

Кафедра акустики

Отчет по лабораторной работе №1

**Колебания механических систем  
с распределенными параметрами**

Выполнили студенты 440 группы  
Карусевич А.А., Понур К.А.

Нижний Новгород, 2019

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Резонансные кривые продольных колебаний</b>	<b>3</b>
1.1 Алюминиевый стержень . . . . .	3
1.2 Стержень из оргстекла . . . . .	4
1.3 Стальной стержень . . . . .	5
1.4 Экспериментальное значение модуля Юнга . . . . .	6
<b>2 Поперечные колебания круглых пластин</b>	<b>7</b>
2.1 Пластина 0.63 мм . . . . .	7
2.1.1 Излучатель в центре . . . . .	7
2.1.2 Излучатель смещен . . . . .	7
2.2 Пластина 1.16 мм . . . . .	7
2.2.1 Излучатель в центре . . . . .	7
2.2.2 Излучатель смещен . . . . .	8
2.3 Теоретические значения частот . . . . .	8
<b>Заключение</b>	<b>9</b>

## Введение

В настоящей работе исследуются продольные колебания стержней и поперечные колебания пластин с помощью резонансного метода – возбуждаются колебания на резонансных частотах. Под пластиной понимается упругое трехмерное тело, один размер которого много меньше двух других, а под стержнем – тело, у которого один размер больше двух других.

В эксперименте используются три стержня (из алюминия, стали и оргстекла, все длины 394 мм) и две металлические пластины (толщины 0.63 мм и 1.16 мм)

**Установка с стержнями.** Стержни закрепляются в неподвижном штативе, при этом точка крепления посередине стержня, а к свободным торцам стержня на малом расстоянии поднесены электромагнитные вибраторы – приемный и излучающий. Меняя частоту генератора, подключенного к излучающему вибратору, и измеряя амплитуду на приемном можно получить резонансные характеристики системы.

**Установка с пластинами.** Металлическая пластина закреплена в станке, в котором размещен электромагнитный возбудитель колебаний. Возбудитель можно перемещать вдоль диаметра пластинки и наблюдать при этом различные типы колебаний. На пластине рассыпается тонкий слой песка, который при резонансе собирается в узлах колебаний пластины. Полученные картины называются картинами Хладни и позволяют определить конкретную моду колебаний.

# 1. Резонансные кривые продольных колебаний

## 1.1. Алюминиевый стержень

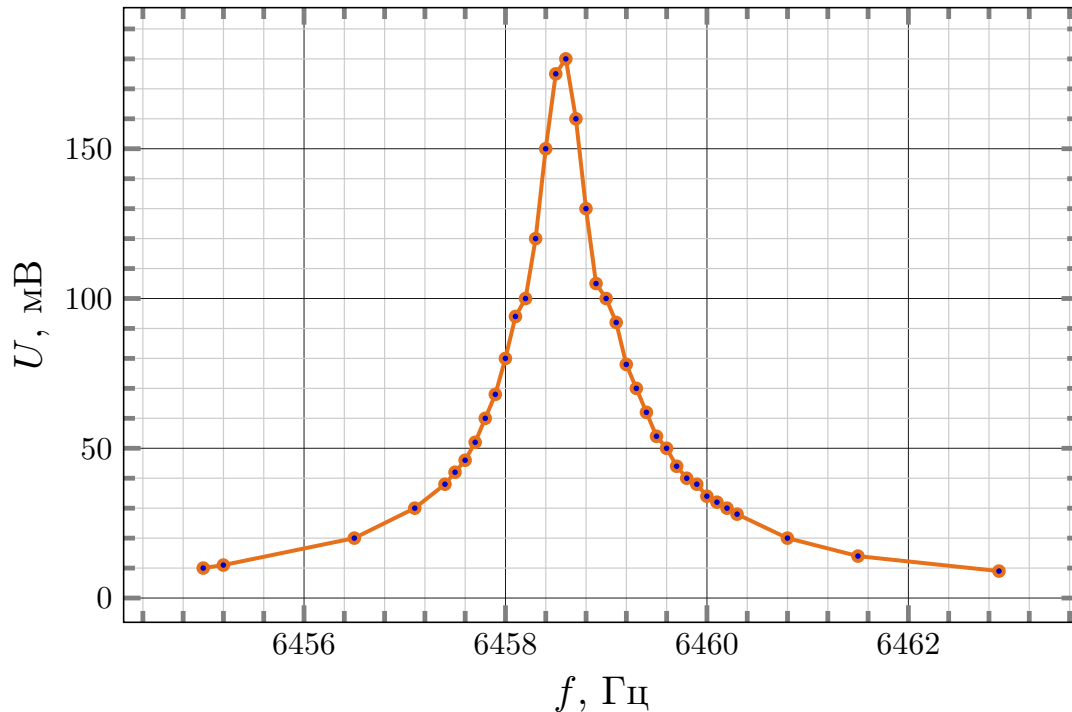


Рис. 1: Принципиальная схема

Из графика снятой АЧХ нашли параметры резонансной кривой: резонансную частоту  $f_0 = 6458.6$  Гц и ширину на уровне  $0.7 \Delta f_{0.7} \approx 1$  Гц. Частота согласуется с теоретическим значением первой моды

$$f_1 = \frac{1 \cdot c}{2l} = \frac{5140 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}}{2 \cdot 0.394 \text{ м}} = 6522 \text{ Гц}$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{0.7}} \approx 6450$$

Исходя из табличного значения модуля Юнга для алюминия  $E = 0.07 \cdot 10^{12}$  Па, нашли вязкость стержня [2, стр. 10]:

$$\eta = \frac{\gamma E}{\omega_0} = \frac{E}{Q 2\pi f_0} = \frac{\Delta f_{0.7} E}{2\pi f_0^2} = 270 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

## 1.2. Стержень из оргстекла

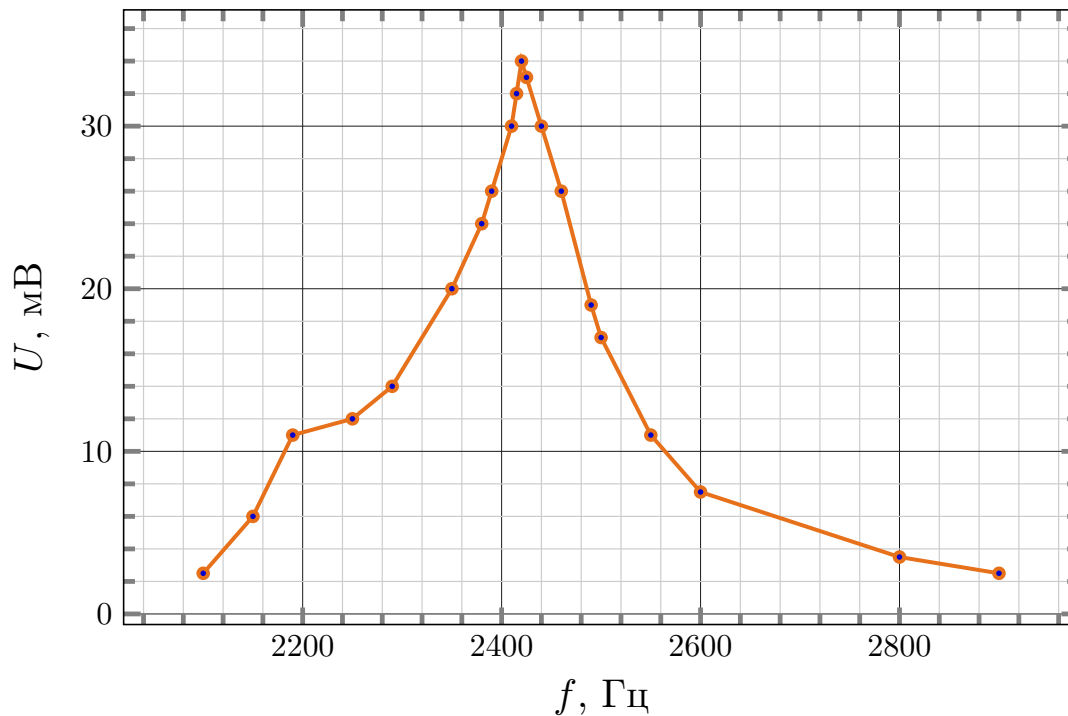


Рис. 2: Резонансная кривая колебаний в стержне из оргстекла

Из графика снятой АЧХ нашли параметры резонансной кривой: резонансную частоту  $f_0 = 2420$  Гц и ширину на уровне 0.7  $\Delta f_{0.7} = 96$  Гц. Частота согласуется с теоретическим значением первой моды

$$f_1 = \frac{1 \cdot c}{2l} = \frac{2040 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}}{2 \cdot 0.394 \text{ м}} = 2588 \text{ Гц}$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{0.7}} \approx 25$$

Исходя из табличного значения модуля Юнга для оргстекла  $E = 0.005 \cdot 10^{12}$  Па, нашли вязкость стержня [2, стр. 10]:

$$\eta = \frac{\gamma E}{\omega_0} = \frac{E}{Q 2\pi f_0} = \frac{\Delta f_{0.7} E}{2\pi f_0^2} = 13150 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

### 1.3. Стальной стержень

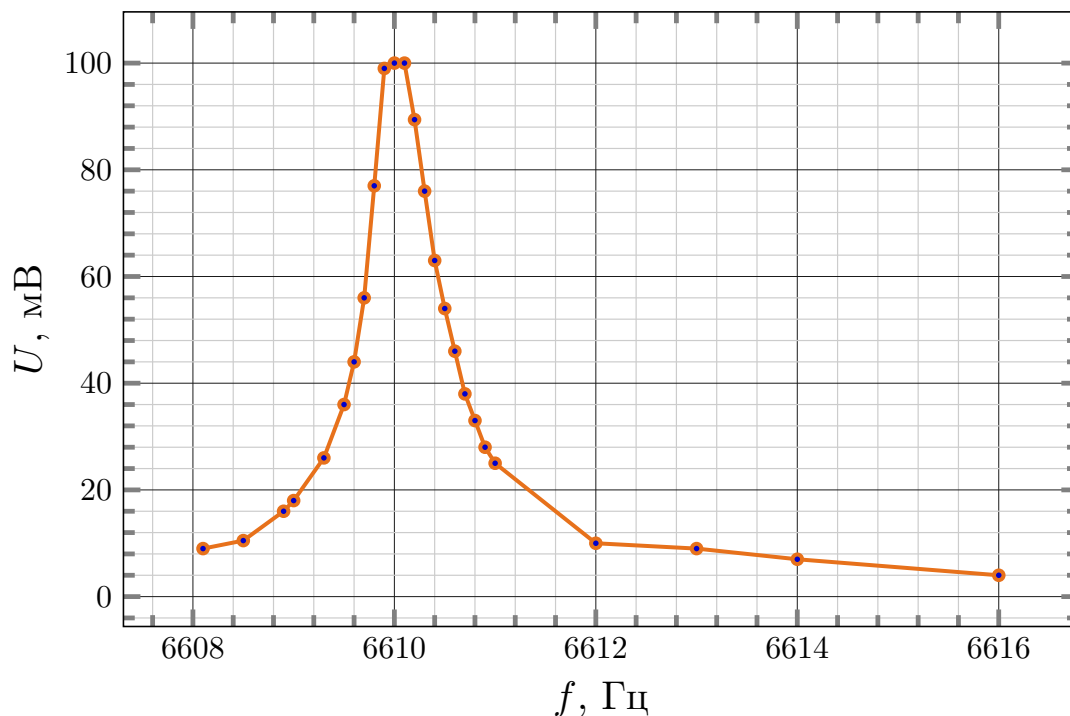


Рис. 3: Семейство переходных характеристик

Из графика снятой АЧХ нашли параметры резонансной кривой: резонансную частоту  $f_0 = 6610$  Гц и ширину на уровне 0.7  $\Delta f_{0.7} = 0.48$  Гц. Частота хорошо согласуется с теоретическим значением первой моды

$$f_1 = \frac{1 \cdot c}{2l} = \frac{5210 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}}{2 \cdot 0.394 \text{ м}} = 6611 \text{ Гц}$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{0.7}} \approx 13770$$

Исходя из табличного значения модуля Юнга для стали  $E = 0.20 \cdot 10^{12}$  Па, нашли вязкость стержня [2, стр. 10]:

$$\eta = \frac{\gamma E}{\omega_0} = \frac{E}{Q 2\pi f_0} = \frac{\Delta f_{0.7} E}{2\pi f_0^2} = 340 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

## 1.4. Экспериментальное значение модуля Юнга

В предыдущих пунктах значение модуля Юнга бралось априори, а согласованность проверялась сравнением первых мод. Однако, можно рассчитать уточненное значение модуля Юнга, рассчитав в обратном порядке скорость звука в продольном стержне, исходя из экспериментальных данных:

$$c = \frac{2lf_n}{n} = 2lf_n = \begin{cases} 5089 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, & \text{алюминий} \\ 1097 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, & \text{оргстекло} \\ 5208 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, & \text{сталь} \end{cases}$$

Считая известными плотности, найдем модуль Юнга:

$$E = \rho c^2 = \begin{cases} 0.069 \cdot 10^{12} \text{ Па}, & \text{алюминий} \\ 0.0014 \cdot 10^{12} \text{ Па}, & \text{оргстекло} \\ 0.211 \cdot 10^{12} \text{ Па}, & \text{сталь} \end{cases}$$

Тогда уточнённое значение вязкости для стали и алюминия изменится в пределах погрешности измерений, а для оргстекла

$$\eta_{new} \approx 3700 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

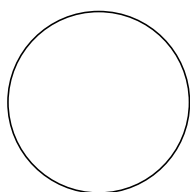
Возникает вопрос о причине такого сильного расхождения. Это можно объяснить тем, что вычисляются величины, опирающиеся на эксперимент, т.е. снятую резонансную кривую, которая характеризует не колебания в стержне, но и характеристики колебательной системы в целом, в том числе, приемника/передатчика.

## 2. Поперечные колебания круглых пластин

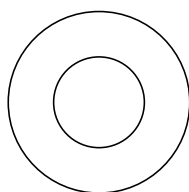
В данном эксперименте изучались т.н. фигуры Хладни, образующиеся из скоплений частиц песка на колеблющейся пластине в узлах колебаний. Фигуры были получены на различных модах колебаний в пределах 0.5–1.5 кГц для двух пластин различной толщины при двух положениях излучателя.

### 2.1. Пластина 0.63 мм

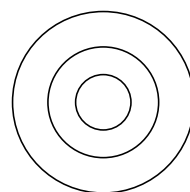
#### 2.1.1 Излучатель в центре



165 Гц

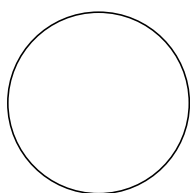


567 Гц

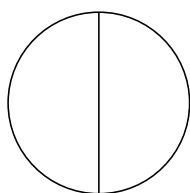


1225 Гц

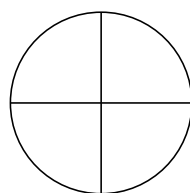
#### 2.1.2 Излучатель смещен



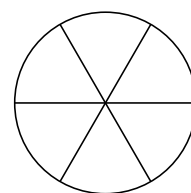
178.5 Гц



335 Гц



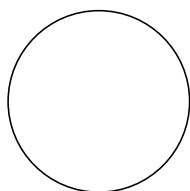
518.8 Гц



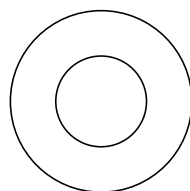
744.9 Гц

### 2.2. Пластина 1.16 мм

#### 2.2.1 Излучатель в центре



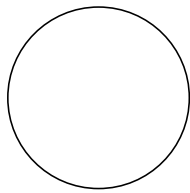
270 Гц



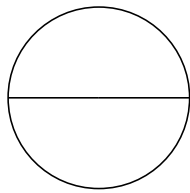
945 Гц



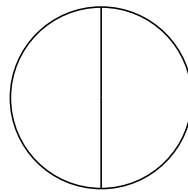
### 2.2.2 Излучатель смещен



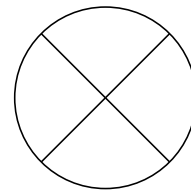
276 Гц



535 Гц



554 Гц



863 Гц

Можно отметить, что при смещении излучателя частота основного тона повышается. В каждом из экспериментов были сняты основной тон и один и более обертонов. Наиболее высокий обретен, который удалось получить –  $f_{31}$  для пластины 0.63 мм.

### 2.3. Теоретические значения частот

Собственные частоты изгибных колебаний пластины определяются формулой

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2 H}{a^2} \beta_{mn}^2 \left| \frac{E}{3\rho_s(1-\nu^2)} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Где значения  $\beta_{mn}$  порождаются решением уравнений относительно функций Бесселя и не связаны с характеристиками установки.  $\beta_{mn}$  можно считать известными.

Так как некоторые константы были не известны, можно поступить следующим образом: брать основной тон из эксперимента и пытаться рассчитать по формуле обертона. Например, для основного тона  $f_{01} = 165$  Гц рассчитаем обертона  $f_{02,03}$ :

$$f_{02} = 3.309 f_{01} = 545 \text{ Гц}, \quad f_{03} = 2.234 f_{02} = 1217 \text{ Гц}$$

В эксперименте же наблюдались частоты 567 и 1226 Гц. Завышение теоретических значений можно объяснить наличием диссипации: так, по аналогии, учет диссипации для колебаний в LC-контуре приводит к уменьшению резонансной частоты.

## Заключение

В настоящей работе были изучены линейные теории двумерных колебательных систем с распределенными параметрами (пластин и стержней); проведен ряд экспериментов с пластинами и стержнями.

Для стержней были получены резонансные кривые, рассчитаны добротность, модуль Юнга и коэффициент вязкости для каждого стержня. Следует отметить различие в ширинах резонансных кривых (и, как следствие, добротностях) для стали и оргстекла. Для оргстекла ширина резонансной кривой составляет несколько сотен Герц (и добротность  $\sim 10$ ), а для стали ширина кривой несколько Герц (а добротность  $\sim 10^4$ ). Такая большая разница связана с различиями в структурах оргстекла и стали. Оргстекло – аморфный материал с высокой (по сравнению со сталью) вязкостью, поэтому колебания в нем распространяются хуже, чем в стали.

В экспериментах с пластинами были получены фигуры Хладни, определены моды колебаний для двух положений возбудителя: по центру пластины и сдвинутым относительно центра.

## Список литературы

- [1] Гурбатов С.Н. Лекции по механике сплошных сред на радиофизическом факультете 2018/2019. – 106 с.
- [2] Горская Н. В., Курин В. В. и др. Колебания механической системы с распределенными параметрами: колебания стержней. Н.Новгород: ННГУ, 1995. – 13 с.