

Кафедра акустики

Отчет по лабораторной работе №1

**Колебания механических систем  
с распределенными параметрами**

Выполнили студенты 440 группы  
Карусевич А.А., Понур К.А.

Нижний Новгород, 2019

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Резонансные кривые продольных колебаний</b>	<b>4</b>
1.1 Стальной стержень . . . . .	4
1.2 Алюминиевый стержень . . . . .	5
1.3 Латунный стержень . . . . .	6
1.4 Стержень из оргстекла . . . . .	7
1.5 Экспериментальное значение модуля Юнга . . . . .	8
<b>2 Поперечные колебания круглых пластин</b>	<b>9</b>
2.1 Пластина 0.63 мм . . . . .	9
2.1.1 Излучатель в центре . . . . .	9
2.1.2 Излучатель смещен . . . . .	9
2.2 Пластина 0.80 мм . . . . .	9
2.2.1 Излучатель в центре . . . . .	9
2.2.2 Излучатель смещен . . . . .	10
2.3 Пластина 1.16 мм . . . . .	10
2.3.1 Излучатель в центре . . . . .	10
2.3.2 Излучатель смещен . . . . .	10
2.4 Теоретические значения частот . . . . .	10
<b>Заключение</b>	<b>12</b>

## Введение

В настоящей работе исследуются продольные колебания стержней и поперечные колебания пластин с помощью резонансного метода – возбуждаются колебания на резонансных частотах. Под пластиной понимается упругое трехмерное тело, один размер которого много меньше двух других, а под стержнем – тело, у которого один размер больше двух других. При этом пластины и стержни можно считать тонкими, если длина волны велика по сравнению с их толщиной.

В эксперименте используются три стержня (из алюминия, стали и оргстекла, все длины 394 мм) и две металлические пластины (толщины 0.63 мм и 1.16 мм)

## Колебания стержней

Механические свойства однородных и изотропных упругих тел, обладающих потерями, могут быть описаны следующими параметрами: модулем Юнга  $E$ , модулем сдвига, коэффициентом вязкости  $\eta$  и плотностью  $\rho$ .

Рассмотрим продольные колебания, возбужденные посредством приложения периодической силы  $F_0 e^{-i\omega t}$ , действующей в направлении оси стержня. Уравнение продольных колебаний в тонком абсолютно упругом стержне, имеющем по всей длине постоянное сечение (без затухания):

$$\xi(x, t) = \frac{F_0 e^{-i\omega t} \cos k(l - x)}{kES \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right)},$$

где  $l$  длина стержня,  $k$  и  $c$  соответственно волновое число и фазовая скорость звука в отсутствие потерь,  $s$  - единица поперечного сечения.

Видно, что в идеальном стержне без затухания устанавливается чисто стоячая волна, амплитуда смещения которой вдоль стержня распределена по косинусоиде и сильно зависит от частоты вынуждающей силы. Резонанс наблюдается при  $\omega = \frac{\pi n c}{l}$  при частотах  $f_n = nc/2l$ .

В случае малых потерь резонанс наступает почти при тех же частотах, что и в стержне без потерь. Возбуждение продольных колебаний в стержне дает возможность определить модуль Юнга и коэффициент вязкости:

$$E = \rho c^2, \eta = \frac{E}{Q\omega},$$

где  $Q$  - добротность стержня,  $\omega$  - резонансная частота.

## Изгибные колебания пластин

Для малых прогибов тонкой пластины требуются слабые внешние усилия, приложенные к ее поверхности. Эти усилия значительно меньше, чем внутренние напряжения, ко-

которые возникают внутри деформированной пластины благодаря имеющимся в ней растяжениям и сжатиям.

Колебания пластины, происходящие с собственными частотами, носят название нормальных колебаний (мод). Каждая мода колебаний характеризуется двойным индексом  $mn$ . Число  $m$  соответствует порядку бесселевской функции и совпадает с числом узлов окружностей, за исключением граничной. Число  $n$  соответствует порядковому номеру решения характеристического уравнения и совпадает с числом узловых диаметров без единицы.

При колебаниях с образованием узловых колец и диаметров поверхность пластины разбивается на зоны, разделенные узловыми линиями, причем колебания в любой зоне происходят в противофазе с соседними зонами. При низшей частоте  $f_{01}$  вся поверхность пластины колеблется с одной фазой.

Под действием на пластину силой, изменяющейся по гармоническому закону, в пластине возбуждаются вынужденные колебания. Если частота возбуждающей силы соответствует частоте одной из собственных мод колебаний пластины, то наступает механический резонанс.

**Установка с пластинами.** Металлическая пластина закреплена в станке, в котором размещен электромагнитный возбудитель колебаний. Возбудитель можно перемещать вдоль диаметра пластинки и наблюдать при этом различные типы колебаний. На пластине рассыпается тонкий слой песка, который при резонансе собирается в узлах колебаний пластины. Полученные картины называются картинами Хладни и позволяют определить конкретную моду колебаний.

# 1. Резонансные кривые продольных колебаний

## 1.1. Стальной стержень

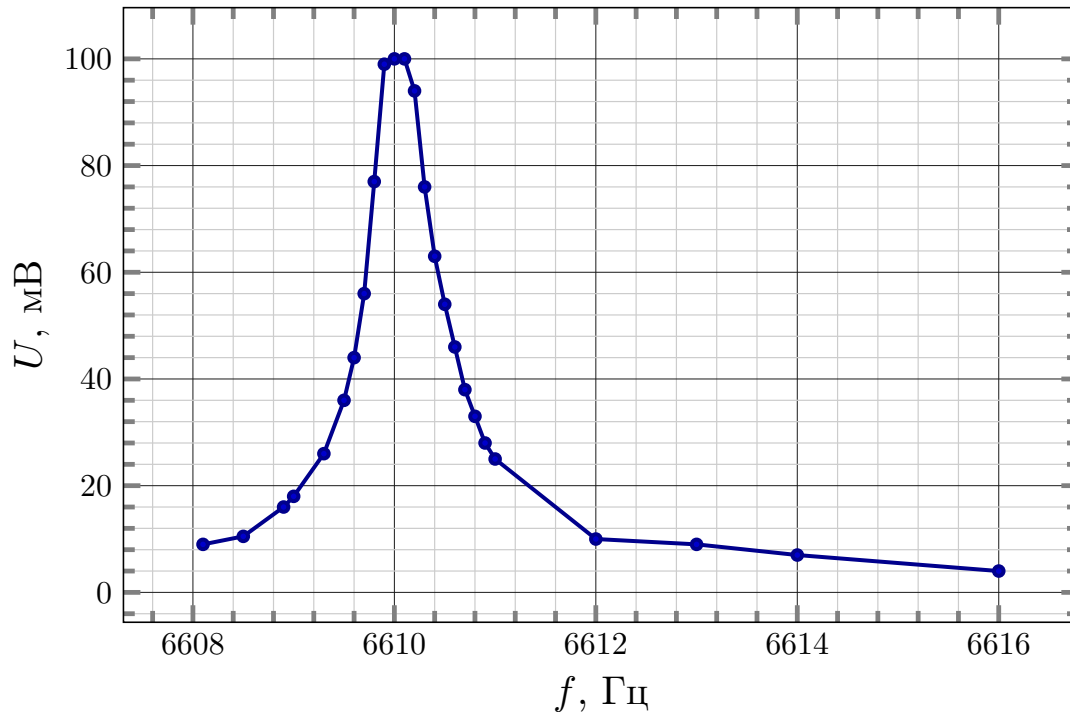


Рис. 1: Семейство переходных характеристик

Из графика снятой АЧХ нашли параметры резонансной кривой: резонансную частоту  $f_0 = 6610$  Гц и ширину на уровне 0.7  $\Delta f_{0.7} = 0.48$  Гц. Частота хорошо согласуется с теоретическим значением первой моды

$$f_1 = \frac{1 \cdot c}{2l} = \frac{5210 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}}{2 \cdot 0.394 \text{ м}} = 6611 \text{ Гц}$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{0.7}} \approx 13770$$

Исходя из табличного значения модуля Юнга для стали  $E = 0.20 \cdot 10^{12}$  Па, нашли вязкость стержня [2, стр. 10]:

$$\eta = \frac{\gamma E}{\omega_0} = \frac{E}{Q 2\pi f_0} = \frac{\Delta f_{0.7} E}{2\pi f_0^2} = 340 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

## 1.2. Алюминиевый стержень

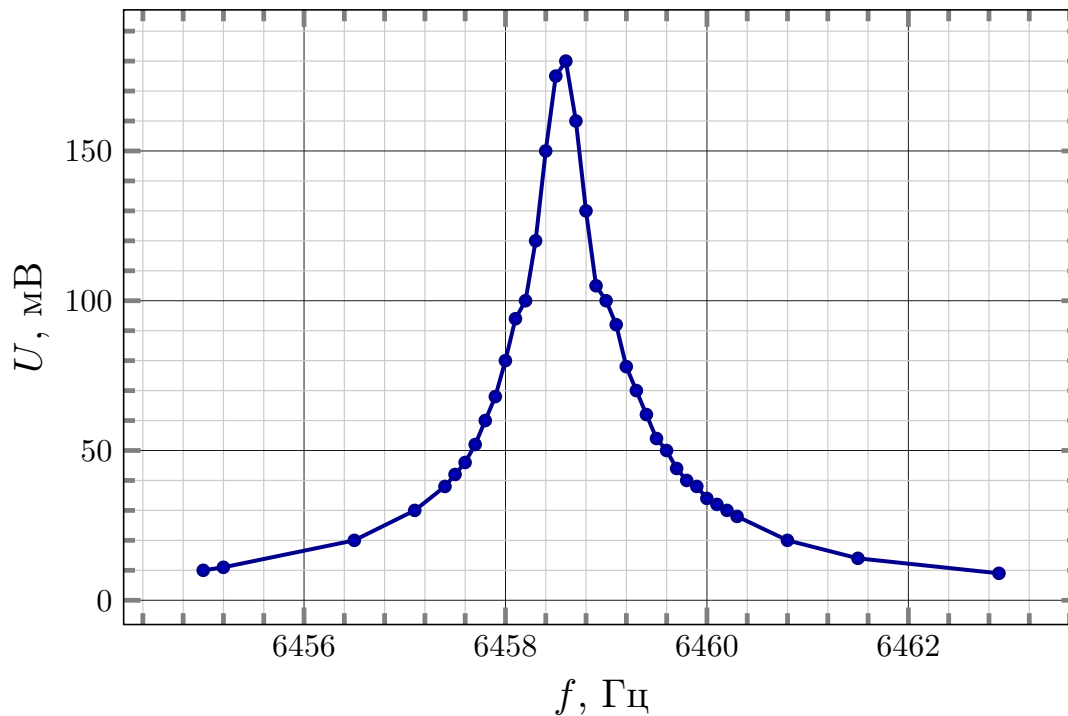


Рис. 2: Принципиальная схема

Из графика снятой АЧХ нашли параметры резонансной кривой: резонансную частоту  $f_0 = 6458.6$  Гц и ширину на уровне 0.7  $\Delta f_{0.7} \approx 1$  Гц. Частота согласуется с теоретическим значением первой моды

$$f_1 = \frac{1 \cdot c}{2l} = \frac{5140 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}}{2 \cdot 0.394 \text{ м}} = 6522 \text{ Гц}$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{0.7}} \approx 6522$$

Исходя из табличного значения модуля Юнга для алюминия  $E = 0.07 \cdot 10^{12}$  Па, нашли вязкость стержня [2, стр. 10]:

$$\eta = \frac{\gamma E}{\omega_0} = \frac{E}{Q 2\pi f_0} = \frac{\Delta f_{0.7} E}{2\pi f_0^2} = 270 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

### 1.3. Латунный стержень

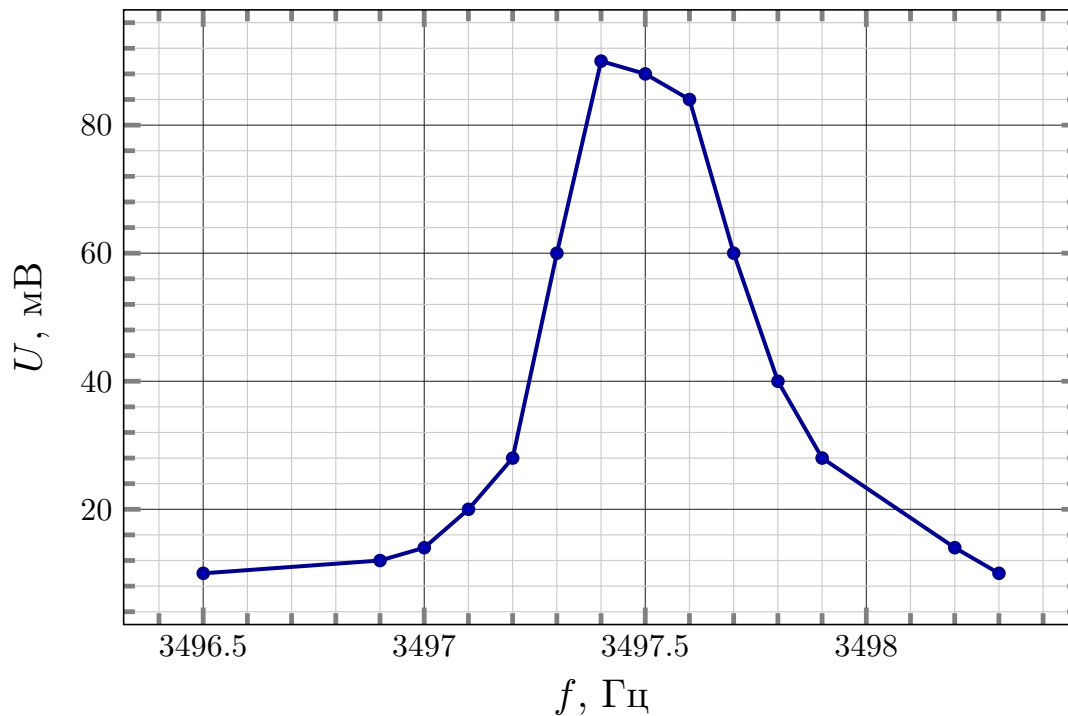


Рис. 3: Принципиальная схема

Из графика снятой АЧХ нашли параметры резонансной кривой: резонансную частоту  $f_0 = 3497.5$  Гц и ширину на уровне  $0.7 \Delta f_{0.7} \approx 0.4$  Гц. Частота согласуется с теоретическим значением первой моды

$$f_1 = \frac{1 \cdot c}{2l} = \frac{2830 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}}{2 \cdot 0.394 \text{ м}} = 3591 \text{ Гц}$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{0.7}} \approx 8743$$

Исходя из табличного значения модуля Юнга для алюминия  $E = 0.071 \cdot 10^{12}$  Па, нашли вязкость стержня [2, стр. 10]:

$$\eta = \frac{\gamma E}{\omega_0} = \frac{E}{Q 2\pi f_0} = \frac{\Delta f_{0.7} E}{2\pi f_0^2} = 369 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

#### 1.4. Стержень из оргстекла

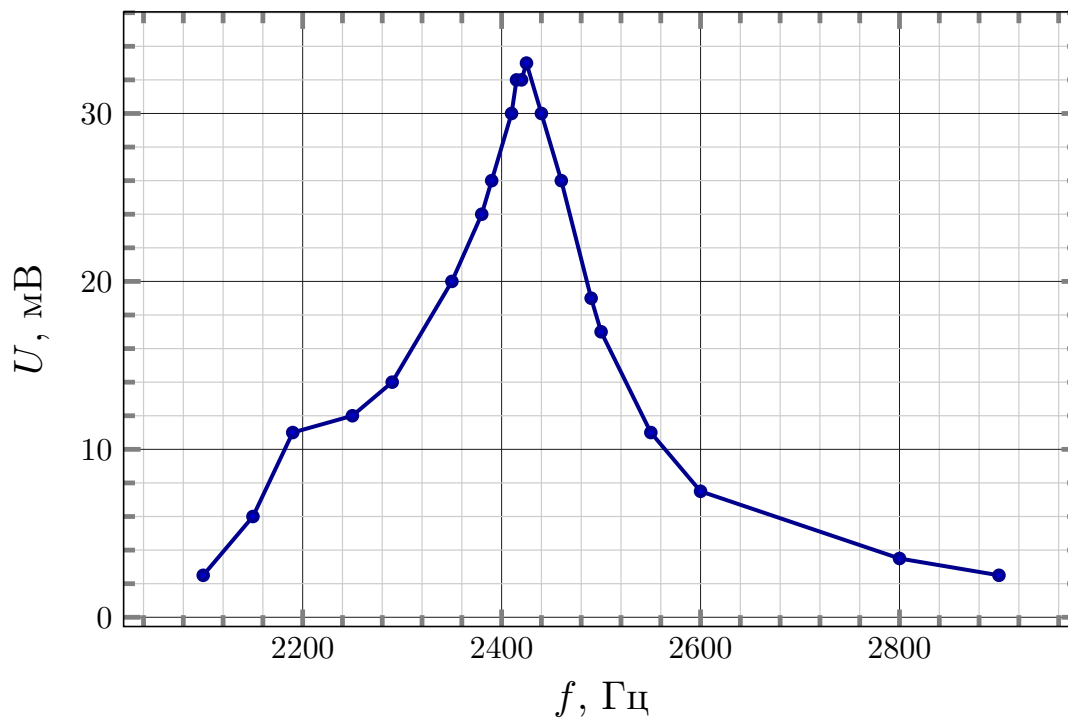


Рис. 4: Резонансная кривая колебаний в стержне из оргстекла

Из графика снятой АЧХ нашли параметры резонансной кривой: резонансную частоту  $f_0 = 2420$  Гц и ширину на уровне 0.7  $\Delta f_{0.7} = 96$  Гц. Частота согласуется с теоретическим значением первой моды

$$f_1 = \frac{1 \cdot c}{2l} = \frac{2040 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}}{2 \cdot 0.394 \text{ м}} = 2588 \text{ Гц}$$

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f_{0.7}} \approx 25$$

Исходя из табличного значения модуля Юнга для оргстекла  $E = 0.005 \cdot 10^{12}$  Па, нашли вязкость стержня [2, стр. 10]:

$$\eta = \frac{\gamma E}{\omega_0} = \frac{E}{Q 2\pi f_0} = \frac{\Delta f_{0.7} E}{2\pi f_0^2} = 13150 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$



### 1.5. Экспериментальное значение модуля Юнга

В предыдущих пунктах значение модуля Юнга бралось априори, а согласованность проверялась сравнением первых мод. Однако, можно рассчитать уточненное значение модуля Юнга, рассчитав в обратном порядке скорость звука в продольном стержне, исходя из экспериментальных данных:

$$c = \frac{2lf_n}{n} = 2lf_n = \begin{cases} 5089 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, & \text{алюминий} \\ 1097 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, & \text{оргстекло} \\ 2756 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, & \text{латунь} \\ 5208 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, & \text{сталь} \end{cases}$$

Считая известными плотности, найдем модуль Юнга:

$$E = \rho c^2 = \begin{cases} 0.069 \cdot 10^{12} \text{ Па}, & \text{алюминий} \\ 0.0014 \cdot 10^{12} \text{ Па}, & \text{оргстекло} \\ 0.0006 \cdot 10^{12} \text{ Па}, & \text{латунь} \\ 0.211 \cdot 10^{12} \text{ Па}, & \text{сталь} \end{cases}$$

Тогда уточнённое значение вязкости для стали и алюминия изменится в пределах погрешности измерений, а для оргстекла

$$\eta_{new} \approx 3700 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$$

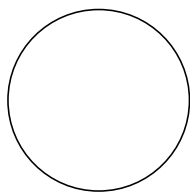
Возникает вопрос о причине такого сильного расхождения. Это можно объяснить тем, что вычисляются величины, опирающиеся на эксперимент, т.е. снятую резонансную кривую, которая характеризует не колебания в стержне, но и характеристики колебательной системы в целом, в том числе, приемника/передатчика.

## 2. Поперечные колебания круглых пластин

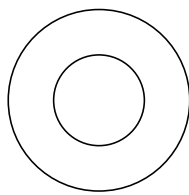
В данном эксперименте изучались т.н. фигуры Хладни, образующиеся из скоплений частиц песка на колеблющейся пластине в узлах колебаний. Фигуры были получены на различных модах колебаний в пределах 0.5–1.5 кГц для двух пластин различной толщины при двух положениях излучателя.

### 2.1. Пластина 0.63 мм

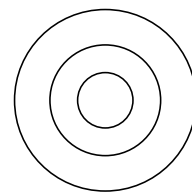
#### 2.1.1 Излучатель в центре



174 Гц

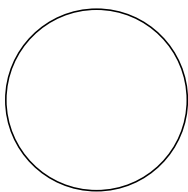


569 Гц

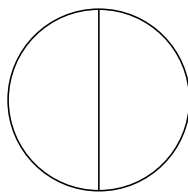


1225 Гц

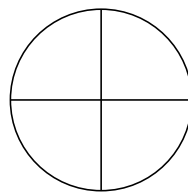
#### 2.1.2 Излучатель смещен



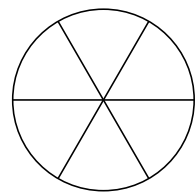
180 Гц



321 Гц



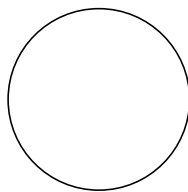
509 Гц



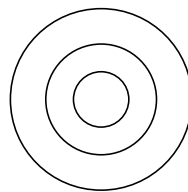
730 Гц

### 2.2. Пластина 0.80 мм

#### 2.2.1 Излучатель в центре

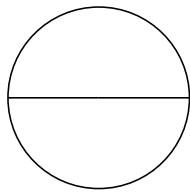


240 Гц

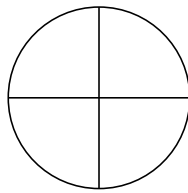


737 Гц

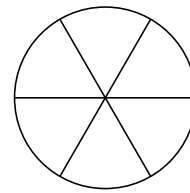
### 2.2.2 Излучатель смещен



453 Гц



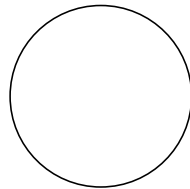
665 Гц



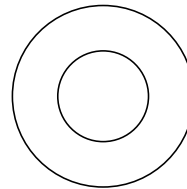
909 Гц

## 2.3. Пластина 1.16 мм

### 2.3.1 Излучатель в центре

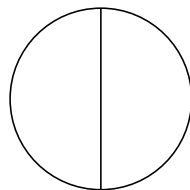


272 Гц

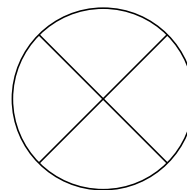


958 Гц

### 2.3.2 Излучатель смещен



276 Гц



827 Гц

Можно отметить, что при смещении излучателя частота основного тона повышается. В каждом из экспериментов были сняты основной тон и один и более обертонов. Наиболее высокий обретен, который удалось получить –  $f_{31}$  для пластины 0.63 мм.

## 2.4. Теоретические значения частот

Собственные частоты изгибных колебаний пластины определяются формулой

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2 H}{a^2} \beta_{mn}^2 \left| \frac{E}{3\rho_s(1-\nu^2)} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Где значения  $\beta_{mn}$  порождаются решением уравнений относительно функций Бесселя и не связаны с характеристиками установки.  $\beta_{mn}$  можно считать известными.

Так как некоторые константы были не известны, можно поступить следующим образом: брать основной тон из эксперимента и пытаться рассчитать по формуле обертона. Например, для основного тона  $f_{01} = 165$  Гц рассчитаем обертона  $f_{02,03}$ :

$$f_{02} = 3.309f_{01} = 545 \text{ Гц}, \quad f_{03} = 2.234f_{02} = 1217 \text{ Гц}$$

В эксперименте же наблюдались частоты 567 и 1226 Гц. Завышение теоретических значений можно объяснить наличием диссипации: так, по аналогии, учет диссипации для колебаний в LC-контуре приводит к уменьшению резонансной частоты.

## Заключение

В настоящей работе были изучены линейные теории двумерных колебательных систем с распределенными параметрами (пластин и стержней); проведен ряд экспериментов с пластинами и стержнями.

Для стержней были получены резонансные кривые, рассчитаны добротность, модуль Юнга и коэффициент вязкости для каждого стержня. Следует отметить различие в ширинах резонансных кривых (и, как следствие, добротностях) для стали и оргстекла. Для оргстекла ширина резонансной кривой составляет несколько сотен Герц (и добротность  $\sim 10$ ), а для стали ширина кривой несколько Герц (а добротность  $\sim 10^4$ ). Такая большая разница связана с различиями в структурах оргстекла и стали. Оргстекло – аморфный материал с высокой (по сравнению со сталью) вязкостью, поэтому колебания в нем распространяются хуже, чем в стали.

В экспериментах с пластинами были получены фигуры Хладни, определены моды колебаний для двух положений возбудителя: по центру пластины и сдвинутым относительно центра.

## Список литературы

- [1] Гурбатов С.Н. Лекции по механике сплошных сред на радиофизическом факультете 2018/2019. – 106 с.
- [2] Горская Н. В., Курин В. В. и др. Колебания механической системы с распределенными параметрами: колебания стержней. Н.Новгород: ННГУ, 1995. – 13 с.