

# Лекции по основам теории колебаний

Набор и вёрстка:

Карусевич А.А. Понур К.А., Сарафанов Ф.Г., Шиков А.П.,  
Платонова М.В.

**Disclaimer.** В данном документе нами набраны лекции по теории колебаний (нелинейной динамике), прочитанные на 3 курсе радиофизического факультета ННГУ **Владимиром Исааковичем Некоркиным**, но не вошедшие в существующие методические пособия. Документ призван облегчить подготовку к зачётам и экзаменам и восполнить пробелы в знаниях читателя по теории колебаний. Разрешено копирование и распространение данного документа с обязательным указанием первоисточника.

4 апреля – 10 августа 2019 г.  
Нижний Новгород

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Осенний семестр</b>	<b>5</b>
<b>1.</b>	<b>Введение в теорию колебаний</b>	<b>6</b>
1.1.	Общие закономерности теории колебаний	6
1.2.	Динамические системы	7
1.2.1	Типы траекторий	8
1.2.2	Динамические системы с непрерывным временем	9
1.2.3	Динамические системы с дискретным временем	10
1.2.4	Динамические системы с диссипацией	11
1.3.	Аттракторы	13
1.4.	Структурная устойчивость динамических систем	13
<b>2.</b>	<b>Динамические системы на прямой</b>	<b>16</b>
2.1.	Качественный подход	17
2.2.	Грубые состояния равновесия	18
2.3.	Бифуркации состояний равновесия	20
2.3.1	Двукратное равновесие	20
2.3.2	Понятие о нормальной форме	21
2.3.3	Транскритическая бифуркация	22
2.3.4	Трехкратное равновесие	23
2.4.	Система на окружности	24
<b>3.</b>	<b>Устойчивость состояний равновесия. Классификация состояний равновесия двумерных линейных систем</b>	<b>26</b>
3.1.	Определение устойчивости состояний равновесия	28
3.2.	Классификация состояний равновесия линейных систем на плоскости	29
3.2.1	Действительные корни	31
3.2.2	Комплексные корни	35
3.2.3	Колебания двумерных линейных систем	37
3.2.4	Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма	37
<b>4.</b>	<b>Анализ устойчивости состояний равновесия многомерных нелинейных систем</b>	<b>40</b>

4.1.	Метод линеаризации . . . . .	40
4.2.	Критерий Рауса-Гурвица . . . . .	42
4.3.	Второй метод Ляпунова . . . . .	44
4.4.	Грубые состояния равновесия трехмерных систем . . . . .	48
4.4.1	Действительные корни . . . . .	48
4.4.2	Комплексные корни . . . . .	51
4.4.3	Состояния равновесия трехмерных нелинейных систем . . . . .	53
4.4.4	Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма . . . . .	55
<b>5.</b>	<b>Линейный и нелинейный осцилляторы</b>	<b>58</b>
5.1.	Динамика линейного осциллятора . . . . .	58
5.1.1	Гармонический осциллятор . . . . .	60
5.1.2	Линейный осциллятор при наличии потерь . . . . .	62
5.1.3	Линейный осциллятор с «отрицательным» затуханием . . . . .	66
5.2.	Динамика нелинейного осциллятора . . . . .	68
5.2.1	Консервативный нелинейный осциллятор . . . . .	68
5.2.2	Нелинейный осциллятор с диссипацией . . . . .	76
<b>6.</b>	<b>Основные свойства точечных отображений</b>	<b>78</b>
6.1.	Точечные отображения – модели дискретных систем . . . . .	78
6.2.	Отображение Пуанкаре . . . . .	79
6.3.	Неподвижные точки . . . . .	83
6.4.	Одномерные линейные отображения . . . . .	85
6.5.	Двумерные линейные отображения . . . . .	86
6.5.1	Действительные мультипликаторы . . . . .	86
6.5.2	Комплексные мультипликаторы . . . . .	89
6.6.	Одномерные нелинейные отображения: некоторые понятия и примеры . . . . .	91
<b>7.</b>	<b>Предельные циклы динамических систем на плоскости</b>	<b>97</b>
7.1.	Изолированные и неизолированные периодические траектории. Определение предельного цикла . . . . .	97
7.2.	Орбитальная устойчивость. Устойчивые и неустойчивые предельные циклы. . . . .	99
7.2.1	Определение орбитальной устойчивости . . . . .	99
7.2.2	Характеристики предельных циклов . . . . .	100
7.3.	Вращательные и колебательные предельные циклы . . . . .	103
7.4.	Критерий Бендиксона-Дюлака . . . . .	103
<b>8.</b>	<b>Основные бифуркации состояний равновесия на плоскости</b>	<b>105</b>
8.1.	Бифуркационные условия . . . . .	105
8.2.	Седло-узловая бифуркация . . . . .	106

8.3. Бифуркация Андронова-Хопфа . . . . .	109
8.3.1 Первая ляпуновская величина отрицательна. . . . .	110
8.3.2 Первая ляпуновская величина положительна . . . . .	111
8.3.3 «Мягкое» и «жесткое» рождение периодических колеба- ний . . . . .	111
8.4. Затягивание потери устойчивости при динамической бифурка- ции Андронова-Хопфа. . . . .	112
<b>9. Бифуркация двукратного предельного цикла. Бифуркация петли сепаратрис седла</b>	<b>118</b>
9.1. Двукратный предельный цикл . . . . .	118
9.2. Петля сепаратрис седла . . . . .	124
9.2.1 Точечное отображение в окрестности петли сепаратрис седла . . . . .	126
9.2.2 Колебательные и вращательные петли сепаратрис . . . . .	129
<b>10. Бифуркация петли сепаратрисы седло-узла. Динамика быстро- медленных систем на плоскости</b>	<b>133</b>
10.1. Петля сепаратрисы седло-узла . . . . .	133
10.2. Заключительные замечания о бифуркациях систем на плоскости	137
10.3. Динамика быстро-медленной системы . . . . .	138
10.3.1 Медленные и быстрые движения . . . . .	139
10.3.2 Системы с однократной релаксацией . . . . .	140
10.3.3 Релаксационные колебания . . . . .	142
<b>II Весенний семестр . . . . .</b>	<b>147</b>
<b>11. Динамика сверхпроводящего Джозефсоновского контакта</b>	<b>148</b>
11.1. Стационарный и нестационарный эффекты . . . . .	149
11.2. Эквивалентная схема контакта . . . . .	151
11.3. Динамика модели . . . . .	152
11.3.1 Консервативный случай . . . . .	152
11.3.2 Диссипативный случай . . . . .	153
<b>12. Метод Ван-дер-Поля. Автоколебания и автоколебательные системы</b>	<b>158</b>
<b>13. Вынужденные колебания линейного осциллятора</b>	<b>159</b>
<b>14. Вынужденные колебания в слабонелинейных системах с од- ной степенью свободы</b>	<b>160</b>

15. Динамика укороченной системы. Отображение Пуанкаре. Режим синхронизма и его характеристики.	161
--	-----

# Раздел I

## Осенний семестр

# Глава 1.

## Введение в теорию колебаний

*Предмет и содержание теории колебаний. Динамические системы с непрерывным и дискретным временем. Фазовое пространство. Динамические системы с диссипацией. Аттракторы. Грубость (структурная устойчивость) динамических систем.*

### 1.1. Общие закономерности теории колебаний

Колебательные процессы и системы настолько широко распространены в природе, технике и обществе, что любой из нас с ними неоднократно сталкивается в повседневной жизни и, по-видимому, без труда сформулирует основные их свойства. Действительно, когда мы слышим о колебаниях температуры, курса валют, электрического напряжения, маятника, уровня воды и так далее, нам понятно, что речь идет о процессах во времени или в пространстве, обладающих той или иной степенью повторяемости и возвращаемости к начальному или близкому состояниям. Причем, эти базовые свойства процессов не зависят от природы систем и поэтому могут быть описаны и изучены с единой точки зрения в рамках общего междисциплинарного подхода. Именно такой подход и развивает теория колебаний, предметом которой являются колебательные явления и процессы в системах различной природы. Колебательные свойства реальных систем теория колебаний получает из анализа соответствующих моделей. В результате такого анализа устанавливается связь между параметрами модели и её колебательными свойствами.

Теория колебаний является как прикладной, так и фундаментальной наукой. Прикладной характер теории колебаний определяется её многочисленными приложениями в физике, механике, автоматическом управлении, ра-

диотехнике и электронике, приборостроении и т.д. В этих областях науки методами теории колебаний проведено исследование большого числа различных систем и явлений. Более того, на базе теории колебаний возникли новые технические направления – вибротехника, вибродиагностика, биомеханика и др. Фундаментальный характер теории колебаний заключен в самих моделях, которые она изучает. Это так называемые динамические системы, с помощью которых можно описать любую детерминированную эволюцию во времени или во времени и пространстве. Именно изучение динамических систем позволило теории колебаний ввести понятия и положения, развить методы и получить результаты, оказывающие большое влияние на другие естественные науки. Здесь достаточно отметить линеаризованную теорию устойчивости, понятия автоколебаний и резонанса, теорию бифуркаций, хаотические колебания и др.

## 1.2. Динамические системы

Рассмотрим систему, состояние которой определяется вектором  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ . Предположим, что эволюция системы определяется одно-параметрическим семейством операторов  $G^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (или  $t \in \mathbb{R}^+$ ) или  $t \in \mathbb{Z}$  (или  $t \in \mathbb{Z}^+$ ), таких, что состояние системы в момент  $t$

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = G^t \mathbf{x}_0,$$

где  $\mathbf{x}_0$  – начальное состояние (начальная точка). Предположим также, что эволюционные операторы удовлетворяют двум следующим свойствам, отражающим детерминистический характер описываемых процессов.

- 1)  $G^0$  – тождественный оператор, т.е.

$$\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0), \text{ для любых } \mathbf{x}_0. \quad (1.1)$$

Это свойство означает, что состояние системы не может изменяться самопроизвольно.

- 2) Второе свойство эволюционных операторов имеет вид:

$$G^{t_1+t_2} = G^{t_1} \circ G^{t_2} = G^{t_2} \circ G^{t_1}, \quad (1.2)$$

т.е.

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}(t_2, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}(t_2, \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}_0)) \quad (1.3)$$

Согласно (1.2) система приходит в одно и то же финальное состояние



независимо от того, достигается ли оно за один временной интервал  $t_1 + t_2$ , или за несколько последовательных интервалов  $t_1$  и  $t_2$ , суммарной равных  $t_1 + t_2$ .

Совокупность всех начальных точек  $X$  или всех возможных состояний системы (в рассматриваемом случае  $X = \mathbb{R}^n$ ) называется фазовым пространством, а пара  $(X, \{G^t\})$ , где семейство эволюционных операторов удовлетворяют условиям (1.2) - (1.1), – динамической системой (ДС).

ДС делятся на два важных класса – с непрерывным временем, если  $t \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{R}_+$ , и с дискретным временем, если  $t \in \mathbb{Z}$  или  $\mathbb{Z}_+$ .

Эволюция системы соответствует движению изображающей точки в фазовом пространстве вдоль траектории  $\Gamma = \bigcup_t G^t \mathbf{x}_0$ . Семейство  $\Gamma^+ = \bigcup_{t \geq 0} G^t \mathbf{x}_0$

$\left( \Gamma^- = \bigcup_{t < 0} G^t \mathbf{x}_0 \right)$  называется положительной (отрицательной) полутраекторией, проходящей через начальную точку  $\mathbf{x}_0$ . Если семейство  $\{G^t\}$  является непрерывным по  $t$  (для ДС с непрерывным временем), то траектории (полутраектории) представляют собой непрерывные кривые в  $X$ . Для ДС с дискретным временем траектории являются дискретными подмножествами в фазовом пространстве.

Введем необходимое в дальнейшем понятие инвариантности множества. Множество  $A \subset X$  называется положительно (отрицательно) инвариантным, если оно состоит из положительных полутраекторий, т.е.  $A$  - положительно (отрицательно) инвариантно, если  $G^t A \subset A, t > 0$  ( $t < 0$ ). Множество  $A$  называется инвариантным, если оно одновременно инвариантно как положительно, так и отрицательно.

### 1.2.1. Типы траекторий

Дадим определение основных типов траекторий ДС.

- Точка  $\mathbf{x}_0$  называется неподвижной точкой ДС, если  $G^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$  для всех  $t$  (для систем с непрерывным временем такие точки чаще называют состояниями или положениями равновесия).
- Точка  $\mathbf{x}_0$  называется периодической, если существует такое  $T > 0$ , что  $G^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$  и  $G^t \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_0$  для  $0 < t < T$ , а соответствующая траектория  $\bigcup_{0 \leq t \leq T} G^t \mathbf{x}_0$  динамической системы, проходящая через эту точку – периодической. Периодическая траектория является замкнутой кривой в фазовом пространстве ДС с непрерывным временем и совокупностью  $T$ -периодических точек для ДС с дискретным временем.

- Точка  $\mathbf{x}_0$  называется неблуждающей, если для любой окрестности открытого множества  $U \ni \mathbf{x}_0$  этой точки и любого  $t_0 > 0$  найдется сколь угодно большое  $t > t_0$ , такое что  $G^t U \cap U \neq \emptyset$ . Траектория, проходящая через такую точку, называется неблуждающей.

Между траекториями ДС и движениями реальных систем существует соответствие. Неподвижным точкам ДС отвечают стационарные состояния реальных систем, периодическим траекториям – периодические движения, а неблуждающим траекториям – движения с некоторым повторением их состояний во времени.

Заметис, что вышеприведенные траектории могут существовать и в ДС, у которых фазовое пространство не обязательно  $\mathbb{R}^n$ . Например, фазовым пространством динамической системы, описывающей колебания математического маятника является цилиндр  $X = S^1 \times \mathbb{R}$ , поскольку состояние маятника в любой момент времени однозначно описывается значением угловой переменной  $\varphi(t)$ , определенной с точностью до  $2\pi$  ( $\varphi \in S^1$ ) значением её скорости  $\dot{\varphi} \in \mathbb{R}$ .

### 1.2.2. Динамические системы с непрерывным временем

Для многих ДС с непрерывным временем правило, которое позволяет найти состояние в любой момент времени по начальному состоянию, задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

для которой условия существования и единственности решений выполнены (здесь и далее мы будем обозначать точкой дифференцирование по времени). В этом случае семейство  $G^t \mathbf{x}_0$  задается просто решением системы (1.4) с начальным условием  $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ . Например, для линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

где  $A$  – матрица размерности  $n \times n$  с постоянными коэффициентами, решение имеет вид  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = e^{At} \mathbf{x}_0$ , в котором  $e^{At}$  – матрица  $n \times n$ . Поскольку матрицы  $e^{A_1 t}$  и  $e^{A_2 t}$  коммутируют для любой пары  $t_1, t_2$ , то свойство (1.2):

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{A t_1} \circ e^{A t_2} = e^{A t_2} \circ e^{A t_1}$$

выполняется. Свойство (1.1) также, очевидно, выполнено.

В качестве другого примера рассмотрим систему, заданную в полярных координатах

$$\dot{\rho} = \lambda\rho, \quad \dot{\varphi} = \omega$$

Следовательно, эволюционные операторы задаются следующим образом

$$G^t : (\rho_0, \varphi_0) \rightarrow (\rho_0 e^{\lambda t}, \omega t + \varphi).$$

Очевидно, что свойства (1.1)-(1.2) выполняются.

Обратим внимание на то, что правая часть системы (1.4) явно от времени не зависит. Такие системы называются **автономными**. Существует также большое число задач (например, системы, подверженные внешнему переменному силовому воздействию), описываемых динамическими системами, правые части которых явно зависят от времени. Они называются **неавтономными**.

### 1.2.3. Динамические системы с дискретным временем

ДС с дискретным временем обычно определяют следующим образом

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(n)),$$

где  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – отображение и  $n \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  – дискретное время. Для таких систем траектория представляет собой конечную или счетную совокупность точек в  $\mathbb{R}^n$ . Иногда употребляют другую эквивалентную форму записи ДС с дискретным временем

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

где  $\bar{\mathbf{x}}$  является образом точки  $\mathbf{x}$  под действием отображения  $F$ . В настоящем курсе мы будем использовать ту и другую форму записи точечных отображений.

Поясним понятие ДС с дискретным временем на примере одномерного отображения

$$\bar{x} = 2x, \text{ mod } 1 \tag{1.5}$$

Фазовым пространством этого отображения является интервал  $[0, 1]$ . Пусть  $x(0) = 1/5$ . Непосредственно из (1.5) получим

$$x(0) = \frac{1}{5} \rightarrow x(1) = \frac{2}{5} \rightarrow x(2) = \frac{4}{5} \rightarrow x(3) = \frac{3}{5} \rightarrow x(4) = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, рассматриваемая полутраектория является периодической с

периодом 4 (рис. 1.1). На первый взгляд кажется, что при таком простом правиле точечного преобразования (1.3) временная эволюция переменной  $x(n)$  при любых начальных условиях может оказаться простой и предсказуемой. Оказывается, что это не так. Если значение  $x(0)$  известно не точно, а с некоторой точностью  $\varepsilon$ , предсказать будущее поведение  $x(n)$  не удастся. После достаточно большого числа итераций интервал  $J_\varepsilon = (x(0) - \varepsilon, x(0) + \varepsilon)$  будет покрывать всё фазовое пространство - интервал  $[0, 1]$ . Другими словами, существуют траектории, проходящие через начальные точки в  $J_\varepsilon$ , растягивающие произвольный кусок фазового пространства. Непредсказуемость вызывается здесь неустойчивость траекторий. Это феномен так называемого детерминированного хаоса, когда в детерминированной системе из-за неустойчивости траекторий возникают непредсказуемые наперед движения.

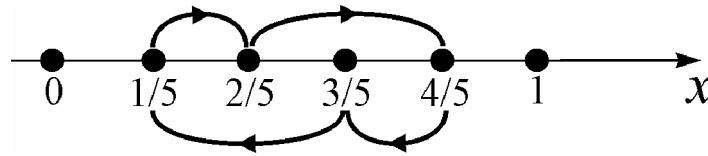


Рис. 1.1. Полутраектория системы (1.3) с начальным условием  $x(0) = 1/5$

#### 1.2.4. Динамические системы с диссипацией

Рассмотрим динамическую систему (1.4) и введем для неё понятие шара диссипации. Говорят, что гладкая поверхность  $S = \{\varphi(x) = 0\}$  будет трансверсальной к векторному полю  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , если скалярное произведение

$$(\text{grad}\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x})) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in S,$$

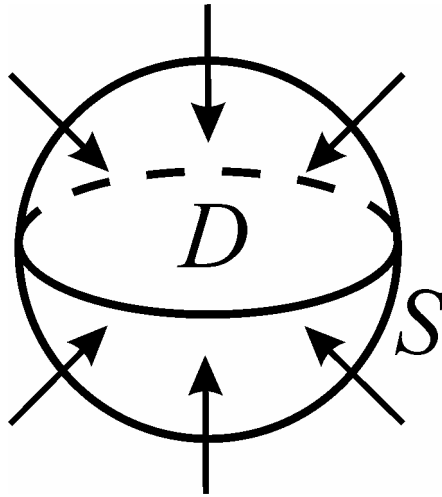
где

$$\text{grad}\varphi(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m} \right)$$

Если  $S$  топологическая сфера, т.е. граница топологического шара  $D$ , то шар  $D$  называется гаром диссипации, если

$$(\text{grad}\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x})) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in S,$$

Это означает, что векторное поле  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  на  $S$  ориентировано внутрь  $D$  (рис. 1.2). Очевидно, что траектории, входящие в  $D$ , остаются в нем навсегда. Такие динамические системы называются диссипативными. Наибольшее внимание в нашем курсе будет уделено именно таким динамическим системам, описывающим процессы в физических системах при учете различных потерь.

Рис. 1.2. Качественное представление шара диссипации  $D$ 

**Определение 1.** Система (1.4) называется диссипативной, если существует шар диссипации  $D$ , такой, что для любой начальной точки  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ :  $G^t \mathbf{x}_0 \in D$  для некоторого  $t > 0$ .

Заметим, что существуют и другие определения диссипативных систем (например, иногда требуют, чтобы  $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ ), но мы будем использовать определение 1.

При исследовании диссипативных систем важную роль играет понятие так называемой поглощающей области.

**Определение 2.** Компактная область  $D$  является поглощающей, если

$$G^t D \subset \operatorname{Int} D \text{ для } t > 0,$$

где  $\operatorname{Int} D$  – внутренняя часть  $D$ .

Например, для ДС с дискретным временем вида

$$\bar{x} = 3x(1 - x) = f(x)$$

интервал  $[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$  является поглощающей областью. Действительно, поскольку

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{25}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

то

$$f\left(\left[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right]\right) = \left[\frac{12}{25}, \frac{3}{4}\right] \subset \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

### 1.3. Аттракторы

Для систем с диссипацией очень естественно различать переходные процессы и установившиеся процессы или режимы. Базовой чертой установившегося процесса является то, что он «забывает» начальное состояние и не зависит от него. Это означает, что после конечного временного интервала, соответствующего переходному процессу, каждая положительная полутраектория попадает в малую окрестность некоторого инвариантного множества – «аттрактора» (от англ. attract – привлекать, притягивать). Существует несколько определений **аттрактора** (аттрактор Милнора, статистический аттрактор и др.). Приведем здесь одно из них, которое на наш взгляд наиболее соответствует задачам настоящего курса.

**Определение 3.** Пусть  $D$  поглощающая область динамической системы  $(G^t, X)$ , тогда множество

$$A = \bigcap_{t \geq 0} G^t D$$

называется **максимальным аттрактором** в  $D$ .

**Определение 4.** Инвариантное множество  $A$  является аттрактором, если существует поглощающая область  $D$ , для которой  $A$  – максимальный аттрактор. Ясно, что максимальный аттрактор зависит от поглощающей области, и может содержать другие аттракторы. Примерами простейших аттракторов являются устойчивые состояния равновесия и неподвижные точки.

### 1.4. Структурная устойчивость динамических систем

Очевидно, что динамическая система, описывающая поведение любой реальной системы, должна зависеть от параметров. Рассмотрим, например, систему (1.4), зависящую от некоторого набора параметров

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu), \mu \in \mathbb{R}^k, \quad (1.6)$$

где  $\mu$  – вектор параметров. Возникает вопрос: нельзя ли обойтись без методов теории колебаний и сделать необходимые нам расчеты динамики системы (1.6) напрямую, например, численно, используя современные компьютеры и численные методы? Предположим, что мы можем строить приближенно решение системы с любыми начальными условиями. Пусть мы построили какое – либо решение на некотором временном интервале. Что можно сказать о поведении всей системы, исходя из полученной информации об одном решении?

Очевидно – ничего, поскольку в реальных системах начальные условия почти всегда произвольны. Поэтому перебор даже очень большого числа начальных условий не решает полностью задачу, т.к. поведение системы при оставшихся начальных условиях остается неясным. Кроме того, задачу усложняет и то, что реальные системы зависят от параметров. Следовательно, используя численное моделирование, мы можем в лучшем случае сказать о поведении реальной системы только при некоторых значениях параметров и начальных условий.

Таким образом, для конструирования каких-либо устройств, приборов, изучения свойств реальных объектов необходимо исследовать не одно какое-либо частное решение системы, а **целый класс моделей**. Для решения этой сложной задачи в теории колебаний развивается подход, включающий следующие базовые положения:

- изучать не все траектории системы, а только избранные (в некотором смысле особенные) и находить параметры, при которых такие траектории существуют;
- поведение траекторий системы при других значениях параметров изучать, как правило, лишь **качественно**.

Очевидно, что в динамических системах, описывающих движения реальных систем, ни один из учитываемых нами факторов не может оставаться абсолютно неизменным во времени. Следовательно, динамические системы, вообще говоря, изменяются вместе с входящими в них параметрами. Однако, если эти изменения достаточно малы, то, как показывает практика, реальная система как бы не замечает этих изменений, то есть качественные черты ее поведения сохраняются. Поэтому, если мы хотим, чтобы динамическая система отображала эту особенность, нужно придать ей свойство **грубости**. Именно: при малых изменениях параметров должна оставаться неизменной качественная структура разбиения фазового пространства на траектории. Тем самым выделить класс «грубых» динамических систем. Грубость динамической системы можно трактовать как устойчивость структуры разбиения её фазового пространства на траектории по отношению к малым изменениям динамической системы. Поэтому грубые динамические системы часто называют структурно устойчивыми.

А.А. Андронов и Л.С. Потрягин (1937 г.) ввели строгое математическое определение грубости динамических систем с двумерным фазовым пространством. Приведем его здесь для системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1.7)$$

где  $P$  и  $Q$  – гладкие функции, а система (1.7) является диссипативной с шаром диссипации  $D$

**Определение 5.** Система (1.7) называется грубой (структурно устойчивой), если существует такое малое число  $\delta > 0$  так что **все** динамические системы вида

$$\dot{x} = P(x, y) + p(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) + q(x, y),$$

в которых аналитические функции  $p(x, y)$  и  $q(x, y)$  удовлетворяют неравенству

$$|p(x, y)| + |q(x, y)| + \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| < \delta,$$

имеют такую же структуру разбиения  $D$  на положительные полутраектории, что и система (1.7)

Совершенно ясно, что не при всяком изменении параметра грубость динамической системы сохраняется. Можно так поменять параметр, что произойдет принципиальное изменение фазового портрета. Переход от одной грубой динамической системы к другой происходит через негрубую динамическую систему. Значение параметра, при котором динамическая система является негрубой, называется **бифуркационным**. Требование грубости для автономных систем второго порядка, являясь естественным с точки зрения приложений, существенно упрощает возможные структуры разбиения фазовой плоскости на траектории. Каждая из этих структур определяется конечным числом особых фазовых траекторий. Что это за траектории речь пойдет ниже в курсе теории колебаний

Заметим, что прямое перенесение, приведенного выше определения грубости, на случай многомерных (размерность фазового пространства три и выше) динамических систем оказалось невозможным. Было установлено, что существуют многомерные системы, содержащие только неустойчивые траектории, а в пространстве динамических систем существуют целые области негрубых систем. Поэтому теория грубых многомерных динамических систем строится иначе, чем в двумерном случае. Мы обратимся к этому вопросу позднее.



## Глава 2.

# Динамические системы на прямой

*Качественный подход. Грубые состояния равновесия и их устойчивость. Понятие о нормальной форме. Бифуркации состояний равновесия на прямой. Системы на окружности.*

Динамические системы с одномерным фазовым пространством – системы на прямой являются простейшим видом непрерывных динамических систем с конечномерным фазовым пространством. Сами по себе такие модели описывают поведение достаточно простых реальных систем. Например, изменение заряда  $q$  в простейшем  $RC$ -контуре (рис. 2.1), содержащем конденсатор с сегнетоэлектриком (вещество с нелинейной зависимостью поляризации от приложенного электрического поля).

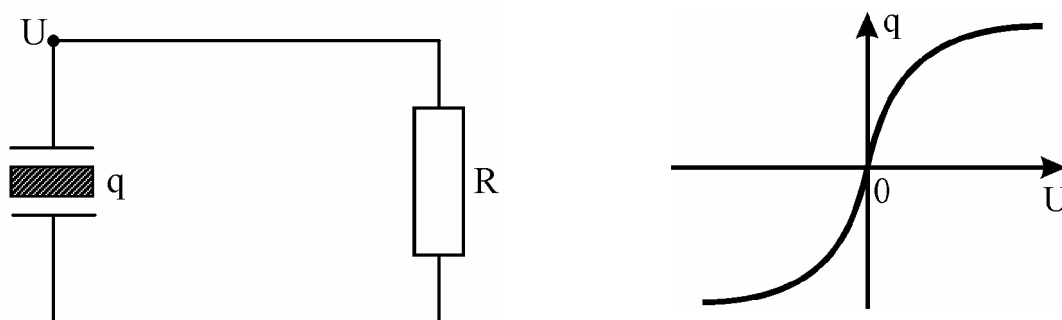


Рис. 2.1. (а)  $RC$ -контур; (б) нелинейная характеристика конденсатора с диэлектриком

Однако, с методической точки зрения эти системы чрезвычайно важны, поскольку дают наглядное и ясное представление о базовых идеях и подходах теории колебаний.

## 2.1. Качественный подход

Во многих случаях качественные (геометрические) представления о динамике нелинейных систем бывают более полезны, чем даже точное решение системы. Поясним это на простом примере. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = x - x^2 \quad (2.1)$$

Очевидно, что  $x = 0$  и  $x = 1$  являются решениями (2.1). Найдем остальные решения. Считая, что  $x \neq 0; 1$ , разделим переменные в (2.1)

$$\frac{dx}{x - x^2} = dt \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.2), получаем

$$\ln |x| - \ln |1 - x| + C = t, \quad (2.3)$$

где  $C = \text{const}$ . Рассмотрим решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию:  $x(0) = x_0$ , где  $x_0 \neq 0; 1$ . Из (2.3) находим, что этому начальному условию отвечает постоянная

$$C = \ln |1 - x_0| - \ln |x_0|$$

и соответствующее решение имеет вид

$$\ln \left| \frac{x}{x_0} \right| - \ln \left| \frac{1 - x}{1 - x_0} \right| = t \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) задает точное решение рассматриваемой задачи. Давайте попробуем получить из (2.4) ответы на следующие вопросы:

- 1) Пусть  $x_0 = \frac{1}{2}$ . Как изменяется переменная  $x(t)$  при  $t > 0$  и, в частности, какое предельное значение она принимает при  $t \rightarrow +\infty$ ?
- 2) Как ведёт себя  $x(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  при различных значениях  $x_0$ ?

Конечно, из (2.4) ответить на эти вопросы можно, но это требует некоторых дополнительных рассуждений и выкладок. Давайте теперь для ответа на эти вопросы привлечем базовое понятие теории колебаний – фазовое пространство. Для системы (2.1) фазовым пространством является числовая прямая  $\mathbb{R}^1$ . Отметим на  $\mathbb{R}^1$  значения  $x = 0$  и  $x = 1$ . В этих точках  $\dot{x} = 0$  и, следовательно, эти значения не изменяются во времени. Из (2.1) легко найти знак  $\dot{x}$  во всех интервалах прямой  $\mathbb{R}^1$ , определяемых значениями  $x = 0$

и  $x = 1$ , и тем самым установить направление движения фазовых траекторий. Отсюда, принимая во внимание структуру разбиения фазовой прямой на траектории, легко дать ответы на поставленные вопросы.

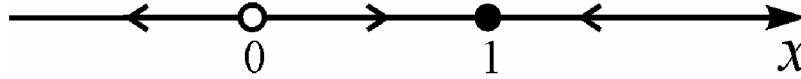


Рис. 2.2. Фазовая прямая системы (2.1)

- 1) Траектория с начальным условием  $x_0 = \frac{1}{2}$  при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически стремится к значению  $x = 1$ .
- 2) Все траектории с начальными условиями  $x_0 > 0$  ( $x_0 \neq 1$ ) при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически стремятся к значению  $x = 1$ , а при  $x_0 < 0$  переменная  $x(t)$  неограниченно убывает, т.е.  $x(t) \rightarrow -\infty$ .

Рассмотренный пример показывает, что в фазовом пространстве существуют значения  $x$ , которые остаются неизменными при любом  $t$  – это так называемые состояния равновесия (см. лекцию 1, раздел 1.2.1). С теоретической точки зрения любое состояние равновесия представляет собой классический геометрический объект – точку. В системе (2.1) к точке  $x = 1$  траектории системы асимптотически приближаются при  $t \rightarrow +\infty$  и поэтому это состояние равновесия логично называть устойчивым, а от точки  $x = 0$  траектории, наоборот, удаляются при увеличении  $t$  и его, поэтому, называют неустойчивым (строгое определение устойчивости состояний равновесия мы дадим позднее).

## 2.2. Грубые состояния равновесия

Рассмотрим динамическую систему на прямой общего вида

$$\dot{x} = F(x, \mu) = 0, \quad (2.5)$$

где  $x \in \mathbb{R}^1$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  – вектор параметров. Будем считать, что  $F(x)$  – взаимно-однозначная функция, обеспечивающая выполнение теорем существования и единственности решений. Очевидно, что состояние равновесия системы (2.5) определяются уравнением

$$F(x, \mu) = 0. \quad (2.6)$$

Пусть  $x = x^*(\mu)$  – одно из решений уравнения (2.6). Найдем условия локальной устойчивости состояния равновесия  $x^*(\mu)$ . Пусть  $\xi(t) = x - x^*(\mu)$  – малое

возмущение, тогда из системы (2.5) имеем

$$\dot{\xi} = F(x^*(\mu) + \xi, \mu) = F(x^*(\mu), \mu) + F'_x(x^*(\mu), \mu)\xi + \dots$$

или

$$\dot{\xi} = F'_x(x^*(\mu), \mu)\xi + \dots \quad (2.7)$$

Если  $F'_x(x^*(\mu), \mu) \neq 0$ , то в малой окрестности  $x = x^*(\mu)$  в (2.7) можно ограничиться лишь линейным слагаемым по  $\xi$ , т.е. вместо (2.7) рассмотреть линейное уравнение (эта процедура называется линеаризацией, рамки применения которой мы обсудим позднее) вида

$$\dot{x} = \lambda(\mu)\xi, \text{ где } \lambda(\mu) = F'_x(x^*(\mu), \mu). \quad (2.8)$$

Поскольку общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\xi(t) = Ce^{\lambda(\mu)t},$$

где  $C = \text{const}$ , то при условии  $\lambda(\mu) < 0$  возмещение  $\xi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и состояние равновесия  $x^*(\mu)$  будет устойчивым, а если  $\lambda(\mu) > 0$ , то  $\xi(t)$  растут и  $x^*(\mu)$  будет неустойчивым. Коэффициент  $\lambda(\mu)$  называется ляпуновским характеристическим показателем. Условия устойчивости допускают простую геометрическую интерпретацию. Состояние равновесия  $x^*(\mu)$  является локально устойчивым, если производная функции  $F(x, \mu)$  по точке  $x^*(\mu)$  отрицательная и неустойчиво, если  $F'_x(x^*(\mu), \mu) > 0$  (рис. 2.3)

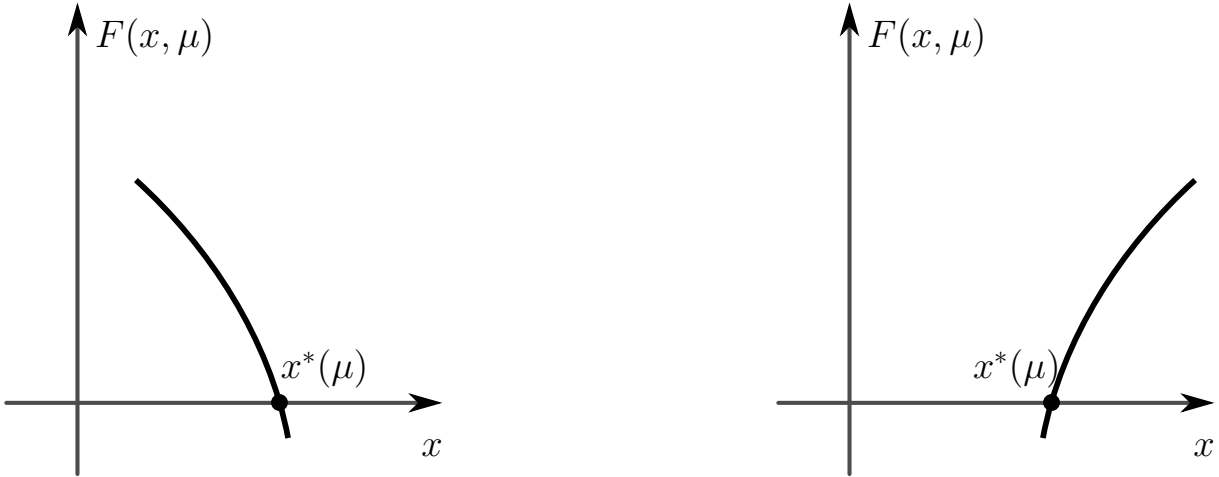


Рис. 2.3. Поведение функций  $F(x, \mu)$  в окрестности точки  $x = x^*(\mu)$  в случае устойчивого (а) и неустойчивого (б) состояний равновесия.

Ясно, что в обоих случаях малые изменения правой части системы (2.5) не могут привести к исчезновению и смене устойчивости состояния равнове-

сия  $x^*(\mu)$ . Следовательно, условие грубости состояний равновесия на прямой имеет вид  $\lambda(\mu) \neq 0$ , а бифуркационные значения параметров определяются уравнением  $\lambda(\mu^*) = 0$ . Таким образом, динамическая система (2.5) на прямой будет грубой (структурно устойчивой), если для всех состояний равновесия выполнено условие  $\lambda_i(\mu) \neq 0$ .

## 2.3. Бифуркации состояний равновесия

### 2.3.1. Двукратное равновесие

Бифуркация двукратное равновесие определяет один из базовых динамических механизмов рождения и исчезновения состояний равновесия. Рассмотрим систему следующего вида

$$\dot{x} = \mu + x^2, \quad (2.9)$$

где  $\mu \in \mathbb{R}^1$ . Анализ динамики системы (2.9) прост и представлен на рис. 2.4. Он показывает, что при  $\mu = 0$  состояние равновесия  $x = 0$  является негру-

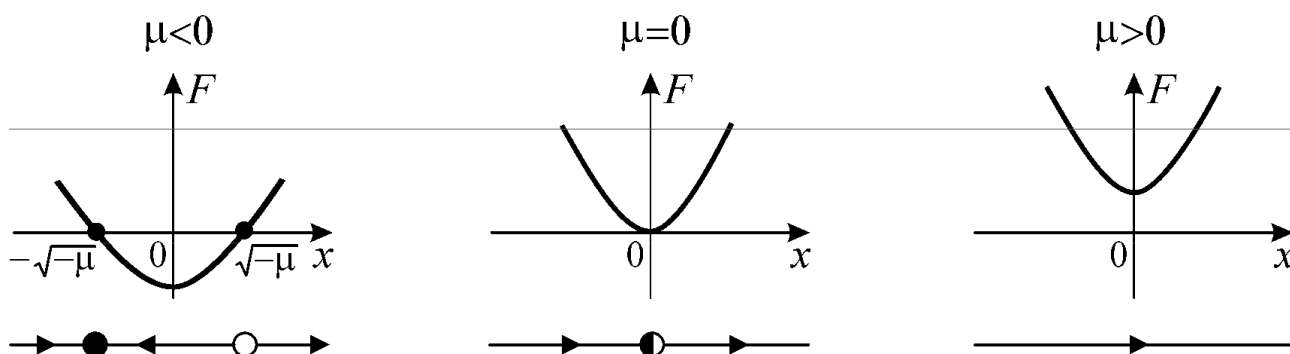


Рис. 2.4. Разбиение фазовой прямой на траектории для системы (2.9) при различных значениях параметра  $\mu$

бым, поскольку любое сколь угодно малое изменение параметра  $\mu$  приводит к принципиальному изменению структуры фазовой прямой. Такое состояние равновесия называется двукратным, так как при его разрушении на фазовой прямой появляются два грубых состояния равновесия.

Совершенно аналогично для системы

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \mu \in \mathbb{R}^1 \quad (2.10)$$

получаем разбиение фазовой прямой, представленное на рис.

Представленные на рисунках 2.5-2.4 результаты удобно представить в виде так называемых бифуркационных диаграмм, представляющих собой зависи-

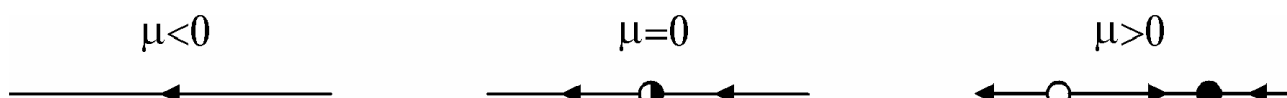


Рис. 2.5. Фазовая прямая системы (2.10) для различных значений параметра  $\mu$

мость стационарных состояний системы от параметра  $\mu$ , который принято называть контрольным параметром. Эти диаграммы для систем (2.9)-(2.10) изображены на рис.2.6а и b соответственно.

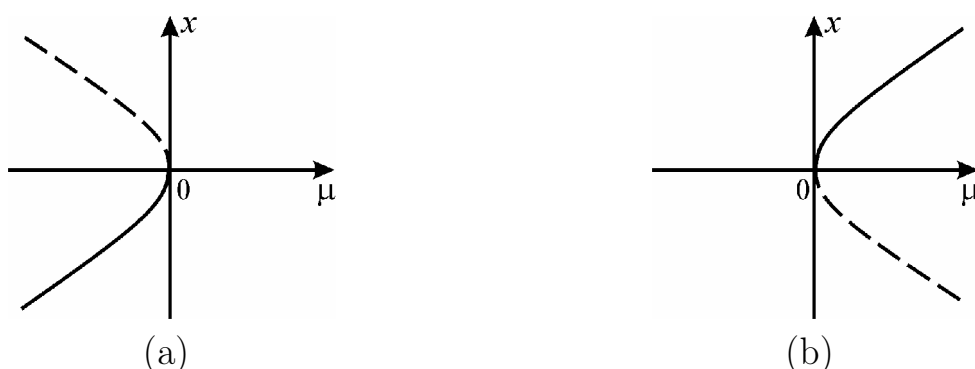


Рис. 2.6. (а) Бифуркационные диаграммы системы (2.9) и (b) системы (2.10). Пунктирной линией указана ветвь неустойчивых, а сплошной – устойчивых состояний равновесия

Таким образом, двукратное равновесия – негрубое состояние равновесия, которые при сколь угодно малом изменении параметра либо распадается на два грубых, либо исчезает.

### 2.3.2. Понятие о нормальной форме

В определенном смысле системы (2.9) и (2.10) описывают все возможные бифуркации двукратных состояний равновесия на прямой и поэтому их называют нормальной формой для этой бифуркации. Другими словами, если какая-либо система прямой имеет двукратное равновесие, то в окрестности этой точки поведение системы можно описать с помощью уравнения (2.9) или (2.10). Действительно, пусть при  $\mu = \mu_0$  система (2.5) имеет двукратное равновесия  $x = x_0$ . Раскладывая правую часть (2.5) в ряд Тейлора, получим

$$\dot{x} = F(x, \mu) = F(x_0, \mu_0) + (x - x_0) \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x_0, \mu_0)} + (\mu - \mu_0) \left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{(x_0, \mu_0)} + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{(x_0, \mu_0)} + \dots \quad (2.11)$$

Поскольку

$$F(x_0, \mu_0) = 0, \quad \lambda(\mu_0) = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, \mu_0} = 0,$$

то (2.11) можно переписать в следующем виде

$$\dot{x} = a(\mu - \mu_0) + b(x - x_0)^2 + \dots, \quad (2.12)$$

где  $a = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(x_0, \mu_0)}$ ,  $b = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{(x_0, \mu_0)}$ . Очевидно, что уравнение (2.12) путем введения новых переменных и параметра принимает вид (2.9) или (2.10).

### 2.3.3. Транскритическая бифуркация

Существует значительное число задач, в которых число состояний равновесия при изменении параметров сохраняется, но их устойчивость меняется. Такая бифуркация носит название транскритической или смены устойчивости состояния равновесия. Нормальная форма для транскритической бифуркации задается уравнением

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (2.13)$$

или уравнением

$$\dot{x} = \mu x + x^2 \quad (2.14)$$

Динамика уравнений (2.13), (2.14) в зависимости от управляющего параметра  $\mu$  представлена на рис.2.7а и 2.7b соответственно

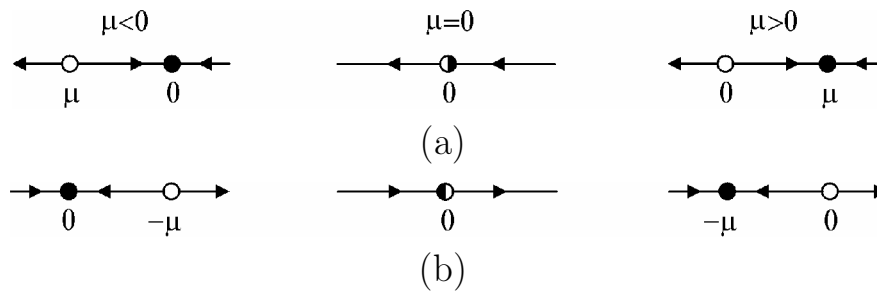


Рис. 2.7. Разбиение фазовой прямой на траектории для системы (2.13) и (2.14) соответственно

Принимая во внимание результаты представленные на рис.2.7, устанавливаем вид бифуркационных диаграмм для систем (2.13) и (2.14) (см. рис.2.8)

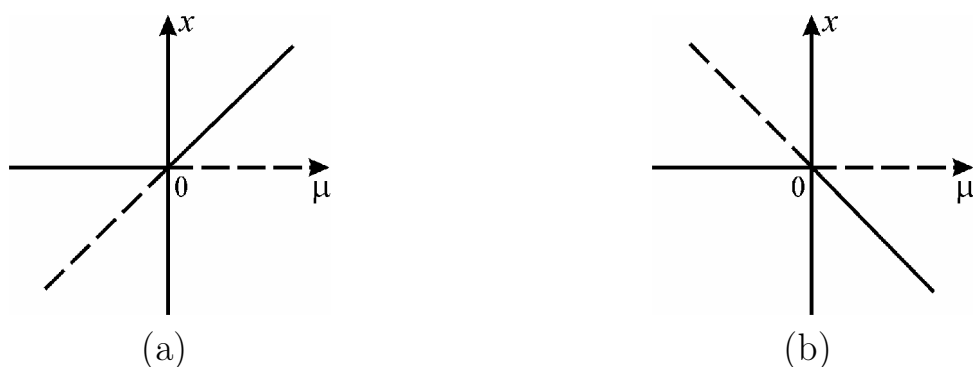


Рис. 2.8. Бифуркационные диаграммы системы (2.13) (a) и системы (2.14) (b). Ветвь устойчивых состояний равновесия отмечена сплошной линией, а неустойчивых – пунктирной.

### 2.3.4. Трехкратное равновесие

Эта бифуркация типична для систем, обладающих симметрией. Например, многие физические задачи имеют пространственную симметрию между левым и правым направлениями. В таких системах состояния равновесия рождаются и исчезают парами. Нормальная форма бифуркации трехкратное равновесие определяется уравнениями

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad (2.15)$$

$$\dot{x} = \mu x + x^3. \quad (2.16)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (2.15) и (2.16) инвариантны относительно преобразования  $x \rightarrow -x$ . Исследование динамики уравнения (2.15) представлено на рис.2.9.

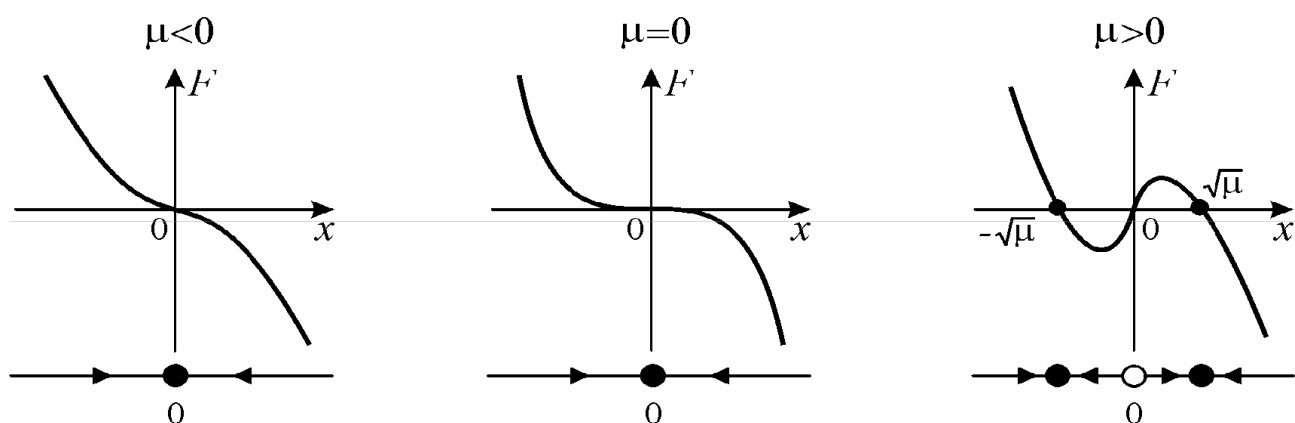


Рис. 2.9. Разбиение фазовой прямой на траектории для системы (2.15) при различных значениях параметра  $\mu$

Обратим внимание на то, что в момент бифуркации, т.е. при  $\mu = 0$ , ляпу-



новый характеристический показатель  $\lambda(0) = 0$ , а само состояние равновесия, несмотря на это является устойчивым. Исследование уравнения (2.16) проводится аналогично предыдущему и мы предлагаем читателю провести его самостоятельно. Представим здесь лишь соответствующую бифуркационную диаграмму (см.рис. 2.10b).

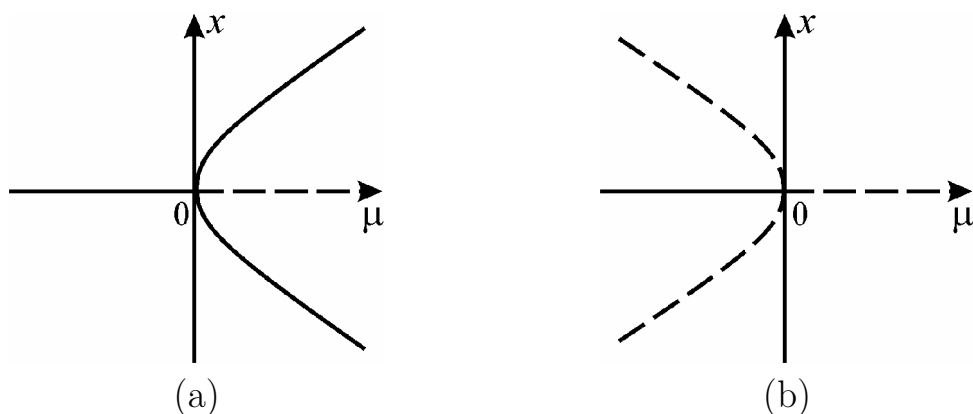


Рис. 2.10. Бифуркационные диаграммы системы (2.15)(a) и системы (2.16)(b). Ветвь устойчивых состояний равновесия отмечена сплошной линией, а неустойчивых – пунктирной.

## 2.4. Система на окружности

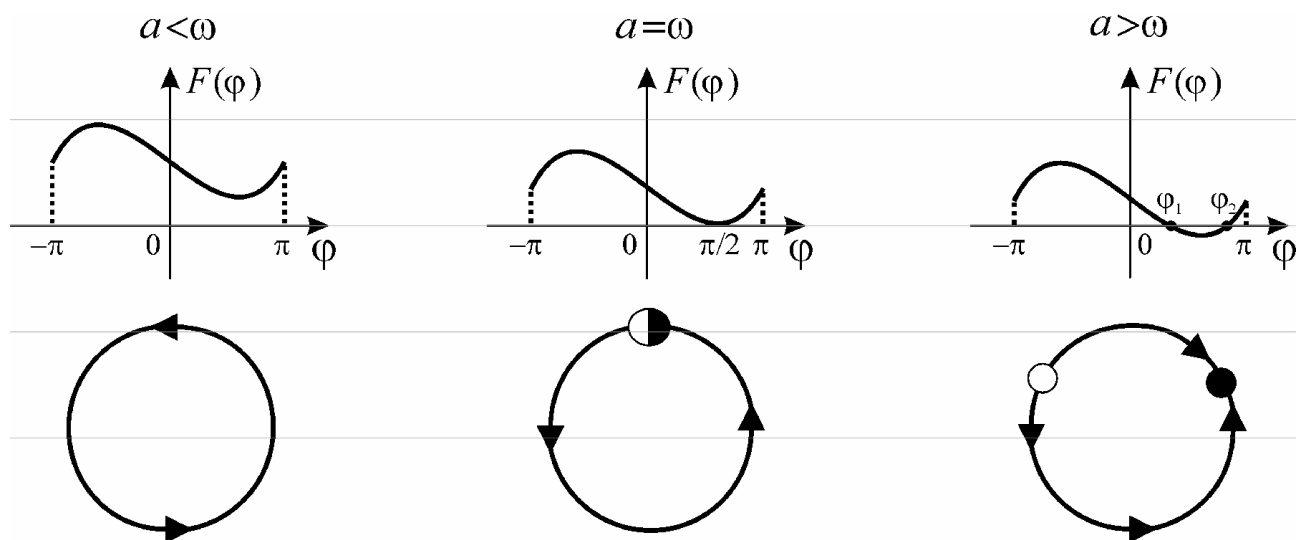


Рис. 2.11. Разбиение окружности  $S_1$  на траектории для различных значений параметра  $a$ .

Рассмотрим уравнение первого порядка следующего вида

$$\dot{\varphi} = F(\varphi), \text{ где } F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi) \quad (2.17)$$

Уравнения такого вида возникают при описании динамики реальных систем, у которых переменная состояния изменяется циклически. Например, простейшая безфильтровая система фазовой автоподстройки (см. лекцию 4, уравнение (??)) описывается уравнением  $\dot{\varphi} + \sin \varphi = \gamma$ . В силу периодичности правой части (2.17) по  $\varphi$  её фазовым пространством является окружностью  $S^1$ . Поясним основные свойства таких систем на следующем примере. Рассмотрим уравнение

$$\dot{\varphi} = \omega - a \sin \varphi, \quad (2.18)$$

где  $a$  и  $\omega$  – параметры,  $a \geq 0$ ,  $\omega = 0$ . При  $a = 0$  общее решение уравнения (2.17) имеет вид

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \varphi_0 = \text{const}$$

и описывает равномерное вращение изображающей точки по окружности  $S^1$ . Исследование системы (2.18) образует двукратное равновесие, которое при изменении параметров либо распадается на два грубых ( $a > \omega$ ) либо исчезает ( $a < \omega$ ) в (2.18) происходят вращательные движения, однако эти движения, однако эти движения неравномерны, поскольку скорость  $\dot{\varphi}$  не является постоянной (наибольшая скорость достигается при  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , а минимальная при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ). При  $a > \omega$  на окружности  $S^1$  существует два грубых состояния равновесия:  $\varphi = \varphi_1 = \arcsin(\omega/a)$  и  $\varphi = \varphi_2 = \pi - \arcsin(\omega/a)$ . Состояние равновесия  $\varphi = \varphi_1$  – устойчивое, а  $\varphi = \varphi_2$  – неустойчивое.

## Глава 3.

# Устойчивость состояний равновесия. Классификация состояний равновесия двумерных линейных систем

*Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Нормальные формы уравнений грубых состояний равновесия на плоскости. Бифуркационная двухпараметрическая диаграмма состояний равновесия на плоскости.*

На предыдущей лекции мы познакомились со свойствами динамических систем на прямой. Было показано, что поведение таких систем определяется также состояниями равновесия и выбором начальных условия. Состояния равновесия также играют чрезвычайно важную роль и в динамике многомерных систем, поскольку они описывают стационарные состояния реальных систем. Важнейшим свойством состояний равновесия является их устойчивость. Термин «устойчивость» настолько широко распространён не только в научной литературе, но и в повседневной жизни, что его смысл интуитивно ясен даже людям далёким от науки. Например, вот такое определение «устойчивый» дается в словаре русского языка С.И.Ожегова:

- 1) Стоящий твёрдо, не колеблясь, не падая.
- 2) Не поддающийся, не подверженный колебаниям, стойкий, твёрдый

Хотя, конечно, с физико-математической точки зрения, это определение нельзя назвать строгим, одна из важнейших и типичных характеристик устойчивости в нём содержится. Именно – сохранение исходного состояния системы

при некоторых отклонениях (возмущениях). Однако, лишь одной этой характеристики недостаточно для построения строгого определения устойчивости, приемлемого для широкого круга практических задач. Свойство возвращаемости системы в исходное состояние является слишком строгим и оставляет «за бортом» широкий класс систем, для которых характерно более слабое проявление устойчивости – сохранения своего положения в малой окрестности исходного состояния. Действительно, рассмотрим поведение массивного шарика в желобе, состоящем из двух ямок (рис. 3). Очевидно, что в этой системе возможно существование трёх состояний равновесия:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . При

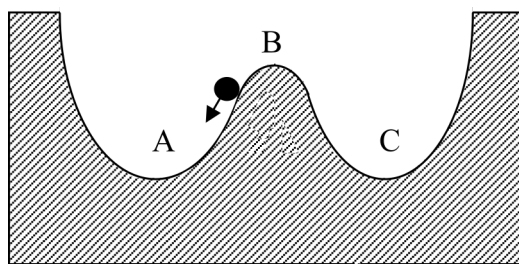


Рис. 3.1. Колебания массивного шарика в желобе.

сколь угодно малых отклонениях шарика от точки  $B$ , он начинает двигаться и покидает окрестность этой точки. Поэтому вполне логичным было бы назвать такое состояние равновесия неустойчивым. Совершенно иначе ведёт себя шарик, если изначально он покоился в точке  $A$  или  $C$ . Получив начальное отклонение, шарик начнёт двигаться с уменьшающейся за счёт трения скоростью и придёт в одно из этих состояний равновесия. Причём, в зависимости от величины отклонения шарик может сохранить своё начальное состояние равновесия, а может изменить его на противоположное. Следовательно, состояние равновесия может быть устойчивым по отношению к одним отклонениям и в тоже время быть неустойчивым по отношению к другим. Предположим теперь, что трение в жёлобе пренебрежимо мало. Как известно, в этом случае при малых отклонениях от точек  $A$  и  $C$  шарик будет совершать периодические колебания в их окрестности. Поскольку эти колебания происходят в окрестности точек  $A$  и  $C$ , состояние системы существенно не меняется и такое поведение шарика можно отнести к устойчивому. Как мы увидим ниже, отмеченные выше свойства состояний равновесия являются общими и лежат в основе строгого определения устойчивости состояний равновесия.

Основы теории устойчивости были заложены в работах великого русского математика и механика А.М. Ляпунова. В 1892 году в Харькове он представил к защите докторскую диссертацию, которая была опубликована год спустя. Идеи и подходы, заложенные в этой работе, оказались настолько плодотворными, что до сих пор являются актуальными и востребованными. Изложим положения определения теории устойчивости, принадлежащие Ляпунову.

### 3.1. Определение устойчивости состояний равновесия

Рассмотри автономную динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

Как мы уже знаем (см. лекцию 2), состояние равновесия определяется из условия равенства нулю всех производных по времени. Следовательно, состояние равновесия системы (3.1) являются решениями следующей системы

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.2)$$

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  — одно из решений системы (3.2). Для оценки близости состояния равновесия и накладываемых на систему возмущений (отклонений) введём в фазовом пространстве системы (3.1) норму. В качестве нормы мы будем использовать евклидову длину вектора, т.е.

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Не останавливаясь здесь подробно, отметим лишь, что существуют и другие способы задания нормы. При этом сходимость в одной из норм автоматически означает сходимость и в смысле других норм.

**Определение 6.** Состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  системы (3.1) называется устойчивым (в смысле Ляпунова), если для такого  $\varepsilon > 0$  (как бы мало оно ни было) можно указать  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta \quad (3.3)$$

следует неравенство

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad (3.4)$$

при  $t \geq t_0$ .

Если же найти такой  $\delta$  невозможно, состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  называется неустойчивым. Заметим, что из условий (3.3) и (3.4) следует, что всегда можно выбрать число  $\delta$  из условия  $\delta \leq \varepsilon$ , а число  $\varepsilon$  задает область допустимых возмущений (отклонений).

**Определение 7.** Состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  системы (3.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и для всех решений  $\mathbf{x}(t)$  системы (3.1), удовлетворяющих условию (3.3), выполняется

равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0$$

Рис. 7 иллюстрирует определения 6 и 7. Устойчивость по Ляпунову состояния равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  означает, что достаточно близкие к нему в любой начальный момент  $t = t_0$  решения  $\mathbf{x}(t)$  целиком останутся в сколь угодно узкой  $\varepsilon$ -трубке около значения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  (рис. 7a). В фазовом пространстве устойчивость по Ляпунову, в выбранной нами норме, означает, что любая траектория системы (3.1) с начальными условиями внутри сферы радиуса  $\varepsilon$  (рис. 7b) ни при каких  $t > t_0$  не достигает сферы радиуса  $\varepsilon$ . В случае асимптотической устойчивости, кроме того, требуется стремление траекторий к состоянию равновесия (рис. 7c)

Из определения 7 следует, что асимптотическая устойчивость состояний равновесия зависит от величины начальных возмущений. В связи с этим различают устойчивость в **малом**, в **большом** и в **целом**. Состояние равновесия называется асимптотически устойчивым в целом, если определение 7 выполняется при любых начальных условиях. Если же определение 7 выполняется для начальных условий из некоторой ограниченной области, то состояние равновесия, то состояние равновесия называется асимптотически устойчивым в большом (в этой области). Наконец, если определение 7 справедливо для начальных возмущений из сколь угодно малой окрестности состояния равновесия, что оно называется асимптотически устойчивым в малом. Для систем, у которых одновременно существует несколько состояний равновесия, существует понятие **глобальной асимптотической устойчивости**. Система называется глобально асимптотически устойчивой, если каждая её траектория асимптотически стремится к какому-либо состоянию равновесия.

## 3.2. Классификация состояний равновесия линейных систем на плоскости

Рассмотрим произвольную линейную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2, \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $a, b, c$  и  $d$  – некоторые параметры. Для удобства изложения простим (3.5) также в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

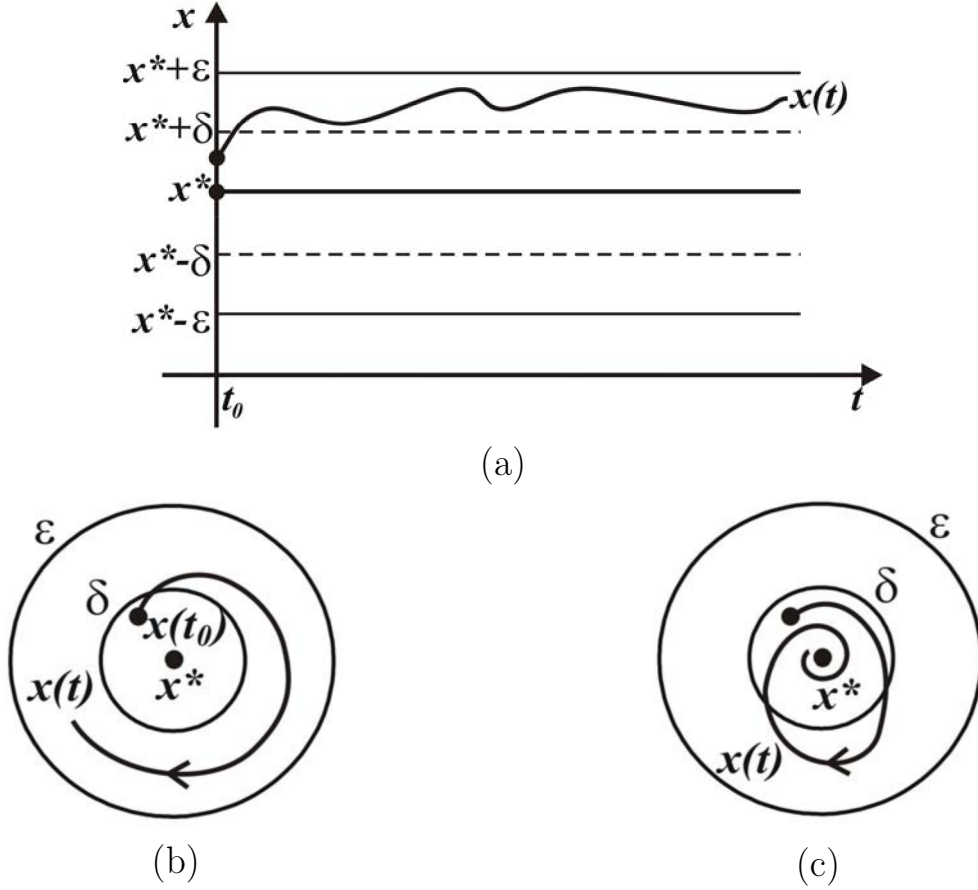


Рис. 3.2. Качественное представление эволюции во времени переменной  $x(t)$  в фазовом пространстве в случае устойчивости по Ляпунову (a); примеры поведения траектории  $x(t)$  в фазовом пространстве в случае устойчивости по Ляпунову (b) и в случае асимптотической устойчивости состояния равновесия  $x^*$  (c)

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Предположим, что  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , тогда система (3.5) имеет единственное состояние равновесия  $O(x_1 = x_2 = 0)$ . Будем искать решение системы (3.5) в виде

$$x_i = C_i e^{\lambda t}, \quad i = 1, 2 \quad (3.6)$$

где  $C_i$  – произвольные константы. Подставляя (3.6) в систему (3.5) получим систему линейных однородных уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ , которая имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю, т.е.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (3.7)$$

Это уравнение называется характеристическим. Обозначим через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  корни уравнения (3.7). Рассмотрим поведение фазовых траекторий системы (3.5) для различных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

### 3.2.1. Действительные корни

Предположим, что уравнение (3.7) имеет действительные корни, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_{12} \neq 0. \quad (3.8)$$

Покажем, что при этих условиях система (3.5) с помощью взаимоднозначного преобразования координат может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Система (3.9) называется нормальной формой уравнений для грубых состояний равновесия линейных двумерных систем. Как мы убедимся ниже, исследование фазовой плоскости системы (3.9) представляет собой значительно более простую задачу, чем исследование фазовой плоскости исходной системы (3.5).

Введем в (3.5) новые переменные

$$\begin{cases} u_1 = h_{11}x_1 + h_{12}x_2, \\ u_2 = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 \end{cases}, \quad (3.10)$$

где  $h_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) – некоторые, пока неопределенные, коэффициенты. Из (3.10) и первого уравнения системы (3.5) имеем

$$\dot{u}_1 = h_{11}\dot{x}_1 + h_{12}\dot{x}_2 = (h_{11}a + h_{12}c)x_1 + (h_{11}b + h_{12}d)x_2. \quad (3.11)$$

С другой стороны, из системы (3.9)

$$\dot{u}_1 = \lambda_1(h_{11}x_1 + h_{12}x_2). \quad (3.12)$$

Приравнявая коэффициенты при переменных  $x_1$  и  $x_2$  в (3.11) и (3.12), найдем системы для определения  $h_{i,k}$

$$\begin{cases} h_{11}(a - \lambda_1) + h_{12}c = 0, \\ h_{11}b + h_{12}(d - \lambda_1) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$



Система (3.13) – система однородных линейных уравнений относительно  $h_{11}$  и  $h_{12}$ . Определитель этой системы равен нулю и, следовательно, система (3.13) имеет нетривиальное решение

$$\begin{aligned} h_{11} &= p, \quad h_{12} = -p \frac{a - \lambda_1}{c}, \quad \text{если } c \neq 0, \\ h_{11} &= p, \quad h_{12} = -\frac{dp}{d - a}, \quad \text{если } c = 0, d \neq 0, \end{aligned}$$

где  $p = \text{const}$ . Совершенно аналогично устанавливается вид остальных коэффициентов, преобразования (3.10)

$$\begin{aligned} h_{21} &= q, \quad h_{22} = -\frac{q(a - \lambda_2)}{c}, \quad \text{если } c \neq 0 \\ h_{21} &= 0, \quad h_{22} = q, \quad \text{если } c = 0, d \neq a, \end{aligned}$$

где  $q = \text{const}$ . Пусть для определённости  $p = q = 1$ . В этом случае искомое преобразование системы (3.5) к виду (3.9) имеет следующий вид

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - \frac{a - \lambda_1}{c} x_2 \\ u_2 = x_1 - \frac{a - \lambda_2}{c} x_2 \end{cases}, \quad \text{если } c \neq 0$$

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - \frac{b}{d - a} x_2 \\ u_2 = x_2 \end{cases}, \quad \text{если } c = 0, d \neq a. \quad (3.14)$$

Рассмотрим теперь поведение траектории системы (3.9) на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  и на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  исходной системы (3.5) для различных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

### Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ одного знака

Прежде всего заметим, что в этой случае систему (3.8) легко проинтегрировать (предлагаем читателям проделать это самостоятельно) и получить явный вид интегральных кривых, которые задаются следующим образом

$$u_2 = C(u_1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad C = \text{const}$$

Для определенности будем считать, что  $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ . В этом случае отношение  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$  и, следовательно, все интегральные кривые системы (3.9), за исключением осей координат, на фазовой плоскости имеют вид «парабол», касающихся оси  $u_2 = 0$  в начале координат. При этом на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  ось абсцисс и ось ординат являются интегральными кривыми системы (3.9).

**Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – отрицательные.** Непосредственно (3.9) вытекает, что при таких значениях корней вдоль интегральных кривых переменные  $u_1, u_2$  убывают и, следовательно, на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  (рис. 3.3). Такое состояние равновесия называется **устойчивым узлом**. Заметим, что устойчивый узел является асимптотически устойчивым состоянием равновесия (см. определение 7). Поскольку все траектории системы (3.9) с начальными условиями, не лежащими на осях координат, касаются оси абсцисс, эту ось называют **ведущим** направлением узла. Вернёмся теперь к системе (3.5) и

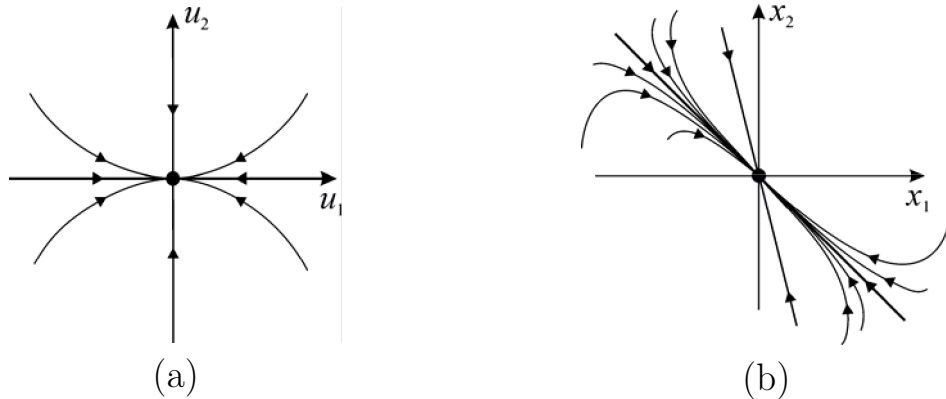


Рис. 3.3. Состояние равновесия устойчивый узел: на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  (a); на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  (b).

рассмотрим поведение траекторий на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$ . Из (3.14) следует, что ведущее и неведущее направление узла на плоскости  $(x_1, x_2)$ , вообще говоря, не совпадают с координатными осями. Принимая этот во внимание, получаем качественный вид траекторий представленный на рис.3.3b.

**Корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – положительные.** Этот случай без труда сводится к предыдущему путём обращения времени  $t \rightarrow -t$ , тот есть путём изменения движения на траекториях на противоположное. В результате получается состояние равновесия, которое называется **неустойчивым узлом** (рис. 3.4).

### Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ разного знака

Пусть для определенности  $\lambda_1 > 0$ , а  $\lambda_2 < 0$ . Перепишем для удобства уравнение интегральных кривых (3.14) в следующем виде

$$u_2(u_1)^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \text{const} \quad (3.15)$$

Поскольку в (3.15) отношение  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$  все интегральные кривые системы (3.9), за исключением осей координат, являются кривыми гиперболического

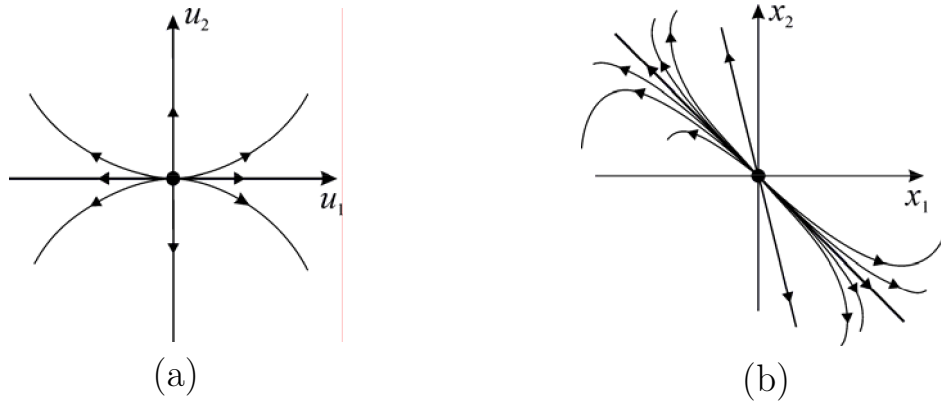


Рис. 3.4. Состояние равновесия неустойчивый узел: на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  (a); на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  (b).

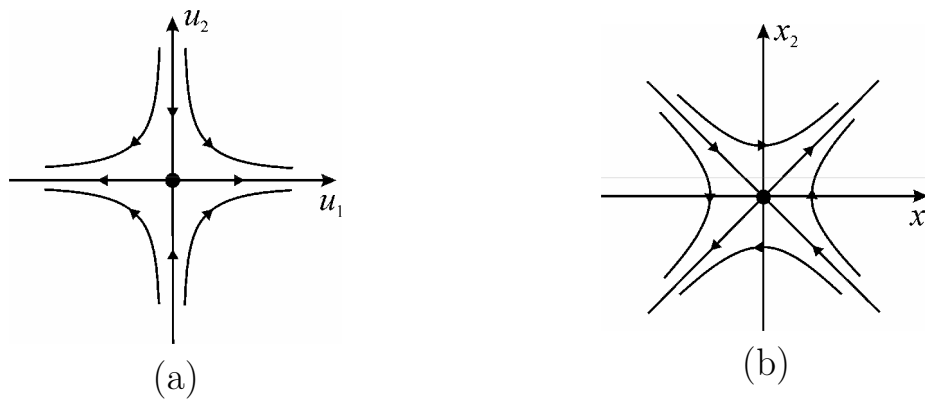


Рис. 3.5. Качественный вид состояния равновесия седло: на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  (a); на фазовой плоскости  $x_1, x_2$  (b).

типа, которые проходят мимо состояния равновесия (рис. 3.5a). Существуют четыре исключительные траектории, лежащие на координатных полуосях. Две из этих траекторий асимптотически приближаются, а две другие, наоборот, отходят от состояния равновесия. Такое состояние равновесия называется седлом (рис.3.5), приближающиеся к нему траектории – **устойчивыми сепаратрисами**, а отходящие от него траектории – **неустойчивыми сепаратрисами**. Как мы увидим в дальнейшем, роль сепаратрис в динамике очень многих систем чрезвычайно важна. На фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  сепаратрисы седла имеют вид прямых, угловые коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  которые можно найти из (3.14) положив в эти уравнения  $u_2 = 0$  и  $u_1 = 0$ . Они задаются следующим образом

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{a - \lambda_1}{c}, \quad k_2 = \frac{a - \lambda_2}{c}, \quad \text{если } c \neq 0, \\ k_1 &= \frac{d - a}{b}, \quad k_2 = 0, \quad \text{если } c = 0, d \neq a. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Выражая из (3.16)  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  через угловые коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  и подставляя эти выражения в характеристическое уравнение (3.7), нетрудно получить, что  $k_1$  и  $k_2$  являются корнями уравнения

$$bk^2 + (a - d)k - c = 0.$$

### Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ кратные - $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Не останавливаясь подробно на этом случае, отметим лишь, что нормальная форма уравнений такого состояния равновесия может быть двух видов – либо (3.9) с  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , либо

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda u_1 + u_2, \\ \dot{u}_2 = \lambda u_2. \end{cases}$$

В первом случае состояние равновесия называется **дикритическим узлом** (устойчивым, если  $\lambda < 0$  и неустойчивым, если  $\lambda > 0$ ). Любая траектория приближается (рис.3.2.1a) или отходит от дикритического узла по своему собственному направлению. Во втором случае состояние равновесия называется **вырожденным узлом**, который также может быть либо устойчивым ( $\lambda < 0$ ), либо неустойчивым ( $\lambda > 0$ ). У вырожденного узла имеется только ведущее направление, которого касаются все остальные траектории (рис.3.2.1b).

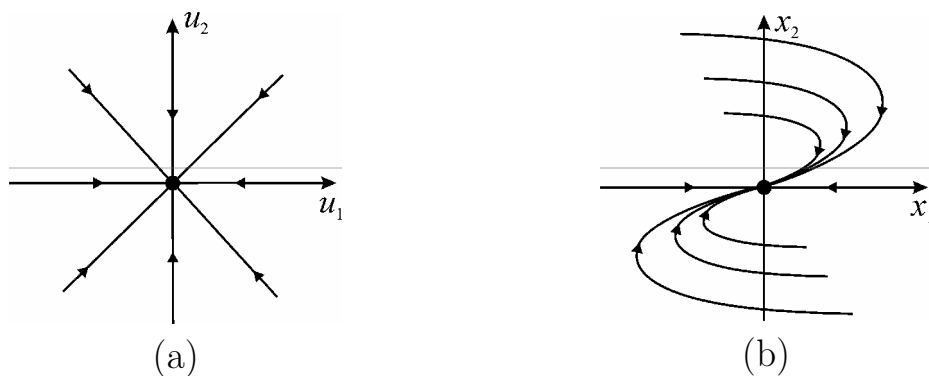


Рис. 3.6. Устойчивый дикритический узел (a); устойчивый вырожденный узел (b)

### 3.2.2. Комплексные корни

Пусть характеристическое уравнение (3.7) имеет комплексно-сопряженные корни –  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ . Заметим, что при переходе от системы (3.5) к системе (3.9) с помощью преобразования (3.10) мы нигде не использовали предположение о действительности корней. Поэтому это преобразование (с комплексно-

сопряженными коэффициентами) и система (3.9) справедливы и в случае комплексно-сопряженных корней. Однако, в этом случае переменные  $u_1$  и  $u_2$  являются комплексными

$$u_1 = u + i\nu, \quad u_2 = u - i\nu. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в систему (3.9) и разделяя действительные и мнимые части полученных уравнений, приходим к следующей системе нормальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha u - \beta \nu, \\ \dot{\nu} = \beta u - \alpha \nu. \end{cases} \quad (3.18)$$

Перейдем в системе (3.18) к полярным координатам  $\rho$  и  $\varphi$

$$u_1 = \rho \cos \varphi, \quad u_2 = \rho \sin \varphi \quad (3.19)$$

С помощью этой замены переменных система (3.18) преобразуется (предлагаем читателям проделать это самостоятельно) к следующему эквивалентному виду

$$\dot{\rho} = \alpha \rho, \quad \dot{\varphi} = \beta. \quad (3.20)$$

Из (3.20) легко получить явный вид интегральных кривых

$$\rho = C e^{\frac{\alpha}{\beta} \varphi}, \quad C = \text{const}. \quad (3.21)$$

В силу (3.21) при  $\alpha \neq 0$  любая, за исключением самого состояния равновесия, интегральная кривая на плоскости  $(u_1, u_2)$  имеет вид логарифмической спирали с центром в состоянии равновесия, которая сохраняет эту форму и на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  интегральные кривые фокуса также имеют вид спиралей с центром в состоянии равновесия.

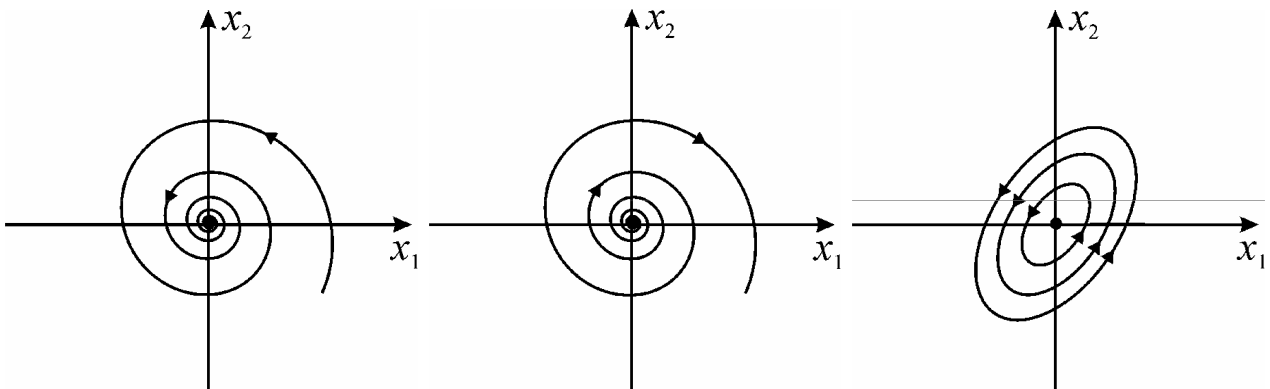


Рис. 3.7. Устойчивый фокус (а); неустойчивый фокус (б); центр (с).

Из первого уравнения в (3.20) следует, что при  $\alpha < 0$  переменная  $\rho$  монотонно убывает к нулю. Следовательно, в этом случае фазовые траекто-

рии асимптотически при  $t \rightarrow \infty$  приближаются к состоянию равновесия. Такое состояние равновесия является асимптотически устойчивым и называется **устойчивым фокусом** (рис.3.2.2а). Наоборот, если  $\alpha > 0$  переменная  $\rho$  неограниченно растёт и, следовательно, фазовые траектории удаляются от состояния равновесия (рис.3.2.2б). Это состояние равновесия называется **неустойчивым фокусом**. Заметим, что с топологической точки зрения фокус эквивалентен узлу соответствующей устойчивости, поскольку с помощью взаимнооднозначного преобразования траектории одного из них могут быть переведены в траектории другого с сохранением ориентации. Несмотря на это, в многих задачах их следует различать, поскольку они определяют различные колебательные процессы. При  $\alpha = 0$  переменная  $\rho$  в (3.19) не меняется и, следовательно, любая нетривиальная траектории на плоскости  $(u_1, u_2)$  имеет вид окружности с центром в состоянии равновесия. Такое состояние называется **центром**. На фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  траектории могут и не совпадать с координатными осями (рис.3.2.2с). Центр устойчив по Ляпунову, но не асимптотически.

### 3.2.3. Колебания двумерных линейных систем

Как мы установили выше, разбиение фазовой плоскости на траектории двумерных линейных систем определяются состояниями равновесия. Поэтому возможные в таких системах колебательные процессы полностью определяется типом состояния равновесия. Ниже в таблице 3.1 дана классификация этих процессов и представлен их качественный вид. Принципиально другую, чем представленные в таблице состояния равновесия, роль играет в двумерных линейных системах седло – устойчивые сепаратрисы седла разделяют неограниченно нарастающие движения на две группы, имеющие различное предельное поведение (см., например, рис.3.5б).

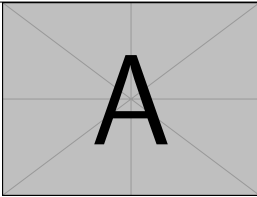
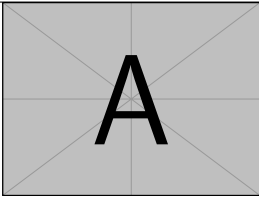
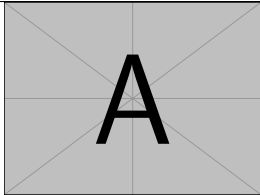
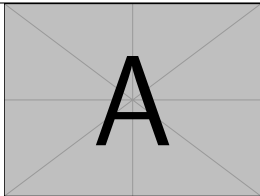
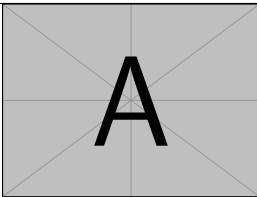
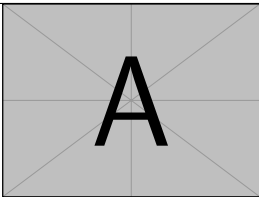
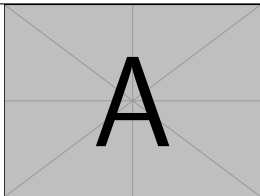
### 3.2.4. Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма

Как правило, в практических задачах коэффициента  $a, b, c$  и  $d$  системы (3.5) зависят от параметров, которые могут изменяться. Это изменение может вызвать смену типа состояния равновесия. Рассмотрим, как это может произойти в случае двух параметров, которые введем следующим образом

$$\mu_1 = (a + d), \quad m_2 = \det A$$

В этих обозначениях характеристическое уравнение (3.7) перепишется в

Таблица 3.1. Классификация колебательных процессов

Состояние равновесия	Колебательный процесс	
Устойчивый узел		
Устойчивый фокус		
Центр		
Неустойчивый узел		
Неустойчивый фокус		

следующем виде

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0 \quad (3.22)$$

Анализируя значение корней уравнения (3.22) в зависимости от параметров  $\mu_1, \mu_2$ , устанавливаем вид разбиения плоскости  $(\mu_1, \mu_2)$  на области, соответствующие различным типам состояний равновесия системы (3.5). Разбиение осуществляется двумя бифуркационными прямыми  $-B_1 = \{\mu_2 = 0, \mu_1 \in \mathbb{R}\}$ ,  $B_2 = \{\mu_1 = 0, \mu_2 > 0\}$  и параболой  $\{\mu_2 = \frac{\mu_1^2}{4}, \mu_1 \neq 0\}$ , отделяющей узлы фокусов и не являющейся бифуркационной, поскольку эти состояния равновесия топологически эквивалентны. На прямой  $B_2$  происходит смена устойчивости фокуса через образование центра, а на прямой  $B_1$  уравнение (3.22) имеет либо один, если  $\mu_1 \neq 0$ , либо два нулевых корня, если  $\mu_1 = 0$ . Исследуем поведение траекторий системы (3.5) для точек прямой  $B_1$ . Сделаем в (3.5) замену

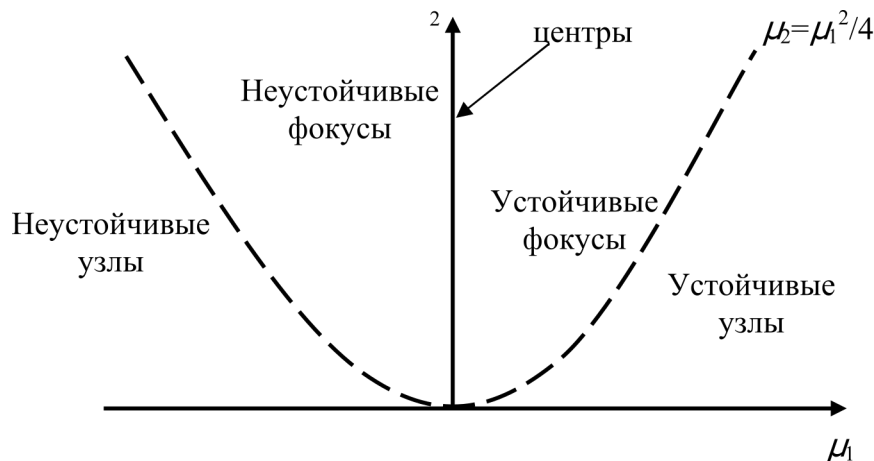


Рис. 3.8. Разбиение плоскости  $(\mu_1, \mu_2)$  на области, соответствующие различным типам состояний равновесия.

переменной  $x_2$  :

$$y = ax_1 + bx_2,$$

с помощью которой эта система преобразуется к виду

$$\dot{x}_1 = y, \quad \dot{y} = -\mu_1 y \quad (3.23)$$

Из (3.23) следует, что  $y = 0$  является линией состояний равновесия, а все остальные траектории имеют вид прямых

$$y = -\mu_1 x + C, \quad C = \text{const}$$

Принимая во внимание эти свойства траекторий, устанавливаем портреты системы (3.23), представленные на рис.3.2.4.

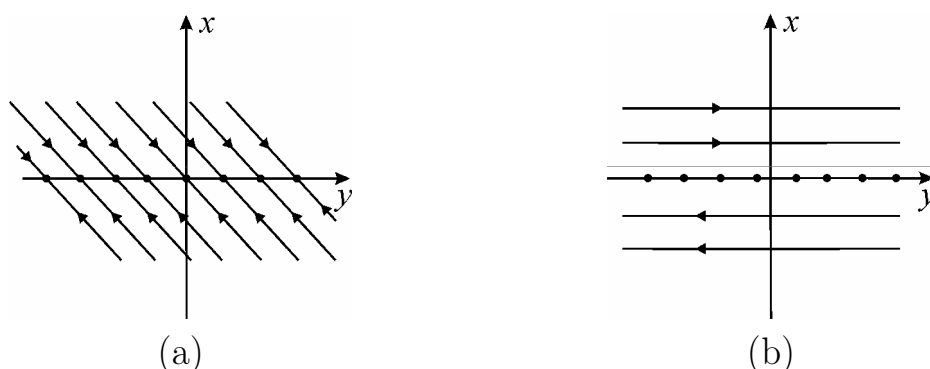


Рис. 3.9. Фазовые портреты системы (3.22) для различных значений параметра  $\mu_1$  : (a)  $\mu_1 > 0$  ; (b)  $\mu_1 = 0$  ; (c)  $\mu_1 < 0$ .



## Глава 4.

# Анализ устойчивости состояний равновесия многомерных нелинейных систем

*Метод линеаризации. Функции Ляпунова. Грубые состояния равновесия трехмерных систем.*

Предыдущая лекция была посвящена исследованию состояний равновесия двумерных линейных систем. Было показано, что их характер может быть определен из анализа расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Перейдем теперь к исследованию состояний равновесия нелинейных систем.

### 4.1. Метод линеаризации

Рассмотрим записанную в векторной форме нелинейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  – гладкая вектор-функция. Предположим, что система (4.1) имеет состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ . Введем малое возмущение  $\xi(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$ , для которого из системы (4.1) имеем

$$\dot{\xi} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \xi). \quad (4.2)$$

Раскладывая правую часть системы (4.2) в ряд Тейлора, получим

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi + \dots, \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{A} - n \times n$  – матрица Якобы с элементами

$$a_{ik} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right|_{x=x^*}.$$

Отбросим в правой части (4.3) все нелинейные по  $\xi$  слагаемые и рассмотрим систему

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi. \quad (4.4)$$

Переход от нелинейной системы (4.3) к линейной системе (4.4) называется её линеаризацией. Мы не будем пока обсуждать соотношение между траекториями систем (4.3) и (4.4), а рассмотрим возможные типы состояний равновесия линейной системы (4.4).

На предыдущих лекциях мы уже рассмотрели свойства системы (4.4) в одномерном и двумерном случаях. Как было показано, в этих случаях поведение траекторий зависит от корней характеристического уравнения. Аналогичным свойством обладает и система (4.4), в случае когда размерность её выше двух. Будем искать решение системы (4.4) в виде

$$\xi = \mathbf{C}e^{\lambda t}, \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{C}$  – постоянная матрица столбец. Подстановка (4.5) в (4.4) приводит к системе линейных однородных уравнений, которая имеет нетривиальное решение, если

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad (4.6)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица. Уравнение (4.6) эквивалентно алгебраическому уравнению

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) называется характеристическим, а его корни характеристическими показателями состояния равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ . Справедливы следующие, установленные А.М. Ляпуновым, утверждения:

- Если корни уравнения (4.7) имеют отрицательные вещественные части, т.е.  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то состояние равновесия системы (4.4) асимптотически устойчиво.
- Если среди корней уравнения (4.7) есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то состояние равновесия системы (4.4) неустойчиво по Ляпунову.

- Если уравнение (4.7) не имеет корней с положительной вещественной частью, но имеет некоторое число корней с нулевой вещественной частью, то состояние равновесия системы (4.4) может быть как устойчивым (но не асимптотически), так и неустойчивым.

Таким образом, вопрос об устойчивости состояний равновесия многомерных линейных систем сводится к исследованию характера корней алгебраического уравнения.

Вернемся теперь к исходной нелинейной системе (4.1), устойчивость состояний равновесия которой может быть установлена теоремами Ляпунова. Согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению (так называемый первый метод Ляпунова), если корни уравнения (4.7) удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то характер устойчивости состояний равновесия нелинейной системы (4.1) и соответствующей линеаризованной системы (4.7) совпадают. Таким образом, состояние равновесия системы (4.1) является асимптотически устойчивым, если  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и неустойчивым если среди корней уравнений (4.7) имеется хотя бы один с положительной вещественной частью.

## 4.2. Критерий Рауса-Гурвица

Из сказанного выше следует, что решение задачи об устойчивости состояний равновесия нелинейных систем сводится к анализу расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, т.е. к чисто алгебраической задаче. Однако, в случае многомерных (размерности три и выше) систем, как правило, найти характеристические показатели  $\lambda_i$  в явном виде не удастся. Поэтому были развиты критерии и методы, позволяющие судить об устойчивости состояний равновесия без непосредственного решения характеристического уравнения. Одним из наиболее известных таких критериев является критерий Рауса-Гурвица.

Критерии устойчивости Рауса (Routh E.Y.) и Гурвица (Hurwitz A.), вошедших в виде единого критерия, были разработаны в конце 18-го века в связи с проблемами, возникающими в тот момент, в теории автоматического управления. Сформулируем этот критерий для уравнения (4.7) с вещественными коэффициентами. Без ограничения общности будем считать, что коэффициент  $a_0$  является положительным. Составим из коэффициентов  $a_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) квадратную матрицу размерности  $n \times n$  в соответствии со следующими правилами:

- Первая строка матрицы состоит из коэффициентов с нечетными индексами, начиная с  $a_1$ .

- Элементы каждой последующей строки образуются из соответствующих элементов предшествующей строки уменьшением индексов на единицу.
- Если при таком построении индекс  $k$  какого-либо коэффициента  $a_k$  превосходит значение  $n$  или становится отрицательным, то он приравнивается нулю, т.е.  $a_k = 0$ .

В результате описанной процедуры получится  $n \times n$  матрица следующего вида

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что на главной диагонали матрицы  $\mathbf{A}_R$  стоят последовательно все коэффициенты уравнения (4.7), начиная с  $a_1$ . Далее, выпишем все главные диагональные миноры матрицы  $\mathbf{A}_R$

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Критерий Рауса-Гурвица состоит в следующем. Для того, чтобы все корни уравнения (4.7) с вещественными коэффициентами и  $a_0 > 0$  имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры были положительны

$$\Delta_n > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_n > 0. \quad (4.8)$$

Таким образом, условия (4.8) гарантируют асимптотическую устойчивость состояния равновесия линейной (4.4) и нелинейной (4.1) систем. Однако заметим, что в случае нелинейной системы (4.1) это лишь локальная устойчивость в малой окрестности состояния равновесия.

В качестве примера применения критерия Рауса-Гурвица рассмотрим уравнение (4.7) в случае  $n = 3$ . Для удобства перепишем это уравнение в следующем эквивалентном виде

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (4.9)$$

где

$$a = \frac{a_1}{a_0}, \quad b = \frac{a_2}{a_0}, \quad c = \frac{a_3}{a_0}.$$

Введем, отвечающую уравнению (4.9), матрицу

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & a & c \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что главные диагональные миноры этой матрицы имеют вид

$$\Delta_1 = a, \quad \Delta_2 = ab - c, \quad \Delta_3 = c(ab - c).$$

Отсюда, согласно критерию Рауса-Гурвица, все корни уравнения (4.9) имеют отрицательные вещественные части, если параметры этого уравнения удовлетворяют неравенствам

$$a > 0, \quad ab - c > 0, \quad c > 0.$$

### 4.3. Второй метод Ляпунова

Рассмотрим еще один метод, позволяющий устанавливать условия устойчивости состояний равновесия без непосредственного нахождения характеристических показателей. А.М. Ляпуновым была развита теория, в основе которой лежит построение специальных функций, позволяющих, в случае их существования, судить об устойчивости и неустойчивости состояний равновесия. Эти функции получили название функций Ляпунова, а базирующаяся на них теория устойчивости – второго метода Ляпунова. Изложим кратко основные идеи этого метода для автономных систем.

Рассмотрим скалярную функцию  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  или в векторном виде  $V(\mathbf{x})$ , определенную в фазовом пространстве системы (4.1), непрерывную в некоторой области  $D$ , содержащей состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ . Кроме того, предположим, что  $V(\mathbf{x})$  имеет в  $D$  непрерывные частные производные. В основе второго метода Ляпунова лежит использование свойств так называемых **знакоопределенных и знакопостоянных функций**.

- 1) Функция  $V(\mathbf{x})$  называется **знакоопределенной** в области  $D$ , если она обращается в нуль лишь в состоянии равновесия и принимает значения одного знака во всех остальных точках области  $D$ . Очевидно, что знакоопределенные функции бывают двух типов – положительно и отрицательно определенные.
- 2) Функция  $V(\mathbf{x})$  называется **знакопостоянной** в области  $D$ , если она обращается в нуль не только в состоянии равновесия, но и в некоторых

других точках области  $D$ , и имеет значения только одного знака во всех остальных точках области  $D$ .

Поясним смысл этих определений. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ V_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_3)^2 + x_2^2. \end{aligned}$$

Очевидно, что функция  $V_1$  является положительно определенной в области  $D = \mathbb{R}^3$ , а функция  $V_2$  — знакоположительной, поскольку она обращается в нуль не только в точке  $x_1 = x_2 = x_3$ , но и при  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = -x_1$ .

Во втором методе Ляпунова задача об устойчивости состояний равновесия решается с помощью изучения поведения функции  $V(\mathbf{x})$  вдоль траектории системы (4.1). Рассмотрим структуру поверхностей уровня  $V(\mathbf{x}) = C = \text{const}$  знакоопределенных функций, которую определяет следующее утверждение.

Если функций  $V(\mathbf{x})$  является знакоопределенной, то существует такое положительное число  $C^*$ , что все поверхности уровня  $V(\mathbf{x}) = C$ , где  $|C| < C^*$  являются замкнутыми относительно точки  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ .

Заметим, что поверхности  $V(\mathbf{x}) = C$  называется замкнутой, если на любой непрерывной линии, соединяющей точку  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  с точкой границы области  $D$ , существует по крайней мере одна точка, в которой  $V(\mathbf{x}) = C$ . Поясним свойства поверхностей уровня знакоопределенных функций на примере положительно определенных функций. На рис.4.1а представлен пример простейшей положительно определенной функции двух переменных. В этом примере ясно представлены основные свойства поверхностей уровня положительно определенных функций: они замкнуты, не имеют общих точек, окружают точку  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* = 0$  и стягиваются к ней при  $C \rightarrow 0$ .

Поведение поверхностей уровня функции  $V(\mathbf{x})$  вдоль траектории системы (4.1) может быть установлено с помощью производной по времени этой функции, вычисленной в сите системы (4.1). Такая производная находится следующим образом

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i = (\text{grad} V \cdot F), \quad (4.10)$$

где круглые скобки означают скалярное произведение векторов. Заметим, что из (4.10) вытекает условие  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ , если  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ .

Сформулируем теперь теоремы Ляпунова, дающие достаточные условия устойчивости состояний равновесия.

**Теорема об устойчивости.** Если для системы (4.1) существует в области  $D$  знакоопределенная функция  $V(\mathbf{x})$ , является **знакопостоянной** функ-

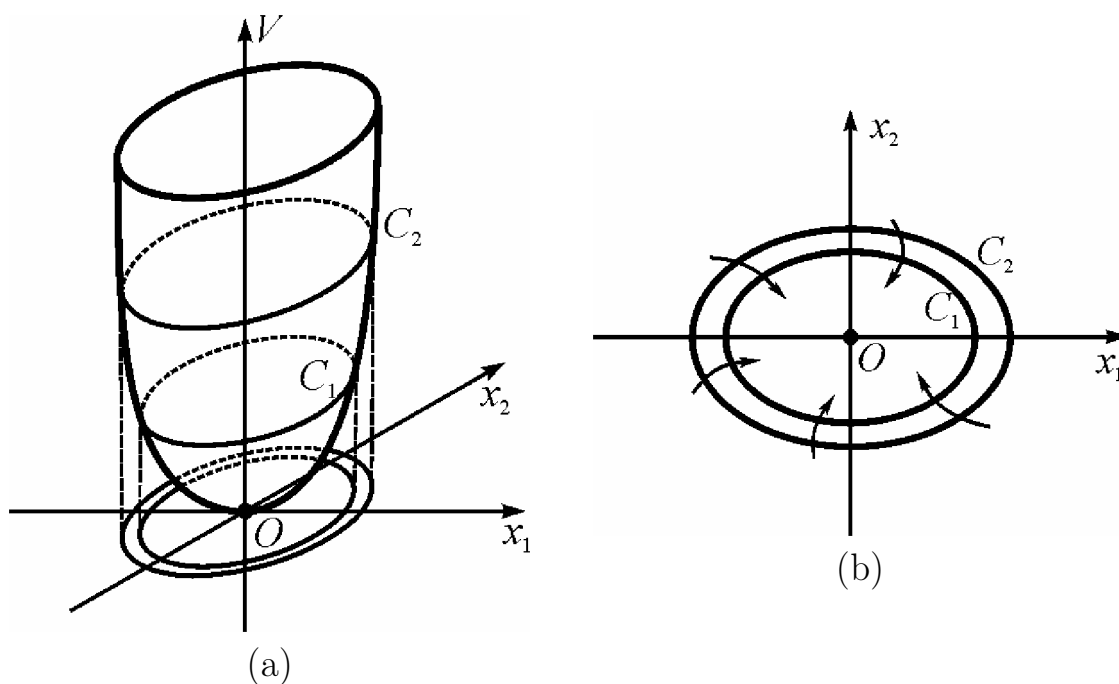


Рис. 4.1. Качественный вид положительно определенной функции двух переменных и линий уровня этой функции (а) и ориентация траекторий системы (4.1) на поверхностях уровня  $C_2 > C_1$  функции Ляпунова при выполнении теоремы об асимптотической устойчивости (b).

цией, знака противоположному знаку функции  $V(\mathbf{x})$ , то состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  устойчиво в смысле Ляпунова.

**Теорема об асимптотической устойчивости.** Если для системы (4.1) существует **знакоопределенная** функция  $V(\mathbf{x})$ , производная которой по времени  $\dot{V}$ , вычисленная в силу этой системы, является также **знакоопределенной**, знака противоположному знаку  $V(\mathbf{x})$ , то состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  будет асимптотически устойчивым.

Поясним геометрический смысл теоремы об асимптотической устойчивости. Пусть для определенности функция  $V(\mathbf{x})$  будет положительно, а  $\dot{V}(\mathbf{x})$  – отрицательно определенными функциями. Неравенство  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  означает, что траектории системы (4.1) в точках поверхности  $V(\mathbf{x}) = C$  переходят снаружи внутрь, т.е. в направлении противоположном направлению вектора  $\text{grad}V$  (рис.4.1б). Отсюда, поскольку при  $C \rightarrow 0$  поверхности  $V(\mathbf{x}) = C$  стягиваются в точку  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ , следует, что любая траектории системы (4.1) будет асимптотически приближаться к состоянию равновесия, пересекая каждую из поверхностей  $V(\mathbf{x}) = C$  в одну и ту же сторону. Это означает, что состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  является асимптотически устойчивым, а поверхность уровня  $V(\mathbf{x}) = C_{\max}$ , соответствующая наибольшему значению константы  $C$ , при которой условия теоремы выполняются, выделяет в фазовом простран-

стве область, принадлежащую области притяжения состояния равновесия. Заметим, если,  $C_{max} \rightarrow \infty$ , то состояние равновесия является асимптотически устойчивым при любых начальных условиях, т.е. устойчивым в целом.

**Пример.** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^3. \end{cases} \quad (4.11)$$

Нетрудно видеть, что система (4.13) имеет единственное состояние равновесия в начале координат  $O(x_1 = x_2 = 0)$ . Введем в рассмотрение положительно определенную функцию

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

и вычислим её производную в силу системы (4.11)

$$\dot{V} = x_1 \cdot \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^2 - x_1^4 - x_2^4 \leq 0. \quad (4.12)$$

В силу (4.12)  $\dot{V}(x_1, x_2)$  – отрицательно определенная функция во всех точках фазовой плоскости, отличных от состояния равновесия  $O$ . Следовательно,  $V(x_1, x_2)$  – функция Ляпунова и состояние равновесия  $O$  является асимптотически устойчивым в целом. Заметим, что с помощью метода линеаризации можно было бы установить устойчивость состояния равновесия  $O$  лишь в малом.

Таким образом, второй метод Ляпунова является эффективным способом изучения устойчивости состояний равновесия нелинейных систем не только в малом, но и в большом. Этот метод может быть также применен к системам с угловыми координатами. Для таких систем из существования функции Ляпунова, периодической по угловым координатам, вытекает глобальная асимптотическая устойчивость системы (см. лекцию 11). Однако, к сожалению, не существует стандартных способов построения функций Ляпунова для нелинейных систем и, как правило, каждая система требует своего индивидуального подхода. Наиболее часто функции Ляпунова ищутся в виде квадратичных форм переменных исследуемых систем.

Обратим также внимание ещё на одно важное свойство поверхностей уровня знакоопределенных функций. Поверхность, на которой производная  $\dot{V}$  в силу системы (4.1) является знакоопределенной, называется **поверхностью без контакта**. В некоторых случаях с помощью таких поверхностей можно получить ряд полезных свойств о поведении траекторий системы (4.1) в фазовом пространстве, хотя при этом функция Ляпунова не существует. На-



пример, выделить в фазовом пространстве так называемую поглощающую область (см. лекцию 1), оценить локализацию аттракторов и др.

## 4.4. Грубые состояния равновесия трехмерных систем

Метод линеаризации позволяет установить локальную устойчивость или неустойчивость грубых состояний равновесия нелинейных систем, но ничего не говорит о том, каким образом траектории приближаются к состоянию равновесия или удаляются от него. Для понимания этих свойств исследуем структуру разбиения фазового пространства на траектории в окрестности состояний равновесия трехмерных систем. Следуя методу линеаризации, рассмотрим сначала линейную систему (4.4). Предположим, что среди характеристических показателей состояния равновесия нет кратных и  $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

### 4.4.1. Действительные корни

В этом случае линейной заменой переменных  $\mathbf{u} = \mathbf{H}\xi$ , где  $\mathbf{H}$  – матрица  $3 \times 3$ , система (4.4) может быть приведена к следующему виду

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1, \quad \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2, \quad \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3. \quad (4.13)$$

Система (4.13) – нормальная форма уравнений для состояний равновесия с действительными различными характеристическими показателями линейных трехмерных систем. Общее решение системы (4.13) имеет вид

$$u_1 = u_1^0 e^{\lambda_1 t}, \quad u_2 = u_2^0 e^{\lambda_2 t}, \quad u_3 = u_3^0 e^{\lambda_3 t}, \quad (4.14)$$

где  $u_i^0 = \text{const}$ .

### Корни $\lambda_i$ одного знака

**Случай отрицательных корней.** Из (4.14) следует, что в этом случае при любых начальных условиях при  $t \rightarrow \infty$  траектории системы (4.13) стремятся к состоянию равновесия  $O(u_1 = u_2 = u_3 = 0)$ , которое является асимптотически устойчивым и называется устойчивым узлом. Рассмотрим, как именно траектории в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  подходят к точке  $O$ . Пусть для определенности  $\lambda_i$  упорядочены следующим образом:  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Прежде всего заметим, что плоскость  $\{u_1 = 0\}$  инвариантна относительно системы

(4.13), т.е. траектории системы (4.13) с начальными условиями на этой плоскости целиком принадлежат ей. Поскольку  $\lambda_3 < \lambda_2 < 0$ , траектории системы (4.13) с на плоскости  $\{u_1 = 0\}$  ведут себя аналогично траекториям устойчивого узла двумерных систем (см. лекцию 3, рис.4.2а). Пусть теперь  $u_1 \neq 0$ .

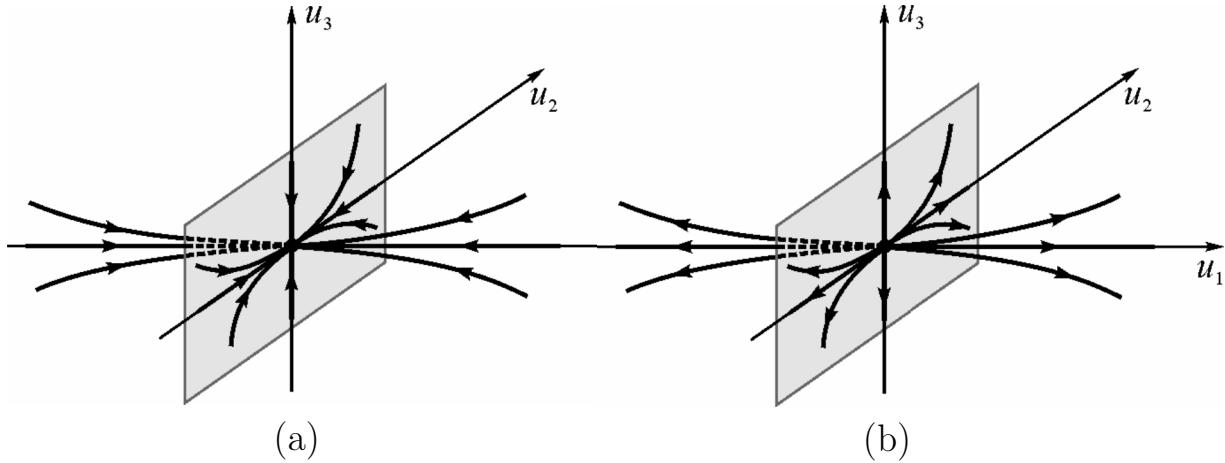


Рис. 4.2. Состояние равновесия системы (4.13): устойчивый узел (а); неустойчивый узел (b).

Из (4.14) имеем

$$\frac{u_2}{u_1} = \text{const} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}, \quad \frac{u_3}{u_1} = \text{const} \cdot e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t}. \quad (4.15)$$

В силу (4.15) при  $t \rightarrow \infty$  переменная  $u_1(t)$ , при стремлении к состоянию равновесия  $O$ , убывает медленнее, чем переменные  $u_2(t)$  и  $u_3(t)$ . Следовательно, все траектории системы (4.13), за исключением траекторий плоскости  $\{u_1 = u_2\}$ , касаются в состоянии равновесия прямой  $\{u_2 = u_3 = 0\}$ , которая является ведущим направлением узла (рис.4.2а).

**Случай положительной корней.** Пусть уравнение (4.9) имеет только положительные корни, упорядоченные для определенности следующим образом:  $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1 > 0$ . В силу (4.14) все траектории системы (4.13) покидают окрестность состояния равновесия  $O$ , которое в этом случае является неустойчивым и называется неустойчивым узлом. Поведение траекторий в окрестности неустойчивого узла устанавливается аналогично предыдущему случаю и показано на рис.4.2b.

### Корни $\lambda_i$ разного знака

**Случай одного положительного и двух отрицательных корней.** Предположим, что уравнение (4.9) имеет следующие корни:  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_3 > 0$ .

Непосредственно из системы (4.13) следует, что все траектории с начальными условиями на плоскости  $E^s = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, u_3\}$  целиком принадлежат этой плоскости, т.е.  $E^s$  инвариантна относительно системы (4.13). Движения на плоскости  $E^s$  определяются первыми двумя уравнениями системы (4.13), которые задают на ней устойчивый узел. При этом прямая  $\{u_2 = 0\}$  является ведущим, а прямая  $\{u_1 = 0\}$  — неведущими направлениями этого узла (рис.4.3а).

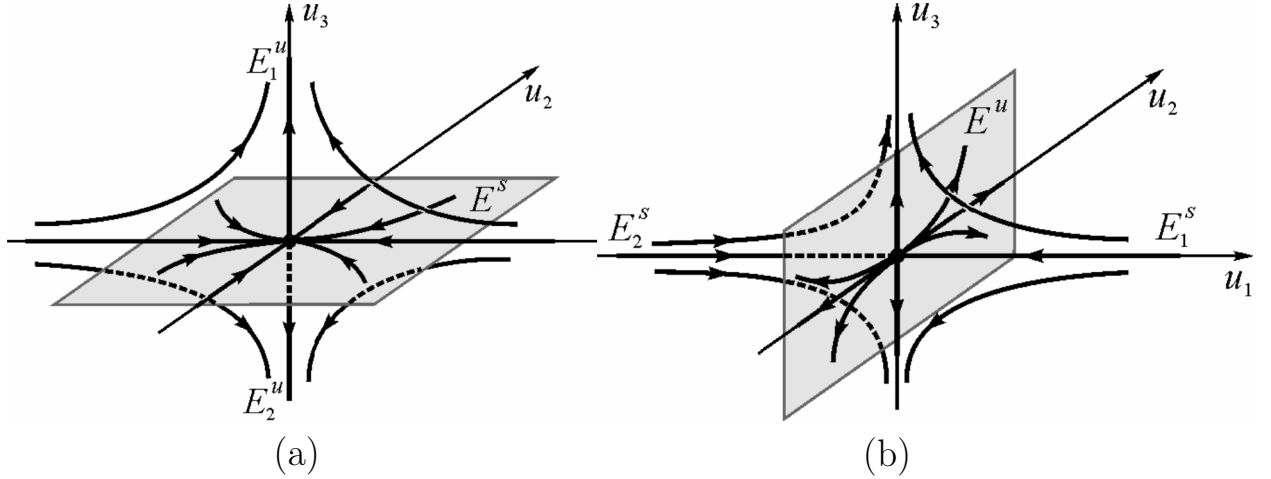


Рис. 4.3. Состояния равновесия системы (4.13): седло с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями (а); седло с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (б).

Очевидно, что прямая  $E^u = \{u_1 = u_2 = 0, u_3 \in \mathbb{R}\}$  также инвариантна относительно системы (4.13). Движения на этой прямой определяются третьим уравнением системы (4.13). Поскольку  $\lambda_3 > 0$ , то для траектории системы (4.13) с начальными условиями на этой прямой выполняется либо условие  $u_3(t) \rightarrow \infty$ , либо  $u_3(t) \rightarrow -\infty$  (рис.4.3а). Рассмотрим поведение траекторий с начальными условиями вне  $E^s$  и  $E^u$ . Введем в рассмотрение функцию

$$V(u_1, u_2) = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2}.$$

Производная этой функции в силу системы (4.13) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 < 0, \text{ если } (u_1, u_2) \notin E^u. \quad (4.16)$$

В силу (4.16) поверхности уровня  $V(u_1, u_2) = C = \text{const}$  являются поверхностями без контакта, каждую из которых траектории системы (4.13) пересекают с внешней стороны во внутрь. Отсюда, поскольку  $V(u_1, u_2) = C$  имеет вид цилиндрических поверхностей, стягивающихся к прямой  $E^u$  при  $C \rightarrow 0$ , вытекает что траектории с начальными условиями вне прямой  $E^u$  асимпто-

тически приближаются к ней и стремятся к состоянию равновесия на  $E^s$ . Качественное поведение траекторий системы (4.13) в рассматриваемом случае представлено на рис.4.3а. Такое состояние равновесия называется седлом, а плоскость  $E^s$  – устойчивым,  $E^u$  – неустойчивым многообразиями этого седла. Заметим, что неустойчивое многообразие  $E^u$  состоит из двух полупрямых  $E_1^u$ ,  $E_2^u$  и точки  $O$  (см рис.4.3а). Эти полупрямые называются неустойчивыми сепаратрисами седла.

**Случай одного отрицательного и двух положительных корней.** Пусть корни уравнения (4.9) упорядочены следующим образом:  $\lambda_3 > \lambda_2 > 0 > \lambda_1$ . Аналогично предыдущему можно показать, что в этом случае состояние равновесия  $O$  является также седлом. Однако, это седло имеет двумерное неустойчивое многообразие  $E^u = \{u_1 = 0, (u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2\}$  и одномерное устойчивое многообразие  $E^s = \{u_2 = u_3 = 0, u_1 \in \mathbb{R}\}$  ( см. рис.4.3б). Такое седло имеет две устойчивые одномерные сепаратрисы –  $E_1^s$  и  $E_2^s$ .

#### 4.4.2. Комплексные корни

Предположим, что уравнение (4.9) имеет пару комплексно-сопряженных корней:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  и один вещественный корень  $\lambda_3$ . Нормальная форма уравнений линейной системы (4.4) в этом случае имеет вид

$$\dot{u}_1 = \alpha u_1 - \beta u_2, \dot{u}_2 = \beta u_1 + \alpha u_2, \dot{u}_3 = \lambda_3 u_3. \quad (4.17)$$

Очевидно, что система (4.17) имеет двумерное (плоскость  $\{u_3 = 0\}$ ) и одномерное (прямая  $\{u_1 = u_2 = 0\}$ ) инвариантные многообразия. Устойчивость этих многообразий определяется знаком величин  $\alpha$  и  $\lambda_3$ .

#### Вещественные части корней $\lambda_i$ одного знака

**Случай  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$  и  $\lambda_3 < 0$ .** При этих условиях состояния равновесия  $O$  имеет одномерное  $E^{s_1} = \{u_1 = u_2 = 0, u_3 \in \mathbb{R}\}$  и двумерное  $E^{s_2} = \{u_3 = 0, (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\}$  устойчивые многообразия. Поведение траекторий системы (4.17) с начальными условиями вне этих многообразий установим с помощью функции  $V(u_1, u_2)$ , удовлетворяющей в силу (4.17) следующему условию

$$\frac{dV}{dt} = \alpha(u_1^2 + u_2^2) < 0, \text{ если } (u_1, u_2) \in E^{s_1}. \quad (4.18)$$

Из (4.18) вытекает, что рассматриваемые траектории асимптотически приближаются к прямой  $E^{s_1}$ , пересекая без контакта цилиндрические поверхности уровня, стягивающиеся к  $E^{s_1}$ . При этом в  $\mathbb{R}^3$  траектории стремятся

к состоянию равновесия и демонстрируют спиральное поведение, возникающее в силу осцилляторного затухания переменных  $u_1$  и  $u_2$ . Такое состояние равновесия является асимптотически устойчивым и называется устойчивым фокусом (см. рис.4.4а).

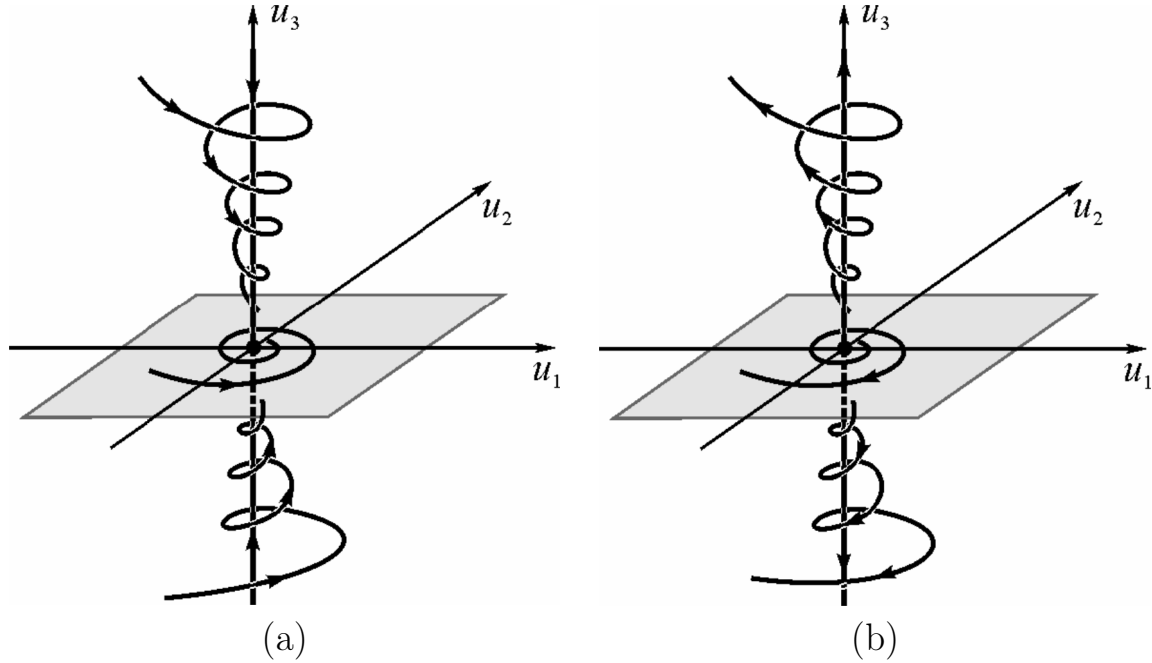


Рис. 4.4. Состояние равновесия системы (4.17): устойчивый фокус (а); неустойчивый фокус (b).

**Случай  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$  и  $\lambda_3 > 0$ .** Поведение траекторий системы (4.17) при таких характеристических показателях можно легко установить, сделав в системе замену  $t \rightarrow -t$ . Такая замена сводит данный случай к предыдущему. Следовательно, искомый фазовый портрет подобен портрету, представленному на рис.4.4а, в котором надо лишь изменить направление движения по траекториям на противоположное. Полученное состояние равновесия называется неустойчивым фокусом (см. рис.4.4b).

### Вещественные части корней $\lambda_i$ разных знаков

**Случай  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$  и  $\lambda_3 > 0$ .** При этих условиях двумерное многообразие  $E^s = \{u_3 = 0, (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\}$  является устойчивым, а двумерное  $E^u = \{u_1 = u_2 = 0, u_3 \in \mathbb{R}\}$  – неустойчивым. На многообразии  $E^s$  система (4.17) имеет устойчивый двумерный фокус, а  $E^u$  состоит из двух неустойчивых сепаратрис  $E_1^u, E_2^u$  и точки  $O$ . Принимая во внимание неравенство (4.18), устанавливаем, что все траектории, вне многообразий  $E^s$  и  $E^u$ , асимптотически приближаются к прямой  $E^u$ , удаляясь при этом от состояния равновесия.

Фазовый портрет такого состояния равновесия представлен на рис.4.5а. Оно называется седло-фокусом.

**Случай  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$  и  $\lambda_3 < 0$**  Обратив в системе (4.17) время  $t \rightarrow -t$ , мы получим рассмотренный выше случай. Поэтому для построения фазового портрета изучаемого состояния равновесия достаточно просто изменить на рис.4.5а направление движения по траекториям на противоположное. В результате получится состояние равновесия, представленное на рис.4.5b, которое также называется седло-фокусом. Однако, у этого состояния равновесия неустойчивым является двумерное многообразие, а устойчивым – одномерное многообразие.

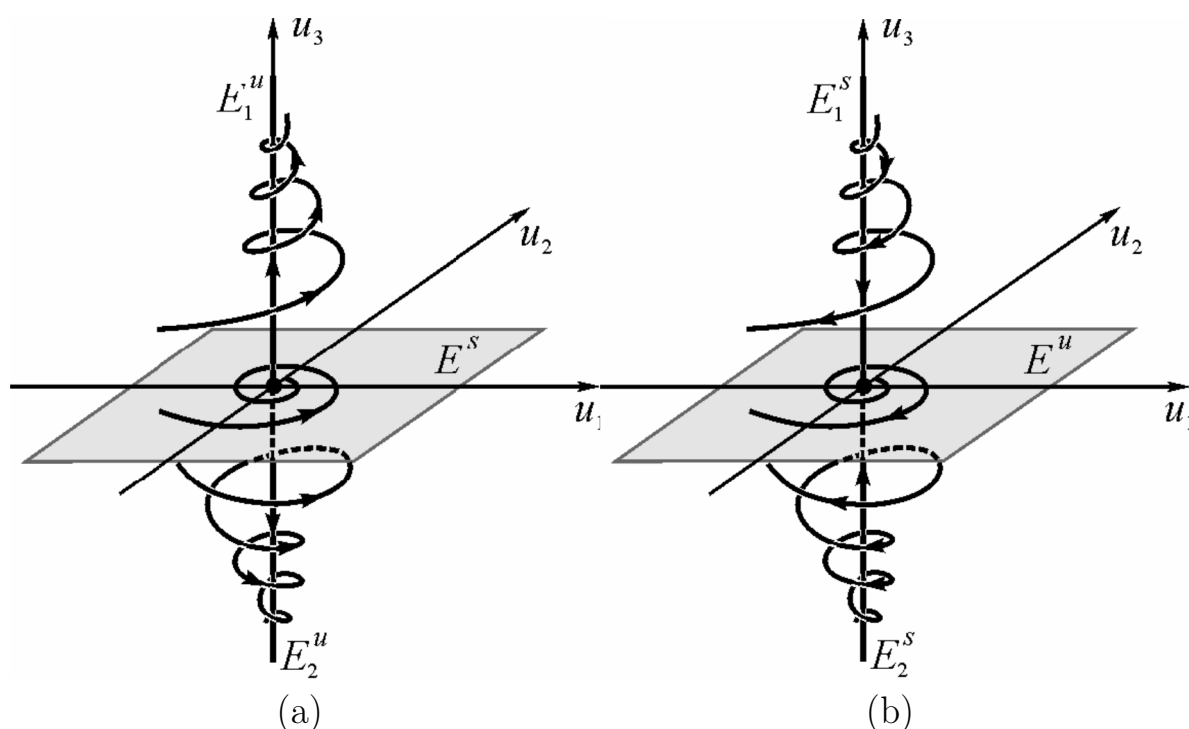


Рис. 4.5. Состояние равновесия системы (4.17): седло-фокус с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями (а); седло-фокус с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями (b)

#### 4.4.3. Состояния равновесия трехмерных нелинейных систем

Рассмотрим поведение траекторий нелинейной трехмерной системы (4.1) в окрестности состояния равновесия. Если состояние равновесия является грубым ( $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), то существует непрерывное взаимно-однозначное отображение, имеющее непрерывное обратное отображение, под действием

которого каждая траектория из окрестности состояния равновесия нелинейной системы (4.1) переводится в траекторию из окрестности состояния равновесия линеаризованной системы с сохранением направления движения (теорема Гробмана-Хартмана). Следовательно, структура окрестности состояния равновесия нелинейной системы качественно выглядит также как окрестность состояния равновесия соответствующей линеаризованной системы. При этом размерность и устойчивость многообразий линеаризованной и нелинейной систем совпадают. Однако, многообразия нелинейной системы представляют собой, вообще говоря, некоторые поверхности и кривые, а не плоскости и прямые, как в случае линеаризованной системы. Инвариантные многообразия состояния равновесия нелинейной системы касаются в этом состоянии равновесия многообразий линеаризованной системы (теорема Адамара-Перрона)

### Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 - z^2, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = -z. \end{cases} \quad (4.19)$$

Система (4.19) имеет единственное состояние равновесия -  $O(x = y = z = 0)$  характеристическими показателями:  $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_1 = -1$ . Следовательно,  $O$  – седло. Нетрудно видеть, что многообразия седла линеаризованной системы имеют вид

$$\begin{aligned} E^s &= \{x = 0, (y, z)\} \in \mathbb{R}^2 \\ E^u &= \{y = z = 0, x\} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

С другой стороны, непосредственно из (4.19) следует, что неустойчивое многообразие  $W^u$  седла  $O$  системы (4.19) совпадает с прямой  $E^u$ , а устойчивое многообразие  $W^s$  задается следующим образом

$$W^s = \left\{ x = \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} \right\}.$$

Качественный вид многообразий седла иллюстрирует рис.4.6, который ясно показывает принципиальное различие инвариантных многообразий нелинейных и линеаризованных систем. Заметим, что совпадение  $W^u$  и  $E^u$  в системе (4.19) носит частный характер и не отражает общей ситуации.

В заключение этого раздела обратим внимание на то, что утверждения, сформулированные выше, относительно свойств состояний равновесия трехмерных систем имеют соответствующие аналоги и для систем произвольной размерности.

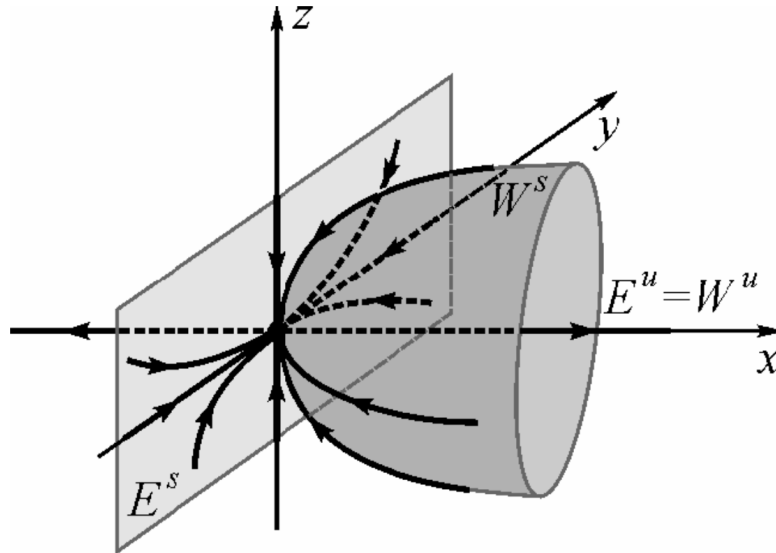


Рис. 4.6. Многообразие линейаризованной –  $E^s$ ,  $E^u$  и нелинейной системы (4.19) –  $W^s$ ,  $W^u$ .

#### 4.4.4. Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма

Характеристическое уравнение (4.9) содержит три параметра  $a, b$  и  $c$ , от значения которых зависит расположение корней этого уравнения на комплексной плоскости и, следовательно, тип состояния равновесия  $O$ . Установим связь между параметрами  $a, b, c$  и характером состояния равновесия. Согласно результатам, изложенным в разделах 4.2 и 4.4, разбиение пространства параметров  $\{a, b, c\}$  на области, соответствующие различным типам состояний равновесия  $O$  определяется следующими условиями

$$a = 0, \quad ab - c = 0, \quad c = 0, \quad D = 0, \quad (4.20)$$

где  $D$  – дискриминант уравнения (4.9), имеющий вид

$$D = \frac{b^3}{27} - \frac{a^2 b^2}{108} + \frac{a^3 c}{27} - \frac{abc}{6} + \frac{c^2}{4}.$$

Уравнение (4.9) имеет действительные корни, если  $D < 0$  и один действительный и два комплексно-сопряженных корня, если  $D > 0$ . При  $D = 0$  корни уравнения (4.9) действительные, два из которых равны между собой. Зафиксируем параметры и рассмотрим двухпараметрическую задачу, считая  $b$  и  $c$  контрольными параметрами.

**Случай  $a = \text{const} > 0$ .** Из условий (4.20) следует, что разбиение плоскости  $(b, c)$  (см. рис.4.7) на области, соответствующие различным типам состояний



равновесия осуществляется следующими бифуркационными кривыми

$$C^{\pm} = \left\{ c = \frac{a(9b - 2a^2) \pm 2(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}}{27}, b < \frac{a^2}{3} \right\},$$

$$S = \{c = ab, b > 0\}, B^+ = \left\{ c = 0, b > \frac{a^2}{4} \right\}$$

$$B^0 = \left\{ c = 0, 0 < b < \frac{a^2}{4} \right\}, B^- = \{c = 0, b < 0\}.$$

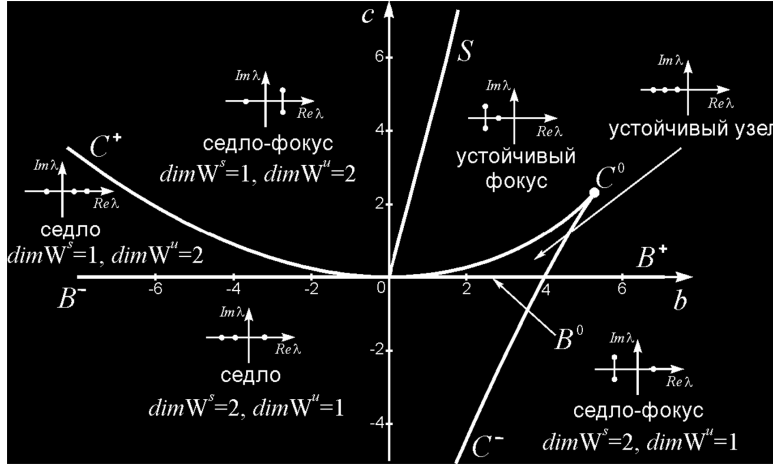


Рис. 4.7. Разбиение плоскости параметром  $(b, c)$  на области, соответствующие различным типам состояния равновесия систему (4.4) в случаях  $a > 0$  ( $a = 4$ ).

**Случай  $a = 0$ .** При  $a = 0$  область асимптотической устойчивости отсутствует, отрезок  $B^0$  стягивается в точку – начало координат, а кривые  $C^+$  и  $C^-$  целиком расположены в области  $b < 0$  (см. рис.4.8). В этом случае на полупрямой  $B^+$  уравнение (4.9) имеет, кроме одного нулевого, ещё пару чисто мнимых корней, а в начале координат – трехкратный нулевой корень. На плоскости  $(b, c)$  существует четыре области, соответствующие различным типам грубого состояния равновесия  $O$ .

**Случай  $a < 0$ .** Как и при  $a > 0$ , здесь разбиение плоскости  $(c, b)$  на области, соответствующие различным типам состояния равновесия, осуществляют бифуркационные линии  $C^{\pm}$ ,  $S$ ,  $B^{\pm}$  и  $B^0$  (см. рис.4.9). Однако, расположение корней уравнения (4.9) на комплексной плоскости, когда параметры принадлежат  $B^+$ ,  $B^0$  и  $S$  отличается от случая  $a > 0$ . Именно точкам полупрямой  $B^+$  отвечает один нулевой и два комплексно-сопряженных корня с положительной вещественной частью, отрезка  $B^0$  – один нулевой и два положительных корня, а полупрямой  $S$  – один положительный и два чисто

мнимых корня. Изменился также и вид кривых  $C^+$  и  $C^-$ . Кривая  $C^+$  стала монотонно убывающей и выпуклой вниз, а  $C^-$  – выпуклой вверх, имеющей максимум в начале координат. При  $a < 0$  состояние равновесия всегда неустойчиво по Ляпунову и на плоскости  $(b, c)$  существуют шесть областей, отвечающих различным типам состояния равновесия  $O$ .

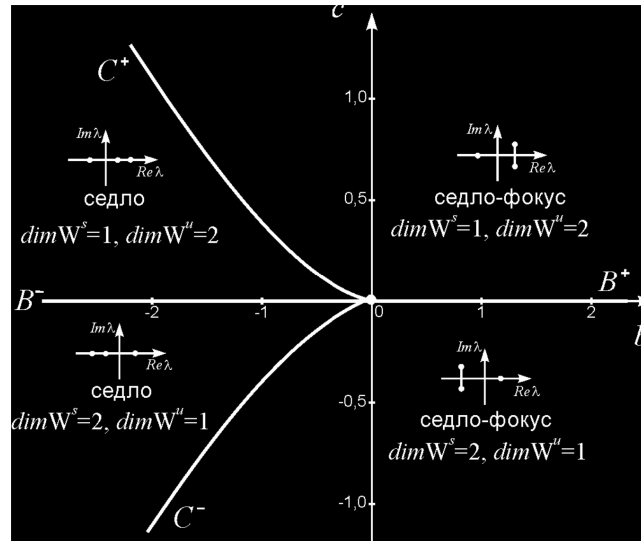


Рис. 4.8. Разбиение плоскости параметров  $(b, c)$  на области, соответствующие различным типам состояния равновесия системы (4.4) в случае  $a = 0$ .

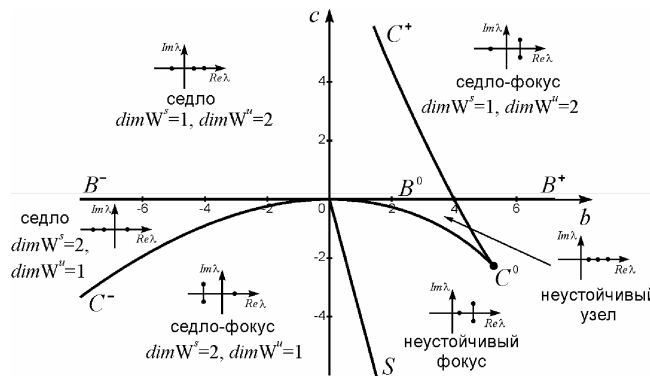


Рис. 4.9. Разбиение плоскости  $(b, c)$  на области, соответствующие различным типам состояния равновесия (4.4) в случае  $a < 0$  ( $a = -4$ ).

## Глава 5.

# Линейный и нелинейный осцилляторы

*Гармонические и затухающие колебания. Консервативный и диссипативный нелинейные осцилляторы. Изохронные и неизохронные колебания.*

Осциллятор – простейшая динамическая система с двумерным фазовым пространством. Несмотря на простоту, с помощью этой системы можно описать важнейшие колебательные процессы: периодические, затухающие и нарастающие. Круг реальных задач, приводящих к модели в виде осциллятора, чрезвычайно широк и имеет самую разнообразную природу. Например, к таким задачам относятся различные механические устройства, в которых происходит взаимодействие масс и упругих сил, электрические контуры, содержащие ёмкостные и индуктивные компоненты, некоторые виды акустических резонаторов, простейшие популяционные задачи и др. Изучение динамических свойств осцилляторов мы начнём с задач, в которых нелинейные механизмы отсутствуют или пренебрежимо малы.

### 5.1. Динамика линейного осциллятора

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых ёмкости  $C$ , индуктивности  $L$  и сопротивления  $R$  (см. рис.5.1а). Обозначим через  $q$  заряд конденсатора  $C$ . Согласно закону Кирхгофа

$$u_R + u_L + u_C = 0, \quad (5.1)$$

т.е. сумма падений напряжения на элементах контура равна нулю, поскольку в цепи отсутствуют внешние источники напряжения. Пусть  $i$  – ток,

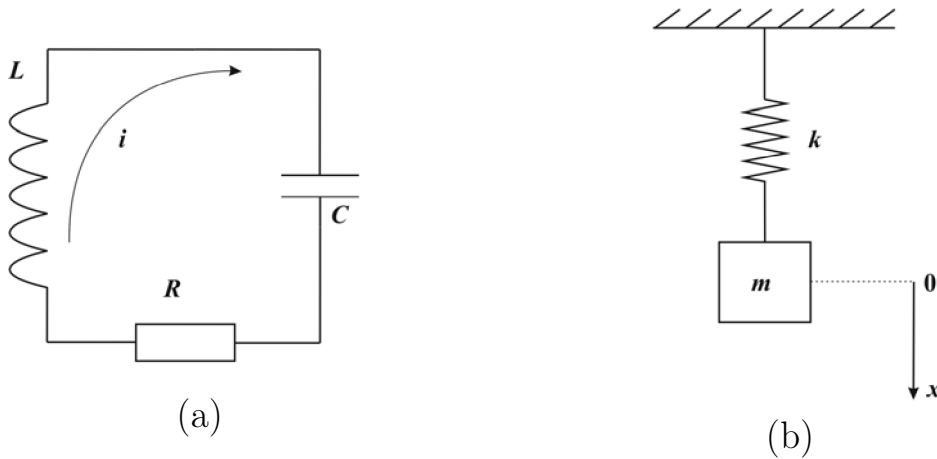


Рис. 5.1. Линейные осцилляторы: электрический контур (а); груз массы  $m$  на пружине с жёсткостью  $k$ , совершающий малые колебания около положения равновесия (b).

протекающий в контуре, который, как известно, связан с зарядом  $q$  следующим образом

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Тогда для напряжения на элементах контура можно записать

$$u_R = Ri = R \frac{dq}{dt}, \quad u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}, \quad u_C = \frac{q}{C}. \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (5.1), получим уравнение

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (5.3)$$

Перепишем уравнение (5.3), для удобства дальнейшего изложения, в следующем эквивалентном виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.4)$$

где

$$2\delta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Реальные системы, динамика которых описывается уравнением (5.4), принято называть **линейными осцилляторами**. Уравнение (5.4) содержит два параметра, имеющих ясный смысл:  $\omega_0$ —частота собственных колебаний, а параметр  $\delta$  характеризует потери в системе.

Другим примером линейного осциллятора может служить груз на пружине

жине (см. рис.5.1b), совершающий малые колебания вблизи положения равновесия при наличии силы трения пропорциональной скорости  $\dot{x}$ . Динамика такой системы также описывается уравнением (5.4), в котором  $x$  – смещение груза из положения равновесия.

### 5.1.1. Гармонический осциллятор

Предположим, что в изолированной физической системе отсутствует рассеяние энергии, вызванное переходом энергии движения в тепловую энергию. В таких идеализированных системах запас энергии остаётся постоянным, и они называются **консервативными**.

Покажем, что системы, динамика которых описывается уравнением (5.4) при  $\delta = 0$ , являются консервативными, и выясним основные свойства таких систем. При  $\delta = 0$  представим уравнение (5.4) в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x. \end{cases} \quad (5.5)$$

Очевидно, что система (5.5) имеет единственное состояние равновесия в начале координат, корни характеристического уравнения которого имеют вид:  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ . Следовательно (см. лекцию 3), это состояние равновесия является центом и на фазовой плоскости  $(x, y)$  любая траектория, отличная от состояния равновесия, представляет собой замкнутую кривую. Уравнение соответствующих интегральных кривых без труда можно найти из системы (5.5) путём её сведения к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{y^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} = C, \quad C = \text{const} \geq 0. \quad (5.6)$$

Из (5.6) следует, что нетривиальные интегральные кривые системы (5.5) имеют вид эллипсов, оси которых совпадают с координатными осями. На фазовой плоскости  $(x, y)$  согласно первому уравнению в (4.6) переменная  $x$  вдоль траекторий возрастает при  $y > 0$  и убывает при  $y < 0$  (см. рис.4.2а). Найдём время  $T$ , за которое изображающая точка совершит один полный оборот вдоль произвольной замкнутой траектории, стартующей с произвольных начальных условий

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (5.7)$$

Запишем общее решение уравнение (5.5)

$$\begin{cases} x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \\ y = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t), \end{cases} \quad (5.8)$$

где  $C_{1,2} = \text{const}$ . Из (5.7), (5.8) находим уравнение искомой траектории

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{y_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ y = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + y_0 \cos(\omega_0 t). \end{cases} \quad (5.9)$$

Очевидно, что в момент  $t = T$  должны выполняться условия

$$x(T) = x_0, \quad y(T) = y_0. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.9) в (5.10), получим систему линейных относительно  $\sin(\omega_0 T)$  и  $\cos(\omega_0 T)$  уравнений

$$\begin{cases} x_0 \cos(\omega_0 T) + \frac{y_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) = x_0 \\ y_0 \cos(\omega_0 T) - x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 T) = y_0. \end{cases} \quad (5.11)$$

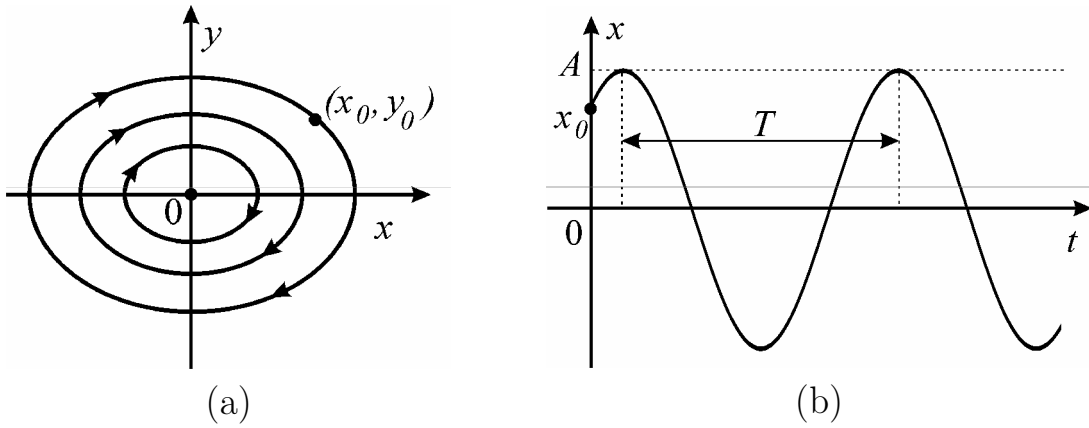


Рис. 5.2. Фазовый портрет гармонического осциллятора (а); гармонические колебания периода  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (b).

Решая систему (5.11) обычным образом, находим, что

$$\cos(\omega_0 T) = 1, \quad \sin(\omega_0 T) = 0$$

следовательно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (5.12)$$

Представим для удобства решение (5.9) в виде

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad y = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (5.13)$$

где

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0 x_0}{y_0}.$$

Из (5.12), (5.13) вытекает, что осциллятор (5.8) при любых начальных условиях совершает **синусоидальные (гармонические)** колебания с амплитудой  $A$ , фазой  $\varphi$  и частотой  $\omega_0$ , независимой от начальных условий (см. рис.5.2b). Осциллятор (5.5) называется гармоническим, а совершаемые им колебания, период которых не зависит от начальных условий, – **изохронными**. При этом уравнение (5.6) представляет собой закон сохранения энергии, поскольку первое слагаемое в (5.6) есть кинетическая

$$E_K = \frac{y^2}{2} = (A^2 \omega_0^2 \cos^2(\frac{\omega_0 t + \varphi}{2})), \quad (5.14)$$

а второе – потенциальная энергия осциллятора

$$E_\Pi = \frac{x^2}{2} = (A^2 \omega_0^2 \sin^2(\frac{\omega_0 t + \varphi}{2})). \quad (5.15)$$

Из (5.6), (5.14) и (5.15) следует, что полная энергия осциллятора остаётся при колебаниях постоянной

$$E = E_K + E_\Pi = \text{const},$$

однако переходит из одного вида в другой.

Поясним теперь связь между траекториями на фазовой плоскости осциллятора (4.6) и колебаниями в реальном пространстве. Это соотношение иллюстрирует рис.5.3, на котором представлена замкнутая фазовая траектория осциллятора (5.5), описывающего малые колебания груза на пружине (рис.5.1b), и четыре состояния груза в пространстве, соответствующие различным точкам фазовой траектории.

### 5.1.2. Линейный осциллятор при наличии потерь

В реальных системах всегда происходит рассеяние (диссипация) энергии, её потери, вызванные наличием элементов, трансформирующих энергию движения в тепловую. Например, в электрическом контуре это омическое сопротивление, а в случае груза на пружине – сила трения (рис.5.1). Если диссипация энергии в системе (линейной или нелинейной) ничем не компенсируется, то с течением времени любые колебания затухают и система приходит в равновесное состояние. Такие системы называют диссипативными динамическими системами (см. лекцию 1), и их динамика принципиально отличается

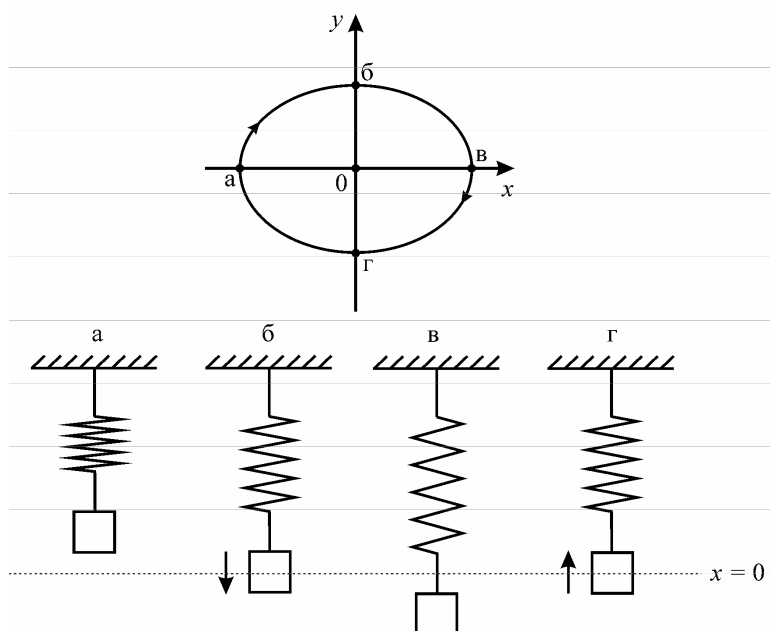


Рис. 5.3. Фазовая траектория осциллятора (5.5) и четыре различных состояния груза на пружине

от динамики консервативных систем.

Рассмотрим динамику простейшей диссипативной системы – линейного осциллятора (5.4) при  $\delta \neq 0$ . Перепишем (5.4) в виде системы

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x. \quad (5.16)$$

На фазовой плоскости  $(x, y)$  система (5.16) имеет единственное состояние равновесия  $O(x = 0, y = 0)$ , характеристическое уравнение для которого имеет вид

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (5.17)$$

Динамика двумерных линейных систем полностью определяются типом состояний равновесия (см. лекцию 3). Поэтому, анализируя корни уравнения (5.17), можно установить возможные колебательные процессы в линейном осцилляторе (5.16).

**Затухающий процесс.** Пусть параметры системы (5.16) удовлетворяют условиям

$$\delta > 0, \delta^2 < \omega_0^2. \quad (5.18)$$

Поскольку  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -\delta < 0$  состояние равновесия  $O$  является устойчивым фокусом (см. лекцию 3, траекториям которого отвечают осцилляторно затухающие колебания. Фазовый портрет систем (5.16) представлен на рис.5.4а. Траектории пересекают ось абсцисс так, что касательные к ним в точках пересечения имеют вертикальный наклон, поскольку  $\dot{x} = 0$ , если  $y = 0$ . Кроме



того,

$$\dot{y} = 0, \text{ если } y = -\frac{\omega_0^2}{2\delta}x$$

и, следовательно, траектории пересекают эту прямую так, что в точках пересечения наклон касательных к траекториям является горизонтальным. Линии на фазовой плоскости, на которых касательные к траекториям имеют один и тот же наклон называют **изоклинами** соответствующего наклона. В случае системы (5.16) ось абсцисс – изоклина вертикальных, а прямая  $y = -\frac{\omega_0^2}{2\delta}x$  – горизонтальных наклонов.

Исследуем характеристики осцилляторно затухающего процесса. Аналогично (5.9), запишем уравнение траектории осциллятора (5.16), удовлетворяющей начальным условиям  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$

$$\begin{cases} x = e^{-\delta t} \left[ x_0 \cos(\omega t) + \frac{y_0 - \delta x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right], \\ y = e^{-\delta t} \left[ \cos(\omega t) - \frac{(-\omega^2 + \delta^2)x_0 + \delta y_0}{\omega} \sin(\omega t) \right], \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \\ y = i\sqrt{\delta^2 + \omega^2} Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi + \theta), \end{cases} \quad (5.19)$$

где

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(y_0 + \delta x_0)^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \omega}{y_0 + \delta x_0}, \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{\omega}{\delta}.$$

Из (5.19) следует, что колебательные процессы, описываемые системой (5.16) при выполнении условий (5.18), являются непериодическими и осцилляторно затухающими. Затухание колебаний происходит по экспоненциальному закону, т.е. на плоскости  $(t, x)$  экстремумы функции  $x(t)$  лежат на экспонентах  $x = \pm Ae^{-\delta t}$  (см. рис.5.3b). Интервал между любыми двумя соседними экстремумами равен  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Благодаря этому свойству, можно ввести величину, характеризующую скорость затухания осцилляторного процесса – логарифмический декремент затухания  $d$ . Пусть  $x_1(t_1)$  и  $x_2(t_2), t_2 > t_1$  – значение двух соседних экстремумов, например максимумов, т.е.

$$x_1(t_1) = Ae^{-\delta t_1}, \quad x_2(t_2) = Ae^{-\delta t_2}.$$

Найдем их отношение

$$\frac{x_1(t_1)}{x_2(t_2)} = e^{\delta(t_2 - t_1)} = e^{\delta T} = e^{\frac{\delta 2\pi}{\omega}}. \quad (5.20)$$

Декремент характеризует убывание амплитуды колебаний во времени, т.е.

число  $\frac{1}{d}$  равно числу колебаний, после которого амплитуда уменьшится в  $e$  раз. Заметим, что этот закон затухания колебания выполняется во-первых, если система является линейной, а во-вторых, если потери энергии происходят линейно относительно  $\dot{x}$ . Нарушение этих условий делает соотношение (5.20) не справедливым и использование декремента для характеристики процесса требует специальных оговорок.

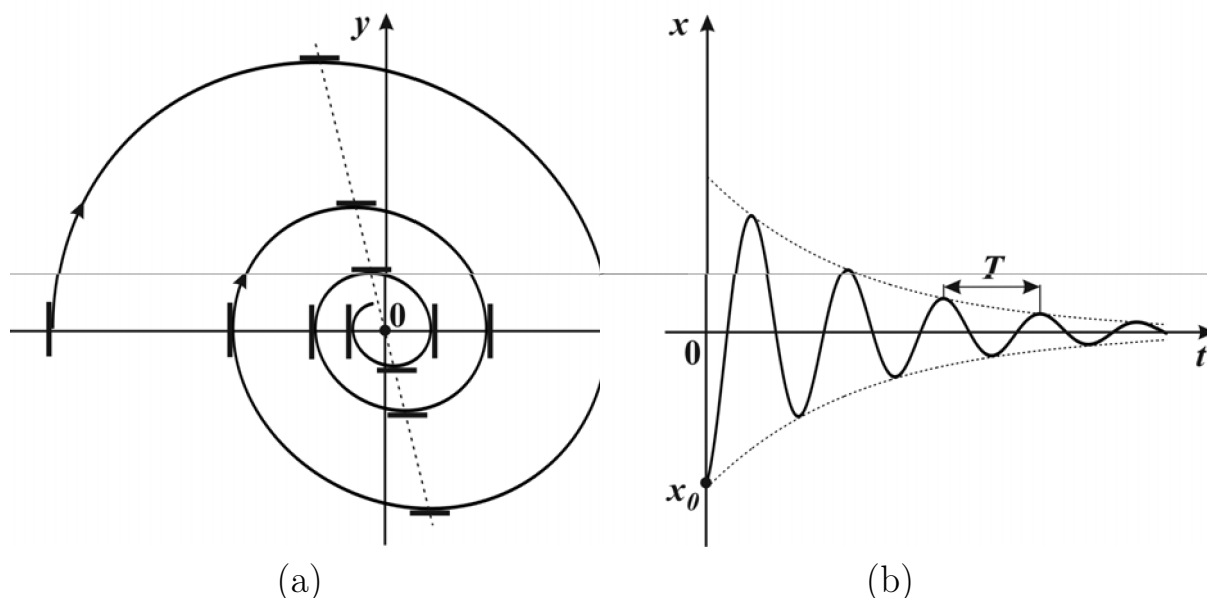


Рис. 5.4. Устойчивый фокус, пунктирной линией показана изоклина горизонтальных наклонов (а); осцилляторно затухающие колебания (b).

**Затухающий аperiодический процесс.** Предположим, что параметры системы (5.16) удовлетворяют условиям

$$\delta > 0, \delta^2 > \omega_0^2 \quad (5.21)$$

При выполнении (5.21) состояние равновесия  $O$  имеет отрицательные корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (5.22)$$

и, следовательно, является устойчивым узлом (см. рис.5.5а) каждой траекторий которого отвечает затухающий аperiодический процесс осциллятора. Несмотря на то, что при всех начальных условиях наблюдается однотипное поведение осциллятора, некоторая, не принципиальная, разница в характере установления равновесного состояния всё-таки существует. Эта разница определяется расположением начальных условий на фазовой плоскости относительно ведущего и неведущих направлений узла (см. лекцию 3). Для узла

О эти направления задаются соответственно уравнениями

$$y = \lambda_1 x, \quad y = \lambda_2 x. \quad (5.23)$$

Прямые (5.23) делят фазовую плоскость на четыре области (см. рис.5.5а). Для начальных условий из областей 2, 4 аperiodически затухающие процессы характеризуются монотонным изменением переменных  $x(t)$ ,  $y(t)$ , а из области 1, 3 – наличием экстремумов в моменты времени, когда траектории пересекают ось абсцисс (см. рис.5.5).

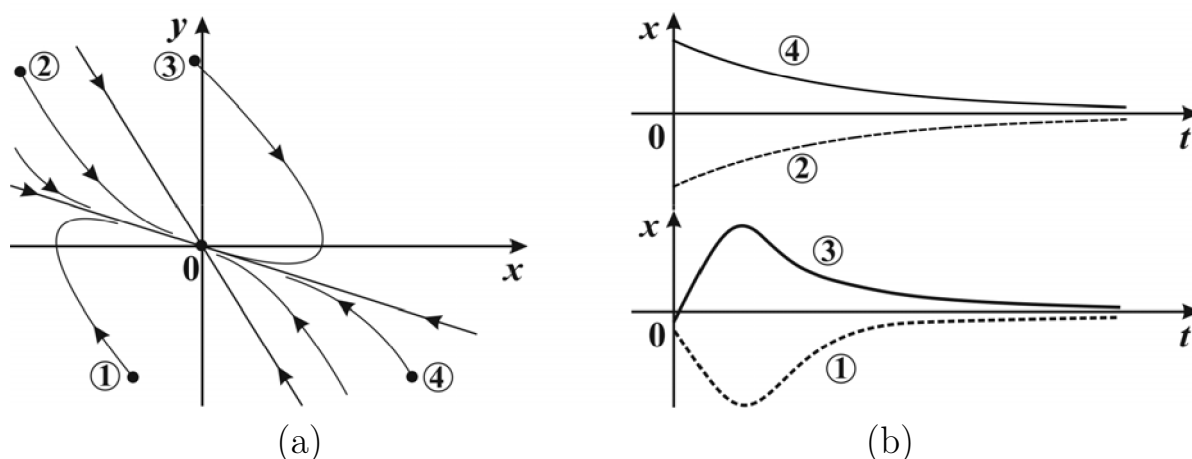


Рис. 5.5. Устойчивый узел (а); аperiodические затухающие процессы, соответствующие начальным условиям из области 1-4 (b).

### 5.1.3. Линейный осциллятор с «отрицательным» затуханием

Пусть в системе (5.16) теперь параметр  $\delta < 0$ . Рассмотрим изменение во времени полной энергии осциллятора, задаваемой уравнениями (5.14), (5.15). В силу системы (5.16) имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = y\dot{y} + \omega_0^2 x\dot{x} = -2\delta y^2 \quad (5.24)$$

Поскольку  $\delta < 0$  из (5.24) следует, что энергия  $E$  во времени растёт. Понятно, что для этого осциллятор должен пополнять энергию из вне, так как собственного источника энергии у него нет. В некоторых системах (так называемых активных) за счёт внешних источников энергии возможно формирование таких динамических процессов с «отрицательным» затуханием (трением) или «отрицательным» сопротивлением, приводящих к временному росту энергии. Примерами подобных систем являются: в радиоэлектронике

– устройства, содержащие элементы, у которых вольт-амперные характеристики имеют падающие участки, в механике – системы, в которых силы трения имеют нелинейную, с падающим участком, зависимость от относительной скорости трущихся поверхностей (например, маятники на вращающихся валах) и др. Динамика таких систем в окрестности равновесных состояний приближённо может быть описана с помощью системы (5.16) при  $\delta < 0$ .

Рассмотрим динамику системы (5.16) при  $\delta < 0$ . В этом случае из (??) и (5.22) следует, что состояние равновесия является неустойчивым фокусом если  $\delta^2 < \omega_0^2$  (см. рис.5.6а) или неустойчивым узлом, если  $\delta^2 \geq \omega_0^2$  (см. рис.5.6b). Следовательно, при  $\delta < 0$  осциллятор (5.24) описывает нарастающие колебания, примеры которых даны на рис.5.6с и рис.5.6d. В случае фокуса ко-

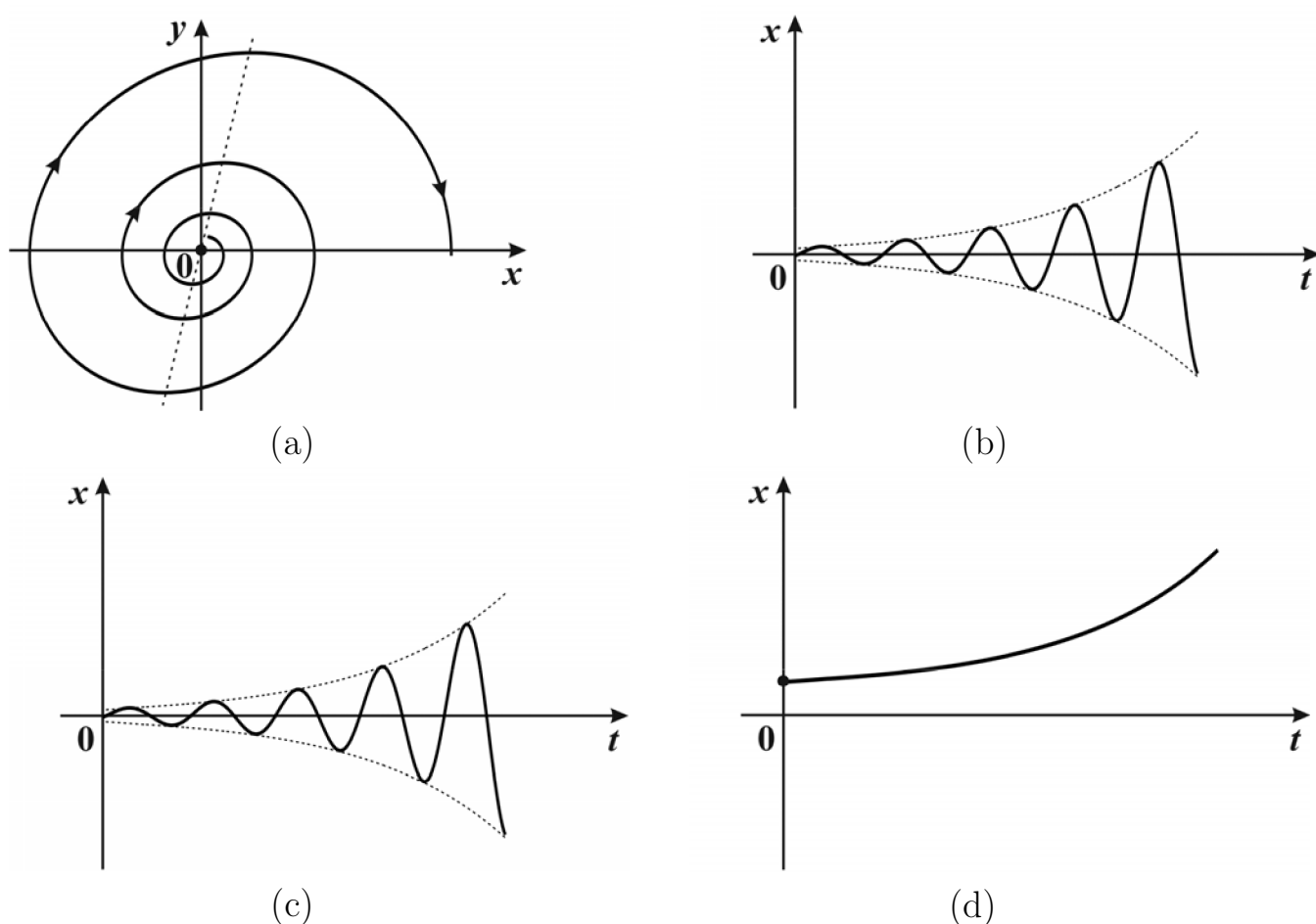


Рис. 5.6. Неустойчивый фокус (а); неустойчивый узел (b); осцилляторно нарастающий процесс (с); аperiodический нарастающий процесс (d).

лебание нарастают по экспоненциальному закону (рис. 5.6с), который характеризуется так называемым логарифмическим **инкрементом нарастания**  $\delta_1 = -\delta$ , применяемым без оговорок лишь для линейных систем. В случае узла вид нарастающих колебаний зависит от позиции на фазовой плоскости начальных условий относительно ведущего и неведущего направлений, т.е.

может происходить как монотонно (5.6с), так и не монотонно (с одним экстремумом) во времени.

Таким образом, «отрицательное» трение (потери) приводят к неограниченному росту колебаний, что, конечно, не может происходить в реальных системах. Этот рост является следствием линейной идеализации задачи и, как мы увидим в дальнейшем, нелинейные механизмы его ограничивают.

## 5.2. Динамика нелинейного осциллятора

Как мы уже отмечали, линейные системы представляют собой простейшие, идеализированные модели реальных процессов. Даже сильно упрощённые модели реальных систем, как правило, являются нелинейными. Например, незначительное изменение условий задач, рассмотренных в разделе 5.1, приводит к модели в виде уже нелинейного осциллятора. Так, если в задаче о колебаниях груза (рис.5.1b) не ограничиваться малыми смещениями, то сила с которой пружина действует на груз будет нелинейной функцией смещения и осциллятор становится нелинейным. Другим примером нелинейного осциллятора может служить электрический контур, представленный на рис.5.1a, в случае, если ёмкость  $C$  содержит сегнетоэлектрик.

### 5.2.1. Консервативный нелинейный осциллятор

Предположим, что рассеяние энергии в реальной системе происходит очень медленно – например, груз на пружине помещён в среду с очень малым трением, в электрическом контуре отсутствует сопротивление  $R$ , а омическое сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало и так далее. Ясно, что в этом случае диссипативные механизмы, обеспечивающие рассеяние энергии, не окажут сильного влияния (на не слишком больших временных интервалах) на динамику системы и ими можно пренебречь. Другими словами, можно считать, что в этом случае система является консервативной. Основной моделью таких систем является консервативный осциллятор, динамика которого описывается уравнением

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (5.25)$$

где  $f(x)$  – нелинейная функция. В частности, к уравнению вида (5.25) могут быть сведены упомянутые выше осцилляторы. Представим для удобства уравнения (5.25) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x). \end{cases} \quad (5.26)$$

Прежде всего, покажем, что динамика системы (5.26) является консервативной. Поделив второе уравнение системы (5.26) на первое и разделив переменные, имеем

$$y \, dy = -f(x) \, dx. \quad (5.27)$$

Проинтегрируем уравнение (5.27) от некоторого начального момента  $t = t_0$  до произвольного момента времени  $t$ . В результате получим

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = - \int_{x_0}^x f(x) \, dx, \quad (5.28)$$

где  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ . Нетрудно видеть, что уравнение (5.28) можно переписать в следующем виде

$$\frac{y^2}{2} + \int_0^{x_0} f(x) \, dx = h, \quad (5.29)$$

где

$$h = \frac{y_0^2}{2} + \int_0^{x_0} f(x) \, dx. \quad (5.30)$$

Из (5.30) следует, что  $h = \text{const}$  и представляет собой полную энергию осциллятора (5.26) в момент  $t = t_0$ . В левой же части уравнения (5.29) стоит полная энергия осциллятора в момент  $t$ , состоящая из суммы кинетической  $E_K$  потенциальной  $E_{\Pi}$  энергии, где

$$E_K = \frac{y^2}{2}, \quad E_{\Pi} = \int_0^x f(x) \, dx. \quad (5.31)$$

Таким образом, с одной стороны уравнение (5.29) задаёт закон сохранения энергии, а с другой – в неявном виде уравнение интегральных кривых, отвечающих данному  $h$ . Заметим, что, если для данного  $h$  из (5.29) найти действительных значений  $(x, y)$  не удаётся, то это означает, что энергия осциллятора (5.26) не может принимать такого значения.

Покажем теперь как, используя уравнение (5.29), можно построить фазовый портрет системы (5.26).

Предварительно приведём некоторые свойства траекторий, вытекающие непосредственно из системы (5.26) и уравнения (5.29). Из (5.26) следует, что

координаты состояний равновесия этой системы определяются системой

$$y = 0, \quad f(x) = 0$$

и, следовательно, они расположены на оси абсцисс. При этом, так как  $\dot{x} = 0$  при  $y = 0$  во всех точках оси абсцисс, отличных от состояний равновесия, касательные к траекториям имеют вертикальный наклон, то есть ось абсцисс на этих участках является изоклиной вертикальных наклонов. Кроме того, поскольку уравнение (5.29) инвариантно относительно замены  $y \rightarrow -y$ , то фазовые траектории системы (5.26) симметричны относительно оси абсцисс. Поэтому достаточно установить вид траекторий лишь на верхней полуплоскости, а поведение траекторий при  $y < 0$  можно найти, используя свойство симметрии.

Рассмотрим теперь процедуру построения фазового портрета системы (5.26) с помощью уравнения (5.29). Из (5.31) вытекает, что

$$\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x} = f(x)$$

Следовательно, в состояниях равновесия потенциальная энергия  $E_{\Pi}(x)$  либо достигает экстремума, либо имеет точку перегиба. Проанализируем поведение фазовых траекторий системы (5.26) в окрестности состояний равновесия, соответствующих этим трём случаям. Для этого из (5.29) выразим  $y$  через  $E_{\Pi}(x)$

$$y = \sqrt{2[h - E_{\Pi}(x)]} \quad (5.32)$$

Согласно (5.32) траектории системы (5.26) соответствующие данному  $h$ , существуют на фазовой плоскости только для тех  $x$ , где  $E_{\Pi}(x) \leq h$ . Причём, для  $x$ , удовлетворяющих уравнению  $E_{\Pi} = h$  и переменная  $y = 0$ . В силу (5.32) имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dE_{\Pi}}{dx}}{\sqrt{2[h - E_{\Pi}(x)]}}$$

Отсюда получаем, ещё одно свойство траекторной системы (5.26)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} > 0, & \text{если } \frac{dE_{\Pi}}{dx} < 0, \\ \frac{dy}{dx} < 0, & \text{если } \frac{dE_{\Pi}}{dx} > 0. \end{cases}$$

Опираясь на представленные здесь свойства траекторий, можно построить фазовый портрет системы (5.26), зная лишь вид функции  $E_{\Pi}(x)$ . Рис. 5.7 иллюстрирует методику такого построения в случае, когда  $E_{\Pi}(x)$  имеет локальные минимум, максимум и точку перегиба. Если функция  $E_{\Pi}(x)$  имеет минимум, то на фазовой плоскости система (5.26) имеет состояние равновесия

типа центр (см. рис.5.7а), которое устойчиво по Ляпунову. Максимум функции  $E_{\Pi}(x)$  соответствует на фазовой плоскости седло (см. рис.5.7b). Заметим, что в силу (5.32) у седла нелинейной системы (5.26) сепаратрисы имеют вид некоторых кривых, а не прямых, как в случае линейного осциллятора. Наконец, если  $E_{\Pi}(x)$  имеет точку перегиба, то на фазовой плоскости существует сложное состояние равновесия (см. рис.5.7с), имеющие два нулевых корня характеристического уравнения.

Изложенный выше приём построения фазового портрета осциллятора (5.26) справедлив не только для анализа поведения траекторий в окрестности состояний равновесия, но и для построения полного фазового портрета на всей фазовой плоскости. Продемонстрируем это на примере нелинейного осциллятора, описывающего колебание математического маятника.

Рассмотрим динамику маятника, состоящего из невесомого стержня длины  $l$  и груза массы  $m$  (см. рис.5.8а). Маятник находится в поле силы тяжести и может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса.

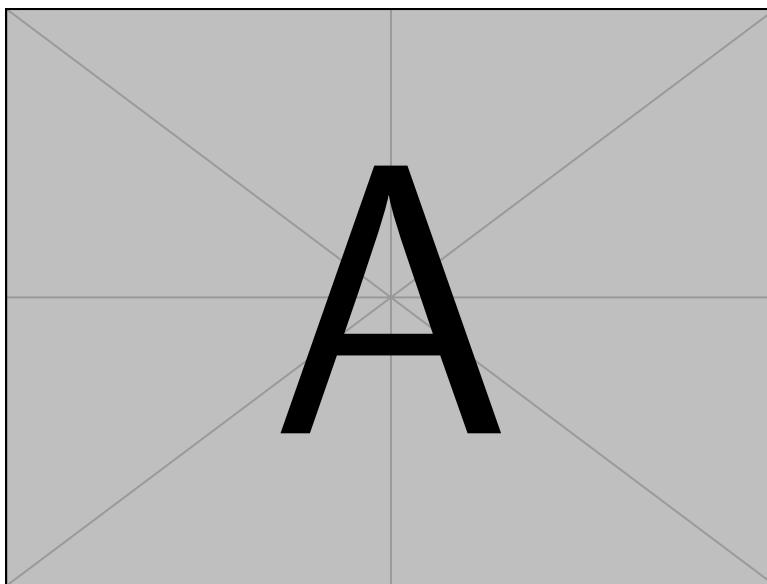


Рис. 5.7. Три различных вида функции  $E_{\Pi}(x)$  и отвечающие им фазовые портреты системы (5.26): состояние равновесия (а); состояние равновесия седло (b); сложное состояние равновесия с двумя нулевыми характеристическими корнями (с).

Пусть  $\varphi$  – угол отклонения маятника от вертикали. Запишем уравнение движения маятника

$$J \frac{d\omega}{dt} = \sum_k M_k, \quad (5.33)$$

где  $J$  – момент инерции груза,  $J = ml^2$ ,  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  – угловая скорость массы  $m$ ,  $M_k$  – момент сил, действующих на груз. На груз действует две силы –



тяжести и вязкого трения, которая пропорциональна мгновенной скорости и равна  $-kl\dot{\varphi}$ ,  $k > 0$ . Моменты этих сил будем вычислять относительно оси, проходящей через точку подвеса маятника перпендикулярно плоскости колебаний маятника. Они определяются следующим образом

$$M_1 = -mgl \sin \varphi, \quad M_2 = -kl^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (5.34)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения. Подставляя (5.34) в (5.33), получим

$$ml^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi - kl^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5.35)$$

Сделаем в (5.35) замену времени  $t = \sqrt{\frac{l}{g}}\tau$ , в результате которой это уравне-

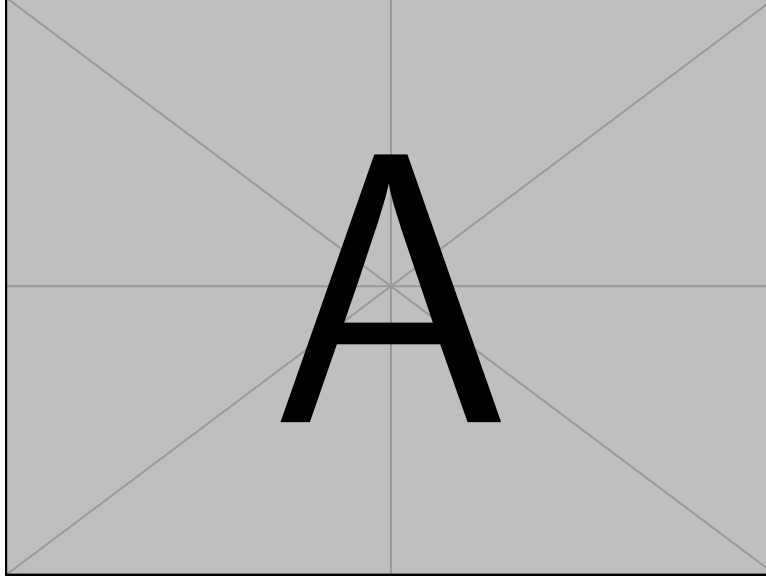


Рис. 5.8. Колебательные движения маятника (а), вращательные движения маятника (b); потенциальная функция (с); фазовый портрет осциллятора (5.36) (d).

ние примет вид

$$\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} + \sin \varphi = 0, \quad (5.36)$$

где точкой обозначено дифференцирование по  $\tau$ , а  $\lambda = \frac{k}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}$  – безразмерный параметр, характеризующий диссипативные потери в системе.

Исследуем сначала динамику уравнения (5.36) в случае отсутствия диссипативных потерь, т.е. в случае  $\lambda = 0$ . При  $\lambda = 0$  уравнение (5.36) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = -\sin \varphi. \end{cases} \quad (5.37)$$

В силу периодичности по  $\varphi$  правой части системы (5.37) её фазовым пространством является цилиндр  $G = S^1 \times \mathbb{R}$ . Цилиндричность фазового пространства системы (5.37) имеет ясный физический смысл – маятник может совершать движения как без вращения (см. рис.5.8а), так и с вращением вокруг точка подвеса (см. рис.5.8б). Для построения фазового портрета осциллятора (5.37) воспользуемся методикой изложенной выше. Рассмотрим потенциальную энергию осциллятора (5.37) –  $E_{\Pi}(\varphi) = -\cos \varphi$ . Построив график функции  $E_{\Pi}(x)$  (см. рис.5.8с) и расположим под ним развёртку фазового цилиндра, мы без труда получаем фазовый портрет осциллятора (5.37) (см. рис.5.8д). На цилиндрической фазовой поверхности существуют два состояния равновесия: центр –  $O_1(0, 0)$  и седло –  $O_1(\pi, 0)$ . Сепаратрисы седла делят все остальные нетривиальные траектории на два различных непрерывных семейства периодических траекторий. К первому семейству относятся периодические траектории из области ограниченной сепаратрисами. Эти траектории не охватывают фазовый цилиндр и определяют колебательные движения маятника, т.е. движения без проворотов вокруг оси подвеса (рис.5.8а). Второе семейство образуют периодические траектории, охватывающие фазовый цилиндр и отвечающие вращательным движениям маятника (рис.5.8б).

Перейдём к обсуждению свойств колебательных процессов осциллятора (5.37). Заметим, что система (5.37) легко сводится к одному уравнению с разделяющимися переменными, которое можно проинтегрировать и получить точные решения, дающие полную информацию о свойствах колебательных процессов. Такой путь требует привлечения теории эллиптических интегралов и эллиптических функций Якоби. Мы поступим по-другому – приведём здесь лишь качественные рассуждения, основанные на свойствах фазовых траекторий, которые позволяют, тем не менее, установить основные свойства колебательных процессов.

Рассмотрим сначала колебательные движения осциллятора, которые существуют, если начальная энергия  $h \in (-1, 1)$ . Для траекторий, локализованных в малой окрестности состояния равновесия  $O_1$  (начальная энергия близка к значению  $-1$ ), можно считать в первом приближении, что  $\sin \varphi \simeq \varphi$  и колебания осциллятора (5.37) близки к колебаниям линейного осциллятора. Следовательно, малые (вблизи дна потенциальной ямы) колебания осциллятора (5.37) будут периодическими квазисинусоидальными, в которых преобладает амплитуда с основной частотой  $\omega = 1$  и периодом  $T = 2\pi$  (см. рис.5.9а и рис.5.10а). Пусть теперь, начальная энергия близка к единице. Траектория, отвечающая такому уровню энергии, включает вблизи седла  $O_2$ . Поэтому на этих участках изображающая точка будет сильно замедлять своё движение, что приводит к формированию на графике  $\varphi(t)$  почти горизонтальных плато (рис.5.8б). Такие колебания называются **кноидальными**. Размер этих плато и период колебаний будут тем больше, чем ближе начальная энергия к

единице. Действительно, при  $h = 1$  сепаратрисы седел охватывают фазовый цилиндр, образуя пару двоякоасимптотических (так называемых **гомоклических**) траекторий, время движения по которым стремится к бесконечности. Отсюда и соображений непрерывности решений от начальных условий вытекает, что период колебаний траекторий, отвечающих значениям  $h$  вблизи единицы, монотонно растёт с ростом  $h$  и при  $h \rightarrow 1$  стремится к бесконечности. При этом основная частота близка к нулю, а амплитуды других гармоник имеют некоторое достаточно сложное распределение, которое приближённо описывается с использованием гиперболического косинуса (рис.5.10b).

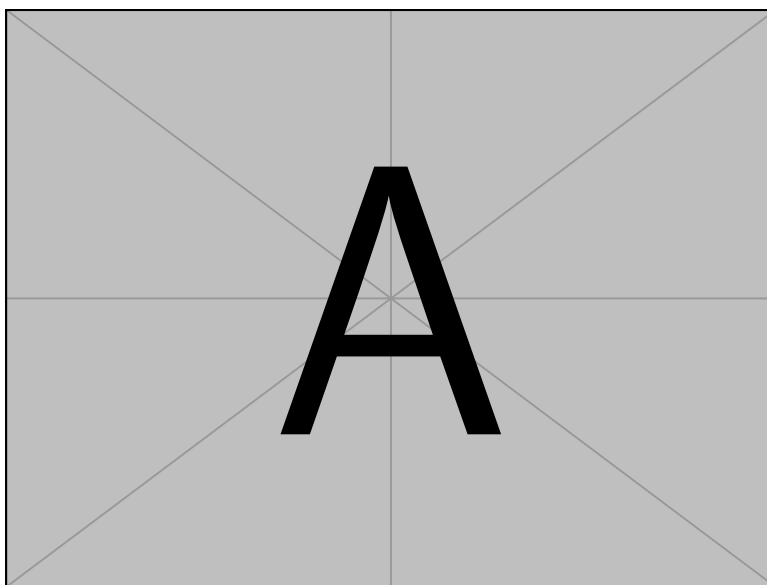


Рис. 5.9. Качественный вид зависимости угловой переменной  $\varphi(t)$  для различных периодических движений осциллятора (5.37): квазисуноидальные колебания (а); кноидальные колебания (b); зависимость  $\varphi(t)$  для двух вращательных траекторий с положительным вращением  $\varphi$  (c),(d).

Рассмотрим теперь вращательные движения осциллятора (5.37), которые существуют, если начальная энергия превосходит единицу. Непосредственно из вида фазовых траекторий (рис.5.10d) следует, что у таких траекторий зависимость  $\varphi(t)$  является непериодической функцией, а переменная  $y(t)$  (скорость маятника) изменяется периодически. Аналогичные предыдущему случаю рассуждения показывают, что для энергии близкой к единице как зависимость угловой переменной (рис.??), так и зависимость скорости  $y(t)$  будут содержать близкие к горизонтальным линиям плато. С увеличением  $h$  эти плато уменьшаются (рис.5.9d) и для достаточно больших  $h$  график  $\varphi(t)$  близок прямой. Действительно, рассмотрим полную энергию осциллятора (5.37)

$$\frac{y^2}{2} - \cos \varphi = h \quad (5.38)$$

Из (5.38) и системы (5.37), например, для вращательных движений при  $y > 0$ , имеем

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2(h + \cos \varphi)} = \sqrt{2h \left(1 + \frac{1}{h} \cos \varphi\right)}. \quad (5.39)$$

Поскольку косинус ограниченная функция, а коэффициент  $\frac{1}{h} \ll 1$ , если  $h \gg 1$ , то из (5.39) получаем

$$\dot{\varphi} \simeq \sqrt{2h}$$

и, следовательно, в этом случае

$$\varphi \simeq \sqrt{2h}t + \varphi_0.$$

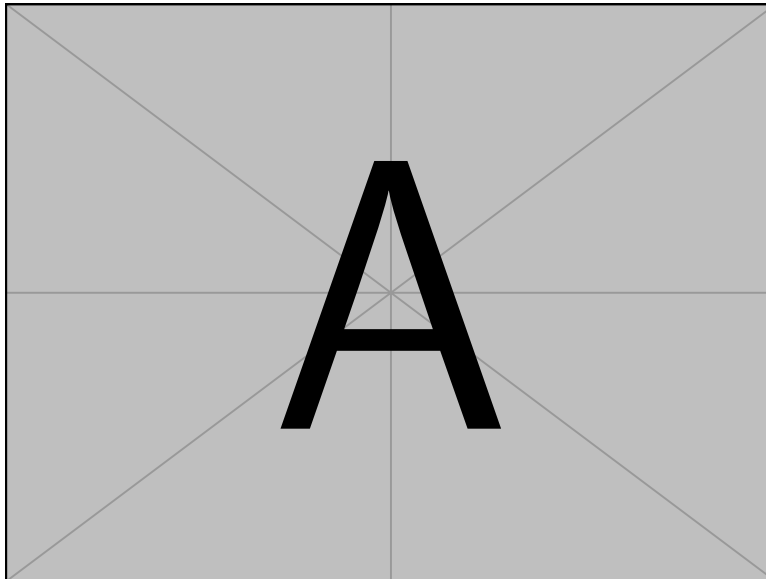


Рис. 5.10. Построенные численно спектры периодических движений осциллятора (5.37): спектр квазисинусоидальных (а); спектр апериодических колебаний (б). По оси ординат использован логарифмический масштаб, а амплитуда гармоник даны в децибелах.

Таким образом, основные динамические свойства консервативного нелинейного осциллятора вида (5.26) состоят в следующем.

- Динамика осциллятора полностью определяет величиной начальной энергии.
- Период колебаний зависит от начальных условий, т.е. периодические колебания нелинейного осциллятора **неизохронны**.
- Форма периодических колебаний может варьироваться в широких пределах – от квазисинусоидальных до кноидальных.

- Возможно одновременное сосуществование нескольких устойчивых (по Ляпунову) состояний равновесия, т.е. возможна **мультистабильность**.
- Разделение периодических траекторий на группы с принципиально различными свойствами осуществляется сепатрисами сёдел.

### 5.2.2. Нелинейный осциллятор с диссипацией

Рассмотрим, как изменится динамика нелинейного осциллятора, если учесть в системе действия диссипативных механизмов. Как и в случае линейного осциллятора, вклад диссипативных потерь будем учитывать слагаемым пропорциональным  $\dot{x}$  (см. раздел 5.2.2 и уравнение (5.36)). При таком предположении динамика нелинейного осциллятора с диссипацией будет описываться следующей системой

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda y - f(x), \end{cases} \quad (5.40)$$

где  $0 < \lambda$  – параметр, характеризующий диссипативные потери. Для исследования динамики системы (5.40) введём в рассмотрение полную энергию осциллятора (5.29)

$$E = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(x) dx$$

и рассмотрим её изменения во времени под действием системы (5.40). В силу (5.40) имеем

$$\frac{dE}{dt} = -\lambda y^2 \leq 0.$$

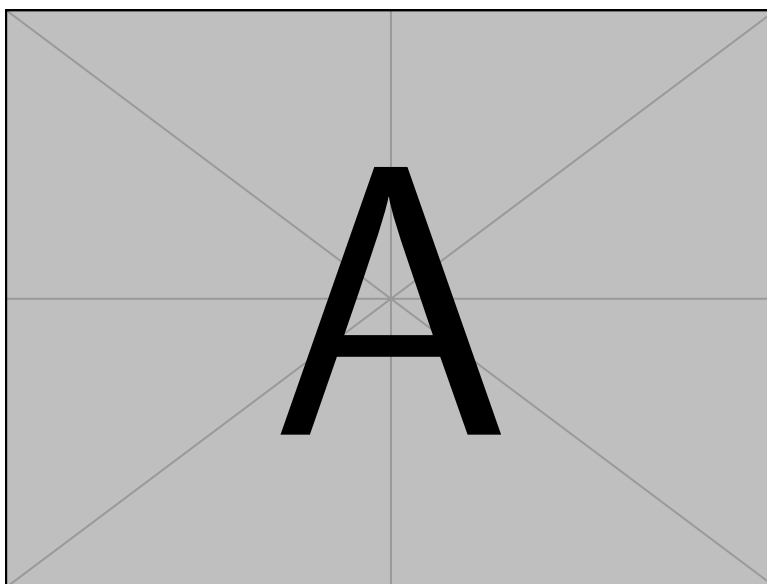


Рис. 5.11. Фазовые портреты осциллятора (5.40):  $O_1$  – устойчивый фокус (a);  $O_1$  – устойчивый узел (b).

## Глава 6.

# Основные свойства точечных отображений

*Отображение Пуанкаре. Неподвижные точки. Метод линеаризации. Одномерные и двумерные линейные отображения. Отображение Бернулли.*

На первой лекции мы уже сталкивались с понятием точечного отображения. Продолжим знакомство с этим важным и удивительным объектом нелинейной динамики. Можно выделить два основных сценария возникновения моделей в виде точечных отображений. Во-первых, для многих реальных систем характерно изменение их состояний лишь в некоторые моменты времени. Ясно, что наиболее адекватное описание поведения таких систем можно получить с помощью моделей с дискретным временем и, в частности, моделей в форме точечных отображений. Во-вторых, точечные отображения могут порождаться траекториями динамических систем с непрерывным временем.

### 6.1. Точечные отображения – модели дискретных систем

В настоящее время для управления самыми различными объектами и процессами широкое распространение получили цифровые автоматические системы. Такие системы оперируют цифровыми кодами, получаемыми из непрерывных сигналов путем их квантования по уровню и времени. В частности, в радиоавтоматике, связи, телевизионных системах, радиоизмерительных устройствах используются импульсно-фазовые системы автоподстройки частоты (ИФАП). Как и непрерывная система фазовой автоподстройки ча-

стоты (см. 4), система ИФАП содержит кольцо авторегулирования. Однако в кольце обратной связи системы ИФАП используется информация об ошибке, взятая в отдельные моменты времени. Для этого в типовую структуру схемы ФАП (рис. ??) вводятся дополнительные элементы: формирующее устройство, преобразующее синусоидальные сигналы генераторов в короткие импульсы, запоминающее устройство, фиксирующее выходное напряжение фазового детектора, который является импульсным, в промежутке между соседними импульсами. Типовая система ИФАП с идеальным запоминанием и отсутствием фильтра в цепи управления описывается уравнением

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) + \alpha F(\varphi(n)) = \gamma. \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) связывает разность фаз  $\varphi$  сигнала подстраиваемого генератора и опорного сигнала в соседние моменты времени  $n$  и  $n+1$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$  соответствует моментам времени  $t = n\tau_0$ , а  $\tau_0$  – период дискретизации. В (6.1)  $F(\varphi)$  –  $2\pi$ -периодическая функция – характеристика фазового дискриминатора, нормированная на единицу,  $\gamma = \Omega_H \tau_0$  – параметр пропорциональный начальной расстройке  $\Omega_H$  генераторов,  $\alpha = \Omega \tau_0$  – параметр цепи управления. В силу инвариантности уравнения (6.1) относительно преобразования  $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ , оно представляет собой точечное отображение окружности на себя.

Другими примерами реальных процессов, которые адекватно описываются точечными отображениями, могут служить колебания численности биологических популяций. Например, динамика некоторых популяций в замкнутой среде достаточно хорошо описывается (П.Ф. Ферхюльстом, 1845) так называемым логистическим отображением

$$x(n+1) = \mu x(n)(1 - x(n)),$$

где  $x(n)$  – нормированная численность особей в  $n$ -й год, а  $\mu$  – параметр, зависящий от плодовитости особей в  $(n+1)$ -й год –  $x(n+1)$  пропорциональна численности в предыдущий год –  $x(n)$  и свободной части жизненного пространства, которая в свою очередь пропорциональна величине  $(1 - x(n))$ .

## 6.2. Отображение Пуанкаре

Как мы уже отмечали, в некоторых случаях точечные отображения могут генерироваться траекториями динамических систем с непрерывным временем. Такие отображения называют **отображениями Пуанкаре**. Поясним процедуру возникновения отображения Пуанкаре на простейшем примере.



Рассмотрим систему с непрерывным временем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2\delta y - \omega_0^2 x, \end{cases} \quad (6.2)$$

где  $\delta$  и  $\omega_0$  – положительные параметры. Система (6.2) описывает динамику линейного осциллятора с диссипацией (см. 5). Пусть  $\omega_0^2 > \delta^2$ . В этом случае на фазовой плоскости системы (6.2) существует единственное устойчивое состояние равновесия в начале координат – устойчивый фокус, который притягивает все остальные траектории системы (рис. 6.1а). Покажем, что траектории системы (6.2) порождают одномерное точечное отображение полупрямой  $N = \{y = 0, x < 0\}$  на себя. Запишем общее решение системы (6.2)

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\delta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)], \\ y(t) = e^{-\delta t} [(C_2 \omega - \delta C_1) \cos(\omega t) - (C_2 \delta + C_1 \omega) \sin(\omega t)], \end{cases} \quad (6.3)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ,  $C^{1,2}$  – произвольные константы. Рассмотрим траекторию  $L$ , выходящую при  $t = 0$  из некоторой произвольной точки с координатами  $x = x_0$  ( $x_0 > 0$ ),  $y = 0$  (см. рис. 6.1а). Из (6.3) получаем уравнение траектории  $L$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\delta t} x_0 [\cos(\omega t) + \frac{\delta}{\omega} \sin(\omega t)], \\ y(t) = e^{-\delta t} x_0 \left( \frac{\delta^2}{\omega} + \omega \right) \sin(\omega t). \end{cases} \quad (6.4)$$

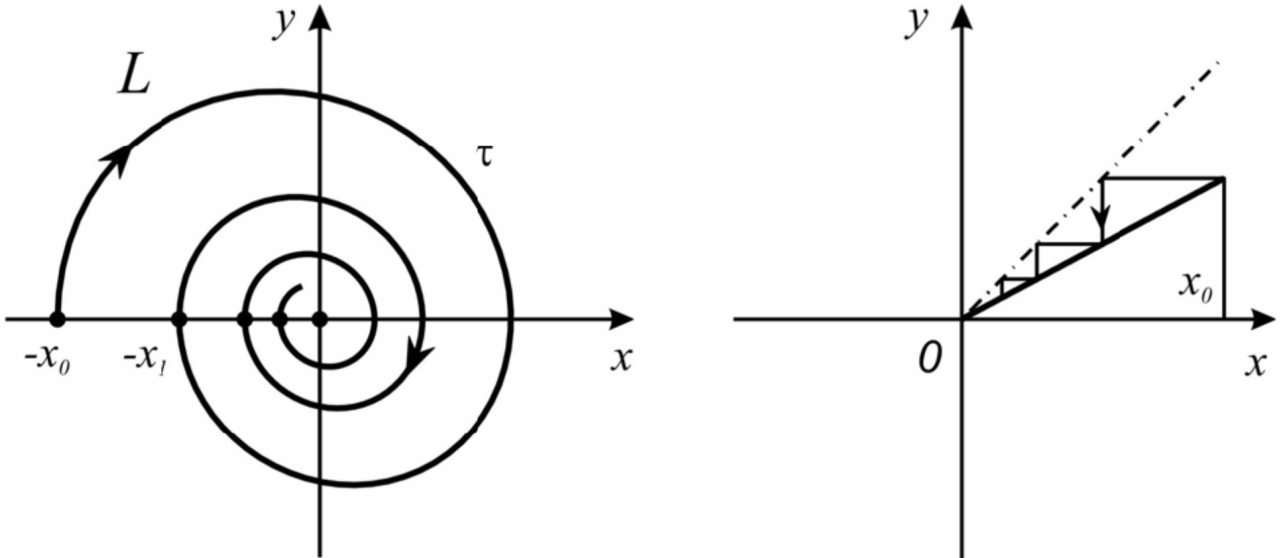


Рис. 6.1. Фазовый портрет системы (6.2) (а); отображение Пуанкаре (6.7) (б).

Найдём координату точки, в которой  $L$  первый раз пересекает полупрямую  $N$ . Обозначим через  $\tau$  время движения по траектории  $L$  между этой и начальной точками. Тогда координаты искомой точки можно найти из усло-

вий

$$y(\tau) = 0, \quad x(\tau) = -x_1. \quad (6.5)$$

Из (6.5), используя (6.4), получаем

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \text{ и } x_1 = e^{-\delta \frac{2\pi}{\omega}} x_0. \quad (6.6)$$

Поскольку точка  $x_0$  была произвольной, уравнение (6.6) задает преобразование любой точки полупрямой  $N$ , т.е. искомое точечное отображение

$$\bar{x} = e^{-\delta \frac{2\pi}{\omega}} x. \quad (6.7)$$

Отображение (6.7) – линейное точечное отображение. Качественный вид отображения представлен на рис. 6.1b. Его динамика чрезвычайно проста – любая траектория отображения асимптотически приближается к значению  $x = 0$ . Прямая  $N$ , на которой определено отображение Пуанкаре, называется **секущей Пуанкаре** (термин «секущая» отражает наличие потока траекторий, проходящего через нее).

Рассмотренный пример показывает, что для секущей Пуанкаре характерны следующие свойства

- возвращаемость траекторий;
- во всех точках траекторий пересекают секущую так, что наклон касательных к ним в этих точках не равен нулю (такое пересечение называется трансверсальным см. лекцию 1).

Заметим, что секущей Пуанкаре может быть не обязательно прямая, а, например, некоторая кривая (для систем на плоскости), на которой выполняются вышеперечисленные свойства. Очевидно, что в общем случае размерность секущей Пуанкаре на единицу меньше размерности фазового пространства динамической системы. Например, для систем с трехмерным фазовым пространством это двумерная поверхность. Секущая Пуанкаре может быть как локальной, когда ее пересекает лишь часть траекторий, так и глобальной, когда ее пересекают все траектории динамической системы (например, как в случае системы (6.2)). Заметим также, что отображение Пуанкаре существует далеко не всегда. Например, если на фазовой плоскости существует единственное состояние равновесия **седло**, с сепаратрисами, уходящими в бесконечность, то отображение Пуанкаре не существует.

Однако, существует важный класс динамических систем, для которого секущая Пуанкаре всегда существует и, более того, является глобальной. Это неавтономные системы с периодической правой частью (например, системы, находящиеся под действием периодического внешнего силового воздействия).

Поясним ситуацию на примере неавтономной системы второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t), \end{cases} \quad (6.8)$$

где  $f_i(x_1, x_2, t)$  – периодические функции с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Сделав в (6.8) замену  $t = \frac{\theta}{\omega}$ , получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \frac{\theta}{\omega}), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \frac{\theta}{\omega}), \\ \dot{\theta} = \omega. \end{cases} \quad (6.9)$$

Система (6.9) – автономная система третьего порядка, не имеющая состояний равновесия в силу того, что  $\dot{\theta} = \omega > 0$ . Отсюда также следует, что любая траектория системы (6.8), «стартующая» с плоскости  $\Sigma = \{t = t_0 = \text{const}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ , за конечное время придёт на плоскость  $\Sigma = \{t = t_0 + \frac{2\pi}{\omega}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$  (см. рис.6.2). В силу периодичности правых частей системы (6.8) плоскости  $\Sigma$  и  $\Sigma_1$

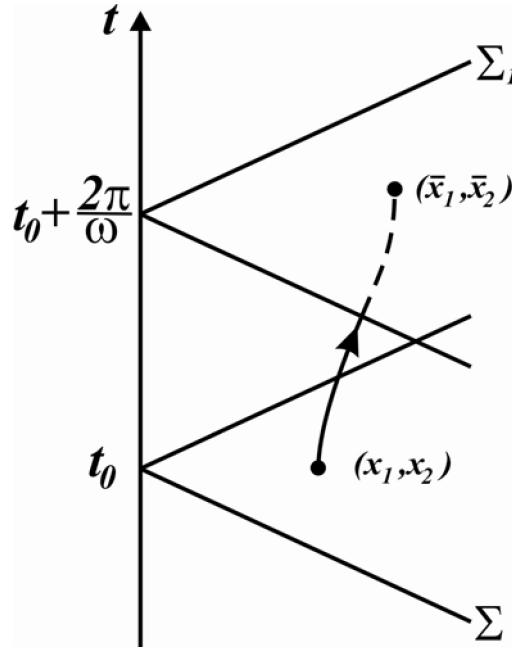


Рис. 6.2. Генерация отображения Пуанкаре системой (6.8)

тождественны и, следовательно, систему (6.8) порождает двумерное точечное отображение

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma.$$

Конечно, рассмотренный выше простейший пример (система (6.2)) введения отображения Пуанкаре не позволяет в полной мере судить о целесообразности

ности такой процедуры. Однако, позднее на более содержательных примерах мы покажем, что исследование динамических систем с помощью отображения Пуанкаре является одним из эффективных методов современной теории колебаний.

Перейдем к изучению свойств точечных отображений.

### 6.3. Неподвижные точки

Рассмотрим  $m$ -мерное нелинейное точечное отображение

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (6.10)$$

Напомним, что в (6.10)  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(n+1)$ , а  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(n)$ , а  $n$  – дискретное время. Аналогично случаю динамических систем с непрерывным временем, для системы (6.10) также можно ввести понятие полутраектории и траектории, которые задаются соответственно следующим образом

$$\{\mathbf{F}^n \mathbf{x}_0\}_{n=0}^{+\infty} \text{ и } \{\mathbf{F}^n \mathbf{x}_0\}_{n=-\infty}^{+\infty},$$

где  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ . Очевидно, что в фазовом пространстве системы (6.10) они представляют собой последовательности точек. Простейшим видом траекторий системы (6.10) являются так называемые неподвижные точки. Неподвижными точками отображения (6.10) называются такие значения  $\mathbf{x}$ , которые не изменяются под его действием, т.е. являются решениями системы

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (6.11)$$

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  – решение системы (6.11) и, следовательно,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  – одна из неподвижных точек отображения (6.10). Для неподвижных точек, аналогично состояниям равновесия конечномерных систем с непрерывным временем может быть введено понятие устойчивости по Ляпунову. Незначительное различие состоит в дискретности времени и траекторий. Далее, говоря об устойчивости неподвижных точек, мы будем понимать их устойчивость в смысле Ляпунова. Запишем отображение (6.10) в новых переменных

$$\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \quad (6.12)$$

Из (6.10) и (6.12) имеем

$$\mathbf{x}^* + \bar{\xi} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \xi). \quad (6.13)$$

Разлагая правые части системы (6.13) в степенные ряды по  $\xi$ , приходим к линейному  $m$ -мерному отображению

$$\bar{\xi} = \mathbf{A}\xi, \quad (6.14)$$

где  $\mathbf{A}$  – постоянная  $m \times m$ -матрица с элементами  $a_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{x=x^*}$ . Будем искать решение системы (6.14) в виде

$$\xi(n) = \mathbf{C}(s)^n, \quad (6.15)$$

где  $\mathbf{C}$  – постоянный вектор столбец. Подставляя (6.15) в (6.14), получим характеристический определитель

$$\det(\mathbf{A} - s\mathbf{E}) = 0, \quad (6.16)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная  $m \times m$ -матрица. Раскрывая определитель (6.16), приводим к характеристическому уравнению. Корни этого уравнения, которые обозначим через  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , называются **мультипликаторами** неподвижной точки  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ .

На предыдущей лекции мы отмечали, что структура траекторий в окрестности грубого состояния равновесия топологически эквивалентна ее линеаризации. Аналогичное утверждение справедливо и для неподвижных точек. Именно, если мультипликаторы неподвижной точки удовлетворяют условию  $|s_i| \neq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , то она является грубой (структурно устойчивой) и существует гомеоморфизм, который переводит каждую траекторию из достаточно малой окрестности неподвижной точки нелинейного отображения (6.10) в траекторию из окрестности соответствующей неподвижной точки линейного отображения (6.14) с сохранением направления движения. Следовательно, грубые неподвижные точки отображения (6.10) могут быть исследованы на устойчивость и классифицированы с помощью соответствующих линейных отображений. В частности, из (6.15) следует, что неподвижная точка  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  отображения (6.10) будет асимптотически устойчивой  $n \rightarrow +\infty$ , если все ее мультипликаторы  $s_i$  на комплексной плоскости лежат строго внутри единичной окружности, т.е. удовлетворяют условию

$$|s_i| < 1, i = 1, 2, \dots, m.$$

Если же среди мультипликаторов  $s_i$  существует хотя бы один расположенный на комплексной плоскости вне единичной окружности, то неподвижная точка  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  отображения (6.10) неустойчива по Ляпунову.

## 6.4. Одномерные линейные отображения

Рассмотрим отображения (6.14) в одномерном ( $m = 1$ ) случае

$$\bar{\xi} = a\xi, \quad (6.17)$$

где  $a$ - параметр,  $a \neq 0$ . Предположим сначала, что  $a \neq 1$ . Очевидно, что  $\xi = 0$  — неподвижная точка отображения (6.17). Будем искать решение уравнения (6.17) в виде (6.15). Подставляя (6.15) в (6.17) находим, что мультипликатор  $s = a$ . Следовательно, неподвижная точка  $\xi = 0$  является асимптотически устойчивой, если  $|a| < 1$  и неустойчивой, если  $|a| > 1$ .

Рассмотрим как переменная  $\xi(n)$  изменяется во времени  $n$  под действием отображения (6.17) при различных значениях параметра.

В случае одномерных отображений (отображение (6.10) в случае  $m = 1$ ) и, в частности, отображения (6.17), эволюцию  $\xi(n)$  удобно изучать с помощью так называемой **диаграммы Ламерея**. Отображение рассматривается не в фазовом пространстве, которое является одномерным, а на вспомогательной плоскости  $(x, \bar{x})$ . На этой плоскости каждой траектории отображения соответствует некоторая ломаная линия, которая строится следующим образом. Прежде всего, на плоскости  $(x, \bar{x})$  проводится построение графика функции  $F(x)$ , которую называют **функцией последования**. При этом точки пересечения этого графика с биссектрисой  $\bar{x} = x$  соответствуют неподвижным точкам отображения. Затем из точки на оси абсцисс, соответствующей начальному условию  $x_0$ , несовпадающему с координатами неподвижных точек, проводится вертикальная прямая до пересечения с графиком функции последования  $F(x)$ . Ордината найденной таким образом точки соответствует значению  $x(1) = F(x_0)$ . Далее из этой точки проводится горизонтальная прямая до пересечения с биссектрисой. Тем самым устанавливается новая начальная точка на оси абсцисс для нахождения следующей итерации отображения, т.е.  $x(2) = F(x(1))$ . Затем процедура повторяется и на плоскости  $(x, \bar{x})$ , формируется некоторая ломаная линия.

На рис. ?? представлены диаграммы Ламерея отображения (6.14) для различных значений параметра  $a$  и отвечающие им временные реализации переменной  $\xi(n)$ .

Заметим, что в случае  $a < 0$  на диаграмме Ламерея при каждой итерации изображающая точка меняет свое расположение относительно неподвижной точки и изменение переменной  $\xi$  во времени имеет немонотонный характер. При этом, если  $a = -1$ , все траектории отображения (6.17) являются периодическими с периодом 2 (рис.?? d). Действительно, в этом случае при любом начальном условии  $\xi(0)$  ( $\xi(0) \neq 0$ ) траектория возвращается в него через две итерации. Наконец, обратим внимание на то, что при  $a = 1$  отображение

(6.17) является вырожденным и имеет континуум неподвижных точек.

Рис. 6.3. Диаграмма Ламерея для отображения (6.17) и соответствующая эволюция переменной  $\xi(n)$  в случае  $0 < a < 1$  (а); в случае  $-1 < a < 0$  (б); в случае  $a > 1$  (с); в случае  $a < -1$  (д); в случае  $a = -1$  (е).

## 6.5. Двумерные линейные отображения

При  $m = 2$  отображение (6.14) принимает вид

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = a\xi_1 + b\xi_2, \\ \bar{\xi}_2 = c\xi_1 + d\xi_2, \end{cases} \quad (6.18)$$

где  $a, b, c, d$  - некоторые параметры, а характеристическое уравнение, определяющее мультипликаторы  $s_{1,2}$  неподвижной точки  $O(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ , записывается следующим образом

$$s^2 - (a + d)s + (ad - bc) = 0. \quad (6.19)$$

Проведем классификацию возможных типов неподвижной точки  $O$ , считая, что её мультипликаторы не лежат на единичной окружности, т.е.  $|s_{1,2}| \neq 1$ .

### 6.5.1. Действительные мультипликаторы

Предположим, что уравнение (6.19) имеет действительные мультипликаторы и выполнено условие  $s_1 \neq s_2$ . В этом случае, аналогично случаю линейных динамических систем с непрерывным временем, линейным невырожденным преобразованием координат (см. лекцию 3) система (6.18) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = s_1 u_1, \\ \bar{u}_2 = s_2 u_2. \end{cases} \quad (6.20)$$

Система (6.20) – нормальная форма уравнений грубой неподвижной точки с действительными мультипликаторами. Рассмотрим решение системы (6.20) с начальными условиями  $u_1(0) = u_1^0, u_2(0) = u_2^0$ :

$$u_1(n) = u_1^0(s_1)^n, u_2(n) = u_2^0(s_2)^n. \quad (6.21)$$

Непосредственно из (6.21) вытекают следующие свойства отображения (6.20).

- Если  $|s_{1,2}| < 1$ , то при любых начальных условиях  $u_1^0, u_2^0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_i(n) = 0, \quad i = 1, 2$$

и неподвижная точка  $O$  является асимптотически устойчивой.

- Если  $|s_1| < 1, |s_2| > 1$  или  $|s_1| > 1, |s_2| < 1$ , то неподвижная точка  $O$  является седловой.
- Если  $|s_{1,2}| > 1$ , то при любых нетривиальных начальных условиях  $u_1^0, u_2^0$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_i(n) = \infty, \quad i = 1, 2$$

и неподвижная точка  $O$  является неустойчивой.

Рассмотрим возможные фазовые портреты отображения (6.20) Ограничимся случаем выполнения условия  $s_1 \cdot s_2 > 0$ , представляющим наибольший интерес, поскольку этому условию удовлетворяют мультипликаторы неподвижных точек отображений Пуанкаре.

### Неподвижная точка устойчивый узел

Как было показано выше, для устойчивости неподвижной точки ее мультипликаторы на комплексной плоскости должны быть расположены внутри единичной окружности. В случае действительных мультипликаторов возможны два (при выполнении  $s_1 \cdot s_2 > 0$ ) варианта такого расположения.

**Положительные мультипликаторы.**  $1 > s_1 > s_2 > 0$ . Получим уравнение фазовых кривых отображения (6.20) в этом случае. Для этого возведем первое уравнение в системе (6.21) в степень  $\lg s_2$ , а второе – в степень  $\lg s_1$ . В результате получим

$$\begin{cases} (u_1(n))^{\lg s_2} = (u_1^0)^{\lg s_2} (s_1)^{n \lg s_2} \\ (u_2(n))^{\lg s_1} = (u_2^0)^{\lg s_1} (s_2)^{n \lg s_1}. \end{cases} \quad (6.22)$$

Поскольку

$$(u_2(n))^{\lg s_1} = C (u_1(n))^{\lg s_2}, \quad (6.23)$$

где

$$C = \frac{(u_2^0)^{\lg s_1}}{(u_1^0)^{\lg s_2}}.$$



Из (6.22) следует, что в рассматриваемом случае все траектории, за исключением траекторий, отвечающих значениям  $C = 0$  и  $C = \infty$ , имеют параболический вид и касаются в начале координат ось абсцисс, поскольку

$$\left. \frac{du_2}{du_1} \right|_{u_1=0} = 0.$$

При  $C = 0$  и  $C = \infty$ , фазовые кривые выражаются в прямые  $\{u_2 = 0\}$  и  $\{u_1 = 0\}$  соответственно. Из (6.23) следует, что любая нетривиальная траектория системы (6.20) асимптотически приближается к неподвижной точке, которая называется **устойчивым узлом** (см. рис.??), а прямые  $\{u_2 = 0\}$  и  $\{u_1 = 0\}$  его **ведущим** и **неведущим** направлениями.

**Отрицательные мультипликаторы.**  $-1 < s_1 < s_2 < 0$ . В этом случае свойства неподвижной точки  $O$  аналогичны предыдущему случаю, и она также называется устойчивым узлом. Однако, стремление траекторий к неподвижной точке имеет специфику, связанную с тем, что ее мультипликаторы отрицательны. Благодаря этому, при каждой итерации изображающая точка изменяет знак своих координат на противоположный. Другими словами, траектории стремятся к неподвижной точке, поочередно перескакивая на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  с одной фазовой кривой на другую. Однако, через одну итерацию изображающая точка вновь возвращается на первоначальную фазовую кривую, т.е. траектории отображения второй степени задаются тем же уравнением (6.23), в котором  $s_1$  и  $s_2$  нужно формально заменить на  $s_1^2$  и  $s_2^2$  соответственно.

**Неподвижная точка неустойчивый узел** Рассмотрим свойства отображений (6.20), когда оба мультипликатора расположены вне единичной окружности. Здесь, как и в предыдущем случае, они могут быть как положительными (см. рис.??с), так и отрицательными (см. рис.??d). В обоих случаях в силу (6.21) траектории отходят от неподвижной точки и, следовательно, она неустойчива. Такая неподвижная точка называется **неустойчивым узлом**. Фазовые кривые на плоскости по-прежнему задаются уравнением (6.23), по которым траектории отходят от неподвижной точки.

**Неподвижная точка седло** Пусть неподвижная точка  $O$  имеет один мультипликаторы вне, а второй – внутри единичной окружности, т.е.  $s_1, s_1$  удовлетворяют условиям:  $0 < s_1 < 1 < s_2$  (см.

Пусть неподвижная точка  $O$  имеет один мультипликаторы вне, а второй – внутри единичной окружности, т.е.  $s_1, s_2$  удовлетворяют условиям:  $0 < s_1 < 1 < s_2$  (рис. ??e) или  $s_2 < -1 < s_1 < 0$  (рис. ??f). По-прежнему

прямые  $\{u_2 = 0\}$  и  $\{u_1 = 0\}$  и являются инвариантными. Прямая  $\{u_2 = 2\}$  состоит из  $O$  и двух траекторий асимптотически стремящихся к ней, а прямая  $\{u_1 = 0\}$  включает в себя, кроме неподвижной точки  $O$ , две траектории, уходящие от нее. Такая неподвижная точка называется седлом. Две приближающиеся к ней траектории называются устойчивыми, а две удаляющиеся траектории – неустойчивыми сепаратрисами неподвижной точки  $O$ . Заметим, что уравнение (6.23) остается справедливым в рассматриваемом случае и показывает, что все траектории отображения, кроме сепаратрис, имеют вид гипербол, которые проходят мимо  $O$  (рис. ??e,f). При этом в случае отрицательных мультипликаторов изображающая точка двигается по траекториям со скачками. Пример такого движения показан на рис. ??f пунктирной линией. Обратим внимание, что на фазовой плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$  исходной системы (6.18) сепаратрисы седловой неподвижной точки имеют в общем случае вид прямых, не обязательно совпадающих с осями координат, как это имеет место для плоскости  $(u_1, u_2)$ .

## 6.5.2. Комплексные мультипликаторы

Предположим, что неподвижная точка  $O$  имеет комплексно-сопряженные мультипликаторы

$$s_{1,2} = \alpha \pm i\beta. \quad (6.24)$$

В этом случае переменные  $u_1$  и  $u_2$  в (6.20) являются комплексными, т.е.

$$\begin{aligned} u_1 &= u + iv, \\ u_2 &= u - iv. \end{aligned}$$

Подставляя (6.24), (??) в (6.20), получим

$$\begin{cases} \bar{u} + i\bar{v} = (\alpha + i\beta)(u + iv), \\ \bar{u} - i\bar{v} = (\alpha - i\beta)(u - iv), \end{cases} \quad (6.25)$$

Из (6.25) находим

$$\begin{cases} \bar{u} = \alpha u - \beta v, \bar{v} = \beta u + \alpha v. \end{cases} \quad (6.26)$$

Система (6.26) является нормальной формой уравнений грубой неподвижной точки с комплексно-сопряженными мультипликаторами. Исследуем свойства фазовых траекторий системы (6.26). Представим мультипликаторы  $s_{1,2}$  в три-

гонометрическом виде

$$s_{1,2} = |s|(\cos \omega \pm i \sin \omega),$$

где

$$|s| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \alpha = |s| \cos \omega, \quad \beta = |s| \sin \omega. \quad (6.27)$$

При использовании (6.27) система (6.26) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \bar{u} = |s|(u \cos \omega - v \sin \omega), \\ \bar{v} = |s|(u \sin \omega + v \cos \omega). \end{cases} \quad (6.28)$$

Переходя в системе (6.28) к полярным координатам

$$u = \rho \cos \varphi, \quad v = \rho \sin \varphi,$$

получим

$$\begin{cases} \bar{\rho} \cos \bar{\varphi} = |s|(\rho \cos \omega \cdot \cos \varphi - \rho \sin \omega \cdot \sin \varphi) = |s|\rho \cos(\varphi + \omega) \\ \bar{\rho} \sin \bar{\varphi} = |s|(\rho \sin \omega \cdot \cos \varphi + \rho \cos \omega \cdot \sin \varphi) = |s|\rho \sin(\varphi + \omega). \end{cases} \quad (6.29)$$

Разрешая систему (6.29) относительно  $\bar{\rho}$  и  $\bar{\varphi}$ , находим

$$\begin{cases} \bar{\varphi} = \varphi + \omega, \\ \bar{\rho} = |s|\rho. \end{cases} \quad (6.30)$$

В системе (6.31) уравнения для переменных  $\varphi$  и  $\rho$  независимы, что позволяет легко найти их решение и получить вид траекторий отображения

$$\begin{cases} \varphi(n) = \omega n + \varphi_0, \\ \rho(n) = \rho_0 |s|^n, \end{cases} \quad (6.31)$$

где  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\rho(0) = \rho_0$  - произвольные начальные условия. Из (6.31) следует, что при любых начальных условиях

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } |s| < 1, \\ +\infty, & \text{если } |s| > 1. \end{cases}$$

Следовательно, при  $|s| < 1$  неподвижная точка  $O$  является асимптотически устойчивой, а при  $|s| > 1$  - неустойчивой.

Рассмотрим теперь отвечающие рассмотренным случаям, фазовые портреты исходного отображения (6.26). С геометрической точки зрения первое

уравнение (6.31) задает преобразование поворота на угол  $\varphi = \omega$ , а второе – изменение в  $|s|$  раз длины полярного радиуса. Принимая это во внимание, устанавливаем, что траектории отображения (6.26) на фазовой плоскости  $(u, v)$  имеют вид спиралей, которые при  $|s| < 1$  скручиваются (см. рис.??h). В первом случае неподвижная точка  $O$  называется **устойчивым**, а во втором – **неустойчивым фокусом**. При  $|s| = 1$  переменная  $\rho$  не меняется во времени и задается начальным условием, а переменная  $\varphi$ , по-прежнему при каждой итерации увеличивается на  $\omega_0$ . Следовательно, в случае  $|s| = 1$  траектории отображения (6.26) имеют вид окружностей, радиусы которых определяются начальным условием  $\rho_0$ . Такая неподвижная точка называется **эллиптической**, поскольку на фазовой плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$  исходного отображения (6.18) её траектории, вообще говоря, имеют вид эллипсов.

## 6.6. Одномерные нелинейные отображения: некоторые понятия и примеры

Рассмотрим нелинейное отображение (6.10) в одномерном случае ( $m = 1$ ). В таких отображениях, в принципе, может существовать большое разнообразие самых различных траекторий. Простейшие из них, как уже знаем, это неподвижные точки. Рассмотрим (см. лекцию 1) некоторые другие.

**Периодические траектории или циклы.** Тогда  $x = x_0$  называется периодической  $k$  или  $k$ –циклом, если

$$F^k(x_0) = x_0 \text{ и } F^i(x_0) \neq x_0 \text{ при } 0 < i < k.$$

**Гомоклинические траектории (орбиты).** Траектория (орбита)  $\{F^n x\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  называется гомоклинической к неподвижной точке  $x = x^*$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} x(n) = x^*,$$

т.е. гомоклиническая траектория является двоякоасимптотической к неподвижной точке. Заметим, забегаая несколько вперед, что наличие у отображения гомоклинической траектории может служить признаком сложной динамики системы.

**Гетероклинические траектории.** Траектория  $\{F^n x\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  называется гетероклинической, если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = x_1^*, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} x(n) = x_2^*,$$

где  $x_1^*$  и  $x_2^*$  – различные неподвижные точки.

Как мы уже отмечали, одномерные точечные отображения удобно изучать не в фазовом пространстве, которое является одномерным, а на плоскости  $(x, \bar{x})$  с помощью диаграммы Ламерея. Построив на этой плоскости график функции  $F(x)$ , можно достаточно просто установить ряд локальных и нелокальных свойств траекторий отображения. Например, если график функции  $F(x)$  пересекает биссектрису в некоторой точке, то эта точка является неподвижной точкой отображения. Более того, она устойчива, если наклон касательной к кривой  $F(x)$  в этой точке по модулю меньше единицы (см. рис.6.4a,b) и неустойчива в противном случае (см. рис.6.4c,d).

Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из определения мультипликатора  $s = F'(x^*)$ . Нетрудно видеть также, что, если на некотором интервале значения  $x$ , функция  $F(x)$  монотонно возрастает, т.е.  $\frac{dF(x)}{dx} > 0$ , то траектории отображения на этом интервале монотонно возрастают, если  $F(x) > x$  (см. рис.6.4a,b) или монотонно убывающей на некотором интервале, то каждая траектория распадается на две монотонные последовательности, одна из которых возрастает, а другая убывает (см. рис.6.4b,d).

Знакомство с нетривиальными свойствами траекторий одномерных нелинейных отображений мы начнем с так называемого **отображения Бернулли**, простейшие свойства которого мы обсуждали на первой лекции. Оно задается следующим образом

$$\bar{x} = 2x \pmod{1} \quad (6.32)$$

На рис.6.5 представлена диаграмма Ламерея, соответствующая отображению (6.32). Заметим, что несмотря на то, что точка  $x = \frac{1}{2}$  делит интервал  $[0, 1]$  на две части, в каждой из которых отображение (6.32) является линейным, полное отображение является нелинейным (отображения такого типа называют кусочно-линейными).

Нетрудно видеть, что отображение (6.32) имеет две, отождествляемые между собой, неподвижные точки  $x = 0$  и  $x = 1$ . Покажем, что, несмотря на свой простой вид, отображений (6.32) может демонстрировать сложную динамику.

Запишем начальное условие  $x(0)$  в двоичной системе исчисления

$$x(0) = a_1, a_2, a_3, \dots, \quad (6.33)$$

где  $a_i \in \{0; 1\}$ . В (6.33)  $a_1 = 0$ , если  $x(0) < \frac{1}{2}$  и  $a_1 = 1$ , если  $x(0) > \frac{1}{2}$ . Представление (6.33) эквивалентно следующему

$$x(0) = a_1 \cdot 2^{-1} + a_2 \cdot 2^{-2} + a_3 \cdot 2^{-3} + \dots \quad (6.34)$$

Используя (6.34), находим, что

$$x(1) = 2x(0) = a_1 + a_2 \cdot 2^{-1} + a_3 \cdot 2^{-2} + \dots$$

и

$$x(1) = 0, a_2, a_3 \dots$$

Ясно, что последующие итерации отображения (6.33) происходят по аналогичному сценарию. Следовательно, действие отображения Бернулли на двоичное представление  $x$  сводится к удалению первого знака после запятой и сдвигу оставшейся последующей последовательности влево. Это свойство траекторий отображения (6.32) называется **сдвигом Бернулли**. Используя это свойство, покажем, что отображение (6.32) может демонстрировать сложную динамику.

Предположим, что двоичная последовательность (6.33) является периодической. Такой вид (6.33) имеет место, если  $x(0)$  – рациональное число. Поскольку каждое действие отображения (6.32) сдвигу Бернулли, то через некоторое число итераций, равное периоду двоичного кода представления (6.33), переменная  $x$  вернется в исходное состояние. Другими словами, отображение (6.32) имеет периодическую траекторию (цикл), период которой равен периоду представления (6.33). С другой стороны, на единичном интервале существует счетное множество рациональных чисел. Следовательно, отображение (6.32) имеет счетное множество циклов различного периода. Например, пусть  $x(0) = \frac{1}{3}$ . В двоичной системе исчисления имеем следующую динамику

$$x(0) = 0,01010101\dots$$

$$x(1) = 0,1010101\dots$$

$$x(2) = 0,01010101\dots$$

Следовательно, отображение (6.32) имеет периодическую траекторию периода 2 или 2-цикл. Рассмотрим две траектории отображения (6.32), стартующие с двух начальных условий  $x(0)$  и  $\tilde{x}(0)$ , различающихся лишь  $(n+1)$  знака в представлении (6.33), т.е. по крайней мере,  $a_{n+1} \neq \tilde{a}_{n+1}$ . Через  $n$ -итерация эти траектории будут иметь значения  $F^n(x(0))$  и  $F^n(\tilde{x}(0))$ , которые будут отличаться уже в первом знаке. Действительно, в силу действия сдвига Бернулли имеем

$$F^n(x(0)) = 0, a_{n+1} \dots$$

$$F^n(\tilde{x}(0)) = 0, \tilde{a}_{n+1} \dots$$

Следовательно, траектории отображения (6.32) обладают очень высокой чувствительностью к начальным условиям, что характерно для хаотических движений.

Кроме рассмотренных здесь свойств, отображение (6.32) обладает и другими, не менее интересными и сложными свойствами, которые мы обсудим позднее.

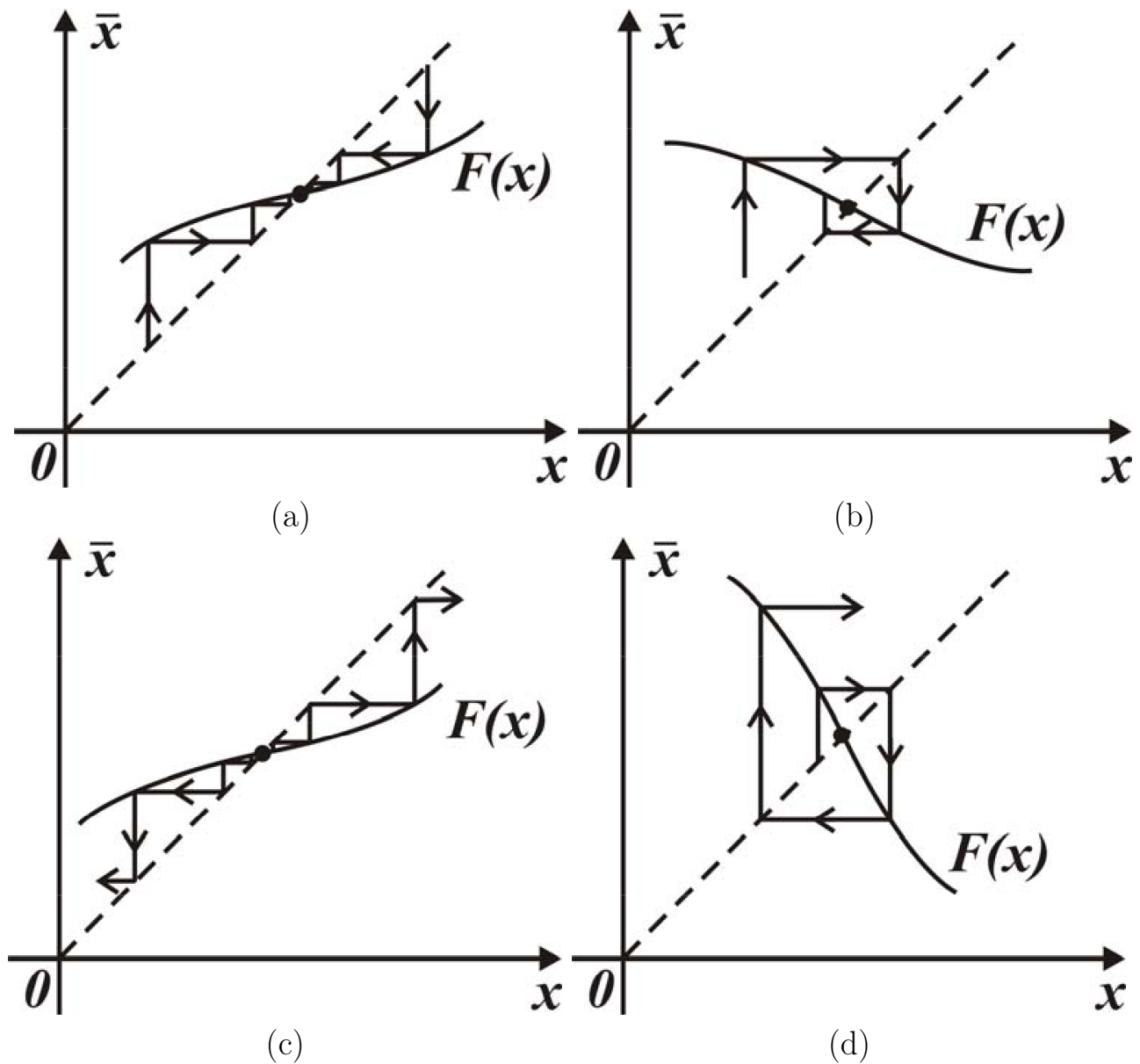


Рис. 6.4. Диаграмма Ламерея для различных видов функции последования  $F(x)$ : в случае устойчивых неподвижных точек (a) и (b); в случае неустойчивых неподвижных точек (c) и (d).



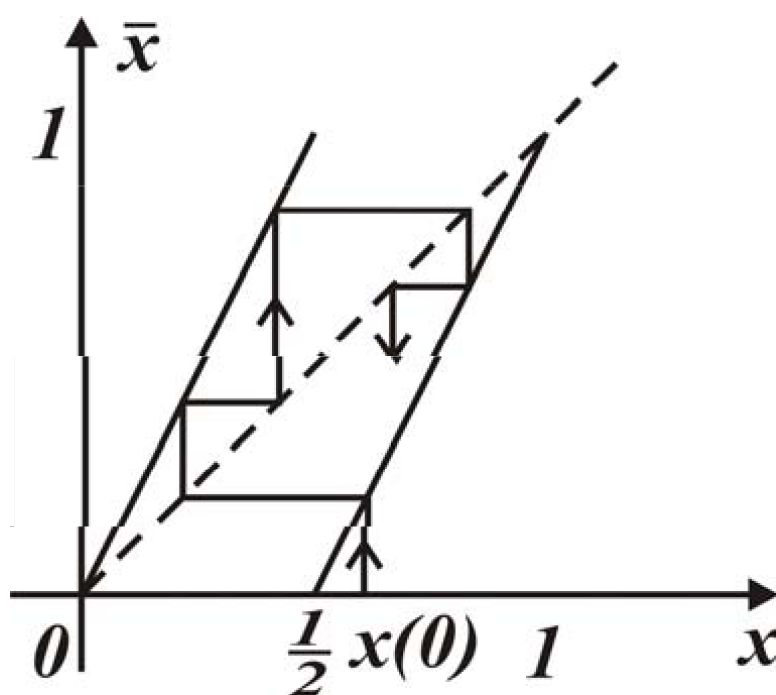


Рис. 6.5. Отображение Бернулли и несколько его итерация начального условия  $x(0)$

## Глава 7.

# Предельные циклы динамических систем на плоскости

*Понятие изолированной траектории и предельного цикла.  
Отображение Пуанкаре и устойчивость предельных циклов.  
Орбитальная устойчивость. Критерий Бендиксона-Дюлака.*

### 7.1. Изолированные и неизолированные периодические траектории. Определение предельного цикла

На предыдущих лекциях мы рассмотрели один из главных типов траекторий динамических систем – состояния (положения) равновесия, которым соответствуют состояния покоя реальных систем. Другой важный класс траекторий образуют так называемые **предельные циклы**, которым соответствуют периодические изменения во времени реальных систем. Рассмотрим предельные циклы динамических систем, заданных на фазовой плоскости

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (7.1)$$

Поскольку предельный цикл отображает периодические во времени процессы реальных систем, то на фазовой плоскости он должен быть представлен замкнутой фазовой траекторией. С замкнутыми фазовыми траекториями мы уже встречались при изучении динамики нелинейного осциллятора,

который, если имеет на фазовой плоскости периодические траектории, то их всегда континуум. Принципиальное отличие предельных циклов от периодических траекторий консервативных систем состоит в том, что они обладают свойством изолированности. **Замкнутая фазовая траектория называется изолированной, если существует достаточно малая кольцеобразная окрестность этой траектории, внутри которой нет других замкнутых траекторий.** Поясним смысл этого свойства на примере двух следующих систем

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 \quad (7.2)$$

и

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases} \quad (7.3)$$

Система (7.2) – гармонический осциллятор, фазовый портрет которого представлен на рис.7.1а. Система (7.2) имеет континуум замкнутых траекторий вида:  $x_1^2 + x_2^2 = C$ , где  $C = \text{const} > 0$ . Ясно, что в этом случае ни одна из замкнутых траекторий не является изолированной. Построим теперь фазовый

(a)

(b)

Рис. 7.1. Фазовые портреты системы (7.2) (a) и системы (7.3) (b).

портрет системы (7.3). Для этого перейдем в (7.3) к полярным координатам

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi. \quad (7.4)$$

Подставляя (7.4) в систему (7.3), получим

$$\begin{cases} \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = -\rho \sin \varphi + \rho(1 - \rho^2) \cos \varphi, \\ \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \rho \cos \varphi + \rho(1 - \rho^2) \sin \varphi. \end{cases} \quad (7.5)$$

Разрешая (7.5) относительно производных, находим уравнения для  $\rho$  и  $\varphi$

$$\dot{\rho} = \rho(1 - \rho), \quad \dot{\varphi} = 1. \quad (7.6)$$

Первое уравнение в системе (7.6) имеет два состояния равновесия – неустойчивое в точке  $\rho = 0$  и устойчивое в точке  $\rho = 1$ , а угловая переменная изменяется в соответствии с уравнением  $\varphi = t + \varphi_0$ , где  $\varphi_0 = \text{const}$ . Принимая во внимание эти свойства, устанавливаем фазовый портрет системы (7.3), представлений на рис. 7.1b. На фазовой плоскости существует единственная замкнутая изолированная фазовая траектория – предельный цикл  $L_0$ . Пусть при  $t = t_0$  переменная  $\varphi(t_0) = 0$ . Тогда из уравнения  $\varphi(t_0) = t_0 + \varphi_0$  находим, что  $\varphi_0 = -t_0$ . Отсюда и (7.4) получаем, что предельный цикл  $L_0$

задается следующим образом  $L_0 = \{x_1 = \cos(t - t_0), x_2 = \sin(t - t_0)\}$  (заметим, что в неявном виде цикл  $L_0$  задается уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ). Цикл  $L_0$  притягивает все, кроме состояния равновесия  $x_1 = x_2 = 0$ , траектории системы (7.3). Следовательно, в отличие от периодических движений консервативных систем, амплитуда которых определяется начальными условиями, периодические движения, отвечающие предельным циклам, имеют характеристики (амплитуду, период) в определенных пределах независимые от начальных условий (в случае системы (7.3) характеристики цикла  $L_0$  вообще не зависят от начальных условий) и, как будет показано позднее, полностью определяются параметрами динамической системы.

Таким образом, **предельным циклом называется замкнутая изолированная фазовая траектория**. Предельному циклу соответствует периодическое решение системы (7.1), т.е.

$$L_0 = \{x_1 = x_1^*(t), x_2 = x_2^*(t)\},$$

где  $x_i^*(t+T_0) = x_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $T_0 (T_0 > 0)$  – минимальный период. Заметим, что форма периодических колебаний, отвечающих предельным циклам, может меняться в самых широких пределах – от синусоидальной (например, как в системе (7.3)) до кноидальной.

## 7.2. Орбитальная устойчивость. Устойчивые и неустойчивые предельные циклы.

Предположим, что система (7.1) имеет предельный цикл  $L_0$  и существует такая кольцеобразная окрестность цикла, что все траектории, начинающиеся в этой окрестности, асимптотически приближаются к предельному циклу  $L_0$  (см. рис.7.2а). Следовательно, цикл  $L_0$  обладает признаками устойчивого поведения. Однако, из-за неизохронности траекторий в окрестности  $L_0$  определение устойчивости по Ляпунову в этом случае не выполняется и является слишком жестким.

### 7.2.1. Определение орбитальной устойчивости

Для преодоления этого противоречия в случае периодических траекторий вводят понятие так называемой орбитальной устойчивости, обладающей менее жесткими ограничениями. Сформулируем это определение для системы произвольной размерности (система (3.1), лекция 3). Пусть  $L = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)\}$ , где  $\mathbf{x}^*(t + T_0) = \mathbf{x}^*(t)$ , – периодическая траектория системы (3.1).

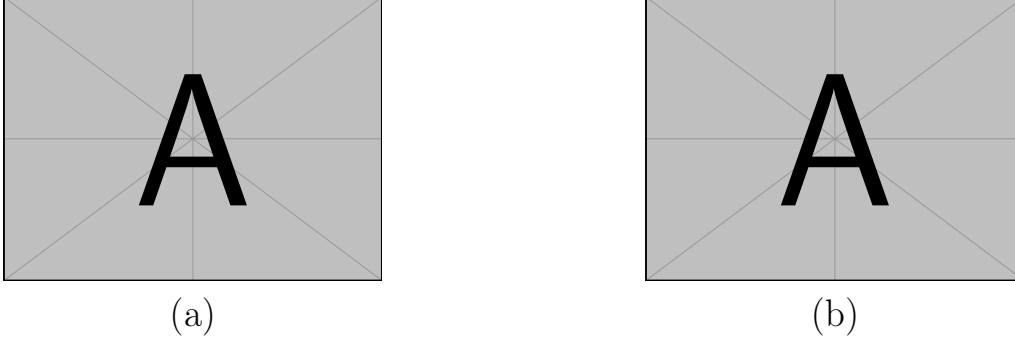


Рис. 7.2. Предельные циклы: устойчивый (a); неустойчивый (b)

**Определение 8.** Периодическая траектория  $L$  называется орбитально устойчивой при  $t \rightarrow +\infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  такое, что любая полутраектория  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t_0 \leq t < +\infty$ , для которой

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \delta,$$

в дальнейшем целиком содержится в  $\varepsilon$ -окрестности траектории  $L$ , т.е.

$$\rho(\mathbf{x}(t), L) < \varepsilon \text{ при } t \geq t_0,$$

где  $\rho(\mathbf{x}(t), L)$  – минимальное евклидово расстояние от  $\mathbf{x}(t)$  до траектории  $L$ :

$$\rho(\mathbf{x}(t), L) = \inf_L \|\mathbf{x}(t) - L\|.$$

Кроме того, если для всех траекторий, достаточно близких к  $L$ , расстояние  $\rho(\mathbf{x}(t), L) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то траектория  $L$  называется **орбитально асимптотически устойчивой**. Если же в сколь угодно малой окрестности существует хотя бы одна фазовая траектория, покидающая окрестность  $L$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то траектория называется неустойчивой.

Очевидно, что предельный цикл  $L_0$  системы (7.3), представленный на рис.7.1a, является орбитально асимптотически устойчивым (далее для краткости устойчивым), а на рис.7.2b – неустойчивым.

### 7.2.2. Характеристики предельных циклов

Пусть  $L_0$  – предельный цикл системы (7.1). Зафиксируем на  $L_0$  произвольную точку и проведем в этой точке касательную к  $L_0$ , а к ней – ортогональную прямую  $N$  (см. рис.7.3). Введем на  $N$  координату так, чтобы начало координат было в точке пересечения  $N$  и  $L_0$ . Рассмотрим поведение траекторий системы (7.1) в малой кольцеобразной окрестности предельного цикла  $L_0$ . Поскольку время движения вдоль предельного цикла  $L_0$  конечно, то в силу

теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий любая траектория системы (7.1) из малой окрестности  $L_0$ , «сартующая» с прямой  $N$  из точки  $\xi$ , через конечное время вернется на прямую  $N$  в некоторой точке с координатой  $\bar{\xi}$ . Другими словами, прямая  $N$  является локальной секущей Пуанкаре, на которой траектории системы (7.1) порождают точечное отображение Пуанкаре

$$\bar{\xi} = g(\xi). \quad (7.7)$$

Рассмотрим качественный вид функции последования  $g(\xi)$  в случае устой-

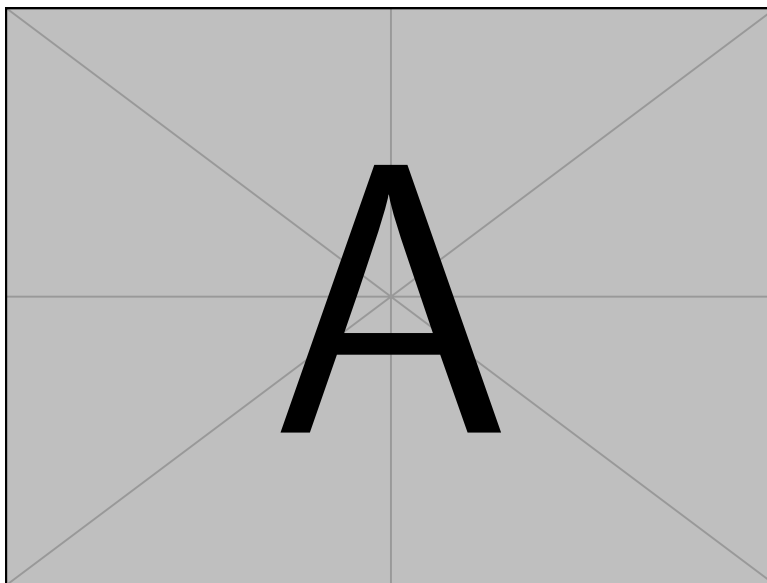


Рис. 7.3. Генерация отображения Пуанкаре в окрестности предельного цикла.

чивого и неустойчивого предельных циклов. Так как из малой окрестности устойчивого предельного цикла все траектории системы (7.1) асимптотически приближаются к циклу, то траектории соответствующего точечного отображения асимптотически стремятся к неподвижной точке  $\xi = 0$  отображения (7.7). Качественный вид отображения (7.7) в этом случае представлен на рис.7.4а. Рассуждая совершенно аналогично, устанавливаем качественный вид отображения (7.7) для неустойчивого предельного цикла (см. рис.7.4б). Следовательно, между устойчивостью предельных циклов и неподвижных точек соответствующих отображений Пуанкаре существует взаимно-однозначное соответствие. Это позволяет ввести характеристику предельного цикла – мультипликатор предельного цикла, как мультипликатор соответствующей неподвижной точки отображения (??), т.е. как величину

$$s = \left. \frac{dg}{d\xi} \right|_{\xi=0} = g'(0),$$

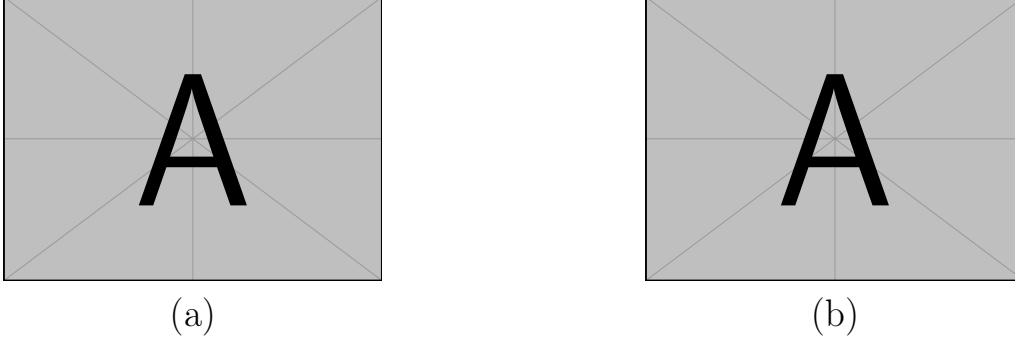


Рис. 7.4. Качественный вид отображения Пуанкаре в окрестности устойчивого (а) и неустойчивого (б) предельных циклов.

которая для предельных циклов на плоскости всегда является положительной. Мультипликатор устойчивого предельного цикла удовлетворяет неравенству  $s < 1$ , а неустойчивого —  $s > 1$ . Заметим, что, если уравнение предельного цикла известно, его мультипликатор может быть найден следующим образом

$$s = \exp \left\{ \int_0^{T_0} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{x^*(t)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{x^*(t)} \right] dt \right\},$$

Другой характеристикой предельных циклов является так называемый **характеристический показатель**. Его можно ввести следующим образом. Линеаризуем систему (7.1) на цикле  $L_0$ , полагая  $x_i = x_i^*(t) + \eta_i$ ,  $i = 1, 2$  и разлагая правые части системы (7.1) в ряды по степеням  $\eta_i$ . Тогда в линейном приближении получим

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij}(t) \eta_j(t), \quad i = 1, 2, \quad (7.8)$$

где

$$a_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{x^*(t)}, \quad a_{ij}(t + T_0) = a_{ij}(t).$$

Система (7.8) является линейной системой с периодическими коэффициентами. Общее решение системы (7.8) определяется теорией Флоке и имеет вид

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^2 C_j \Phi_{ij}(t) e^{\lambda_j t}, \quad i = 1, 2,$$

где  $C_j = \text{const}$ , а  $\Phi_{ij}$  — периодические функции периода  $T_0$ , а  $\lambda_j$  — постоянные называемые характеристическими показателями. Согласно теореме Андронова-Понтрягина для автономных динамических систем один из ха-

рактических показателей всегда равен нулю, а второй равен

$$\lambda = \frac{1}{T_0} \ln s$$

### 7.3. Вращательные и колебательные предельные циклы

Мы рассмотрели предельные циклы на фазовой плоскости. Однако существуют такие реальные системы, для адекватного описания поведения которых необходимо введение цилиндрического фазового пространства. Это системы, у которых одна из переменных является угловой. Типичным примером таких систем является обычный физический маятник. В динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством могут существовать предельные циклы двух видов – вращательные и колебательные. Первые из них охватывают фазовый цилиндр  $G = S^1 \times \mathbb{R}^1$  (см. рис.7.5а) и угловая переменная вдоль цикла непрерывно нарастает. Колебательные циклы не охватывают фазовый цилиндр  $G$  (см. рис.7.5а), а лежат на поверхности цилиндра и угловая координата колеблется около некоторого среднего значения.

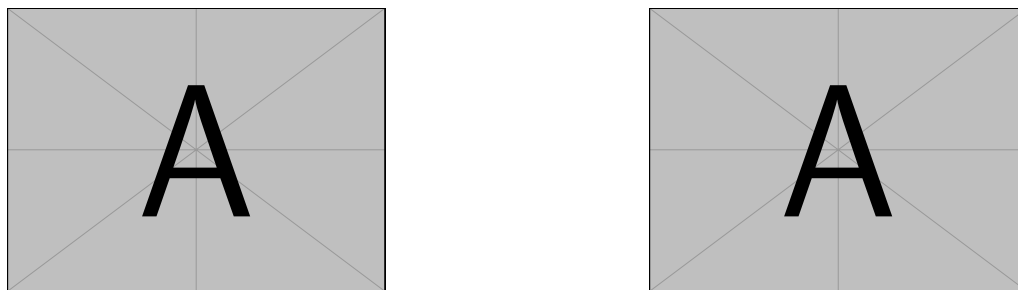


Рис. 7.5. Предельные циклы в цилиндрическом фазовом пространстве: вращательный (а); колебательный (b).

### 7.4. Критерий Бендиксона-Дюлака

Ясно, что для конкретных двумерных динамических систем задача о существовании или, наоборот, отсутствии предельных циклов является центральной. При этом доказательство отсутствия у системы предельных циклов не менее важно с практической точки зрения, чем доказательство противоположного утверждения. Действительно, если удалось установить отсутствие предельных циклов, то динамика системы полностью понятна – при любых



начальных условиях система приходит в одно из равновесных состояний. Одним из эффективных критериев выделения систем без замкнутых траекторий является критерий Бендиксона-Дюлака: **если существует такая непрерывная с непрерывными производными функция  $B(x_1, x_2)$ , что в некоторой односвязной области на фазовой плоскости выражение**

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Bf_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(Bf_2)$$

**знакопостоянно, то в этой области не существует замкнутых контуров, целиком составленных из фазовых траекторий системы (7.1).**

Заметим, что критерий Бендиксона-Дюлака дает достаточные условия отсутствия замкнутых фазовых траекторий. Этот критерий также применим и для систем с цилиндрическим фазовым пространством. В этом случае выполнение критерия Бендиксона-Дюлака в некоторой области, заключённой между двумя замкнутыми кривыми, охватывающими фазовый цилиндр, означает, что в этой области не существует колебательных предельных циклов, и не может быть более одного вращательного предельного цикла.

## Глава 8.

# Основные бифуркации состояний равновесия на плоскости

*Отображение Пуанкаре. Неподвижные точки. Метод линеаризации. Одномерные и двумерные линейные отображения. Отображение Бернулли.*

### 8.1. Бифуркационные условия

Напомним, что параметры, при которых система является негрубой, называются бифуркационными. Для того, чтобы задать те или иные бифуркационные условия нужно нарушить условия грубости (структурной устойчивости) динамической системы. На предыдущих лекциях мы установили, что состояние равновесия систем с двумерным фазовым пространством являются грубыми, если  $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\lambda_i$  — характеристические показатели состояния равновесия, а условие грубости предельного цикла имеет вид  $s \neq 1$  ( $\lambda \neq 0$ ), где  $s$  — мультипликатор (характеристический показатель) предельного цикла. Поэтому бифуркации состояний равновесия на плоскости происходят, когда, по крайней мере, один из характеристических показателей обращается в нуль, или когда характеристические показатели становятся мнимыми. Предельные циклы совершают бифуркации при значениях параметров, при которых их мультипликатор становится равным единице. Следовательно, для того чтобы описать ту или иную бифуркацию, необходимо задать некоторое число  $k$  условий типа равенства на параметры (условие вырожденности). Ясно, что степень вырожденности (степень негрубости) системы может быть различной. Например, бифуркация состояния равновесия

может происходить как в случае обращения в нуль только одного характеристического показателя, так и в случае, когда оба показателя одновременно становятся равными нулю. Поэтому, чтобы разделить бифуркации по степени негрубости, нужно ввести некоторое число условий невырожденности (условий типа неравенств). Таким образом, в пространстве параметров динамической системы бифуркационные условия задают некоторое многообразие коразмерности  $\mathbf{k}$ , а условия невырожденности выделяют на этом многообразии области, каждой из которых отвечает одна и та же определенная качественная структура разбиения фазового пространства на траектории. При этом любая  $\mathbf{k}$ -параметрическая система, удовлетворяющая  $\mathbf{k}$ -бифуркационным условиям и условиям невырожденности, может быть использована для изучения данной бифуркации и описывает ее в любой конкретной системе. Ясно, что наиболее распространенными бифуркациями являются бифуркации коразмерности 1, которые часто называют основными.

## 8.2. Седло-узловая бифуркация

Рассмотрим систему на фазовой плоскости, правые части которой зависят от параметра  $\mu$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu). \end{cases} \quad (8.1)$$

Без ограничения общности будем считать, что система (8.1) при  $\mu = 0$  имеет состояние равновесия  $O_0$  в начале координат. Будем предполагать, что у состояния равновесия  $O_0$  один из показателей равный нулю, а второй не равен нулю при всех  $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ , где  $0 < \mu_0 \ll 1$ . При этих предположениях нормальная форма для седло-узловой бифуркации на плоскости имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + l(\mu)u_1^2 + \dots \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu)u_2 + \dots \end{cases} \quad (8.2)$$

Для системы (8.2) бифуркационное условие задается следующим образом

$$\lambda_1(0) = 0,$$

а условия невырожденности –

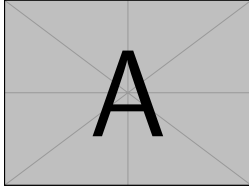
$$\lambda_2(\mu) \neq 0, \quad l(\mu) \neq 0, \quad \mu \in [-\mu_0, \mu_0].$$

Пусть для определенности  $l(\mu) > 0$  и  $\lambda_2(\mu) < 0$ . Построим фазовые портреты системы (8.2) для различных значений параметра  $\mu$ . Рассмотрим сначала ди-

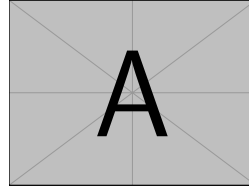
намику первого уравнения системы (8.2). На рис.8.2а представлено разбиении линии  $\{u_2 = 0 + \dots\}$  на траектории. При  $m < 0$  существует два состояния равновесия, имеющие координаты  $u_1 = \pm\sqrt{-\frac{\mu}{l}} + \dots$ . При  $\mu = 0$  они сливаются, образуя в начале координат двухкратное состояние равновесия (см. лекцию 2), которое исчезает при  $\mu > 0$ . Второе уравнение в системе (8.2) также является уравнением первого порядка и его свойства легко устанавливаются – любая траектория с нетривиальным начальным условием асимптотически стремится к значению  $u_2 = 0 + \dots$ . Опираясь на установленные свойства каждого из уравнений в системе (8.2), построим фазовые портреты системы (8.2). Легко видеть, что при  $\mu < 0$  система (8.2) имеет два состояния равновесия

$$O_1\left(u_1 = -\sqrt{-\frac{\mu}{l}} + \dots, u_2 = 0 + \dots\right), O_2 = \left(u_1 = +\sqrt{-\frac{\mu}{l}} + \dots, u_2 = 0 + \dots\right).$$

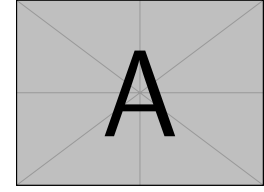
Точка  $O_1$  является устойчивым узлом, а  $O_2$  – седлом. Ведущее направление



(a)



(b)



(c)

Рис. 8.1. Фазовый портрет системы (8.2) для различных значений параметра  $\mu$  в случае  $\lambda_2(\mu) < 0$ ,  $l(\mu) > 0$ .

узла  $O_1$  задается уравнением  $u_2 = 0 + \dots$ , а неведущее –  $u_1 = -\sqrt{-\frac{\mu}{l}} + \dots$ . Неустойчивые и устойчивые сепаратрисы седла имеют, соответственно следующий вид

$$\{u_1 = 0 + \dots\} \text{ и } \left\{u_2 = \sqrt{-\frac{\mu}{l}} + \dots\right\}.$$

Входящие сепаратрисы сепаратрисы седла  $O_2$  делят окрестность начала координат на две области (см. рис.8.2а). Из одной из этих областей все траектории системы (8.2) с начальными условиями  $u_1(0) > \sqrt{-\frac{\mu}{l}} + \dots$ ,  $u_2(0) \neq 0$  покидают окрестность  $O_2$  асимптотически приближаясь к неустойчивой сепаратрисе. Все траектории системы (8.2), начинающиеся во второй области, асимптотически стремятся к устойчивому узлу  $O_1$ . При  $\mu = 0$  состояние равновесия  $O_1$  и  $O_2$  сливаются, образуя состояние равновесия  $O_0(0,0)$  (рис. 8.2b), которое называется седло-узлом или двукратным равновесием. Седло-узел  $O_0$  состоит из седловой и узловой областей. Структура узловой области качественно повторяет поведение траекторий в окрестности устойчивого уз-

ла. Седловая область состоит из одной одномерной выходящей сепаратрисы, уравнение которой  $u_2 = 0 + \dots$ , к которой, покидая окрестность  $O_0$ , асимптотически приближаются все остальные траектории. Разделение узловой и седловой областей осуществляется двумя траекториями вида  $u_1 = 0 + \dots$  (рис. 8.2b). При  $\mu > 0$  система (8.2) состояний равновесия не имеет, и все траектории покидают окрестность начала координат (рис. 8.2c).

Пусть теперь  $\lambda_2(\mu) > 0$ , а  $l(\mu)$  по-прежнему является положительной величиной. Очевидно, что поведение переменной  $u_1$  не меняется, а  $u_2$  ( $u_2(0) \neq 0$ ) с течением времени возрастает. Принимая во внимание эти свойства и рассуждая аналогично предыдущему, устанавливаем фазовые портреты системы (8.2) (см. рис.??)

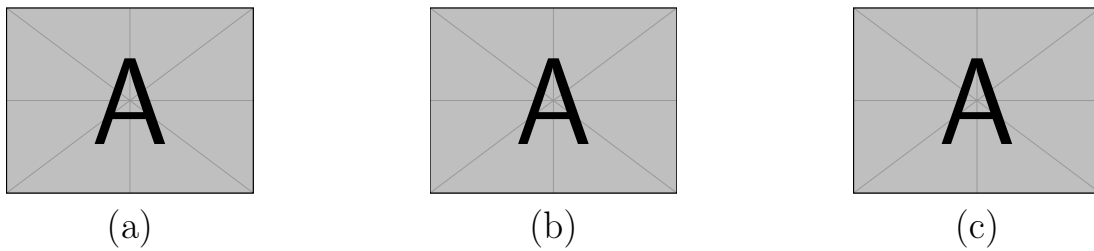


Рис. 8.2. Фазовый портрет системы (8.2) для различных значений параметра  $\mu$  в случае  $\lambda_2(\mu) > 0$ ,  $l(\mu) > 0$ .

В этом случае состояние равновесия  $O_1$  является седлом, а  $O_2$  – неустойчивым узлом. Как и в предыдущем случае, при  $\mu = 0$  образуется седло-узел  $O_0$ , но в этом случае узловая область состоит из неустойчивых траекторий (рис. ??b), а сепаратриса седловой области является устойчивой. Кроме этой сепаратрисы и точки  $O_0$ , все траектории системы (8.2) покидают окрестность  $O_0$ . При  $\mu > 0$  состояние равновесия  $O_0$  исчезает и все траектории покидают окрестность начала координат, удаляясь от линии  $\{u_2 = 0 + \dots\}$  (рис. ??c). Таким образом, седло-узел (двукратное равновесие) – негрубое состояние равновесия, которое при сколь угодно малом изменении параметра либо распадается на два грубых, либо исчезает. В качестве примера возникновения седло-узловой бифуркации рассмотрим динамику математического маятника в вязкой среде с приложенным внешним вращающим моментом (рис. 8.3). Динамика маятника описывается системой следующего вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = \gamma - \sin \varphi - \lambda y, \end{cases} \quad (8.3)$$

где  $\varphi$  – угол отклонения маятника от вертикали, параметр  $\gamma > 0$  характеризует действие внешнего вращательного момента, а  $\lambda > 0$  – вязкость среды. Фазовый пространством системы (8.3) является фазовый цилиндр  $G = S^1 \times \mathbb{R}$ . Нетрудно видеть, что при  $\gamma < 1$  система (8.3) имеет в  $G$  два состояния

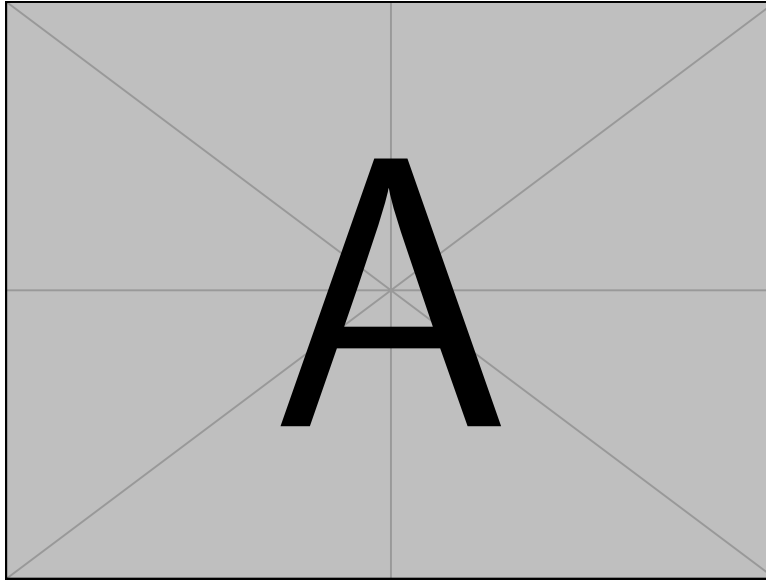


Рис. 8.3. Математический маятник с приложенным внешним вращающим моментом.

равновесия:  $O_1(\varphi = \varphi_1, y = 0)$  и  $O_2(\varphi = \varphi_2, y = 0)$ , где  $\varphi_1 = \arcsin \gamma$ ,  $\varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma$ . Состояние равновесия  $O_1$  имеет следующие характеристические показатели

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \sqrt{1 - \gamma^2}}. \quad (8.4)$$

Из (8.4) следует, что при  $\lambda^2 \geq 4\sqrt{1 - \gamma^2}$  точка  $O_1$  является устойчивым узлом, а при  $\lambda^2 < 4\sqrt{1 - \gamma^2}$  - устойчивым фокусом. Точка  $O_2$ , всегда седло. При  $\gamma = 1$  существует одно состояние равновесия  $O_0(\varphi = \frac{\pi}{2}, y = 0)$ , а при  $\gamma > 1$  система (8.3) состояний равновесия не имеет. Следовательно, при  $\gamma = 1$  происходит слияние точек  $O_1$  и  $O_2$  и образование двухкратного равновесия  $O_0$ . Поскольку в окрестности значения  $\gamma = 1$  состояние равновесия  $O_1$  - устойчивый узел, а  $O_2$  седло, то состояние равновесия  $O_0$  - седло-узел с устойчивой узловой областью и неустойчивой выходящей сепаратрисой.

### 8.3. Бифуркация Андронова-Хопфа

Предположим, что состояние равновесия  $O_0$  системы (8.1) имеет комплексно-сопряженные характеристические показатели  $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$  и при  $\mu = 0$  выполняется бифуркационное условие

$$\alpha(0) = 0. \quad (8.5)$$

Пусть будут выполнены также следующие условия невырожденности

$$\beta(\mu) \neq 0, \quad L(\mu) \neq 0, \quad \left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} \neq 0. \quad (8.6)$$

Величина  $L(\mu)$  называется **первой ляпуновской величиной** для  $O_0$  и от её знака при  $\mu = 0$  зависит структура разбиения фазовой плоскости на траектории в окрестности состояния равновесия. Нормальная форма для бифуркации Андронова-Хопфа имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha(\mu)u_1 - \beta(\mu)u_2 + L(\mu)(u_1^2 + u_2^2)u_1 + \dots \\ \dot{u}_2 = \beta(\mu)u_1 + \alpha(\mu)u_2 + L(\mu)(u_1^2 + u_2^2)u_2 + \dots \end{cases} \quad (8.7)$$

Опишем кратко процедуру приведения системы (8.1) к виду (8.7). Условно ее можно разбить на несколько «шагов». Первый шаг процедуры состоит в разложении правых частей системы (8.1) в окрестности точки  $O_0$  в ряды Тейлора до третьей степени. Затем с помощью линейного преобразования координат (см. лекцию 3) матрица линейной части системы преобразуется к жордановой форме. После этого, с помощью нелинейного преобразования координат, исследуемая система приводится к виду, когда в ее правых частях отсутствуют квадратичные слагаемые. Такое преобразование координат существует при выполнении условий (8.5), (8.6).

Перейдем в системе (8.7) к полярным координатам с помощью замены  $u_1 = \rho \cos \varphi$ ,  $u_2 = \rho \sin \varphi$ . В результате получим эквивалентную (8.7) систему вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \beta(\mu) + \dots \\ \dot{\rho} = \alpha(\mu)\rho + L(\mu)\rho^3 + \dots \end{cases} \quad (8.8)$$

Анализ системы (8.8) удобнее провести, рассматривая сначала динамику первого и второго уравнений отдельно. Пусть для определенности зависимость  $\alpha(\mu)$  удовлетворяет условию  $\alpha(\mu) \cdot \mu > 0$ , если  $\mu \neq 0$ . Из первого уравнения в системе (8.8) имеем

$$\varphi(t) = \beta(\mu)t + \varphi_0 + \dots, \quad (8.9)$$

где  $\varphi_0 = \text{const}$ . Следовательно, переменная  $\varphi$  совершает вращательные движения с частотой  $\beta(\mu)$ . Динамика второго уравнения в (8.8) зависит от знака величины  $L(\mu)$ .

### 8.3.1. Первая ляпуновская величина отрицательна.

Предположим, что  $L(0) < 0$ . В этом случае, кроме тривиального состояния равновесия, существующего при всех значениях параметра  $\mu$ , второе

уравнение при  $\mu > 0$  имеет также нетривиальное состояние равновесия. Тривиальное состояние равновесия является  $\rho = \sqrt{\frac{\alpha(\mu)}{L(\mu)}}$ . Тривиальное состояние равновесия является устойчивым при  $\mu \leq 0$  и неустойчивым при  $\mu > 0$ , а нетривиальное состояние является устойчивым (рис. 8.5b). Отсюда, принимая во внимание (8.9), устанавливаем фазовый портрет системы (8.7) для различных значений параметра  $\mu$  (рис. 8.5c). При изменении параметра  $\mu$  состояние равновесия  $O_0$  теряет устойчивость, и из него рождается устойчивый предельный цикл. Обратим внимание на то, что в момент бифуркации состояние равновесия является устойчивым сложным фокусом, у которого «шаг» спирали существенно меньше, чем у обычного фокуса, поскольку при  $\mu = 0$  переменная  $\rho$  изменяется в соответствии с уравнением

$$\dot{\rho} = L(0)\rho^3 + \dots$$

### 8.3.2. Первая ляпуновская величина положительна

Пусть теперь  $L(0) > 0$ . В этом случае нетривиальное состояние равновесия уравнения для  $\rho$  существует при  $\mu < 0$  и является неустойчивым (рис. ??a). Тривиальное состояние равновесия устойчиво при  $\mu < 0$  и неустойчиво при  $\mu \geq 0$ . Такая динамика переменной  $\rho$  при учете (8.9) приводит к фазовому портрету системы (8.8), представленному на рис. ??b. В этом случае предельный цикл является неустойчивым и существует при  $\mu < 0$ . При  $\mu = 0$  цикл стягивается в точку и состояние равновесия  $O_0$  становится неустойчивым сложным фокусом.

### 8.3.3. «Мягкое» и «жесткое» рождение периодических колебаний

Рождение цикла в случае  $L(0) < 0$  часто называют **мягким** (в английской литературе supercritical bifurcation, отражая этим термином факт появления предельного цикла после прохождения параметром бифуркационного значения), поскольку амплитуда цикла плавно нарастает от нуля. При этом границу области устойчивости состояния равновесия  $O_0$  (значение  $\mu = 0$ ) принято называть «безопасной», так как, несмотря на потерю устойчивости при  $\mu > 0$ , состояние реальной системы сохраняется в малой окрестности точки  $O_0$ . Совершенно иная ситуация в случае  $L(0) > 0$  (это так называемая subcritical bifurcation; термин «subcritical» отражает существование предельного цикла до прохождения бифуркационного значения). Здесь при нарушении условий устойчивости все траектории из окрестности  $O_0$  переходят на



другой аттрактор. Если новый аттрактор является предельным циклом, то говорят о жёстком рождении периодических колебаний. При этом граница области устойчивости называется «опасной», так как происходит резкое изменение состояния реальной системы.

Величина  $L(0)$  может быть вычислена через правые части системы (8.1) с помощью следующей формулы

$$L(0) = \frac{1}{16} \left[ \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2^3} \right] + \frac{1}{16\beta(0)} \left[ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \right) \right] \\ + \frac{1}{16\beta(0)} \left[ -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \right],$$

где производные вычисляются в состоянии равновесия.

Отметим, что впервые бифуркация рождения предельного цикла из состояния равновесия с чисто мнимыми характеристическими показателями в системах на фазовой плоскости была обнаружена в 1939 году А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович. В 1942 году Э.Хопф распространил эту теорию на случай многомерных систем. Выражение для первой ляпуновской величины было получено Н.Н. Баутиным в 1949 году.

## 8.4. Затягивание потери устойчивости при динамической бифуркации Андронова-Хопфа.

Во многих практических задачах параметры системы не являются строго постоянными, а медленно изменяются во времени. Рассмотрим влияние этого эффекта на бифуркацию Андронова-Хопфа на примере следующей системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (8.10)$$

где  $\mu$  - контрольный параметр.

Пусть сначала  $\mu = \text{const}$ . Нетрудно видеть, что в этом случае система (8.10) имеет вид (8.7) с  $\alpha(\mu) = \mu$ ,  $\beta(\mu) = 1$  и  $L(\mu) = -1$ . Следовательно, система (8.10) при  $\mu < 0$  имеет устойчивый фокус, притягивающий все остальные траектории. При  $\mu = 0$  происходит бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой на фазовой плоскости мягко появляется устойчивый предельный цикл, притягивающий все нетривиальные траектории, а состояние равновесия становится неустойчивым фокусом (см. рис.8.5с).

Пусть теперь параметр  $\mu$  растет медленно во времени, т.е. система (8.10)

принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2), \\ \dot{\mu} = \varepsilon, \end{cases} \quad (8.11)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Прежде всего заметим, что система (8.11) имеет трехмерное фазовое пространство. Перейдем в системе (8.11) к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . В результате получим

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = 1, \\ \dot{\rho} = \rho(\mu(t) - \rho^2), \\ \dot{\mu} = \varepsilon. \end{cases}$$

Не будем пока принимать во внимание изменение переменной  $\varphi$  ( $\varphi = t + \varphi_0$ ), а исследуем динамику системы

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu(t) - \rho^2) \\ \dot{\mu} = \varepsilon. \end{cases} \quad (8.12)$$

Рассмотрим поведение произвольной траектории с начальными условиями:  $\rho(0) = \rho_0$ ,  $\mu(0) = -\mu_0$ , где  $\mu_0 > 0$ , а  $\rho_0$  выбрано вне малой (порядка  $\varepsilon$ ) окрестности  $U_\varepsilon$  прямой  $\rho = 0$ , которая, очевидно, является решением первого уравнения системы (8.12). Поскольку  $\varepsilon \ll 1$ , изменение переменной  $\mu(t)$  происходит значительно медленнее, чем переменной  $\rho(t)$ . Следовательно, в первом приближении можно считать, что движение рассматриваемой траектории определяется в основном уравнением

$$\dot{\rho} = \rho(-\mu_0 - \rho^2). \quad (8.13)$$

При таком значении параметра  $\mu = -\mu_0 < 0$  переменная  $\rho(t)$  монотонно убывает к значению  $\rho = 0$  (см. рис. 8.5b). Переменная  $\rho(t)$  убывает в течение некоторого конечного времени  $\tau$ , пока значение  $\rho(t)$  не достигнет  $U_\varepsilon$ . В этой окрестности уравнение (8.13) становится непригодным для описания движения исследуемой траектории, и мы должны учитывать оба уравнения системы (8.12) при начальных условиях

$$\rho(\tau) = p, \quad \mu(\tau) \simeq -\mu_0, \quad (8.14)$$

где  $p$  - граничная точка окрестности  $U_\varepsilon$ . Очевидно, что из второго уравнения системы (8.12) следует

$$\mu = \varepsilon(t - \tau) - \mu_0 \text{ при } t \geq \tau. \quad (8.15)$$

Рассмотрим эволюцию переменной  $\rho$ . Из (8.12) следует, что переменная  $\rho$  будет монотонно убывать, по крайней мере, пока переменная  $\mu(t)$  остается отрицательной, т.е. до значения  $t = \tau + \frac{\mu_0}{\varepsilon}$ . Следовательно, на временном интервале от  $\tau$  до  $t = \tau + \frac{\mu_0}{\varepsilon}$  рассматриваемая траектория расположена в малой окрестности прямой  $\rho = 0$ . Оценим теперь полное время нахождения траектории в окрестности  $U_\varepsilon$ . В этой окрестности член  $\rho^2(t)$  в первом уравнении системы (8.12) пренебрежимо мал по сравнению с  $\mu(t)$ . Поэтому динамика переменной  $\rho(t)$  в основном определяется уравнением

$$\dot{\rho} = \mu(t)\rho.$$

Проинтегрировав уравнение (??) на интервале от  $\tau$  до  $t$ , при учете соотношений (8.14), (8.15), получим

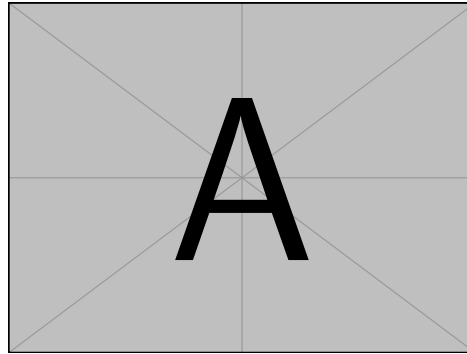
$$\rho(t) = p e^{\varepsilon \frac{t-\tau}{2} - \mu_0(t-\tau)}. \quad (8.16)$$

Из (8.16) вытекает, что переменная  $\rho(t)$  вновь достигает значения  $\rho(t)$  вновь достигает значения  $p$  в момент времени  $t = \tau + 2\frac{\mu_0}{\varepsilon}$ , когда переменная  $\mu(t)$  станет равной  $\mu_0$ . После выхода из  $U_\varepsilon$  переменная  $\rho(t)$  начинает быстро нарастать и асимптотически приближается к значению  $\rho = \sqrt{\mu_0}$  (см. рис.8.5b), поскольку  $m_0 > 0$ . Следовательно, динамика системы (8.12) отличается от статического случая. Во-первых, при прохождении значения  $\mu(t) = 0$  принципиального изменения, как это имело место в случае  $\mu = \text{const}$ , в динамике не происходит, а, во-вторых, существует новое пороговое значение  $\mu_0 > 0$ , при котором возникает скачкообразное увеличение переменной  $\rho(t)$ .

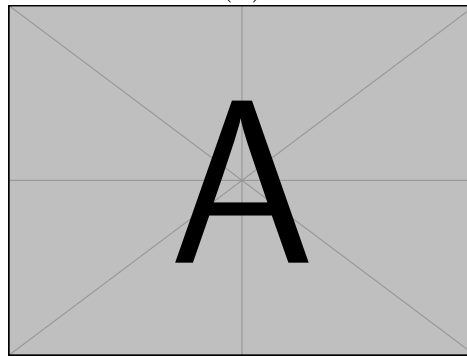
Вернемся теперь к исходной системе (8.11). Можно показать (доказательство базируется на грубости предельного цикла, существующего в статическом случае при  $\mu > 0$ ), что в трехмерном фазовом пространстве этой системы при  $\mu(t) > 0$  существует двумерная устойчивая инвариантная поверхность  $C^S$ , близкая к поверхности, составленной из предельных циклов системы (8.10). Как мы увидим далее, поверхность  $C^S$  играет важную роль в динамике системы (8.11). Рассмотрим движение исследуемой нами траектории в  $\mathbb{R}^3$ . Из установленной выше динамики переменных  $\varphi$ ,  $\rho$  и  $\mu$  вытекает следующее. Сначала фазовая точка скачком притянется в окрестность прямой  $x = y = 0$  и будет двигаться в окрестности  $U_\varepsilon$ , совершая вращательные движения до тех пор, пока переменная  $\mu$  не достигнет значения  $\mu_0$  (рис. 8.6). Только после этого произойдет срыв из окрестности прямой  $x = y = 0$  и фазовая точка притянется быстро к поверхности  $C^S$  (рис. 8.6). В окрестности  $C^S$  она начнет совершать вращательные движения, амплитуда которых нарастает  $\sim \sqrt{\mu(t)}$ , а время их возникновения  $\sim \frac{1}{\varepsilon}$  является достаточно большой величиной.

Описанный механизм возникновения колебаний называется **динамической бифуркацией Андронова-Хопфа**, для которой характерны следующие эффекты:

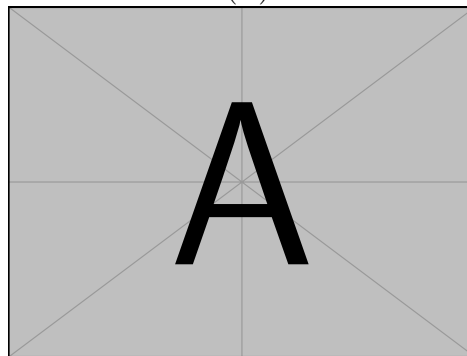
- затягивания потери устойчивости (колебания возникают при  $\mu = \mu_0$ , а не при  $\mu = 0$ , как в статическом случае);
- жесткого возникновения колебаний;
- памяти – колебания возникают при значении  $\mu = \mu_0$ , однозначно связанным начальным значением  $-\mu_0$



(a)

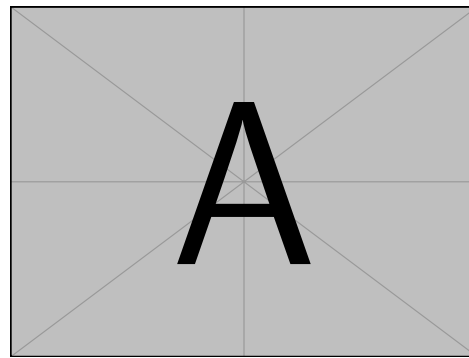


(b)

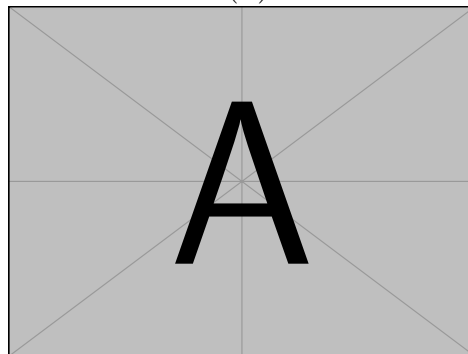


(c)

Рис. 8.4. Расположение характеристических показателей состояния равновесия  $O_0$  на комплексной плоскости (a); динамика второго уравнения системы (8.8) (b); фазовый портрет системы (8.8) для различных значений параметра  $\mu$  (c).



(a)



(b)

Рис. 8.5. Динамика второго уравнения системы (8.8) (a); фазовый портрет системы (8.8) b для различных значений параметра  $\mu$ .

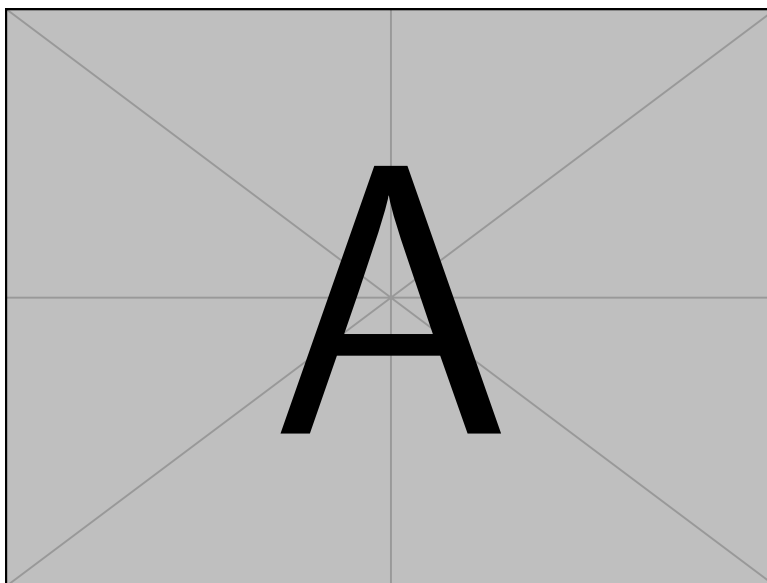


Рис. 8.6. Фазовое пространство системы (8.11): эффект затягивания потери устойчивости.

## Глава 9.

# Бифуркация двукратного предельного цикла. Бифуркация петли сепаратрис седла

*Отображение Пуанкаре в окрестности двукратного предельного цикла. Полуустойчивые циклы. Функция расщепления, седловая величина. Гомоклиническая траектория. Отображение Пуанкаре в окрестности гомоклинической траектории.*

### 9.1. Двукратный предельный цикл

Рассмотрим систему на фазовой плоскости, правые части которой зависят от управляющего параметра  $\mu$  (см. 8, система (8.1)). Предположим, что система (8.1) имеет предельный цикл  $L_0$ . В малой окрестности  $L_0$  траектории системы (8.1) порождает отображение Пуанкаре (см. рис.9.1), которое можно представить в следующем виде

$$\bar{\xi} = g(\xi, \mu). \quad (9.1)$$

Без ограничения общности будем считать, что начало координат на секущей Пуанкаре выбрано в неподвижной точке, то есть  $g(0, \mu) = 0$ . Пусть при  $\mu = 0$

мультипликатор предельного цикла  $L_0$  удовлетворяет условию

$$s(0) = \left. \frac{\partial g}{\partial \xi} \right|_{(0,0)} = 1. \quad (9.2)$$

Раскладывая  $g(\xi, \mu)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(0, 0)$  получим

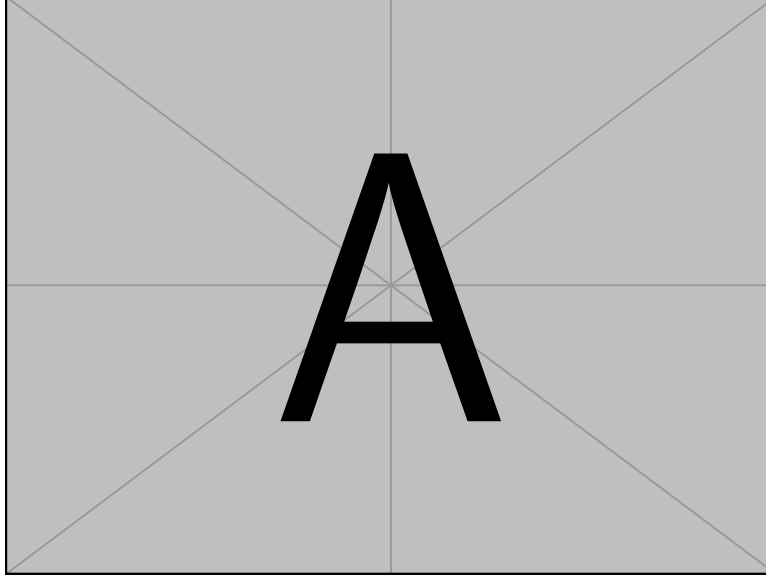


Рис. 9.1. Отображение Пуанкаре в окрестности предельного цикла  $L_0$ .

$$g(\xi, \mu) = g(0, 0) + g'_\xi(0, 0)\xi + g'_\mu(0, 0)\mu + \frac{1}{2}g''_{\xi\xi}(0, 0)\xi^2 + \quad (9.3)$$

$$+ g''_{\xi\mu}(0, 0)\xi\mu + \frac{1}{2}g''_{\mu\mu}(0, 0)\mu^2 + \dots$$

Из (9.1) - (9.3) следует следующее представление отображение Пуанкаре в окрестности  $L_0$

$$\bar{\xi} = \alpha(\mu) + \xi(1 + \beta(\mu)) + \gamma\xi^2 + \dots, \quad (9.4)$$

где

$$\alpha(\mu) = g'_\mu(0, 0)\mu + \dots, \quad \beta(\mu) = g''_{\xi\mu}(0, 0)\mu + \dots$$

$$\alpha(0) = \beta(0) = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}g''_{\xi\xi}(0, 0) + \dots$$

Предположим, что

$$\gamma \neq 0. \quad (9.5)$$

Таким образом, мы имеем одно бифуркационное условие (9.2) и одно условие невырожденности (9.5), а нормальная форма для бифуркации двукратный предельный цикл задается уравнением (9.4).



Проведем исследование отображения (9.4). Рассмотрим два случая.

**Случай  $\gamma > 0$ .** Прежде всего изучим свойства функции последования  $g(\xi, \mu)$  отображения (9.4). Непосредственно из (9.4) имеем

$$\begin{aligned} g'_\xi &= 1 + \beta(\mu) + 2\gamma\xi + \dots \\ g''_{\xi\xi} &= 2\gamma + \dots \end{aligned} \quad (9.6)$$

Поскольку мы рассматриваем (9.4) в окрестности точки  $(\xi, \mu) = (0, 0)$  и  $\beta(0) = 0$ , в силу (9.8) получаем что

$$g'_\xi > 0, \quad g''_{\xi\xi} > 0.$$

Следовательно,  $g(\xi, \mu)$  – монотонно возрастающая функция, выпуклая вниз. Координаты неподвижных точек отображения (9.4) определяются уравнением

$$0 = \alpha(\mu) + \beta(\mu)\xi + \gamma(\mu)\xi^2 + \dots \quad (9.7)$$

Пусть для определенности функция  $\alpha(\mu)$  удовлетворяет условию  $\alpha(\mu) \cdot \mu > 0, \mu \neq 0$ . Тогда из (9.9) получаем, что при  $\mu = 0$  отображение (9.4) имеет единственную неподвижную точку  $O_0(\xi = 0 + \dots)$ , а при  $\mu < 0$  – две неподвижные точки:  $O_1\left(\xi = -\sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{\gamma}} + \dots\right)$  и  $O_2\left(\xi = \sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{\gamma}} + \dots\right)$ .

При  $\mu > 0$  отображение (9.4) неподвижных точек не имеет. Легко видеть, что  $O_1$  является устойчивой,  $O_2$  – неустойчивой,  $O_0$  – полуустойчивой неподвижными точками. На рис.9.4а представлен вид отображения (9.4) для различных значений параметра  $\mu$ , вытекающий из установленных выше свойств этого отображения, а на рис.9.4б, соответствующие фазовые портреты системы (8.1). При  $\mu = 0$  существует двухкратный (полуустойчивый) предельный цикл  $L_0$ , который при  $\mu < 0$  распадается на два грубых – устойчивый  $L_1$  и неустойчивый  $L_2$ . При увеличении  $\mu$  от нуля в сторону  $\mu > 0$  цикл  $L_0$  исчезает.

**Случай  $\gamma < 0$**  Прежде всего изучим свойства функции последования  $g(\xi, \mu)$  отображения (9.4). Непосредственно из (9.4) имеем

$$\begin{aligned} g'_\xi &= 1 + \beta(\mu) + 2\gamma\xi + \dots \\ g''_{\xi\xi} &= 2\gamma + \dots \end{aligned} \quad (9.8)$$

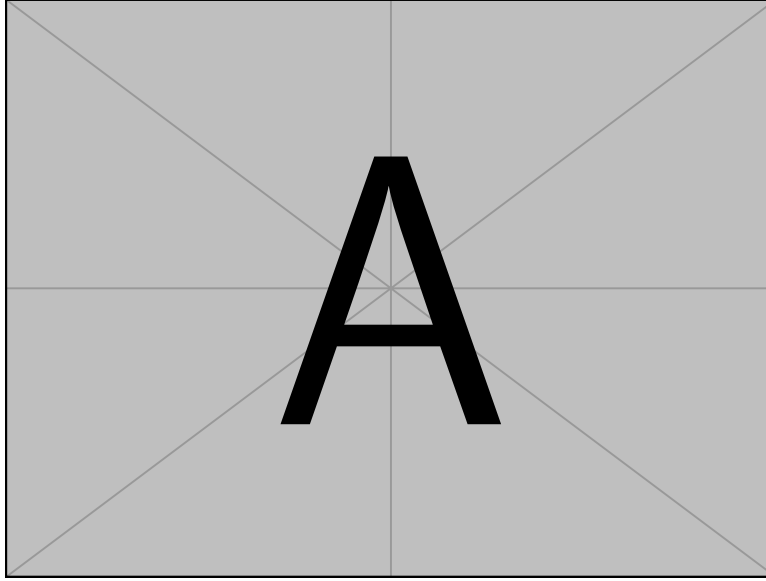


Рис. 9.2. Отображение Пуанкаре в случае  $\gamma > 0$  (а); фазовые портреты системы (8.1), отвечающие этому отображению (б).

Поскольку мы рассматриваем (9.4) в окрестности точки  $(\xi, \mu) = (0, 0)$  и  $\beta(0) = 0$ , в силу (9.8) получаем, что

$$g'_\xi > 0, g''_{\xi\xi} > 0$$

Следовательно,  $g(\xi, \mu)$  - монотонно возрастающая функция, выпуклая вниз. Координаты неподвижных точек отображения (9.4) определяются уравнением

$$0 = \alpha(\mu) + \beta(\mu)\xi + \gamma(\mu)\xi^2 + \dots \quad (9.9)$$

Пусть для определенности функция  $\alpha(\mu)$  удовлетворяет условию  $\alpha(\mu) \cdot \mu > 0$ ,  $\mu \neq 0$ . Тогда из (9.9) получаем, что при  $\mu = 0$  отображение (9.4) имеет единственную неподвижную точку  $O_0(\xi = 0 + \dots)$ , а при  $\mu < 0$  - две неподвижные точки:  $O_1\left(\xi = -\sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{\gamma}} + \dots\right)$  и  $O_2\left(\xi = \sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{\gamma}} + \dots\right)$ . При  $\mu > 0$  отображение (9.4) неподвижных точек не имеет. Легко видеть, что  $O_1$  является устойчивой,  $O_2$  - неустойчивой,  $O_0$  - полуустойчивой неподвижными точками. На рис.9.4а представлен вид отображения (9.4) для различных значений параметра  $\mu$ , вытекающий из установленных выше свойств этого отображения, а на рис.9.4б, соответствующие фазовые портреты системы (8.1). При  $\mu = 0$  существует двукратный (полуустойчивый) предельный цикл  $L_0$ , который при  $\mu < 0$  распадается на два грубых - устойчивый  $L_1$  и неустойчивый  $L_2$ . При увеличении  $\mu$  от нуля в сторону  $\mu > 0$  цикл  $L_0$  исчезает.

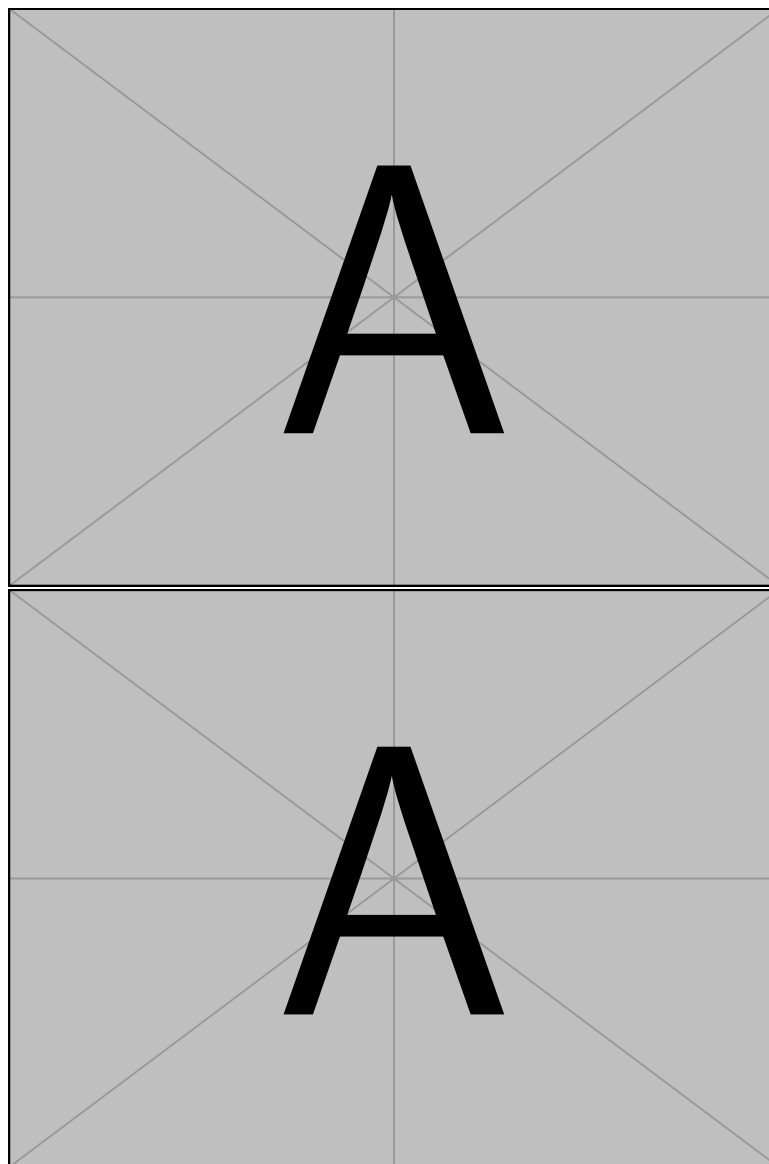


Рис. 9.3. Отображение в случае  $\gamma > 0$  (а); фазовые портреты системы (8.1), отвечающие этому отображению (b).

**Случай  $\gamma < 0$ .** В этом случае исследование (9.4) можно провести полностью аналогично предыдущему. На рис.?? представлен вид отображения (9.4) в этом случае и соответствующие фазовые портреты. Здесь при  $\mu = 0$  также существует двухкратный предельный цикл, однако грубые предельные циклы  $L_1$  и  $L_2$  появляются на фазовой плоскости в области  $\mu > 0$ . При этом цикл  $L_2$  является устойчивым, а  $L_1$  – неустойчивым. В области  $\mu < 0$  предельные циклы не существуют.

Заметим, что бифуркацию образования двухкратного цикла также часто называют седло-узловой бифуркацией циклов.

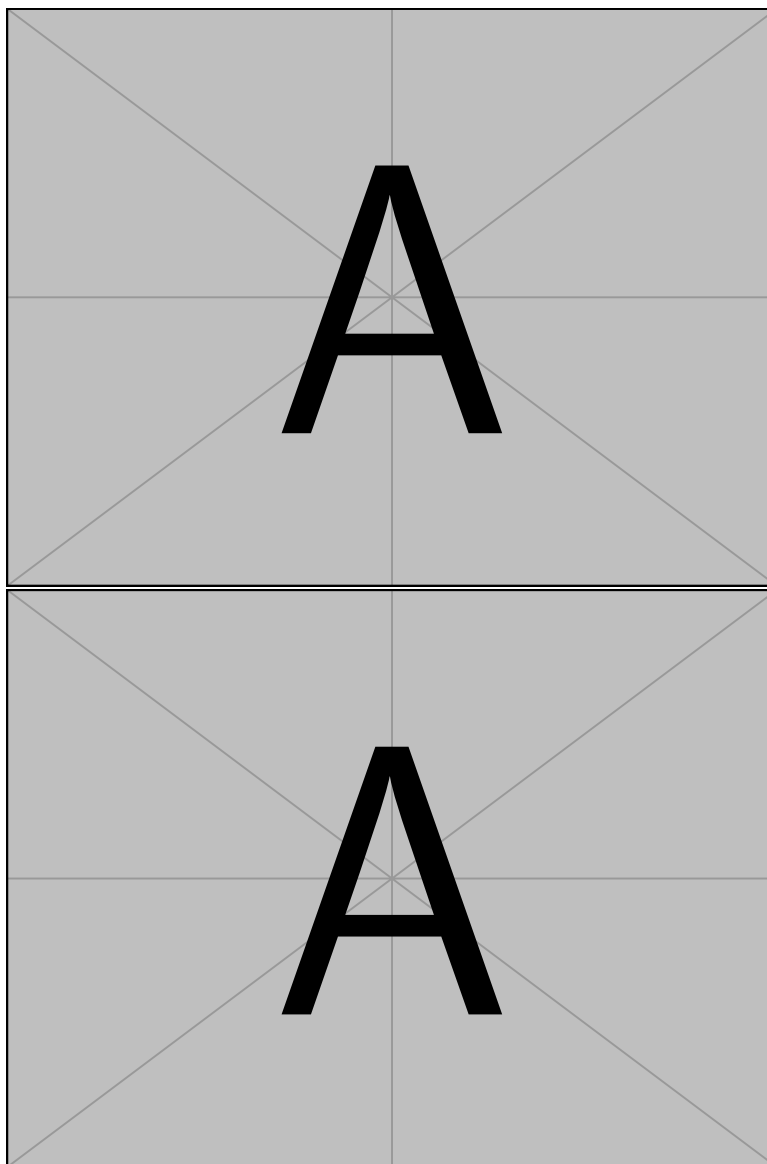


Рис. 9.4. Отображение в случае  $\gamma < 0$  (а); фазовые портреты системы (8.1), отвечающие этому отображению (b).

**Пример** Рассмотрим систему в полярных координатах следующего вида

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho[-\mu - (\rho - 1)^2], \\ \dot{\varphi} = \omega, \end{cases} \quad (9.10)$$

где параметр  $\omega > 0$ , а  $\mu$  - контрольный параметр. Переменные в системе (9.10) разделены и их динамику можно анализировать отдельно друг от друга. Из второго уравнения следует, что переменная  $\varphi$  совершает вращательные движения с частотой  $\omega$ . Эволюция переменной  $\rho$  зависит от параметра  $\mu$ . При  $\mu > 0$  выполняется неравенство  $\dot{\rho} < 0$  и, следовательно, любая траектория системы (9.10) на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  ( $x_1 = \rho \cos \varphi$ ,  $x_2 = \rho \sin \varphi$ ) имеет форму спирали, скручивающейся к состоянию равновесия в начале координат.

нат. Другими словами, на фазовой плоскости существует устойчивый фокус, притягивающий все траектории системы (9.10) (см. рис.9.5с). При  $\mu = 0$  уравнение для  $\rho$ , кроме устойчивого равновесия  $\rho = 0$ , имеет также полуустойчивое состояние равновесия  $\rho = 1$ , которому на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  соответствует полуустойчивый предельный цикл системы (9.10) (см. рис.9.5b). При  $\mu < 0$  этот полуустойчивый цикл разваливается на два цикла – устойчи-

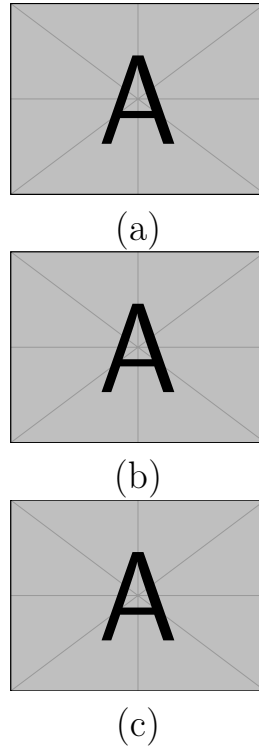


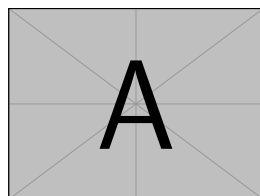
Рис. 9.5. Бифуркация двухкратный предельный цикл в системе (9.10).

вый и неустойчивый, амплитуды которых равны соответственно  $\rho = 1 + \sqrt{-\mu}$  и  $\rho = 1 - \sqrt{-\mu}$  (см. рис.9.5a).

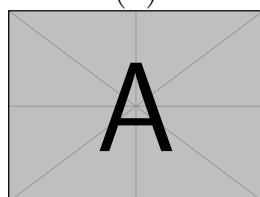
## 9.2. Петля сепаратрис седла

Предположим, что система (8.1) является диссипативной и имеет в начале координат состояние равновесия седло  $O_0$ . Обозначим через  $\lambda_1(\mu) < 0$  и  $\lambda_2(\mu) > 0$  характеристические показатели седла  $O_0$ . Пусть при  $\mu = 0$  одна из выходящих сепаратрис седла возвращается при  $t \rightarrow +\infty$  в точку  $O_0$ , тем самым образуя траекторию  $\Gamma_0$  двоякоасимптотическую к седлу (рис. 9.6a) – так называемую гомоклиническую траекторию. Поскольку к седлу асимптотически приближаются только две траектории – устойчивые сепаратрисы, траектория  $\Gamma_0$  может существовать только в том случае, если неустойчивая и устойчивая сепаратрисы совпадают. Поэтому траекторию  $\Gamma_0$  часто называют петлей сепаратрис. Траектория  $\Gamma_0$  является негрубой и при изменении

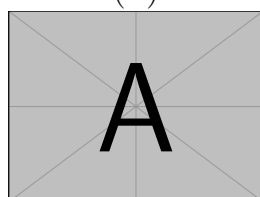
параметра  $\mu = 0$  она разрушается. Для характеристики взаимного расположения сепаратрис седла введем так называемую **функцию расщепления сепаратрис**. Обозначим через  $M^u(x_1^u(\mu), 0)$  - точку, в которой неустойчивая сепаратриса  $W^u$  первый раз пересекает ось абсцисс, а через  $M^s(x_1^s(\mu), 0)$  - точку первого пересечения этой осью устойчивой сепаратрисы  $W^s$  (см. рис.9.6b). Введем функцию расщепления следующим образом



(a)



(b)



(c)

Рис. 9.6. Петля сепаратрис (гомоклиническая траектория  $\Gamma_0$ ) (a); два различных взаимных расположения сепаратрис седла (b),(c).

$$\rho(\mu) = x_1^u(\mu) - x_1^s(\mu)$$

Очевидно, что взаимному расположению сепаратрис, представленному на рис.9.6b, соответствует  $\rho(\mu) > 0$ , а на рис.9.6c -  $\rho(\mu) < 0$ . Функция  $\rho(\mu)$  является непрерывной функцией параметра  $\mu$ , а её нулям отвечают гомоклинические траектории системы (8.1).

Другой важной характеристикой петли сепаратрис седла является величина

$$\sigma(\mu) = \lambda_1(\mu) + \lambda_2(\mu)$$

называемая **седловой**. Седловая величина также является функцией параметра, а её смысл будет ясен из дальнейшего изложения.

### 9.2.1. Точечное отображение в окрестности петли сепаратрис седла

С помощью неособого линейного преобразования координат (см. лекцию 3) система (8.1) может быть приведена к следующему виду

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \lambda_1(\mu)u_1 + g_1(u_1, u_2, \mu), \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu)u_2 + g_2(u_1, u_2, \mu), \end{cases} \quad (9.11)$$

где нелинейные функции  $g_i(0, 0, \mu) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . В этой системе координат касательные к сепаратрисам седла  $O_0(0, 0)$  совпадают с осями координат. Предположим, что система (9.11) при  $\mu = 0$  имеет гомоклиническую траекторию  $\Gamma_0$  (см. рис.??b). Введем в рассмотрение два, трансверсальных к траекториям системы (9.11), отрезка

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{u_1, u_2 | u_1 = d_1, |u_2| \leq \varepsilon\}, \\ \Sigma_1 &= \{y_1, u_2 | u_2 = d_2, |u_1| \leq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

где  $d_1, d_2, \varepsilon$  – достаточно малые положительные величины. Введем также функцию расщепления  $\rho(\mu)$ , используя в качестве секущей отрезок  $\Sigma_0$ , следующим образом

$$\rho(\mu) = u_2^u(\mu) - u_2^s(\mu),$$

где  $u_2^u$  и  $u_2^s$  – ординаты точек первого пересечения неустойчивой и устойчивой сепаратрис седла с секущей  $\Sigma_0$ . Тогда бифуркационное условие существования траектории  $\Gamma_0$  можно записать в следующем виде

$$\rho(0) = 0$$

Пусть будут выполнены также следующие условия невырожденности

$$\sigma(0) \neq 0, \quad (9.12)$$

$$\rho'(0) \neq 0 \quad (9.13)$$

Смысл условия (9.12) будет ясен из дальнейшего, а условия (9.13) означает, что взаимное расположение сепаратрис будет различным при  $\mu < 0$  и  $\mu > 0$ .

Построим точечное отображение в окрестности траектории  $\Gamma_0$  в виде суперпозиции двух отображений  $T = T_l \cdot T_g$ , где отображение  $T_l$  действует в окрестности седла  $O_0$ , а  $T_g$  – в окрестности глобальной части  $\Gamma_0$ .

**Отображение  $T_l$ .** Для достаточно малых значений  $d_1, d_2$  и  $\varepsilon$  траектории системы (9.11) в окрестности  $O_0$  определяется в основном линейной частью системы (9.11), то есть уравнениями

$$\dot{u}_1 = \lambda_1(\mu)u_1, \quad \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu)u_2 \quad (9.14)$$

и, очевидно, порождают отображение

$$T_l : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$$

Найдем вид  $T_l$ . В окрестности  $O_0$  систему (9.11) будем аппроксимировать системой (9.14). Пусть при  $t = 0$  выполнены условия

$$u_1(0) = d_1, \quad u_2(0) = u_2^0 > 0, \quad (u_1(0), u_2(0)) \in \Sigma_0 \quad (9.15)$$

Запишем уравнение траектории, удовлетворяющей условию (9.15)

$$\begin{cases} u_1(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} \\ u_2(t) = u_2^0 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (9.16)$$

Обозначим через  $\tau$  - время движения между  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$  вдоль траектории (9.16), т.е.

$$u_2(\tau) = d_2 \quad (9.17)$$

Из (9.18) находим

$$\tau = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_2}{u_2^0} \quad (9.18)$$

Пусть  $u_1(\tau) = u_1^0$ . Тогда из (9.16), (9.17) имеем

$$u_1^0 = d_1 e^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{d_2}{u_2^0}} = d_1 (d_2)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} (u_2^0)^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

Следовательно, отображение  $T_l$  задается следующим образом

$$u_1^0 = C (u_2^0)^q, \quad (9.19)$$

где  $C = d_1 (d_2)^{\lambda_1/\lambda_2} = \text{const}$ ,  $q = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ . Заметим, что учет нелинейных слагаемых системы (9.11) вносит лишь незначительную поправку, которой можно пренебречь при построении полного отображения.



**Отображение  $T_g$ .** Покажем теперь, что траектории системы (9.1) порождают отображение

$$T_g : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$$

Действительно, гомоклиническая траектория  $\Gamma_0$  при  $\mu = 0$  соединяет  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_0$  (см. рис.??). При этом время движения вдоль  $\Gamma_0$  от  $\Sigma_1$  до  $\Sigma_0$  будем конечным. Отсюда и непрерывной зависимости траекторий системы (9.11) от начальных условий вытекает существование отображения  $T_g$ , которое можно представить в следующем виде

$$\bar{u}_2^0 = p(u_1^0, \mu),$$

где  $\bar{u}_2^0$  – значение  $u_2$  в момент пересечения  $\Sigma_0$  траекторией, выходящей из точки  $(u_1^0, d_2) \in \Sigma_1$  (см. рис.??). Отображение  $T_g$  является диффеоморфизмом. Разложим функцию  $p(u_1^0, \mu)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(0, 0)$

$$\bar{u}_2^0 = p(0, 0) + \left. \frac{\partial p}{\partial u_1^0} \right|_{(0,0)} u_1^0 + \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} \mu + \dots = au_1^0 + b\mu + \dots, \quad (9.20)$$

где всегда  $a > 0$  (неравенство  $a < 0$  приводит к пересечению фазовой траекторий), а слагаемое  $b\mu$  описывает функцию расщепления в окрестности  $\mu = 0$ .

Таким образом, траектории системы (9.11) в окрестности  $\Gamma_0$  порождают точечное отображение

$$T : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0$$

Используя (9.19) и (9.20), устанавливаем, что  $T$  задается следующим образом

$$\bar{u}_2^0 = b\mu + aC(u_2^0)^q + \dots \quad (9.21)$$

Функция последования отображения (9.21) имеет степенной характер, и, как известно, её вид различен для  $q > 1$  и  $q < 1$ . Исследуем отображение (9.21) в этих двух случаях, считая для определенности, что  $b > 0$ .

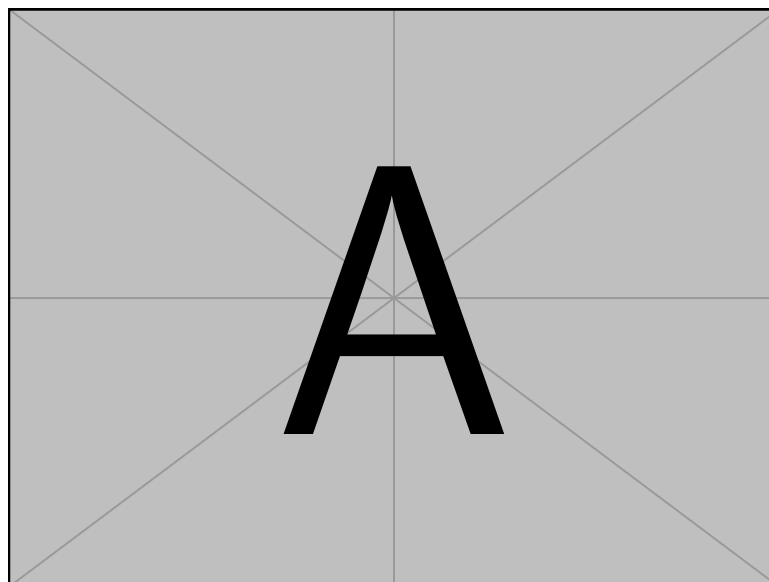
$\sigma(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) < 0$ . В этом случае  $q(0) > 1$  вид отображения (9.21) для различных значений  $\mu$  представлен на рис.9.7а. Анализируя свойства отображения  $T$ , устанавливаем соответствующие фазовые портреты, которые представлены на рис.9.7б. В области  $\mu > 0$  на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  существует устойчивый предельный цикл, который появился из траектории  $\Gamma_0$ . При этом  $\rho(\mu) > 0$ . Для  $\mu < 0$  предельный цикл не существует и  $\rho(\mu) < 0$ .

**Случай**  $\sigma(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) > 0$ . Этот случай отвечает значению  $q(0) < 1$ . Исследование точечного отображения (9.21) и соответствующих фазовых портретов системы (9.11) проводится полностью аналогично предыдущему. Результаты такого анализа представлены на рис.9.8. Из траектории  $\Gamma_0$  рождается неустойчивый предельный цикл, который существует при  $\mu < 0$ . При  $\mu > 0$  система (9.11) предельных циклов не имеет.

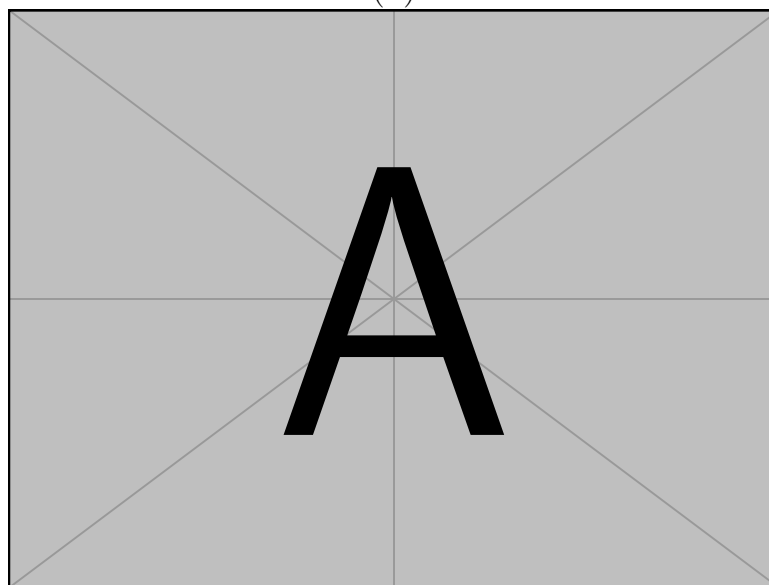
### 9.2.2. Колебательные и вращательные петли сепаратрис

Петли сепаратрис (гомоклинические траектории) могут образовываться не только сепаратрисами седел на плоскости, но и сепаратрисами седел систем с цилиндрическим фазовым пространством. В этом случае, вообще говоря, возможно образование двух типов петель сепаратрис – колебательных, которых угловая переменная  $\varphi$  набегает  $2\pi$  и они охватывают цилиндр (см. рис.9.9b).

Все утверждения раздела ?? остаются справедливыми для этих типов гомоклинических траекторий. Так, при  $\sigma(0) < 0$  из петель сепаратрис седла рождаются устойчивые предельные циклы, а при  $\sigma(0) > 0$  – неустойчивые. При этом циклы имеют тот же характер (колебательный или вращательный), что и соответствующие петли сепаратрис.

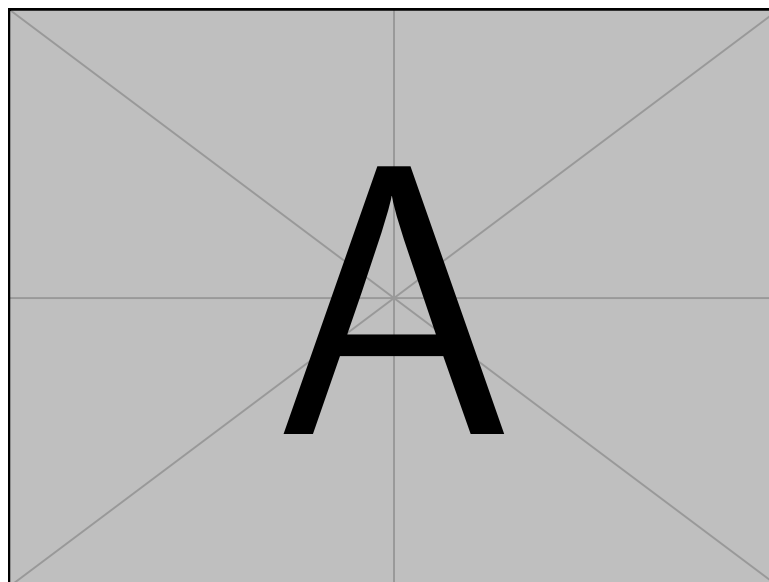


(a)

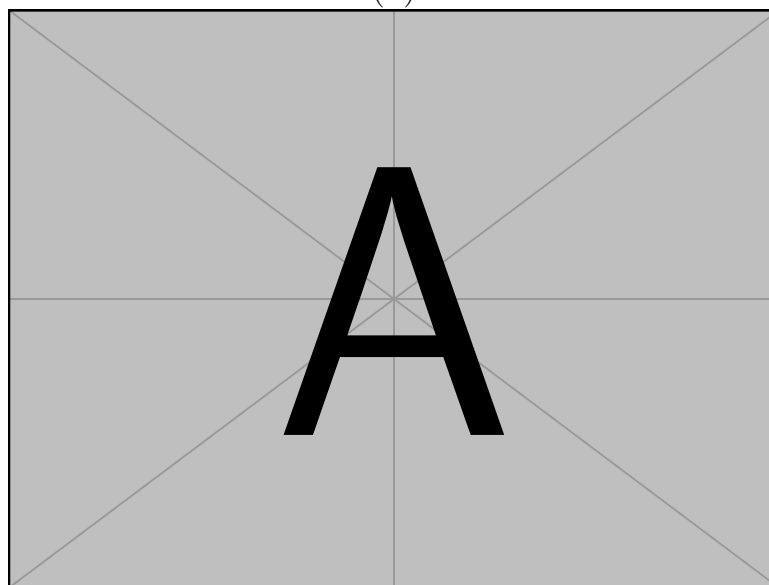


(b)

Рис. 9.7. Отображение Пуанкаре (a) фазовые портреты (b) системы (9.11) в случае  $\sigma(0) < 0$ .

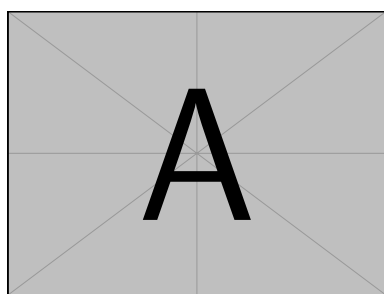


(a)

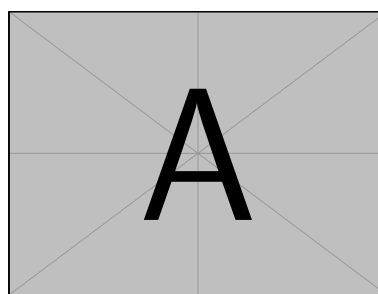


(b)

Рис. 9.8. Отображение Пуанкаре (a) фазовые портреты (b) системы (9.11) в случае  $\sigma(0) > 0$ .



(a)



(b)

Рис. 9.9. Гомоклиническая траектория колебательного типа (a); гомоклиническая траектория вращательного типа (b).

## Глава 10.

# Бифуркация петли сепаратрисы седло-узла. Динамика быстро-медленных систем на плоскости

*Построение отображения Пуанкаре. Рождение, устойчивых и неустойчивых циклов. Быстрые и медленные движения. Точки срыва. Системы с однократной релаксацией. Релаксационные периодические колебания .*

### 10.1. Петля сепаратрисы седло-узла

Предположим, что система (8.1) на фазовой плоскости при  $\mu = 0$  имеет в начале координат двухкратное равновесие (седло-узел)  $O_0(0, 0)$ , и выполнены соответствующие (см. лекцию 8) бифуркационное условие и условия невырожденности

$$\lambda_1(0) = 0, \quad \lambda_2(\mu) \neq 0, \quad l(\mu) \neq 0$$

Рассмотрим нормальную форму для этой бифуркации

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \mu + l(\mu)u_1^2 + \dots \\ \dot{u}_2 = \lambda_2(\mu)u_2 + \dots \end{cases} \quad (10.1)$$

Пусть для определенности  $\lambda_2(\mu) < 0$  и  $l(\mu) > 0$ . В этом случае седло-узел имеет устойчивую узловую область, а одномерная сепаратриса  $W^u(O_0)$  является неустойчивой. Предположим, что при  $\mu = 0$  сепаратриса  $W^u(O_0)$  при  $t \rightarrow \infty$  возвращается общим образом в точку  $O_0$ , образуя гомоклиническую траекторию  $\Gamma(0)$  (см. рис.10.1b) – петлю сепаратрисы седла-узла.

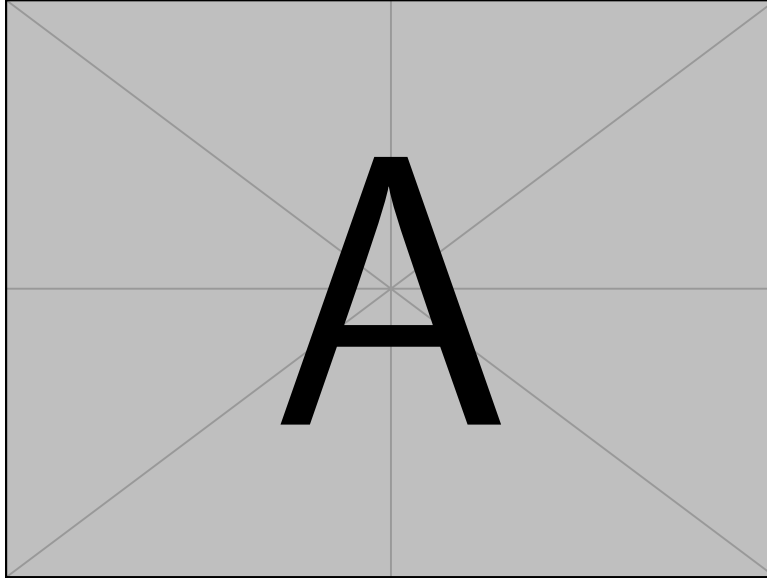


Рис. 10.1. Бифуркация петли сепаратрисы седло-узла.

Заметим, что несмотря на существования траектории  $\Gamma(0)$ , система (10.1) имеет единственный негрубый элемент – двукратное равновесие  $O_0$ .

При  $\mu < 0$  состояние равновесия  $O_0$  распадается на два грубых – устойчивый узел и седло (см. лекцию 8). При этом гомоклиническая траектория  $\Gamma_0$  трансформируется в траекторию  $\Gamma(\mu)$ , образованную сепаратрисы седла, идущей в устойчивый узел (см. рис.10.1a). Существование траектории  $\Gamma(\mu)$  вытекает из предположения о том, что  $\Gamma(0)$  возвращается в  $O_0$  общим образом, то есть сепаратрисы  $W^u(O_0)$  не попадает в «край» узловой области.

При  $\mu > 0$  система (10.1) не имеет состояний равновесия и траектории покидают окрестность начала координат. Для исследования фазовой плоскости в этом случае построим отображение Пуанкаре. Введем в рассмотрение два отрезка, расположенные в  $\varepsilon$ -окрестности начала координат

$$S_1 = \left\{ u_1, u_2 \left| u_1 = -d, \quad |u_2| \leq \sqrt{\varepsilon^2 - d^2} \right. \right\},$$

$$S_2 = \left\{ u_1, u_2 \left| u_1 = +d, \quad |u_2| \leq \sqrt{\varepsilon^2 - d^2} \right. \right\},$$

где  $0 < d < \varepsilon \ll 1$ . Будем строить отображение Пуанкаре  $T$  в виде суперпо-

зиции

$$T = T_l \cdot T_g$$

где  $T_l$  – локальное отображение, определяемое вдоль траекторий системы (10.1), начинающихся на  $S_1$  и заканчивающихся на  $S_2$  (см. Рис.10.2), а  $T_g$  – глобальное отображение, определяемое траекториями, начинающимися на  $S_2$  и заканчивающихся на  $S_1$  (см. Рис.10.2).

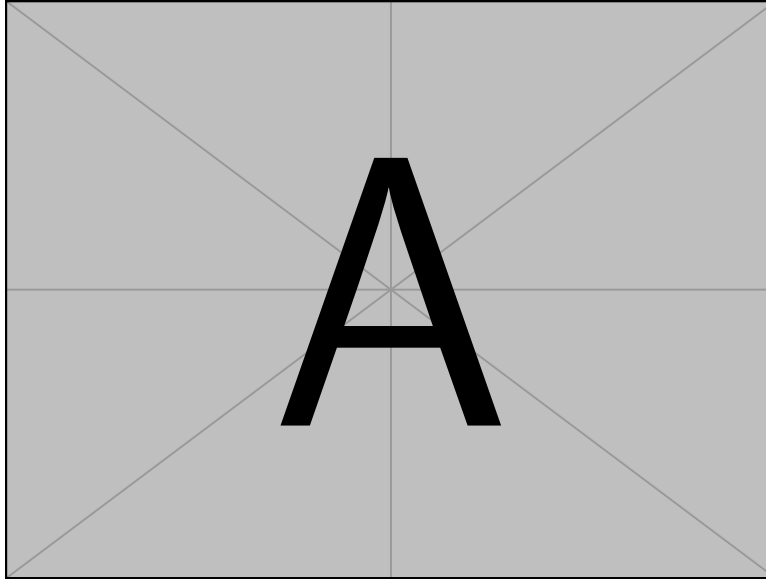


Рис. 10.2. Отображение Пуанкаре системы (10.1) при  $\mu > 0$ .

**Отображение  $T_l$ .** Из первого уравнения системы (10.1) следует, что в  $\varepsilon$ -окрестности начала координат выполняется неравенство  $\dot{u}_1 > 0$  и, следовательно,  $S_1$  и  $S_2$  – секущие Пуанкаре. Рассмотрим траекторию системы (10.1), проходящую при  $t = 0$  через произвольную точку на секущей  $S_1$ , то есть траекторию, удовлетворяющую следующим начальным условиям (см. Рис.10.2)

$$u_1(0) = -d, \quad u_2(0) = u_2^0$$

Поскольку между секущими  $S_1$  и  $S_2$  выполняется неравенство  $\dot{u}_1 > 0$  и  $\lambda_2 < 0$ , эта траектория через конечное время  $\tau$  попадает на  $S_2$  (см. Рис.10.2) находим

$$\tilde{u}_2 = u_2^0 e^{\lambda_2 \tau} + \dots \quad (10.2)$$

Проинтегрировав первое уравнение системы (10.1), находим время  $\tau$

$$\tau = \frac{1}{l} \int_{-d}^d \frac{du_1}{u_1^2 + \frac{\mu}{l}} + \dots = \frac{2}{\sqrt{\mu l}} \operatorname{arctg} \frac{d\sqrt{l}}{\sqrt{\mu}} \dots \quad (10.3)$$



Следовательно, отображение  $T_l$  задается системой (10.2), (10.3). Заметим, что в силу (10.3) при  $\mu \rightarrow 0$  время  $\tau \rightarrow \infty$ . Это означает, что при достаточно малом значении  $\mu > 0$  изображающая точка будет очень долго двигаться в окрестности начала координат.

**Отображения  $T_g$ .** Покажем сначала существование отображения  $T_g$ . Установим существование траектории  $\Gamma_1(\mu)$  системы (10.1), которая за конечное время переводит точку  $(u_1 = d, u_2 = \tilde{u}_2) \in S_2$  в некоторую точку  $(u_1 = -d, u_2 = \bar{u}_2^0) \in S_1$ . Существование траектории  $\Gamma_1(0)$  при  $\mu = 0$  следует из наличия по предположению гомолитической траектории  $\Gamma_1(0)$  при  $\mu = 0$  следует из наличия по предположению гомолитической траектории  $\Gamma(0)$  и теоремы о непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от параметра вытекает существование  $\Gamma_1(\mu)$  при  $\mu > 0$ . Следовательно, отображение  $T_g$  существует и может быть представлено в следующем виде

$$\bar{u}_2^0 = g(\tilde{u}_2, \mu) \quad (10.4)$$

В силу конечности времени движения вдоль  $\Gamma_1(\mu)$ , отображение (10.4) – гомеоморфизм. Раскладывая функцию  $g(\tilde{u}_2, \mu)$  в окрестности точки  $(0, 0)$  получим

$$g(\tilde{u}_2, \mu) = g(0, 0) + \left. \frac{\partial g}{\partial \tilde{u}_2} \right|_{(0,0)} \cdot \tilde{u}_2 + \left. \frac{\partial g}{\partial \mu} \right|_{(0,0)} \cdot \mu + \dots = a + b\tilde{u}_2 + c\mu + \dots, \quad (10.5)$$

где  $g > 0$ , а знаки параметров  $a$  и  $c$  не имеют значения. Пусть для определенности  $a > 0$  и  $c > 0$ .

Из (10.5), (10.2) и (10.3) вытекает, что отображение  $T$  задается следующим образом

$$\bar{u}_2^0 = a + be^{\lambda_2 \tau} u_2^0 + c\mu + \dots$$

Нетрудно видеть, что отображение  $T$  имеет нетривиальную неподвижную точку. Поскольку  $\lambda_2 < 0$ , а  $\tau \gg 1$ , мультипликатор этой неподвижной точки меньше единицы и оно устойчиво. Следовательно, при  $\mu > 0$  система (10.1) имеет устойчивый предельный цикл (см. рис.10.1с), который появился на фазовой плоскости из траектории  $\Gamma(0)$ .

Совершенно аналогично проводится исследование системы (10.1) в случае  $\lambda_2(\mu) > 0$ . В этом случае разрушение гомоклинической орбиты седло-узла приводит к рождению неустойчивого предельного цикла.

Проиллюстрируем бифуркацию рождения предельного цикла из петли сепаратрисы седло-узла следующим примером. Рассмотрим систему в полярных координатах

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho), \\ \dot{\varphi} = \sin \varphi - \mu, \end{cases} \quad (10.6)$$

где параметр  $\mu > 0$ . В системе (10.6) уравнения независимы и легко анализируются отдельно. Уравнение для  $\rho$  – уравнение на прямой, имеющее два состояния равновесия: неустойчивые  $\rho = 0$  и устойчивое  $\rho = 1$ . Уравнение для  $\varphi$  – уравнение на окружности (см. лекцию 2), которое при  $\mu > 1$  не имеет состояний равновесия, а при  $\mu < 1$  имеет два состояния равновесия: неустойчивое  $\varphi = \varphi_1 = \arcsin \mu$  и устойчивое  $\varphi = \varphi_2 = \pi - \arcsin \mu$ . При  $\mu = 1$  эти состояния равновесия сливаются, образуя полуустойчивое состояние равновесия  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Объединяя эти свойства уравнений системы (10.6), устанавливаем фазовые портреты системы (10.6) представленные на рис.10.3. При  $\mu > 1$  система (10.6) имеет устойчивый предельный цикл, родившийся из гомоклинической траектории Г.

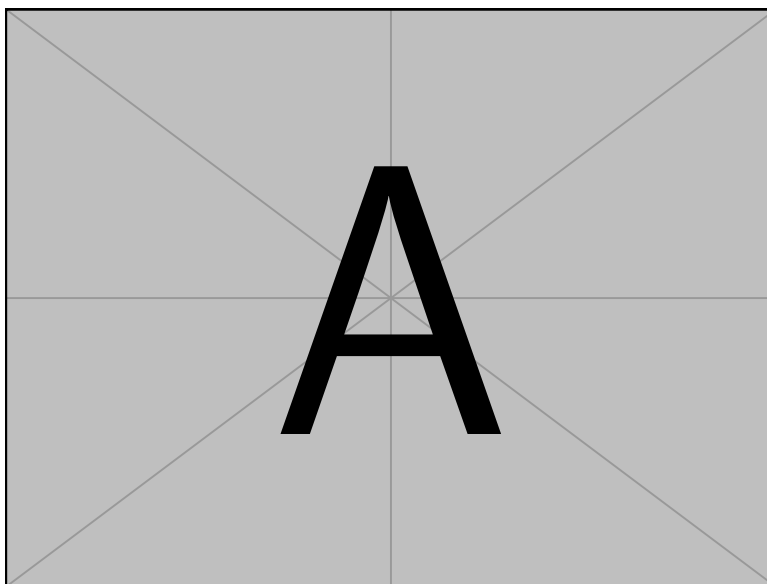


Рис. 10.3. Бифуркация петли сепаратрисы седло-узла системы (10.6)

## 10.2. Заключительные замечания о бифуркациях систем на плоскости

Таким образом, мы рассмотрели все особые траектории (состояния равновесия, предельные циклы, сепаратрисы седел), определяющие структуру разбиения фазовой плоскости на траектории и основные (коразмерности 1) бифуркации, вызывающие перестройку этого разбиения. Представим сведения об основных бифуркациях систем на плоскости в виде следующей табли-

цы, в которой для краткости приведён один из возможных вариантов каждой бифуркации. В таблице локальные бифуркации помечены цифрой I, а нелокальные – цифрой II.

Таблица 10.1. Основные бифуркации систем на плоскости.

Возникает естественный вопрос – как для конкретной нелинейной системы установить структуру разбиения фазовой плоскости на траектории и как выяснить какие именно бифуркации в ней происходят? Ответа на этот вопрос для произвольной нелинейной системы не существует и исследование каждой системы требует, вообще говоря, индивидуального подхода. Другими словами, не существует единого универсального метода исследования динамики произвольной нелинейной системы. Однако, существуют некоторые классы систем, для которых развиты методы и приемы исследования, позволяющие регулярным образом получить ответ на поставленный вопрос. Знакомство с методами исследования нелинейных систем мы начнем с изучения так называемых релаксационных колебаний.

### 10.3. Динамика быстро-медленной системы

Во многих системах, самой различной природы, параметры, строго говоря, не являются постоянными величинами, а медленно эволюционируют с течением времени. Естественным образом возникает вопрос – могут или нет такие медленные изменения параметров привести к принципиальному изменению состояния системы? Если да, то при каких условиях это произойдет? Медленные изменения параметра можно описать, например, с помощью дифференциального уравнения, где в роли переменной выступает этот параметр, а в правой части в виде сомножителя присутствует постоянный малый параметр (см. лекцию 8, раздел 8.4). В результате мы получим систему, у которой часть переменных будет изменяться во времени значительно медленнее других переменных, не содержащих в правой части малых постоянных сомножителей. Для таких систем характерно присутствие двух масштабов времени и двух скоростей и ассоциирующихся с ними так называемых быстрых и медленных движений. Наличие таких видов движения может привести к режиму, когда после кратковременного быстрого изменения части переменных в системе наступает квазиравновесное (по отношению к быстрым движениям) состояние, соответствующее медленному движению. Такой процесс быстрого установления квазиравновесного состояния называется релаксацией (термин введен Ван-дер-Полем). Если процессы релаксации повторяются, сменяя квазиравновесный режим, то в системе могут возникнуть колебания, которые

называются релаксационными.

Рассмотрим релаксационные колебания в системах второго порядка вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \mu \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (10.7)$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – однозначные непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные, а  $\mu$  – малый положительный параметр. В (10.7)  $x$  – медленная, а  $y$  – быстрая переменные<sup>1</sup>

### 10.3.1. Медленные и быстрые движения

Предположим, что переменная  $y$  изменяется так, что  $\dot{y}$  является ограниченной функцией. В этом случае при  $\mu = 0$  изменение медленной переменной  $x$  будет описываться системой

$$\dot{x} = P(x, y), \quad Q(x, y) = 0 \quad (10.8)$$

Система (10.8) называется системой медленных движений. Установим условия, при которых при достаточно малом  $\mu$  движения системы (10.7) можно аппроксимировать системой (10.8), т.е. когда малый параметр  $\mu$  можно не учитывать в первом приближении. Фактически нужно найти условия ограниченности  $\dot{y}$ . Из второго уравнения системы (10.7) имеем

$$\dot{y} = \frac{Q(x, y)}{\mu} \quad (10.9)$$

Пусть  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  – точка на линии  $Q(x, y) = 0$ , т.е.  $Q(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ , а  $(x, y)$  – точка на фазовой плоскости, лежащая вне этой линии. Введем разности

$$\xi = x - \tilde{x} \text{ и } \eta = y - \tilde{y}$$

Раскладывая функцию  $Q(x, y)$  в ряд Тейлора по степеням  $\xi$  и  $\eta$ , из (10.9) получим

$$\dot{y} = \frac{Q'_x(\tilde{x}, \tilde{y})\xi + Q'_y(\tilde{x}, \tilde{y})\eta + \dots}{\mu} \quad (10.10)$$

---

<sup>1</sup>В этом легко убедиться, введя в (10.7) новое время  $\mu\tau = t$ . В результате система (10.7) преобразуется к виде

$$\frac{dx}{d\tau} = \mu P(x, y); \quad \frac{dy}{d\tau} = Q(x, y)$$

отсюда при  $\mu = 0$  имеем  $x = \text{const}$  и, очевидно, что при достаточно малом  $\mu > 0$  переменная  $x$  действительно изменяется медленно по сравнению с переменной  $y$ .

Из (10.10) следует, что лишь внутри малой (порядка  $\mu$ ) окрестности линий  $Q(x, y) = 0$  при  $\mu \rightarrow 0$  величина  $\dot{y}$  будет ограниченной функцией. Следовательно, только в этой малой окрестности линии  $Q(x, y) = 0$  для описания движений системы (10.7) можно использовать систему (10.8).

Вне малой окрестности линии  $Q(x, y) = 0$  величина  $\dot{y} \rightarrow \infty$ , а  $\dot{x}$  остается ограниченной и при  $\mu \rightarrow 0$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\mu P(x, y)}{Q(x, y)} \rightarrow 0 \quad (10.11)$$

Из (10.11) следует, что в данной области фазовой плоскости фазовые траектории системы (10.7) близки к прямым  $x = x^0 = \text{const}$ . Вдоль этих траекторий изображающая точка движется с большими скоростями изменение переменной  $y$ . Такие движения называются быстрыми. Приближенно быстрые движения можно описать с помощью системы

$$\mu \dot{y} = Q(x^0, y), \quad x^0 = \text{const}, \quad (10.12)$$

которая называется системой быстрых движений. Заметим, что на фазовой плоскости  $(x, y)$  состояния равновесия системы (10.12) расположены в точках пересечения линии  $Q(x, y) = 0$  с прямыми  $x = x^0 = \text{const}$ .

Таким образом, исследование системы второго порядка (10.7) сводится к изучению двух систем первого порядка: системы медленных движений (10.8) в малой окрестности линии  $Q(x, y) = 0$  и системы быстрых движений (10.12) вне этой окрестности.

### 10.3.2. Системы с однократной релаксацией

Рассмотрим систему (10.12), которую перепишем в виде

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = Q(x^0, y), \quad \text{где } \tau = \frac{t}{\mu}. \quad (10.13)$$

Предположим что при каждом значении  $x^0$  уравнение  $Q(x^0, y) = 0$  имеет единственное решение  $y = y^0$ , т.е. для любого  $x^0$  уравнение (10.13) имеет единственное состояние равновесия. Как известно (см. лекцию 2), состояние равновесия  $y = y^0$  будет устойчивым, если

$$Q'_y(x^0, y^0) < 0 \quad (10.14)$$

Пусть это условие выполняется при любом  $x^0$ . В этом случае любая траектория системы (10.13), начинающаяся вне линии  $Q(x, y) = 0$ , имеет форму прямой  $x = x^0$ , вдоль которой изображающая точка быстро приближается к

состоянию равновесия  $y = y^0$ , расположенному на  $Q(x, y) = 0$ . (см. рис.10.4а).

Как было установлено выше, при достаточно малом  $\mu > 0$  траектории системы (10.7) близки к прямым  $x = x^0$  только вне слоя медленных движений (см. рис.10.4b), а для описания движений внутри слоя нужно использовать систему (10.8). При выполнении (10.14) тонкий слой медленных движений притягивает все быстрые движения, т.е. медленные движения устойчивы по отношению к быстрым. Фактически, в этом случае все установившиеся режимы в системе (10.7) могут быть исследованы лишь с использованием одной системы медленных движений (10.8), т.е. без учета малого параметра  $\mu$ . Если

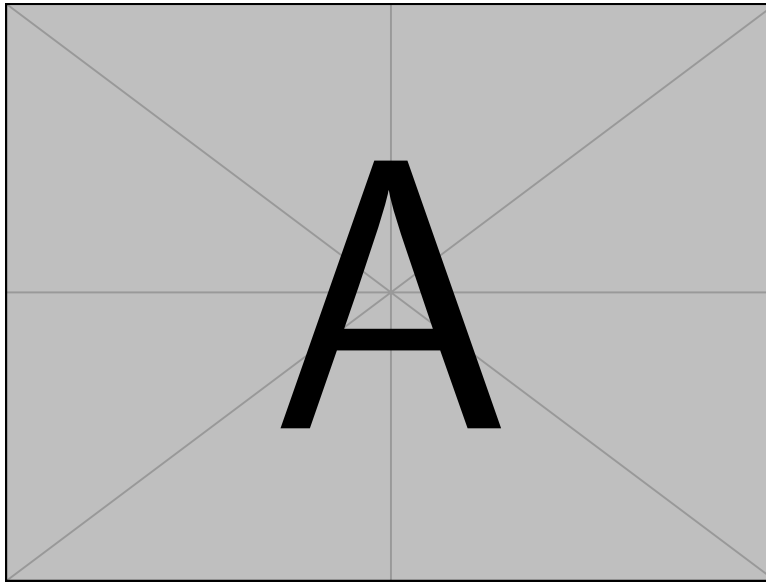


Рис. 10.4. Фазовые портреты в случае  $Q'_y < 0$  системы (10.13) (а) и системы (10.7) (b)

для любого состояния равновесия системы (10.12) выполняется неравенство

$$Q'_y(x^0, y^0) > 0, \quad (10.15)$$

медленные движения будут неустойчивы по отношению к быстрым движениям. В этом случае тонкий слой медленных движений отталкивает траектории быстрых движений и внутри слоя динамика вновь определяется системой (10.8). Следовательно, здесь, как и в предыдущем случае, параметр  $\mu$  можно не учитывать.

Проиллюстрируем изложенную теорию примером. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{\varphi} = \lambda \dot{\varphi} + \sin \varphi = \gamma, \quad (10.16)$$

описывающее динамику математического маятника в вязкой среде, находящегося под действием внешнего вращательного момента (см. лекцию 8). Сле-

лав в (10.16) замену времени  $\tau\lambda = t$ , получим уравнение

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin \varphi = \gamma \quad (10.17)$$

Предположим, что среда обладает сильной вязкостью  $\lambda \gg 1$ . В этом случае можно ввести малый параметр  $\mu = 1/\lambda^2 \ll 1$  и представить (10.17) в виде системы

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = y \\ \mu \frac{dy}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi - y \end{cases} \quad (10.18)$$

Система (10.18) имеет цилиндрическое фазовое пространство  $G = S^1 \times \mathbb{R}$ . Проведем исследование системы (10.18) в случае достаточно сильного вращательного момента  $\gamma > 1$ .

Система медленных движений имеет вид

$$\dot{\varphi} = y, \gamma - \sin \varphi - y = 0$$

На линии медленных движений  $y = \gamma - \sin \varphi$  определено уравнение на окружности

$$\dot{\varphi} = \gamma - \sin \varphi \quad (10.19)$$

При  $\gamma > 1$  выполняется неравенство  $\dot{\varphi} > 0$  и любая траектория уравнения (10.19) совершает вращательные движения.

Быстрые движения системы (10.18) задаются уравнениями

$$\mu \dot{y} = \gamma - \sin \varphi^0 - y, \quad \varphi = \varphi^0 = \text{const} \quad (10.20)$$

Из (10.20) следует, что  $Q'_y = -1 < 0$  и, следовательно, кривая медленных движений устойчива по отношению к быстрым.

Принимая во внимание установленные свойства быстрых и медленных движений, получаем фазовые портреты системы (10.18) представленные на рис.10.5. На фазовом цилиндре  $G$  системы (10.18) существует единственный устойчивый предельный цикл вращательного типа. Следовательно, под действием внешнего вращательного момента маятник совершает периодическое вращение вокруг точки подвеса.

### 10.3.3. Релаксационные колебания

Предположим, что уравнение (10.12) для некоторых значений  $x^0$  имеет одновременно не одно, а несколько состояний равновесия. При этом для части из них выполнено неравенство (10.14), а для остальных – (10.15), т.е. одни состояния равновесия являются устойчивыми, а другие – неустойчивыми. В

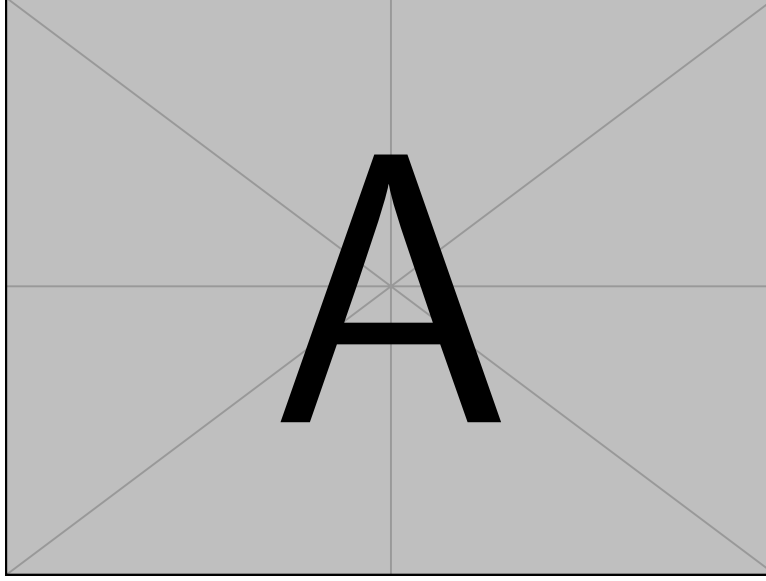


Рис. 10.5. Фазовые портреты в случае  $\gamma > 1$  : системы (10.20) (а) и системы (10.18) (б).

этом случае линия  $Q(x, y) = 0$  распадается на некоторое число устойчивых и неустойчивых по отношению к быстрым движениям компонент. Для примера на рис.10.6а представлен случай, когда существуют две устойчивые компоненты –  $Q_1^+$  и  $Q_2^+$  и одна неустойчивая –  $Q^-$ . Понятно, что устойчивые и неустойчивые компоненты разделяются точками, в которых

$$Q'_y(x^0, y^0) = 0. \quad (10.21)$$

Например, на рис.10.6а таких точек две –  $A$  и  $B$ . Пусть  $(x^0 = x^*, y^0 = y^*)$  – координаты одной из точек, в которой выполняется (10.21). При  $x^0 = x^*$  в уравнении (10.12), описывающем быстрые движения, происходит бифуркация состояний равновесия. Рассмотрим наиболее типичный случай – пусть в точке  $x^0 = x^*$  происходит основная (кратности 1) бифуркация для состояний равновесия – двукратное равновесия. С геометрической точки зрения это означает, что на фазовой плоскости к точке  $(x^*, y^*)$  примыкают лишь две компоненты кривой  $Q(x, y) = 0$  (на рис.10.6а в точке  $A$  –  $Q_1^+$  и  $Q_2^+$ , а в точке  $B$  –  $Q_2^+$  и  $Q_2^-$ ). Разложим функцию  $Q(x^0, y)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x^*, y^*)$

$$\begin{aligned} Q(x^0, y) = Q(x^*, y^*) + Q'_x(x^*, y^*)(x^0 - x^*) + Q'_y(x^*, y^*)(y - y^*) + \\ + \frac{1}{2}Q''_{yy}(x^*, y^*)(y - y^*)^2 + \dots \end{aligned} \quad (10.22)$$

Принимая во внимание (10.22) и равенство  $Q(x^*, y^*) = 0$ , получаем, что при



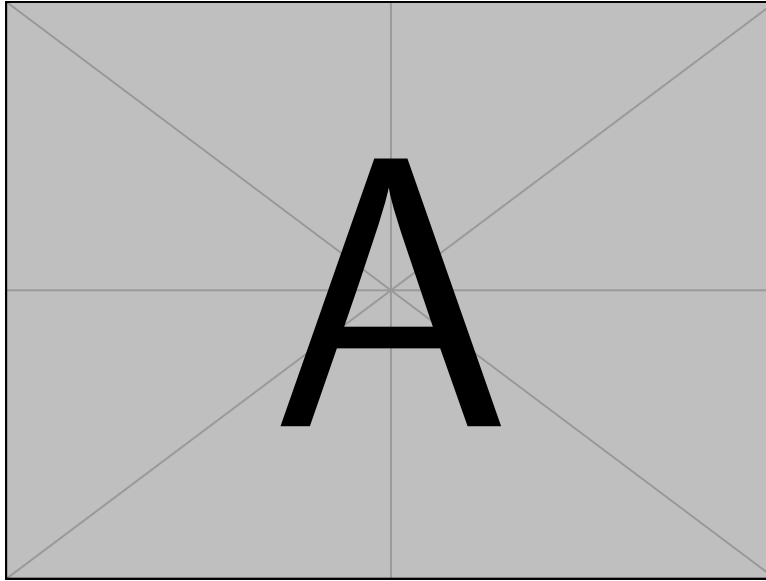


Рис. 10.6. Фазовые портреты: систем (10.8), (10.12) (а) и системы (10.7) (b).

$x^0 = x^*$  уравнение (10.12) может быть записано в следующем виде

$$\mu \dot{y} = a(y - y^*)^2 + \dots,$$

где  $a = \frac{1}{2}Q''_{yy}(x^*, y^*) \neq 0$ , поскольку в точке  $x = x^*$  имеет место бифуркация двукратного равновесия. Из (10.21) следует, что в окрестности  $y = y^*$  при  $\mu \rightarrow 0$   $|\dot{y}| \rightarrow \infty$ . Следовательно, точка  $(x^*, y^*)$  является точкой стыковки медленных и быстрых фазовых траекторий. В точках такого вида происходит «срыв» движения с одной из устойчивых компонент медленного движения (на рис.10.6а с  $Q_1^+$  в точке А и с  $Q_2^+$  в точке В) и релаксация к другой устойчивой компоненте. Далее процесс может повториться и в результате, в системе могут возникнуть периодические релаксационные колебания. Точнее, если в результате таких релаксационных переходов в вырожденном случае будет образована замкнутая фазовая кривая  $L_0$  (см. рис.10.6а), то существует такое число  $\mu_0 > 0$ , что при каждом значении параметра  $\mu \in (0, \mu_0)$  найдется малая окрестность траектории  $L_0$ , в которой лежит единственный цикл  $L_\mu$  системы (10.7) (см. рис.10.6b). При  $\mu \rightarrow 0$  цикл  $L_\mu$  стремится к  $L_0$ .

В качестве примера рассмотрим систему ФитцХью-Нагумо, которая описывает электрическую активность нервной клетки – нейрона. Тело клетки нейрона окружено биологической мембраной. Одна из важнейших функций биологической мембраны – генерация и передача биопотенциалов. Мембранный биопотенциал возникает из-за градиента концентрации ионов по разную сторону мембраны и возникающего в следствии этого переноса ионов через ионные каналы мембраны. Нейроны могут генерировать биопотенциалы в виде как одиночных электрических импульсов возбуждения (спайков), так

серий импульсов. С физической точки зрения биомембрану можно рассматривать как электрический конденсатор, в котором пластинами является электролиты наружного и внутреннего растворов. Через биомембрану по ионным каналам протекают ионные токи – калиевый, натриевый и др. Каждый ионный ток определяется разностью мембранного потенциала и равновесного потенциала, создаваемого диффузией ионных токов. Простейшей системой, описывающей эти процессы является модель ФитцХью-Нагумо, имеющая вид

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) - v, \\ \dot{v} = \mu(u - I), \end{cases} \quad (10.23)$$

где  $u$  описывает динамику мембранного потенциала,  $v$  – совокупное действие всех ионных токов, нелинейная функция имеет вид  $f(u) = u(1-u)(u-a)$ ,  $0 < a < 1$ , параметр  $I$  контролирует уровень деполяризации мембраны, а параметр  $\mu$  ( $0 < \mu \ll 1$ ) определяет характерные временные масштабы импульсов возбуждения. Следовательно, в (10.22)  $v$  – медленная, а  $u$  – быстрая переменные.

Пусть параметр  $I \in (u_{min}, u_{max})$ , где  $u_{min}$  и  $u_{max}$  – координаты минимума и максимума функции  $f(u)$  соответственно. Запишем системы медленных и быстрых движений

$$\dot{v} = u - I, \quad v = f(u) \quad (10.24)$$

$$\mu \dot{u} = f(u) - v^0, \quad v = v^0 = \text{const} \quad (10.25)$$

Анализируя (10.24), (10.25), устанавливаем представленные на рис.10.7 фазовые портреты системы (10.23). На фазовой плоскости существует устойчивый предельный цикл  $L_\mu$ , соответствующий периодическому изменению мембранного потенциала. Рассмотрим изменение переменной  $u(t)$ , отвечающей циклу  $L_\mu$ . Пусть в начальный момент времени изображающая точка находилась на цикле и значение  $u$  было максимальным – точка  $A$  (см. рис.10.7b). В начале точка двигается по циклу медленно пока не достигнет точки  $B$ . После этого следует очень быстрое прохождение участка  $BC$  и снова медленное движение вдоль участка  $CD$ , которое вновь сменяется быстрым движением на участке  $DA$ . В результате в системе реализуются периодические колебания потенциала  $u$ , качественный вид которых представлен на рис. 10.8.

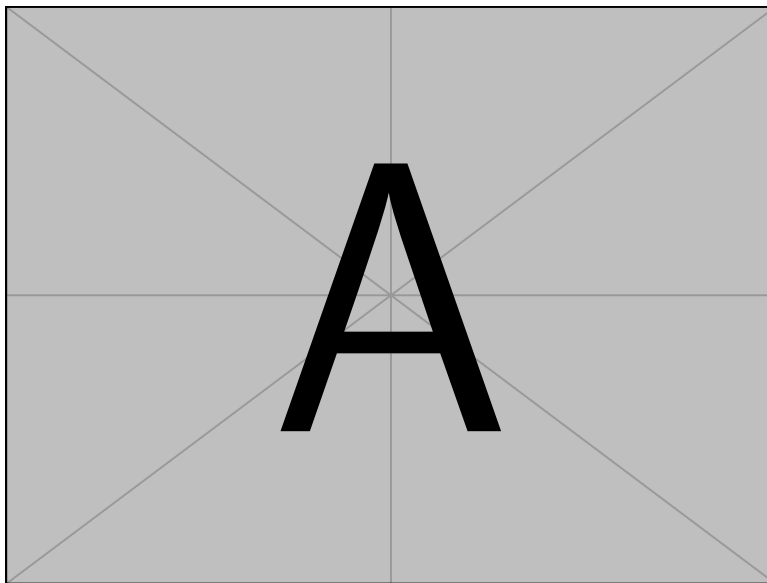


Рис. 10.7. Фазовые портреты: систем (10.24), (10.25) (а) и системы (10.23)(b)

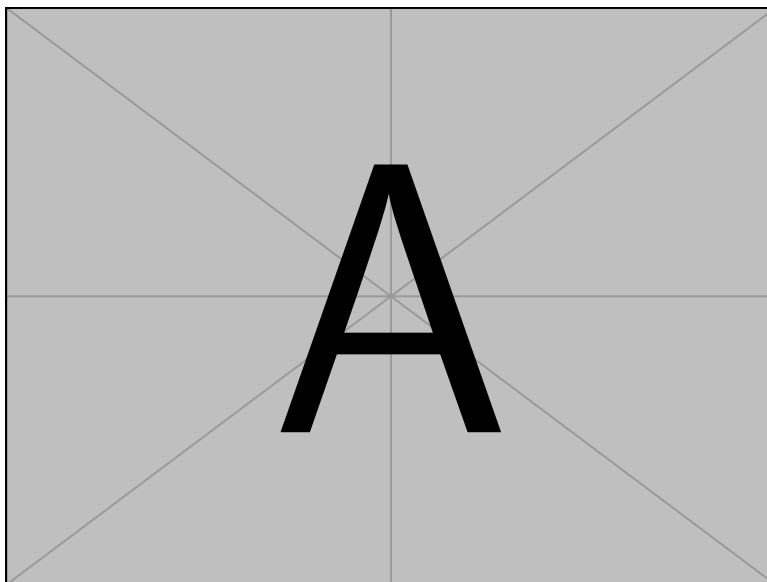


Рис. 10.8. Периодические релаксационные колебания мембранного потенциала в модели Фитц-Хью-Нагумо.

# Раздел II

## Весенний семестр

## Глава 11.

# Динамика сверхпроводящего Джозефсоновского контакта

*Стационарный и нестационарные эффекты Джозефсона.  
Качественное исследование модели. Вольт-амперная  
характеристика контакта.*

Сверхпроводимость – это свойство некоторых материалов обладать нулевым электрическим сопротивлением, когда их температура достигает значения ниже некоторого критического. Такое свойство демонстрируют несколько десятков чистых элементов, керамик и сплавов.

Рассмотрим систему, состоящую из двух сверхпроводников, разделенных тонким (толщина порядка  $10^{-7}$  см) изолирующим слоем, образованным, например, нормальным металлом. В 1962 г. 22-х летний студент-дипломник Б.Джозефсон (Brian Josephson) опубликовал статью, в которой, опираясь на экспериментальные результаты Гиавера, пришел к выводу о том, что через такой контакт возможно протекание сверхпроводящих токов. В частности, протекание постоянного тока даже в случае отсутствия разности потенциалов между сверхпроводниками. С точки зрения классических представлений такой эффект невозможен. Джозефсон показал, что протекание сверхпроводящих токов является следствием туннелирования так называемых куперовских пар через контакт. Куперовская пара представляет собой квазичастицу, образованную за счет взаимодействия и связывания двух электронов в сверхпроводнике. Поток куперовских пар и формирует ток при сверхпроводимости. Состояние куперовской пары можно описать с помощью волновой функции. Оказывается, что в сверхпроводнике куперовские пары не могут двигаться независимо друг от друга. Взаимодействие таких пар приводит

к их взаимной упорядоченности, в следствие которой состояние куперовских пар в сверхпроводнике характеризуется **единой волновой функцией**. Другими словами, куперовские пары скапливаются в одном и том же квантовом состоянии и поэтому описываются одной и той же волновой функцией.

## 11.1. Стационарный и нестационарный эффекты

Предположим, что волновые функции куперовских пар в сверхпроводниках не зависят от пространственных координат и изменяются только во времени. В таком приближении волновые функции задаются следующим образом

$$\Psi_i = \sqrt{\rho_i} e^{i\varphi_i}, \quad i = 1, 2, \quad (11.1)$$

где  $\rho_i$  – плотность зарядов электронов в сверхпроводниках, а  $\varphi_i$  – общая для всех частиц фаза в  $i$ -ом сверхпроводнике. При достаточном сближении сверхпроводников их волновые функции начинают перекрываться в области изолирующего зазора (барьера), формируя туннельный контакт. Возникает процесс переноса куперовских пар через барьер, который описывается следующей системой для волновых функций

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = E_1 \Psi_1 + K \Psi_2, \\ i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = E_2 \Psi_2 + K \Psi_1, \end{cases} \quad (11.2)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $E_1, E_2$  – энергии основных состояний каждого из проводников,  $K$  – амплитуда взаимодействия двух состояний контакта, зависящая от его специфики (геометрии электродов, параметров барьера и др.). Приложим к контакту постоянную разность потенциалов  $V$ , которая приведет к сдвигу

$$E_1 - E_2 = 2eV. \quad (11.3)$$

Без ограничения общности будем считать, что энергия отсчитывается от среднего между величинами  $E_1$  и  $E_2$ . Тогда (11.2) и (11.3) имеем

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = eV \Psi_1 + K \Psi_2, \\ i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -eV \Psi_2 + K \Psi_1. \end{cases} \quad (11.4)$$

Подставляя в (11.4) выражения  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  из (11.1) и разделяя в полученных уравнениях действительные и мнимые части, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= \frac{2K\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\hbar} \sin \varphi, & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} &= \frac{2K\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\hbar} \sin \varphi, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= -\frac{eV}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \varphi, & (11.5) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= -\frac{eV}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \varphi,\end{aligned}$$

где  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Обозначим через  $I_s$  ток куперовских пар, так называемый сверхток, который задается через  $\rho_1$  и  $\rho_2$  следующим образом

$$I_s = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t}. \quad (11.6)$$

Принимая во внимание (11.6), получаем из (11.5), что

$$I_s = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1\rho_2} \sin \varphi. \quad (11.7)$$

Включим контакт во внешнюю цепь с источником постоянного тока  $I > 0$ . За счет действия этого источника значения величин  $\rho_1$  и  $\rho_2$  могут поддерживаться постоянными, поскольку он непрерывно компенсирует потери куперовских пар уже протуннелированных через барьер. Предположим для простоты, что  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{const}$ . Тогда из (11.7) имеем

$$I = I_{max} \cdot \sin \varphi, \quad (11.8)$$

где  $I_{max} = \frac{2K}{\hbar} \rho$ . Из (11.8) следует, что при  $I < I_{max}$  существует разность фаз  $\varphi$ , при которой через контакт будет протекать постоянный ток. Заметим, что в (11.8) никак не входит напряжение на контакте. Постоянный ток через контакт протекает при нулевой разности потенциалов! Этот эффект называют **стационарным эффектом Джозефсона**. Он был подтвержден экспериментально Андерсоном и Роуэлом через год после теоретической работы Джозефсона.

Рассмотрим теперь систему (11.5) для фаз волновых функций. При сделанных выше предположениях из (11.5) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (11.9)$$

Уравнение (11.9) описывает ещё один удивительный эффект, предсказанный Джозефсоном. При постоянном напряжении на контакте через него протекает высокочастотный переменный ток. Это явление называют **нестационарным эффектом Джохевсона**. Заметим, что частота переменного тока пропорциональна величине приложенного напряжения. Однако, даже при очень малых напряжениях эта частота, оказывается, может лежать в очень широких пределах. Например, для некоторых сверхпроводников при напряжении  $V = 1$  мВ достигнута генерация переменного тока с частотой  $4.85 \cdot 10^{11}$  Гц.

## 11.2. Эквивалентная схема контакта

Кроме сверх тока, задаваемого выражением (11.8), через Джозевсоновский контакт протекает и обычный (нормальный) ток, вызванный туннелированием отдельных электронов. Контакт обладает также и емкостными свойствами, связанными со специфической конфигурацией контакта. Принимая эти свойства во внимание, получим электрическую схему контакта, представленную на рис.11.1. Запишем закон Кирхгофа для полного тока через контакт

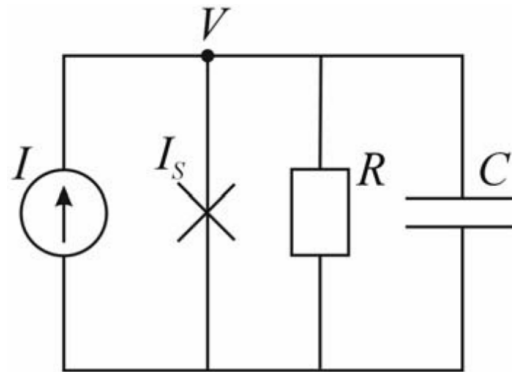


Рис. 11.1. Эквивалентная электрическая схема Джозефсоновского контакта.

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} + I_{max} \sin \varphi = I. \quad (11.10)$$

Исключая в (11.10), с помощью соотношения (11.9), переменную  $V$ , получим следующее уравнение

$$\frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_{max} \sin \varphi = I. \quad (11.11)$$

Введем в (11.11) новое время и параметры

$$\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} + \sin \varphi = \gamma, \quad (11.12)$$



где точкой обозначено дифференцирование по времени  $\tau$ .

Заметим, что уравнение (11.12) описывает также динамику совершенно далеких от теории сверхпроводимости физических систем – механического маятника в вязкой (параметр  $\lambda$ ) среде, находящегося под действием постоянного внешнего момента  $\gamma$  (см. лекцию 8), и системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), содержащую в цепи управления линейный фильтр, постоянную времени которого характеризует параметр  $\lambda$  (см. лекцию 4). В случае маятника переменная  $\varphi$  – угол отклонения от равновесия, а в случае системы ФАПЧ – разность фаз между двух генераторов, имеющих начальную расстройку по частоте  $\gamma$ . Поэтому полученные ниже результаты исследования динамики уравнения (11.12) можно использовать для понимания поведения и этих физических объектов.

### 11.3. Динамика модели

Перепишем уравнение (11.12) в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = \gamma - \sin \varphi - \lambda y. \end{cases} \quad (11.13)$$

Будем рассматривать систему (11.13) в области параметров  $D = \{\lambda, \gamma | \gamma \geq 0, \lambda \geq 0\}$ . Система (11.13) имеет цилиндрическое фазовое пространство  $G = S^1 \times \mathbb{R}$ , поскольку её правая часть  $2\pi$ -периодична по переменной  $\varphi$ .

#### 11.3.1. Консервативный случай

При  $\lambda = 0$  система (11.13) принимает форму нелинейного консервативного осциллятора, полная энергия которого сохраняется и задается следующим образом

$$E = E_K + E_\Pi = \text{const}, \quad E_\Pi$$

где

$$E_K = \frac{y^2}{2}, \quad E_\Pi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (\sin \xi - \gamma) d\xi,$$

где  $\varphi_0$  задает уровень, относительно которого отсчитывается потенциальная энергия. Из соображений удобства построения графика функции  $E_\Pi(\varphi)$ , необ-

ходимого в дальнейшем, выберем  $\varphi_0$  следующим образом

$$\varphi_0 = \begin{cases} \arcsin \gamma, & \text{если } \gamma \leq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } \gamma > 1 \end{cases}$$

Для построения фазовых портретов осциллятора воспользуемся стандартной процедурой (см. лекцию 5), основанной на свойствах функции  $E_{\Pi}(\varphi)$ . На рис.11.2 представлен качественный вид функции  $E_{\Pi}(\varphi)$  и соответствующие фазовые портреты для различных значений параметра  $\gamma$ .

Заметим, что рассматриваемый осциллятор имеет на одном периоде «угловой» переменной  $\varphi$  два состояния равновесия при  $\gamma < 1$ , одно из которых седло, а другое – центр, при  $\gamma = 1$  – одно состояние равновесия с двумя нулевыми характеристическими показателями. При  $\gamma > 1$  состояний равновесия нет.

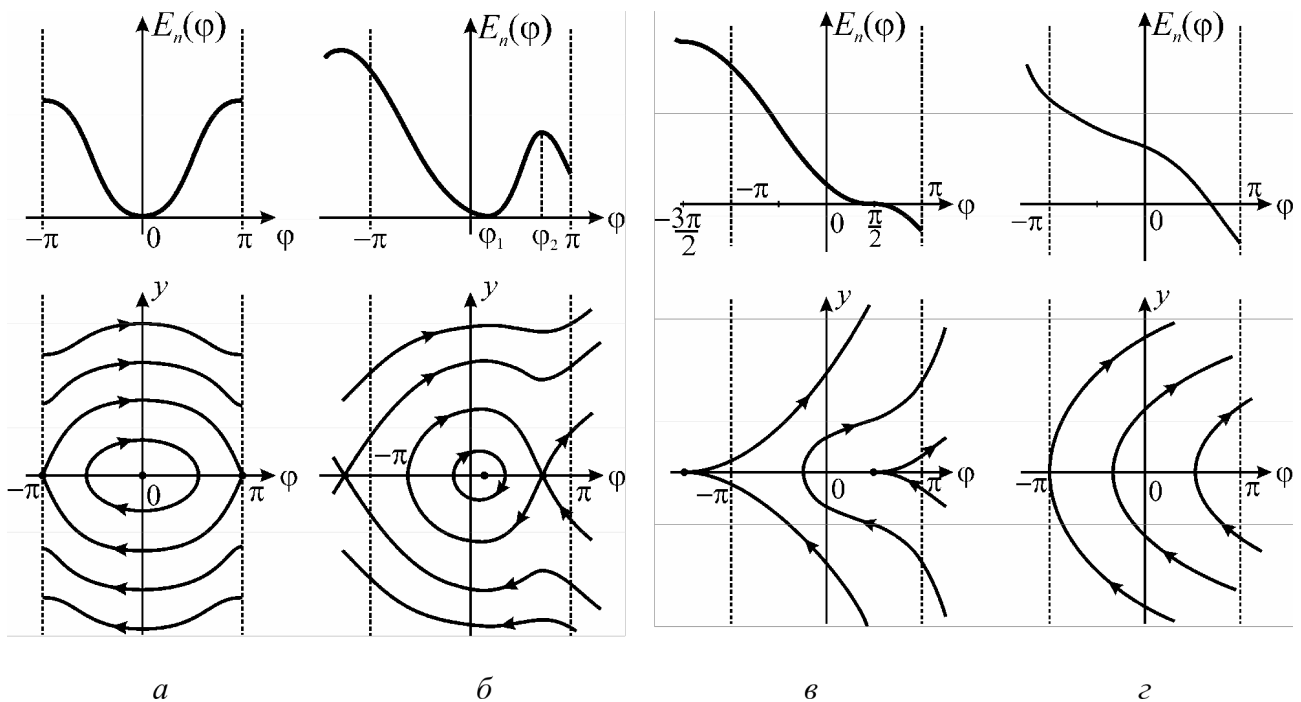


Рис. 11.2. Качественный вид функции  $E_{\Pi}(\varphi)$  и соответствующие фазовые портреты для различных значений параметра  $\gamma$  :  $\gamma = 0$  (а);  $\gamma \in (0, 1)$  (б);  $\gamma = 1$  (в);  $\gamma > 1$  (г).

### 11.3.2. Диссипативный случай

Исследование системы (11.4) при  $\lambda > 0$  начнем с установления важного свойства, связанного с её диссипативностью.

## Поглощающая область

Непосредственно из системы (11.4) имеет

$$\dot{y} = \gamma - \sin \varphi - \lambda y \leq \gamma + 1 - \lambda y.$$

Из (11.5) следует, что  $\dot{y} < 0$  при любых значениях переменной  $\varphi \in S^1$ , если  $y > \frac{1+\gamma}{\lambda}$ . Следовательно, любая траектория системы (11.13) с начальными условиями  $\varphi(0) \in S^1$ ,  $y(0) > \frac{1+\gamma}{\lambda}$  с течением времени приходит в область на фазовом цилиндре  $G$ , расположенную при  $y < \frac{1+\gamma}{\lambda}$ . При этом, для  $y > \frac{1+\gamma}{\lambda}$  переменная  $y$  монотонно убывает вдоль любой траектории. Аналогично,

$$\dot{y} = \gamma - \sin \varphi - \lambda y \geq \gamma - 1 - \lambda y. \quad (11.14)$$

В силу (11.14) имеем

$$\dot{y} > 0, \text{ если } y < \frac{\gamma - 1}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что любая траектория системы (11.13) с начальными условиями  $\varphi(0) \in S^1$ ,  $y(0) < \frac{\gamma-1}{\lambda}$  с течением времени попадает в область на фазовом цилиндре  $G$ , расположенную при  $y > \frac{\gamma-1}{\lambda}$ , а переменная  $y$  при  $y < \frac{\gamma-1}{\lambda}$  монотонно возрастает. Суммируя установленные выше свойства траектории системы (11.13), получаем, что область

$$G^+ = \left\{ \varphi, y \left| \varphi \in S^1, \frac{\gamma-1}{\lambda} \leq y \leq \frac{\gamma+1}{\lambda} \right. \right\}$$

притягивает все траектории этой системы с начальными условиями вне этой области. Другими словами,  $G^+$  – поглощающая область (см. лекцию 1). Заметим, что границу области  $G^+$  траектории системы (11.13) пересекают в одну сторону – снаружи внутрь. Поэтому траектории с начальными условиями из области  $G^+$  остаются в ней при любом  $\tau > 0$ . Далее будем рассматривать систему (11.13) в области  $G^+$ , содержащей все её неблуждающие траектории.

## Состояние равновесия и их локальные свойства

Из (11.4) следует, что координаты состояний равновесия определяются следующей системой

$$y = 0, \quad \gamma - \sin \varphi - \lambda y = 0. \quad (11.15)$$

Решая систему (11.15), устанавливаем, что система (11.13) имеет при  $0 \leq \gamma < 1$  два состояния равновесия –  $O_1(\varphi = \varphi_1, y = 0)$  и  $O_2(\varphi = \varphi_2, y = 0)$ , где  $\varphi_1 = \arcsin \gamma$ ,  $\varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma$ , при  $\gamma = 1$  – одно  $O_0(\varphi = \frac{\pi}{2}, y = 0)$ , а при  $\gamma > 1$  состояний равновесия нет. Несложно показать (предлагаем читателю

проделать это самостоятельно) с помощью метода линеаризации (см. лекцию 4), что состояние равновесия  $O_1$  является асимптотически устойчивым, а  $O_2$  – седлом. Состояние равновесия  $O_1$  – устойчивый фокус, если  $\lambda < 2(1 - \gamma^2)^{\frac{1}{4}}$  и устойчивый узел в противоположном случае (см. рис.11.3а).

Найдем критические направления сепаратрис седла  $O_2$ . Для этого линеаризуем систему (11.13) в окрестности точки  $O_2$ . В результате получим

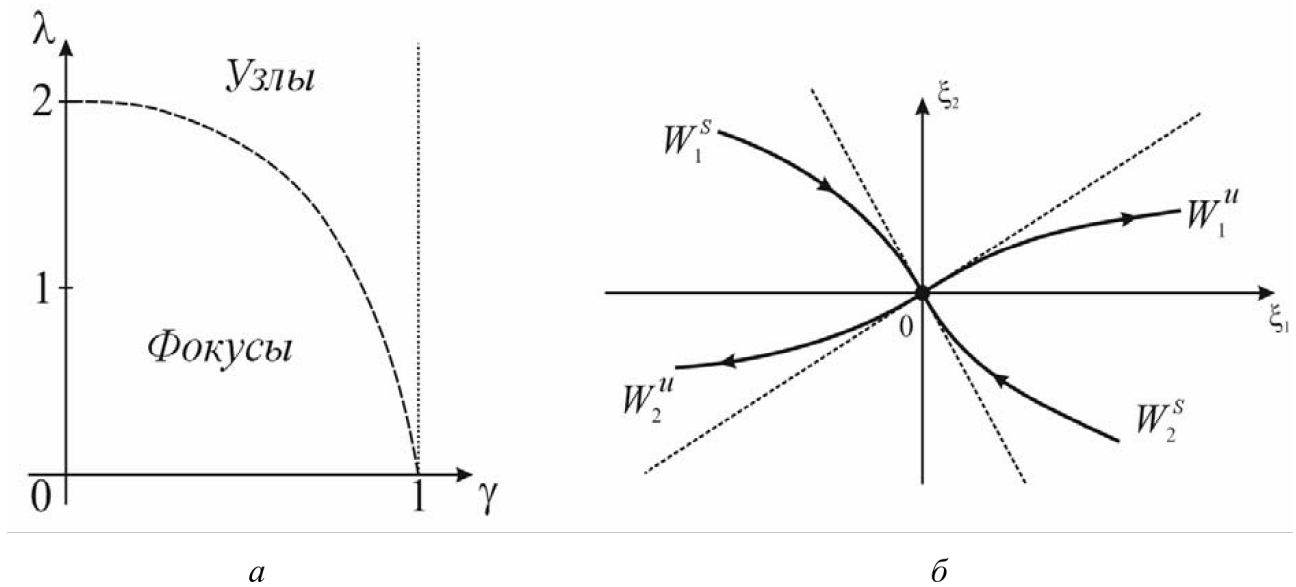


Рис. 11.3. Качественное разбиение плоскости параметров  $D$  на области, отвечающие различным типам состояния равновесия  $O_1$  (а); качественное представление критических направлений седла  $O_2$  (б).

линеаризованную систему следующего вида

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \sqrt{1 - \gamma^2} \xi_1 - \lambda \xi_2 \end{cases} \quad (11.16)$$

Перепишем (11.16) в виде одного эквивалентного уравнения

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\sqrt{1 - \gamma^2} \xi_1 - \lambda \xi_2}{\xi_2}. \quad (11.17)$$

Как известно (см. лекцию 4), у линейных систем сепаратрисы седел представляют собой прямые. Поэтому будем искать уравнения сепаратрис седла системы (11.16) в виде

$$\xi_2 = k\xi_1, \quad (11.18)$$

где  $k$  – коэффициент, который требуется найти. Подставляя (11.18) в (11.17),

получим

$$\left. \frac{d\xi_2}{d\xi_1} \right|_{\xi_2=k\xi_1} = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}\xi_1 - \lambda k\xi_1}{k\xi_1} = \frac{\sqrt{1-\gamma^2} - \lambda k}{k}. \quad (11.19)$$

С другой стороны, из (11.18) следует, что

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = k. \quad (11.20)$$

Приравнивая теперь правые части (11.19) и (11.20), получаем для нахождения  $k$  квадратное уравнение, корни которого и определяют искомые коэффициенты

$$k_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda_2}{4} + \sqrt{1-\gamma^2}}.$$

Поскольку  $k_1$ , а  $k_2 < 0$ , то в силу первого уравнения системы (11.13) в точке  $O_2$  неустойчивые сепаратрисы касаются прямой с наклоном  $k_1$ , а устойчивые – с наклоном  $k_2$ . Неустойчивую сепаратрису, выходящую в область  $\xi_2 > 0$ , обозначим через  $W_1^u$ , а в область  $\xi_2 < 0$  – через  $W_2^u$ . Аналогично, устойчивую сепаратрису, приближающуюся к точке  $O_2$  со стороны  $y > 0$ , обозначим через  $W_1^s$ , а со стороны  $\xi_2 < 0$  – через  $W_2^s$  (см. рис.11.3b).

При  $\gamma = 1$  состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  сливаются в точке  $O_0$ , которая исчезает при  $\gamma > 1$ . Точка  $O_0$  – седло-узел с устойчивой узловым областью и неустойчивой сепаратрисой (см. лекцию 8). Таким образом, при  $\gamma = 1$  происходит бифуркация коразмерности 1 – образования седло-узла.

## Функция Ляпунова

При  $0 \leq \gamma < 1$  введем в рассмотрение функцию

$$V(\varphi, y) = \frac{y^2}{2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi} (\sin \xi - \gamma) d\xi.$$

Найдем производную этой функции в силу системы (11.13)

$$\dot{V} = y \cdot \dot{y} + (\sin \varphi - \gamma) \dot{\varphi} = y(\gamma - \sin \varphi - \lambda y) + (\sin \varphi - \gamma)y = -\lambda y^2 \leq 0. \quad (11.21)$$

Из (11.21) следует, что вдоль траектории системы (11.13) при увеличении времени  $\tau$  линии уровня  $V(\varphi, y) = C = \text{const}$  убывают. Заметим, что условие  $\dot{V}|_{y=0}$  не нарушает этого свойства. В точках пересечения линий уровня  $V(\varphi, y) = C$  с прямой  $y = 0$  траектории системы (11.13), хотя и касаются этих линий, но продолжают свое движение в сторону их убывания. Рас-

смотрим вид линий уровня функции  $V(\varphi, y)$  на фазовом цилиндре, который, очевидно, зависит от параметра  $\gamma$ .

**Пусть  $\gamma = 0$ .** В этом случае линии уровня качественно

## Глава 12.

# Метод Ван-дер-Поля. Автоколебания и автоколебательные системы

*Укороченная система. Динамика маятниковых часов. Мягкое  
и жесткое возбуждение автоколебаний.*

## Глава 13.

# Вынужденные колебания линейного осциллятора

*Глобальное отображение Пуанкаре. Периодические и квазипериодические вынужденные колебания. Резонанс и резонансные кривые. Биения. Добротность*



## Глава 14.

# Вынужденные колебания в слабонелинейных системах с одной степенью свободы

*Стандартная форма метода усреднения. Резонанс в  
нелинейном осцилляторе. Динамика системы укороченных  
уравнений. Резонансные кривые.*

## Глава 15.

# Динамика укороченной системы. Отображение Пуанкаре. Режим синхронизма и его характеристики.

*Укороченная система. Динамика маятниковых часов. Мягкое и жесткое возбуждение автоколебаний.*