Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина «Методы численного анализа»

ОТЧЕТ

к лабораторной работе № 9

на тему:

«МЕТОДЫ ЭЙЛЕРА И РУНГЕ-КУТТА»

БГУИР 1-40-04-01

Выполнил студент группы 253504
Дмитрук Богдан Ярославович
06.12.2023
(дата, подпись студента)

Проверил
Анисимов Владимир Яковлевич

(дата, подпись преподавателя)

Минск 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цели выполнения задания ... 3
2. Краткие теоретические сведения ... 4
3. Задание ... 10
4. Программная реализация ... 11
5. Полученные результаты ... 12
6. Выводы ... 13

1. ЦЕЛИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

1. Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом Рунге-Кутта.
2. Составить программный продукт, реализующий решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом Рунге-Кутта.
3. Составить тестовые примеры.
4. Произвести решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом Рунге-Кутта в соответствии с вариантом с точностью до 0.001.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Будем предполагать, что *f(x,y)* непрерывная и непрерывно дифференцируемая по y функция в окрестности замкнутой области

$$D = \{(x, y) \,|\, a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

содержащей внутри себя точку (x_0, y_0).

Требуется решить задачу Коши: найти непрерывно дифференцируемую функцию *y=y(x)*, такую что $y'(x) = f(x, y(x))$ при всех $x \in [a, b]$ и $y(x_0) = y_0$.

Разобьем отрезок *[a, b]* с помощью точек разбиения $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ с шагом $h = (b - a)/n$. Тогда узлы разбиения имеют вид $x_k = x_0 + kh, \; k = \overline{0, n}$.

Пусть $y(x_0), y(x_1), ..., y(x_n)$ - значения функции в точках разбиения.

1) Метод Эйлера

Построим рекуррентную последовательность:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \qquad k = 0,1... \qquad (9.1)$$

$$y_0 = y(x_0),$$

которую называют последовательностью Эйлера. Соединяя ломаными все точки (x_k, y_k), полученные из рекуррентной последовательности Эйлера, получим ломаную линию, приближающую график решения $y = y(x)$. Функция, график которой совпадает с ломаной Эйлера, принимается за приближенное решение задачи Коши.

Точность метода Эйлера на всем отрезке $[a, b]$ будет $O(h)$.

Для повышения точности вычислений иногда используется модифицированный метод Эйлера, в котором рекуррентная последовательность Эйлера вычисляется по формулам

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)), \qquad k = 0,1...,n-1. \qquad (9.2)$$

Модифицированный метод Эйлера обычно дает более точное приближение решения.

Пример. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -y, \;\; x \in [0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Полагая $h = 0{,}2$ и используя метод Эйлера, получим, как легко убедиться, из формулы Эйлера (9.1)

$$y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.8 \cdot y_k .$$

С другой стороны, используя модифицированный метод Эйлера, получим в силу формулы (2) рекуррентную последовательность

$$y_{k+1} = y_k + 0.2 \cdot (-y_k) = 0.82 \cdot y_k \;\; .$$

Поскольку точным решением задачи Коши, как легко проверить, является функция $y = e^{-x}$, можно сравнить точность обоих методов.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8	0.64	0.572	0.4086	0.3277
$y_k^{модиф}$	1	0.82	0.6724	0.5514	0.4521	0.3708

e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Общепризнанным недостатком метода Эйлера является его не достаточно высокая точность. Несомненным достоинством метода Эйлера является его простота.

2) Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

На каждом шаге производится вычисление коэффициентов K_1, K_2, K_3, K_4:

$$K_1 = hf(x_k, y_k);$$

$$K_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2});$$

$$K_3 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2}{2});$$

$$K_4 = hf(x_k + h, y_k + K_3).$$

Затем вычисляем

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Данный метод имеет точность $O(h^4)$ на $[a,b]$.

Рассмотрим пример, который мы использовали для иллюстрации точности метода Эйлера.

Пример. Требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ на отрезке } [0,\ 1].$$

Выберем шаг $h = 0,2$. Результат вычислений поместим в таблицу.

	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8187	0.6703	0.5487	0.4493	0.3678
e^{-x}	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Таким образом, метод Рунге-Кутта 4-го порядка отличается очень высокой точностью. К определенным его недостаткам относится большая сложность и трудоемкость (на каждом шаге необходимо четырежды вычислять значения функции f вместо одного раза в методе Эйлера).

Отметим, что на практике выбирают начальную длину шага h таким образом, чтобы $h^4 < \varepsilon$, где ε - заданная точность вычисления решения. Затем шаг выбирают вдвое меньшим и останавливают вычисления, если разность полученных значений y_k со значениями, полученными при начальном выборе шага меньше ε. В противном случае шаг еще раз уменьшают вдвое и т.д.

3. ЗАДАНИЕ

ЗАДАНИЕ. С помощью метода Эйлера, а затем метода Рунге-Кутта найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке [0; 1].

$$y' = \frac{a(1-y^2)}{(1+m)x^2 + y^2 + 1}, \; y(0) = 0,$$

где значения параметров a и m принимают следующие значения для вариантов k.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	2.0
a	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.0

Шаг интегрирования h, обеспечивающий требуемую точность, выбирать в процессе вычисления из сравнения результатов, полученных с h и $h/2$. В случае необходимости шаг h должен быть уменьшен.

Сравнить результаты.

В соответствии с вариантом 5: m = 1.5, a = 1.3

4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Метод Эйлера:

```
def euler(xdot, N, y0, y_diff):
    ydots = [y0]
    h = xdot / N
    for i in range(N):
        x = i * h
        y = ydots[-1]
        ydots += [y + h * y_diff(x, y)]
    return ydots
```

Модифицированный метод Эйлера:

```
def modified_euler(xdot, N, y0, y_diff):
    ydots = [y0]
    h = xdot / N
    for i in range(N):
        x = i * h
        y = ydots[-1]
        ydots += [y + h * y_diff(x + h / 2, y + h / 2 *
y_diff(x, y))]
    return ydots
```

Метод Рюнге-Кутта:

```
def runge_kutta(xdot, N, y0, y_diff):
    ydots = [y0]
    h = xdot / N
    for i in range(N):
        x = i * h
        y = ydots[-1]
        K1 = h * y_diff(x, y)
        K2 = h * y_diff(x + h / 2, y + K1 / 2)
        K3 = h * y_diff(x + h / 2, y + K2 / 2)
        K4 = h * y_diff(x + h, y + K3)
        ydots += [y + 1/6 * (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)]
    return ydots
```

5. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Программным продуктом был выведен следующий результат:

```
Amount of dots:  1000
epsilon:   0.001
Euler method:
x[1]: 0.1
y[1]: 0.12905440510650934

x[4]: 0.4
y[4]: 0.4157666048713041

x[7]: 0.7000000000000001
y[7]: 0.5644718212190957

max amount of parts (n): 512
average amount of parts (n): 234.36163836163837

Modified Euler:
x[1] = 0.1
y[1] = 0.12767859395870007

x[4] = 0.4
y[4] = 0.41449886136565317

x[7] = 0.7000000000000001
y[7] = 0.5633788758612631

max amount of parts (n): 32
average amount of parts (n): 11.106893106893107

Runge-Kutta method:
x[1] = 0.1
y[1] = 0.12754590627182316

x[4] = 0.4
y[4] = 0.41491756555715575

x[7] = 0.7000000000000001
y[7] = 0.5635054718099476

max amount of parts (n): 8
average amount of parts (n): 3.5384615384615383
```

6. ВЫВОДЫ

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы были продемонстрированы метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера, метод Рунге-Кутта четвёртого порядка для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы, с заданной точностью построены графики решения дифференциального уравнения заданного варианта, по количеству необходимых для этого отрезков сравнена трудоёмкость методов.

Из результата работы программы можем сделать вывод, что метод Рунге-Кутта даёт более точные результаты, чем метод Эйлера. Как и ожидалось, увидели, что модифицированный метод Эйлера точнее, чем обычный метод Эйлера.