Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет

информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина «Методы численного анализа»

**ОТЧЕТ**

к лабораторной работе №2

на тему:

**«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ И МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ»**

БГУИР 1-40-04-01

|  |
| --- |
| Выполнил студент группы 253504  Дмитрук Богдан Ярославович |
|  |
| (дата, подпись студента) |
| Проверил  Анисимов Владимир Яковлевич |
|  |
| (дата, подпись преподавателя) |

Минск 2023

**СОДЕРЖАНИЕ**

[1. Цели выполнения задания 3](#_Toc147528122)

[2. Краткие теоретические сведения 4](#_Toc147528123)

[3. Задание 9](#_Toc147528124)

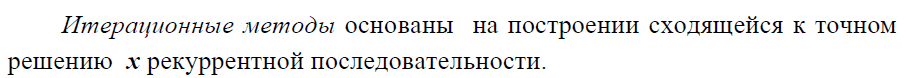
[4. Программная реализация 10](#_Toc147528125)

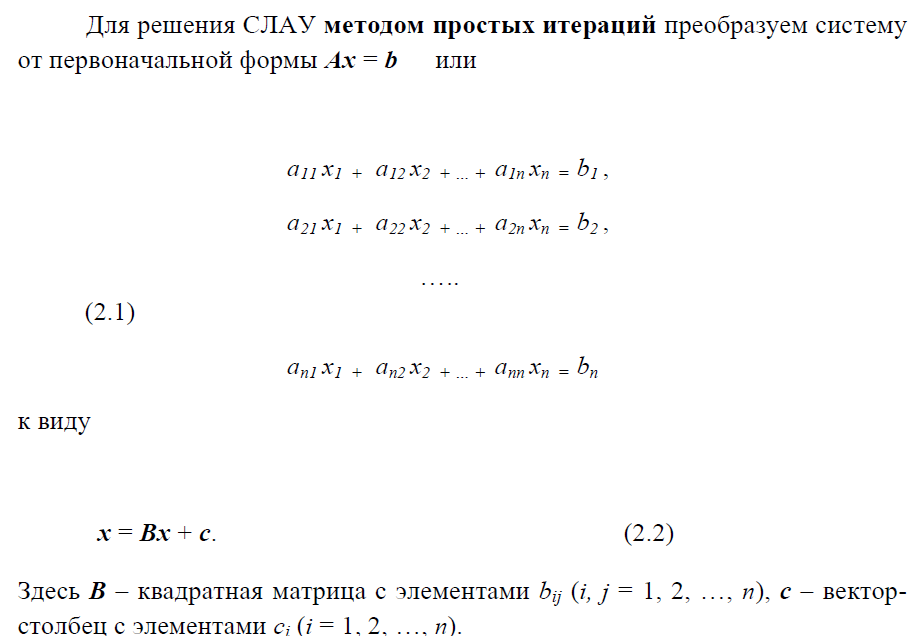
[5. Полученные результаты 16](#_Toc147528126)

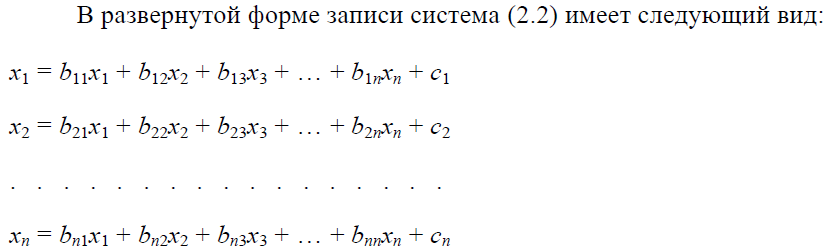
[6. Выводы 23](#_Toc147528127)

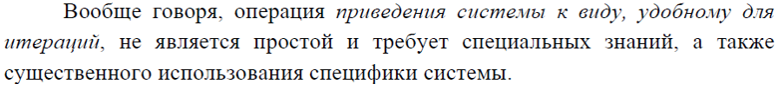
1. ЦЕЛИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

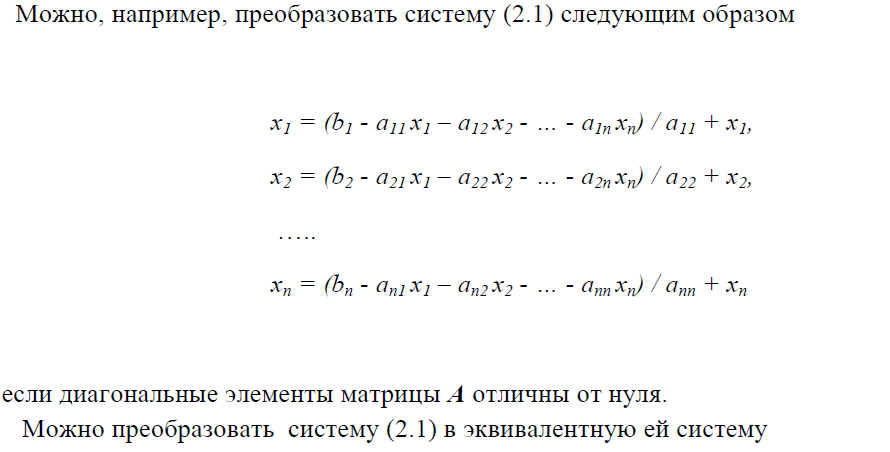
* Изучить итерационные методы решения СЛАУ (метод простых итераций, метод Зейделя).
* Составить алгоритм решения СЛАУ указанными методами, применимый для организации вычислений на ЭВМ.
* Составить программу решения СЛАУ по разработанному алгоритму.
* Численно решить тестовые примеры и проверить правильность работы программы. Сравнить трудоемкость решения методом простых итерацией и методом Зейделя.

1. **КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**  
     
   

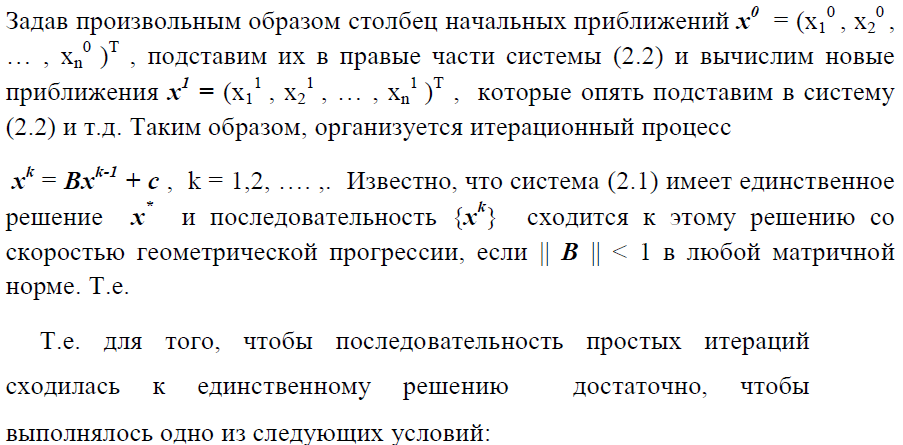
****

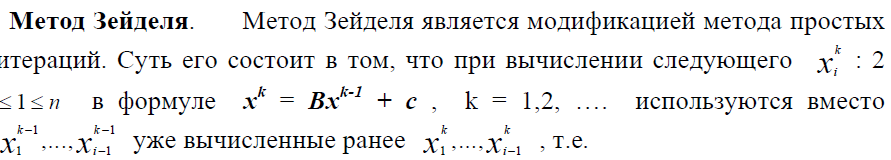
****

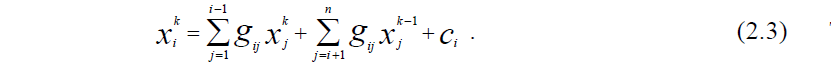
****

****

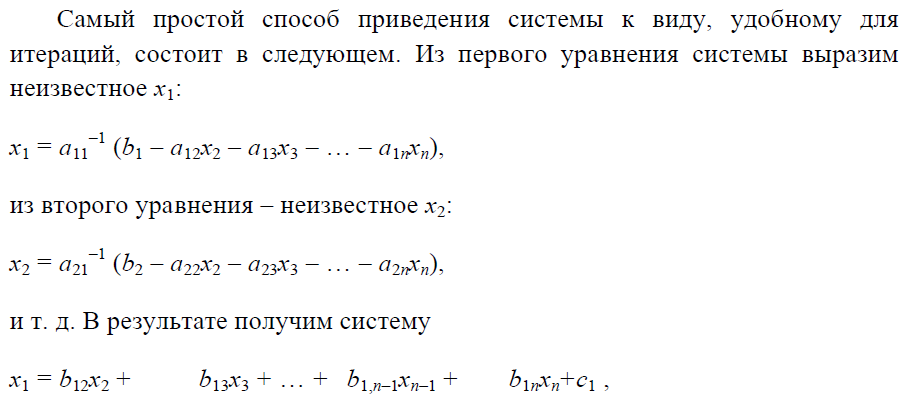
****

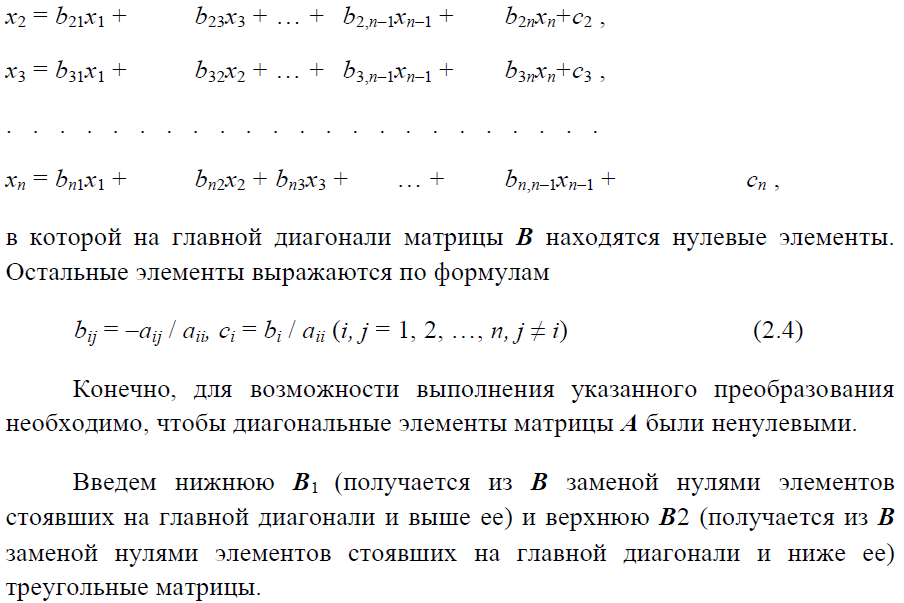
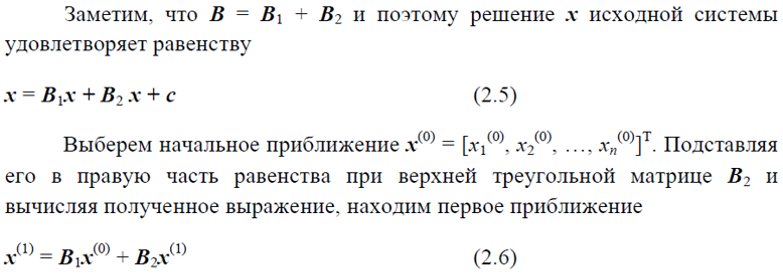
****

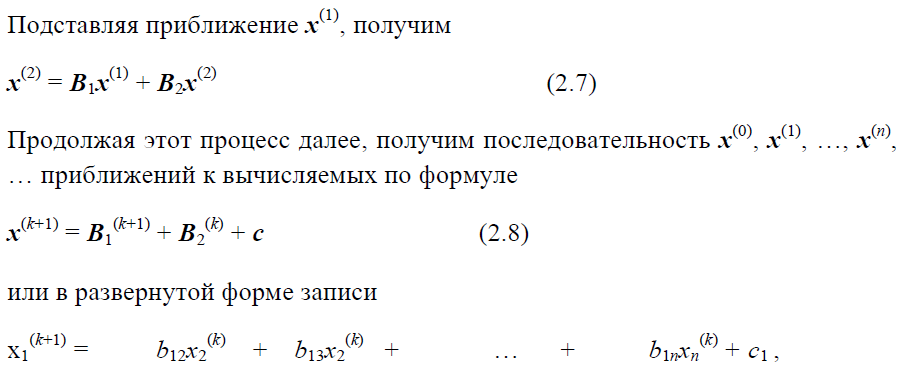
****

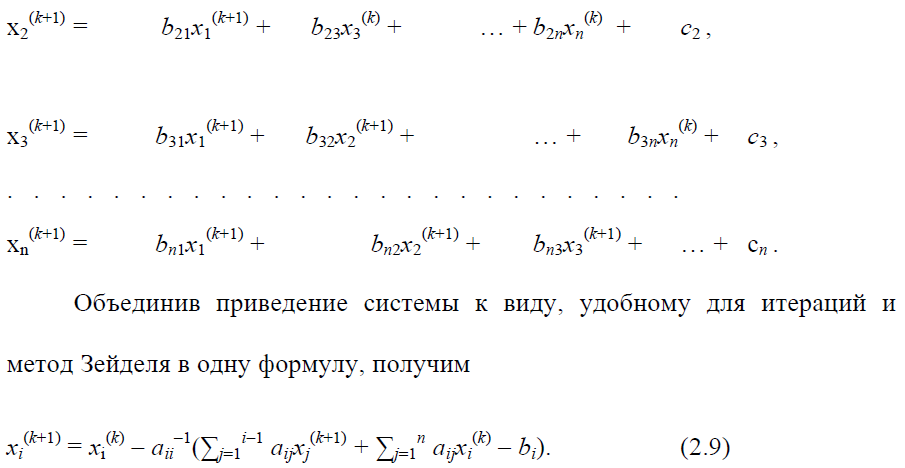
****

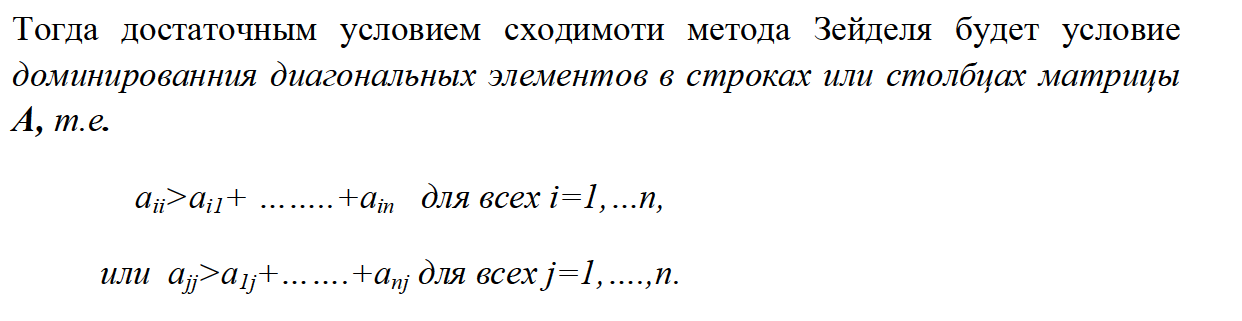
****

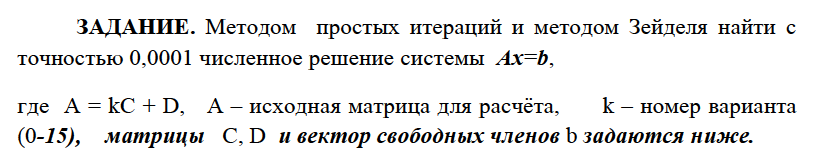
****

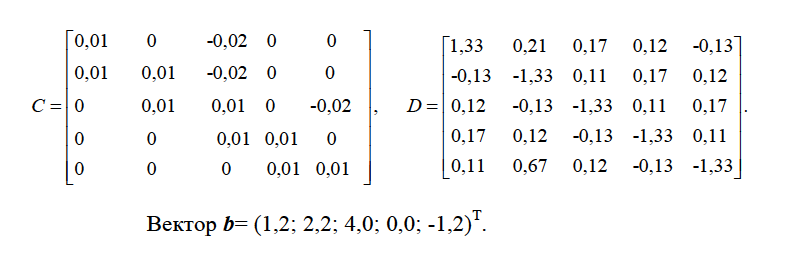
****

****

****



1. **ЗАДАНИЕ**



Вариант 5 (k = 5)

1. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

#-------------главный исполняемый файл------------

from simple\_iteration import simple\_iteration as simp

from seidel import seidel as sd

import secondary\_functions as sf

import numpy as np

import initial\_data as init

np.seterr(over="ignore")

print("\nВходные данные варианта 5\n")

sf.test(simp, init.get\_initial\_matrix)

sf.test(sd, init.get\_initial\_matrix)

print("\nВходные данные теста 1\n")

sf.test(simp, init.test1)

sf.test(sd, init.test1)

print("\nВходные данные теста 2\n")

sf.test(simp, init.test2)

sf.test(sd, init.test2)

print("\nВходные данные теста 3\n")

sf.test(simp, init.test3)

sf.test(sd, init.test3)

#------------файл с исходными данными----------------

import numpy as np

Accuracy = 1e-5

Limit\_number\_of\_iterations = 50

C = np.array([

[0.01, 0, -0.02, 0, 0],

[0.01, 0.01, -0.02, 0, 0],

[0, 0.01, 0.01, 0, -0.02],

[0, 0, 0.01, 0.01, 0],

[0, 0, 0, 0.01, 0.01]

])

D = np.array([

[1.33, 0.21, 0.17, 0.12, -0.13],

[-0.13, -1.33, 0.11, 0.17, 0.12],

[0.12, -0.13, -1.33, 0.11, 0.17],

[0.17, 0.12, -0.13, -1.33, 0.11],

[0.11, 0.67, 0.12, -0.13, -1.33]

])

b = np.array([

[1.2],

[2.2],

[4.0],

[0.0],

[-1.2]

])

k = 5

def test1(): #Ошибка из-за нулевого диагонального элемента

M = np.array([

[0, 1, 2],

[3, 4, 5],

[6, 7, 8]

])

B = np.array([

[1],

[2],

[3]

])

return (M, B)

def test2(): #Потенциальная расходимость итерационного процесса

M = np.array([

[2, 1, 1],

[1, 2, 1],

[1, 1, 2]

])

B = np.array([

[1],

[2],

[3]

])

return (M, B)

def test3(): #Ошибка из-за расходимости последовательности

M = np.array([

[1, 2, 3],

[4, 5, 6],

[7, 8, 9]

])

B = np.array([

[1],

[2],

[3]

])

return (M, B)

def get\_initial\_matrix():

M = k\*C + D

col = M.shape[0]

M = np.transpose(M)

for c in range(col):

if all(i == 0 for i in M[c]):

M = np.delete(M, c, axis = 0)

M = np.transpose(M)

M\_ex = np.hstack((M,b))

if np.linalg.matrix\_rank(M) != np.linalg.matrix\_rank(M\_ex):

print("the matrix is inconsistent")

exit(0)

if np.linalg.matrix\_rank(M) != len(M[0]):

print("the matrix has an infinite number of solutions")

exit(0)

return (M, b)

#------------файл реализации метода простых итераций----------

import numpy

from initial\_data import Accuracy as ac

import secondary\_functions as sf

from initial\_data import Limit\_number\_of\_iterations as il

def simple\_iteration(A, b):

print("\n---------------------------Метод простых итераций---------------------------\n")

n = A.shape[0]

for i in range(n):

if A[i, i] == 0.0:

print("Возникла ошибка:\n"

+ "Обнаружен нулевой диагональный элемент!")

return sf.err(n)

transition\_matrix = sf.get\_transition\_matrix(A)

if not (min(sf.Norms(transition\_matrix)) < 1):

print("Возникла потенциальная расходимость итерационного процесса:\n||B|| >= 1.")

initial\_solution = numpy.zeros((n, 1))

for i in range(n):

initial\_solution [i] = b[i] / A[i, i]

x = numpy.zeros((n, 1))

count = 0

deltax = ac

deltaf = ac

print("Промежуточные результаты метода простого итерирования:\n")

while deltax + deltaf > ac:

oldx = x

x = initial\_solution + transition\_matrix.dot(x)

deltax = numpy.absolute((x - oldx)).max()

deltaf = numpy.absolute((A.dot(x) - b)).max()

if not numpy.isfinite(deltax + deltaf) or count > il:

print("Возникла ошибка:\n"

+ f"Последовательность {x} расходится")

return sf.err(n)

for cur in range(len(x)):

print("%.4f" % x[cur, 0], end=", ")

print()

count += 1

print("Количество итераций:", count)

return x

#----------- файл реализации метода Зейделя ------------------

from fractions import Fraction as fr

import numpy as np

import copy

def full\_mod(M, cur\_col, arr = None):

row, col = M.shape

mr, mc = cur\_col, cur\_col

max = np.abs(M[cur\_col][cur\_col])

for r in range(cur\_col, row):

for c in range(cur\_col, col - 1):

if np.abs(M[r][c]) > max:

max = np.abs(M[r][c])

mr, mc = r,c

arr[cur\_col], arr[mc] = arr[mc], arr[cur\_col]

M[mr], M[cur\_col] = M[cur\_col].copy(), M[mr].copy()

M[:, [cur\_col, mc]] = M[:, [mc, cur\_col]]

#----------- файл реализации вспомогательных функций ---------

import numpy as np

import initial\_data as init

def err(n):

v = np.zeros((n, 1))

v[:] = np.NaN

return v

def Norms(A):

n = A.shape[0]

f = max(np.absolute(A[i]).sum() for i in range(n))

s = max(np.absolute(A.T[j]).sum() for j in range(n))

t = ((A\*\*2).sum()) \*\* (1 / 2)

return (f, s, t)

def get\_transition\_matrix(A):

n = A.shape[0]

alpha = np.zeros((n, n))

for i in range(n):

for j in range(n):

alpha[i, j] = -A[i, j] / A[i, i]

alpha[i, i] = 0

return alpha

def output(A, x, b):

np.set\_printoptions(suppress=True, precision=4, floatmode="fixed")

if not np.isnan(x).any():

print(f"A = \n{A}\n"

+f"x = \n{x.T}\n"

+f"Проверка: b = \n{b.T}\n{A.dot(x).T}")

def test(method, initial):

(A, b) = initial()

x = method(A.copy(), b.copy())

output(A, x, b)

1. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вывод программного продукта

---------------------------Метод простых итераций---------------------------

Промежуточные результаты метода простого итерирования:

0.8696, -1.7188, -3.1250, 0.0000, 0.9375,

1.3779, -1.7096, -2.8848, 0.2302, -0.1804,

1.2390, -1.8137, -2.8790, 0.1875, -0.1238,

1.2636, -1.8054, -2.8861, 0.1638, -0.1870,

1.2588, -1.8161, -2.8898, 0.1629, -0.1797,

1.2614, -1.8152, -2.8893, 0.1621, -0.1860,

1.2607, -1.8161, -2.8895, 0.1620, -0.1853,

1.2610, -1.8160, -2.8895, 0.1619, -0.1858,

1.2609, -1.8161, -2.8895, 0.1619, -0.1857,

1.2609, -1.8160, -2.8895, 0.1618, -0.1857,

Количество итераций: 10

A =

[[ 1.3800 0.2100 0.0700 0.1200 -0.1300]

[-0.0800 -1.2800 0.0100 0.1700 0.1200]

[ 0.1200 -0.0800 -1.2800 0.1100 0.0700]

[ 0.1700 0.1200 -0.0800 -1.2800 0.1100]

[ 0.1100 0.6700 0.1200 -0.0800 -1.2800]]

b =

[[ 1.2000 2.2000 4.0000 0.0000 -1.2000]]

x =

[[ 1.2609 -1.8160 -2.8895 0.1618 -0.1857]]

Проверка: b =

[[ 1.2000 2.2000 4.0000 0.0000 -1.2000]]

[[ 1.2000 2.2000 4.0000 -0.0000 -1.2000]]

---------------------------Метод Зейделя---------------------------

Промежуточные результаты метода Зейделя:

0.8696, -1.7731, -2.9327, 0.1326, -0.1991,

1.2579, -1.8213, -2.8927, 0.1600, -0.1890,

1.2617, -1.8167, -2.8898, 0.1616, -0.1860,

1.2610, -1.8161, -2.8896, 0.1618, -0.1858,

1.2609, -1.8161, -2.8895, 0.1618, -0.1857,

1.2609, -1.8161, -2.8895, 0.1618, -0.1857,

Количество итераций: 6

A =

[[ 1.3800 0.2100 0.0700 0.1200 -0.1300]

[-0.0800 -1.2800 0.0100 0.1700 0.1200]

[ 0.1200 -0.0800 -1.2800 0.1100 0.0700]

[ 0.1700 0.1200 -0.0800 -1.2800 0.1100]

[ 0.1100 0.6700 0.1200 -0.0800 -1.2800]]

b =

[[ 1.2000 2.2000 4.0000 0.0000 -1.2000]]

x =

[[ 1.2609 -1.8161 -2.8895 0.1618 -0.1857]]

Проверка: b =

[[ 1.2000 2.2000 4.0000 0.0000 -1.2000]]

[[ 1.2000 2.2000 4.0000 0.0000 -1.2000]]

Входные данные теста 1

---------------------------Метод простых итераций---------------------------

Возникла ошибка:

Обнаружен нулевой диагональный элемент!

A =

[[0 1 2]

[3 4 5]

[6 7 8]]

b =

[[1 2 3]]

x =

[[nan nan nan]]

---------------------------Метод Зейделя---------------------------

Возникла ошибка:

Обнаружен нулевой диагональный элемент!

A =

[[0 1 2]

[3 4 5]

[6 7 8]]

b =

[[1 2 3]]

x =

[[nan nan nan]]

Входные данные теста 2

---------------------------Метод простых итераций---------------------------

Возникла потенциальная расходимость итерационного процесса:

||B|| >= 1.

Промежуточные результаты метода простого итерирования:

0.5000, 1.0000, 1.5000,

-0.7500, 0.0000, 0.7500,

0.1250, 1.0000, 1.8750,

-0.9375, 0.0000, 0.9375,

0.0312, 1.0000, 1.9688,

-0.9844, 0.0000, 0.9844,

0.0078, 1.0000, 1.9922,

-0.9961, 0.0000, 0.9961,

0.0020, 1.0000, 1.9980,

-0.9990, 0.0000, 0.9990,

0.0005, 1.0000, 1.9995,

-0.9998, 0.0000, 0.9998,

0.0001, 1.0000, 1.9999,

-0.9999, 0.0000, 0.9999,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

-1.0000, 0.0000, 1.0000,

0.0000, 1.0000, 2.0000,

Возникла ошибка:

Последовательность расходится

A =

[[2 1 1]

[1 2 1]

[1 1 2]]

b =

[[1 2 3]]

x =

[[nan nan nan]]

---------------------------Метод Зейделя---------------------------

Внимание: Метод Зейделя может расходится

Промежуточные результаты метода Зейделя:

0.5000, 0.7500, 0.8750,

-0.3125, 0.7188, 1.2969,

-0.5078, 0.6055, 1.4512,

-0.5283, 0.5386, 1.4949,

-0.5167, 0.5109, 1.5029,

-0.5069, 0.5020, 1.5025,

-0.5022, 0.4999, 1.5012,

-0.5005, 0.4997, 1.5004,

-0.5001, 0.4998, 1.5001,

-0.5000, 0.4999, 1.5000,

-0.5000, 0.5000, 1.5000,

Количество итераций: 11

A =

[[2 1 1]

[1 2 1]

[1 1 2]]

b =

[[1 2 3]]

x =

[[-0.5000 0.5000 1.5000]]

Проверка: b =

[[1 2 3]]

[[1.0000 2.0000 3.0000]]

Входные данные теста 3

---------------------------Метод простых итераций---------------------------

Возникла потенциальная расходимость итерационного процесса:

||B|| >= 1.

Промежуточные результаты метода простого итерирования:

1.0000, 0.4000, 0.3333,

-0.8000, -0.8000, -0.8000,

5.0000, 2.0000, 1.6667,

-8.0000, -5.6000, -5.3333,

28.2000, 13.2000, 11.5333,

-60.0000, -36.0000, -33.3333,

173.0000, 88.4000, 79.0000,

-412.8000, -232.8000, -212.8000,

1105.0000, 586.0000, 528.3333,

-2756.0000, -1517.6000, -1380.0000,

7176.2000, 3861.2000, 3492.8667,

-18200.0000, -9932.0000, -9013.3333,

46905.0000, 25376.4000, 22984.3333,

-119704.8000, -65104.8000, -59038.1333,

307325.0000, 166610.0000, 150975.0000,

-786144.0000, -427029.6000, -387128.0000,

2015444.2000, 1093469.2000, 991027.5333,

-5160020.0000, -2801588.0000, -2539540.0000,

13221797.0000, 7175464.4000, 6503649.6667,

-33861876.8000, -18381816.8000, -16661810.1333,

86749065.0000, 47083674.0000, 42676408.3333,

-222196572.0000, -120610941.6000, -109323649.3333,

569192832.2000, 308945637.2000, 280029282.2000,

-1457979120.0000, -791389404.0000, -717323880.0000,

3734750449.0000, 2027171952.4000, 1837441008.3333,

-9566666928.8000, -5192729568.8000, -4706736528.8000,

24505668725.0000, 13301417378.0000, 12056500561.6667,

-62772336440.0000, -34072335653.6000, -30883446677.3333,

160795011340.2000, 87278005165.2000, 79109448923.5333,

-411884357100.0000, -223567347780.0000, -202643235633.3333,

1055064402460.9999, 572679368440.4000, 519081031326.9999,

-2702601830860.7998, -1466948759560.8000, -1329653973860.8000,

6922859440705.0000, 3757666233322.0000, 3405978099168.3335,

-17733266764148.0000, -9625461271565.5996, -8724593994612.0000,

45424704526968.2031, 24656126204853.1992, 22348506391284.8633,

-116357771583559.9844, -63157971291116.0000, -57246882369733.3281,

298056589691433.0000, 161782476110528.4062, 146640907934872.3125,

-763487676025672.7500, -414414361274992.8125, -375628437413806.1875,

1955714034791405.2500, 1061544265717106.0000, 962192069153295.0000,

-5009664738894096.0000, -2719201710817077.5000, -2464705818808520.0000,

12832520878059716.0000, 6965378773685501.0000, 6313474095421699.0000,

-32871179833636100.0000, -17842185616953812.0000, -16172297370655780.0000,

84201263345874960.0000, 45703700711695816.0000, 41426193752342576.0000,

-215685982680419360.0000, -117072443179511056.0000, -106115383234965696.0000,

552491036063919232.0000, 299887246026294336.0000, 271820158244336000.0000,

-1415234966785596672.0000, -768177018744338560.0000, -696281691184198784.0000,

3625199111041273344.0000, 1967726002849516032.0000, 1783562324161542656.0000,

-9286138978183659520.0000, -5040434077826870272.0000, -4568689088898337792.0000,

23786935422348754944.0000, 12911338089224933376.0000, 11702938385544509440.0000,

-60931491335083393024.0000, -33073074400532414464.0000, -29977694741137862656.0000,

156079233024478412800.0000, 84718426757432147968.0000, 76789448283315896320.0000,

Возникла ошибка:

Последовательность расходится

A =

[[1 2 3]

[4 5 6]

[7 8 9]]

b =

[[1 2 3]]

x =

[[nan nan nan]]

---------------------------Метод Зейделя---------------------------

Внимание: Метод Зейделя может расходится

Промежуточные результаты метода Зейделя:

1.0000, -0.4000, -0.0889,

2.0667, -1.1467, -0.2548,

4.0578, -2.5404, -0.5645,

7.7745, -5.1422, -1.1427,

14.7124, -9.9987, -2.2219,

27.6632, -19.0642, -4.2365,

51.8380, -35.9866, -7.9970,

96.9643, -67.5750, -15.0167,

181.1999, -126.5400, -28.1200,

338.4399, -236.6079, -52.5795,

631.9545, -442.0681, -98.2374,

1179.8483, -825.5938, -183.4653,

2202.5836, -1541.5085, -342.5574,

4111.6894, -2877.8826, -639.5295,

7675.3535, -5372.4474, -1193.8772,

14327.5265, -10028.9685, -2228.6597,

26744.9161, -18721.1413, -4160.2536,

49924.0434, -34946.5304, -7765.8956,

93191.7476, -65233.9233, -14496.4274,

173958.1289, -121770.3902, -27060.0867,

324722.0406, -227305.1284, -50512.2508,

606148.0091, -424303.3063, -94289.6236,

1131476.4836, -792033.2385, -176007.3863,

2112089.6360, -1478462.4452, -328547.2100,

3942567.5205, -2759796.9644, -613288.2143,

7359459.5717, -5151621.4002, -1144804.7556,

13737658.0671, -9616360.3470, -2136968.9660,

25643628.5919, -17950539.7144, -3989008.8254,

47868106.9049, -33507674.5335, -7446149.8963,

89353799.7559, -62547659.5291, -13899479.8954,

166793759.7444, -116755631.5210, -25945695.8936,

311348351.7228, -217943845.9060, -48431965.7569,

581183590.0826, -406828512.7578, -90406336.1684,

1084876035.0208, -759413224.2145, -168758494.2699,

2025101932.2388, -1417571352.2671, -315015856.0594,

3780190273.7123, -2646133191.2986, -588029598.0664,

7056355177.7964, -4939448624.1575, -1097655249.8128,

13171862998.7532, -9220304098.8273, -2048956466.4061,

24587477597.8727, -17211234318.2109, -3824718737.3802,

45896624849.5624, -32127637394.3937, -7139474976.5319,

85673699719.3831, -59971589803.2682, -13327019956.2818,

159924239476.3818, -111946967633.1673, -24877103918.4816,

298525247022.7794, -208967672915.6456, -46437260647.9212,

557247127776.0548, -390072989442.9384, -86682886542.8752,

1040194638515.5023, -728136246960.5515, -161808054880.1227,

1941696658562.4712, -1359187660993.4297, -302041702442.9846,

3624500429316.8135, -2537150300521.4692, -563811177893.6602,

6765734134724.9189, -4736013894307.1426, -1052447532068.2544,

12629370384820.0469, -8840559269373.7324, -1964568726527.4966,

23574824718330.9531, -16502377302831.3672, -3667194956184.7500,

44006339474217.9844, -30804437631952.2852, -6845430584878.2881,

Возникла ошибка:

Последовательность расходится

A =

[[1 2 3]

[4 5 6]

[7 8 9]]

b =

[[1 2 3]]

x =

[[nan nan nan]]

1. ВЫВОДЫ

В ходе лабораторной работы был применены итерационные методы решения СЛАУ в двух вариантах: метод простых итераций и метод Зейделя. Были разработаны алгоритмы решения СЛАУ указанными методами, составлена программа по разработанным алгоритмам, решены тестовые примеры.

На основании тестовых примеров можно сделать следующие выводы:

1. Метод простых итераций более ресурсозатратный (исходя из примеров, приведенных в моих результатах) из-за большего количества проводимых итераций.
2. Метод Зейделя является более быстрой модификацией метода простых итерация.
3. Оба метода позволяют получить решение с заданной точностью, причем корни в обоих методах могут отличаться в пределах заданной погрешности.
4. Если не выполняется необходимое и достаточное условие сходимости, то следует прибегнуть к преобразованиям, чтобы попытаться решить заданое СЛАУ.