



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДВФУ)

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**Департамент математического и компьютерного моделирования**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4**

По основной образовательной программе подготовки бакалавров  
направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
профиль «Сквозные цифровые технологии»

Студент группы

Б9120-02.03.01сст - Пограничный Кирилл

(подпись)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

Преподаватель: Яковлев Анатолий  
Александрович

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

г. Владивосток

2023

### Постановка задачи:

Пусть дана матричная игра, заданная матрицей  $A$  размерности  $6 \times 8$ . Необходимо найти верхнюю и нижнюю цену игры и равновесное решение в смешанных стратегиях.

$$A = \begin{pmatrix} -59 & 84 & -90 & 31 & -37 & -94 & 66 & -59 \\ 85 & -70 & -83 & 77 & -68 & -39 & 33 & 66 \\ -98 & -56 & -82 & 21 & 41 & -44 & -73 & -17 \\ -50 & -51 & -40 & 21 & -92 & 79 & -73 & 23 \\ -37 & -74 & -9 & 84 & 85 & 10 & -98 & -51 \\ 77 & -28 & 92 & -80 & 17 & -85 & -64 & -73 \end{pmatrix}$$

Нижняя цена игры:

$$\underline{A} = \max_i \min_j a_{ij} = -83$$

Верхняя цена игры:

$$\bar{A} = \min_j \max_i a_{ij} = 66$$

Искать равновесное решение в смешанных стратегиях будем с помощью симплекс-метода. Для этого необходимо сделать матрицу  $A$  неотрицательной, поэтому к каждому элементу матрицы  $A$  добавим модуль минимального элемента  $\beta$  матрицы  $A$ .

$$\beta = \min_{ij} a_{ij} = -98$$

Получается неотрицательная матрица  $\hat{A}$ .

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 39 & 182 & 8 & 129 & 61 & 4 & 164 & 39 \\ 183 & 28 & 15 & 175 & 30 & 59 & 131 & 164 \\ 0 & 42 & 180 & 119 & 139 & 54 & 25 & 81 \\ 48 & 47 & 58 & 119 & 6 & 177 & 25 & 121 \\ 61 & 24 & 89 & 182 & 183 & 108 & 0 & 47 \\ 175 & 70 & 190 & 18 & 115 & 13 & 34 & 25 \end{pmatrix}$$

Необходимо решить следующие задачи:

$$1. \begin{cases} y \cdot e \rightarrow \max \\ \hat{A}y \leq e^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} e \cdot x \rightarrow \min \\ \hat{A}^T x \geq e \\ x \geq 0 \end{cases}$$

В этом случае оптимальная стратегия первого игрока будет найдена по формуле:

$$p^* = \frac{x}{\|x\|}.$$

А оптимальная стратегия второго игрока будет найдена по формуле:

$$q^* = \frac{y}{\|y\|}.$$

Цена игры будет равна:

$$\varphi = \frac{1}{\alpha} - |\beta|,$$

где  $\alpha$  – значение целевой функции, полученной в результате решения задач линейной оптимизации.

$q^*$  – находится прямой задачей;

$p^*$  – находится двойственной задачей.

## Приложение

Прямая задача

Начальный шаг  
Индекс разрешающей строки = 2  
Индекс разрешающего столбца = 0  
Разрешающий элемент = 183.0  
Промежуточное решение: [0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 1. 1. 1. 1.]

	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	39.00	182.00	8.00	129.00	61.00	4.00	164.00	39.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
<b>183.00</b>	28.00	15.00	175.00	30.00	59.00	131.00	164.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
0.00	42.00	180.00	119.00	139.00	54.00	25.00	81.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
48.00	47.00	58.00	119.00	6.00	177.00	25.00	121.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
61.00	24.00	89.00	182.00	183.00	108.00	0.00	47.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00
175.00	70.00	190.00	18.00	115.00	13.00	34.00	25.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00

Шаг 2  
Индекс разрешающей строки = 6  
Индекс разрешающего столбца = 2  
Разрешающий элемент = 175.65573770491804  
Промежуточное решение: [0.00546448 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.78688525 0. 1. 0.73770492 0.66666667 0.04371585]

0.00	−0.85	−0.92	−0.04	−0.84	−0.68	−0.28	−0.10	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
0.00	176.03	4.80	91.70	54.61	−8.57	136.08	4.05	1.00	−0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.79
1.00	0.15	0.08	0.96	0.16	0.32	0.72	0.90	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
0.00	42.00	180.00	119.00	139.00	54.00	25.00	81.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
0.00	39.66	54.07	73.10	−1.87	161.52	−9.36	77.98	0.00	−0.26	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.74
0.00	14.67	84.00	123.67	173.00	88.33	−43.67	−7.67	0.00	−0.33	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.67
0.00	43.22	<b>175.66</b>	−149.35	86.31	−43.42	−91.27	−131.83	0.00	−0.96	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.04

Шаг 3  
Индекс разрешающей строки = 4  
Индекс разрешающего столбца = 5  
Разрешающий элемент = 174.8891896095816  
Промежуточное решение: [5.44408151e-03 0.00000000e+00 2.48872297e-04 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 7.85689843e-01 0.00000000e+00 9.55202986e-01 7.24249494e-01 6.45761394e-01 0.00000000e+00]

0.00	−0.62	0.00	−0.82	−0.38	−0.90	−0.76	−0.79	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
0.00	174.85	0.00	95.79	52.25	−7.39	138.58	7.65	1.00	−0.19	0.00	0.00	0.00	−0.03	0.79
1.00	0.13	0.00	1.03	0.12	0.34	0.76	0.96	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	−0.00	0.01
0.00	−2.29	0.00	272.04	50.55	98.49	118.53	216.09	0.00	0.98	1.00	0.00	0.00	−1.02	0.96
0.00	26.35	0.00	119.07	−28.43	<b>174.89</b>	18.73	118.56	0.00	0.03	0.00	1.00	0.00	−0.31	0.72
0.00	−6.00	0.00	195.09	131.73	109.10	−0.02	55.38	0.00	0.12	0.00	0.00	1.00	−0.48	0.65
0.00	0.25	1.00	−0.85	0.49	−0.25	−0.52	−0.75	0.00	−0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00

Шаг 4  
Индекс разрешающей строки = 3  
Индекс разрешающего столбца = 6  
Разрешающий элемент = 107.98068861415348  
Промежуточное решение: [0.00402504 0. 0.00127254 0. 0. 0.00414119 0. 0. 0.81627849 0. 0.54731792 0. 0.19396785 0. ]

0.00	−0.48	0.00	−0.21	−0.53	0.00	−0.66	−0.18	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01
0.00	175.96	0.00	100.82	51.05	0.00	139.37	12.66	1.00	−0.19	0.00	0.04	0.00	−0.04	0.82
1.00	0.08	0.00	0.79	0.18	0.00	0.72	0.73	0.00	0.01	0.00	−0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	−17.13	0.00	204.99	66.57	0.00	<b>107.98</b>	149.32	0.00	0.96	1.00	−0.56	0.00	−0.85	0.55
0.00	0.15	0.00	0.68	−0.16	1.00	0.11	0.68	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	−0.00	0.00
0.00	−22.44	0.00	120.81	149.46	0.00	−11.70	−18.58	0.00	0.10	0.00	−0.62	1.00	−0.29	0.19
0.00	0.28	1.00	−0.68	0.45	0.00	−0.49	−0.58	0.00	−0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00

Шаг 5  
Индекс разрешающей строки = 1  
Индекс разрешающего столбца = 1  
Разрешающий элемент = 198.07821545993394  
Промежуточное решение: [0.0003668 0. 0.00377209 0. 0. 0.00359828 0.00506866 0. 0.10986379 0. 0. 0. 0.2532947 0. ]

0.00	−0.59	0.00	1.05	−0.12	0.00	0.00	0.74	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	−0.00	0.01
0.00	<b>198.08</b>	0.00	−163.76	−34.87	0.00	0.00	−180.06	1.00	−1.43	−1.29	0.77	0.00	1.06	0.11
1.00	0.20	0.00	−0.58	−0.27	0.00	0.00	−0.27	0.00	−0.00	−0.01	0.00	0.00	0.01	0.00
0.00	−0.16	0.00	1.90	0.62	0.00	1.00	1.38	0.00	0.01	0.01	−0.01	0.00	−0.01	0.01
0.00	0.17	0.00	0.48	−0.23	1.00	0.00	0.53	0.00	−0.00	−0.00	0.01	0.00	−0.00	0.00
0.00	−24.30	0.00	143.03	156.68	0.00	0.00	−2.40	0.00	0.21	0.11	−0.68	1.00	−0.38	0.25
0.00	0.21	1.00	0.25	0.76	0.00	0.00	0.10	0.00	−0.00	0.00	−0.00	0.00	0.00	0.00

Шаг 6  
Индекс разрешающей строки = 5  
Индекс разрешающего столбца = 4  
Разрешающий элемент = 152.40079080283283  
Промежуточное решение: [2.58244604e-04 5.54648522e-04 3.65834860e-03 0.00000000e+00 0.00000000e+00 3.50528086e-03 5.15667389e-03 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 2.66772156e-01 0.00000000e+00]

0.00	0.00	0.00	0.56	−0.23	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
0.00	1.00	0.00	−0.83	−0.18	0.00	0.00	−0.91	0.01	−0.01	−0.01	0.00	0.00	0.01	0.00
1.00	0.00	0.00	−0.42	−0.23	0.00	0.00	−0.09	−0.00	0.00	−0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.77	0.59	0.00	1.00	1.24	0.00	0.01	0.01	−0.00	0.00	−0.01	0.01
0.00	0.00	0.00	0.62	−0.20	1.00	0.00	0.68	−0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	−0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	122.94	<b>152.40</b>	0.00	0.00	−24.49	0.12	0.03	−0.05	−0.59	1.00	−0.25	0.27
0.00	0.00	1.00	0.42	0.79	0.00	0.00	0.29	−0.00	0.00	0.01	−0.00	0.00	0.00	0.00

Последний шаг  
Оптимальное решение: [0.00066279 0.00086283 0.00227322 0. 0.00175046 0.0038538 0.00412645 0. 0. 0. 0. 0. 0. ] Значение целевой функции = 0.01

0.00	0.00	0.00	0.75	0.00	0.00	0.00	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
0.00	1.00	0.00	−0.68	0.00	0.00	0.00	−0.94	0.01	−0.01	−0.01	0.00	0.00	0.01	0.00
1.00	0.00	0.00	−0.23	0.00	0.00	0.00	−0.13	−0.00	0.00	−0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.29	0.00	0.00	1.00	1.33	0.00	0.01	0.01	−0.00	−0.00	−0.01	0.00
0.00	0.00	0.00	0.78	0.00	1.00	0.00	0.65	−0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	−0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.81	1.00	0.00	0.00	−0.16	0.00	0.00	−0.00	−0.00	0.01	−0.00	0.00
0.00	0.00	1.00	−0.21	0.00	0.00	0.00	0.41	−0.00	0.00	0.01	0.00	−0.01	0.00	0.00

Результат:  
y = [0.00066279 0.00086283 0.00227322 0. 0.00175046 0.0038538 0.00412645 0.]  
||y|| = 0.00642610065401251  
q = y / ||y|| = [0.10314031 0.13426961 0.35374796 0. 0.27239847 0.59971049 0.64213902 0.]  
Значение целевой функции = 0.01

Двойственная задача:

Двойственная задача приводится к каноническому виду, далее ищется начальная угловая точка, решая вспомогательную задачу. Решение вспомогательной задачи Базисные столбцы выделяются с помощью элементарных преобразований строк. К первой строке добавляются остальные строки, умноженные на -1. Получается:

Начальный шаг

Индекс разрешающей строки = 1

Индекс разрешающего столбца = 1

Разрешающий элемент = 183.0

Промежуточное решение: [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]

$$\begin{pmatrix} -626.00 & -785.00 & -640.00 & -601.00 & -694.00 & -640.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -8.00 \\ 39.00 & \mathbf{183.00} & 0.00 & 48.00 & 61.00 & 175.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 182.00 & 28.00 & 42.00 & 47.00 & 24.00 & 70.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 8.00 & 15.00 & 180.00 & 58.00 & 89.00 & 190.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 129.00 & 175.00 & 119.00 & 119.00 & 182.00 & 18.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 61.00 & 30.00 & 139.00 & 6.00 & 183.00 & 115.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 4.00 & 59.00 & 54.00 & 177.00 & 108.00 & 13.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 164.00 & 131.00 & 25.00 & 25.00 & 0.00 & 34.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 \\ 39.00 & 164.00 & 81.00 & 121.00 & 47.00 & 25.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Шаг 2

Индекс разрешающей строки = 4

Индекс разрешающего столбца = 2

Разрешающий элемент = 119.0

Промежуточное решение: [0. 0.00546448 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]

$$\begin{pmatrix} -458.70 & 0.00 & -640.00 & -395.10 & -432.33 & 110.68 & -3.29 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 4.29 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -3.71 \\ 0.21 & 1.00 & 0.00 & 0.26 & 0.33 & 0.96 & -0.01 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 176.03 & 0.00 & 42.00 & 39.66 & 14.67 & 43.22 & 0.15 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.15 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.85 \\ 4.80 & 0.00 & 180.00 & 54.07 & 84.00 & 175.66 & 0.08 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.08 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.92 \\ 91.70 & 0.00 & \mathbf{119.00} & 73.10 & 123.67 & -149.35 & 0.96 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.96 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.04 \\ 54.61 & 0.00 & 139.00 & -1.87 & 173.00 & 86.31 & 0.16 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.16 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.84 \\ -8.57 & 0.00 & 54.00 & 161.52 & 88.33 & -43.42 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & -0.32 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.68 \\ 136.08 & 0.00 & 25.00 & -9.36 & -43.67 & -91.27 & 0.72 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & -0.72 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.28 \\ 4.05 & 0.00 & 81.00 & 77.98 & -7.67 & -131.83 & 0.90 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & -0.90 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.10 \end{pmatrix}$$

Шаг 3

Индекс разрешающей строки = 3

Индекс разрешающего столбца = 5

Разрешающий элемент = 401.562887450062

Промежуточное решение: [0. 0.00546448 0.00036736 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]

$$\begin{pmatrix} 34.50 & 0.00 & 0.00 & -1.96 & 232.76 & -692.54 & 1.85 & 1.00 & 1.00 & -4.38 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & -0.85 & 0.00 & 0.00 & 5.38 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -3.48 \\ 0.21 & 1.00 & 0.00 & 0.26 & 0.33 & 0.96 & -0.01 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 \\ 143.67 & 0.00 & 0.00 & 13.86 & -28.98 & 95.94 & -0.18 & -1.00 & 0.00 & 0.35 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.18 & 1.00 & 0.00 & -0.35 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.83 \\ -133.91 & 0.00 & 0.00 & -56.50 & -103.06 & \mathbf{401.56} & -1.36 & 0.00 & -1.00 & 1.51 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.36 & 0.00 & 1.00 & -1.51 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.85 \\ 0.77 & 0.00 & 1.00 & 0.61 & 1.04 & -1.26 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -52.51 & 0.00 & 0.00 & -87.25 & 28.55 & 260.76 & -0.95 & 0.00 & 0.00 & 1.17 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.95 & 0.00 & 0.00 & -1.17 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.79 \\ -50.19 & 0.00 & 0.00 & 128.35 & 32.22 & 24.35 & -0.11 & 0.00 & 0.00 & 0.45 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.11 & 0.00 & 0.00 & -0.45 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.66 \\ 116.82 & 0.00 & 0.00 & -24.72 & -69.65 & -59.90 & 0.51 & 0.00 & 0.00 & 0.21 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & -0.51 & 0.00 & 0.00 & -0.21 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.27 \\ -58.37 & 0.00 & 0.00 & 28.23 & -91.84 & -30.17 & 0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.68 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & -0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.68 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.07 \end{pmatrix}$$

Шаг 4

Индекс разрешающей строки = 2

Индекс разрешающего столбца = 0

Разрешающий элемент = 175.65823414621318

Промежуточное решение: [0. 0.00343574 0.0030299 0. 0. 0.00212148 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]

$$\begin{pmatrix} -196.45 & 0.00 & 0.00 & -99.41 & 55.03 & 0.00 & -0.50 & 1.00 & -0.72 & -1.77 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.50 & 0.00 & 1.72 & 2.77 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -2.01 \\ 0.53 & 1.00 & 0.00 & 0.40 & 0.58 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ \mathbf{175.66} & 0.00 & 0.00 & 27.36 & -4.36 & 0.00 & 0.14 & -1.00 & 0.24 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.14 & 1.00 & -0.24 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.63 \\ -0.33 & 0.00 & 0.00 & -0.14 & -0.26 & 1.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.35 & 0.00 & 1.00 & 0.44 & 0.72 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 34.45 & 0.00 & 0.00 & -50.56 & 95.47 & 0.00 & -0.07 & 0.00 & 0.65 & 0.19 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.07 & 0.00 & -0.65 & -0.19 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.23 \\ -42.07 & 0.00 & 0.00 & 131.78 & 38.47 & 0.00 & -0.03 & 0.00 & 0.06 & 0.36 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.03 & 0.00 & -0.06 & -0.36 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.61 \\ 96.84 & 0.00 & 0.00 & -33.15 & -85.02 & 0.00 & 0.31 & 0.00 & -0.15 & 0.44 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & -0.31 & 0.00 & 0.15 & -0.44 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.40 \\ -68.43 & 0.00 & 0.00 & 23.98 & -99.59 & 0.00 & 0.14 & 0.00 & -0.08 & 0.79 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & -0.14 & 0.00 & 0.08 & -0.79 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.14 \end{pmatrix}$$

Шаг 5

Индекс разрешающей строки = 4

Индекс разрешающего столбца = 3

Разрешающий элемент = 0.3828429961688866

Промежуточное решение: [0.00357535 0.00153362 0.00177099 0. 0. 0.00331376 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. ]

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & -68.82 & 50.15 & 0.00 & -0.34 & -0.12 & -0.46 & -1.78 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.34 & 1.12 & 1.46 & 2.78 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.30 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.31 & 0.59 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.16 & -0.02 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.01 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.09 & -0.26 & 1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & \mathbf{0.38} & 0.73 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -55.93 & 96.33 & 0.00 & -0.09 & 0.20 & 0.60 & 0.19 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.09 & -0.20 & -0.60 & -0.19 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.11 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 138.33 & 37.42 & 0.00 & 0.01 & -0.24 & 0.12 & 0.36 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.24 & -0.12 & -0.36 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.76 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -48.23 & -82.62 & 0.00 & 0.23 & 0.55 & -0.28 & 0.44 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.00 & -0.23 & -0.55 & 0.28 & -0.44 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.06 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 34.64 & -101.28 & 0.00 & 0.20 & -0.39 & 0.02 & 0.79 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 & -0.20 & 0.39 & -0.02 & -0.79 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.38 \end{pmatrix}$$

Шаг 6

Индекс разрешающей строки = 6

Индекс разрешающего столбца = 9

Разрешающий элемент = 1.6821273624034272

Промежуточное решение: [2.85495830e-03 8.10816789e-05 0.00000000e+00 4.62589318e-03 0.00000000e+00 3.72443318e-03 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00]

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 179.76 & 0.00 & 180.63 & 0.00 & 0.29 & 0.24 & -1.11 & -2.44 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.71 & 0.76 & 2.11 & 3.44 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.99 \\ 0.00 & 1.00 & -0.82 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.01 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 & -0.41 & 0.00 & -0.32 & 0.00 & -0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.23 & 0.00 & -0.10 & 1.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.61 & 1.00 & 1.90 & 0.00 & 0.01 & 0.01 & -0.01 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 146.08 & 0.00 & 202.36 & 0.00 & 0.41 & 0.49 & 0.08 & -0.35 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.41 & -0.49 & -0.08 & 0.35 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.37 \\ 0.00 & 0.00 & -361.33 & 0.00 & -224.85 & 0.00 & -1.26 & -0.96 & 1.42 & \mathbf{1.68} & 0.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.26 & 0.96 & -1$$

Шаг 7  
Индекс разрешающей строки = 8  
Индекс разрешающего столбца = 2  
Разрешающий элемент = 150.552805738389  
Промежуточное решение: [0.00275512 0.00012098 0. 0.00528836 0. 0.00352326 0. 0. 0. 0.06931439 0. 0. 0. 0. ]

0.00	0.00	-343.64	0.00	-145.08	0.00	-1.53	-1.15	0.95	0.00	1.00	-0.45	1.00	1.00	2.53	2.15	0.05	1.00	0.00	1.45	0.00	0.00	-0.82
0.00	1.00	-0.94	0.00	-0.08	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	-0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	-0.10	0.00	-0.13	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.86	0.00	0.29	1.00	-0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.56	1.00	0.62	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01
0.00	0.00	71.54	0.00	155.97	0.00	0.16	0.29	0.37	0.00	-1.00	-0.21	0.00	0.00	-0.16	-0.29	-0.37	0.00	1.00	0.21	0.00	0.00	0.39
0.00	0.00	-214.80	0.00	-133.67	0.00	-0.75	-0.57	0.84	1.00	0.00	-0.59	0.00	0.00	0.75	0.57	-0.84	-1.00	0.00	0.59	0.00	0.00	0.07
0.00	0.00	121.55	0.00	6.07	0.00	0.66	0.79	-0.72	0.00	0.00	-0.01	-1.00	0.00	-0.66	-0.79	0.72	0.00	0.00	0.01	1.00	0.00	0.28
0.00	0.00	<b>150.55</b>	0.00	-16.97	0.00	0.72	0.07	-0.60	0.00	0.00	0.67	0.00	-1.00	-0.72	-0.07	0.60	0.00	0.00	-0.67	0.00	1.00	0.14

Шаг 8  
Индекс разрешающей строки = 5  
Индекс разрешающего столбца = 4  
Разрешающий элемент = 164.03612220770688  
Промежуточное решение: [0.00284873 0.00102833 0.00096137 0.00475088 0. 0.00270098 0. 0. 0. 0.27582081 0. 0. 0. 0. ]

0.00	0.00	0.00	0.00	-183.81	0.00	0.11	-0.99	-0.43	0.00	1.00	1.07	1.00	-1.28	0.89	1.99	1.43	1.00	0.00	-0.07	0.00	2.28	-0.49
0.00	1.00	0.00	0.00	-0.19	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	-0.14	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.01	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.39	1.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00
0.00	0.00	0.00	1.00	0.68	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	<b>164.04</b>	0.00	-0.19	0.26	0.66	0.00	-1.00	-0.52	0.00	0.48	0.19	-0.26	-0.66	0.00	1.00	0.52	0.00	-0.48	0.32
0.00	0.00	0.00	0.00	-157.88	0.00	0.28	-0.47	-0.02	1.00	0.00	0.36	0.00	-1.43	-0.28	0.47	0.02	-1.00	0.00	-0.36	0.00	1.43	0.28
0.00	0.00	0.00	0.00	19.77	0.00	0.08	0.73	-0.23	0.00	0.00	-0.55	-1.00	0.81	-0.08	-0.73	0.23	0.00	0.00	0.55	1.00	-0.81	0.16
0.00	0.00	1.00	0.00	-0.11	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00

Шаг 9  
Индекс разрешающей строки = 7  
Индекс разрешающего столбца = 13  
Разрешающий элемент = 0.7500986122292338  
Промежуточное решение: [0.00312115 0.00139551 0.00118305 0.00341063 0.00196681 0.00193835 0. 0. 0. 0.58634017 0. 0. 0. 0. ]

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.10	-0.70	0.31	0.00	-0.12	0.49	1.00	-0.75	1.10	1.70	0.69	1.00	1.12	0.51	0.00	1.75	-0.12
0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.01	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.01	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	-0.22	0.61	1.00	-0.96	-0.15	0.00	-0.97	-0.10	0.22	-0.61	-1.00	0.96	0.15	0.00	0.97	0.59
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.70	-0.31	0.00	0.12	-0.49	-1.00	<b>0.75</b>	-0.10	-0.70	0.31	0.00	-0.12	0.49	1.00	-0.75	0.12
0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00

Шаг 10  
Индекс разрешающей строки = 3  
Индекс разрешающего столбца = 12  
Разрешающий элемент = 0.006076481734384267  
Промежуточное решение: [0.00316193 0.00234683 0.00223194 0.00312174 0.00148573 0.00118138 0. 0. 0. 0.74733933 0. 0. 0. 0.1660763 ]

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	-0.00
0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.01	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.01	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-0.00	-0.01	-0.00	0.00	0.00	0.00	<b>0.01</b>	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.01	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.00	-0.00	0.01	0.00	-0.01	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.00	-0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.23	0.68	0.21	1.00	-0.81	-0.78	-1.29	0.00	-0.23	-0.68	-0.21	-1.00	0.81	0.78	1.29	0.00	0.75
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.94	-0.41	0.00	0.16	-0.65	-1.33	1.00	-0.13	-0.94	0.41	0.00	-0.16	0.65	1.33	-1.00	0.17
0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	-0.01	0.00	0.00	-0.00	-0.01	0.00	-0.01	-0.01	0.01	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00	0.00

Шаг 11  
Индекс разрешающей строки = 5  
Индекс разрешающего столбца = 7  
Разрешающий элемент = 0.0020585395250122015  
Промежуточное решение: [3.22556961e-03 3.83153379e-03 3.86891009e-03 2.67087369e-03 7.34920740e-04 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 9.98606737e-01 0.00000000e+00 0.00000000e+00 1.94418937e-01 4.25267465e-01]

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	-0.00
0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.26	-0.01	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.01	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	164.57	-0.72	-0.83	-0.26	0.00	0.27	0.35	1.00	0.00	0.72	0.83	0.26	0.00	-0.27	-0.35	-1.00	0.00	0.19
0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.38	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-0.64	0.00	<b>0.00</b>	0.01	0.00	-0.01	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	212.69	-0.71	-0.39	-0.12	1.00	-0.46	-0.32	0.00	0.00	0.71	0.39	0.12	-1.00	0.46	0.32	0.00	0.00	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	219.40	-0.83	-0.17	-0.76	0.00	0.52	-0.18	0.00	1.00	0.83	0.17	0.76	0.00	-0.52	0.18	0.00	-1.00	0.43
0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.39	-0.00	-0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00

Шаг 12  
Индекс разрешающей строки = 1  
Индекс разрешающего столбца = 5  
Разрешающий элемент = 1.5072379817141148  
Промежуточное решение: [0.00517579 0.00354188 0.00402355 0.0031246 0. 0. 0. 0.35701075 0. 1.1381346 0. 0. 0.49151839 0.48670766]

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	-0.00
0.00	1.00	0.00	0.00	-0.39	1.51	-0.01	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	2.65	-1.63	0.00	0.00	0.02	0.00	-0.02	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.02	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00	0.01
0.00	0.00	0.00	0.00	404.26	-92.35	-0.21	0.00	2.24	0.00	-2.80	-0.73	1.00	0.00	0.21	0.00	-2.24	0.00	2.80	0.73	-1.00	0.00	0.49
0.00	0.00	0.00	1.00	0.62	-0.77	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	485.78	-308.73	0.62	1.00	3.01	0.00	-3.69	-1.29	0.00	0.00	-0.62	-1.00	-3.01	0.00	3.69	1.29	0.00	0.00	0.36
0.00	0.00	0.00	0.00	189.85	92.03	-0.46	0.00	1.06	1.00	-1.90	-0.83	0.00	0.00	0.46	0.00	-1.06	-1.00	1.90	0.83	0.00	0.00	1.14
0.00	0.00	0.00	0.00	83.60	166.26	-0.73	0.00	-0.24	0.00	-0.12	-0.40	0.00	1.00	0.73	0.00	0.24	0.00	0.12	0.40	0.00	-1.00	0.49
0.00	0.00	1.00	0.00	0.21	1.25	-0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00

Промежуточное решение: [9.01228702e-03 0.00000000e+00 1.08165332e-03 4.94346166e-03 0.00000000e+00 2.34991227e-03 0.00000000e+00 1.08250223e+00 0.00000000e+00 9.21872129e-01 0.00000000e+00 0.00000000e+00 7.08539963e-01 9.59997797e-02]

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	-0.00
0.00	0.66	0.00	0.00	-0.26	1.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	<b>0.00</b>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	1.08	0.00	0.00	2.23	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00	-0.02	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.01
0.00	61.27	0.00	0.00	380.11	0.00	-0.63	0.00	1.96	0.00	-2.51	-0.53	1.00	0.00	0.63	0.00	-1.96	0.00	2.51	0.53	-1.00	0.00	0.71
0.00	0.51	0.00	1.00	0.41	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
0.00	204.83	0.00	0.00	405.05	0.00	-0.79	1.00	2.04	0.00	-2.70	-0.63	0.00	0.00	0.79	-1.00	-2.04	0.00	2.70	0.63	0.00	0.00	1.08
0.00	-61.06	0.00	0.00	213.92	0.00	-0.04	0.00	1.34	1.00	-2.20	-1.03	0.00	0.00	0.04	0.00	-1.34	-1.00	2.20	1.03	0.00	0.00	0.92
0.00	-110.31	0.00	0.00	127.08	0.00	0.04	0.00	0.28	0.00	-0.65	-0.76	0.00	1.00	-0.04	0.00	-0.28	0.00	0.65	0.76	0.00	-1.00	0.10
0.00	-0.83	1.00	0.00	0.54	0.00	0.01	0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Последний шаг

Оптимальное решение: [0.0204958 0. 0.00329758 0.00418049 0. 0. 0. 3.06521786 0. 2.5338497 0.73369102 0. 2.54826364 0.57228024]

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00
0.00	207.15	0.00	0.00	-81.64	312.22	-1.43	0.00	-0.97	0.00	1.00	0.67	0.00	0.00	1.43	0.00	0.97	0.00	-1.00	-0.67	0.00	0.00	0.73
1.00	4.33	0.00	0.00	0.95	4.89	-0.03	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.02
0.00	580.69	0.00	0.00	175.39	782.89	-4.22	0.00	-0.49	0.00	0.00	1.16	1.00	0.00	4.22	0.00	0.49	0.00	0.00	-1.16	-1.00	0.00	2.55
0.00	0.30	0.00	1.00	0.50	-0.32	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
0.00	764.62	0.00	0.00	184.42	843.74	-4.67	1.00	-0.59	0.00	0.00	1.19	0.00	0.00	4.67	-1.00	0.59	0.00	0.00	-1.19	0.00	0.00	3.07
0.00	394.06	0.00	0.00	34.54	685.97	-3.19	0.00	-0.80	1.00	0.00	0.45	0.00	0.00	3.19	0.00	0.80	-1.00	0.00	-0.45	0.00	0.00	2.53
0.00	24.16	0.00	0.00	74.08	202.68	-0.89	0.00	-0.35	0.00	0.00	-0.33	0.00	1.00	0.89	0.00	0.35	0.00	0.00	0.33	0.00	-1.00	0.57
0.00	-0.20	1.00	0.00	0.29	0.94	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00

В первой строке не осталось отрицательных элементов (не считая значение целевой функции) и , значит найдено оптимальное решение для вспомогательной задачи. Решение двойственной задачи Для нахождения решения двойственной задачи продолжим с найденной угловой точки. Исключим из таблицы столбцы, соответствующие элементам и заменим первую строку на (е, 0)

Начальная угловая точка:

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	207.15	0.00	0.00	-81.64	312.22	-1.43	0.00	-0.97	0.00	1.00	0.67	0.00	0.00	1.43	0.00	0.97	0.00	-1.00	-0.67	0.00	0.00	0.73
1.00	4.33	0.00	0.00	0.95	4.89	-0.03	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.02
0.00	580.69	0.00	0.00	175.39	782.89	-4.22	0.00	-0.49	0.00	0.00	1.16	1.00	0.00	4.22	0.00	0.49	0.00	0.00	-1.16	-1.00	0.00	2.55
0.00	0.30	0.00	1.00	0.50	-0.32	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
0.00	764.62	0.00	0.00	184.42	843.74	-4.67	1.00	-0.59	0.00	0.00	1.19	0.00	0.00	4.67	-1.00	0.59	0.00	0.00	-1.19	0.00	0.00	3.07
0.00	394.06	0.00	0.00	34.54	685.97	-3.19	0.00	-0.80	1.00	0.00	0.45	0.00	0.00	3.19	0.00	0.80	-1.00	0.00	-0.45	0.00	0.00	2.53
0.00	24.16	0.00	0.00	74.08	202.68	-0.89	0.00	-0.35	0.00	0.00	-0.33	0.00	0.00	0.89	0.00	0.35	0.00	0.00	0.33	0.00	-1.00	0.57
0.00	-0.20	1.00	0.00	0.29	0.94	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00

Начальный шаг

Индекс разрешающей строки = 1

Индекс разрешающего столбца = 5

Разрешающий элемент = 312.2205991859515

Промежуточное решение: [0.0204958 0. 0.00329758 0.00418049 0. 0. 0. 3.06521786 0. 2.5338497 0.73369102 0. 2.54826364 0.57228024]

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	207.15	0.00	0.00	-81.64	<b>312.22</b>	-1.43	0.00	-0.97	0.00	1.00	0.67	0.00	0.00	1.43	0.00	0.97	0.00	-1.00	-0.67	0.00	0.00	0.73
1.00	4.33	0.00	0.00	0.95	4.89	-0.03	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.02
0.00	580.69	0.00	0.00	175.39	782.89	-4.22	0.00	-0.49	0.00	0.00	1.16	1.00	0.00	4.22	0.00	0.49	0.00	0.00	-1.16	-1.00	0.00	2.55
0.00	0.30	0.00	1.00	0.50	-0.32	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
0.00	764.62	0.00	0.00	184.42	843.74	-4.67	1.00	-0.59	0.00	0.00	1.19	0.00	0.00	4.67	-1.00	0.59	0.00	0.00	-1.19	0.00	0.00	3.07
0.00	394.06	0.00	0.00	34.54	685.97	-3.19	0.00	-0.80	1.00	0.00	0.45	0.00	0.00	3.19	0.00	0.80	-1.00	0.00	-0.45	0.00	0.00	2.53
0.00	24.16	0.00	0.00	74.08	202.68	-0.89	0.00	-0.35	0.00	0.00	-0.33	0.00	0.00	0.89	0.00	0.35	0.00	0.00	0.33	0.00	1.00	0.57
0.00	-0.20	1.00	0.00	0.29	0.94	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00

Шаг 2

Индекс разрешающей строки = 3

Индекс разрешающего столбца = 4

Разрешающий элемент = 380.1107959266964

Промежуточное решение: [9.01228702e-03 0.00000000e+00 1.08165332e-03 4.94346166e-03 0.00000000e+00 2.34991227e-03 0.00000000e+00 1.08250223e+00 0.00000000e+00 9.21872129e-01 0.00000000e+00 0.00000000e+00 7.08539963e-01 9.59997797e-02]

0.00	-0.43	0.00	0.00	-1.92	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	-0.02
0.00	0.66	0.00	0.00	-0.26	1.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	1.08	0.00	0.00	2.23	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00	-0.02	-0.00	0.00	0.00	0.01
0.00	61.27	0.00	0.00	<b>380.11</b>	0.00	-0.63	0.00	1.96	0.00	-2.51	-0.53	1.00	0.00	0.71
0.00	0.51	0.00	1.00	0.41	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00
0.00	204.83	0.00	0.00	405.05	0.00	-0.79	1.00	2.04	0.00	-2.70	-0.63	0.00	0.00	1.08
0.00	-61.06	0.00	0.00	213.92	0.00	-0.04	0.00	1.34	1.00	-2.20	-1.03	0.00	0.00	0.92
0.00	-110.31	0.00	0.00	127.08	0.00	0.04	0.00	0.28	0.00	-0.65	-0.76	0.00	1.00	0.10
0.00	-0.83	1.00	0.00	0.54	0.00	0.01	0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00

Шаг 3

Индекс разрешающей строки = 5

Индекс разрешающего столбца = 1

Разрешающий элемент = 139.539306068401

Промежуточное решение: [ 4.86159861e-03 0.00000000e+00 7.92067710e-05 4.16991596e-03 1.86403536e-03 2.83734589e-03 0.00000000e+00 3.27474742e-01 0.00000000e+00 5.23118486e-01 0.00000000e+00 0.00000000e+00 0.00000000e+00 -1.40878766e-01]

0.00	-0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	-0.01
0.00	0.71	0.00	0.00	0.00	1.00	-0.01	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.72	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00
0.00	0.16	0.00	0.00	1.00	0.00	-0.00	0.00	0.01	0.00	-0.01	-0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.45	0.00	1.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.00	0.00	0.00
0.00	<b>139.54</b>	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.12	1.00	-0.04	0.00	-0.03	-0.07	-1.07	0.00	0.33
0.00	-95.54	0.00	0.00	0.00	0.00	0.31	0.00	0.24	1.00	-0.79	-0.73	-0.56	0.00	0.52
0.00	-130.80	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	0.00	-0.37	0.00	0.19	-0.59	-0.33	1.00	-0.14
0.00	-0.92	1.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00

Последний шаг

Оптимальное решение: [0.00316193 0.00234683 0.00223194 0.00312174 0.00148573 0.00118138 0. 0. 0. 0.74733933 0. 0.

Результат:  
x = [0.00316193 0.00234683 0.00223194 0.00312174 0.00148573 0.00118138]  
||x|| = 0.0058168102515296135  
p = x / ||x|| = [0.54358486 0.40345652 0.38370514 0.53667558 0.25542006 0.20309757]  
Значение целевой функции: 0.01  
Цена игры:  
 $\phi = 1/\alpha - \beta = 1/0.01 - |-98| = 2$

**Ответ:**  
Нижняя цена игры:= -83  
Верхняя цена игры:= 66  
Оптимальная стратегия первого игрока:  
(0.54358486 0.40345652 0.38370514 0.53667558 0.25542006 0.20309757)  
Оптимальная стратегия второго игрока:  
(0.10314031 0.13426961 0.35374796 0. 0.27239847 0.59971049 0.64213902 0.)  
Цена игры:  
 $\phi = 2$



```

import numpy as np
from tabulate import tabulate

class Solution:
    __m = 6
    __n = 8
    __A = np.array([])
    __b = np.array([])
    __x = np.array([])
    __c = np.array([])
    __support_matrix = 0

    def __init__(self):
        np.random.seed(17)
        self.__c = np.array(np.random.randint(100,
size=self.__n))
        self.__b = np.array(np.random.randint(100,
size=self.__m))
        self.__A = np.array(np.random.randint(-100, 100,
size=(self.__m, self.__n)))

        print("c:\n", self.__c)
        print("b:\n", self.__b)
        print("A:\n", self.__A, "\n")

    def __fun_for_print(self, mat, index_l, index_c, t):
        print(f"Шаг алгоритма #{t}")
        print(tabulate(mat, tablefmt="latex", floatfmt=".2f"))
        print(f"Индекс разрешающей строки = {index_l}")
        print(f"Индекс разрешающего столбца = {index_c}")
        print(f"Разрешающий элемент = {mat[index_l][index_c]}")
        answer = []
        for i in range(14):
            if sum(mat[0:, i]) == 1 and mat[0, i] == 0:
                index_line = np.where(mat[1:, i] == 1)[0][0] + 1
                answer.append(mat[index_line][mat[0].size - 1])
            else:
                answer.append(0)
        print("Промежуточное решение:\n", np.array(answer))

    def __create_support_mat(self, mat):
        main_mat = np.zeros((9, 23))
        main_mat[1:, :6] = mat
        main_mat[1:, 6:14] = -np.eye(8)
        main_mat[1:, 14:22] = np.eye(8)
        main_mat[1:, 22] = 1
        main_mat[0, 14:22] = 1

        temp = 0
        for i in range(1, main_mat.shape[0]):
            temp += main_mat[i]
        main_mat[0] -= temp

```

```

        return main_mat

    def __simplex_method(self, main_mat, m, n):
        t = 0
        index_min_line = 0
        index_min_col = 0
        while np.any(main_mat[0, :n - 1] < 0):
            t += 1
            index_min_col = np.where(main_mat == main_mat[0, :(n
- 1)].min())[1][0]
            div_last = []
            for i in range(1, m):
                div_last.append(main_mat[i][-1] /
main_mat[i][index_min_col])

            index_min_line = np.where(div_last ==
min(filter(lambda x: x > 0, div_last)))[0][0] + 1

            self.__fun_for_print(main_mat, index_min_line,
index_min_col, t)
            main_mat[index_min_line] /=
main_mat[index_min_line][index_min_col]
            cur_col = main_mat[:, index_min_col]

            for i in range(len(cur_col)):
                if cur_col[i] != 1:
                    main_mat[i] -= main_mat[index_min_line] *
cur_col[i]

            print('END OF SIMPLEX!!!: \n')
            t += 1
            self.__fun_for_print(main_mat, index_min_line,
index_min_col, t)
            return main_mat

    def __create_main(self, c=0, b=0):
        if c == 0 and b == 0:
            main_mat = np.zeros((7, 15))
            main_mat[0][:8] = -1
            main_mat[1:, :8] = self.__A
            main_mat[1:, 8: 14] = np.eye(6)
            main_mat[1:, 14] = 1
            return main_mat

        main_mat = np.zeros((9, 15))
        main_mat[0][:c.shape[0]] = -c
        main_mat[1:, :6] = self.__A
        main_mat[1:, 6: 14] = np.eye(8)
        main_mat[1:, 14] = b
        return main_mat

    def to_ready_double_problem(self, mat, b=0):

```

```

        if b == 0:
            mat[0, :6] = 1
            mat[0, 14] = 0
            for i in range(15):
                if sum(mat[1:, i]) == 1 and mat[0, i] != 0:
                    index_line = np.where(mat[1:, i] == 1)[0][0]
+ 1

                    mat[0, :15] -= mat[index_line] * mat[0][i]
                    mat[0][i] = 0

            print('TO READY DOUBLE PROBLEM: ', tabulate(mat,
tablefmt="latex", floatfmt=".2f"))
            return mat

        mat[0, :8] = b
        mat[0, 14] = 0
        for i in range(15):
            if sum(mat[1:, i]) == 1 and mat[0, i] != 0:
                index_line = np.where(mat[1:, i] == 1)[0][0] + 1
                mat[0, :15] -= mat[index_line] * mat[0][i]
                mat[0][i] = 0

        return mat

def execute(self):
    tmp = []
    for i in range(self.__A[0].size):
        tmp.append(max(self.__A[0:, i]))
    print("Верхняя цена игры:", min(tmp))

    tmp.clear()

    for i in range(self.__A[0, :6].size):
        tmp.append(min(self.__A[i, 0:]))
    print("Нижняя цена игры:", max(tmp))

    beta = min(tmp)
    print("β =", beta)
    self.__A[0:] += abs(beta)
    print("\nНеотрицательная A:\n", self.__A)

    print("---Прямая---")

print(tabulate(self.__simplex_method(self.__create_main(), m=7,
n=15),
            tablefmt="latex", floatfmt=".2f"))

    q = [0.00066279, 0.00086283, 0.00227322, 0., 0.00175046,
0.0038538, 0.00412645, 0.]
    print("\nx =", q)
    print("||y|| =", np.linalg.norm(q))
    q /= np.linalg.norm(q)
    print("q =", q)

```

```

        print("Значение целевой функции =", 0.01, "\n\n")

        support_mat =
self.__simplex_method(self.__create_support_mat(self.__A.T),
m=9, n=23)

        double_mat = np.column_stack([support_mat[0:, :14],
support_mat[0:, 22]])
        print("---DOUBLE MATRIX---\n")
        print(tabulate(double_mat, floatfmt=".2f",
tablefmt="latex"))

        double_mat = self.__to_ready_double_problem(double_mat)

        print("---Двойственная---\n")
        print("---Возвращаемое значение---\n",
self.__simplex_method(double_mat, m=7, n=15))

        p = [0.00316193, 0.00234683, 0.00223194, 0.00312174,
0.00148573, 0.00118138]
        print("\nx =", p)
        print("||x|| =", np.linalg.norm(p))
        p /= np.linalg.norm(p)
        print("p = ", p)
        print("Значение целевой функции =", 0.01)
        fi = 1 / 0.01 - abs(beta)
        print("fi = ", fi)

if __name__ == "__main__":
    Solution().execute()

```