Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Лекции по основам теории колебаний

Набор и вёрстка:

Карусевич А.А. Понур К.А., Сарафанов Ф.Г., Шиков А.П., Платонова М.В.

Disclaimer. В данном документе нами набраны лекции по теории колебаний (нелинейной динамике), прочитанные на 3 курсе радиофизического факультета ННГУ **Владимиром Исааковичем Некоркиным**, но не вошедшие в существующие методические пособия. Документ призван облегчить подготовку к зачётам и экзаменам и восполнить пробелы в знаниях читателя по теории колебаний. Разрешено копирование и распространение данного документа с обязательным указанием первоисточника.

4 апреля – 21 июля 2019 г.
Нижний Новгород

Оглавление

Раздел I

Осенний семестр

Глава 1.

Введение в теорию колебаний

1.1. Общие закономерности теории колебаний

Колебательные процессы и системы настолько широко распространены в природе, технике и обществе, что любой из нас с ними неоднократно сталкивается в повседневной жизни и, по-видимому, без труда сформулирует основные их свойства. Действительно, когда мы слышим о колебаниях температуры, курса валют, электрического напряжения, маятника, уровня воды и так далее, нам понятно, что речь идет о процессах во времени или в пространстве, обладающих той или иной степенью повторяемости и возвращаемости к начальному или близкому состояниям. Причем, эти базовые свойства процессов не зависят от природы систем и поэтому могут быть описаны и изучены с единой точки зрения в рамках общего междисциплинарного подхода. Именно такой подход и развивает теория колебаний, предметом которой являются колебательные явления и процессы в системах различной природы. Колебательные свойства реальных систем теория колебаний получает из анализа соответствующих моделей. В результате такого анализа устанавливается связь между параметрами модели и её колебательными свойствами.

Теория колебаний является как прикладной, так и фундаментальной наукой. Прикладной характер теории колебаний определяется её многочисленными приложениями в физике, механике, автоматическом управлении, радиотехнике и электронике, приборостроении и т.д. В этих областях науки методами теории колебаний проведено исследование большого числа различных систем и явлений. Более того, на базе теории колебаний возникли новые технические направления – вибротехника, вибродиагностика, биомеханика и др. Фундаментальный характер теории колебаний заключен в самих моделях, которые она изучает. Это так называемые динамические системы, с помощью которых можно описать любую детерминированную'' эволюцию во времени или во времени и пространстве. Именно изучение динамических систем позволило теории колебаний ввести понятия и положения, развить методы и получить результаты, оказывающие большое влияние на другие естественные науки. Здесь достаточно отметить линеаризованную теорию устойчивости, понятия автоколебаний и резонанса, теорию бифуркаций, хаотические колебания и др.

1.2. Динамические системы

Рассмотрим систему, состояние которой определяется вектором $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что эволюция системы определяется одно-параметрическим семейством операторов G^t, $t \in \mathbb{R}$ (или $t \in \mathbb{R}^+$) или $t \in \mathbb{Z}$ (или $t \in \mathbb{Z}^+$), таких, что состояние системы в момент t

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = G^t \mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{x}_0$ – начальное состояние (начальная точка). Предположим также, что эволюционные операторы удовлетворяют двум следующим свойствам, отражающим детерминистический характер описываемых процессов.

1) G^0 – тождественный оператор, т.е.

$$\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0), \text{ для любых } \mathbf{x}_0. \tag{1.1}$$

Это свойство означает, что состояние системы не может изменяться самопроизвольно.

2) Второе свойство эволюционных операторов имеет вид:

$$G^{t_1+t_2} = G^{t_1} \circ G^{t_2} = G^{t_2} \circ G^{t_1}, \tag{1.2}$$

т.е.

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}(t_2, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}(t_2, \mathbf{x}(t_1, x_0)) \tag{1.3}$$

Согласно (1.2) система приходит в одно и то же финальное состояние независимо от того, достигается ли оно за один временной интервал $t_1 + t_2$, или за несколько последовательных интервалов t_1 и t_2, суммарной равных $t_1 + t_2$.

Совокупность всех начальный точек X или всех возможных состояний системы (в рассматриваемом случае $X = \mathbb{R}^n$) называется фазовым пространством, а пара $(X, \{G^t\})$, где семейство эволюционных операторов удовлетворяют условиям (1.2) - (1.1), – динамической системой (ДС).

ДС делятся на два важных класса – с непрерывным временем, если $t \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$, и с дискретным временем, если $t \in \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_+$.

Эволюция системы соответствует движению изображающей точки в фазовом пространстве вдоль траектории $\Gamma = \bigcup\limits_t G^t\mathbf{x}_0$. Семейство $\Gamma^+ = \bigcup\limits_{t\geq 0} G^t\mathbf{x}_0$ $\left(\Gamma^- = \bigcup\limits_{t<0} G^t\mathbf{x}_0\right)$ называется положительной (отрицательной) полутраекторией, проходящей через начальную точку $\mathbf{x}_0$. Если семейство $\{G^t\}$ является непрерывным по t (для ДС с непрерывным временем), то траектории (полутраектории) представляют собой непрерывные кривые в X. Для ДС с дискретным временем траектории являются дискретными подмножествами в фазовом пространстве.

Введем необходимое в дальнейшем понятие инвариантности множества. Множество $A \subset X$ называется положительно (отрицательно) инвариантным , если оно состоит из положительных полутраекторий, т.е. A - положительно (отрицательно) инвариантно, если $G^tA \subset A, t > 0$ $(t < 0)$. Множество A называется инвариантным, если оно одновременно инвариантно как положительно, так и отрицательно.

1.2.1. Типы траекторий

Дадим определение основных типов траекторий ДС.

- Точка $\mathbf{x}_0$ называется неподвижной точкой ДС, если $G^t\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ для всех t (для систем с непрерывным временем такие точки чаще называют состояниями или положениями равновесия).

- Точка $\mathbf{x}_0$ называется периодической, если существует такое $T > 0$, что $G^t\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ и $G^t\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_0$ для $0 < t < T$, а соответствующая траектория $\bigcup\limits_{0 \leq t \leq T} G^t\mathbf{x}_0$ динамической системы, проходящая через эту точку – периодической. Периодическая траектория является замкнутой кривой в фазовом пространстве ДС с непрерывным временем и совокупностью T-периодических точек для ДС с дискретным временем.

- Точка $\mathbf{x}_0$ называется неблуждающей, если для любой окрестности открытого множества $U \ni \mathbf{x}_0$ этой точки и любого $t_0 > 0$ найдется сколь угодно большое $t > t_0$, такое что $G^tU \cap U \neq \varnothing$. Траектория, проходящая через такую точку, называется неблуждающей.

Между траекториями ДС и движениями реальных систем существует соответствие. Неподвижным точкам ДС отвечают стационарные состояния реальных систем, периодическим траекториям – периодические движения, а неблуждающим траекториям – движения с некоторым повторением их состояний во времени.

Заметис, что вышеприведенные траектории могут существовать и в ДС, у которых фазовое пространство не обязательно $\mathbb{R}^n$. Например, фазовым пространством динамической системы, описывающей колебания математического маятника является цилиндр $X = S^1 \times \mathbb{R}$, поскольку состояние маятника в любой момент времени однозначно описывается значением угловой переменной $\varphi(t)$, определенной с точностью до 2π $(\varphi \in S^1)$ значением её скорости $\dot{\varphi} \in \mathbb{R}$.

1.2.2. Динамические системы с непрерывным временем

Для многих ДС с непрерывным временем правило, которое позволяет найти состояние в любой момент времени по начальному состоянию, задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N), \; i = 1, 2, \ldots, N$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{i} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \; \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

для которой условия существования и единственности решений выполнены (здесь и далее мы будем обозначать точкой дифференцирование по времени). В этом случае семейство $G^t\mathbf{x}_0$ задается просто решением системы (1.4) с начальным условием $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Например, для линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

где A – матрица размерности $n \times n$ с постоянными коэффициентами, решение имеет вид $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = e^{At}\mathbf{x}_0$, в котором e^{At} – матрица $n \times n$. Поскольку матрицы $e^{A_1 t}$ и $e^{A_2 t}$ коммутируют для любой пары t_1, t_2, то свойство (1.2):

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \circ e^{At_2} = e^{At_2} \circ e^{At_1}$$

выполняется. Свойство (1.1) также, очевидно, выполнено.

В качестве другого примера рассмотрим систему, заданную в полярных координатах

$$\dot{\rho} = \lambda\rho, \quad \dot{\varphi} = \omega$$

Следовательно, эволюционные операторы задаются следующим образом

$$G^t: \quad (\rho_0, \varphi_0) \to (\rho_0 e^{\lambda t}, \omega t + \varphi).$$

Очевидно, что свойства (1.1)-(1.2) выполняются.

Обратим внимание н ато, что правая часть системы (1.4) явно от времени не зависит. Такие системы называются **автономными**. Существует также большое число задач (например, системы, подверженные внешнему переменному силовому воздействие), описываемых динамическими системами, правые части которых явно зависят от времени. Они называются **неавтономными**.

1.2.3. Динамические системы с дискретным временем

ДС с дискретным временем обычно определяют следующим образом

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(n)),$$

где $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – отображение и $n \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – дискретное время. Для таких систем траектория представляет собой конечную или счетную совокупность точек в $\mathbb{R}^n$. Иногда употребляют другую эквивалентную форму записи ДС с дискретным временем

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

где $\bar{\mathbf{x}}$ является образом точки $\mathbf{x}$ под действием отображения F. В настоящем курсе мы будем использовать ту и другую форму записи точечных отображений.

Поясним понятие ДС с дискретным временем на примере одномерного отображения

$$\bar{x} = 2x, \mod 1 \tag{1.5}$$

Фазовым пространством этого отображения является интервал $[0, 1]$. Пусть $x(0) = 1/5$. Непосредственно из (1.5) получим

$$x(0) = \frac{1}{5} \to x(1) = \frac{2}{5} \to x(2) = \frac{4}{5} \to x(3) = \frac{3}{5} \to x(4) = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, рассматриваемая полутраектория является периодической с периодом 4 (рис. 1.1). На первый взгляд кажется, что при таком простом правиле точечного преобразования (1.3) временная эволюция переменной $x(n)$ при любых начальных условиях может оказаться простой и предсказуемой. Оказывается, что это не так. Если значение $x(0$ известно не точно, а с некоторой точность ε , предсказать будущее поведение $x(n)$ не удается. После достаточно большого числа итераций интервал $J_\varepsilon = (x(0)0\varepsilon, x(0) + \varepsilon)$ будет покрывать всё фазовое пространство - интервал $[0, 1]$. ругими словами, существуют траектории, проходящие через начальные точки в J_ε, растягивающие произвольный кусок фазового пространства. Непредсказуемость вызывается здесь неустойчивость траекторий. Это феномен так называемого детерминированного хаоса, когда в детерминированной системе из-за неустойчивости траекторий возникают непредсказуемые наперед движения.

1.2.4. Динамические системы с диссипацией

Рассмотрим динамическую систему (1.4) и введем для неё понятие шара диссипации. Говорят, что гладкая поверхность $S = \{\varphi(x) = 0\}$ будет транс-

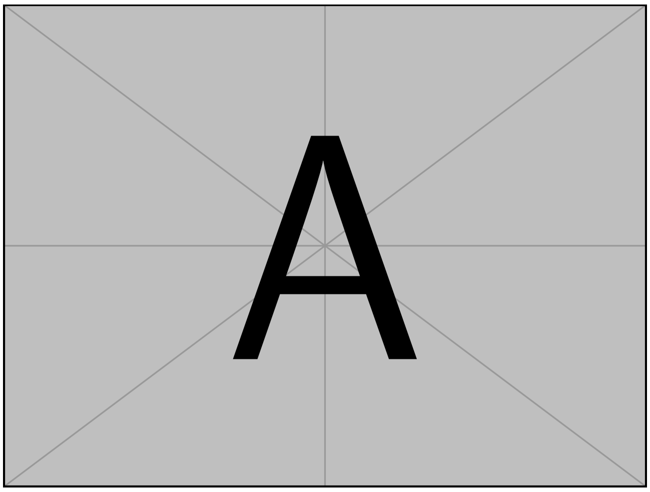


Рис. 1.1. Полутраектория системы (1.3) с начальным условием $x(0) = 1/5$

версальной к векторному полю $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, если скалярное произведение

$$(\mathrm{grad}\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x})) \neq 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in S,$$

где

$$\mathrm{grad}\varphi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \right)$$

Если S топологическая сфера, т.е. граница топологического шара D, то шар D называется гаром диссипации, если

$$(\mathrm{grad}\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x})) < 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in S,$$

Это означает, что векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ на S ориентировано внутрь D (рис. 1.2). Очевидно, что траектории, входящие в D, остаются в нем навсегда. Такие динамические системы называются диссипативными. Наибольшее внимание в нашем курсе будет уделено именно таким динамическим системам, описывающим процессы в физических системах при учете различных потерь.

Определение 1. Система (1.4) называется диссипативной, если существует шар диссипации D, такой, что для любой начальной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$: $G^t\mathbf{x}_0 \in D$ для некоторого $t > 0$.

Заметим, что существуют и другие определения диссипативных систем (например, иногда требуют, чтобы $\mathrm{div}\mathbf{F} < 0$), но мы будем использовать определение 1.

При исследовании диссипативных систем важную поль играет понятие

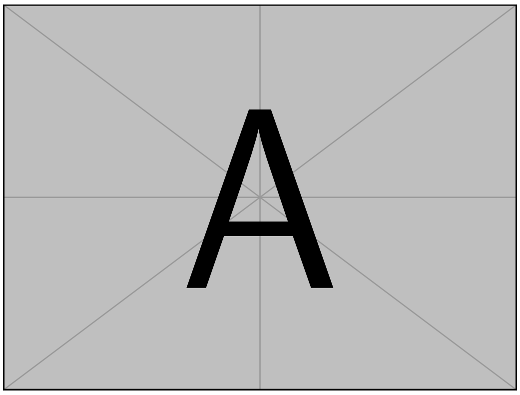


Рис. 1.2. Качественное представление шара диссипации D

так называемой поглощающей области.

Определение 2. Компактная область D является поглощающей, если

$$G^t D \subset \mathrm{Int} D \text{ для } t > 0,$$

где $\mathrm{Int} D$ – внутренняя часть D.

Например, для ДС с дискретным временем вида

$$\bar{x} = 3x(1 - x) = f(x)$$

интервал $[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$ является поглощающей область. Действительно, поскольку

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{25}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

то

$$f\left(\left[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right]\right) = \left[\frac{12}{25}, \frac{3}{4}\right] \subset \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

1.3. Аттракторы

Для систем с диссипацией очень естественно различать переходные процессы и установившиеся процессы или режимы. Базовой чертой установившегося процесса является то, что он «забывает» начальное состояние и не зависит от него. Это означает, что после конечного временного интервала, соответствующего переходному процессу, каждая положительная полутраектория попадает в малую окрестность некоторого инвариантного множества

– «аттрактора» (от англ. attract – привлекать, притягивать). Существует несколько определений аттрактора (аттрактор Милнора, статистический аттрактор и др.). Приведем здесь одно из них, которое на наш взгляд наиболее соответствует задачам настоящего курса.

Определение 3. Пусть D поглощающая область динамической системы (G^t, X), тогда множество

$$A = \bigcap_{t \geq 0} G^t D$$

называется **максимальным аттрактором** в D.

Определение 4. Инвариантное множество A является аттрактором, если существует поглощающая область D, для которой A – максимальный аттрактор. Ясно, что максимальный аттрактор зависит от поглощающей области, и может содержать другие аттракторы. Примерами простейших аттракторов являются устойчивые состояния равновесия и неподвижные точки.

1.4. Структурная устойчивость динамических систем

Очевидно, что динамическая система, описывающая поведение любой реальной системы, должна зависеть от параметров. Рассмотрим, например, систему (1.4), зависящую от некоторого набора параметров

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu), \mu \in \mathbb{R}^k, \tag{1.6}$$

где μ - вектор параметров. Возникает вопрос: нельзя ли обойтись без методов теории колебаний и сделать необходимые нам расчеты динамики системы (1.6) напрямую, например, численно, используя современные компьютеры и численные методы? Предположим, что мы можем строить приближенно решение системы с любыми начальными условиями. Пусть мы построили какое – либо решение на некотором временном интервале. Что можно сказать о поведении всей системы, исходя из полученной информации об одном решении? Очевидно – ничего, поскольку в реальных системах начальные условия почти всегда произвольны. Поэтому перебор даже очень большого числа начальных условий не решает полностью задачу, т.к. поведение системы при оставшихся начальных условиях остается неясным. Кроме того, задачу усложняет и то, что реальные системы зависят от параметров. Следовательно, используя численное моделирование, мы можем в лучшем случае сказать о поведении реальной системы только при некоторых значениях параметров и начальных условий.

Таким образом, для конструирования каких-либо устройств, приборов, изучения свойств реальных объектов необходимо исследовать не одно какое–либо частное решение системы, а **целый класс моделей** . Для решения этой сложной задачи в теории колебаний развивается подход, включающий следующие базовые положения:

- изучать не все траектории системы, а только избранные (в некотором смысле особенные) и находить параметры, при которых такие траектории существуют;

- поведение траекторий системы при других значениях параметров изучать, как правило, лишь **качественно**.

Очевидно, что в динамических системах, описывающих движения реальных систем, ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным во времени. Следовательно, динамические системы, вообще говоря, изменяются вместе с входящими в них параметрами. Однако, если эти изменения достаточно малы, то, как показывает практика, реальная система как бы не замечает этих изменений, то есть качественные черты ее поведения сохраняются. Поэтому, если мы хотим, чтобы динамическая система отображала эту особенность, нужно придать ей свойство **грубости**. Именно: при малых изменениях параметров должна оставаться неизменной качественная структура разбиения фазового пространства на траектории. Тем самым выделить класс «грубых» динамических систем. Грубость динамической системы можно трактовать как устойчивость структуры разбиения её фазового пространства на траектории по отношению к малым изменениям динамической системы. Поэтому грубые динамические системы часто называют структурно устойчивыми.

А.А. Андронов и Л.С. Потрягин (1937 г.) ввели строгое математическое определение грубости динамических систем с двумерным фазовым пространством. Приведем его здесь для системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \tag{1.7}$$

где P и Q – гладкие функции, а система (1.7) является диссипативной с шаром диссипации D

Определение 5. Система (1.7) называется грубой (структурно устойчивой), если существует такое малое число $\delta > 0$m что **все** динамические системы вида

$$\dot{x} = P(x,y) + p(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y) + q(x,y),$$

в которых аналитические функции $p(x,y)$ и $q(x,y)$ удовлетворяют неравенству

$$|p(x,y)| + |q(x,y)| + \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| < \delta,$$

имеют такую же структуру разбиения D на положительные полутраектории, что и система (1.7)

Совершенно ясно, что не при всяком изменении параметра грубость динамической системы сохраняется. Можно так поменять параметр, что произойдет принципиальное изменение фазового портрета. Переход от одной грубой динамической системы к другой происходит через негрубую динамическую систему. Значение параметра, при котором динамическая система является негрубой, называется **бифуркационным**. Требование грубости для автономных систем второго порядка, являясь естественным с точки зрения приложений, существенно упрощает возможные структуры разбиения фазовой плоскости на траектории. Каждая из этих структур определяется конечным числом особых фазовых траекторий. Что это за траектории речь пойдет ниже в курсе теории колебаний

Заметим, что прямое перенесение, приведенного выше определения грубости, на случай многомерных (размерность фазового пространства три и выше) динамических систем оказалось невозможным. Было установлено, что существуют многомерные системы, содержащие только неустойчивые траектории, а в пространстве динамических систем существуют целые области негрубых систем. Поэтому теория грубых многомерных динамических систем строится иначе, чем в двумерном случае. Мы обратимся к этому вопросу позднее.

Глава 2.

Динамические системы на прямой

Динамические системы с одномерным фазовым пространством – системы на прямой являются простейшим видом непрерывных динамических систем с конечномерным фазовым пространством. Сами по себе такие модели описывают поведение достаточно простых реальных систем. Например, изменение заряда q в простейшем RC-контуре (рис. 2.1), содержащем конденсатор с сегнетоэлектриком (вещество с нелинейной зависимостью поляризации от приложенного электрического поля).

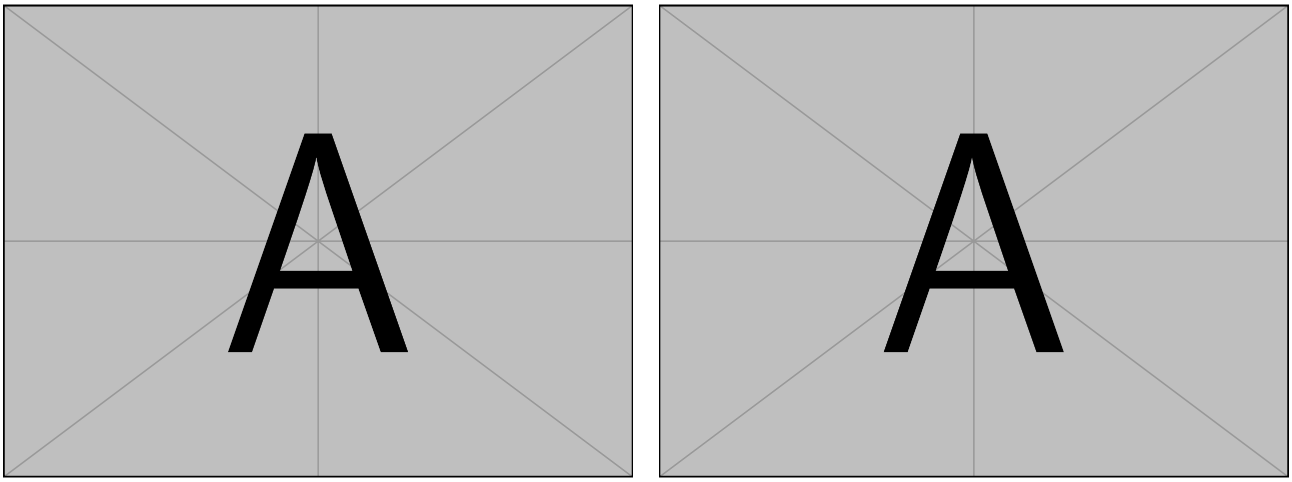


Рис. 2.1. (a) RC-контур; (b) нелинейная характеристика конденсатора с диэлектриком

Однако, с методической точки зрения эти системы чрезвычайно важны, поскольку дают наглядное и ясное представление о базовых идеях и подходах теории колебаний.

2.1. Качественный подход

Во многих случаях качественные (геометрические) представления о динамике нелинейных систем бывают более полезны, чем даже точное решение системы. Поясним это на простом примере. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = x - x^2 \tag{2.1}$$

Очевидно, что $x = 0$ и $x = 1$ является решениями (2.1). Найдем остальные решения. Считая, что $x \neq 0;\ 1$, разделим переменные в (2.1)

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - x^2} = \mathrm{d}t \tag{2.2}$$

Интегрируя (2.2), получаем

$$\ln|x| - \ln|1 - x| + C = t, \tag{2.3}$$

где $C = \mathrm{const}$. Рассмотрим решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию: $x(0) = x_0$, где $x_0 \neq 0\,1$. Из (2.3) находим, что этому начальному условию отвечает постоянная

$$C = \ln|1 - x_0| - \ln|x_0|$$

и соответствующее решение имеет вид

$$\ln\left|\frac{x}{x_0}\right| - \ln\left|\frac{1 - x}{1 - x_0}\right| = t \tag{2.4}$$

Выражение (2.4) задает точное решение рассматриваемой задачи. Давайте попробуем получить из (2.4) ответы на следующие вопросы:

1) Пусть $x_0 = \frac{1}{2}$. Как изменяется переменная $x(t)$ при $t > 0$ и, в частности, какое предельное значение она принимает при $t \to +\infty$?

2) Как ведёт себя $x(t)$ при $t \to +\infty$ при различных значениях x_0?

Конечно, из (2.4) ответить на эти вопросы можно, но это требует некоторых дополнительных рассуждений и выкладок. Давайте теперь для ответа на эти вопросы привлечем базовое понятие теории колебаний – фазовое пространство. Для системы (2.1) фазовым пространством является числовая прямая $\mathbb{R}^1$. Отметим на $\mathbb{R}^1$ значения $x = 0$ и $x = 1$. В этих точках $\dot{x} = 0$ и, следовательно, эти значения не изменяются во времени. Из (2.1) легко найти знак $\dot{x}$ во всех интервалах прямой $\mathbb{R}^1$, определяемых значениями $x = 0$ и $x = 1$, и тем самым установить направление движения фазовых траекторий. Отсюда, принимая во внимание структуру разбиения фазовой прямой на траектории, легко дать ответы на поставленные вопросы.

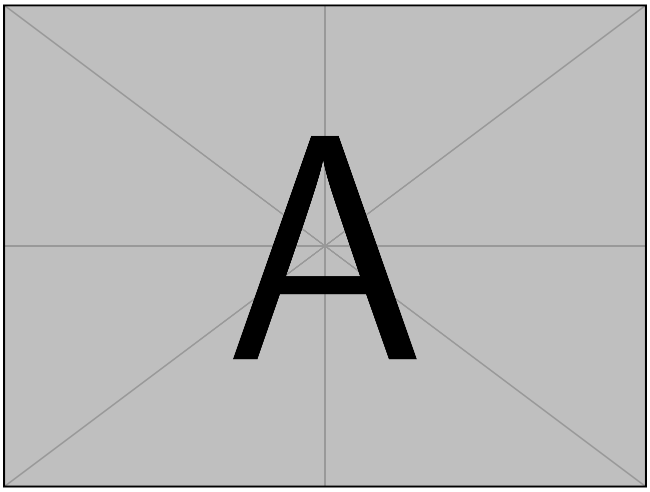


Рис. 2.2. Фазовая прямая системы (2.1)

1) Траектория с начальным условием $x_0 = \frac{1}{2}$ при $t \to +\infty$ асимптотически стремится к значению $x = 1$.

2) Все траектории с начальными условиями $x_0 > 0$ $(x_0 \neq 1)$ при $t \to +\infty$ асимптотически стремятся к значению $x = 1$, а при $x_0 < 0$ переменная $x(t)$ неограниченно убывает, т.е. $x(t) \to -\infty$.

Рассмотренный пример показывает, что в фазовом пространстве существуют значения x, которые остаются неизменными при любом t – это так называемые состояния равновесия (см. лекцию 1, раздел 1.2.1). С теоретической точки зрения любое состояние равновесия представляет собой классический геометрический объект – точку. В системе (2.1) к точке $x = 1$ траектории системы асимптотически приближаются при $t \to +\infty$ и поэтому это состояние равновесия логично называть устойчивым, а от точки $x = 0$ траектории, наоборот, удаляются при увеличении t и его, поэтому, называют неустойчивым (строгое определение устойчивости состояний равновесия мы дадим позднее).

2.2. Грубые состояния равновесия

Рассмотрим динамическую систему на прямой общего вида

$$\dot{x} = F(x, \mu) = 0, \tag{2.5}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ – вектор параметров. Будем считать, что $F(x)$ – взаимно-однозначная функция, обеспечивающая выполнение теорем существования и единственности решений. Очевидно, что состояние равновесия системы (2.5) определяются уравнением

$$F(x, \mu) = 0. \tag{2.6}$$

Пусть $x = x^*(\mu)$ – одно из решений уравнения (2.6). Найдем условия локальной устойчивости состояния равновесия $x^*(\mu)$. Пусть $\xi(t) = x - x^*(\mu)$ – малое возмущение, тогда из системы (2.5) имеем

$$\dot{\xi} = F(x^*(\mu) + \xi, \mu) = F(x^*(\mu), \mu) + F'_x(x^*(\mu), \mu)\xi + \ldots$$

или

$$\dot{\xi} = F'_x(x^*(\mu), \mu)\xi + \ldots \tag{2.7}$$

Если $F'_x(x^*(\mu), \mu) \neq 0$, то в малой окрестности $x = x^*(\mu)$ в (2.7) можно ограничиться лишь линейным слагаемым по ξ, т.е. вместо (2.7) рассмотреть линейное уравнение (эта процедура называется линеаризацией, рамки применения которой мы обсудим позднее) вида

$$\dot{x} = \lambda(\mu)\xi, \text{ где } \lambda(\mu) = F'_x(x^*(\mu), \mu). \tag{2.8}$$

Поскольку общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\xi(t) = Ce^{\lambda(\mu)t},$$

где $C = \text{const}$, то при условии $\lambda(\mu) < 0$ возмещение $\xi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и состояние равновесия $x^*(\mu)$ будет устойчивым, а если $\lambda(\mu) > 0$, то $\xi(t)$ растут и $x^*(\mu)$ будет неустойчивым. Коэффициент $\lambda(\mu)$ называется ляпуновским характеристическим показателем. Условия устойчивости допускают простую геометрическую интерпретацию. Состояние равновесия $x^*(\mu)$ является локально устойчивым, если производная функции $F(x, \mu)$ по точке $x^*(\mu)$

отрицательная и неустойчиво, если $F'(x^*(\mu), \mu) > 0$ (рис. 2.3)

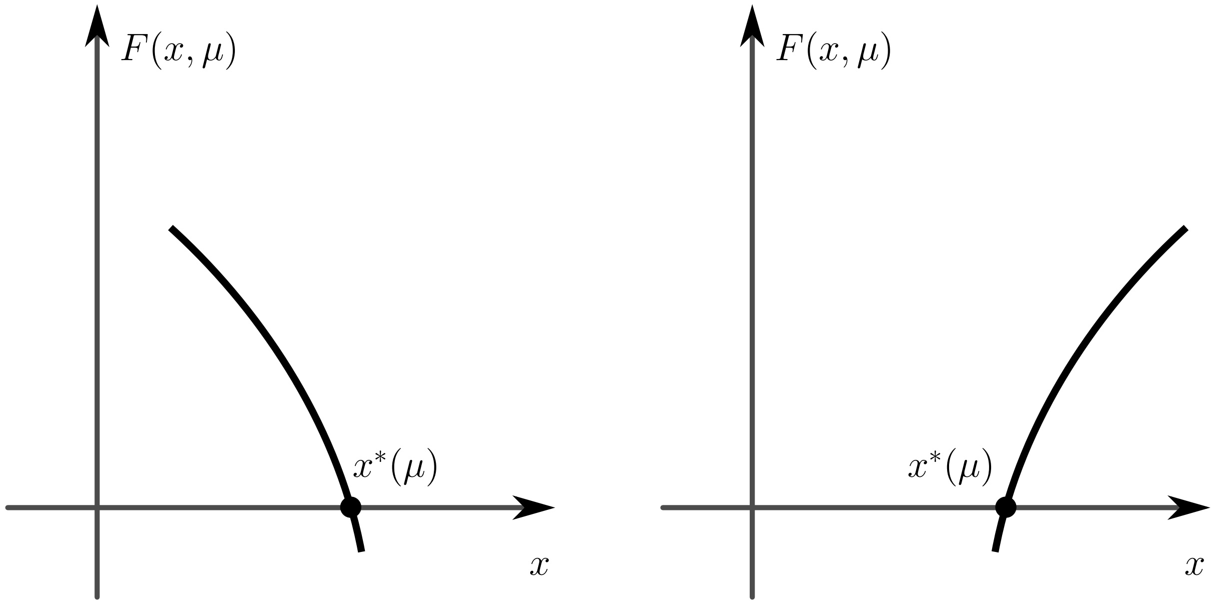


Рис. 2.3. Поведение функций $F(x, \mu)$ в окрестности точки $x = x^*(\mu)$ в случае устойчивого (a) и неустойчивого (b) состояний равновесия.

Ясно, что в обоих случаях малые изменения правой части системы (2.5) не могут привести к исчезновению и смене устойчивости состояния равновесия $x^*(\mu)$. Следовательно, условие грубости состояний равновесия на прямой имеет вид $\lambda(\mu) \neq 0$, а буфуркационные значения параметров определяются уравнением $\lambda(\mu^*) = 0$. Таким образом, динамическая система (2.5) на прямой будет грубой (структурно устойчивой), если для всех состояний равновесия выполнено условие $\lambda_i(\mu) \neq 0$.

2.3. Бифуркации состояний равновесия

2.3.1. Двукратное равновесие

Бифуркация двукратное равновесие определяет один из базовых динамических механизмов рождения и исчезновения состояний равновесия. Рассмотрим систему следующего вида

$$\dot{x} = \mu + x^2, \tag{2.9}$$

где $\mu \in \mathbb{R}^1$. Анализ динамики системы (2.9) прост и представлен на рис. 2.4 Он показывает, что при $\mu = 0$ состояние равновесия $x = 0$ является негру-

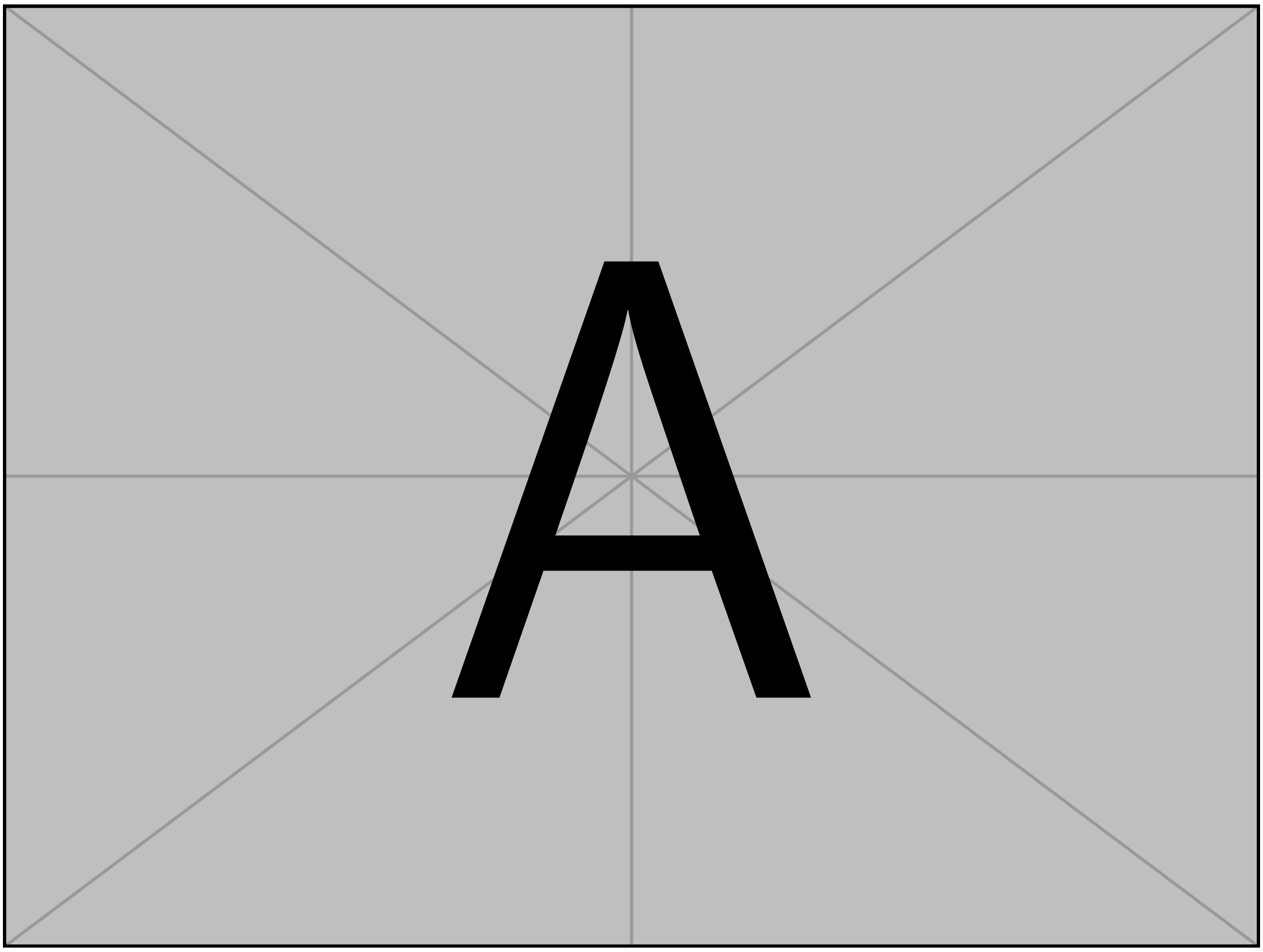


Рис. 2.4. Разбиение фазовой прямой на траектории для системы (2.9) при различных значениях параметра μ

бым, поскольку любое сколь угодно малое изменение параметра μ приводит к принципиальному изменению структуры фазовой прямой. Такое состояние равновесия называется двухкратным, так как при его разрушении на фазовой прямой появляются два грубых состояния равновесия.

Совершенно аналогично для системы

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \mu \in \mathbb{R}^1 \tag{2.10}$$

получаем разбиение фазовой прямой, представленное на рис.

Представленны на рисунках 2.5-2.4 результаты удобно представить в виде так называемых бифуркационных диаграмм, представляющих собой зависимость стационарных состояний системы от параметра μ , который принято

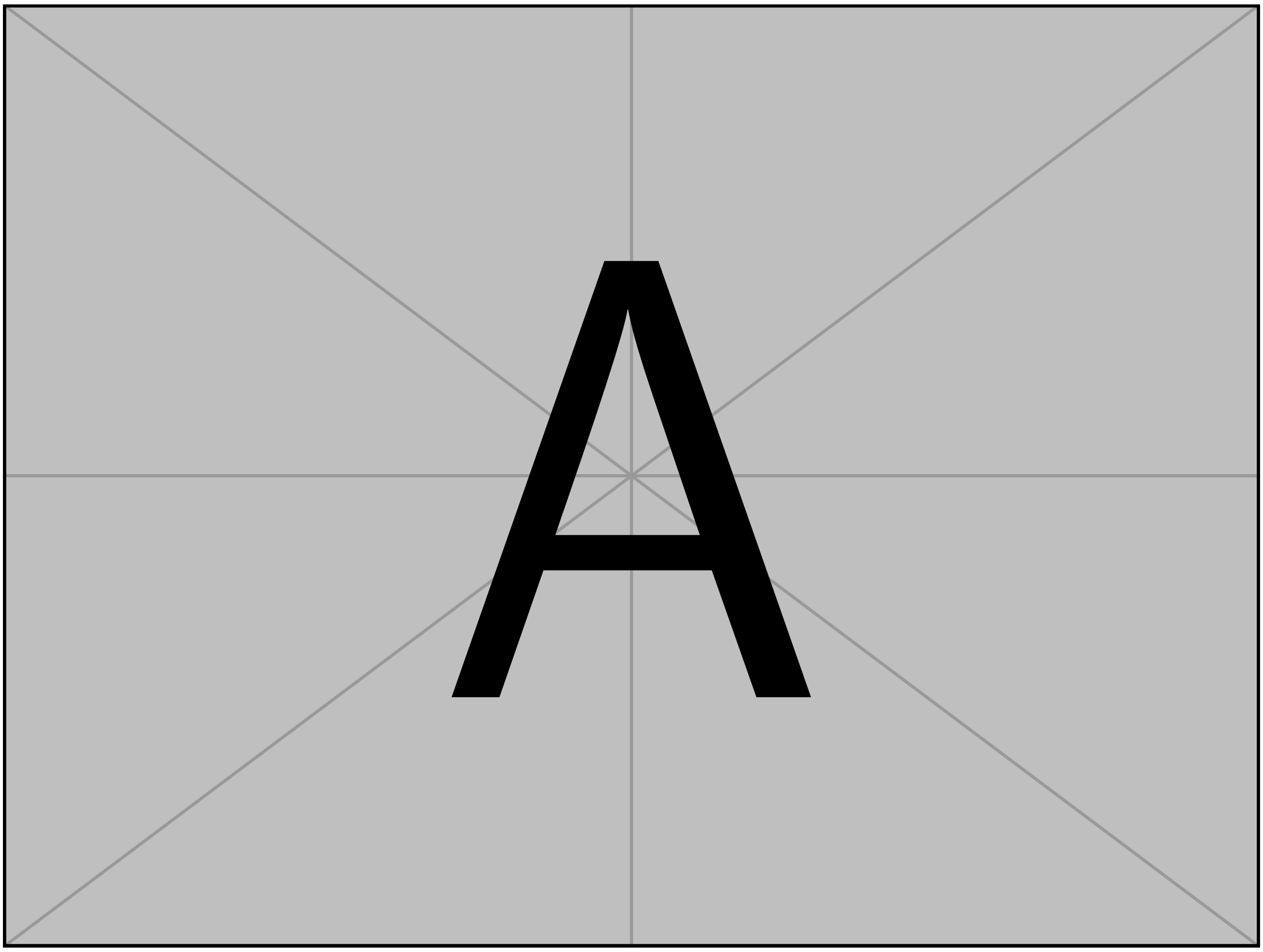


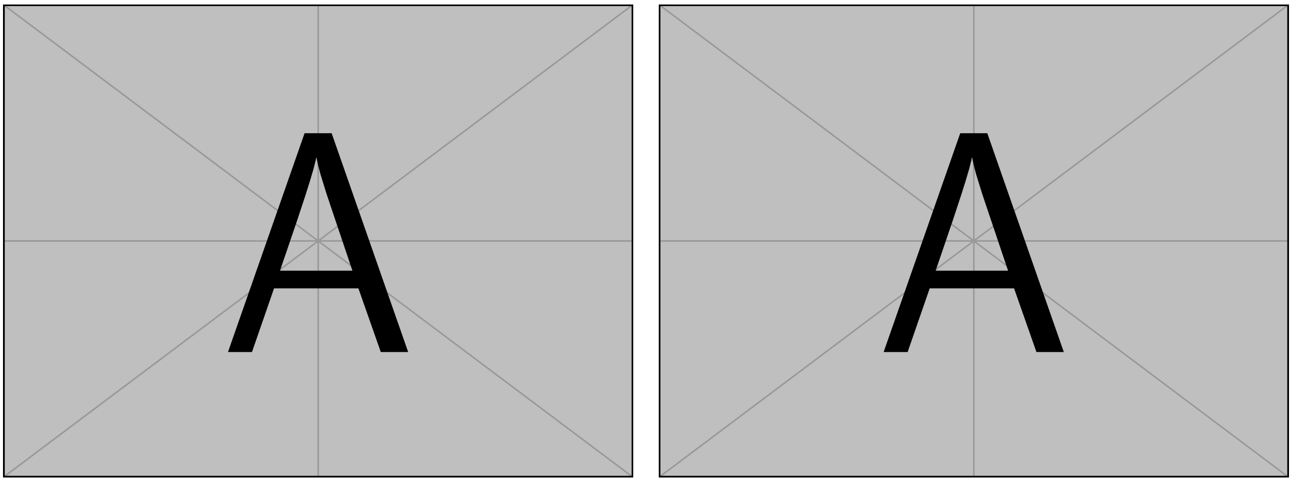
Рис. 2.5. Фазовая прямая системы (2.10) для различных значений параметра μ

называть контрольным параметром. Эти диаграммы для систем (2.9)-(2.10) изображены на рис.2.6a и b соответственно.

Таким образом, двукратное равновесия – негрубое состояние равновесия, которые при сколь угодно малом изменении параметра либо распадается на два грубых, либо исчезает.

2.3.2. Понятие о нормальной форме

В определенном смысле системы (2.9) и (2.10) описывают все возможные бифуркации двукратных состояний равновесия на прямой и поэтому их называют нормальной формой для этой бифуркации. Другими словами, если какая-либо система прямой имеет двухкратное равновесие, то в окрестности этой точки поведение системы можно описать с помощью уравнения (2.9) или (2.10). Действительно, пусть при $\mu = \mu_0$ система (2.5) имеет двухкратное



(a) (b)

Рис. 2.6. (a) Бифуркационные диаграммы системы (2.9) и (b) системы (2.10). Пунктирной линией указана ветвь неустойчивых, а сплошной – устойчивых состояний равновесия

равновесия $x = x_0$. Раскладывая правую часть (2.5) в ряд Тейлора, получим

$$\dot{x} = F(x,\mu) = F(x_0,\mu_0) + (x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{(x_0,\mu_0)} + (\mu-\mu_0)\frac{\partial F}{\partial \mu}\bigg|_{(x_0,\mu_0)} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\bigg|_{(x_0,\mu_0)} + \dots \tag{2.11}$$

Поскольку

$$F(x_0,\mu_0) = 0, \quad \lambda(\mu_0) = \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{x_0,\mu_0} = 0,$$

то (2.11) можно переписать в следующем виде

$$\dot{x} = a(\mu-\mu_0) + b(x-x_0)^2 + \dots, \tag{2.12}$$

где $a = \frac{\partial F}{\partial x}\big|_{(x_0,\mu_0)}$, $b = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\big|_{(x_0,\mu_0)}$. Очевидно, что уравнение (2.12) путем введения новых переменных и параметра принимает вид (2.9) или (2.10).

2.3.3. Транскритическая бифуркация

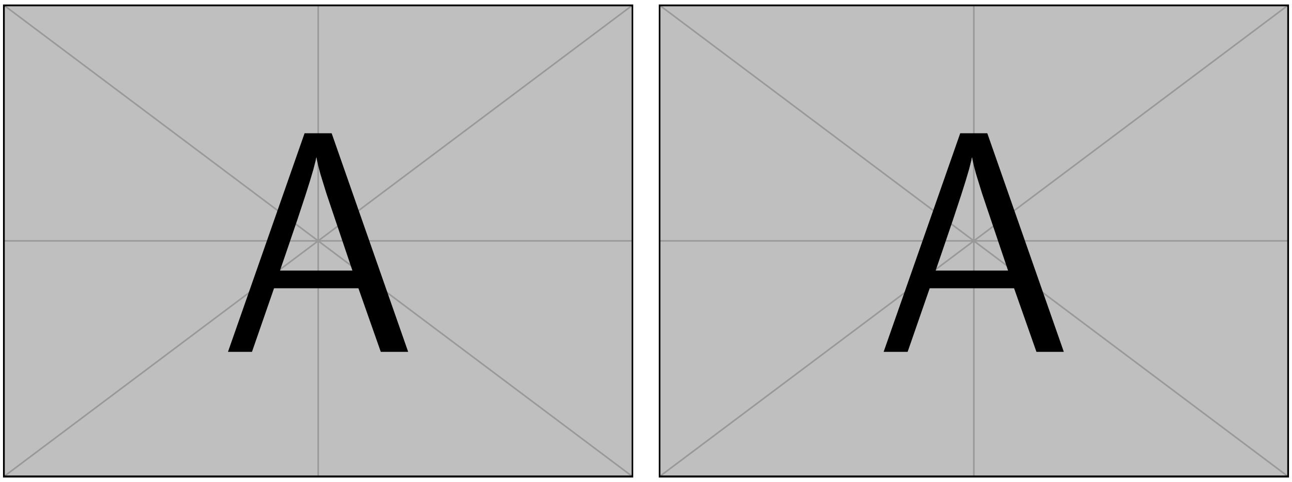
Существует значительное число задач, в которых число состояний равновесия при изменении параметров сохраняется, но их устойчивость меняется. Такая бифуркация носит название транскритической или смены устойчивости состояния равновесия. Нормальная форма для транскритической бифуркации задается уравнением

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \tag{2.13}$$

или уравнением

$$\dot{x} = \mu x + x^2 \tag{2.14}$$

Динамика уравнений (2.13), (2.14) в зависимости от управляющего параметра μ представлена на рис.2.7a и 2.7b соответственно



(a) (b)

Рис. 2.7. Разбиение фазовой прямой на траектории для системы (2.13) и (2.14) соответственно

.

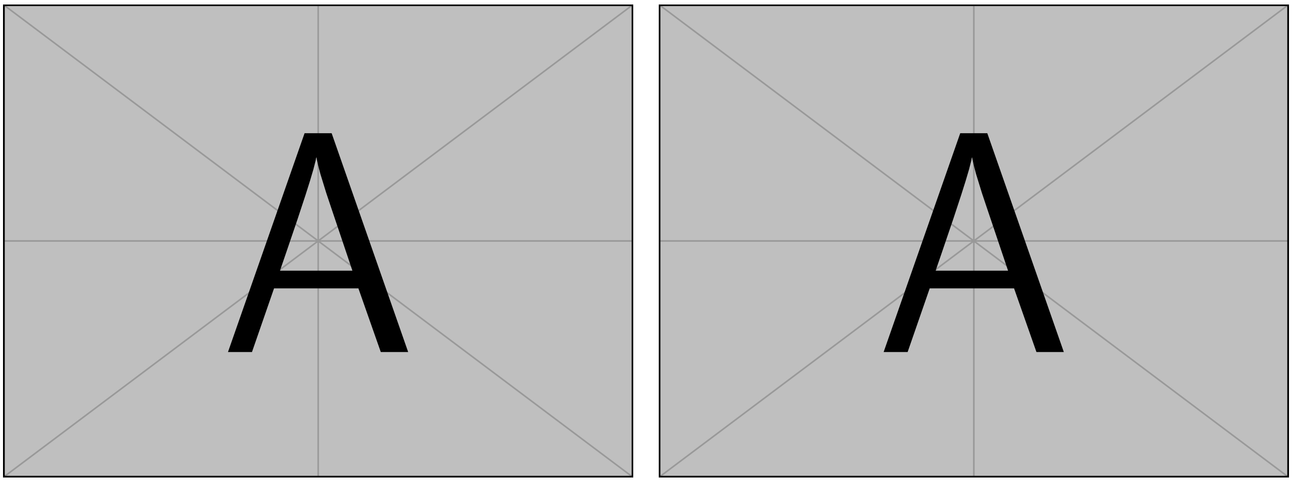
Принимая во внимание рузультаты представленные на рис.2.7, устанавливаем вид буфурцационных диаграмм для систем (2.13) и (2.14) (см. рис.2.8)

2.3.4. Трехкратное равновесие

Эта бифуркация типична для систем, обладающих симметрией. Например, многие физические задачи имею пространственную симметрию между левым и правым направлениями. В таких системах состояния равновесия рождаются и исчезают парами. Нормальная форма бифуркации трехкратное равновесие определяется уравнениями

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \tag{2.15}$$

$$\dot{x} = \mu x + x^3. \tag{2.16}$$



(a) (b)

Рис. 2.8. Бифуркационные диаграммы системы (2.13) (a) и системы (2.14) (b). Ветвь устойчивых состояний равновесия отмечена сплошной линией, а неустойчивых – пунктирной.

Нетрудно видеть, что уравнения (2.15) и (2.16) инвариантны относительно преобразования $x \to -x$. Исследование динамики уравнения (2.15) представлено на рис.2.9.

Обратим внимание на то, что в момент бифуркации, т.е. при $\mu = 0$, ляпуновский характеристический показатель $\lambda(0) = 0$, а само состояние равновесия, несмотря на это является устойчивым. Исследование уравнения (2.16) проводится аналогично предыдущему и мы предлагаем читателю провести его самостоятельно. Представим здесь лишь соответствующую бифуркационную диаграмму (см.рис. 2.10b).

2.4. Система на окружности

Рассмотрим уравнение первого порядка следующего вида

$$\dot{\varphi} = F(\varphi), \text{ где } F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi) \tag{2.17}$$

Уравнения такого вида возникают при описании динамики реальных систем, у которых переменная состояния изменяется циклически. Например, простейшая безфильтровая система фазовой автоподстройки (см. лекцию 4, уравнение (**??**)) описывается уравнением $\dot{\varphi}+\sin\varphi = \gamma$. В силу периодичности правой части (2.17) по φ её фазовым пространством является окружностью S^1. Поясним основные свойства таких систем на следующем примере. Рассмотрим

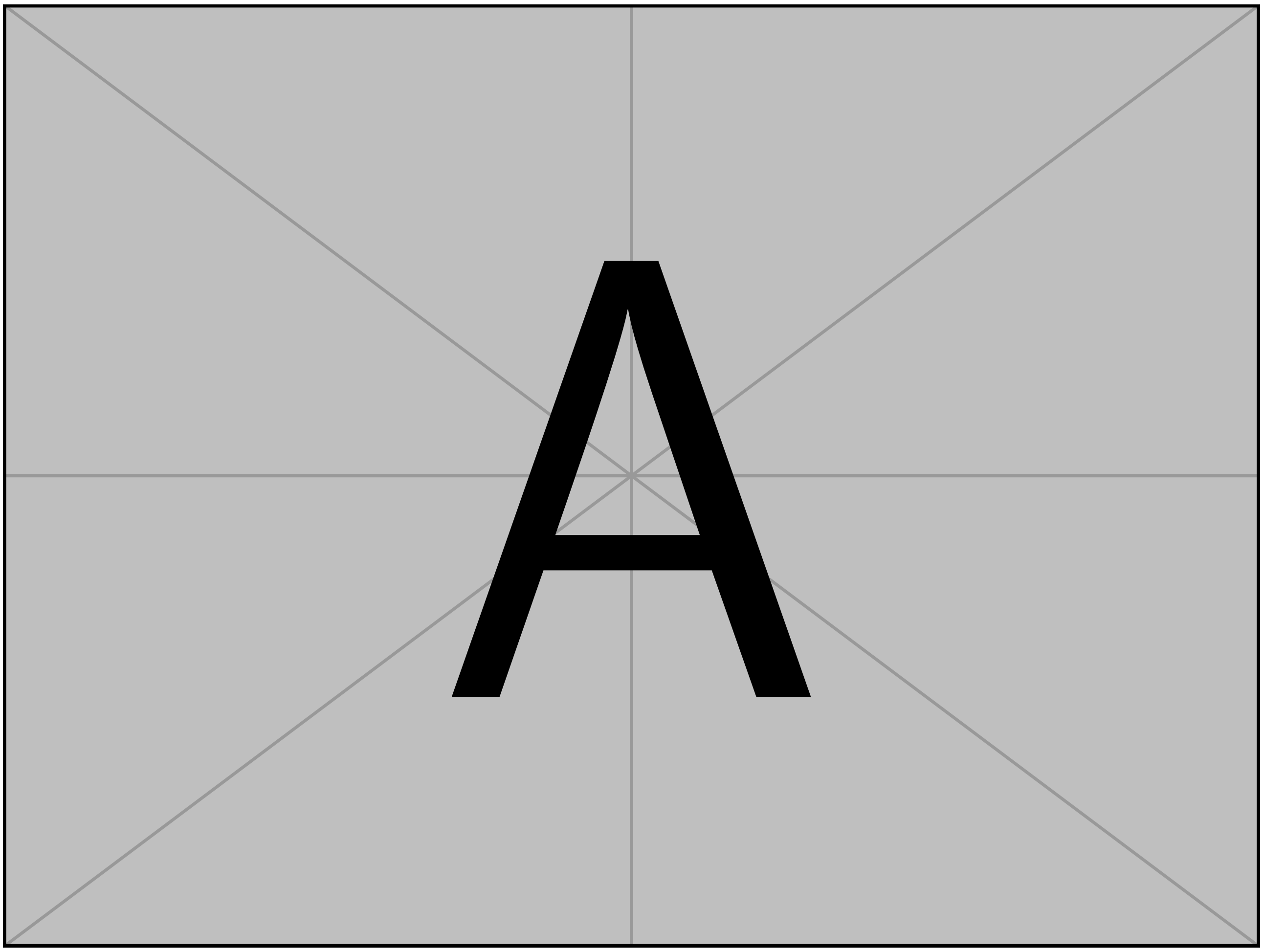


Рис. 2.9. Разбиение фазовой прямой на траектории для системы (2.15) при различных значениях параметра μ

уранение

$$\dot{\varphi} = \omega - a \sin \varphi, \tag{2.18}$$

где a и ω – параметры, $a \geq 0$, $\omega = 0$. При $a = 0$ общее решение уравнения (2.17) имеет вид

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \varphi_0 = \mathrm{const}$$

и описывает равномерное вращение изображающей точки по окружности S^1. Исследование системы (2.18) образуется двукратное равновесие, которое при изменении параметров либо распадается на два грубых ($a > \omega$) либо исчезает ($a < \omega$) в (2.18) происходят вращательные движения, однако эти движения, однако эти движения неравномерны, поскольку скорость $\dot{\varphi}$ не является постоянной (наибольшая скорость достигается при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, а минимальная при $\varphi = \frac{\pi}{2}$). При $a > \omega$ на окружности S^1 существует два грубых состояния

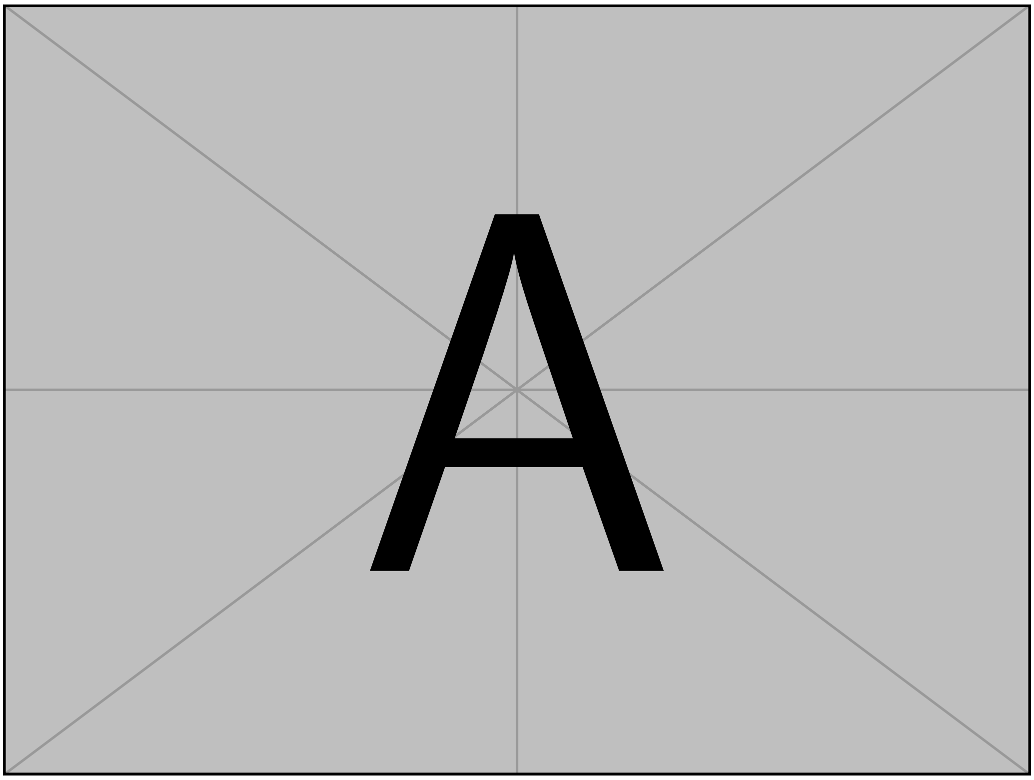


Рис. 2.10. Буфуркационные диаграммы системы (2.15)(a) и системы (2.16)(b). Ветвь устойчивых состояний равновесия отмечена сплошной линией, а неустойчивых – пунктирной.

равновесия: $\varphi = \varphi_1 = \arcsin(\omega/a)$ и $\varphi = \varphi_2 = \pi - \arcsin(\omega/a)$. Состояние равновесия $\varphi = \varphi_1$ – устойчивое, а $\varphi = \varphi_2$ – неустойчивое.

Глава 3.

Устойчивость состояний равновесия. Классификация состояний равновесия двумерных линейных систем

На предыдущей лекции мы познакомились со свойствами динамических систем на прямой. Было показано, что поведение таких систем определяется также состояниями равновесия и выбором начальных условия. Состояния равновесия также играют чрезвычайно важную роль и в динамике многомерных систем, поскольку они описывают стационарные состояния реальных систем. Важнейшим свойством состояний равновесия является их устойчивость. Термин «устойчивость» настолько широко распространён не только в научной литературе, но и в повседневной жизни, что его смысл интуитивно ясен даже людям далёким от науки. Например, вот такое определение «устойчивый» дается в словаре русского языка С.И.Ожегова:

1) Стоящий твёрдо, не колеблясь, не падая.

2) Не поддающийся, не подверженный колебаниям, стойкий, твёрдый

Хотя, конечно, с физико-математической точки зрения, это определение нельзя назвать строгим, одна из важнейших и типичных характеристик устойчивости в нём содержится. Именно – сохранение исходного состояния системы при некоторых отклонениях (возмущениях). Однако, лишь одной этой характеристики недостаточно для построения строгого определения устойчивости, приемлемого для широкого круга практических задач. Свойство возвращаемости системы в исходное состояние является слишком строгим и оставляет «за бортом» широкий класс систем, для которых характерно более слабое проявление устойчивости – сохранения своего положения в малой окрестности исходного состояния. Действительно, рассмотрим поведение массивного шарика в желобе, состоящем из двух ямок (рис. 3). Очевидно, что в этой системе возможно существование трёх состояний равновесия: A, B и C. При

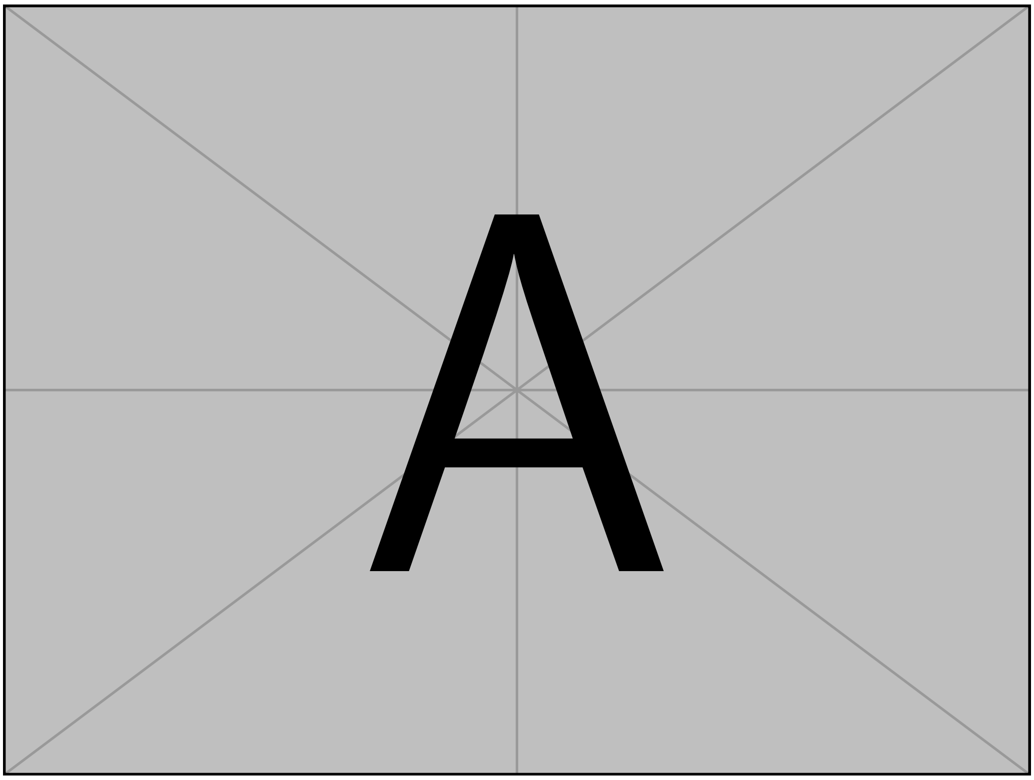


Рис. 3.1. Колебания массивного шарика в желобе.

сколь угодно малых отклонениях шарика от точки B, он начинает двигаться и покидает окрестность этой точки. Поэтому вполне логичным было бы назвать такое состояние равновесия неустойчивым. Совершенно иначе ведёт себя шарик, если изначально он покоился в точке A или C. Получив начальное отклонение, шарик начнёт двигаться с уменьшающейся за счёт трения скоростью и придёт в одно из этих состояний равновесия. Причём, в зависимости от величины отклонения шарик может сохранить своё начальное состояние равновесия, а может изменить его на противоположное. Следовательно, состояние равновесия может быть устойчивым по отношению к одним отклонениям и в тоже время быть неустойчивым по отношению к другим. Предположим теперь, что трение в жёлобе пренебрежимо мало. Как известно, в этом случае при малых отклонениях от точек A и C шарик будет совершать периодические колебания в их окрестности. Поскольку эти колебания происходят в окрестности точек A и C, состояние системы существенно не меняется и такое поведение шарика можно отнести к устойчивому. Как мы увидим ниже, отмеченные выше свойства состояний равновесия являются общими и лежат в основе строгого определения устойчивости состояний равновесия.

Основы теории устойчивости были заложены в работах великого русского математика и механика А.М. Ляпунова. В 1892 году в Харькове он представил к защите докторскую диссертацию, которая была опубликована год спустя. Идеи и подходы, заложенные в этой работе, оказались настолько плодотворными, что до сих пор являются актуальными и востребованными. Изложим положения определения теории устойчивости, принадлежащие Ляпунову.

3.1. Определение устойчивости состояний равновесия

Рассмотри автономную динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

Как мы уже знаем (см. лекцию 2), состояние равновесия определяется из условия равенства нулю всех производных по времени. Следовательно, состояние равновесия системы (3.1) являются решениями следующей системы

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0. \tag{3.2}$$

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ – одно из решений системы (3.2). Для оценки близости состояния равновесия и накладываемых на систему возмущений (отклонений) введём в фазовом пространстве системы (3.1) норму. В качестве нормы мы будем использовать евклидову длину вектора, т.е.

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Не останавливаясь здесь подробно, отметим лишь, что существуют и другие способы задания нормы. При этом сходимость в одной из норм автоматически означает сходимость и в смысле других норм.

Определение 6. Состояние равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ системы (3.1) называется устойчивым (в смысле Ляпунова), если для такого $\varepsilon > 0$ (как бы мало оно ни было) можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta \tag{3.3}$$

следует неравенство

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \tag{3.4}$$

при $t \geq t_0$.

Если же найти такой δ невозможно, состояние равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ называется неустойчивым. Заметим, что из условий (3.3) и (3.4) следует, что всегда можно выбрать число δ из условия $\delta \leq \varepsilon$, а число ε задает область допустимых возмущений (отклонений).

Определение 7. Состояние равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ системы (3.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и для всех решений $\mathbf{x}(t)$ системы (3.1), удовлетворяющих условию (3.3), выполняется равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}\| = 0$$

Рис. 7 иллюстрирует определения 6 и 7. Устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ означает, что достаточно близкие к нему в любой начальный момент $t = t_0$ решения $\mathbf{x}(t)$ целиком останутся в сколь угодно узкой ε-трубке около значения $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ (рис. 7a). В фазовом пространстве устойчивость по Ляпунову, в выбранной нами норме, означает, что любая траектория системы (3.1) с начальными условиями внутри сферы радиуса ε (рис. 7b) ни при каких $t > t_0$ не достигают сферы радиуса ε. В случае асимптотической устойчивости, кроме того, требуется стремление траекторий к состоянию равновесия (рис. 7c)

Из определения 7 следует, что асимптотическая устойчивость состояний равновесия зависит от величины начальных возмущений. В связи с этим различают устойчивость в **малом**, в **большом** и в **целом**. Состояние равновесия называется ассимптотически устойчивым в целом, если определение 7 выполняется при любых начальных условиях. Если же определение 7 выполняется для начальных условий из некоторой ограниченной области, то состояние равновесия, то состояние равновесия называется асимптотически устойчивым в большом (в этой области). Наконец, если определение 7 справедливо для начальных возмущений из сколь угодно малой окрестности состояния равновесия, что оно называется асимптотически устойчивым в малом. Для систем, у которых одновременно существует несколько состояний равновесия, существует понятие **глобальной асимптотической устойчивости**. Система называется глобально асимптотически устойчивой, если каждая её траектория асимптотически стремится к какому-либо состоянию равновесия.

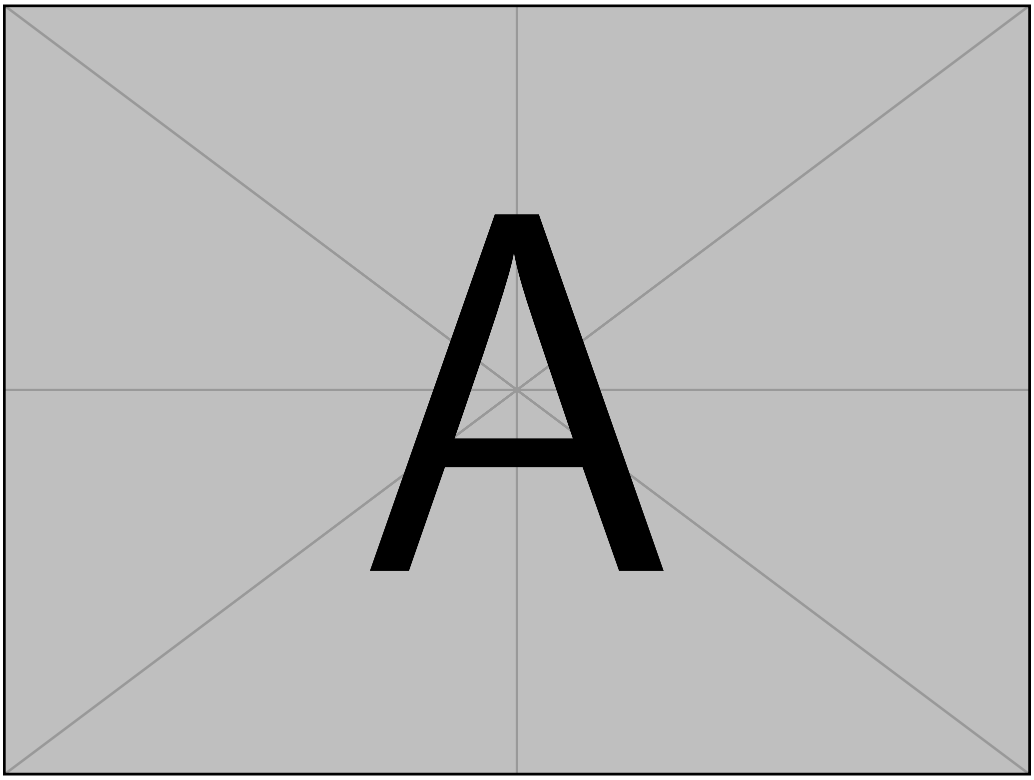


Рис. 3.2. Качественное представление эволюции во времени переменной $x(t)$ в фазовом пространстве в случае устойчивости по Ляпунову (a); примеры поведения траектории $x(t)$ в фазовом пространстве в случае устойчивости по Ляпунову (b) и в случае асимптотической устойчивости состояния равновесия x^* (c)

3.2. Классификация состояний равновесия линейных систем на плоскости

Рассмотрим произвольную линейную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2, \end{cases} \tag{3.5}$$

где a, b, c и d – некоторые параметры. Для удобства изложения простим (3.5) также в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Предположим, что $\det \mathbf{A} \neq 0$, тогда система (3.5) имеет единственное состояние равновесия $O(x_1 = x_2 = 0)$. Будем искать решение системы (3.5) в виде

$$x_i = C_i e^{\lambda t}, \quad i = 1, 2 \tag{3.6}$$

где C_i – произвольные константы. Подставляя (3.6) в систему (3.5) получим систему линейных однородных уравнений относительно C_1 и C_2, которая имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda E) = \lambda_2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \tag{3.7}$$

Это уравнение называется характеристическим. Обозначим через λ_1 и λ_2 корни уравнения (3.7). Рассмотрим поведение фазовых траекторий системы (3.5) для различных значений λ_1 и λ_2.

3.2.1. Действительные корни

Предположим, что уравнение (3.7) имеет действительные корни, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_{12} \neq 0. \tag{3.8}$$

Покажем, что при этих условиях система (3.5) с помощью взаимооднозначного преобразования координат может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2. \end{cases} \tag{3.9}$$

Система (3.9) называется нормальной формой уравнений для грубых состояний равновесия линейных двумерных систем. Как мы убедимся ниже,а исследование фазовой плоскости системы (3.9) представляет собой значительно более простую задачу, чем исследование фазовой плоскости исходной системы (3.5).

Введем в (3.5) новые переменные

$$\begin{cases} u_1 = h_{11}x_1 + h_{12}x_2, \\ u_2 = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 \end{cases} , \tag{3.10}$$

где $h_{ik}(i,k = 1,2)$ – некоторые, пока неопределенные, коэффициенты. Из (3.10) и первого уравнения системы (3.5) имеем

$$\dot{u}_1 = h_{11}\dot{x}_1 + h_{12}\dot{x}_2 = (h_{11}a + h_{12}c)x_1 + (h_{11}b + h_{12}d)x_2. \tag{3.11}$$

С другой стороны, из системы (3.9)

$$\dot{u}_1 = \lambda_1(h_{11}x_1 + h_{12}x_2). \tag{3.12}$$

Приравнивая коэффициенты при переменных x_1 и x_2 в (3.11) и (3.12), находим системы для определения $h_{i,k}$

$$\begin{cases} h_{11}(a - \lambda_1) + h_{12}c = 0, \\ h_{11}b + h_1(d - \lambda) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Система (3.13) – система однородных линейных уравнений отностиельно h_{11} и h_{12}. Определитель этой системы равен нулю и, следовательно, система (3.13) меет нетривиальное решение

$$h_{11} = p,\ h_{12} = -p\frac{a-\lambda_1}{c}, \quad \text{если } c \neq 0,$$
$$h_{11} = p, h_{12} = -\frac{dp}{d-a}, \quad \text{если } c = 0, d \neq 0,$$

где $p = \mathrm{const}$. Совершенно аналогично устанавливается вид остальных коэффициентов, преобразования (3.10)

$$h_{21} = q, h_{22} = -\frac{q(a-\lambda_2)}{c}, \quad \text{если } c \neq 0$$
$$h_{21} = 0, h_{22} = q, \quad \text{если } c = 0, d \neq a,$$

где $q = \mathrm{const}$. Пусть для определённости $p = q = 1$. В этом случае искомое преобразование системы (3.5) к виду (3.9) имеет следующий вид

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - \frac{a-\lambda_1}{c}x_2 \\ u_2 = x_1 - \frac{a-\lambda_2}{c}x_2 \end{cases}, \qquad \text{если } c \neq 0$$
$$\begin{cases} u_1 = x_1 - \frac{b}{d-a}x_2 \\ u_2 = x_2 \end{cases}, \quad \text{если } c = 0,\ d \neq a. \tag{3.14}$$

Рассмотрим теперь поведение траектории системы (3.9) на фазовой плоскости (u_1, u_2) и на фазовой плоскости (x_1, x_2) исходной системы (3.5) для различных значений λ_1 и λ_2.

Корни λ_1 и λ_2 одного знака

Прежде всего заметим, что в этой случае систему (3.8) легко проинтегрировать (предлагаем читателям проделать это самостоятельно) и получить явный вид интегральных кривым, которые задаются следующим образом

$$u_2 = C(u_1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, C = \mathrm{const}$$

Для определенности будем считать, что $|\lambda_2| > |\lambda_1|$. В этом случае отношение $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ и, следовательно, все интегральные кривые системы (3.9), за исключением осей координат, на фазовой плоскости имеют вид «парабол», касающихся оси $u_2 = 0$ в начале координат. При этом на фазовой плоскости (u_1, u_2) ось абсцисс и ось ординат являются интегральными кривыми системы

(3.9).

Корни λ_1 и λ_2 – отрицательные. Непосредственно (3.9) вытекает, что при таких значениях корней вдоль интегральных кривых переменные u_1,u_2 убывают и, следовательно, на фазовой плоскости (u_1, u_2) (рис. 3.3). Такое состояние равновесия называется **устойчивым узлом**. Заметим, что устойчивый узел является асимптотически устойчивым состоянием равновесия (см. определение 7). Поскольку все траектории системы (3.9) с начальными условиями, не лежащими на осях координат, касаются оси абсцисс, эту ось называют **ведущим** направлением узла. Вернёмся теперь к системе (3.5) и

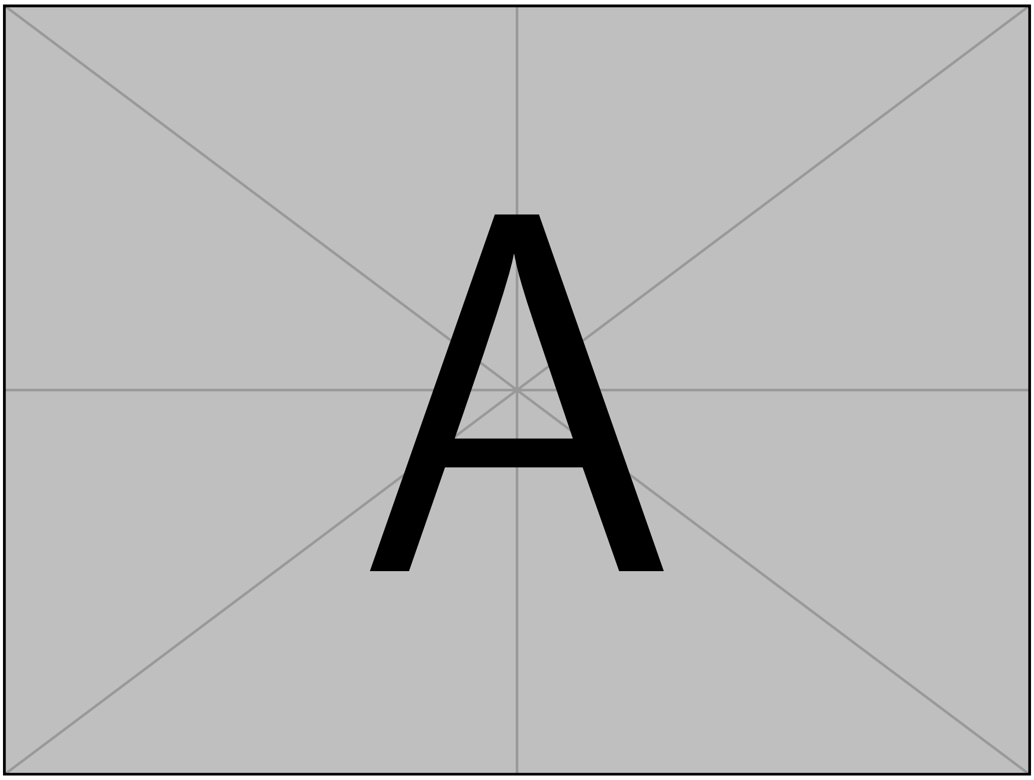


Рис. 3.3. Состояние равновесия устойчивый узел: на фазовой плоскости (u_1, u_2) (a); на фазовой плоскости (x_1, x_2) (b).

рассмотрим поведение траекторий на фазовой плоскости (x_1, x_2). Из (3.14) следует, что ведущее и неведущее направление узла на плоскости (x_1, x_2), вообще говоря, не совпадают с координатными осями. Принимая этот во внимание, получаем качественный вид траекторий представленный на рис.3.3b.

Корни λ_1 и λ_2 – положительные. Этот случай без труда сводится к предыдущему путём обращения времени $t \to -t$, тот есть путём изменения движения на траекториях на противоположное. В результате получается состояние равновесия, которое называется **неустойчивым узлом** (рис. 3.4).

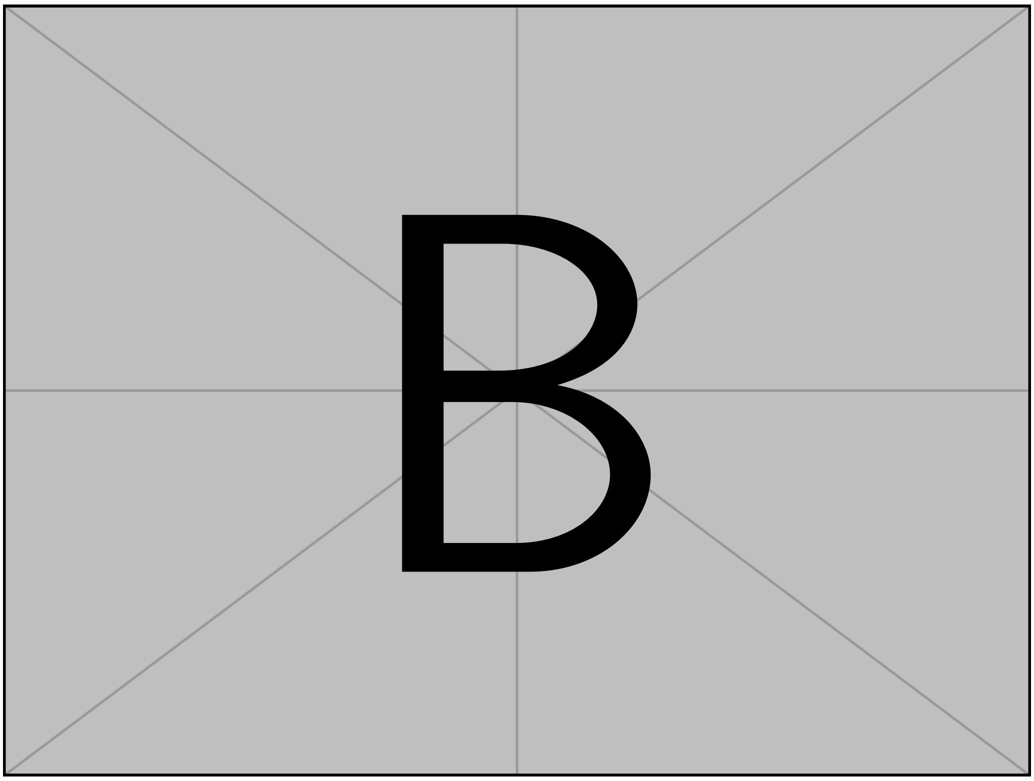


Рис. 3.4. Состояние равновесия неустойчивый узел: на фазовой плоскости (u_1, u_2) (a); на фазовой плоскости (x_1, x_2) (b).

Корни λ_1 и λ_2 разного знака

Пусть для определенности $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$. Перепишем для удобства уравнение интегральных кривых (3.14) в следующем виде

$$u_2(u_1)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \text{const} \tag{3.15}$$

Поскольку в (3.15) отношение $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ все интегральные кривые системы (3.9), за исключением осей координат, являются кривыми гиперболического типа, которые проходят мимо состояния равновесия (рис. 3.5a). Существуют четыре исключительные траектории, лежащие на координатных полуосях. Две из этих траекторий асимптотически приближаются, а две другие, наоборот, отходят от состояния равновесия. Такое состояние равновесия называется седлом (рис.3.5), приближающиеся к нему траектории – **устойчивыми**

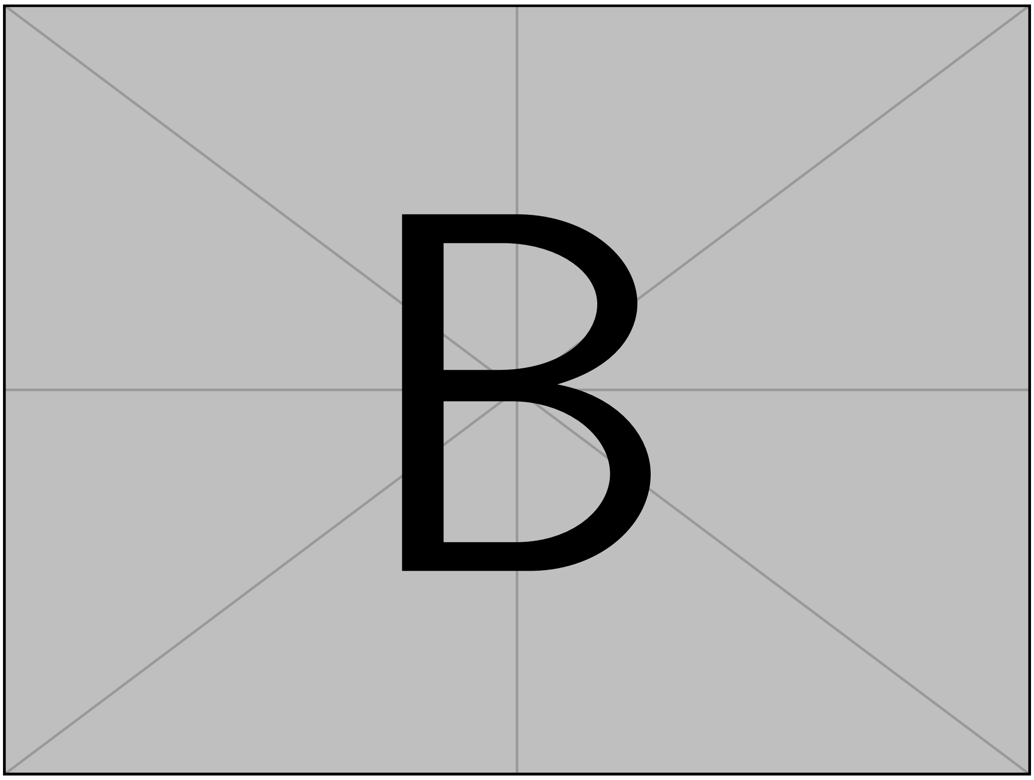


Рис. 3.5. Качественный вид состояния равновесия седло: на фазовой плоскости (u_1, u_2) (a); на фазовой плоскости x_1, x_2 (b).

сепаратрисами , а отходящие от него траектории – **неустойчивыми сепаратрисами** . Как мы увидим в дальнейшем, роль сепаратрис в динамике очень многих систем чрезвычайно важна. На фазовой плоскости (x_1, x_2) сепаратрисы седла имеют вид прямых, угловые коэффициенты k_1 и k_2 которые можно найти из (3.14) положив в эти уравнения $u_2 = 0$ и $u_1 = 0$. Они задаются следующим образом

$$\begin{aligned} &k_1 = \frac{a - \lambda_1}{c},\ k_2 = \frac{a - \lambda_2}{c},\ \text{если } c \neq 0, \\ &k_1 = \frac{d - a}{b},\ k_2 = 0,\ \text{если } c = 0, d \neq a. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Выражая из (3.16) λ_1 и λ_2 через угловые коэффициенты k_1 и k_2 и подставляя эти выражения в характеристическое уравнение (3.7) , нетрудно получить, что k_1 и k_2 являются корнями уравнения

$$bk^2 + (a - d)k - c = 0.$$

Корни λ_1 и λ_2 кратные - $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Не останавливаясь подробно на этом случае, отметим лишь, что нормальная форма уравнений такого состояния равновесия может быть двух видом – либо (3.9) с $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, либо

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda u_1 + u_2, \\ \dot{u}_2 = \lambda u_2. \end{cases}$$

В первом случае состояние равновесия называется **дикритическим узлом** (устойчивым, если $\lambda < 0$ и неустойчивым, если $\lambda > 0$). Любая траектория приближается (рис.3.2.1a) или отходит от дикритического узла по своему собственному направлению. Во втором случае состояние равновесия называет **вырожденным узлом**, который также может быть либо устойчивым ($\lambda < 0$), либо неустойчивым ($\lambda > 0$). У вырожденного узла имеется только ведущее направление, которого касаются все остальные траектории (рис.3.2.1b).

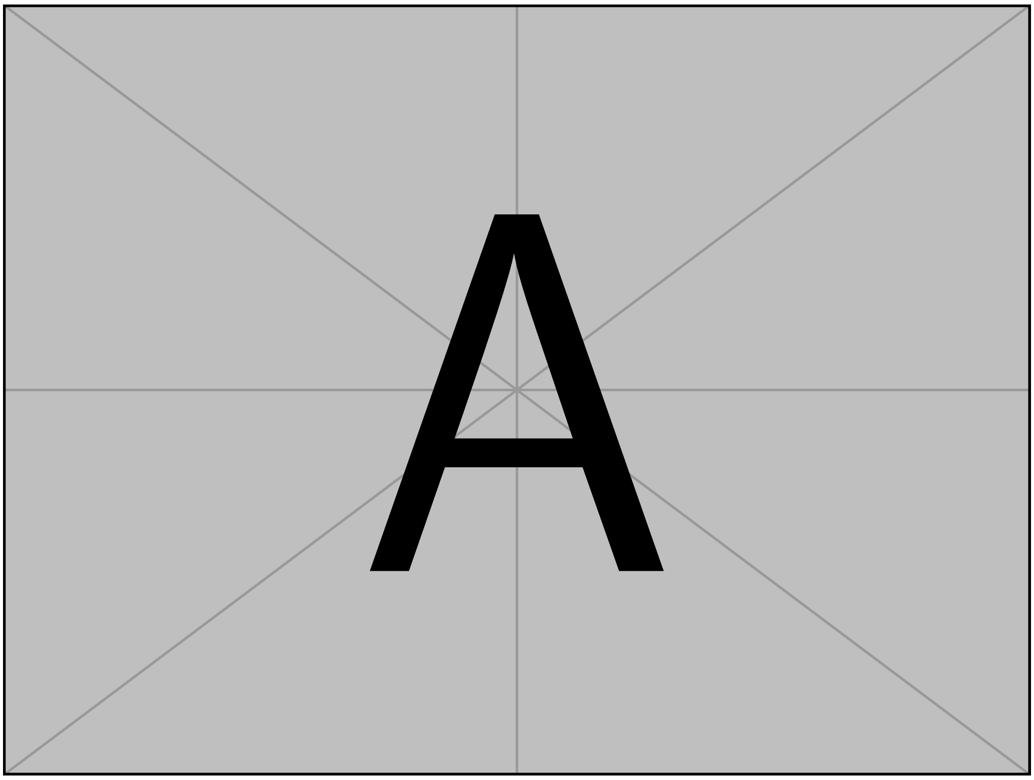


Рис. 3.6. Устойчивый дикритичечкий узел (a); устойчивый вырожденный узел (b)

3.2.2. Комплексные корни

Пусть характеристическое уравнение (3.7) имеет комплексно-сопряженные корни – $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$. Заметим, что при переходе от системы (3.5) к системе (3.9) с помощью преобразования (3.10) мы нигде не использовали предположение о действительности корней. Поэтому это преобразование (с комплексно-сопряженными коэффициентами) и система (3.9) справедливы и в случае комплексно-сопряженных корней. Однако, в этом случае переменные u_1 и u_2 являются комплексными

$$u_1 = u + i\nu, \quad u_2 = u - i\nu. \tag{3.17}$$

Подставляя (3.17) в систему (3.9) и разделяя действительные и мнимые части полученных уравнений, приходим к следующей системе нормальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha u - \beta\nu, \\ \dot{\nu} = \beta u - \alpha\nu. \end{cases} \tag{3.18}$$

Перейдем в системе (3.18) к полярным координатам ρ и φ

$$u_1 = \rho\cos\varphi, \quad u_2 = \rho\sin\varphi \tag{3.19}$$

С помощью этой замены переменных система (3.18) преобразуется (предлагаем читателям проделать это самостоятельно) к следующему эквивалентному виду

$$\dot{\rho} = \alpha\rho, \quad \dot{\varphi} = \beta. \tag{3.20}$$

Из (3.20) легко получить явный вид интегральных кривых

$$\rho = Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}, \quad C = \mathrm{const}. \tag{3.21}$$

В силу (3.21) при $\alpha \neq 0$ любая, за исключением самого состояния равновесия, интегральная кривая на плоскости (u_1, u_2) имеет вид логарифмической спирали с центром в состоянии равновесия, которая сохраняет эту форму и на фазовой плоскости (x_1, x_2) интегральные кривые фокуса также имеют вид спиралей с центром в состоянии равновесия.

Из первого уравнения в (3.20) следует, что при $\alpha < 0$ переменная ρ монотонно убывает к нулю. Следовательно, в этом случае фазовые траекто-

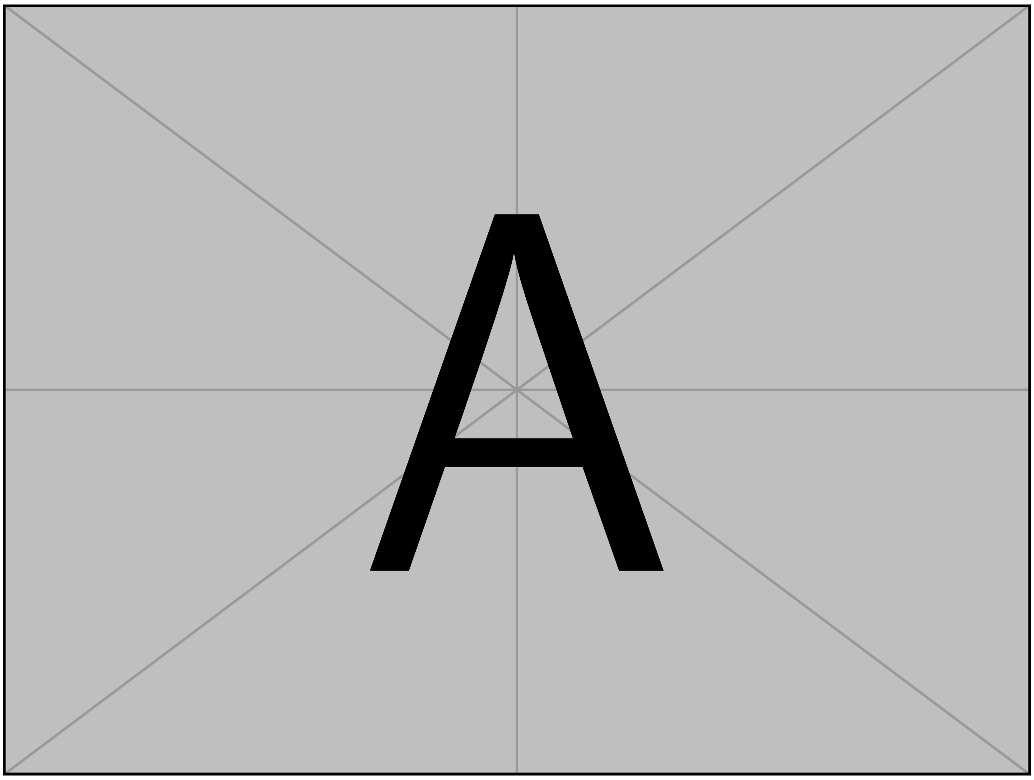


Рис. 3.7. Устойчивый фокус (a); неустойчивый фокус (b); центр (c).

рии асимптотически при $t \to \infty$ приближаются к состоянию равновесия. Такое состояние равновесия является асимптотически устойчивым и называется **устойчивым фокусом** (рис.3.2.2a). Наоборот, если $\alpha > 0$ переменная ρ неограниченно растёт и, следовательно, фазовые траектории удаляются от состояния равновесия (рис.3.2.2b). Это состояние равновесия называется **неустойчивым фокусом**. Заметим, что с топологической точки зрения фокус эквивалентен узлу соответствующей устойчивости, поскольку с помощью взимнооднозначного преобразования траектории одного из них могут быть переведены в траектории другого с сохранением ориентации. Несмотря на это, в многих задачах их следует различать, поскольку они определяют различные колебательные процессы. При $\alpha = 0$ переменная ρ в (3.19) не меняется и, следовательно, любая нетривиальная траектории на плоскости (u_1, u_2) имеет вид окружности с центром в состоянии равновесия. Такое состояние называется **центром**. На фазовой плоскости (x_1, x_2) траектории могут и не совпадать с координатными осями (рис.3.2.2c). Центр устойчив по Ляпунову, но не асимптотически.

3.2.3. Колебания двумерных линейных систем

Как мы установили выше, разбиение фазовой плоскости на траектории двумерных линейных систем определяются состояниями равновесия. Поэтому возможные в таких системах колебательные процессы полностью определяется типом состояния равновесия. Ниже в таблице 3.1 дана классификация этих процессов и представлен их качественный вид. Принципиально другую,

Таблица 3.1. Классификация колебательных процессов

Состояние равновесия	Колебательный процесс
Устойчивый узел	...
Устойчивый фокус	...
Центр	...
Неустойчивый узел	...
Неустойчивый фокус	...

чем представленные в таблице состояния равновесия, роль играет в двумерных линейных системах седло – устойчивые сепаратрисы седла разделяют неограниченно нарастающие движения на две группы, имеющие различное предельное поведение (см., например, рис.3.5b).

3.2.4. Двухпараметрическая буфуркационная диаграмма

Как правило, в практических задачах коэффициента a, b, c и d системы (3.5) зависят от параметров, которые могут изменяться. Это изменение может вызвать смену типа состояния равновесия. Рассмотрим, как этом может произойти в случае двух параметров, которые введем следующим образом

$$\mu_1 - (a+d), \quad m_2 = \det A$$

В этих обозрачениях характеристическое уравнение (3.7) перепишется в следующем виде

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0 \tag{3.22}$$

Анализируя значение корней уравнения (3.22) в зависимости от параметров μ_1, μ_2, устанавливаем вид разбиения плоскости (μ_1, μ_2) на области, соответствующие различным типам состояний равновесия системы (3.5). Разбиение

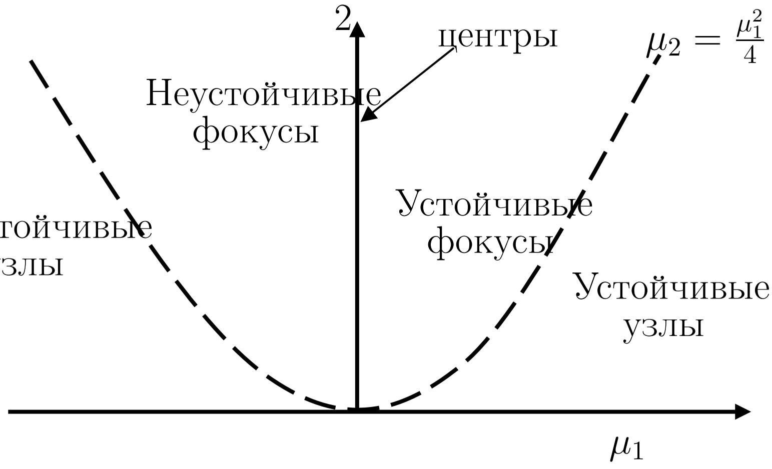


Рис. 3.8. Разбиение плоскости (μ_1, μ_2) на области, соответствующие различным типам состояний равновесия.

осуществляется двумя бифурцационными прямыми $-B_1 = \{\mu_2 = 0, \mu_1 \in \mathbb{R}\}$, $B_2 = \{\mu_1 = 0, \mu_2 > 0\}$ и параболой $\{\mu_2 = \frac{\mu_1^2}{4}, \mu \neq 0\}$, отделяющей узлы фокусов и не являющейся буфуркационной, поскольку эти состояния равновесия топологочески эквивалентны. На прямой B_2 происходит смена устойчивости фокуса черз образование центра, а на прямой B_1 уравнение (3.22) имеет либо один, если $\mu_1 \neq 0$, либо два нулевых корня, если $\mu_1 \neq 0$. иИсследуем поведение траекторий системы (3.5) для точек прямой B_1. Сделаем в (3.5) замену переменной x_2 :

$$y = ax_1 + bx_2,$$

с помощью которой эта система преобразуется к виду

$$\dot{x}_1 = y, \quad \dot{y} = -\mu_1 y \tag{3.23}$$

Из (3.23) следует, что $y = 0$ является линией состояний равновесия, а все остальные траектории имеют вид прямых

$$y = -\mu_1 x + C, \quad C = \text{const}$$

Принимая во внимание эти свойства траекторий, устанавливаем портреты системы (3.23) , представленные на рис.3.2.4.

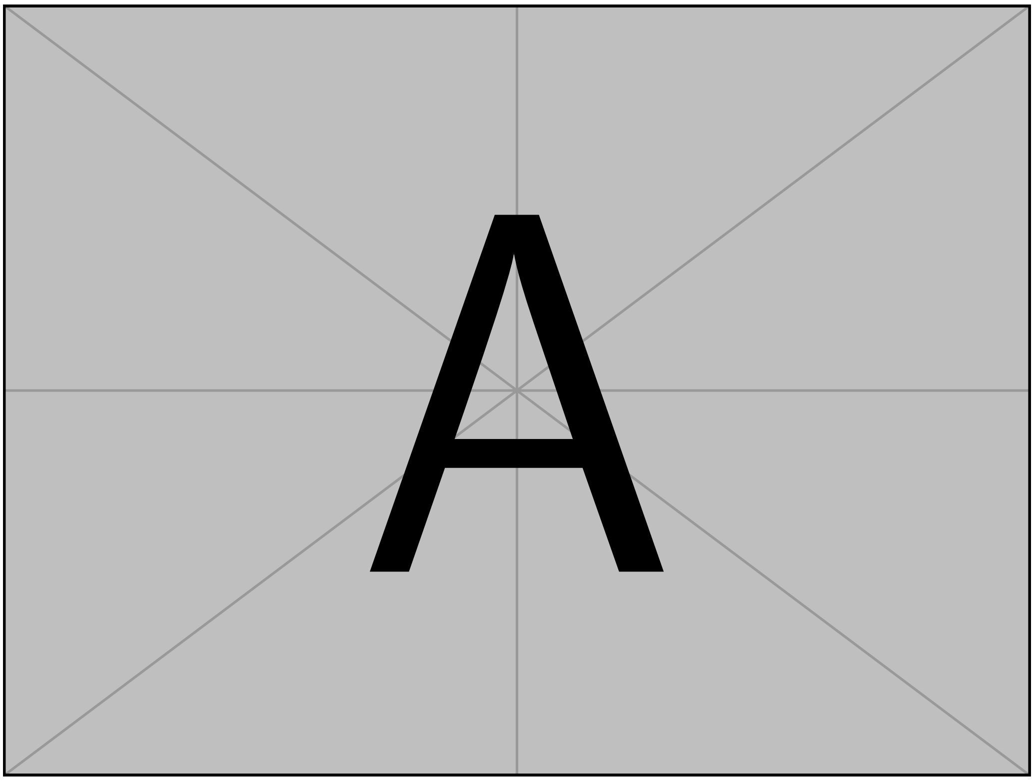


Рис. 3.9. Фазовые портреты системы (3.22) для различных значений параметра μ_1 : (a) $\mu_1 > 0$; (b) $\mu_1 = 0$; (c) $\mu_1 < 0$.

Глава 4.

Анализ устойчивости состояний равновесия многомерных нелинейных систем

Предыдущая лекция была посвящена исследованию состояний равновесия двумерных линейных систем. Было показано, что их характер может быть определен из анализа расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Перейдем теперь к исследованию состояний равновесия нелинейных систем.

4.1. Метод линеаризации

Рассмотрим записанную в векторной форме нелинейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ – гладкая вектор-функция. Предположим, что система (4.1) имеет состояние равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. Введем малое возмущение $\xi(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$, для которого из системы (4.1) имеем

$$\dot{\xi} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \xi). \tag{4.2}$$

Раскладывая правую часть системы (4.2) в ряд Тейлора, получим

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi + \dots, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{A}$ – $n \times n$ – матрица Якоби с элементами

$$a_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\bigg|_{x=x^*}.$$

Отбросим в правой части (4.3) все нелинейные по ξ слагаемые и рассмотрим систему

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi. \tag{4.4}$$

Переход от нелинейной системы (4.3) к линейной системе (4.4) называется её линеаризацией. Мы не будем пока обсуждать соотношение между траекториями систем (4.3) и (4.4) , а рассмотрим возможные типы состояний равновесия линейной системы (4.4) .

На предыдущих лекциях мы уже рассмотрели свойства системы (4.4) в одномерном и двумерном случаях. Как было показано, в этих случаях поведение траекторий зависит от корней характеристического уравнения. Аналогичным свойством обладает и система (4.4) , в случае когда размерность её выше двух . Будем искать решение системы (4.4) в виде

$$\xi = \mathbf{C}e^{\lambda t}, \tag{4.5}$$

где $\mathbf{C}$ – постоянная матрица столбец. Подстановка (4.5) в (4.4) приводит к системе линейных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0, \tag{4.6}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Уравнение (4.6) эквивалентно алгебраическому уравнению

$$a_0\lambda^n + a`\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) называется характеристическим, а его корни характеристическими показателями состояния равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. Справедливы следующие, установленные А.М. Ляпуновым, утверждения:

- Если корни уравнения (4.7) имеют отрицательные вещественные части, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, то состояние равновесия системы (4.4) асимптотически устойчиво.

- Если среди корней уравнения (4.7) есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то состояние равновесия системы (4.4) неустойчиво по Ляпунову.

- Если уравнение (4.7) не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеет некоторое число корней с нулевой вещественной частью, то состояние равновесия системы (4.4) может быть как устойчивым (но не асимптотически), так и неустойчивым.

Таким образом, вопрос об устойчивости состояний равновесия многомерных линейных систем сводится к исследованию характера корней алгебраического уравнения.

Вернемся теперь к исходной нелинейной системы (4.1), устойчивость состояний равновесия которой может быть установлена теоремами Ляпунова. Согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению (так называемый первый метод Ляпунова), если корни уравнения (4.7) удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то характер устойчивости состояний равновесия нелинейной системы (4.1) и соответствующей линеаризованной системы (4.7) совпадают. Таким образом, состояние равновесия системы (4.1) является асимптотически устойчивым, если $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и неустойчивым если среди корней уравнений (4.7) имеется хотя бы один с положительной вещественной частью.

4.2. Критерий Рауса-Гурвица

Из сказанного выше следует, что решение задачи об устойчивости состояний равновесия нелинейных систем сводится к анализу расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, т.е. к чисто алгебраической задаче. Однако, в случае многомерных (размерности три и выше) систем, как правило, найти характеристические показатели λ_i в явном виде не удается. Поэтому были развиты критерии и методы, позволяющие судить об устойчивости состояний равновесия без непосредственного решения характеристического уравнения. Одним из наиболее известных таких критериев является критерий Рауса-Гурвица.

Критерии устойчивости Рауса (Routg E.Y.) и Гурвица (Hurwitz A.), вошедших в виде единого критерия, были разработаны в конце 18-го века в связи с проблемами, возникающими в тот момент, в теории автоматического управления. Сформулируем этот критерий для уравнения (4.7) с вещественными коэффициентами. Без ограничения общности будем считать, что коэффициент a_0 является положительным. Составим из коэффициентов a_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ квадратную матрицу размерности $n \times n$ в соответствии со следующими правилами:

- Первая строка матрицы состоит из коэффициентов с нечетными индексами, начиная с a_1.
- Элементы каждой последующей строки образуются из соответствующих элементов предшествующей строки уменьшением индексов на единицу.
- Если при таком построении индекс k какого-либо коэффициента a_k превосходит значение n или становится отрицательным, то он приравнивается нулю, т.е. $a_k = 0$.

В результате описанной процедуры получится $n \times n$ матрица следующего вида

$$\mathbf{A_R} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что на главной диагонали матрицы $\mathbf{A_R}$ стоят последовательно все коэффициенты уравнения (4.7), начиная с a_1. Далее, выпишем все главные диагональные миноры матрицы $\mathbf{A_R}$

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Критерий Рауса-Гурввица состоит в следующем. Для того, чтобы все корни уравнения (4.7) с вещественными коэффициентами и $a_0 > 0$ имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры были положительны

$$\Delta_n > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_n > 0. \tag{4.8}$$

Таким образом, условия (4.8) гарантируют асимптотическую устойчивость состояния равновесия линейной (4.4) и нелинейной (4.1) систем. Однако заметим, что в случае нелинейной системы (4.1) это лишь локальная устойчивость в малой окрестности состояния равновесия.

В качестве примера применения критерия Рауса-Гурвица рассмотрим уравнение (4.7) в случае $n = 3$. Для удобства перепишем это уравнение в следующем эквивалентном виде

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{4.9}$$

где

$$a = \frac{a_1}{a_0},\ b = \frac{a_2}{a_0},\ c = \frac{a_3}{a_0}.$$

Введем, отвечающую уравнению (4.9), матрицу

$$\mathbf{A_R} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & a & c \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что главные диагональные миноры этой матрицы имеют вид

$$\Delta_1 = a,\ \Delta_2 = ab - c,\ \Delta_3 = c(ab - c).$$

Отсюда, согласно критерию Рауса-Гурвица, все корни уравнения (4.9) имеют отрицательные вещественные части, если параметры этого уравнения удовлетворяют неравенствам

$$a > 0, \quad ab - c > 0, \quad c > 0.$$

4.3. Второй метод Ляпунова

Рассмотрим еще один метод, позволяющий устанавливать условия устойчивости состояний равновесия без непосредственного нахождения характеристических показателей. А.М. Ляпуновым была развита теория, в основе которой лежит построение специальных функций, позволяющих, в случае их существования, судить об устойчивости и неустойчивости состояний равновесия. Эти функции получили название функций Ляпунова, а базирующаяся на них теория устойчивости – второго метода Ляпунова. Изложим кратко основные идеи этого метода для автономных систем.

Рассмотрим скалярную функцию $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или в векторном виде $V(\mathbf{x})$, определенную в фазовом пространстве системы (4.1), непрерывную в некоторой области D, содержащей состояние равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. Кроме того, предположим, что $V(\mathbf{x})$ имеет в D непрерывные частные производны. В основе второго метода Ляпунова лежит использование свойств так называемых **знакоопределенных и знакопостоянных** функций.

1) Функция $V(\mathbf{x})$ называется знакоопределенной в области D, если она обращается в нуль лишь в состоянии равновесия и принимает значения одного знака во всех остальных точках области D. Очевидно, что знакоопределенные функции бывают двух типов – положительно и отрицательно определенные.

2) Функция $V(\mathbf{x})$ называется знакопостояннной в области D, если она обращается в нуль не только в состоянии равновесия, но и в некоторых других точках области D, и имеет значения только одного знака во всех остальных точках области D.

Поясним смысл этих определений. Рассмотрим функции

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$V_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2.$$

Очевидно, что функция V_1 является положительно определенной в области $D = \mathbb{R}^3$, а функция V_2– знакоположительной, поскольку она обращается в нуль не только в точке $x_1 = x_2 = x_3$, но и при $x_2 = 0,\ x_3 = -x_1$.

Во втором методе Ляпунова задача об устойчивости состояний равновесия решается с помощью изучения поведения функции $V(\mathbf{x})$ вдоль траектории системы (4.1). Рассмотрим структуру поверхностей уровня $V(\mathbf{x}) = C = \mathrm{const}$ знакоопределенных функций, которую определяет следующее утверждение.

Если функций $V(\mathbf{x})$ является знакоопределенной, то существует такое положительное число C^*, что все поверхности уровня $V(\mathbf{x}) = C$, где $|C| < C^*$ являются замкнутыми относительно точки $x = x^*$.

Заметим, что поверхности $V(\mathbf{x}) = C$ называется замкнутой, если на любой непрерывной линии, соединяющей точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ с точкой границы области D, существует по крайней мере одна точка, в которой $V(\mathbf{x}) = C$. Поясним свойства поверхностей уровня знакоопределенных функций на примере положительно определенных функций. На рис.4.1a представлен пример простейшей положительно определенной функции двух переменных. В этом примере ясно представлены основные свойства поверхностей уровня положительно определенных функций: они замкнуты, не имеют общих точек , окружают точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* = 0$ и стягиваются к ней при $C \to 0$.

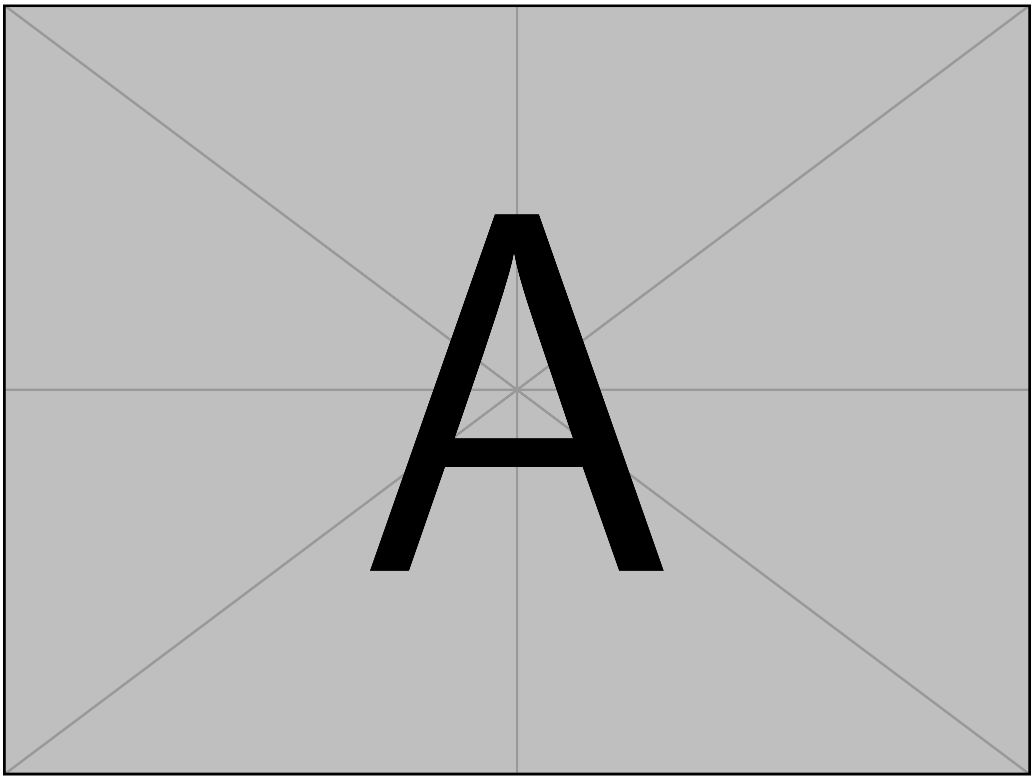


Рис. 4.1. Качественный вид положительно определенной функции двух переменных и линий уровня этой функции (a) и ориентация траекторий системы (4.1) на поверхностях уровня $C_2 > C_1$ функции Ляпунова при выполнении теоремы об асимптотической устойчивости (b).

Поведение поверхностей уровня функции $V(\mathbf{x})$ вдоль траектории системы (4.1) может быть установлено с помощью производной по времени этой функции, вычисленной в сите системы (4.1). Такая производная находится следующим образом

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}F_i = (\mathrm{grad}V \cdot F), \qquad (4.10)$$

где круглые скобки означают скалярное произведение векторов. Заметим, что из (4.10) вытекает условие $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.

Сформулируем теперь теоремы Ляпунова, дающие достаточные условия устойчивости состояний равновесия.

Теорема об устойчивости. Если для системы (4.1) существует в области D **знакоопределенная** функция $V(\mathbf{x})$, является **знакопостоянной** функцией, знака противоположному знаку функции $V(\mathbf{x})$, то состояние равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ устойчиво в смысле Ляпунова.

Теорема об асимптотической устойчивости. Если для системы (4.1) существует **знакоопределенная** функция $V(\mathbf{x})$, производная которой по времени $\dot{V}$, вычисленная в силу этой системы, является также **знакоопределенной**, знака противоположному знаку $V(\mathbf{x})$, то состояние равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ будет асимптотически устойчивым.

Поясним геометрический смысл теоремы об асимптотической устойчивости. Пусть для определенности функция $V(\mathbf{x})$ будет положительно, а $\dot{V}(\mathbf{x})$ – отрицательно определенными функциями. Неравенство $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ означает, что траектории системы (4.1) в точках поверхности $V(\mathbf{x}) = C$ переходят снаружи внутрь, т.е. в направлении противоположном направлению вектора $\mathrm{grad}V$ (рис.4.1б). Отсюда, поскольку при $C \to 0$ поверхности $V(\mathbf{x}) = C$ стягиваются в точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$,следует, что любая траектории системы (4.1) будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия, пересекая каждую из поверхностей $V(\mathbf{x}) = C$ в одну и ту же сторону. Это означает, что состояние равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ является асимптотически устойчивым, а поверхность уровня $V(\mathbf{x}) = C_{max}$, соответствующая наибольшему значению константы C, при которой условия теоремы выполняются, выделяет в фазовом пространстве область, принадлежащую области притяжения состояния равновесия. Заметим, если, $C_{max} \to \infty$, то состояние равновесия является асимптотически устойчивым при любых начальных условиях, т.е. устойчивым в целом.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^3. \end{cases} \tag{4.11}$$

Нетрудно видеть, что система (4.13) имеет единственное состояние равновесия в начале координат – $O(x_1 = x_2 = 0)$. Введем в рассмотрение положительно определенную функцию

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

и вычислим её производную в силу системы (4.11)

$$\dot{V} = x_1 \cdot \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^2 - x_1^4 - x_2^4 \leq 0. \tag{4.12}$$

В силу (4.12) $\dot{V}(x_1, x_2)$ – отрицательно определенная функция во всех точках фазовой плоскости, отличных от состояния равновесия O. Следовательно, $V(x_1, x_2)$– функция Ляпунова и состояние равновесия O является асимптотически устойчивым в целом. Заметим, что с помощью метода линеаризации можно было бы установить устойчивость состояния равновесия O лишь в малом.

Таким образом, второй метод Ляпунова является эффективным способом изучения устойчивости состояний равновесия нелинейных систем не только в малом, но и в большом. Этот метод может быть также применен к системам с угловыми координатами. Для таких систем из существования функции Ляпунова, периодической по угловым координатам, вытекает глобальная асимптотическая устойчивость системы (см. лекцию **??**). Однако, к сожалению, не существует стандартных способов построения функций Ляпунова для нелинейных систем и, как правило, каждая система требует своего индивидуального подхода. Наиболее часто функции Ляпунова ищутся в виде квадратичных форм переменных исследуемых систем.

Обратим также внимание ещё на одно важное свойство поверхностей уровня знакоопределенных функций. Поверхность, на которой производная $\dot{V}$ в силу системы (4.1) является знакоопределенной, называется **поверхностью без контакта**. В некоторых случаях с помощью таких поверхностей можно получить ряд полезных свойств о поведении траекторий системы (4.1) в фазовом пространстве, хотя при этом функция Ляпунова не существует. Например, выделить в фазовом пространстве так называемую поглощающую область (см. лекцию 1), оценить локализацию аттракторов и др.

4.4. Грубые состояния равновесия трехмерных систем

Метод линеаризации позволяет установить локальную устойчивость или неустойчивость грубых состояний равновесия нелинейных систем, но ничего не говорит о том, каким образом траектории приближаются к состоянию равновесия или удаляются от него. Для понимания этих свойств исследуем структуру разбиения фазового пространства на траектории в окрестности состояний равновесия трехмерных систем. Следуя методу линеаризации, рассмотрим сначала линейную систему (4.4). Предположим, что среди характеристических показателей состояния равновесия нет кратных и $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3.$

4.4.1. Действительные корни

В этом случае линейной заменой переменных $\mathbf{u} = \mathbf{H}\xi$, где $\mathbf{H}$ – матрица 3×3, система (4.4) может быть приведена к следующему виду

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1,\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2,\ \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3. \tag{4.13}$$

Система (4.13) – нормальная форма уравнений для состояний равновесия с действительными различными характеристическими показателями линейных трехмерных систем. Общее решение системы (4.13) имеет вид

$$u_1 = u_1^0 e^{\lambda_1 t}, \quad u_2 = u_2^0 e^{\lambda_2 t}, \quad u_3 = u_3^0 e^{\lambda_3 t}, \tag{4.14}$$

где $u_i^0 = \text{const}$.

Корни λ_i одного знака

Случай отрицательных корней. Из (4.14) следует, что в этом случае при любых начальных условиях при $t \to \infty$ траектории системы (4.13) стремятся к состоянию равновесия $O(u_1 = u_2 = u_3 = 0)$, которое является асимптотически устойчивым и называется устойчивым узлом. Рассмотрим, как именно траектории в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ подходят к точке O. Пусть для определенности λ_i упорядочены следующим образом: $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Прежде всего заметим, что плоскость $\{u_1 = 0\}$ инвариантна относительно системы (4.13), т.е. траектории системы (4.13) с начальными условиями на этой плоскости целиком принадлежат ей. Поскольку $\lambda_3 < \lambda_2 < 0$, траектории системы (4.13) с на плоскости $\{u_1 = 0\}$ ведут себя аналогично траекториям устойчивого узла двумерных систем (см. лекцию 3, рис.4.2a). Пусть теперь $u_1 \neq 0$.

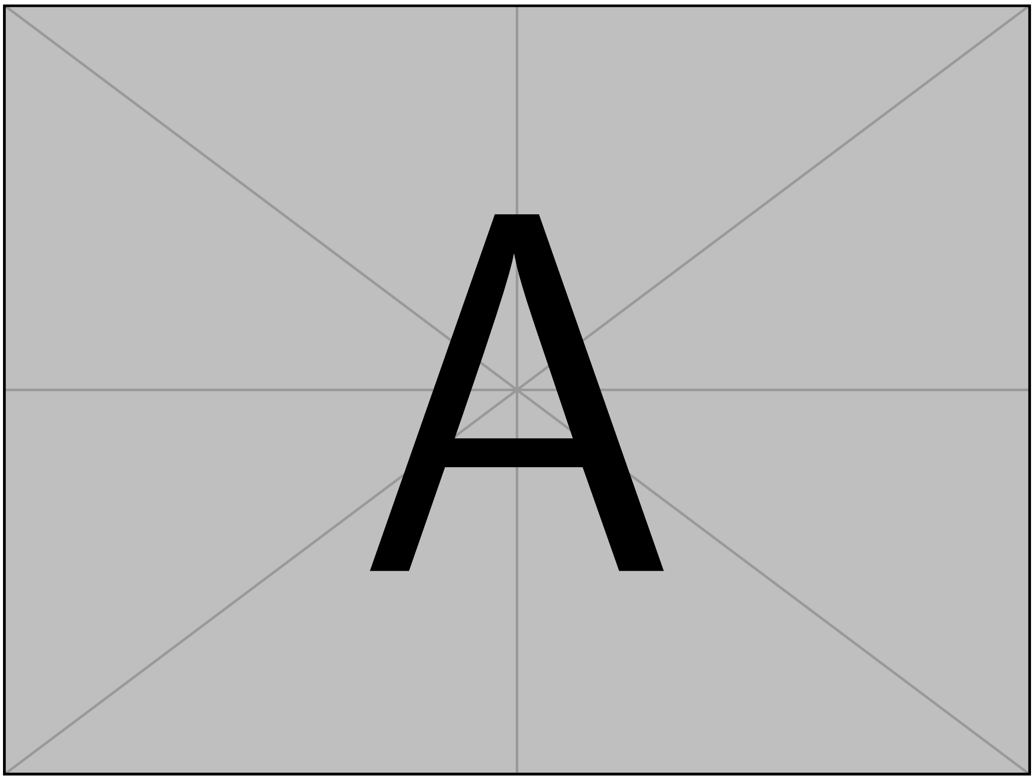


Рис. 4.2. Состояние равновесия системы (4.13): устойчивый узел (a); неустойчивый узел (b).

Из (4.14) имеем

$$\frac{u_2}{u_1} = \mathrm{const} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \quad \frac{u_3}{u_1} = \mathrm{const} \cdot e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t}. \tag{4.15}$$

В силу (4.15) при $t \to \infty$ переменная $u_1(t)$, при стремлении к состоянию равновесия O, убывает медленнее, чем переменные $u_2(t)$ и $u_3(t)$. Следовательно, все траектории системы (4.13), за исключением траекторий плоскости $\{u_1 = u_2\}$, касаются в состоянии равновесия прямой $\{u_2 = u_3 = 0\}$, которая является ведущим направлением узла (рис.4.2a).

Случай положительной корней. Пусть уравнение (4.9) имеет только положительные корни, упорядоченные для определенности следующим образом: $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1 > 0$. В силу (4.14) все траектории системы (4.13) покидают окрестность состояния равновесия O, которое в этом случае является неустойчивым и называется неустойчивым узлом. Поведение траекторий в окрестности неустойчивого узла устанавливается аналогично предыдущему случаю и показано на рис.4.2b.

Корни λ_i разного знака

Случай одного положительного и двух отрицательных корней. Предположим, что уравнение (4.9) имеет следующие корни: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0,\ \lambda_3 > 0$. Непосредственно из системы (4.13) следует, что все траектории с начальными условиями на плоскости $E^s = \left\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\ u_3\right\}$ целиком принадлежат этой плоскости, т.е. E^s инвариантна относительно системы (4.13). Движения на плоскости E^s определяются первыми двумя уравнениями системы (4.13), которые задают на ней устойчивый узел. При этом прямая $\{u_2 = 0\}$ является ведущим, а прямая $\{u_1 = 0\}$– неведущими направлениями этого узла (рис.4.3a).

Очевидно, что прямая $E^u = \{u_1 = u_2 = 0,\ u_3 \in \mathbb{R}\}$ также инвариантна относительно системы (4.13). Движения на этой прямой определяются третьим уравнением системы (4.13). Поскольку $\lambda_3 > 0$, то для траектории системы (4.13) с начальными условиями на этой прямой выполняется либо условие $u_3(t) \to \infty$, либо $u_3(t) \to -\infty$ (рис.4.3a). Рассмотрим поведение траекторий с начальными условиями вне E^s и E^u. Введем в рассмотрение функцию

$$V(u_1, u_2) = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2}.$$

Производная этой функции в силу системы (4.13) имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 < 0,\ \text{если}\ (u_1, u_2) \notin E^u. \tag{4.16}$$

В силу (4.16) поверхности уровня $V(u_1, u_2) = C = \mathrm{const}$ являются поверхностями ьез контакта, каждую из которых траектории системы (4.13) пересекают с внешней стороны во внутрь. Отсюда, поскольку $V(u_1, u_2) = C$ имеет вид цилиндрических поверхностей, стягивающихся к прямой E^u при $C \to 0$,

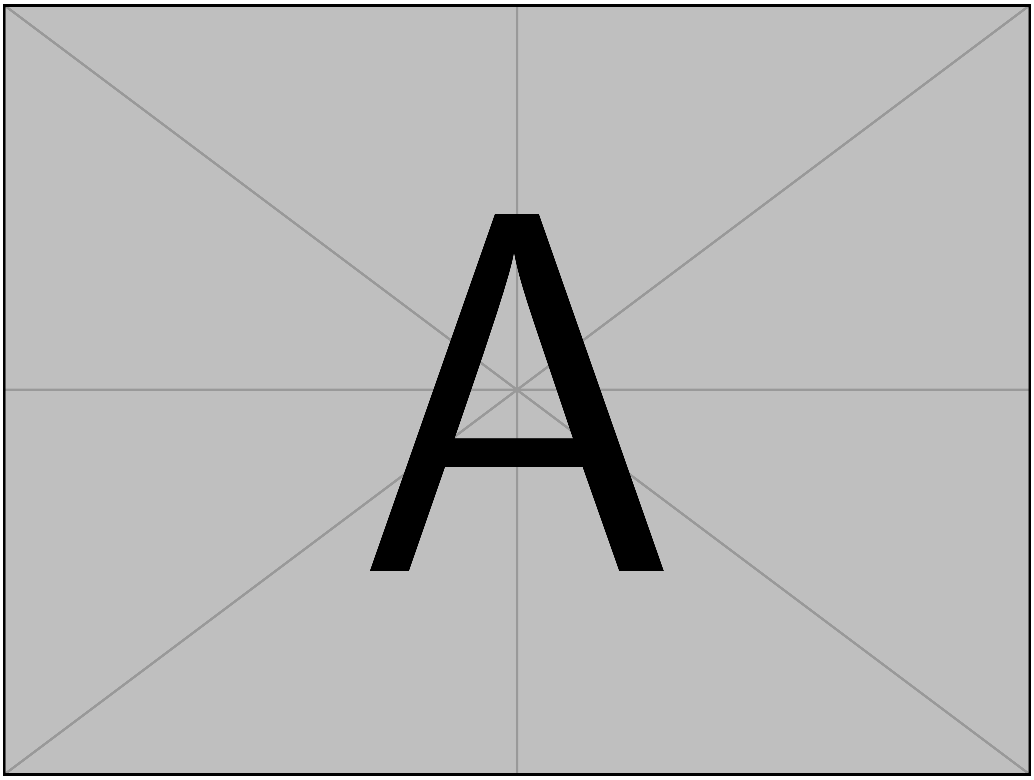


Рис. 4.3. Состояния равновесия системы (4.13): седло с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями (a); седло с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (b).

вытекает что траектории с начальными условиями вне прямой E^u асимптотически приближаются к ней и стремятся к состоянию равновесия на E^s. Качественное поведение траекторий системы (4.13) в рассматриваемом случае представлено на рис.**??**a. Такое состояние равновесия называется седлом, а плоскость E^s–устойчивым, E^u– неустойчивым многообразиями этого седла. Заметим, что неустойчивое многообразие E^u состоит из двух полупрямых E^u_1, E^u_2 и точки O (см рис.4.3a). Эти полупрямые называются неустойчивыми сепаратрисами седла.

Случай одного отрицательного и двух положительных корней. Пусть корни уравнения (4.9) упорядочены следующим образом: $\lambda_3 > \lambda_2 > 0 > \lambda_1$. Аналогично предыдущему можно показать, что в этом случае состояние равновесия O является также седлом. Однако, это седло имеет двумерное неустойчивое многообразие $E^u = \left\{u_1 = 0,\ (u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2\right\}$ и одномерное устойчивое многообразие $E^s = \{u_2 = u_3 = 0, u_1 \in \mathbb{R}\}$ (см. рис.4.3b). Такое седло имеет две устойчивые одномерные сепаратрисы – E^s_1 и E^s_2.

4.4.2. Комплексные корни

Предположим, что уравнение (4.9) имеет пару комплексно-сопряженных корней: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ и один вещественный корень λ_3. Нормальная форма уравнений линейной системы (4.4) в этом случае имеет вид

$$\dot{u}_1 = \alpha u_1 - \beta u_2, \dot{u}_2 = \beta u_1 + \alpha u_2, \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3. \tag{4.17}$$

Очевидно, что система (4.17) имеет двумерное (плоскость $\{u_3 = 0\}$) и одномерное (прямая $\{u_1 = u_2 = 0\}$) инвариантные многообразия. Устойчивость этих многообразий определяется знаком величин α и λ_3.

Вещественные части корней λ_i одного знака

Случай $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$ **и** $\lambda_3 < 0$**.** При этих условиях состояния равновесия O имеет одномерное $E^{s_1} = \{u_1 = u_2 = 0,\ u_3 \in \mathbb{R}\}$ и двумерное $E^{s_2} = \left\{u_3 = 0,\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$ устойчивые многообразия. Поведение траекторий системы (4.17) с начальными условиями вне этих многообразий установим с помощью функции $V(u_1, u_2)$, удовлетворяющей в силу (4.17) следующему условию

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \alpha\left(u_1^2 + u_2^2\right) < 0,\ \text{если}\ (u_1, u_2) \in E^{s_1}. \tag{4.18}$$

Из (4.18) вытекает, что рассматриваемые траектории асимптотически приближаются к прямой E^{s_1}, пересекая без контакта цилиндрические поверхности уровня, стягивающиеся к E^{s_1}. При этом в $\mathbb{R}^3$ траектории стремятся к состоянию равновесия и демонстрируют спиральное поведение, возникающее в силу осцилляторного затухания переменных u_1 и u_2. Такое состояние равновесия является асимптотически устойчивым и называется устойчивым фокусом (см. рис.4.4a).

Случай $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$ **и** $\lambda_3 > 0$**.** Поведение траекторий системы (4.17) при таких характеристических показателях можно легко установить, сделав в системе замену $t \to -t$. Такая замена сводит данный случай к предыдущему. Следовательно, искомый фазовый портрет подобен портрету, представленному на рис.4.4a, в котором надо лишь изменить направление движения по траекториям на противоположное. Полученное состояние равновесия называется неустойчивым фокусом (см. рис.4.4b).

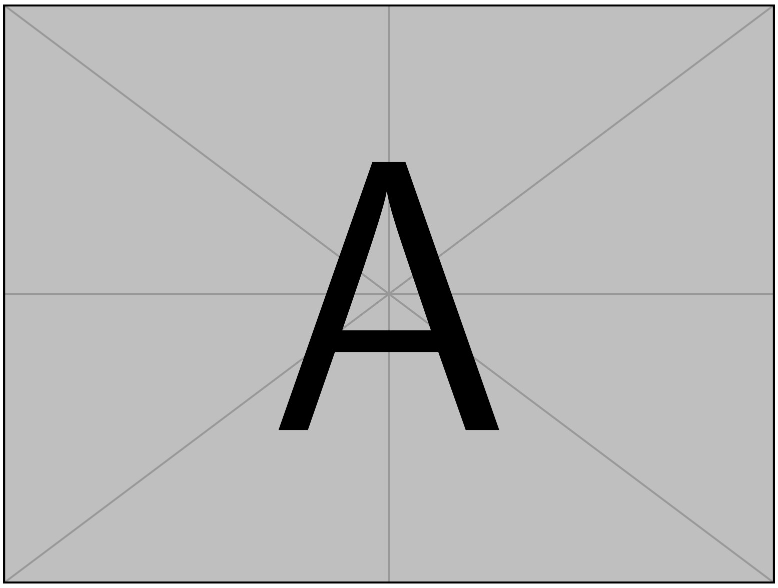


Рис. 4.4. Состояние равновесия системы (4.17): устойчивый фокус (a); неустойчивый фокус (b).

Вещественные части корней λ_i разных знаков

Случай $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$ **и** $\lambda_3 > 0$. При этих условиях двумерное многообразие $E^s = \left\{u_3 = 0,\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$ является устойчивым, а двумерное $E^u = \{u_1 = u_2 = 0, u_3 \in \mathbb{R}\}$ – неустойчивым. На многообразии E^s система (4.17) имеет устойчивый двумерный фокус, а E^u состоит из двух неустойчивых сепаратрис E_1^u, E_2^u и точки O. Принимая во внимание неравенство (4.18), устанавливаем, что все траектории, вне многообразий E^s и E^u, асимптотически приближаются к прямой E^u, удаляясь при этом от состояния равновесия. Фазовый портрет такого состояния равновесия представлен на рис.4.5a. Оно называется седло-фокусом.

Случай $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$ **и** $\lambda_3 < 0$ Обратив в системе (4.17) время $t \to -t$, мы получим рассмотренный выше случай. Поэтому для построения фазового портрета изучаемого состояния равновесия достаточно просто изменить на рис.4.5a направление движения по траекториям на противоположное. В результате получится состояние равновесия, представленное на рис.4.5b, которое также называется седло-фокусом. Однако, у этого состояния равновесия неустойчивым является двумерное многообразие, а устойчивым – одномерное многообразие.

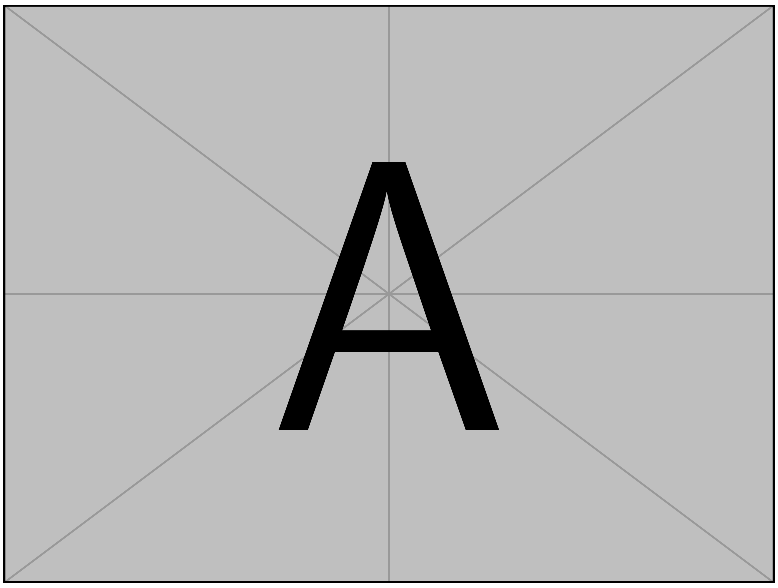


Рис. 4.5. Состояние равновесия системы (4.17): седло-фокус с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями (a); седло-фокус с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (b)

4.4.3. Состояния равновесия трехмерных нелинейных систем

Рассмотрим поведение траекторий нелинейной трехмерной системы (4.1) в окрестности состояния равновесия. Если состояние равновесия является грубым $(\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3)$, то существует непрерывное взаимно-однозначное отображение, имеющее непрерывное обратное отображение, под действием которого каждая траектория из окрестности состояния равновесия нелинейной системы (4.1) переводится в траекторию из окрестности состояния равновесия линеаризованной системы с сохранением направления движения (теорема Гробмана-Хартмана). Следовательно, структура окрестности состояния равновесия нелинейной системы качественно выглядит также как окрестность состояния равновесия соответствующей линеаризованной системы. При этом размерность и устойчивость многообразий линеаризованной и нелинейной систем совпадают. Однако, многообразия нелинейной системы представляют собой, вообще говоря, некоторые поверхности и кривые, а не плоскости и прямые, как в случае линеаризованной системы. Инвариантные многообразия состояния равновесия нелинейной системы касаются в этом состоянии равновесия многообразий линеаризованной системы (теорема Адамара-Перрона)

Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 - z^2, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = -z. \end{cases} \tag{4.19}$$

Система (4.19) имеет единственное состояние равновесия - $O(x = y = z = 0)$ характеристическими показателями: $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = -1, , \lambda_1 = -1$. Следовательно, O – седло. Нетрудно видеть, что многообразия седла линеаризованной системы имеют вид

$$E^s = \{x = 0,\ (y, z)\} \in \mathbb{R}^2$$
$$E^u = \{y = z = 0,\ x\} \in \mathbb{R}.$$

С другой стороны, непосредственно из (4.19) следует, что неустойчивое многообразие W^u седла O системы (4.19) совпадает с прямой E^u, а устойчивое многообразие W^s задается следующим образом

$$W^s = \left\{x = \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5}\right\}.$$

Качественный вид многообразий седла иллюстрирует рис.4.6, который ясно показывает принципиальное различие инвариантных многообразий нелинейных и линеаризованных систем. Заметим, что совпадение W^u и E^u в системе (4.19) носит частный характер и не отражает общей ситуации.

В заключение этого раздела обратим внимание на то, что утверждения, сформулированные выше, относительно свойств состояний равновесия трехмерных систем имеют соответствующие аналоги и для систем произвольной размерности.

4.4.4. Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма

Характеристическое уравнение (4.9) содержит три параметра a, b и c, от значения которых зависит расположение корней этого уравнения на комплексной плоскости и, следовательно, тип состояния равновесия O. Установим связь между параметрами a, b, c и характером состояния равновесия. Согласно результатам, изложенным в разделах 4.2 и 4.4, разбиение пространства

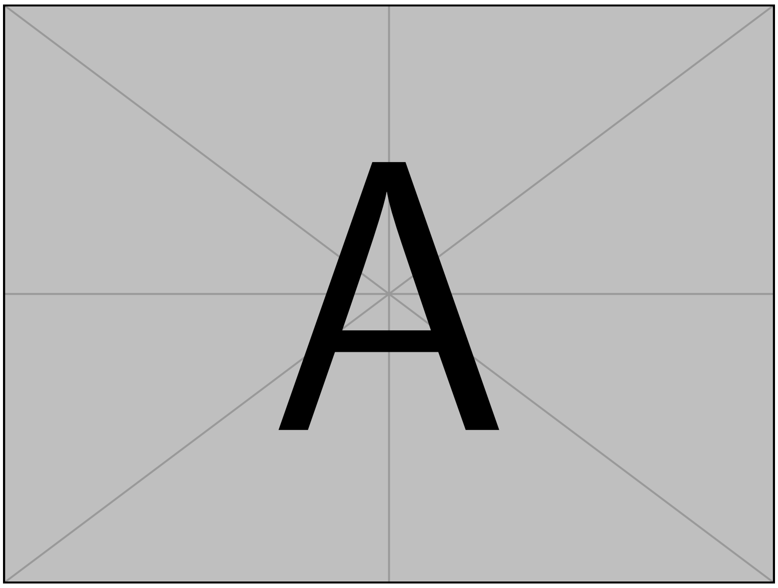


Рис. 4.6. Многообразие линеаризованной – E^s, E^u и нелинейной системы (4.19) –W^s, W^u.

параметров $\{a, b, c\}$ на области, соответствующие различным типам состояний равновесия O определяется следующими условиями

$$a = 0, \ ab - c = 0, \ c = 0, \ D = 0, \tag{4.20}$$

где D – дискриминант уравнения (4.9), имеющий вид

$$D = \frac{b^3}{27} - \frac{a^2 b^2}{108} + \frac{a^3 c}{27} - \frac{abc}{6} + \frac{c^2}{4}.$$

Уравнение (4.9) имеет действительные корни, если $D < 0$ и один действительный и два комплексно-сопряженных корня, если $D > 0$. При $D = 0$ корни уравнения (4.9) действительные, два из которых равны между собой. Зафиксируем параметры и рассмотрим двухпараметрическую задачу, считая b и c контрольными параметрами.

Случай $a = \mathbf{const} > 0$. Из условий (4.20) следует, что разбиение плоскости (b, c) (см. рис.4.7) на области, соответствующие различным типам состояний равновесия осуществляется следующими буфуркационными кривыми

$$C^{\pm} = \left\{ c = \frac{a(9b - 2a^2) \pm 2(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}}{27},\ b < \frac{a^2}{3} \right\},$$
$$S = \{c = ab,\ b > 0\},\ B^+ = \left\{ c = 0, b > \frac{a^2}{4} \right\}$$
$$B^0 = \left\{ c = 0,\ 0 < b < \frac{a^2}{4} \right\}, B^- = \{c = 0,\ b < 0\}.$$

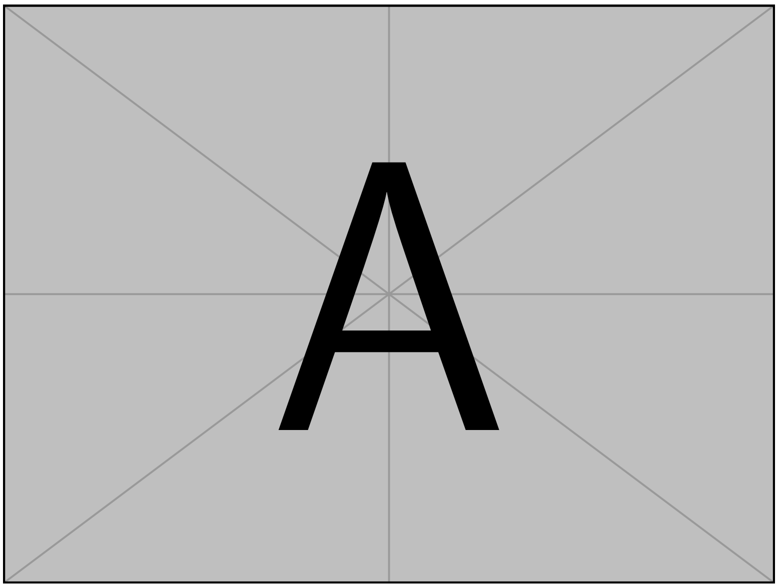


Рис. 4.7. Разбиение плоскости параметром (b, c) на области, соответствующие различным типам состояния равновесия систему (4.4) в случаях $a > 0$ $(a = 4)$.

Случай $a = 0$**.** При $a = 0$ область асимптотической устойчивости отсутствует, отрезок B^0 стягивается в точку – начало координат, а кривые C^+ и C^- целиком расположены в области $b < 0$ (см. рис.4.8). В этом случае на полупрямой B^+ уравнение (4.9) имеет, кроме одного нулевого, ещё пару чисто мнимых корней, а в начале координат – трехкратный нулевой корень. На плоскости (b, c) существует четыре области, соответствующие различным типам грубого состояния равновесия O.

Случай $a < 0$**.** Как и при $a > 0$, здесь разбиение плоскости (c, b) на области, соответствующие различным типам состояния равновесия, осуществляют бифуркационные линии $C^{\pm}$, S, $B^{\pm}$ и B^0 (см. рис.4.9). Однако, расположение корней уравнения (4.9) на комплексной плоскости, когда параметры принадлежат B^+, B^0 и S отличается от случая $a > 0$. Именно точкам полупрямай B^+ отвечает один нулевой и два комплексно-сопряженных корня с положительной вещественной частью, отрезка B^0 - один нулевой и два положительных корня, а полупрямой S – один положительный и два чисто мнимых корня. Изменился также и вид кривых C^+ и C^-. Кривая C^+ стала монотонно убывающей и выпуклой вниз, а C^- – выпуклой вверх, имеющей максимум в начале координат. При $a < 0$ состояние равновесия всегда неустойчиво по Ляпунову и на плоскости (b, c) существуют шесть областей, отвечающих различным типам состояния равновесия O.

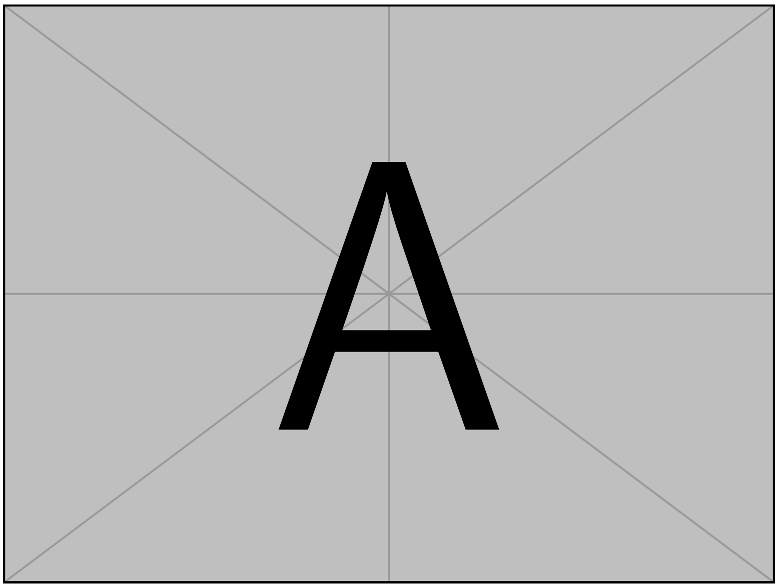


Рис. 4.8. Разбиение плоскости параметров (b, c) на области, соответствующие различным типам состояния равновесия системы (4.4) в случае $a = 0$.

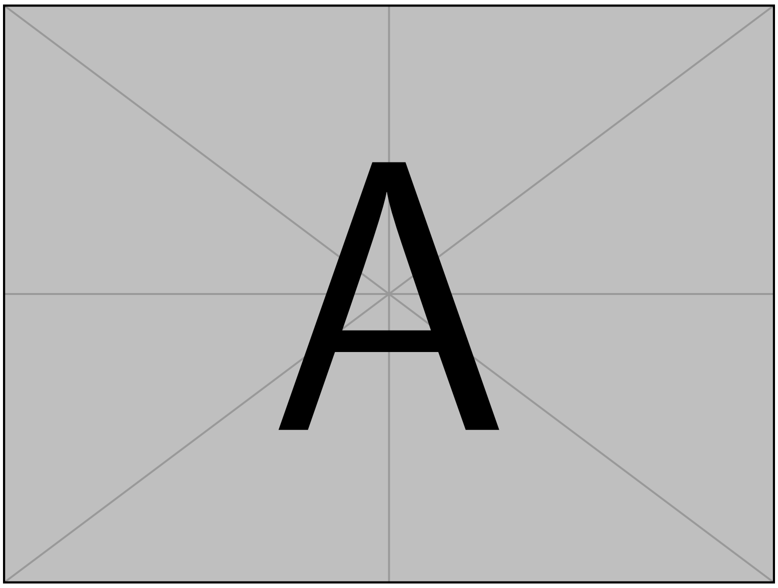


Рис. 4.9. Разбиение плоскости (b, c) на области, соответствующие различным типам состояния равновесия (4.4) в случае $a < 0$ $(a = -4)$.

Глава 5.

Линейный и нелинейный осцилляторы

Осциллятор – простейшая динамическая система с двумерным фазовым пространством. Несмотря на простоту, с помощью этой системы можно описать важнейшие колебательные процессы: периодические, затухающие и нарастающие. Круг реальных задач, приводящих к модели в виде осциллятора,чрезвычайно широк и имеет самую разнообразную природу. Например, к таким задачам относятся различные механические устройства, в которых происходит взаимодействие масс и упругих сил, электрические контуры, содержащие ёмкостные и индуктивные компоненты, некоторые виды акустических резонаторов, простейшие популяционные задачи и др. Изучение динамических свойств осцилляторов мы начнём с задач, в которых нелинейные механизмы отсутствуют или пренебрежимо малы.

5.1. Динамика линейного осциллятора

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённый ёмкости C, индуктивности L и сопротивления R (см. рис.5.1а). Обозначим через q заряд конденсатора C. Согласно закону Кирхгофа

$$u_r + u_1 + u_c = 0, \tag{5.1}$$

т.е. сумма падений напряжения на элементах контура равна нулю, поскольку в цепи отсутствуют внешние источники напряжения. Пусть i– ток,

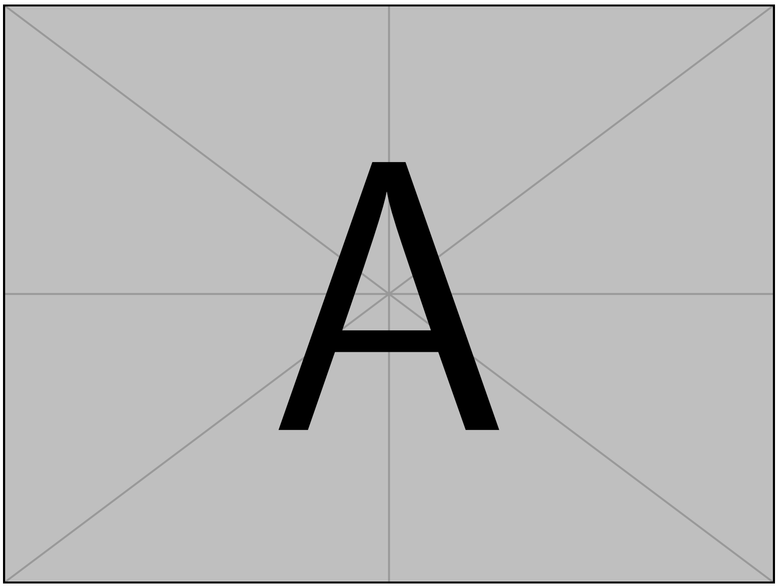


Рис. 5.1. Линейные осцилляторы: электрический контур (a); груз массы m на пружине с жёсткостью k, совершающий малые колебания около положения равновесия (b).

протекающий в контуре, который, как известно, связан с зарядом q следующим образом

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

Тогда для напряжение на элементах контура можно записать

$$u_R = Ri = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\ u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2},\ u_C = \frac{q}{C}. \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в (5.1), получим уравнение

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0. \tag{5.3}$$

Перепишем уравнение (5.3), для удобства дальнейшего изложения, в следующем эквивалентном виде

$$\ddot{x} + 2\delta x + \omega_0^2 x = 0, \tag{5.4}$$

где

$$2\delta = \frac{R}{L},\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Реальные системы, динамика которых описывается уравнением (5.4), принято называть **линейными осцилляторами**. Уравнение (5.4) содержит два параметра, имеющих ясный смысл: ω_0–частота собственных колебаний, а параметр δ характеризует потери в системе.

Другим примером линейного осциллятора может служить груз на пружине (см. рис.5.1b), совершающий малые колебания вблизи положения равновесия при наличии силы трения пропорциональной скорости $\dot{x}$. Динамика такой системы также описывается уравнением (5.4), в котором x – смещение груза из положения равновесия.

5.1.1. Гармонический осциллятор

Раздел II

Весенний семестр