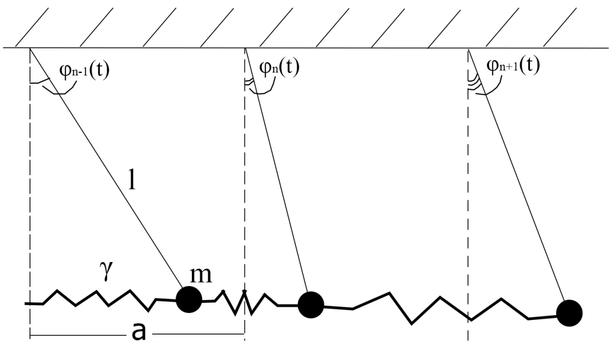
1. 08.04.19 Колебания и волны в цепочке взаимосвязанных тождественных осцилляторов

Рассмотрим в качестве осциллятора обычный маятник, совершающий колебания около нижней точки равновесия. Пусть есть система (маятники на расстоянии a друг от друга, связаны пружинками жесткости γ, n-номер маятника, $\omega_o^2 = \frac{g}{l}$ - собственная частота)



Состояние маятника зависит не только от времени t, но и от номера маятника n, т.е. n в некотором смысле играет роль пространственной координаты. Запишем уравнение динамики такого маятника:

$$\ddot{\varphi}_n + \omega_o^2\varphi_n = \frac{\gamma}{m}[(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + (\varphi_{n+1} - \varphi_n)]. \tag{1}$$

Каждый маятник действует на соседний, сила взаимодействия зависит от разности значений углов. Перепишем:

$$\ddot{\varphi}_n + \omega_o^2\varphi_n = \frac{\gamma}{m}[(\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1})].$$

Часто такую связь называют диффузионной, хотя, конечно, никакого отношения к процессу диффузии она не имеет. В системе нет диссипации, она линейна (нелинейность порождала бы новые частоты).

$$\varphi_n = Ae^{i(\omega t - nka)}. \tag{2}$$

Такая форма записи учитывает, что возмущение от маятника к маятнику проходит за некоторое конечное время.

$$-\omega^2 + \omega_o^2 = \frac{\gamma}{m}(e^{-ika} - 2 + e^{ika}),$$

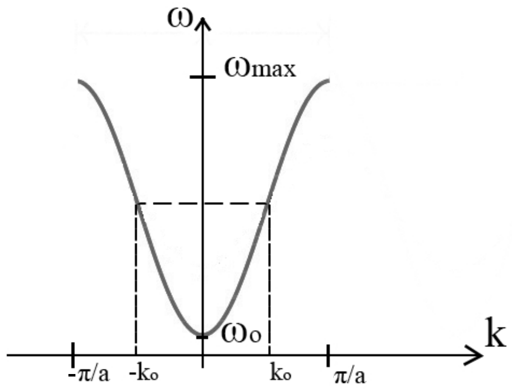
$$\omega^2 = \omega_o^2 - \frac{\gamma}{m}(e^{-ika} - 2 + e^{ika}). \qquad (3)$$

Рассмотрим случай k - *действительное*

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \frac{\gamma}{m}(-2 + 2\cos ka),$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{4\gamma}{m}\sin^2\frac{ka}{2}. \qquad (4)$$

Установили, что ω и k связаны соотношением (4)



$$\omega_{max} = \sqrt{\omega_o^2 + \frac{4\gamma}{m}}.$$

Если $\omega_o < \omega < \omega_{max}$, то каждому ω соответствует k_o и $-k_o$

Получим две гармонические бегущие волны:

$$\varphi_n = Ae^{i(\omega t + nk_o a)} \text{ и } \varphi_n = Ae^{i(\omega t - nk_o a)},$$

где k - волновое число. Поскольку система линейна, любая линейная комбинация решений тоже будет решением. Диапазон $\omega_o < \omega < \omega_{max}$ называют полосой прозрачности (или полосой пропускания). Вне этой полосы решению не отвечают действительные k. В этом случае число k - *чисто мнимое* (чисто - ибо нет диссипации в системе) и $k = i\varkappa$:

$$\omega^2 = \omega_o^2 - \frac{4\gamma}{m}\operatorname{sh}^2\frac{\varkappa a}{2}, \qquad (5)$$

а $\varphi_n = Ae^{-n\varkappa a}e^{i\omega t}$ (при $n \to \infty$, $\varphi_n \to 0$). В этих областях волна не проходит.

Почему в одних случаях система пропускает волну, а в других нет?

Если мы находимся в полосе прозрачности, то $v_{\text{фаз}} = v_{\text{фаз}}(k), v_{\text{фаз}} = v_{\text{фаз}}(\omega)$. Если фазовая скорость зависит от частоты или волнового числа, то среда диспергирующая, а (4) - дисперсионное соотношение. Дисперсия возникает из-за наличия собственных пространственно-временных масштабов (а и ω_o). У каждой компоненты волнового пакета будет своя фазовая скорость, возникнет его деформация.

1.1. Предельный переход от цепочной структуры в среде

Введем пространственную координату x вдоль балки. Сделаем замену, считая, что φ_n зависит от двух переменных:

$$\varphi_n(t) \to \varphi(x,t),$$
$$\varphi_{n+1}(t) \to \varphi(x+a,t) = \varphi(x,t) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}a^2 + \dots$$

Считая а малым, разложим в ряд по степеням а:

$$\varphi_{n-1}(t) \to \varphi(x-a,t) = \varphi(x,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}a^2 + \dots, \tag{6}$$

и подставим в (1)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \omega_o^2\varphi = \frac{\gamma}{m}a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$
$$\frac{\gamma}{m}a^2 = v^2,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \omega_o^2\varphi = 0 - \text{Уравнение Клейна-Гордона.} \tag{7}$$

Уравнение (7) не что иное, как уравнение в частных производных. Когда мы можем использовать (7) вместо (1)?

Предполагали, что

1) φ_n, определенная в точке, определена и между дискретными точками подвеса;

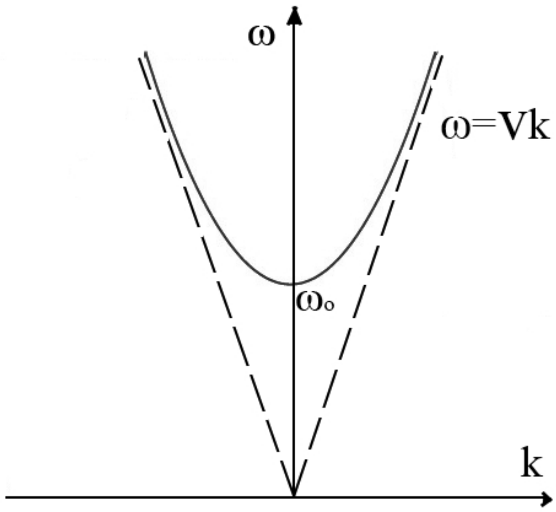
2) отброшены величины третьего порядка;

3) a-мало

Построим дисперсионную характеристику для (7)

$$\varphi(x,t) = Ae^{i(\omega t + kx)},$$
$$-\omega^2 - k^2 v^2 + \omega_o^2 = 0,$$

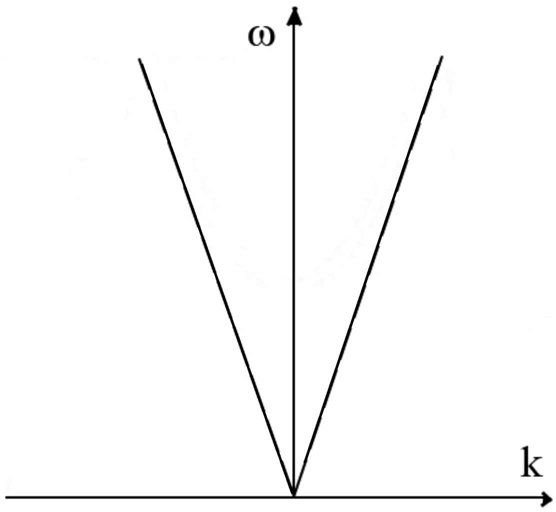
$$\omega^2 = \omega_o^2 + k^2 v^2. \tag{8}$$



Есть две асимптоты.

При каких условиях дисперсионки совпадут?

$\lambda \gg a$ или $ka \ll$ - условие длинноволновой зоны, можно от одной перейти к другой, поскольку пространственный масштаб не сказывается, мы им пренебрегаем. Если $\omega_0 \to 0$, то из (8): $\omega^2 = k^2 v^2$. В этом случае система не обладает дисперсией.



Дисперсионная характеристика проявляется в области прозрачности/непрозрачност
и зависимости $v_{\text{фаз}}$ от k или ω.

Получили, шарики плотно друг к другу и покоятся.

Переход от цепочки к среде называется длинноволновым переходом. при нем теряется дискретность системы.

1.2. Составление дисперсионного уравнения для произвольной линейной системы

Рассмотрим многомерную систему

$$A\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + B\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + C\vec{U} = 0. \tag{9}$$

A, B, C - $n \times n$ - матрицы; $\vec{U}(x,t)$ описывает состояние системы.

$$\vec{U} = \vec{\varphi} e^{i(\omega t - kx)}. \tag{10}$$

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix},$$

$$A i\omega\vec{\varphi} - iBk\vec{\varphi} + C\vec{\varphi} = 0,$$

$$(A\omega - Bk - iC)\vec{\varphi}i = 0. \tag{11}$$

(11) представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно компонент вектора $\vec{\varphi}$. Она имеет решение, если ее детерминант

$$det(A\omega - Bk - iC) = 0. \tag{12}$$

для краткости обозначают $D(\omega, k) = 0$. он связывает ω и k, т.е. задает дисперсионную характеристику. Следовательно, для $\forall k$ дисперсионное соотношение определяют n значений ω: $\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)$. Каждой паре k, $\omega_s(k)$ отвечает некоторый вектор, определяемый (11). При этом решением будут не только $k, \omega, \vec{\varphi}$, но и $k^*, \omega^*, \vec{\varphi}^*$. Можно построить действительное решение:

$$\vec{U}(x,t) = \vec{\varphi}e^{i(\omega t - kx)} + \vec{\varphi}^* e^{-i(\omega^* t - k^* x)}. \tag{13}$$

(13) задает гармоническую волну, если k, ω действительные. Если же k, ω комплексные, то (13) задает нарастающее или затухающее колебание. При этом общее решение может выть записано в виде

$$\vec{U}(x,t) = \sum_{s=1}^{n} \varphi^{(s)} e^{i(\omega_s(k)t - kx)} + \text{к.с.}$$

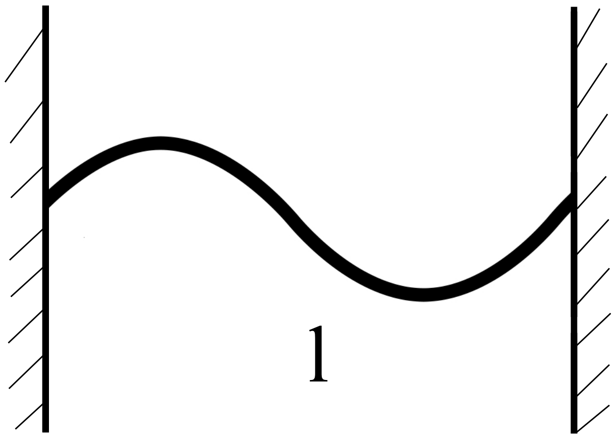
Как только будут учтены граничные условия, получится аналог характеристического уравнения.

1.3. Влияние граничных условий

Предположим, маятники были свернуты в кольцо, следовательно, должно уложиться целое число полуволн:

$$n = 1, \ldots, N; \quad \varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1};$$
$$k = \frac{2\pi n}{l}; \quad \varphi_{N+1} = \varphi_1; \quad k = k_n.$$

Примером распределенной системы может служить струна длины l, концы которой закреплены:



$$U(x,t),$$
$$U(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$U(x,t) = \varphi_1 e^{i(\omega t - kx)} + \varphi_2 e^{i(\omega t + kx)},$$
$$\begin{cases} \varphi_1 e^{i\omega t} + \varphi_2 e^{i\omega t} = 0 \\ \varphi_1 e^{i\omega t} + \varphi_2 e^{i\omega t + ikl} = 0 \end{cases}$$
$$\varphi_1 = -\varphi_2, \quad \sin kl = 0, \quad k = \frac{\pi n}{l} = k_n$$

$$\begin{cases} D(\omega, k) = 0 \\ k = k_n \end{cases} \tag{14}$$

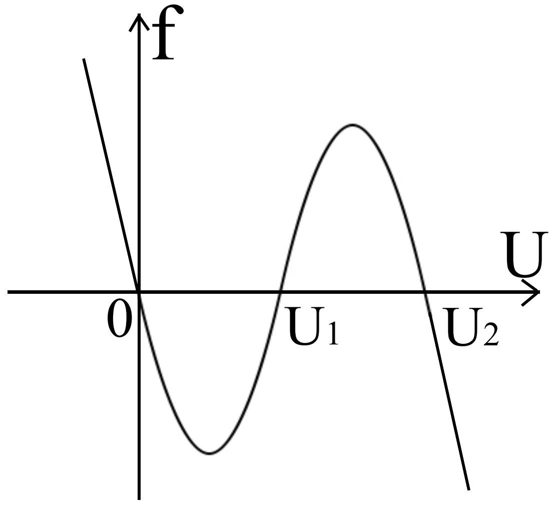
Отсюда следует, что $\omega = omega_n$. Если среда без дисперсии, то спектры волновых чисел и волновых частот будут эквидистантными.

1.4. Устойчивость состояний равновесия нелинейных распределенных систем

Простейшим типом решений распределенных систем являются такие состояния, которые не меняются ни во времени, ни в пространстве: $U(x,t); U = U_o = const$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f(U) + D\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{15}$$

где $f(U)$ - нелинейная функция. Пусть, кубическая. Если убрать D. то уравнение будет описывать динамику точки в среде.



Три точки, где $f(U) = 0$. В системе могут быть стационарные решения (не зависящие от времени) - это другой тип решения. Будем рассматривать их решение в классе гармонических функций.

$$\xi(x,t) \sim e^{pt+ikx}$$

Линеаризуем (15) на состояниях равновесия:

$$U = U^* + \xi(x,t),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + f'(U^*)\xi(x,t). \tag{16}$$

$$f(U^* + \xi(x,t)) \approx f(U^*) + f'(U^*) \cdot \xi(x,t),$$
$$\xi(x,t) = Ae^{pt+ikx}$$
$$p = -Dk^2 + f'(U^*),$$
$$U = 0, \quad U = U_2, \quad f'(U^*) < 0.$$