

Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Численное моделирование морской
поверхности

Работу выполнил
Понур К.А.

Научный руководитель
Караев В.Ю.

3 июня 2019 г.

Введение

Цели:

- 1 Изучить принципы моделирования морской поверхности.
- 2 Оптимизировать существующие алгоритмы.

Актуальность работы:

- 1 Тестирование и разработка алгоритмов восстановления океанографической информации
- 2 Оценка возможностей новых радиолокаторов
- 3 Постановка численных экспериментов, в частности накопление статистических данных

Одномерное моделирование

Одномерную поверхность представим как:

$$\zeta(r, t) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot \cos(k_i r + \psi_i), \quad (1)$$

где ψ_i – случайная фаза, a_i – амплитуда i -ой гармоники
Корреляционная функция такого поля запишется как:

$$\widetilde{M}(\rho) = \sum_0^N b_i \cos(k_i \rho)$$

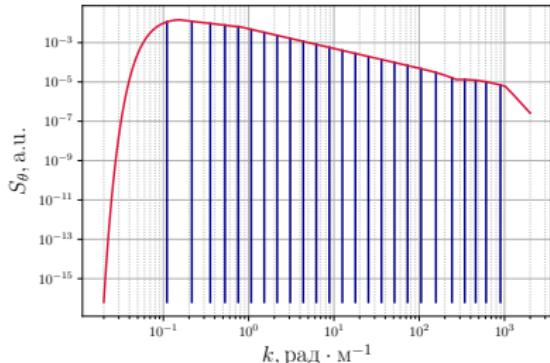


Рис.: Пример расположения спектральных компонент

АКФ реального поля:

$$M(\rho) = \int_0^\infty S(k) \cos(k\rho) dk, \quad (2)$$

$S(k)$ – спектр морской поверхности

k_i – абсцисса спектральной компоненты

Эквидистантное расположение

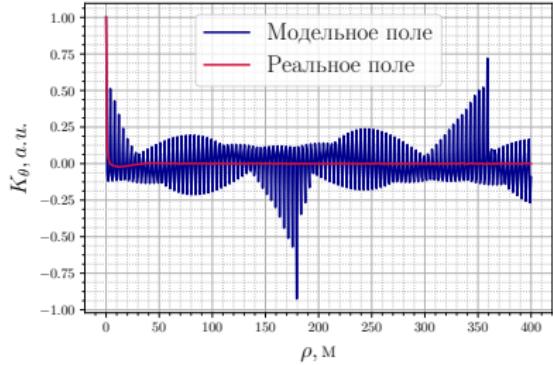
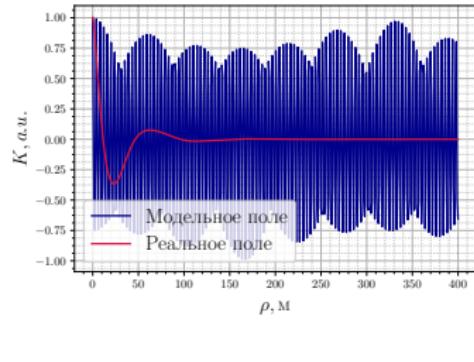


Рис.: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов. $U = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $N = 256$
Узлы задаются выражением

$$k_i = \Delta k \cdot i \quad (3)$$

$b_i = \int_{(i-1)\Delta k}^{i\Delta k} S(k) dk$ – амплитуда спектральной компоненты

Эквидистантное расположение

При очень большом числе гармоник период функций корреляции всё ещё недостаточно большой

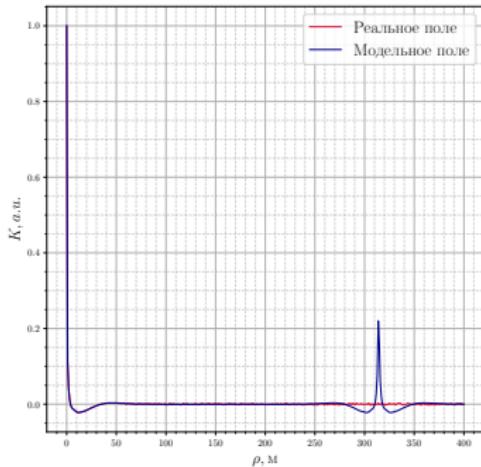
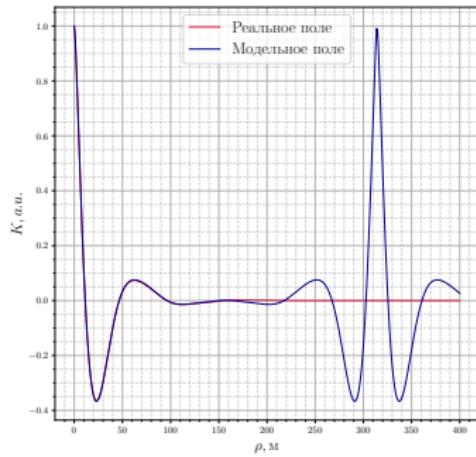


Рис.: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов. $U = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $N = 10^5$

Неэквидистантное расположение

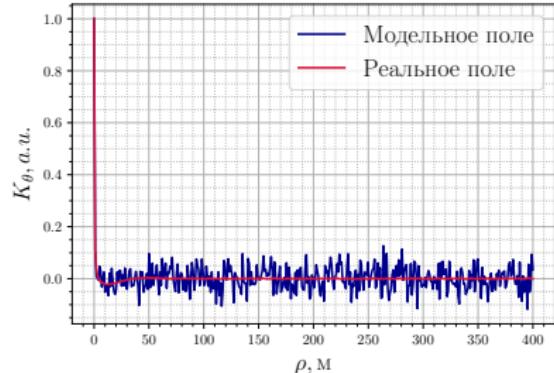
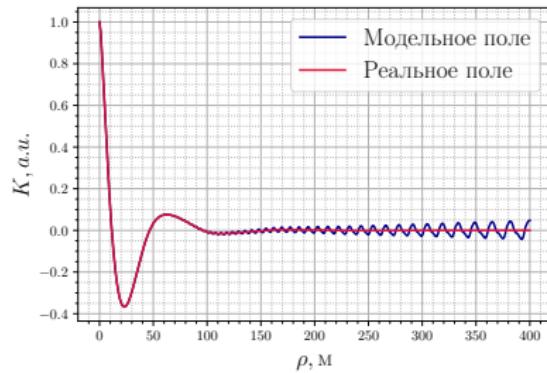


Рис.: Корреляционные функции высот и уклонов при логарифмическом расположении узлов. $U = 10 \frac{M}{c}$, $N = 256$

Узлы задаются выражением

$$k_i = 10^{i\Delta k} \quad (4)$$

$$b_i = \int_{10^{(i-1)\Delta k}}^{10^{i\Delta k}} S(k) dk - \text{амплитуда спектральных компонент}$$

«Отбеливание» спектра

Предположим, что гармонические составляющие при больших ρ складываются «некогерентным» образом. То есть мощность шума определяется как

$$\sigma_{noise}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{b_i^2}{2} \quad (5)$$

В области малых ρ гармоники суммируются «когерентно» и соответствующая мощность равна

$$\widetilde{M}^2(0) = \left(\sum_{i=1}^N b_i \right)^2 \quad (6)$$

Введем функцию, характеризующую относительную мощность шумов

$$Q = \frac{\sigma_{noise}^2}{\widetilde{M}^2(0)} \quad (7)$$

«Отбеливание» спектра

Минимизируем величину (7), решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial b_N} = 0, \end{cases} \quad \text{где } \frac{\partial Q}{\partial b_i} = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^N b_i\right)^2} - \frac{\sum_{i=1}^N b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^N b_i\right)^3} \quad (8)$$

Она сводится к следующей системе $b_i \sum_{i=1}^N b_i - \sum_{i=1}^N b_i^2 = 0$

Частным результатом решения является $b_1 = b_2 = \dots = b_N$.

Для высот: $b_i = b_1 = \frac{M(0)}{N} = \frac{1}{N} \int_0^\infty S(k) dk$ (9)

Для наклонов: $b_i^\theta = b_1^\theta = \frac{M^\theta(0)}{N} = \frac{1}{N} \int_0^\infty k^2 S(k) dk$ (10)

«Отбеливание» спектра

Потребуем сопряжения в нуле всех производных функций $\widetilde{M}(\rho)$ и $M(\rho)$. Для функции корреляции стационарной случайной функции $M(\rho)$ справедливо

$$M'_\rho = \frac{\partial^2 M(\rho)}{\partial \rho^2} = \int_0^\infty k^2 S(k) \cos(k\rho) \, dk \quad (11)$$

А значит можно переписать наше требование в виде

$$\sum_{i=1}^N b_i k_i^{2p} = \int_0^\infty k^{2p} S(k) \, dk, \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

Решать такую систему довольно сложно, поэтому потребуем выполнение более простого равенства

$$\sum_{i=1}^N b_i k_i^2 = \int_0^\infty k^2 S(k) \, dk \quad (13)$$

Детерминированное расположение узлов

Для наклонов:

$$k_i = \sqrt{\frac{N}{\int_0^{\infty} k^2 S(k) dk}} \cdot \int_{\Delta k_i} k^4 S(k) dk$$

Для высот:

$$k_i = \sqrt{\frac{N}{\int_0^{\infty} S(k) dk}} \cdot \int_{\Delta k_i} k^2 S(k) dk$$

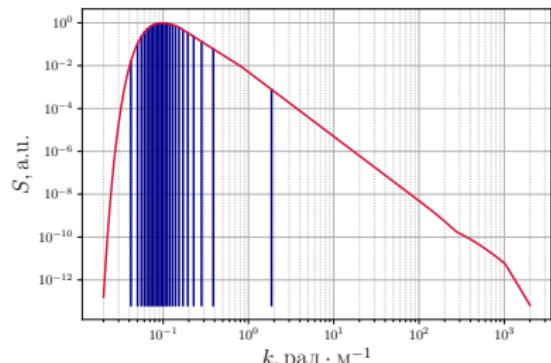
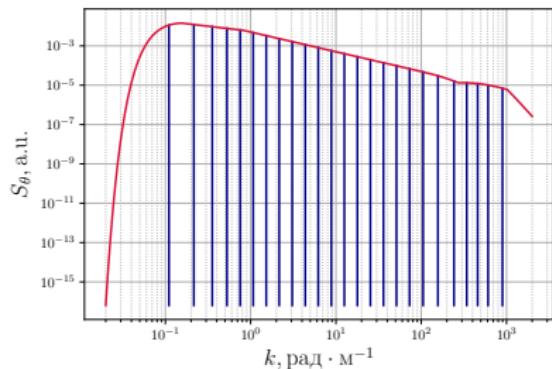


Рис.: Расположение узлов по методу «отбеливания» спектра для наклонов и высот соответственно. $U = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $N = 25$

Сравнение методов

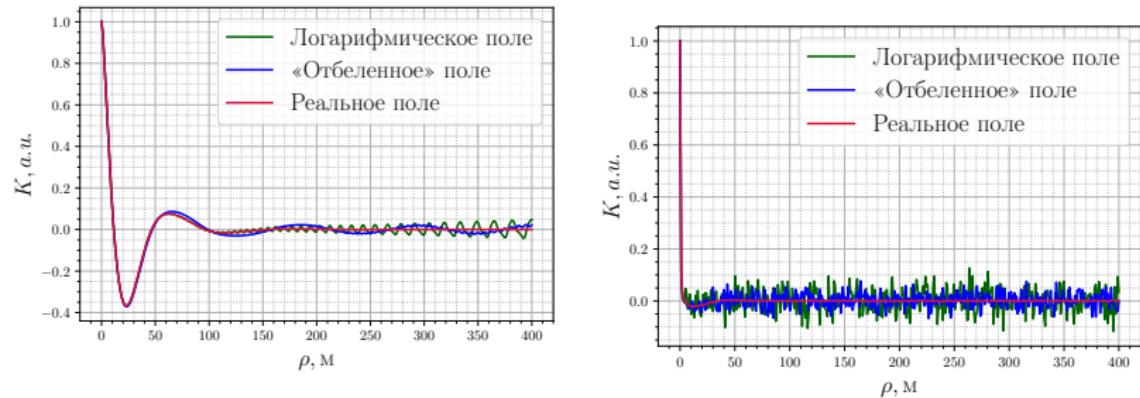


Рис.: Корреляционные функции высот и уклонов при расположении узлов по методу «отбеливания» спектра для уклонов. $U = 10 \frac{M}{c}$, $N = 256$

Узлы задаются выражением

$$k_i = \sqrt{\frac{N}{\int_0^{\infty} k^2 S(k) dk}} \cdot \int_{\Delta k_i} k^4 S(k) dk \quad (14)$$

Двумерные функции корреляции

Для статистически однородного и стационарного поля справедливо следующее выражение для его корреляционной функции:

$$M(\vec{\rho}) = \iint_{(-\infty)} S(\vec{k}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{\rho}) d\vec{k}, \quad (15)$$

где $S(\vec{k})$ – волновой спектр морской поверхности.

Корреляционную функцию наклонов морской поверхности определим как

$$M_\theta(\vec{\rho}) = \iint_{(-\infty)} k^2 \cdot S(\vec{k}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{\rho}) d\vec{k} \quad (16)$$

Предположим, что переменные разделяются $S(\vec{k}) = S(k)\Phi_k(\varphi)$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{k_y}{k_x}$, а функция распределения нормирована на единицу $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k d\varphi = 1$

Двумерная модель поверхности волнения

Представим морскую поверхность в виде суммы синусоид с детерминированными амплитудами и случайными фазами:

$$\zeta(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_n(k_n) \cdot \Phi_{k_n m}(\varphi_m) \cos\left(\omega_n t + \vec{k}_n \vec{r} + \psi_{nm}\right), \quad (17)$$

ψ_{nm} – случайная фаза, A_n – амплитуда n -ой гармоники.

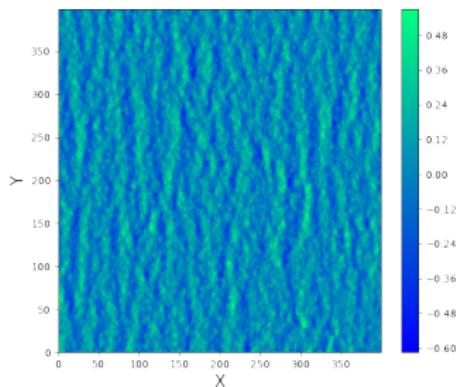
Амплитуда, которая является мощностью на интервале Δk_n , вычисляется по спектру моделируемой поверхности

$$A_n(k_n) = \sqrt{2S(k_n)\Delta k_n} \quad (18)$$

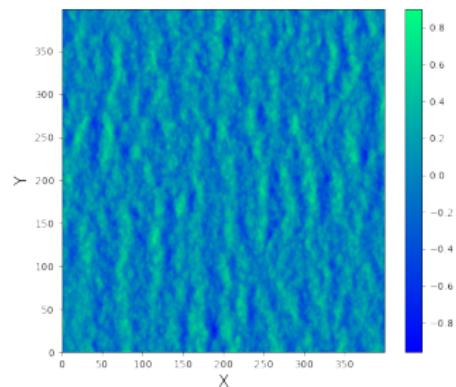
Φ_{nm} – азимутальное распределение, вычисляемое следующим образом:

$$\Phi_{nm}(k_n, \varphi_m) = \sqrt{\Phi(k_n, \varphi_m)\Delta\varphi}, \quad (19)$$

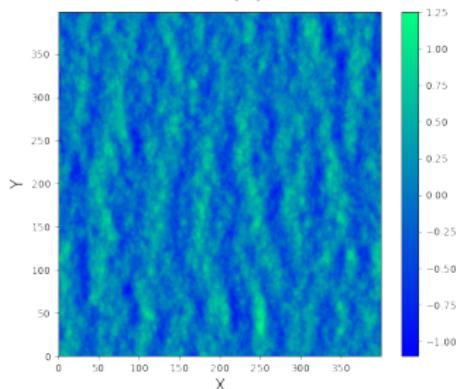
$\Delta\varphi$ – шаг по углу.



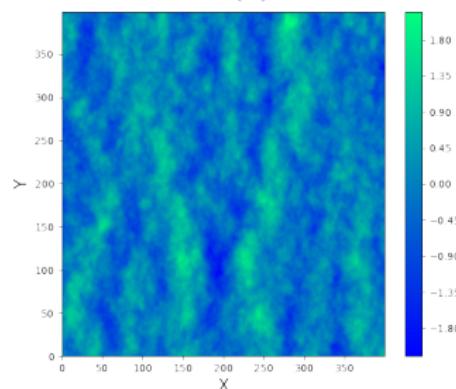
(a)



(b)



(c)



(d)

Рис.: Моделирование высот морского волнения. $N = 256$,
(a) $U_{10} = 5 \text{ м/c}$, (b) $U_{10} = 6 \text{ м/c}$, (c) $U_{10} = 7 \text{ м/c}$, (d) $U_{10} = 10 \text{ м/c}$

Заключение

Спектр морской поверхности

U_{10} – скорость на высоте 10 м над поверхностью;

$\tilde{x} = \frac{xg}{U_{10}^2}$ – безразмерный разгон

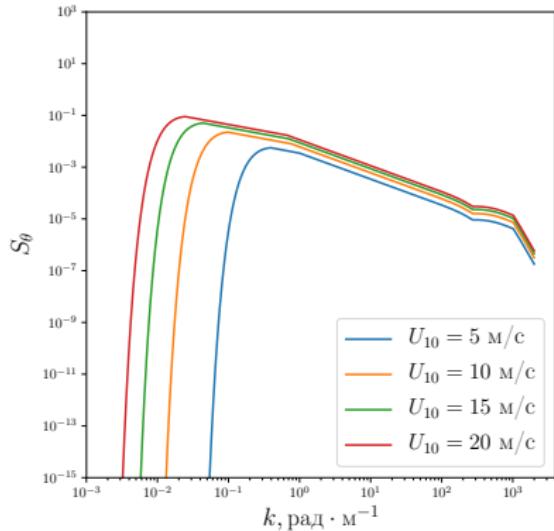


Рис.: Спектр наклонов $S_\theta(k)$ при фиксированном значении $\tilde{x} = 20170$ и меняющейся скорости ветра

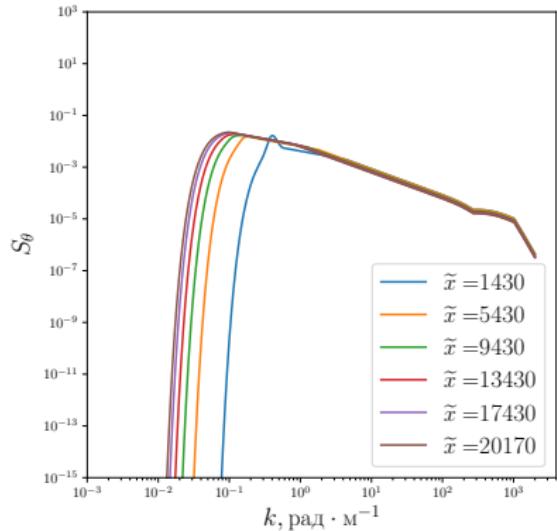


Рис.: Спектр наклонов $S_\theta(k)$ при фиксированном значении скорости ветра $U = 10 \text{ м/с}$ и меняющемся разгоне

Угловое распределение

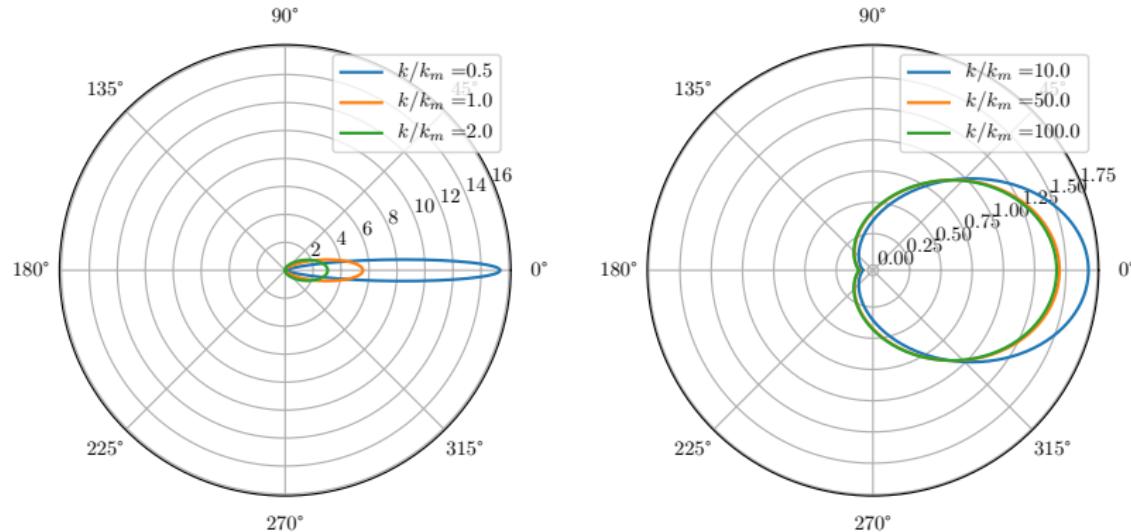


Рис.: Угловое распределение $\Phi_k(\varphi)$ в полярных координатах для разных соотношений k/k_m , где k_m - координата пика $S(k)$ при фиксированной скорости ветра