы системы выполнено условие доминирования диагональных элементов

$$\frac{2}{3} h_i + \frac{2}{3} h_{i+1} > \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3},$$

то задача имеет решение, причем единственное, и это решение можно найти методом прогонки.

Метод прогонки применяется для трехдиагональных систем, которые имеют матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

т. е. матрицу, у которой ненулевыми могут быть только элементы, стоящие на главной и двух смежных с главной диагоналях. Т.е. трехдиагональная систем имеет вид:

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1} \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \end{cases}$$

Суть метода прогонки заключается в построении рекуррентной последовательности для нахождения прогоночных коэффициентов A_i и B_i, а каждое неизвестное представляется в виде

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i .$$

Для удобства полагают, что $a_n = 0$, $c_n = 0$ и тогда формулы для прогоночных коэффициентов принимают следующий вид:

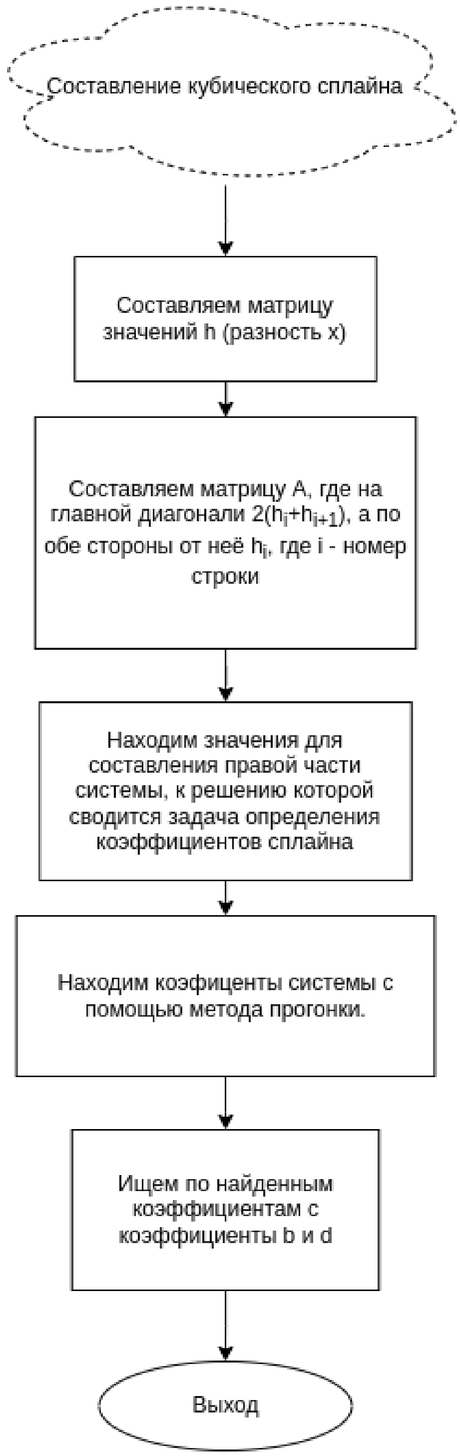
$$\begin{cases} A_i = \dfrac{-c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} \\ B_i = \dfrac{d_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i}. \end{cases} \qquad i = \overline{1,n} .$$

При этом

$$\begin{cases} \mathrm{x_i} = A_i \cdot x_{i+1} + B_i, \quad i = \overline{1, n-1} \\ x_n = B_n. \end{cases}$$

Проводя обратный ход метода прогонки, последовательно найдем значения неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Алгоритм решения



Программная реализация

Метод прогонки

```
def sweep_method(A, b):
    A = A.copy()
    b = b.copy()
    n = len(A)

    if len(A) > 1:
        A[0][1] /= A[0][0]
    for i in range(1, n - 1):
        A[i][i + 1] /= -(A[i][i] + A[i][i - 1] * A[i - 1][i])

    b[0] /= A[0][0]
    for i in range(1, n):
        b[i] = (b[i] - A[i][i - 1] * b[i - 1]) / (A[i][i] + A[i][i - 1] * A[i - 1][i])

    x = np.zeros(n)
    x[n - 1] = b[n - 1]
    for i in range(n - 2, -1, -1):
        x[i] = b[i] + A[i][i + 1] * x[i + 1]
    return x
```

Нахождение кубического сплайна

```
def syst_spline(x, y):
    n = len(x) - 1
    h = []
    for i in range(0, n):
        h += [x[i + 1] - x[i]]

    A = np.zeros((n - 1, n - 1))

    for i in range(0, n - 2):
        A[i + 1][i] = h[i]
        A[i][i + 1] = h[i]

    for i in range(0, n - 1):
        A[i][i] = 2 * (h[i] + h[i + 1])

    F = []
    for i in range(1, n):
        F += [3 * ((y[i + 1] - y[i]) / h[i] - (y[i] - y[i - 1]) / h[i - 1])]

    c = sweep_method(A, F)
    c = [0.0] + list(c) + [0.0]
    return c, h
```

Получение значений

```
def evaluate(xdot, x, y, h, c):
    for i in range(1, len(x)):
        if x[i - 1] <= xdot <= x[i]:
            val = 0
            val += y[i]
            b = (y[i] - y[i - 1]) / h[i - 1] + (2 * c[i] + c[i - 1]) * h[i - 1] / 3
            val += b * (xdot - x[i])
            val += c[i] * ((xdot - x[i]) ** 2)
            d = (c[i] - c[i - 1]) / (3 * h[i - 1])
            val += d * ((xdot - x[i]) ** 3)
            return val
    return None


def output(x, y, h, c):
    for i in range(1, len(x)):
        b = (y[i] - y[i - 1]) / h[i - 1] + (2 * c[i] + c[i - 1]) * h[i - 1] / 3
        d = (c[i] - c[i - 1]) / (3 * h[i - 1])
        print(x[i - 1], x[i], ":")
        np.poly1d([d, c[i], b, y[i]])
    return evaluate, output
```

Тестовые примеры

Тестовый пример 1.

Произвести интерполирование кубическими сплайнами функции. Вычислить значение сплайна в точке. Сравнить полученное значение со значением исходной функции.

Функция: sin(x).

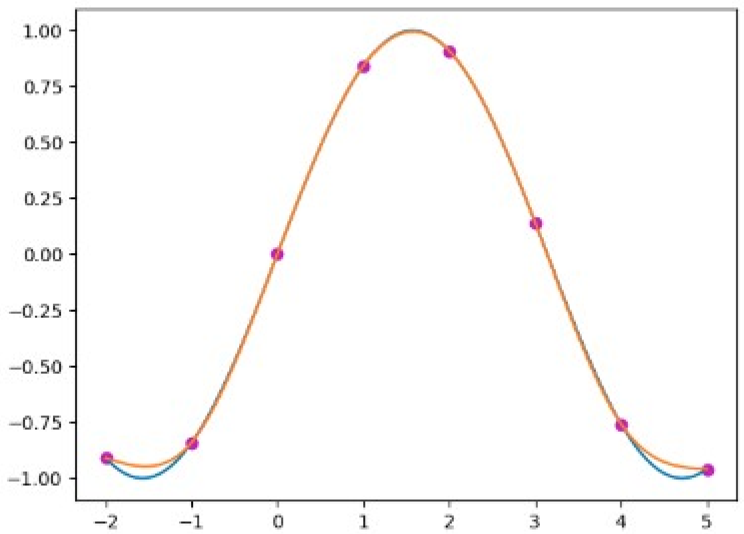
Интервал: [-2,5]

Число узлов: 8

Значение в точке: 4.1

Вывод программы:

```
Промежуток -2.0 --- -1.0
        3          2
0.1909 x + 0.5726 x + 0.4496 x - 0.8415
Промежуток -1.0 --- 0.0
        3           2
-0.201 x - 0.03037 x + 1.012 x
Промежуток 0.0 --- 1.0
         3          2
-0.1403 x - 0.4512 x + 0.5306 x + 0.8415
Промежуток 1.0 --- 2.0
          3          2
-0.01156 x - 0.4859 x - 0.4065 x + 0.9093
Промежуток 2.0 --- 3.0
        3          2
0.1242 x - 0.1134 x - 1.006 x + 0.1411
Промежуток 3.0 --- 4.0
        3          2
0.2212 x + 0.5502 x - 0.5689 x - 0.7568
Промежуток 4.0 --- 5.0
         3
-0.1834 x - 0.01872 x - 0.9589
Считаеем значение в точке 4.1...
f(4.1) = -0.8182771110644104
Кубический сплайн в точке 4.1 = -0.8083760109167277
Разница значений = 0.00990110014768264
```



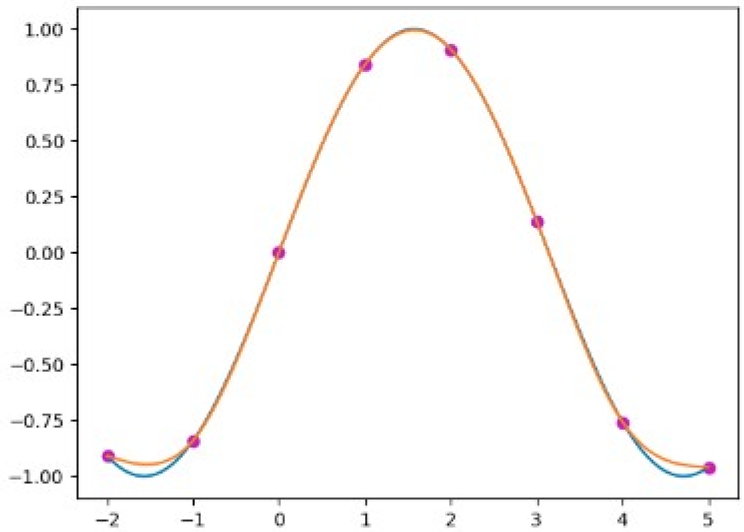
Тестовый пример 2.

Произвести интерполирование кубическими сплайнами функции. Вычислить значение сплайна в точке. Сравнить полученное значение со значением исходной функции.

Функция: sin(x).
Интервал: [-2,5]
Число узлов: 8
Значение в точке: 1

Вывод программы:

```
Промежуток -2.0 --- -1.0
        3          2
0.1909 x + 0.5726 x + 0.4496 x - 0.8415
Промежуток -1.0 --- 0.0
        3           2
-0.201 x - 0.03037 x + 1.012 x
Промежуток 0.0 --- 1.0
         3          2
-0.1403 x - 0.4512 x + 0.5306 x + 0.8415
Промежуток 1.0 --- 2.0
          3          2
-0.01156 x - 0.4859 x - 0.4065 x + 0.9093
Промежуток 2.0 --- 3.0
        3          2
0.1242 x - 0.1134 x - 1.006 x + 0.1411
Промежуток 3.0 --- 4.0
        3          2
0.2212 x + 0.5502 x - 0.5689 x - 0.7568
Промежуток 4.0 --- 5.0
         3
-0.1834 x - 0.01872 x - 0.9589
Считаеем значение в точке 1...
f(1) = 0.8414709848078965
Кубический сплайн в точке 1 = 0.8414709848078965
Разница значений = 0.0
```



Значения сплайна и функции совпали, т. к. точка 1 является одним из «узлов». Т.е. это значение является одним из тех, которые берутся за основу при построении сплайна

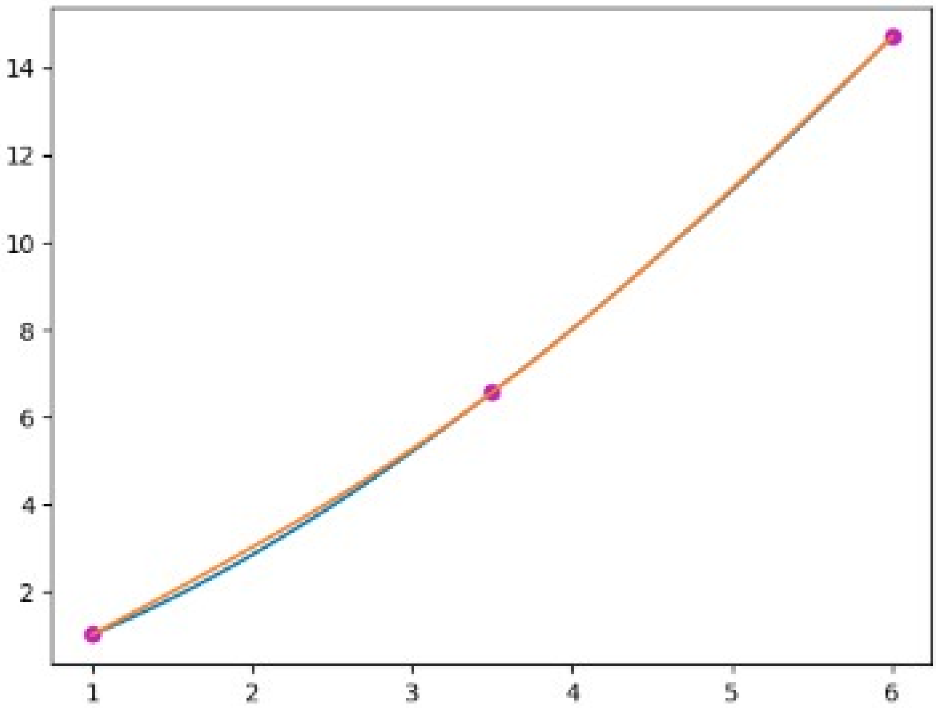
Тестовый пример 3.

Произвести интерполирование кубическими сплайнами функции. Вычислить значение сплайна в точке. Сравнить полученное значение со значением исходной функции.

Функция: xsqrt(x).
Интервал: [1,6]
Число узлов: 3
Значение в точке: 3.7

Вывод программы:

```
Промежуток 1.0 --- 3.5
         3          2
0.04162 x + 0.3121 x + 2.739 x + 6.548
Промежуток 3.5 --- 6.0
          3
-0.04162 x + 3.52 x + 14.7
Считаеем значение в точке 3.7...
f(3.7) = 7.117092102818399
Кубический сплайн в точке 3.7 = 7.107930480003532
Разница значений = 0.009161622814866988
```



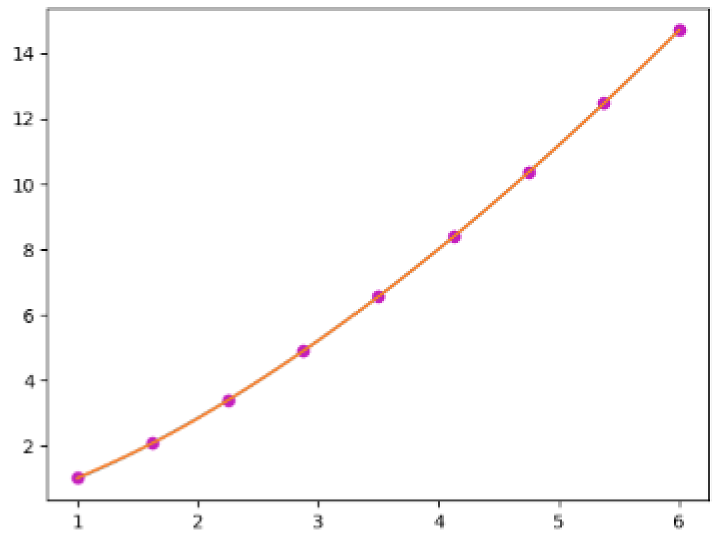
Тестовый пример 4.

Произвести интерполирование кубическими сплайнами функции. Вычислить значение сплайна в точке. Сравнить полученное значение со значением исходной функции.

Функция: xsqrt(x)
Интервал: [1,6]
Число узлов: 19
Значение в точке: 3.7

Вывод программы:

```
Промежуток 1.0 --- 1.625
        3           2
0.2635 x + 0.4942 x + 1.92 x + 2.071
Промежуток 1.625 --- 2.25
         3           2
-0.1598 x + 0.1945 x + 2.27 x + 3.375
Промежуток 2.25 --- 2.875
         3           2
0.02175 x + 0.2353 x + 2.538 x + 4.875
Промежуток 2.875 --- 3.5
          3           2
-0.02128 x + 0.1954 x + 2.807 x + 6.548
Промежуток 3.5 --- 4.125
           3           2
-0.003736 x + 0.1884 x + 3.047 x + 8.378
Промежуток 4.125 --- 4.75
         3           2
-0.0148 x + 0.1606 x + 3.265 x + 10.35
Промежуток 4.75 --- 5.375
         3           2
0.02243 x + 0.2027 x + 3.492 x + 12.46
Промежуток 5.375 --- 6.0
         3
-0.1081 x + 3.619 x + 14.7
Считаеем значение в точке 3.7...
f(3.7) = 7.117092102818399
Кубический сплайн в точке 3.7 = 7.117160875828543
Разница значений = 6.877301014451831e-05
```



Т.к. пример 4 от примера 3 отличается лишь количеством узлов, можем видеть, что точность возрастает при увеличении количества узлов.

Решение задания
Вариант 3

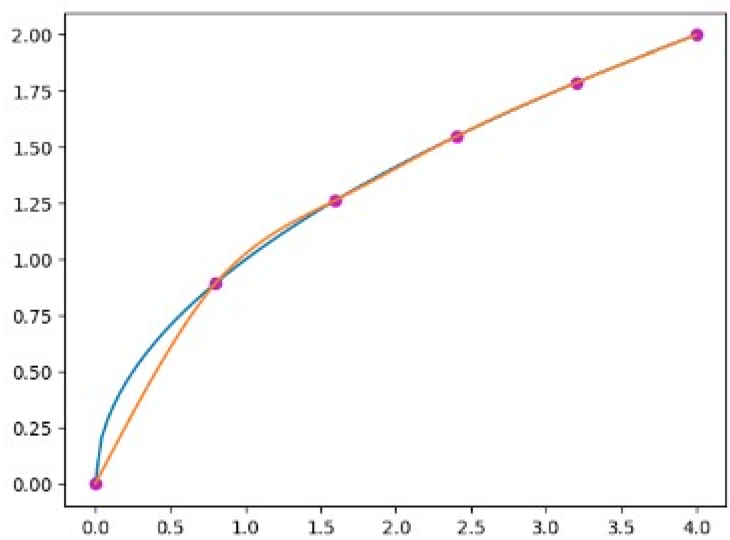
ЗАДАНИЕ. Произвести интерполирование кубическими сплайнами приведенных в таблице функций. Вычислить значение сплайна в точке $x = 0.5*(b-a)$.

Значение сплайна в точке $x = 0.5*(b-a)$ записать в качестве ответа. Сравнить его со значением функции в соответствующей точке.

№ варианта	Функция $f(x)$	Интервал $[a,b]$ 50	Число узлов	Значение в точке $x = 0.5*(b-a)$
3.	$\sqrt{x}$	[0,4]	5	1,4065

Вывод программы:

```
Промежуток 0.0 --- 0.8
         3          2
-0.2491 x - 0.5979 x + 0.7992 x + 0.8944
Промежуток 0.8 --- 1.6
       3           2
0.276 x + 0.06447 x + 0.3381 x + 1.265
Промежуток 1.6 --- 2.4
          3           2
-0.05355 x - 0.06406 x + 0.3384 x + 1.549
Промежуток 2.4 --- 3.2
         3          2
0.01944 x - 0.0174 x + 0.2732 x + 1.789
Промежуток 3.2 --- 4.0
          3
0.007251 x + 0.2593 x + 2
Считаем значение в точке 2...
f(2) = 1.4142135623730951
Кубический сплайн в точке 2 = 1.4070194041806625
Разница значений = 0.0071941581924326314
```



Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы была освоена интерполяция функций с помощью кубических сплайнов. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы, построены кубические интерполяционные сплайны, вычислено значение функции в точке согласно заданному варианту.

На точность кубического сплайна влияет интерполируемая функция, количество узлов, интервал, выбранная точка.