

Введение в статистическую радиофизику

ЧАСТЬ II

С. М. РЫТОВ, Ю. А. КРАВЦОВ, В. И. ТАТАРСКИЙ

СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
и дополненное,
под общей редакцией С. М. РЫТОВА

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физических специальностей высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

32.841
Р 95
УДК 538.3

P **20407—179**
053(02)-78 100-79

© Наука
Главная редакция
физико-математической
литературы
1978

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора	6
------------------------	---

Глава I

Общие сведения о случайных полях

§ 1. Основные понятия	7
§ 2. Пространственные корреляционные функции комплексных случайных полей	10
§ 3. Пространственные спектральные разложения для однородных случайных полей	16
§ 4. Локально однородные случайные поля	21
§ 5. Квазиноднородные поля	26
§ 6. Пространственно-временные спектральные разложения случайных полей	27
§ 7. Функциональный метод описания случайных полей	33
Задачи	44

Глава II

Излучение и дифракция случайных волновых полей

§ 8. Основные типы статистических волновых задач	58
§ 9. Случайные волны в неограниченной однородной среде	62
§ 10. Дифракция плоской волны на безграничном хаотическом экране	71
§ 11. Дифракция случайных полей в простейших оптических системах	87
§ 12. Возбуждение полей случайными источниками	102
Задачи	113

Глава III

Тепловое электромагнитное поле

§ 13. Предварительные замечания	123
§ 14. Стохастические уравнения Максвелла	127
§ 15. Равновесные тепловые флуктуации в непрерывных диссипативных системах	130
§ 16. Корреляция сторонних тепловых источников в электродинамике	135
§ 17. Обобщенный закон Кирхгофа	139
§ 18. Примеры применений обобщенного закона Кирхгофа	145
§ 19. Волноводная форма закона Кирхгофа	153
§ 20. Тепловое излучение и антенны	158
§ 21. Равновесное тепловое поле. Равновесная форма ФДТ	164

§ 22. Тепловое поле в гиротропных телах	168
§ 23. Тепловое поле в среде с пространственной дисперсией	173
Задачи	182

Глава IV

Теория однократного рассеяния волн

§ 24. Метод малых возмущений	192
§ 25. Средняя интенсивность рассеянного поля	197
§ 26. Эффективный поперечник рассеяния. Границы применимости приближения однократного рассеяния	208
§ 27. Пространственная корреляция и вероятностные распределения рассеянного поля	215
§ 28. Рассеяние на нестационарных неоднородностях	220
§ 29. Рассеяние импульсных и модулированных сигналов	229
§ 30. Рассеяние электромагнитных волн	233
§ 31. Рассеяние на дискретных вкраплениях	241
Задачи	251

Глава V

Распространение волн в средах с крупномасштабными
случайными неоднородностями.
Метод геометрической оптики

§ 32. Уравнения геометрической оптики	256
§ 33. Флуктуации эйконала	261
§ 34. Флуктуации углов прихода, боковых смещений луча и группового запаздывания волн	271
§ 35. Флуктуации уровня	279
§ 36. Флуктуации параметров волн в турбулентной тропосфере	286
§ 37. Среднее поле и функция когерентности	290
Задачи	292

Глава VI

Метод плавных возмущений

§ 38. Обоснование параболического уравнения	297
§ 39. Закон сохранения энергии в приближении параболического уравнения	306
§ 40. Метод плавных возмущений	308
§ 41. Анализ результатов МПВ	316
§ 42. Распределение вероятностей флуктуаций амплитуды и фазы. Закон сохранения энергии и границы применимости МПВ	330
Задачи	336

Глава VII

Приближение марковского процесса
в задаче о распространении волн
в среде со случайными неоднородностями

§ 43. Обоснование марковского приближения	342
§ 44. Уравнения для статистических моментов волнового поля в приближении марковского случайного процесса	349

§ 45. Среднее поле и функция когерентности второго порядка	355
§ 46. Функция когерентности четвертого порядка и флуктуации интенсивности	364
§ 47. Учет конечности продольного радиуса корреляции флуктуаций в границы применимости марковского приближения	372
Задачи	379

Глава VIII

Элементы общей теории многократного рассеяния волн

§ 48. Теория возмущений и диаграммная техника для среднего поля и функции корреляции	385
§ 49. Среднее поле точечного источника в неограниченной случайно-недонородной среде	401
§ 50. Функция когерентности поля. Оптическая теорема и уравнение переноса излучения	413
Задачи	426

Глава IX

Рассеяние на шероховатых поверхностях

§ 51. Рассеяние на малых неровностях. Метод возмущений	429
§ 52. Рассеяние на крупномасштабных неровностях. Метод Кирхгофа	442
§ 53. Дополнительные замечания. Другие подходы	451
Задачи	455

Литература	456
----------------------	-----

ОТ РЕДАКТОРА

Вторая часть книги, посвященная теории случайных полей, построена в соответствии с тем же принципом, что и первая (случайные процессы): математическая теория излагается в тесной связи с приложениями к физическим задачам, выбор которых ограничен вопросами, имеющими самостоятельное значение и интерес. Вместе с тем эти вопросы позволяют довольно широко осветить различные методы теории случайных полей, главным образом корреляционной теории.

Выбраны две физические проблемы—излучение и распространение скалярных и векторных волн в случайно-неоднородных средах и равновесные поля теплового происхождения.

Первой проблеме уделено наибольшее место. Рассмотрено распределение волн преимущественно на флуктуациях непрерывной неоднородной среды, но затронуты также случаи и дискретных распределителей (вкраплений), и случайно-неровных границ раздела (шероховатых поверхностей).

В вопросах, касающихся тепловых полей, упор сделан на обобщение и различные формы флуктуационно-диссилиационной теоремы применительно к распределенным системам, сплошным средам и телам.

Каждая глава сопровождается задачами, предназначенными, как и в ч. I, для упражнений и для дополнительных сведений по теории.

Главы I (кроме § 7), II, IV, V и IX написаны Ю. А. Кравцовым, глава III—С. М. Рытовым, § 7 главы I и главы VI—VIII—В. И. Татарским.

С. М. Рытов

Глава I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЯХ

§ 1. Основные понятия

В части I этой книги мы, почти без исключений, имели дело с однопараметрическими случайными функциями $\xi(\alpha)$, причем в большинстве приложений параметр α являлся временем t . Если же речь идет о случайной функции более чем одного параметра, $\xi(\alpha, \beta, \dots)$, то ее называют обычно *случайным полем* (в пространстве параметров α, β, \dots). Мы сразу же ограничимся случаем, когда параметров всего четыре: время t и точка пространства $r = (x, y, z)$. Можно, конечно, называть $\xi(t, r)$ полем в четырехмерном пространстве, но в нерелятивистских задачах привычнее и нагляднее говорить о переменном (зависящем от t) поле в трехмерном пространстве (x, y, z) .

В свою очередь случайное поле может описываться не одной, а N функциями $\xi^{(i)}(t, r)$, $i = 1, 2, \dots, N$, и называется тогда N -мерным случальным полем, подобно N -мерной случайной функции $\xi^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$. С чисто математической точки зрения компоненты $\xi^{(i)}(t, r)$ могут быть чем угодно и даже не обязаны обладать одинаковой размерностью. Например, флуктуации плотности жидкости ρ , давления p , температуры T и скорости v образуют в совокупности шестимерное случайное поле. Но особый физический интерес представляют, конечно, те случаи, когда величины $\xi^{(i)}(t, r)$ одноразмерны и обладают определенными трансформационными свойствами при ортогональных преобразованиях координат в пространстве x, y, z , т. е. являются совокупностью компонент тензора какого-либо ранга. При таком подходе целесообразнее говорить в приведенном примере о *четырех полях* — трех скалярных (ρ, p и T) и одном векторном (v).

Ряд определений и свойств, введенных и установленных ранее в ч. I для случайных функций одного параметра, естественным образом обобщается и на случайные поля, зависящие

от многих параметров, в частности, на пространственно-временные случайные поля, зависящие от x, y, z, t . Эти (зачастую довольно очевидные) обобщения касаются и вопроса о том, что означает *полное задание* случайного поля.

Обозначим для краткости через $Q = (t, \mathbf{r})$ точку в четырехмерном мире. *Полное задание* одномерного случайного поля $\xi(Q)$ означает, что известны все его n -мерные, или, как иногда говорят, n -точечные ($n = 1, 2, \dots$), плотности вероятностей, т. е. для любого числа n произвольно выбранных точек Q_v известны функции

$$w_n \{\xi_1, \dots, \xi_n\} d\xi_1 \dots d\xi_n = P \{\xi_v \leq \xi(Q_v) < \xi_v + d\xi_v \quad (v=1, 2, \dots, n)\}, \quad (1.1)$$

где $P \{\xi \leq \xi(Q) < \xi + d\xi\}$ — вероятность того, что случайная величина $\xi(Q)$ приняла значение, лежащее в интервале $(\xi, \xi + d\xi)$ ¹⁾. Аналогично, полное статистическое задание (описание) N -мерного поля $\xi^{(i)}(Q)$ дается совокупностью nN -мерных плотностей вероятностей

$$w_{nN} (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}) d\xi_1^{(1)} d\xi_2^{(1)} \dots d\xi_n^{(1)} = P \{\xi_v^{(i)} \leq \xi^{(i)}(Q_v) < \xi_v^{(i)} + d\xi_v^{(i)}, v=1, 2, \dots, n, i=1, 2, \dots, N\}. \quad (1.2)$$

Эти плотности вероятностей, разумеется, должны быть подчинены условиям неотрицательности, симметрии, согласованности и нормировки (ч. I, § 14).

Очевидным образом распространяется на случайные поля и понятие статистической однородности. Одномерное случайное поле ξ называется *однородным* (в узком смысле), т. е. стационарным²⁾ по t и однородным по x, y, z , если все n -мерные плотности вероятности w_n инвариантны относительно преобразования трансляции $Q \rightarrow Q + \delta Q$:

$$P \{\xi_v \leq \xi(Q_v + \delta Q) < \xi_v + d\xi_v, v=1, 2, \dots, n\} = P \{\xi_v \leq \xi(Q_v) < \xi_v + d\xi_v, v=1, 2, \dots, n\}. \quad (1.3)$$

Если речь идет о N -мерном случайном поле $\xi^{(i)}$ и указанной инвариантностью относительно сдвига δQ обладают все nN -мерные плотности вероятностей w_{nN} , то говорят об *однородных и однородно связанных* (в Q -пространстве) полях $\xi^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$).

Понятие *пространственной однородности* для случайных полей (инвариантность плотностей w_n по отношению к простран-

¹⁾ Полное описание случайного поля достигается также при помощи характеристических функционалов, о которых пойдет речь в § 7.

²⁾ Однородность по времени принято называть *стационарностью*.

ственному сдвигу $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$) является естественным обобщением понятия стационарности для случайных функций времени (ч. I, § 16). Но многомерность пространства параметров x, y, z, t открывает новые возможности, а именно: поле может быть по части параметров однородным, а по остальным — неоднородным. Например, наряду с полями, однородными в Q -пространстве, иногда приходится иметь дело со стационарными, но пространственно неоднородными полями или же однородными, но нестационарными полями. В волновых задачах часто встречаются поля, однородные только на определенных поверхностях, скажем на плоскости или на сфере.

Зная многомерные плотности вероятностей, можно вычислить моменты случайного поля ξ любого порядка. В общем случае эти моменты будут функциями координат: $Q_v = (t_v, \mathbf{r}_v)$. Во многих вопросах наибольший интерес представляют наименьшие моменты (первого и второго порядка), с которыми оперирует корреляционная теория случайных полей. Основные понятия этой теории те же, что и в корреляционной теории случайных функций.

Среднее значение случайного поля $\xi(Q)$ (момент первого порядка) вычисляется при помощи одномерной плотности вероятностей $w_1(\xi)$ ¹:

$$\langle \xi(Q) \rangle = \int \xi w_1(\xi) d\xi. \quad (1.4)$$

Флуктуационную часть случайного поля ξ , т. е. величину $\xi - \langle \xi \rangle$, мы по-прежнему будем обозначать волнистой чертой сверху:

$$\tilde{\xi} = \xi - \langle \xi \rangle = \xi - \bar{\xi}. \quad (1.5)$$

Смешанный момент второго порядка B_{ξ} вычисляется при помощи двумерной плотности вероятностей $w_2(\xi_1, \xi_2)$:

$$B_{\xi}(Q_1, Q_2) \equiv \langle \xi(Q_1) \tilde{\xi}(Q_2) \rangle = \iint \xi_1 \tilde{\xi}_2 w_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (1.6)$$

Через нее же выражается и функция корреляции (точнее, функция автокорреляции):

$$\begin{aligned} \Psi_{\xi}(Q_1, Q_2) &\equiv \langle \tilde{\xi}(Q_1) \tilde{\xi}(Q_2) \rangle = \\ &= \iint (\xi_1 - \langle \xi_1 \rangle)(\xi_2 - \langle \xi_2 \rangle) w_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= B_{\xi}(Q_1, Q_2) - \langle \xi(Q_1) \rangle \langle \xi(Q_2) \rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для случайных полей с нулевым средним значением функции $B_{\xi}(Q_1, Q_2) = \langle \xi(Q_1) \tilde{\xi}(Q_2) \rangle$ и $\Psi_{\xi}(Q_1, Q_2)$ совпадают. Дисперсия

¹⁾ Операция статистического усреднения обозначена здесь посредством угловых скобок, но иногда, если это будет удобнее, мы будем пользоваться, как и в ч. I, прямой чертой сверху, так что $\langle \xi \rangle \equiv \bar{\xi}$.

случайного поля $D[\xi]$, т. е. средний квадрат флуктуации, равна

$$D[\xi] = \sigma_{\xi}^2(Q) = \langle \tilde{\xi}^2(Q) \rangle = \langle [\xi(Q) - \langle \xi(Q) \rangle]^2 \rangle = \Psi_{\xi}(Q, Q). \quad (1.8)$$

Многомерное поле $\xi^{(i)}(Q)$ в рамках корреляционной теории характеризуется совокупностью средних значений $\langle \xi^{(i)}(Q) \rangle$ и матрицей моментов второго порядка с элементами

$$B_{ik}(1, 2) = \langle \xi^{(i)}(1) \xi^{(k)}(2) \rangle \quad (1.9)$$

или, что равносильно, — корреляционной матрицей с элементами

$$\Psi_{ik}(1, 2) = \langle \tilde{\xi}^{(i)}(1) \tilde{\xi}^{(k)}(2) \rangle = B_{ik}(1, 2) - \langle \xi^{(i)}(1) \rangle \langle \xi^{(k)}(2) \rangle. \quad (1.10)$$

Для краткости аргументы Q_1 и Q_2 здесь заменены просто своими номерами 1 и 2. Диагональные элементы корреляционной матрицы представляют собой функции автокорреляции $\Psi_{kk}(1, 2)$, а недиагональные — функции взаимной корреляции $\Psi_{ik}(1, 2)$ полей $\xi^{(i)}$ и $\xi^{(k)}$.

Наряду с вещественными случайными полями $\xi(Q)$, о которых шла речь выше, часто приходится рассматривать также комплексные поля

$$\zeta(Q) = \xi(Q) + i\eta(Q), \quad (1.11)$$

где $\xi = \operatorname{Re} \zeta$ и $\eta = \operatorname{Im} \zeta$ — вещественные функции в Q -пространстве. Полное статистическое описание комплексного случайного поля $\zeta(Q)$ осуществляется заданием $2n$ -мерных плотностей вероятностей $w_{2n}(\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), через которые выражаются вероятности

$$P\{\xi_{\mu} \leqslant \xi(Q_{\mu}) < \xi_{\mu} + d\xi_{\mu}, \eta_{\nu} \leqslant \eta(Q_{\nu}) < \eta_{\nu} + d\eta_{\nu} \mid (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)\}$$

аналогично (1.1). Через w_{2n} можно выразить любые моменты комплексного случайного поля ζ и, в частности, его низшие моменты. Последние представляют для рассматриваемых далее задач наибольший интерес, так что мы лишь изредка будем выходить за пределы корреляционной теории случайных полей.

§ 2. Пространственные корреляционные [функции комплексных случайных полей]

Рассмотрим сначала случайные поля, зависящие только от пространственных координат, т. е. не зависящие от времени. К полям, зависящим также от времени, мы обратимся в § 6.

Итак, пусть одномерное комплексное случайное поле зависит только от r :

$$\zeta(r) = \xi(r) + i\eta(r).$$

По определению корреляционная (автокорреляционная) функция комплексного поля ζ равна

$$\begin{aligned}\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &\equiv \langle \tilde{\zeta}(\mathbf{r}_1) \tilde{\zeta}^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \\ &= \langle \zeta(\mathbf{r}_1) \zeta^*(\mathbf{r}_2) \rangle - \langle \zeta(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \zeta^*(\mathbf{r}_2) \rangle.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Положив здесь $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, получим дисперсию в точке \mathbf{r} :

$$\sigma_{\zeta}^2(\mathbf{r}) \equiv \langle |\zeta(\mathbf{r})|^2 \rangle = \sigma_{\zeta}^2 + \sigma_{\eta}^2 = \psi_{\zeta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Многие свойства пространственной корреляционной функции $\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ имеют аналоги в теории случайных процессов (ч. I, §§ 14, 17, 18 и 38). Перечислим кратко эти свойства.

Корреляционная функция $\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ является *эрмитовой*:

$$\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{\zeta}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \quad (2.3)$$

как это непосредственно следует из определения (2.1). В частном случае *вещественного* случайного поля ($\zeta = \zeta^*$) корреляционная функция *симметрична*:

$$\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{\zeta}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (2.4)$$

Далее, квадрат модуля $\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ никогда не превышает произведения дисперсий $\sigma_{\zeta}^2(\mathbf{r}_1)$ и $\sigma_{\zeta}^2(\mathbf{r}_2)$:

$$|\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \leq \sigma_{\zeta}^2(\mathbf{r}_1) \sigma_{\zeta}^2(\mathbf{r}_2) = \psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \psi_{\zeta}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2). \quad (2.5)$$

Из (2.5) вытекает, в частности, что *коэффициент корреляции* (иначе — *нормированная корреляционная функция*), определяемый как

$$K_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sigma_{\zeta}(\mathbf{r}_1) \sigma_{\zeta}(\mathbf{r}_2)} = \frac{\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \psi_{\zeta}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2)}}, \quad (2.6)$$

не превышает по модулю единицы:

$$|K_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| \leq 1. \quad (2.7)$$

Из неотрицательности величины $\left\langle \left| \int \tilde{\zeta}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d^3 r \right|^2 \right\rangle$ следует, что корреляционная функция $\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ является *положительно определенной*, т. е.

$$\int_V \psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \geq 0, \quad (2.8)$$

где $u(\mathbf{r})$ — произвольная комплексная функция, а V — произвольная область интегрирования, для которых интеграл (2.8) существует.

Взаимной корреляционной функцией двух комплексных полей $\mu(\mathbf{r})$ и $v(\mathbf{r})$ называется величина

$$\Psi_{\mu v}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \tilde{\mu}(\mathbf{r}_1) \bar{v}^*(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (2.9)$$

Квадрат модуля $\Psi_{\mu v}$ не превышает произведения дисперсий σ_μ^2 и σ_v^2 :

$$|\Psi_{\mu v}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \leq \sigma_\mu^2(\mathbf{r}_1) \sigma_v^2(\mathbf{r}_2), \quad (2.10)$$

что аналогично (2.5). Как следствие этого, *взаимный коэффициент корреляции*

$$K_{\mu v}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\Psi_{\mu v}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sigma_\mu(\mathbf{r}_1) \sigma_v(\mathbf{r}_2)} \quad (2.11)$$

по модулю не превышает единицы: $|K_{\mu v}| \leq 1$. Существенно, что, в отличие от автокорреляционных функций, взаимная функция корреляции $\Psi_{\mu v}$ не обладает ни свойством эрмитовости (2.3), ни положительной определенностью (2.8), но при этом $\Psi_{\mu v}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_{\mu v}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$.

Наряду с $\Psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ иногда полезно ввести еще одну автокорреляционную функцию комплексного поля:

$$\tilde{\Psi}_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}_1) \tilde{\xi}(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (2.12)$$

которая ранее (ч. I, § 38) была названа *второй корреляционной функцией*. В отличие от $\Psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, т. е. от *первой функции корреляции*, определенной выражением (2.1), значение случайного поля $\tilde{\xi}(\mathbf{r}_2)$ входит в (2.12) без комплексного сопряжения. Вторая корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов, $\tilde{\Psi}_\xi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \tilde{\Psi}_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, а для вещественного поля ξ она совпадает, очевидно, с $\Psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$.

Через первую и вторую функции корреляции $\Psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и $\tilde{\Psi}_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ можно выразить автокорреляционные функции вещественной и мнимой частей комплексного поля $\xi = \xi_+ + i\xi_-$:

$$\Psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}_1) \xi(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad \Psi_{\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \tilde{\eta}(\mathbf{r}_1) \bar{\eta}(\mathbf{r}_2) \rangle,$$

а также их взаимную функцию корреляции:

$$\Psi_{\xi\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \tilde{\xi}(\mathbf{r}_1) \bar{\eta}(\mathbf{r}_2) \rangle = \Psi_{\eta\xi}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1).$$

Заметим, что симметрии относительно аргументов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 у функции $\Psi_{\xi\eta}$, вообще говоря, нет. Используя очевидные соотношения $\Psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_\xi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) + \psi_\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - i\Psi_{\xi\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + i\Psi_{\eta\xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, $\tilde{\Psi}_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \psi_\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + i\Psi_{\xi\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + i\Psi_{\eta\xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$,

получаем следующие выражения для компонент корреляционной матрицы вещественных полей $\xi(\mathbf{r})$ и $\eta(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}\psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \tilde{\psi}_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)], \\ \psi_\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \tilde{\psi}_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)], \\ \psi_{\xi\eta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\tilde{\psi}_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)], \\ \psi_{\eta\xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\tilde{\psi}_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)].\end{aligned}\quad (2.14)$$

От аналогичных формул (38.3) в ч. I формулы (2.14) отличаются только тем, что вместо моментов времени t и t' в них фигурируют радиусы-векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 .

В случае статистически однородного (в широком смысле) случайного поля ξ инвариантность относительно сдвига $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ должна выполняться только для среднего значения и для моментов второго порядка. Иными словами, должно быть

$$\langle \xi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \xi(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \rangle, \quad (2.15)$$

$$\psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_\xi(\mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}, \mathbf{r}_2 + \delta \mathbf{r}). \quad (2.16)$$

Условие (2.15) означает, что $\langle \xi \rangle = \text{const}$, т. е. среднее значение является постоянной величиной. Положив в (2.16) $\delta \mathbf{r} = -\mathbf{r}_2$, находим, что $\psi_\xi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, 0)$, т. е. корреляционная функция ψ_ξ статистически однородного поля зависит только от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, но не от \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 порознь. Для краткости вместо $\psi_\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, 0)$ принято писать просто $\psi_\xi(\mathbf{r})$:

$$\psi_\xi(\mathbf{r}) = \langle \xi(\mathbf{r}_1) \tilde{\xi}^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \rangle. \quad (2.17)$$

Подобным же образом (только без комплексного сопряжения) записывается и вторая корреляционная функция $\tilde{\psi}_\xi(\mathbf{r})$.

Дисперсия статистически однородного поля постоянна:

$$\sigma_\xi^2 \equiv \langle |\xi(\mathbf{r})|^2 \rangle = \psi_\xi(0), \quad (2.18)$$

а общие свойства (2.3), (2.5) и (2.8) корреляционной функции для статистически однородных полей принимают следующую форму, аналогичную соотношениям для стационарных случайных процессов:

$$\psi_\xi(\mathbf{r}) = \psi_\xi^*(-\mathbf{r}), \quad (2.19)$$

$$|\psi_\xi(\mathbf{r})| \leq \sigma_\xi^2, \quad (2.20)$$

$$\int_V d^3 r_1 \int_V d^3 r_2 \psi_\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) \geq 0. \quad (2.21)$$

Согласно (2.19)

$$\operatorname{Re} \psi_\xi(-\mathbf{r}) = \operatorname{Re} \psi_\xi(\mathbf{r}), \quad \operatorname{Im} \psi_\xi(-\mathbf{r}) = -\operatorname{Im} \psi_\xi(\mathbf{r}),$$

т. е. вещественная часть ψ_ξ четна по \mathbf{r} , а мнимая — нечетна. Четность функции $\psi_\xi(\mathbf{r})$ автоматически влечет за собой ее вещественность.

Вторая корреляционная функция, симметричная по своим аргументам, для однородных полей становится четной: $\bar{\psi}_\xi(-\mathbf{r}) = \psi_\xi(\mathbf{r})$. Для частного случая, когда четна не только вторая, но и первая корреляционная функция, выражения (2.14) принимают вид

$$\begin{aligned}\psi_\xi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} [\psi_\xi(\mathbf{r}) + \operatorname{Re} \tilde{\psi}_\xi(\mathbf{r})], \quad \psi_\eta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\psi_\xi(\mathbf{r}) - \operatorname{Re} \tilde{\psi}_\xi(\mathbf{r})], \\ \psi_{\xi\eta}(\mathbf{r}) &= \psi_{\eta\xi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \tilde{\psi}_\xi(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Из этих соотношений следует, что вещественная и мнимая части ξ и η комплексного статистически однородного поля $\zeta = \xi + i\eta$ тоже статистически однородны и, кроме того, однородно связаны.

Статистически однородные поля, у которых $\psi_\xi(\mathbf{r})$ и $\bar{\psi}_\xi(\mathbf{r})$ зависят только от модуля (но не от направления) вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, соединяющего точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 ,

$$\psi_\xi(\mathbf{r}) = \psi_\xi(r), \quad \bar{\psi}_\xi(\mathbf{r}) = \tilde{\psi}_\xi(r), \quad (2.23)$$

где $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, называются *статистически изотропными*. Полноправного аналога изотропных полей в теории случайных процессов указать нельзя. Ограниченному аналогию можно провести лишь со стационарными вещественными процессами, для которых функция корреляции четна: $\psi(\tau) = \psi(|\tau|)$.

Для изотропных случайных полей корреляционная функция всегда четна и, следовательно, всегда вещественна. Из (2.22) следует, что если поле ζ изотропно, то поля $\xi = \operatorname{Re} \zeta$ и $\eta = \operatorname{Im} \zeta$ изотропны и изотропно связаны между собой.

Примерами корреляционной функции однородного и изотропного случайного поля ζ могут служить корреляционная функция в виде гауссовой кривой

$$\psi_\xi(r) = \sigma_\xi^2 e^{-r^2/2l^2} \quad (2.24)$$

и экспоненциальная функция корреляции

$$\psi_\xi(r) = \sigma_\xi^2 e^{-r/l}. \quad (2.25)$$

В обоих примерах l — радиус корреляции поля, т. е. расстояние $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, на котором $\psi_\xi(r)$ уменьшается примерно вдвое по сравнению с дисперсией σ_ξ^2 . Для полей с функцией корреляции произвольного вида *эффективный* (или *интегральный*) радиус корреляции обычно определяется как

$$l_{\text{эфф}} = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \int_0^\infty \psi_\xi(r) dr = \int_0^\infty K_\xi(r) dr. \quad (2.26)$$

У гауссовой функции корреляции (2.24) $l_{\text{эфф}} = \sqrt{1/\pi}l$, а у экспоненциальной функции (2.25) $l_{\text{эфф}} = l$.

Иногда встречаются корреляционные функции, имеющие определенный масштаб изменения, но для которых эффективного радиуса корреляции не существует из-за расходимости интеграла в (2.26). Так обстоит дело, например, для функции корреляции вида

$$\Psi_t(r) = \sigma_t^2 (1 + r^2/l^2)^{-\mu}, \quad \mu < 1/2.$$

Хотя понятие радиуса корреляции (как и времени корреляции для случайных процессов) часто оказывается полезным, универсальное его определение, пригодное для флюктуаций произвольного вида, дать нельзя. Корреляционные функции часто обладают не одним, а несколькими характерными масштабами, как, например, быстро осциллирующая корреляционная функция с плавно меняющейся огибающей, или же корреляционные функции анизотропных полей, к которым мы и перейдем.

У статистически однородных, но анизотропных полей функции корреляции зависят не только от модуля, но и от направления вектора $r = r_1 - r_2$, как, скажем, в следующих двух примерах:

$$\Psi_t(r) = \Psi_t[(\alpha x + \beta y + \gamma z)/l], \quad (2.27)$$

$$\Psi_t(r) = \Psi_t\left(\frac{|x|}{a}, \frac{|y|}{b}, \frac{|z|}{c}\right). \quad (2.28)$$

Анизотропные поля, очевидно, не имеют аналога в теории случайных процессов. Расстояния, на которых значения анизотропного случайного поля становятся некоррелированными, различны по разным направлениям. Так, для анизотропной гауссовой корреляционной функции

$$\Psi_t(r) = \sigma_t^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right], \quad (2.29)$$

которая является частным случаем функций вида (2.28), величины a , b и c характеризуют масштабы пространственной корреляции в направлениях x , y и z . Масштаб l для функций вида (2.27) характеризует радиус корреляции в направлении, перпендикулярном плоскости $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, тогда как в самой этой плоскости (и в параллельных ей) корреляция простирается до бесконечности.

Иногда вместо статистической анизотропии говорят об *анизомерии* случайных полей. Термин «анизомерные флюктуации» удобен в некоторых задачах электродинамики и теории упругости, в которых речь идет о статистически анизотропных флюктуациях параметров в анизотропных же средах, но пользоваться им нам почти не придется.

Наряду с моментами первого и второго порядков, можно ввести и высшие моменты комплексного случайного поля ζ . Принято определять $(m+n)$ -точечный момент $B_{m,n}$ (момент $(m+n)$ -го порядка) следующим образом:

$$B_{m,n}(1, 2, \dots, m+n) = \langle \zeta(1) \dots \zeta(m) \zeta^*(m+1) \dots \zeta^*(m+n) \rangle. \quad (2.30)$$

Поле ζ входит под знак усреднения m раз, а комплексно сопряженное поле ζ^* — n раз. Для краткости вместо координат r_j , здесь снова написаны только номера точек j , например, $\zeta(m)$ вместо $\zeta(r_m)$ и т. д. Моменты второго порядка B и \tilde{B} запишутся в этих обозначениях следующим образом:

$$B(1, 2) = B_{1,1}(1, 2), \quad \tilde{B}(1, 2) = B_{2,0}(1, 2). \quad (2.31)$$

Некоторые простые свойства моментов $B_{m,n}$ вытекают непосредственно из определения. Так, очевидно, что $B_{n,n}(1, \dots, n; n, \dots, 1) \geq 0$. При перестановках внутри первой $(1, \dots, m)$ и второй $(m+1, \dots, m+n)$ групп аргументов момент $B_{m,n}$ не меняется, а комплексное сопряжение приводит к следующим изменениям в порядке следования аргументов и индексов:

$$[B_{m,n}(1, \dots, m+n)]^* = B_{n,m}(m+n, \dots, 1). \quad (2.32)$$

Эрмитовость B и симметрия \tilde{B} представляют собой частные случаи этого тождества.

§ 3. Пространственные спектральные разложения для однородных случайных полей

Запишем формальное разложение флуктуационной компоненты однородного случайного поля $\tilde{\zeta}(r)$ в трехкратный интеграл Фурье:

$$\tilde{\zeta}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(k) e^{ikr} dk. \quad (3.1)$$

Здесь $\zeta(k)$ — пространственная спектральная амплитуда (или, короче k -амплитуда) поля ζ , которая выражается через $\tilde{\zeta}(r)$ при помощи обратного преобразования Фурье:

$$\zeta(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}(r) e^{-ikr} dr. \quad (3.2)$$

Иногда вместо $\zeta(k)$ используется более краткое обозначение ζ_k .

Спектральное разложение (3.1) мы назвали формальным потому, что для неубывающей на бесконечности функции, какой является однородное случайное поле $\tilde{\zeta}(r)$, трансформанты Фурье

$\xi(\bar{\mathbf{k}})$ не существует. Для того чтобы придать спектральным разложениям таких случайных полей обычный математический смысл, следовало бы предположить, что поле однородно в большой, но конечной области V , вне которой оно достаточно быстро убывает до нуля, и переходить к бесконечным размерам области V лишь на последнем этапе расчетов, уже после статистического усреднения. Мы не будем, однако, пользоваться здесь такого рода приемами (как мы не делали этого в аналогичной ситуации и для спектральных разложений стационарных случайных процессов), а будем считать, что интегралы (3.1) и (3.2) существуют в смысле вероятностной сходимости, а именно — в среднем квадратичном (ч. I, § 40).

Согласно (3.1) функция корреляции однородного случайного поля $\psi_\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ равна

$$\psi_\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle \zeta(\mathbf{k}') \zeta^*(\mathbf{k}'') \rangle e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}''\mathbf{r}_2)} d^3k' d^3k''. \quad (3.3)$$

Спектральные амплитуды $\zeta(\mathbf{k}')$ и $\zeta^*(\mathbf{k}'')$ оказываются дельта-коррелированными по \mathbf{k} . В самом деле, в силу (3.2)

$$\langle \zeta(\mathbf{k}') \zeta^*(\mathbf{k}'') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{\zeta}(\mathbf{r}_1) \tilde{\zeta}^*(\mathbf{r}_2) \rangle e^{-i(\mathbf{k}'\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}''\mathbf{r}_2)} d^3r_1 d^3r_2.$$

Введем здесь новые переменные интегрирования $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, для которых $d^3r_1 d^3r_2 = d^3r d^3R$. Учитывая, что $\langle \tilde{\zeta}(\mathbf{r}_1) \tilde{\zeta}^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \psi_\xi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \psi_\xi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{k}'\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}''\mathbf{r}_2 = (\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')\mathbf{R} + (\mathbf{k}' + \mathbf{k}'')\mathbf{r}/2$, после интегрирования по \mathbf{R} получаем

$$\langle \zeta(\mathbf{k}') \zeta^*(\mathbf{k}'') \rangle = \Phi_\xi(\mathbf{k}') \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}''), \quad (3.4)$$

где

$$\Phi_\xi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\xi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r. \quad (3.5)$$

Подставляя же (3.4) в (3.3), находим

$$\psi_\xi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\xi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \quad (3.6)$$

Функция $\Phi_\xi(\mathbf{k})$ называется *пространственной спектральной плотностью* (\mathbf{k} -плотностью) или, короче, *пространственным спектром* случайного однородного поля $\zeta(\mathbf{r})$ и аналогична спектральной плотности (ω -плотности) $g(\omega)$ в теории стационарных случайных процессов. Соотношение (3.5) представляет собой обобщение теоремы Хинчина (ч. I, § 41) на случайные поля. Заметим, что наряду с трехмерными спектральными разложениями

иногда удобно использовать также одномерные и двумерные спектральные разложения (см. задачи 2—4 в конце главы). Нетрудно убедиться, что пространственный спектр $\Phi_\zeta(\mathbf{k})$ является *вещественной* и *неотрицательной* величиной. Вещественность $\Phi_\zeta(\mathbf{k})$ вытекает из (2.19), а неотрицательность — из положительной определенности корреляционной функции.

В отличие от $\Phi_\zeta(\mathbf{k})$ *взаимный* пространственный спектр

$$\Phi_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\mu\nu}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}} d^3r, \quad (3.7)$$

отвечающий взаимной корреляционной функции $\psi_{\mu\nu}(\mathbf{r})$ двух комплексных полей $\mu(\mathbf{r})$ и $\nu(\mathbf{r})$, в общем случае является комплексной величиной.

Для четных корреляционных функций $\psi_\zeta(-\mathbf{r}) = \psi_\zeta(\mathbf{r})$, в частности для функции корреляции вещественного или изотропного поля, спектральная плотность тоже четна, $\Phi_\zeta(-\mathbf{k}) = \Phi_\zeta(\mathbf{k})$. В этом случае $\psi_\zeta(\mathbf{r})$ и $\Phi_\zeta(\mathbf{k})$ связаны косинус-преобразованием Фурье:

$$\psi_\zeta(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\zeta(\mathbf{k}) \cos \mathbf{kr} d^3k, \quad (3.8)$$

$$\Phi_\zeta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\zeta(\mathbf{r}) \cos \mathbf{kr} d^3r. \quad (3.9)$$

В частном случае изотропного однородного случайного поля, для которого $\psi_\zeta(\mathbf{r}) = \psi_\zeta(r)$, пространственная спектральная плотность зависит только от модуля вектора \mathbf{k} . Для того чтобы это показать, перейдем в (3.5) к полярным координатам (r, θ, ϕ) с полярной осью, направленной по вектору \mathbf{k} . Тогда $\mathbf{kr} = kr \cos \theta$ и мы получаем

$$\begin{aligned} \Phi_\zeta(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty \psi_\zeta(r) e^{-ikr \cos \theta} r^2 dr = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 k} \int_0^\infty \sin kr \psi_\zeta(r) r dr = \Phi_\zeta(k). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Зависимость Φ_ζ только от k позволяет записать (3.6) и (3.8) в более простом виде, а именно через однократный интеграл по k . Вводя сферические координаты в пространстве волновых векторов \mathbf{k} (с полярной осью по вектору \mathbf{r}), после интегрирования по угловым переменным получаем

$$\psi_\zeta(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \sin kr \Phi_\zeta(k) k dk. \quad (3.11)$$

Приведем в качестве примера значение пространственного спектра $\Phi_\zeta(k)$ однородного и изотропного случайного поля с гауссовой функцией корреляции (2.24):

$$\Phi_\zeta(k) = (2\pi)^{-3/2} \sigma_\zeta^2 l^3 e^{-k^2 l^2}, \quad (3.12)$$

и с экспоненциальной функцией корреляции (2.25):

$$\Phi_\zeta(k) = \frac{\sigma_\zeta^2 l^3}{\pi (1 + k^2 l^2)^{3/2}}. \quad (3.13)$$

Эти выражения можно получить при помощи любой из формул (3.5), (3.9) или, что проще всего, (3.10).

Из этих примеров видно, что «неопределенность» (ширина) спектра Δk обратно пропорциональна радиусу корреляции случайного поля: $\Delta k \sim 1/l$. Но l характеризует «неопределенность» (ширину) Δr корреляционной функции, которая существенно отличается от нуля лишь при $r \leq \Delta r \sim l$. В результате для изотропных случайных полей можно формулировать соотношение неопределенностей (т. е. размытостей)

$$\Delta k \Delta r \geq 1, \quad (3.14)$$

которое является аналогом соотношения $\Delta \omega \Delta t \geq 1$ для случайных процессов (ч. I, § 44). Согласно (3.14) коротко коррелированным полям ($\Delta r \sim l$ мало) отвечают широкие пространственные спектры (Δk велико), тогда как при больших радиусах корреляции ширина спектра мала.

Для анизотропных полей неопределенностии (радиусы корреляции) по разным направлениям неодинаковы, и для них вместо одного неравенства (3.14) выполняются сразу три неравенства:

$$\Delta k_x \Delta r_x \geq 1, \quad \Delta k_y \Delta r_y \geq 1, \quad \Delta k_z \Delta r_z \geq 1. \quad (3.15)$$

Для иллюстрации этих соотношений можно привести пространственный спектр, отвечающий гауссовой корреляционной функции (2.29):

$$\Phi_\zeta(\mathbf{k}) = \frac{\sigma_\zeta^2 abc}{(2\pi)^3 l_s} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (a^2 k_x^2 + b^2 k_y^2 + c^2 k_z^2) \right\}. \quad (3.16)$$

Ширина этого спектра по осям k_x , k_y , k_z обратно пропорциональна соответственно величинам a , b и c , которые характеризуют масштаб изменения корреляционной функции (2.29) по осям x , y и z .

Для существования $\Phi_\zeta(\mathbf{r})$, т. е. для существования интеграла в правой части (3.8) и (3.11), необходимо, с одной стороны, чтобы с ростом k спектральная плотность $\Phi_\zeta(\mathbf{k})$ убывала быстрее k^3 . С другой стороны, при $k \rightarrow 0$ у спектра $\Phi_\zeta(\mathbf{k})$ допустимо наличие степенной особенности вида $k^{-\alpha}$ с $\alpha < 3$.

В тесной связи с условиями существования корреляционной функции находится вопрос о требованиях, которым должен подчиняться спектр дифференцируемых случайных полей. Так же, как и в теории случайных процессов (ч. I, § 19), можно убедиться, что необходимое и достаточное условие существования (разумеется, в среднем квадратичном) первых пространственных производных, например $\nabla \zeta(\mathbf{r})$, сводится к существованию величины

$$\langle \nabla \zeta(\mathbf{r}_1) \nabla \zeta^*(\mathbf{r}_2) \rangle = -\Delta \Phi_\zeta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (3.17)$$

Если подставить сюда спектральное разложение (3.6) и положить $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, то условие существования $\nabla \zeta$ запишется в виде

$$\langle |\nabla \zeta(\mathbf{r})|^2 \rangle = -\Delta \Phi_\zeta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \Phi_\zeta(k) d^3k < \infty. \quad (3.18)$$

Это условие допускает при $k \rightarrow 0$ степенные особенности вида $\Phi_\zeta(k) \sim k^{-\alpha}$ более высокого порядка, чем это требуется для существования $\Phi_\zeta(\mathbf{r})$: интеграл (3.18) сходится, если $\alpha < 5$, тогда как для сходимости интеграла (3.6) допустимы лишь $\alpha < 3$. В то же время условие (3.18) предъявляет более жесткое требование к скорости убывания $\Phi_\zeta(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Необходимо, чтобы $\Phi_\zeta(k)$ с ростом k убывало, как $k^{-\mu}$ с $\mu > 5$ (для существования $\Phi_\zeta(\mathbf{r})$ необходимо лишь $\mu > 3$). Последнему условию не удовлетворяет, например, случайное поле с экспоненциальной функцией корреляции (2.25), поскольку его спектральная плотность (3.13) убывает на бесконечности недостаточно быстро (как k^{-4}). Следовательно, такое поле недифференцируемо.

Еще более жесткие требования при $k \rightarrow \infty$ предъявляет к $\Phi_\zeta(k)$ существование у случайного поля производных n -го порядка. Из условия $\langle |\nabla^n \zeta(\mathbf{r})|^2 \rangle < \infty$ следует, что должно выполняться неравенство

$$\int k^{2n} \Phi_\zeta(k) d^3k < \infty, \quad (3.19)$$

так что с ростом k спектр $\Phi_\zeta(k)$ должен убывать быстрее, чем k^{-3-2n} . Очевидно, для бесконечно дифференцируемого поля $\Phi_\zeta(k)$ должно уменьшаться при $k \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени k , например, экспоненциально. Таким является, например, случайное поле с гауссовой корреляционной функцией (2.24).

Примером спектра, спадающего более медленно (чем по экспоненте), но быстрее любого $1/k^m$, может служить функция

$$\Phi_\zeta(k) = C \exp \{-(\ln k)^2\} = C k^{-\ln k},$$

для которой при любом конечном m

$$\int_0^\infty k^m \Phi_\zeta(k) dk = \sqrt{\pi} \exp \left\{ \frac{(m+1)^2}{4} \right\} < \infty.$$

§ 4. Локально однородные случайные поля

Случайное комплексное поле $\zeta(\mathbf{r})$ можно характеризовать не только корреляционной функцией (2.1), но и так называемой *структурной функцией*, которая представляет собой средний квадрат модуля *приращения* флюктуационной компоненты $\tilde{\zeta}(\mathbf{r})$ поля $\zeta(\mathbf{r})$:

$$D_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle |\tilde{\zeta}(\mathbf{r}_1) - \tilde{\zeta}(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle. \quad (4.1)$$

Очевидно, при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ структурная функция обращается в нуль, $D_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) = 0$.

Если структурная функция $D_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и приращение среднего поля $f_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \zeta(\mathbf{r}_1) \rangle - \langle \zeta(\mathbf{r}_2) \rangle$ зависят только от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$D_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = D_{\zeta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad f_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f_{\zeta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (4.2)$$

то такие поля называют *локально однородными*. Понятие локально однородных полей ввел А. Н. Колмогоров [3, 4], а термин «структурная функция» был предложен позднее А. М. Обуховым. Условия локальной однородности налагают определенные ограничения на моменты *приращений* $\zeta(\mathbf{r})$, т. е. *разностей* значений поля в двух точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , а не на моменты самих этих значений $\zeta(\mathbf{r}_1)$ и $\zeta(\mathbf{r}_2)$. В силу полной аналогии таких полей со случайными процессами со стационарными (первыми) приращениями (ч. I, § 5б) можно было бы назвать локально однородное поле также *случайным полем с однородными приращениями*, но это название не получило распространения.

Требованию однородности величины $f_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \zeta(\mathbf{r}_1) \rangle - \langle \zeta(\mathbf{r}_2) \rangle$ можно удовлетворить, только если среднее поле линейно зависит от \mathbf{r} : $\langle \zeta(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle \mathbf{r} + \text{const}$, где \mathbf{a} —произвольный вектор, который может быть и не случайнм. Действительно, при линейной зависимости $\langle \zeta(\mathbf{r}) \rangle$ от \mathbf{r} имеем

$$f_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \mathbf{a} \rangle (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = f_{\zeta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Если у поля существует корреляционная функция $\psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \tilde{\zeta}(\mathbf{r}_1) \tilde{\zeta}^*(\mathbf{r}_2) \rangle$, то, согласно (4.1),

$$D_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) + \psi_{\zeta}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) - \psi_{\zeta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \psi_{\zeta}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (4.3)$$

В частности, для однородного поля $\zeta(\mathbf{r})$ имеем из (4.3)

$$D_{\zeta}(\mathbf{r}) = 2 [\psi_{\zeta}(\mathbf{0}) - \psi_{\zeta}(\mathbf{r})]. \quad (4.4)$$

Важным преимуществом структурной функции является то, что она может сохранять смысл и в том более общем случае, когда корреляционной функции не существует. Ситуация здесь такая же, как для случайных процессов (стационарные процессы пред-

ставляют собой частный случай процессов со стационарными приращениями). Аналогия становится еще более полной, если речь идет о локально однородных и изотропных полях. Под этим понимаются случайные поля, у которых $D_\zeta(\mathbf{r})$ и $f_\zeta(\mathbf{r})$ зависят только от модуля вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$D_\zeta(\mathbf{r}) = D_\zeta(r), \quad f_\zeta(\mathbf{r}) = f_\zeta(r). \quad (4.5)$$

Второе из этих условий удовлетворяться, если $\langle \mathbf{a} \rangle = 0$, т. е. вектор \mathbf{a} обладает изотропным распределением в пространстве. В приложениях и, в частности, в теории атмосферной турбулентности часто можно считать равным нулю сам вектор \mathbf{a} . Так или иначе, среднее значение локально однородного и изотропного поля постоянно: $\langle \zeta \rangle = \text{const}$. Для однородного и изотропного случайного поля равенство (4.4) принимает вид

$$D_\zeta(r) = 2[\psi_\zeta(0) - \psi_\zeta(r)], \quad (4.6)$$

причем $D_\zeta(r)$ и $\psi_\zeta(r)$ вещественны. Если $\psi_\zeta(r)$ при $r \rightarrow \infty$ исчезает, то $D_\zeta(\infty) = 2\psi_\zeta(0)$, что позволяет выразить $\psi_\zeta(r)$ через $D_\zeta(r)$:

$$\psi_\zeta(r) = \frac{1}{2}[D_\zeta(\infty) - D_\zeta(r)]. \quad (4.7)$$

Важное свойство структурной функции состоит в том, что на нее не влияют большие по пространственной протяженности флюктуации ζ , т. е. флюктуации с характерным размером $l \gg r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Обусловленные такими флюктуациями возмущения практически одинаковы в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , разность $\tilde{\zeta}(\mathbf{r}_1) - \tilde{\zeta}(\mathbf{r}_2)$ для них мала и, соответственно, мал их вклад в $D_\zeta(r)$. Корреляционная же функция в равной мере учитывает флюктуации любого масштаба. Именно поэтому использование структурной, а не корреляционной функции оказывается физически оправданным в тех случаях, когда крупномасштабные флюктуации поля не сказываются на интересующих нас явлениях. Это вовсе не означает, что такие флюктуации отсутствуют. Напротив, их доля в регулирующих флюктуационных возмущениях может быть даже велика, но для наблюдаемых явлений они несущественны.

Примером может служить статистическая теория развитой турбулентности [1, 2], т. е. такого вихревого движения газа или жидкости, в котором присутствуют вихри с очень широким диапазоном размеров l . Наиболее интересными по своим внутренним закономерностям здесь оказываются вихри, значительно уступающие по размерам тем наиболее крупным вихрям (размера L_0 , так называемого внешнего масштаба турбулентности), которые порождены первичным потоком и еще сильно зависят от его геометрических и кинематических особенностей. Именно для субдиапазона $l \ll L_0$ А. Н. Колмогоров ввел понятие локальной однородности случайного поля и предложил для его статисти-

ческого описания функцию D_ζ , которая просто исключает крупномасштабные неоднородности из рассмотрения.

Тем самым, предположение об однородности, если оно делается для D_ζ , гораздо менее обременительно, т. е. оно позволяет охватить класс случайных полей (локально однородные поля) более широкий, чем такое же предположение для Φ_ζ (однородные поля).

Обратимся к пространственным спектральным разложениям локально однородных полей. По аналогии со спектральными разложениями для процессов со стационарными случайными приращениями (ч. I, § 56) имеем

$$D_\zeta(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\zeta(k) (1 - \cos kr) d^3k. \quad (4.8)$$

Интеграл (4.8) сходится, если при $k \rightarrow 0$ спектр $\Phi_\zeta(k)$ имеет степенную особенность вида $k^{-\alpha}$ с $\alpha < 5$, тогда как существование $\Phi_\zeta(r)$ обеспечено лишь при $\alpha < 3$.

Формула обращения разложения (4.8) в случае локально однородных полей получается несколько более сложным путем, чем для однородных полей. Сначала надо продифференцировать (4.8) по r и только после этого применить обратное преобразование Фурье. Мы получаем тогда, что

$$\Phi_\zeta(k) = \frac{1}{16\pi^3 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} k \nabla D_\zeta(r) \sin kr d^3r. \quad (4.9)$$

Для изотропного поля, переходя в (4.8) и (4.9) к сферическим координатам и учитывая, что $k \nabla D_\zeta(r) = kr D'(r)/r$ (штрих обозначает производную по r), находим

$$D_\zeta(r) = 8\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin kr}{kr} \right) \Phi_\zeta(k) k^2 dk, \quad (4.10)$$

$$\Phi_\zeta(k) = \frac{1}{4\pi^2 k^3} \int_0^{\infty} (\sin kr - kr \cos kr) D'_\zeta(r) dr. \quad (4.11)$$

Рассмотрим в качестве примера локально однородного и изотропного поля пространственные флюктуации диэлектрической проницаемости в турбулентной атмосфере. Структурная функция этих флюктуаций

$$D_\varepsilon(r) = \langle |\tilde{\varepsilon}(r_1) - \tilde{\varepsilon}(r_2)|^2 \rangle$$

подчиняется при достаточно больших r «закону двух третей» Колмогорова—Обухова [1]:

$$D_\varepsilon(r) \approx C_\varepsilon^2 r^{2/3}, \quad r \gg l_0, \quad (4.12)$$

где C_ε — так называемая *структурная постоянная*, а l_0 — *внутренний масштаб турбулентности*¹). При малых же r , т. е. $r \ll l_0$, структурная функция нарастает по квадратичному закону:

$$D_\varepsilon(r) \approx C_\varepsilon^2 l_0^{-4/3} r^2, \quad r \ll l_0. \quad (4.13)$$

Внутренний масштаб l_0 входит в формулы (4.12) и (4.13) так, что значения обоих асимптотических выражений одинаковы при

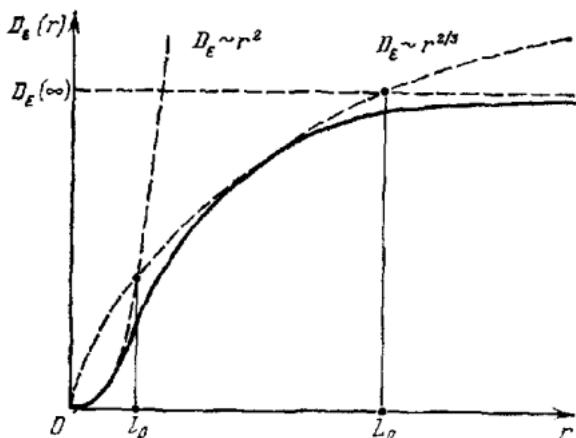


Рис. 1.

$r = l_0$. Соответствующие графики показаны на рис. 1 пунктирумыми кривыми, а сплошной линией изображен реальный ход структурной функции $D_\varepsilon(r)$.

Подобрать спектр, отвечающий реальному ходу структурной функции $D_\varepsilon(r)$, можно из следующих соображений. Для степенной структурной функции

$$D(r) = C^2 r^\mu, \quad 0 < \mu < 2, \quad (4.14)$$

пространственная спектральная плотность равна [1]

$$\Phi(k) = \frac{\Gamma(\mu+2)}{4\pi^2} \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) C^2 k^{-(\mu+3)}, \quad (4.15)$$

так что «закону двух третей» ($\mu = 2/3$) отвечает спектр

$$\Phi_\varepsilon(k) = \frac{\Gamma(4/3) \sin \pi/3}{4\pi^2} C_\varepsilon^2 k^{-11/3} = 0,033 C_\varepsilon^2 k^{-11/3}. \quad (4.16)$$

Для того чтобы получить квадратичный ход $D_\varepsilon(r)$ при малых значениях $r \ll l_0$, следует подавить спектральную плотность (4.16)

¹ В противоположность внешнему масштабу L_0 внутренний масштаб l_0 — это *наименьший* размер вихрей. Возмущения с $l < l_0$ уже ламинарны.

при больших значениях $k \gg 1/l_0$. Физически эта операция отображает диссиацию турбулентных вихрей из-за вязкости, когда их масштаб $1/k$ становится малым ($1/k \ll l_0$). Подавление плотности (4.16) при больших k можно осуществить, например, путем введения множителя e^{-k^2/κ_m^2} , т. е. полагая

$$\Phi_e(k) = 0,033 C_e^2 k^{-1/4} e^{-k^2/\kappa_m^2}. \quad (4.17)$$

Получаемая отсюда структурная функция $D_e(r)$ будет обладать требуемой асимптотикой (4.12), (4.13), если параметр обрезания κ_m взять равным $5,92/l_0$. Она хорошо описывает турбулентное поле при не слишком больших значениях r — не превышающих внешнего масштаба турбулентности L_0 . В действительности же при $r \gg L_0$ структурная функция «насыщается» (см. рис. 1) и стремится к конечному значению, которое удобно записать в виде

$$D_e(\infty) = C_e^2 L_0^{2/3}. \quad (4.18)$$

Если значение L_0 вводится таким путем, то кривая (4.12) пересекает уровень $D_e = D_e(\infty)$ как раз при $r = L_0$. Согласно (4.6) предельное значение (4.18) равно $2\sigma_e^2$ — удвоенному среднему квадрату флуктуаций: $C_e^2 L_0^{2/3} = 2\sigma_e^2$.

В результате мы приходим к тому, что структурную функцию $D_e(r)$ можно аппроксимировать на отдельных интервалах r следующими функциями:

$$D(r) = \begin{cases} C_e^2 l_0^{-4/3} r^2 = 2\sigma_e^2 r^2 l_0^{-4/3} L_0^{-2/3}, & r \ll l_0, \\ C_e^2 r^{2/3} = 2\sigma_e^2 (r/L_0)^{2/3}, & l_0 \ll r \ll L_0, \\ C_e^2 L_0^{2/3} = 2\sigma_e^2, & L_0 \ll r. \end{cases} \quad (4.19)$$

Ограниченностю структурной функции при $r \rightarrow \infty$ можно отразить и в (4.17), заменив множитель $k^{-1/4}$ на $(k^2 + \kappa_0^2)^{-1/4}$, где $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ — волновое число, отвечающее внешнему масштабу турбулентности. При такой замене, т. е. при спектральной плотности

$$\Phi_e(k) = 0,033 C_e^2 (k^2 + \kappa_0^2)^{-1/4} e^{-k^2/\kappa_m^2}, \quad (4.20)$$

значения интегралов (4.8) и (4.10) будут конечны при любых r .

Конечно, поведение флуктуаций e в реальной турбулентной атмосфере подчинено более сложным закономерностям, чем приведенные здесь аппроксимации. Тем не менее формула (4.20) достаточно хорошо описывает пространственный спектр турбулентных флуктуаций e во многих задачах радиофизики.

Систематическое изложение вопросов, относящихся к статистической гидродинамике, можно найти в монографиях [1, 2].

§ 5. Квазиоднородные поля

Идеализация реальных неоднородных случайных полей при помощи рассмотренных выше локально однородных полей, описывающих довольно специальный вид уклонений от однородности, далеко не всегда применима. Поэтому особое значение приобретает рассмотрение и других специальных случаев нарушения однородности. Сюда относится, в частности, класс полей, неоднородность которых в определенном смысле пространственно *медленна*, или, иначе говоря, плавна, а в остальном произвольна. Это так называемые статистически *квазиоднородные* поля, т. е. поля с плавно меняющимися статистическими характеристиками — средними значениями, дисперсиями и т. д. Очевидно, они представляют собой пространственный аналог квазистационарных случайных процессов, рассмотренных в ч. I, § 57.

Согласно (2.6) в общем случае корреляционная функция связана с коэффициентом корреляции K_ζ соотношением

$$\Psi_\zeta(r_1, r_2) = \sigma_\zeta(r_1) \sigma_\zeta(r_2) K_\zeta(r_1, r_2),$$

которое в координатах $r = r_1 - r_2$ и $R = (r_1 + r_2)/2$ принимает вид

$$\Psi_\zeta(r_1, r_2) = \sigma_\zeta(R + r/2) \sigma_\zeta(R - r/2) K_\zeta(r, R). \quad (5.1)$$

Если l_ζ — радиус корреляции поля ζ (масштаб изменения $K_\zeta(r, R)$ по разностному аргументу $r = r_1 - r_2$), а L — характерный масштаб изменения дисперсии σ_ζ^2 , среднего поля $\langle \zeta \rangle$ и коэффициента корреляции K_ζ по аргументу R , то для квазиоднородных полей выполняется неравенство

$$l_\zeta \ll L. \quad (5.2)$$

В силу (5.2) можно заменить в формуле (5.1) произведение $\sigma_\zeta(R + r/2) \sigma_\zeta(R - r/2)$ на σ_ζ^2 . Такая замена безусловно справедлива внутри сферы радиуса $r \leq l_\zeta$; что же касается пространства вне этой сферы, то там значение множителя при K_ζ несущественно, так как $K_\zeta(r, R) \rightarrow 0$ при $r \gg l_\zeta$. Таким образом, мы приходим к следующему выражению для функции корреляции квазиоднородного поля:

$$\Psi_\zeta(r, R) = \sigma_\zeta^2(R) K_\zeta(r, R). \quad (5.3)$$

Поскольку квазиоднородность представляет собой нарушение строгой однородности, дельта-корреляция спектральных амплитуд $\zeta(k)$ теперь уже не имеет места, подобно тому как нет дельта-корреляции для ω -амплитуд в случае квазистационарных случайных процессов (ч. I, § 57).

Рассматривая спектральные разложения таких процессов (ч. I, § 57), мы выяснили, однако, что в случае квазистационарных процессов определенный физический смысл приобретает *мгновен-*

ный частотный спектр $g(\omega, t)$, получающийся при спектральном разложении функции корреляции $\Psi(\tau, t)$ только по «быстрой» переменной $\tau = t_1 - t_2$. То же справедливо и для квазиоднородных полей. Записав преобразование Фурье только по разностной переменной $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$\psi_\zeta(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\zeta(\mathbf{k}, \mathbf{R}) e^{i\mathbf{kr}} d^3k, \quad (5.4)$$

можно рассматривать величину

$$\Phi_\zeta(\mathbf{k}, \mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\zeta(\mathbf{r}, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{kr}} d^3r \quad (5.5)$$

как локальную пространственную спектральную плотность, которая медленно меняется от одной точки \mathbf{R} к другой (с характерным масштабом $L \gg l_\zeta$).

Естественно, напрашивается сочетание обоих видов нарушения пространственной однородности, т. е. локальной однородности и квазиоднородности. Такого рода поля можно было бы назвать локально квазиоднородными, определив их как поля, первые приращения которых квазиоднородны. Примером локально квазиоднородного (и изотропного) поля может служить рассмотренное в [1] поле флуктуаций диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})$ в плавно неоднородной по высоте z турбулентной атмосфере.

§ 6. Пространственно-временные спектральные разложения случайных полей

До сих пор мы отвлекались от временной зависимости случайных полей с тем, чтобы оттенить особенности, обусловленные зависимостью полей от нескольких пространственных координат и отсутствующие у однопараметрических случайных функций.

Конечно, при учете зависимости случайных полей также от времени возникает ряд новых возможностей в отношении различных комбинаций пространственных и временных статистических свойств поля $\zeta(t, \mathbf{r})$ (стационарности по t , однородности по \mathbf{r} и разных видов отклонений от стационарности и однородности), о чём мы уже упоминали в § 1. Однако использование четырехмерных (пространственно-временных) гармонических разложений $\zeta(t, \mathbf{r})$ с формальной стороны осуществляется довольно очевидным образом и соответствующие обобщения вряд ли требуют подробного описания. Мы приведем лишь некоторые наиболее важные соотношения и формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Запишем для флюктуаций одномерного случайного поля $\xi(t, \mathbf{r})$ четырехмерное спектральное разложение:

$$\tilde{\xi}(t, \mathbf{r}) = \iint \xi(\omega, \mathbf{k}) e^{i(kr - \omega t)} d\omega d^3k, \quad (6.1)$$

где $\xi(\omega, \mathbf{k})$ — $\omega\mathbf{k}$ -амплитуда (точнее, амплитудная плотность) поля, иногда обозначаемая $\zeta_{\omega\mathbf{k}}$. В отличие от ч. I, где в гармонических разложениях процессов вводился временной фактор $e^{i\omega t}$, в данной части книги зависимость от времени мы будем описывать множителем $e^{-i\omega t}$, так как при рассмотрении волновых явлений удобнее оперировать с пространственным гармоническим множителем e^{ikr} , а не e^{-ikr} . В связи с этим при использовании тех или иных комплексных выражений из ч. I надо заменять в них $i\omega$ на $-i\omega$.

У однородного и стационарного случайного поля спектральные амплитуды $\xi(\omega', \mathbf{k}')$ и $\xi(\omega'', \mathbf{k}'')$ дельта-коррелированы как по ω , так и по \mathbf{k} :

$$\langle \xi(\omega', \mathbf{k}') \xi^*(\omega'', \mathbf{k}'') \rangle = G_\xi(\omega', \mathbf{k}') \delta(\omega' - \omega'') \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}''). \quad (6.2)$$

Здесь $G_\xi(\omega, \mathbf{k})$ — пространственно-временной спектр поля (или $\omega\mathbf{k}$ -плотность), который всегда неотрицателен. Иногда представляют этот спектр в виде $G_\xi(\omega, \mathbf{k}) = |\zeta_{\omega\mathbf{k}}|^2$, но следует помнить, что это лишь иное обозначение множителя при дельта-функциях.

Пространственно-временная корреляционная функция $\Psi_\xi(\tau, \mathbf{r})$ связана с $\omega\mathbf{k}$ -плотностью $G_\xi(\omega, \mathbf{k})$ преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} \Psi_\xi(\tau, \mathbf{r}) &\equiv \langle \tilde{\xi}(t_1, \mathbf{r}_1) \tilde{\xi}^*(t_1 - \tau, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \rangle = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega, \mathbf{k}) e^{i(kr - \omega\tau)} d\omega d^3k \end{aligned} \quad (6.3)$$

(обобщение теоремы Хинчина). Обратное преобразование Фурье:

$$G_\xi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_\xi(\tau, \mathbf{r}) e^{-i(kr - \omega\tau)} d\tau d^3r. \quad (6.4)$$

В случае четной корреляционной функции, $\Psi(-\tau, -\mathbf{r}) = \Psi(\tau, \mathbf{r})$, экспоненту в этих разложениях можно заменить на $\cos(kr - \omega\tau)$.

Через $\omega\mathbf{k}$ -плотность $G_\xi(\omega, \mathbf{k})$ можно выразить как пространственный $\Phi_\xi(\mathbf{k})$, так и временной (частотный) $g_\xi(\omega)$ спектры случайного поля:

$$\Phi_\xi(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega, \mathbf{k}) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\xi(0, \mathbf{r}) e^{-ikr} d^3r, \quad (6.5)$$

$$g_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega, \mathbf{k}) d^3k = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\xi(\tau, 0) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (6.6)$$

В качестве примера рассмотрим поле с так называемыми «замороженными» неоднородностями, т. е. поле, в котором все временные изменения $\zeta(t, \mathbf{r})$ обусловлены только перемещением пространственных возмущений $v(\mathbf{r})$ с постоянной скоростью v . Если покоящееся однородное случайное поле $v(\mathbf{r})$ описывается пространственной корреляционной функцией $\Phi_v(\mathbf{k})$, то при нерелятивистских значениях скорости¹⁾ $\zeta(t, \mathbf{r}) = v(\mathbf{r} - vt)$, и тогда

$$\Psi_\zeta(\tau, \mathbf{r}) = \Phi_v(\mathbf{r} - v\tau). \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (6.4), находим простую связь между ωk -плотностью $G_\zeta(\omega, \mathbf{k})$ «замороженного» поля $\zeta(t, \mathbf{r})$ и пространственной спектральной плотностью $\Phi_v(\mathbf{k})$ покоящегося поля $v(\mathbf{r})$:

$$G_\zeta(\omega, \mathbf{k}) = \Phi_v(\mathbf{k}) \delta(\omega - kv). \quad (6.8)$$

При помощи (6.5) и (6.8) легко убедиться, что

$$\Phi_\zeta(\mathbf{k}) = \Phi_v(\mathbf{k}), \quad (6.9)$$

т. е. пространственные спектры полей $\zeta(t, \mathbf{r})$ и $v(\mathbf{r})$ совпадают. Что же касается временного спектра флуктуаций $\zeta(t, \mathbf{r})$, то из (6.6) и (6.8) находим

$$\begin{aligned} g_\zeta(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_{||} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 k_{\perp} \Phi_v(k_{||}, k_{\perp}) \delta(\omega - k_{||}v) = \\ &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_v\left(\frac{\omega}{v}, k_{\perp}\right) d^2 k_{\perp}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где $k_{||}$ и \mathbf{k}_{\perp} — продольная и поперечная (по отношению к вектору скорости v) составляющие волнового вектора \mathbf{k} . Выражение (6.10) упрощается в случае изотропного поля $v(\mathbf{r})$, когда $\Phi_v(k_{||}, k_{\perp}) = \Phi_v(\sqrt{k_{||}^2 + k_{\perp}^2})$. Переходя в (6.10) к полярным координатам и вводя вместо k_{\perp} новую переменную интегрирования $\kappa = \sqrt{(\omega/v)^2 + k_{\perp}^2}$, получаем

$$g_\zeta(\omega) = \frac{2\pi}{v} \int_{|\omega|/v}^{\infty} \Phi_v(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (6.11)$$

Дифференцируя (6.11) по ω , нетрудно выразить пространственный спектр замороженного изотропного поля $\Phi_\zeta(k) = \Phi_v(k)$ через частотный спектр $g_\zeta(\omega)$:

$$\Phi_\zeta(k) = -\frac{v^2}{2\pi k} \frac{dg_\zeta(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=kv}. \quad (6.12)$$

¹⁾ Об особенностях релятивистского случая см. в задаче 7.

Формулы типа (6.11) и (6.12) часто используются при анализе полей, которые можно с достаточной точностью считать замороженными.

Сказанное выше относительно спектральных разложений одномерных полей легко переносится на многомерное поле $\zeta^{(i)}(t, \mathbf{r})$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Наиболее простыми свойствами обладают поля *однородные* и *однородно связанные* (в широком смысле) в пространстве $Q = (t, \mathbf{r})$.

В случае *векторного* поля $\zeta^{(i)}$ элементы корреляционной матрицы Ψ_{ij}^{ζ} трансформируются при ортогональных преобразованиях координат как компоненты n -мерного тензора второго ранга, т. е. можно говорить о *корреляционном тензоре* векторного поля. Для однородных и изотропных векторных полей доказан ряд изящных теорем, часть которых сформулирована в задачах 8—10.

Разложение многомерного случайного поля $\zeta^{(i)}(t, \mathbf{r})$ в интеграл Фурье имеет вид, аналогичный (6.1); при этом для однородного и стационарного поля выполняется равенство

$$\langle \zeta_i(\omega', \mathbf{k}') \zeta_j^*(\omega'', \mathbf{k}'') \rangle = G_{ij}^{\zeta}(\omega', \mathbf{k}') \delta(\omega' - \omega'') \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}''), \quad (6.13)$$

которое естественно приводит к обобщению теоремы Хинчина на многомерные пространственно-временные поля:

$$\Psi_{ij}^{\zeta}(\tau, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}^{\zeta}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\omega d^3k \quad (6.14)$$

с обратным преобразованием

$$G_{ij}^{\zeta}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{ij}^{\zeta}(\tau, \mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\tau d^3r. \quad (6.15)$$

Корреляционная матрица многомерного поля Ψ_{ij}^{ζ} положительно определена. Отсюда вытекает, что диагональные компоненты матрицы ω -плотности вещественны и неотрицательны: $G_{ii}^{\zeta}(\omega, \mathbf{k}) \geq 0$. Недиагональные же элементы в общем случае комплексны.

Отметим теперь следующее существенное обстоятельство. Область интегрирования по ω и \mathbf{k} в разложениях Фурье самих полей, равно как и их корреляционных функций (6.3) и (6.14), вообще говоря, четырехмерна. Но в том случае, когда рассматриваемые поля удовлетворяют некоторым динамическим уравнениям (в частности, волновым уравнениям) в *однородной* и *стационарной* среде, *свободной от источников* (т. е. сами уравнения однородны), то ω и \mathbf{k} уже не независимы, а подчинены так называемому *дисперсионному уравнению*:

$$\Delta(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (6.16)$$

Это уравнение следует из требования, чтобы плоская монохроматическая волна $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ была *собственной* волной, т. е. была частным решением динамических уравнений.

Говоря на геометрическом языке, дисперсионное уравнение описывает в пространстве (ω, \mathbf{k}) некую трехмерную гиперповерхность—дисперсионную поверхность,—которая может быть и многолистной (например, в анизотропной среде). Вне точек этой гиперповерхности ω, \mathbf{k} -амплитуды полей равны нулю, а значит, равны нулю и спектральные плотности в (6.3) и (6.14). Другими словами, $\xi^{(i)}(\omega, \mathbf{k})$ и $G_{ij}^{(i)}(\omega, \mathbf{k})$ содержат множителем дельта-функцию $\delta[\Delta(\omega, \mathbf{k})]$ и, соответственно, снижается кратность интегралов Фурье: они распространяются фактически только на дисперсионную поверхность (всю или ее участки), т. е. на ω и \mathbf{k} , удовлетворяющие дисперсионному уравнению. Уже в следующей главе мы непосредственно столкнемся с этим обстоятельством.

В тех случаях, когда стационарное поле $\zeta(t, \mathbf{r})$ является, как функция от t , *эргоидическим* (ч. I, § 20), угловые скобки в предыдущих выражениях можно трактовать (в смысле вероятностной сходимости) как усреднение по времени, т. е. считать, например, что для произвольной детерминированной функции *практически* справедливо равенство

$$\langle f[\zeta(t, \mathbf{r})] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{f[\zeta(t, \mathbf{r})]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f[\zeta(t, \mathbf{r})] dt, \quad (6.17)$$

причем для получения средних по ансамблю путем временного усреднения можно с достаточной точностью ограничиваться конечными T , существенно превышающими время корреляции $\tau_{\text{кор}}$:

$$T \gg \tau_{\text{кор}}. \quad (6.18)$$

Наряду с эргодичностью по времени, можно ввести понятие *пространственной* и *пространственно-временной* эргодичности. Так, для однородных пространственно эргодических полей средние по ансамблю «совпадают» в смысле сходимости по вероятности со средними по пространству. Практически это означает, что для произвольной детерминированной функции f можно считать справедливым равенство

$$\langle f[\zeta(t, \mathbf{r})] \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \overline{f_V[\zeta(t, \mathbf{r})]} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V f[\zeta(t, \mathbf{r})] d^3 r, \quad (6.19)$$

где V —пространственная область, по которой ведется усреднение. Предельный переход $V \rightarrow \infty$ опять-таки может быть приостановлен на областях V , поперечник которых L велик по сравнению с радиусом корреляции l_ζ , т. е. выполняется

неравенство, аналогичное (6.18):

$$L \sim V^{1/3} \gg l_\zeta. \quad (6.20)$$

О пространственно-временной эргодичности стационарных и однородных полей говорят тогда, когда имеет место сходимость по вероятности как при $T \rightarrow \infty$, так и при $V \rightarrow \infty$, что практически означает одновременное выполнение равенств (6.17) и (6.19). Возможны также случаи, когда поле $\zeta(t, r)$ является эргодическим только по части пространственных аргументов, например только в плоскости (x, y) или только на поверхности сферы.

Наконец, иногда удобно пользоваться понятием квазиэргодических полей, которые находятся по отношению к эргодическим полям в таком же положении, как квазиноднородные поля по отношению к однородным. Иными словами, эти поля являются эргодическими лишь в объемах, малых по сравнению с характерными масштабами L_ζ изменения статистических характеристик поля (среднего значения, дисперсии и т. д.). В отличие от (6.19), область пространственного усреднения для квазиэргодических полей должна быть ограничена сверху масштабом L_ζ , но при этом должно по-прежнему выполняться неравенство (6.20). Следовательно, о квазиэргодичности полей можно говорить лишь при таких условиях, когда можно ввести объем усреднения V , который удовлетворял бы двухстороннему неравенству

$$L_\zeta \gg V^{1/3} \gg l_\zeta. \quad (6.21)$$

В феноменологической физике V называют обычно «физически бесконечно малым объемом». Этот объем должен быть, с одной стороны, достаточно малым, чтобы в его пределах исследуемые поля были статистически однородными (в механике и электродинамике сплошных сред обычно требуется лишь постоянство в объеме V средних полей), а с другой — настолько большим, чтобы в пределах V поле ζ испытывало достаточно много пространственных флуктуаций.

В физике сплошных сред под l_ζ следует понимать среднее расстояние между источниками возмущений, которыми могут быть отдельные молекулы, дислокации, вкрапления и т. д. Если n — концентрация молекул (или других возмущающих объектов), то $l_\zeta \sim n^{-1/3}$, и тогда неравенство $V^{1/3} \gg l_\zeta$ принимает вид $nV \gg 1$, что и отвечает большому числу молекул в физически бесконечно малом объеме V . При выполнении этого неравенства усреднение по ансамблю молекул можно заменять усреднением по малой пространственной области V . Таким образом, в макроскопической физике существенно используется предположение о пространственной квазиэргодичности тех или иных полей, характеризующих состояние сплошных сред.

§ 7. Функциональный метод описания случайных полей

Как мы знаем, полное описание вещественной случайной величины ξ дается ее характеристической функцией $\Phi_\xi(u) = \langle \exp(iu\xi) \rangle$, при помощи которой можно найти как плотность вероятностей ξ , так и моменты разного порядка, а также кумулянты.

Для N -мерной случайной величины $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ характеристическая функция имеет вид $\Phi_\xi(u) = \langle \exp(iu\xi) \rangle$, где $u\xi = \sum_{j=1}^N u_j \xi_j$, и тоже содержит всю информацию о совокупности случайных величин ξ_j (ч. I, § 9).

При рассмотрении общих вопросов, обсуждаемых в данном параграфе, целесообразно отказаться на время от ограничения числа параметров, от которых зависят интересующие нас функции, и вернуться от четырех координат x, y, z, t к n -мерному пространству параметров $x = \{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть $\xi(x_1, \dots, x_n) = \xi(x)$ — вещественное случайное поле в этом пространстве (в частном случае единственного параметра, $n = 1$, мы будем, как и ранее, обычно считать, что параметр x является временем t).

Рассмотрим теперь другой, по существу равносильный, но во многих задачах более удобный и лаконичный способ задания случайных функций — при помощи так называемых *характеристических функционалов*. Убедимся прежде всего, что полное вероятностное описание поля $\xi(x)$ дается *характеристическим функционалом*

$$\Phi[u] = \langle \exp \left\{ i \int \xi(x) u(x) dx \right\} \rangle, \quad dx = dx_1 \dots dx_n. \quad (7.1)$$

Здесь $u(x)$ — произвольная функция, для которой интеграл в (7.1) сходится при всех возможных реализациях $\xi(x)$. Функция $u(x)$ заменяет дискретную совокупность переменных $u = \{u_1, \dots, u_N\}$, от которых зависит характеристическая функция для N -мерной случайной величины $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$. Подчеркнем, что функционал $\Phi[u]$ должен быть известен для любой функции $u(x)$.

Зная $\Phi[u]$, можно получить характеристическую функцию для любой совокупности случайных величин $\xi_1 = \xi(x_1), \dots, \xi_N = \xi(x_N)$. Для этого достаточно взять в качестве аргумента $u(x)$ функционала $\Phi[u]$ функцию вида

$$|u_N(x) = u_1 \delta(x - x_1) + \dots + u_N \delta(x - x_N)|$$

Тогда

$$\int \xi(x) u_N(x) dx = \sum_1^N u_j \xi(x_j)$$

и функционал $\Phi[u]$ превращается в характеристическую функцию N -мерной случайной величины $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$, т. е. значений поля $\xi(x)$ в N точках x_1, \dots, x_N :

$$\Phi[u_N] = \left\langle \exp \left\{ i \sum_{j=1}^N u_j \xi(x_j) \right\} \right\rangle = \varphi(u_1, \dots, u_N).$$

Но характеристическая функция $\varphi(u_1, \dots, u_N)$ позволяет, как мы знаем, найти N -мерную плотность вероятностей $w_N(\xi_1, \dots, \xi_N)$. Тем самым, ясно, что характеристический функционал $\Phi[u]$ однозначно определяет плотности $w_N(\xi_1, \dots, \xi_N)$ при любом N и при любом выборе точек x_1, \dots, x_N ; т. е. полностью определяет случайное поле $\xi(x)$.

Зная функционал $\Phi[u]$, мы можем найти также моменты (в частности, корреляционные функции) и другие статистические характеристики случайного поля $\xi(x)$. Однако для этого необходимо уметь дифференцировать функционал $\Phi[u]$ по функциональному аргументу $u(x)$. Поэтому часть этого параграфа будет посвящена чисто математическим вопросам, касающимся функционалов.

Прежде всего дадим общее определение функционала. Мы говорим, что функционал задан, если установлено правило, по которому каждой функции, принадлежащей области определения функционала, сопоставлено число, называемое значением функционала на этой функции. Приведем некоторые примеры функционалов:

$$F_1[u] = \int A(x) u(x) dx,$$

$$F_N[u] = \int A_N(x_1, \dots, x_N) u(x_1) \dots u(x_N) dx_1 \dots dx_N,$$

$$\Phi_G[u] = \exp \left\{ -1/2 \int \int \psi(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 \right\}.$$

Здесь $F_1[u]$ — линейный функционал, $F_N[u]$ — функционал N -й степени, $\Phi_G[u]$ — гауссов функционал (ниже будет показано, что $\Phi_G[u]$ — характеристический функционал для гауссовых случайных полей). Отметим, что функционал зависит от *вида функции $u(x)$ в целом* (т. е. от ее поведения во всем пространстве x), в силу чего в обозначении $F[u]$ мы не пишем явно зависимости u от ее аргумента x . В тех случаях, когда на эту зависимость необходимо указывать, мы будем отмечать аргумент функции u тильдой: $F[\bar{u}(x)]$. Однако при такой записи следует иметь в виду, что сам функционал F не зависит от \bar{x} (подобно тому как в тензорной алгебре величина $x_k u_k$ не зависит от «немого» индекса k — индекса суммирования).

Рассмотрим значения одного и того же функционала F для двух различных «значений» его аргумента, а именно для функций

$u(x)$ и $u(x) + \delta u(x)$. Будем при этом считать, что функция $\delta u(x)$ отлична от нуля лишь в некоторой области Δx вокруг точки x_0 . Функциональной (или вариационной) производной функционала $F[u]$ в точке x_0 называется предел

$$\frac{\delta F[u]}{\delta u(x_0)} = \lim_{\substack{|\Delta x| \rightarrow 0 \\ \max |\delta u| \rightarrow 0}} \frac{F[u + \delta u] - F[u]}{\int_{\Delta x} \delta u(x) dx}, \quad (7.2)$$

конечно, при условиях, что этот предел существует и не зависит ни от вида $\delta u(x)$, ни от способа стягивания к нулю объема области $|\Delta x|$, ни от закона, по которому стремится к нулю максимум модуля функции $\delta u(x)$. Приведем некоторые примеры.

Найдем функциональную производную линейного функционала $F_1[u] = \int A(x') u(x') dx'$ в точке x_0 . Имеем

$$F_1[u + \delta u] = \int A(x') [u(x') + \delta u(x')] dx',$$

$$F_1[u + \delta u] - F_1[u] = \int_{\Delta x} A(x') \delta u(x') dx',$$

так что

$$\frac{F_1[u + \delta u] - F_1[u]}{\int_{\Delta x} \delta u(x') dx'} = \frac{\int_{\Delta x} A(x') \delta u(x') dx'}{\int_{\Delta x} \delta u(x') dx'}.$$

Применяя теорему о среднем к интегралу в числителе, находим

$$\int_{\Delta x} A(x') \delta u(x') dx' = A(x_1) \int_{\Delta x} \delta u(x') dx',$$

где точка x_1 принадлежит Δ -окрестности точки x_0 . Переходя к пределу при $|\Delta x| \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\delta}{\delta u(x_0)} \int A(x') u(x') dx' = A(x_0). \quad (7.3)$$

Таким же образом производится дифференцирование и более сложных функционалов (см. задачу 13).

Выберем в качестве $\delta u(x)$ функцию $\delta u(x) = \lambda \delta(x - x_0)$ (как и ранее, $\delta(x - x_0) = \delta(x_1 - x_{01}) \dots \delta(x_n - x_{0n})$). Тогда $\int \delta u(x') dx' = \lambda$ и, согласно (7.2),

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[u]}{\delta u(x_0)} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F[u(\tilde{x}) + \lambda \delta(\tilde{x} - x_0)] - F[u(\tilde{x})]}{\lambda} = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} F[u(\tilde{x}) + \lambda \delta(\tilde{x} - x_0)] \right\}_{\lambda=0}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Формула (7.4) сводит операцию вычисления функциональной производной к обычному дифференцированию.

Приведем теперь формальные правила функционального дифференцирования, аналогичные обычным правилам.

Если A_1 и A_2 не зависят от u , то

$$\frac{\delta}{\delta u(x)} \{A_1 \Phi_1[u] + A_2 \Phi_2[u]\} = A_1 \frac{\delta \Phi_1[u]}{\delta u(x)} + A_2 \frac{\delta \Phi_2[u]}{\delta u(x)}. \quad (7.5)$$

Далее,

$$\frac{\delta}{\delta u(x)} \{\Phi_1[u] \Phi_2[u]\} = \frac{\delta \Phi_1[u]}{\delta u(x)} \Phi_2[u] + \Phi_1[u] \frac{\delta \Phi_2[u]}{\delta u(x)}. \quad (7.6)$$

Пусть $f(z)$ — функция от z . Рассмотрим функционал вида $\Phi[u] = f(F[u])$ (функция от функционала). Тогда

$$\frac{\delta}{\delta u(x)} f(F[u]) = f'(F[u]) \frac{\delta F[u]}{\delta u(x)}, \quad (7.7)$$

где $f' = \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=F(u)}$ — обычная производная функции f по ее аргументу. Формулы (7.5)–(7.7) непосредственно следуют из (7.4). Наконец, положив в (7.3) $A(x') = \delta(x' - x_1)$, получаем

$$\frac{\delta u(x_1)}{\delta u(x_0)} = \delta(x_1 - x_0). \quad (7.8)$$

Формулы (7.5)–(7.8) позволяют, не прибегая к формальному определению (7.2) операций функционального дифференцирования, дифференцировать большинство функционалов, с которыми приходится встречаться в конкретных задачах. В частности, из (7.5) следует, что можно производить дифференцирование функционалов под знаком интеграла или производной.

В качестве еще одного примера найдем функциональную производную от гауссова функционала:

$$\frac{\delta \Phi_G[u]}{\delta u(x)} = \frac{\delta}{\delta u(x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint \Psi(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 \right\}.$$

В соответствии с (7.7) получаем

$$\frac{\delta \Phi_G[u]}{\delta u(x)} = \Phi_G[u] \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta u(x)} \iint \psi(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 \right\}.$$

На основании (7.5) дифференцируем под знаком интеграла, используя при этом формулы (7.6) и (7.8):

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi_G[u]}{\delta u(x)} &= -\frac{1}{2} \Phi_G[u] \iint \psi(x_1, x_2) [\delta(x_1 - x) u(x_2) + \\ &\quad + u(x_1) \delta(x_2 - x)] dx_1 dx_2 = \\ &= -\frac{1}{2} \Phi_G[u] \int [\psi(x, x') + \psi(x', x)] u(x') dx'. \end{aligned}$$

В данном примере можно считать, что $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$, так как несимметрическая часть $\psi(x_1, x_2)$ не вносит вклада в функционал, поскольку интеграл от произведения несимметрической функции на симметрическую $u(x_1)u(x_2)$ равен нулю. Поэтому получившую производную можно записать короче:

$$\frac{\delta\Phi_G[u]}{\delta u(x)} = -\Phi_G[u] \int \psi(x, x') u(x') dx'.$$

Функционал $F[u+v]$ можно разложить в функциональный ряд Тейлора по $v(\tilde{x})$ (см., например, [1], приложение I):

$$F[u+v] = F[u] + \int dx v(x) \frac{\delta F[u]}{\delta u(x)} + \\ + \frac{1}{2!} \iint dx_1 dx_2 v(x_1) v(x_2) \frac{\delta^2 F[u]}{\delta u(x_1) \delta u(x_2)} + \dots \quad (7.9)$$

Подобно операторной записи формулы $f(x+\xi) = \exp\left\{\xi \frac{\partial}{\partial x}\right\} f(x)$ для обычного ряда Тейлора, удобно записать и формулу (7.9) в операторном виде:

$$F[u+v] = \left\{ 1 + \int dx v(x) \frac{\delta}{\delta u(x)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2!} \iint dx_1 dx_2 v(x_1) v(x_2) \frac{\delta}{\delta u(x_1)} \frac{\delta}{\delta u(x_2)} + \dots \right\} F[u] = \\ = \left\{ 1 + \int dx v(x) \frac{\delta}{\delta u(x)} + \frac{1}{2!} \left[\int dx v(x) \frac{\delta}{\delta u(x)} \right]^2 + \dots \right\} F[u].$$

В фигурных скобках мы имеем степенное разложение экспоненты, так что

$$F[u+v] = \exp \left\{ \int dx v(x) \frac{\delta}{\delta u(x)} \right\} F[u]. \quad (7.10)$$

Вернемся к характеристическому функционалу (7.1) и подействуем на него оператором $\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)}$. Выполняя дифференцирование под знаком среднего, находим

$$\frac{1}{i} \frac{\delta\Phi[u]}{\delta u(x)} = \left\langle \xi(x) \exp \left\{ i \int u(x') \xi(x') dx' \right\} \right\rangle. \quad (7.11)$$

Таким образом, оператор $\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)}$, действуя на $\Phi[u]$, вводит под знак усреднения множитель $\xi(x')$. Повторяя эту операцию, приходим к формуле

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x_1)} \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x_N)} \Phi[u] = \\ = \left\langle \xi(x_1) \cdots \xi(x_N) \exp \left\{ i \int u(x') \xi(x') dx' \right\} \right\rangle. \quad (7.12)$$

Если теперь положить здесь $u = 0$, то получим

$$\langle \xi(x_1) \dots \xi(x_N) \rangle = \frac{1}{i^N} \frac{\delta^N \Phi[u]}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_N)} \Big|_{u=0}. \quad (7.13)$$

Таким образом, моменты (7.13) случайного поля $\xi(x)$ можно находить как значения функциональных производных характеристического функционала при нулевом значении его аргумента.

Если разложить экспоненту в (7.1) в ряд и записать k -ю степень интеграла в виде k -кратного интеграла, то получится формула

$$\Phi[u] = 1 + \sum_1^\infty \frac{i^k}{k!} \int \langle \xi(x_1) \dots \xi(x_k) \rangle u(x_1) \dots u(x_k) dx_1 \dots dx_k, \quad (7.14)$$

представляющая собой разложение характеристического функционала $\Phi[u]$ в функциональный ряд Тейлора.

Рассмотрим теперь функционал $\Theta[u] = \ln \Phi[u]$, так что $\Phi[u] = \exp\{\Theta[u]\}$. Разложение $\Theta[u]$ в ряд Тейлора определяет *кумулянтные* (или корреляционные) функции различных порядков:

$$\Theta[u] = \sum_1^\infty \frac{i^k}{k!} \int \Psi_k(x_1, \dots, x_k) u(x_1) \dots u(x_k) dx_1 \dots dx_k. \quad (7.15)$$

Кумулянтная функция k -го порядка ($k = 1, 2, \dots$) определена формулой

$$\Psi_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{i^k} \frac{\delta^k \ln \Phi[u]}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_k)} \Big|_{u=0}, \quad (7.16)$$

аналогичной формуле для кумулянтов случайной величины. Из (7.13) и (7.16) вытекает связь между моментными и кумулянтными функциями (см. задачу 16). В частности,

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \overline{\xi(x)}, \\ \psi_2(x_1, x_2) &= \psi(x_1, x_2) = \langle \xi(x_1) \xi(x_2) \rangle - \overline{\xi(x_1)} \overline{\xi(x_2)}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Выше мы рассмотрели несколько примеров функционалов общего вида. Обратимся теперь к примерам *характеристических* функционалов.

1) Пусть $\xi(x)$ — *нормальное случайное поле*. Обозначим через \mathcal{L} интеграл

$$\mathcal{L} = \int \xi(x) u(x) dx.$$

Тогда характеристический функционал $\Phi_G[u]$ запишется в виде

$$\Phi_G[u] = \langle \exp(i\mathcal{L}) \rangle.$$

Интеграл от гауссовой случайной функции является гауссовой случайной величиной, что позволяет сразу же написать плотность вероятностей для \mathcal{L} :

$$w(\mathcal{L}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\mathcal{L}-\bar{\mathcal{L}})^2}{2\sigma^2}\right).$$

Из выражения для \mathcal{L} очевидно, что параметры $\bar{\mathcal{L}}$ и $\sigma^2 = \langle(\mathcal{L}-\bar{\mathcal{L}})^2\rangle = \langle(\tilde{\mathcal{L}})^2\rangle$ этого распределения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}} &= \int \overline{\xi(x)} u(x) dx, \\ \sigma^2 &= \iint \psi_{\xi}(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Вычисляя теперь $\langle \exp(i\mathcal{L}) \rangle$, получаем известный результат:

$$\begin{aligned}\Phi_G[u] &= \int e^{i\mathcal{L}} w(\mathcal{L}) d\mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int \exp\left(i\mathcal{L} - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathcal{L} - \bar{\mathcal{L}})^2\right) d\mathcal{L} = \exp\left(i\bar{\mathcal{L}} - \frac{1}{2}\sigma^2\right),\end{aligned}$$

а подстановка выражений для $\bar{\mathcal{L}}$ и σ^2 дает

$$\Phi_G[u] = \exp\left\{i \int \overline{\xi(x)} u(x) dx - \frac{1}{2} \iint \psi_{\xi}(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2\right\}. \quad (7.18)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\Theta_G[u] &= \ln \Phi_G[u] = \\ &= i \int \overline{\xi(x)} u(x) dx - \frac{1}{2} \iint \psi_{\xi}(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2. \quad (7.19)\end{aligned}$$

Сопоставление (7.19) с (7.15) показывает, что для гауссовых случайных полей все кумулянтные функции выше второго порядка равны нулю.

Центральные моменты нормального случайного поля обладают следующими свойствами (ч. I, задача 6 к гл. II):

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\xi}_1 \dots \tilde{\xi}_{2k+1} \rangle &= 0, \quad \tilde{\xi}_i \equiv \tilde{\xi}(x_i), \\ \langle \tilde{\xi}_1 \dots \tilde{\xi}_{2k} \rangle &= \sum_{\text{р. п.}} \langle \tilde{\xi}_{\alpha_1} \tilde{\xi}_{\alpha_2} \rangle \dots \langle \tilde{\xi}_{\alpha_{2k-1}} \tilde{\xi}_{\alpha_{2k}} \rangle,\end{aligned} \quad (7.20)$$

где р. п. под символом \sum означает, что суммирование производится по всем возможным разбиениям индексов $1, 2, \dots, 2k$ на пары. Нетрудно подсчитать, что число слагаемых в сумме, входящей в (7.20), равно $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)$. Например, при $k=2$

$$\langle \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2 \tilde{\xi}_3 \tilde{\xi}_4 \rangle = \langle \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_2 \rangle \langle \tilde{\xi}_3 \tilde{\xi}_4 \rangle + \langle \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_3 \rangle \langle \tilde{\xi}_2 \tilde{\xi}_4 \rangle + \langle \tilde{\xi}_1 \tilde{\xi}_4 \rangle \langle \tilde{\xi}_2 \tilde{\xi}_3 \rangle.$$

Аналогичная формула для шестого момента содержит 15 слагаемых. Определения гауссова поля (7.18) и (7.20) равносильны (см. задачу 17).

2) *Пуассоновское* случайное поле строится следующим образом. Рассмотрим сначала конечную область V пространства параметров $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть m — случайная величина, распределенная по закону Пуассона $P(m) = (\bar{m})^m e^{-\bar{m}} / m!$, где \bar{m} — среднее значение m . Выберем в V случайным образом m точек $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, считая, что плотность вероятностей для координат каждой из этих точек равна V^{-1} при $x_k \in V$ и нулю вне V и что координаты всех m точек статистически независимы. Возьмем, далее, m случайных величин A_1, \dots, A_m , взаимно независимых и имеющих одинаковую плотность вероятностей $w(A)$, а значит, и характеристическую функцию $\chi(\lambda)$. Пусть $g(\mathbf{x})$ — фиксированная *дeterminированная* функция. Пуассоновское случайное поле мы определим теперь формулой

$$\xi(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^m A_k g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k). \quad (7.21)$$

Согласно построению в (7.21) содержатся следующие случайные параметры: «амплитуды» A_k , положения «центров» \mathbf{x}_k и число слагаемых m . Мы распространяем здесь на случай поля в n -мерном пространстве параметров \mathbf{x} то, что в ч. I было сделано для однопараметрических случайных функций, т. е. для случайных процессов* (см., в частности, ч. I, гл. II).

Характеристический функционал случайного поля (7.21) имеет вид (см. задачу 18)

$$\Phi[u] = \exp \left\{ v \left[\chi \left(\int g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}' \right) - 1 \right] \right\}, \quad (7.22)$$

где $v = \bar{m}/V$ — средняя плотность случайных точек. Область V в (7.22) можно считать и неограниченной ($V \rightarrow \infty$, $\bar{m} \rightarrow \infty$ при $v = \bar{m}/V = \text{const}$).

Из (7.22) нетрудно вывести кумулятивные функции пуассонового случайного поля (см. задачу 19). Они имеют вид

$$\Psi_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = v \langle A^k \rangle \int g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) g(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}) \dots g(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (7.23)$$

Гауссово случайное поле можно получить из пуассоновского, если определенным образом устремить в бесконечность v , уменьшая в то же время «амплитуды» A (см. задачу 20).

При решении многих физических задач возникает необходимость вычисления величин вида $\langle \xi(\mathbf{x}) R[\xi] \rangle$, где $R[\xi]$ — некоторый функционал от случайного поля $\xi(\mathbf{x})$. Выведем, следуя работе [5], полезную формулу, позволяющую находить эту величину.

Рассмотрим среднее значение выражения

$$\langle \xi(x) R[\xi + \eta] \rangle \equiv f[x, \eta],$$

где $\eta = \eta(\tilde{x})$ — некоторая детерминированная функция. Воспользовавшись формулой (7.10) для ряда Тейлора, представим функционал $R[\xi + \eta]$ в виде

$$R[\eta + \xi] = \exp \left\{ \int dx' \xi(x') \frac{\delta}{\delta \eta(x')} \right\} R[\eta].$$

Тогда

$$f[x, \eta] = \langle \xi(x) \exp \left\{ \int dx' \xi(x') \frac{\delta}{\delta \eta(x')} \right\} \rangle R[\eta]. \quad (7.24)$$

Разделив и умножив это равенство на оператор

$$\left\langle \exp \left\{ \int dx' \xi(x') \frac{\delta}{\delta \eta(x')} \right\} \right\rangle$$

(он коммутирует с входящим в (7.24) оператором), получаем

$$f[x, \eta] = \frac{\left\langle \exp \left\{ \int dx' \xi(x') \frac{\delta}{\delta \eta(x')} \right\} \xi(x) \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ \int dx' \xi(x') \frac{\delta}{\delta \eta(x')} \right\} \right\rangle} \times \\ \times \left\langle \exp \left\{ \int dx' \xi(x') \frac{\delta}{\delta \eta(x')} \right\} \right\rangle R[\eta]. \quad (7.25)$$

Введем функционал Ω , зависящий от функции $u(\tilde{x})$ и кроме того, являющейся обычной функцией параметра x :

$$\Omega[x, u] = \frac{\left\langle \xi(x) \exp \left\{ i \int dx' \xi(x') u(x') \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ i \int dx' \xi(x') u(x') \right\} \right\rangle}. \quad (7.26)$$

С его помощью можно записать (7.25) в виде

$$f[x, u] = \Omega \left[x, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right] \left\langle \exp \left\{ \int dx' \xi(x') \frac{\delta}{\delta \eta(x')} \right\} R[\eta] \right\rangle,$$

где в последнем сомножителе неслучайная величина $R[\eta]$ введена под знак усреднения. Снова воспользовавшись формулой (7.10), получаем

$$f[x, \eta] = \Omega \left[x, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right] \langle R[\eta + \xi] \rangle,$$

или, внося неслучайный оператор под знак среднего,

$$f[x, \eta] = \left\langle \Omega \left[x, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right] R[\eta + \xi] \right\rangle.$$

Поскольку функционал R зависит лишь от суммы $\eta + \xi$, можно заменить оператор дифференцирования по η оператором дифференцирования по ξ . Таким образом,

$$f[x, \eta] = \langle \xi(x) R[\eta + \xi] \rangle = \left\langle \Omega \left[x, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi} \right] R[\eta + \xi] \right\rangle,$$

причем здесь уже можно приравнять вспомогательную функцию η нулю. Это приводит к окончательной формуле, полученной В. И. Кляцкиным [5]:

$$\langle \xi(x) R[\xi] \rangle = \left\langle \Omega \left[x, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi} \right] R[\xi] \right\rangle. \quad (7.27)$$

Функционал $\Omega[x, u]$ можно, согласно (7.26), (7.11) и (7.1), выразить через логарифм характеристического функционала поля $\xi(x)$ следующим образом:

$$\Omega[x, u] = \frac{1}{\Phi[u]} \frac{1}{i} \frac{\delta \Phi[u]}{\delta u(x)} = \frac{1}{i} \frac{\delta \ln \Phi[u]}{\delta u(x)} = \frac{1}{i} \frac{\delta \Theta[u]}{\delta u(x)}. \quad (7.28)$$

Воспользуемся теперь разложением (7.15) функционала Θ по кумулянтным функциям. Дифференцируя (7.15), получаем с учетом результата задачи 13

$$\begin{aligned} \Omega[x, u] &= \frac{1}{i} \frac{\delta \Theta[u]}{\delta u(x)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^{k-1}}{(k-1)!} \int \psi_k(x, x_1, \dots, x_{k-1}) u(x_1) \dots u(x_{k-1}) dx_1 \dots dx_{k-1}. \end{aligned}$$

Заменив здесь $u(x_i)$ на $\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi(x_i)}$ и подставив результат в (7.27), находим

$$\begin{aligned} \langle \xi(x) R[\xi] \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \int \psi_k(x, x_1, \dots, x_{k-1}) \times \\ &\times \left\langle \frac{\delta^{(k-1)} R[\xi]}{\delta \xi(x_1) \dots \delta \xi(x_{k-1})} \right\rangle dx_1 \dots dx_{k-1}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Рассмотрим частный случай гауссова поля $\xi(x)$, у которого $\psi_3 = \psi_4 = \dots = 0$ и, следовательно, в (7.29) остаются только два первых слагаемых с $\psi_1(x) = \overline{\xi(x)}$ и $\psi_2(x, x') = \psi_{\xi}(x, x')$:

$$\langle \xi(x) R[\xi] \rangle = \overline{\xi(x)} \langle R[\xi] \rangle + \int \psi_{\xi}(x, x') \left\langle \frac{\delta R[\xi]}{\delta \xi(x')} \right\rangle dx'. \quad (7.30)$$

Формула (7.30) была получена К. Фуруцу [6], Е. А. Новиковым [7] и М. Д. Донскером [8].

Укажем, как изменятся некоторые из предыдущих формул, если рассматривать совокупность N случайных полей (N -мерное поле) $\xi_1(x), \dots, \xi_N(x)$. Характеристический функционал определяется тогда формулой

$$\Phi[u_1, \dots, u_N] = \left\langle \exp \left\{ i \sum_{k=1}^N \int u_k(x) \xi_k(x) dx \right\} \right\rangle. \quad (7.31)$$

Формулы (7.5)–(7.7) сохраняют прежний вид, но с заменой в них $\delta/\delta u_i(x)$ на $\delta/\delta u_j(x)$. Вместо (7.8) теперь справедлива формула

$$\frac{\delta u_i(x)}{\delta u_k(x')} = \delta_{ik} \delta(x-x'). \quad (7.32)$$

Формула Фуруцу—Новикова (7.30) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(x) R[\xi_1, \dots, \xi_N] \rangle &= \\ &= \overline{\xi_i(x)} \langle R \rangle + \sum_{k=1}^N \int \langle \tilde{\xi}_i(x) \tilde{\xi}_k(x') \rangle \left\langle \frac{\delta R}{\delta \xi_k(x')} \right\rangle dx'. \end{aligned} \quad (7.33)$$

В заключение сформулируем свойства однородности и изотропности случайных полей на языке характеристического функционала. Статистическая однородность поля $\xi(x)$ (в узком смысле) означает, что $\langle \xi(x_1+x_0) \dots \xi(x_k+x_0) \rangle = \langle \xi(x_1) \dots \xi(x_k) \rangle$. Используя это равенство, можно записать разложение (7.14) в виде

$$\begin{aligned} \Phi[u(\tilde{x})] &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int \langle \xi(x_1+x_0) \dots \xi(x_k+x_0) \rangle \times \\ &\quad \times u(x_1) \dots u(x_k) dx_1 \dots dx_k \end{aligned}$$

или, после замены переменных $x_i+x_0=x'_i$, в виде

$$\begin{aligned} \Phi[u(\tilde{x})] &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int \langle \xi(x'_1) \dots \xi(x'_k) \rangle \times \\ &\quad \times u(x'_1-x_0) \dots u(x'_k-x_0) dx'_1 \dots dx'_k. \end{aligned}$$

Но, как легко видеть, в правой части получился функционал $\Phi[u(\tilde{x}-x_0)]$. Таким образом, для статистически однородных полей

$$\Phi[u(\tilde{x})] = \Phi[u(\tilde{x}-x_0)], \quad (7.34)$$

т. е. характеристический функционал не меняется, если его аргумент u рассматривается в смещенной точке.

Аналогичным образом, если $\hat{R}\tilde{x}=x'$ означает преобразование поворота в пространстве параметров, то статистическая

изотропность поля $\xi(x)$ выражается равенством

$$\Phi[u(\tilde{x})] = \Phi[u(\hat{R}^{-1}\tilde{x})]. \quad (7.35)$$

Возможны случаи, когда поле статистически однородно или изотропно не по всем координатам x_1, \dots, x_n , а лишь в отношении некоторой их части, т. е. в некотором подпространстве параметров x . Тогда инвариантность $\Phi[u]$ должна иметь место при преобразованиях трансляции (вектор x_0 в (7.34)) или поворота (оператор \hat{R} в (7.35)), осуществляемых только в этом подпространстве.

Приведем в качестве примера характеристический функционал статистически однородного гауссова поля, у которого $\xi = 0$. Для него

$$\Phi[u] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint \Psi_\xi(x_1 - x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 \right\}. \quad (7.36)$$

Ясно, что (7.34) здесь выполнено. Если рассматриваемое поле статистически изотропно, то вместо (7.36) будет

$$\Phi[u] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint \Psi_\xi(|x_1 - x_2|) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 \right\}. \quad (7.37)$$

Как уже было сказано, этот параграф посвящен в основном правилам оперирования с функционалами и выводу ряда важных соотношений и формул. Примеры использования функционального метода при решении конкретных задач рассматриваются в некоторых из последующих глав. В задаче 22 функциональный метод применен для вывода приведенного в ч. I уравнения Эйнштейна—Фоккера (36.15) для вероятностей перехода случайного отклика дискретной динамической системы на гауссовые дельта-коррелированные по времени воздействия.

Задачи

1. Найти пространственную спектральную плотность для анизотропного однородного случайного поля с гауссовой корреляционной функцией общего вида

$$\Psi_\xi(r) = \sigma_\xi^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j \right\},$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и $\text{Det}[\alpha_{ij}] \neq 0$.

Ответ.

$$\Phi_\xi(k) = \frac{\sigma_\xi^2}{V(2\pi)^3 \text{Det}[\alpha_{ij}]} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} k_i k_j \right\},$$

где $\|A_{ij}\| = \|\alpha_{ij}\|^{-1}$ — матрица, обратная матрице $\|\alpha_{ij}\|$. В частном случае, когда корреляционная функция имеет вид (2.29), пространственный спектр дается выражением (3.16).

2. Доказать следующее неравенство для статистических моментов порядка $|n+n|$ комплексного поля $\zeta(r)$:

$$B_{n,n}(1, \dots, 2n) |^2 \leq B_{n,n}(1, \dots, n; n, \dots, 1) B_{n,n}(n+1, \dots, 2n; 2n, \dots, n+1). \quad (1)$$

Решение. Неравенство следует из того, что при любом комплексном λ

$$\langle |\lambda \zeta(1) \dots \zeta(n) + \zeta(n+1) \dots \zeta(2n)|^2 \rangle \geq 0.$$

Если положить

$$\lambda = \alpha [B_{n,n}(1, \dots, 2n)]^*,$$

где α вещественно, то неравенство (1) представляет собой условие неограниченности квадратичного по α трехчлена. Частный случай (1) при $n=1$ — это неравенство

$$|B(1, 2)|^2 \leq B(1, 1) B(2, 2),$$

аналогичное (2.20).

3. Если провести в пространстве какую-либо прямую линию и рассматривать значения однородного и изотропного поля $\zeta(r)$ только на этой прямой, то получится случайная функция одной пространственной переменной — координаты, отсчитываемой вдоль этой прямой. Обозначим ее через z . Можно записать разложение корреляционной функции $\Phi_\zeta(z)$ в одномерный интеграл Фурье:

$$\Phi_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\zeta(k) \cos kz dk,$$

где $\gamma_\zeta(k)$ — одномерная спектральная плотность, выражаящаяся через $\Phi_\zeta(z)$ посредством обратного преобразования Фурье:

$$\gamma_\zeta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\zeta(z) \cos kz dz. \quad (1)$$

Показать, что трехмерный пространственный спектр $\Phi_\zeta(k)$ однородного изотропного поля $\zeta(r)$ связан с одномерным спектром $\gamma_\zeta(k)$ соотношением

$$\Phi_\zeta(k) = -\frac{1}{2\pi k} \frac{\partial \gamma_\zeta(k)}{\partial k}. \quad (2)$$

Указание. Надо продифференцировать (1) по k и сравнить результат с формулой (3.10).

Формула (2) удобна для расчета трехмерного спектра в тех довольно многочисленных случаях, когда интеграл (1) для $\gamma_\zeta(k)$ вычисляется проще, чем интеграл (3.10) для $\Phi_\zeta(k)$. Примерами могут служить даже простые корреляционные функции (2.24) и (2.25).

Формула (2) используется также для нахождения трехмерного спектра случайного изотропного поля по одномерному спектру $\gamma_\zeta(k)$, полученному по экспериментально измеренной одномерной корреляционной функции $\Phi_\zeta(z)$.

4. Пусть, как и в предыдущей задаче, z — координата, отсчитываемая вдоль какого-либо выбранного направления в пространстве, а случайное поле $\zeta(r)$ однородно в плоскости $z=\text{const}$. Вводя в плоскости $z=\text{const}$ двумерный вектор $r=(x, y)$, так что $r=(\rho, z)$, можно записать корреляционную

функцию поля $\zeta(r)$ в виде

$$\psi_\zeta(\rho, z_1 - z_2) = \langle \tilde{\zeta}(p_1, z_1) \tilde{\zeta}^*(p_1 - \rho, z_2) \rangle.$$

Эту функцию можно разложить в двумерный интеграл Фурье:

$$\psi_\zeta(\rho, z_1 - z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\zeta(k_\perp, z_1 - z_2) \exp(ik_\perp \rho) d^2 k_\perp, \quad (1)$$

где $k_\perp = (k_x, k_y)$. Функция $F_\zeta(k_\perp, z_1 - z_2)$ называется *двумерной спектральной плотностью* поля или просто *двумерным (пространственным) спектром*. Показать, что для однородного и *изотропного* случайного поля двумерный спектр $F_\zeta(k_\perp, z_1 - z_2)$ и трехмерный спектр $\Phi_\zeta(k)$ связаны между собой соотношениями

$$F_\zeta(k_\perp, z_1 - z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\zeta(\sqrt{k_z^2 + k_\perp^2}) \cos k_z(z_1 - z_2) dk_z, \quad (2)$$

$$\Phi_\zeta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\zeta(k, z_1 - z_2) d(z_1 - z_2). \quad (3)$$

Решение. Формула (2) следует из сопоставления (1) с трехмерным разложением (3.5), если учесть вещественность корреляционной функции $\psi_\zeta(r)$ для изотропного поля. Обращая (2), находим

$$\Phi_\zeta(\sqrt{k_z^2 + k_\perp^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\zeta(k_\perp, z_1 - z_2) \cos k_z z_1 d(z_1 - z_2).$$

Формула (3) получается отсюда при $k_z = 0$. Отметим, что $\Phi_\zeta(\sqrt{k_z^2 + k_\perp^2})$ как функция от k_z имеет характерный масштаб k_\perp . В силу этого из (2) следует, что $F_\zeta(k_\perp, z_1 - z_2)$ сосредоточена в области

$$k_\perp |z_1 - z_2| < 2\pi. \quad (4)$$

5. Выразить спектральное разложение корреляционной функции поля, изотропного в плоскости $z = \text{const}$, в виде однократного интеграла.

Решение. В общем случае корреляционная функция $\psi_\zeta(x, y) = \psi_\zeta(\rho)$ и ее двумерный спектр $F_\zeta(x_x, x_y) = F_\zeta(x) = F_\zeta(\rho)$ связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$\psi_\zeta(\rho) = \int F_\zeta(x) \exp(ix\rho) d^2x, \quad F_\zeta(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \psi_\zeta(\rho) \exp(-ix\rho) d^2\rho. \quad (1)$$

В случае изотропного поля имеем $\psi_\zeta(\rho) = \psi_\zeta(\rho)$ и $F_\zeta(x) = F_\zeta(x)$. Переход в формулах (1) к полярным координатам (соответственно в ρ -и x -пространствах) с последующим интегрированием по угловым переменным приводит к прямому и обратному преобразованиям Ганкеля:

$$\psi_\zeta(\rho) = 2\pi \int_0^\infty F_\zeta(x) J_0(x\rho) x dx, \quad F_\zeta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \psi_\zeta(\rho) J_0(x\rho) \rho d\rho, \quad (2)$$

где $\rho = \sqrt{x_x^2 + x_y^2}$, $x = \sqrt{x_x^2 + x_y^2}$, а J_0 — нулевая бесселева функция.

6. Найти частотный спектр $g_\zeta(\omega)$ замороженного поля $\zeta(t, r)$, если соответствующее покоящееся случайное поле $v(r)$ обладает гауссовой пространственной корреляционной функцией $\Psi_v(r) = \sigma_v^2 \exp\{-r^2/2l^2\}$.

Ответ.

$$g_\zeta(\omega) = \frac{\sigma_v^2 l}{\sqrt{2\pi} v} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega l}{v}\right)^2\right\}.$$

7. Найти корреляционную функцию, пространственно-временной, пространственный и частотный спектры замороженного поля $\zeta(t, r)$ при релятивистских значениях скорости v , если известна функция корреляции $\Psi_v(r)$ (или пространственный спектр $\Phi_v(k)$) соответствующего покоящегося поля $v(r)$.

Ответ. Если скорость v направлена по оси x , то в соответствии с преобразованием Лоренца

$$\Psi_\zeta(\tau, r) = \Psi_v\left(\frac{x-v\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, y, z\right),$$

$$G_\zeta(\omega, k) = \sqrt{1-v^2/c^2} \Phi_v(k_x \sqrt{1-v^2/c^2}, k_y, k_z) \delta(\omega - k_x v \sqrt{1-v^2/c^2}),$$

$$\Phi_\zeta(k) = \sqrt{1-v^2/c^2} \Phi_v(k_x \sqrt{1-v^2/c^2}, k_y, k_z),$$

$$g_\zeta(\omega) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \Phi_v\left(\frac{\omega}{v}, k_y, k_z\right) dk_y dk_z.$$

Отметим, что если покоящееся поле $v(r)$ изотропно, то замороженное поле $\zeta(t, r)$ статистически анизотропно.

8. Пусть $a(r)$ и $b(r)$ — изотропные и изотропно связанные случайные векторные поля. Найти общий вид корреляционного тензора $\langle a_\alpha(r_1) b_\beta^*(r_2) \rangle$ в этом случае.

Решение. Для построения корреляционного тензора однородных и изотропных векторных полей мы располагаем только скалярными функциями от $\rho = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, единичным вектором ρ/ρ и единичным тензором $\delta_{\alpha\beta}$. Поэтому общий вид корреляционного тензора будет

$$\begin{aligned} \langle a_\alpha(r_1) b_\beta^*(r_2) \rangle &= \\ &= F(\rho) \delta_{\alpha\beta} + [G(\rho) - F(\rho)] \frac{\rho_\alpha \rho_\beta}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Выбор скалярных коэффициентов в (1) в форме F и $G - F$ обусловлен тем, что $G(\rho)$ и $F(\rho)$ описывают при этом продольную и поперечную корреляции. Действительно, рассмотрим корреляцию между α -компонентами a_α и b_α . Если точки r_1 и r_2 лежат на прямой, параллельной оси x_α , т. е. $\rho = \rho_\alpha$, то (рис. 2, а)

$$\langle a_\alpha(r_1) b_\alpha^*(r_2) \rangle = G(\rho)$$

(продольная корреляция). Если же вектор $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ перпендикулярен оси x_α то $\rho_\alpha = 0$ (рис. 2, б) и

$$\langle a_\alpha(r_1) b_\alpha^*(r_2) \rangle = F(\rho)$$

(поперечная корреляция).

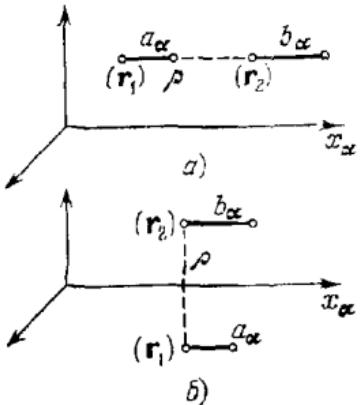


Рис. 2.

Вместо $F(\rho)$ и $G(\rho)$ можно ввести две другие скалярные функции, положив

$$\langle a_\alpha(r_1) b_\beta^*(r_2) \rangle = U(\rho) \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 V(\rho)}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_\beta}. \quad (2)$$

Сопоставление (1) и (2) показывает, что

$$F(\rho) = U(\rho) + \frac{1}{\rho} V'(\rho), \quad G(\rho) = U(\rho) + V''(\rho), \quad (3)$$

где штрих означает производную по ρ .

9. Показать, что для однородного и изотропного потенциального поля $a(r)$ ($\text{rot } a = 0$) продольная и поперечная функции корреляции $F(\rho)$ и $G(\rho)$, введенные в предыдущей задаче, связаны соотношением (А. М. Обухов)

$$G(\rho) = [\rho F(\rho)]', \quad (1)$$

а для соленоидального поля ($\text{div } a = 0$) — соотношением (Т. Карман)

$$F(\rho) = \frac{1}{2\rho} [\rho^3 G(\rho)]'. \quad (2)$$

Решение. Пусть $a = -\nabla\phi$ — потенциальное поле, а $\psi_\phi(\rho)$ — корреляционная функция потенциала $\phi(r)$. Тогда

$$\langle a_\alpha(r_1) a_\beta^*(r_2) \rangle = -\frac{\partial^2 \psi_\phi(\rho)}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_\beta},$$

т. е. в формуле (2) предыдущей задачи $U = 0$, $V = -\psi_\phi$. Следовательно, по формулам (3) той же задачи $F(\rho) = \frac{1}{\rho} V'$ и $G = V''$, откуда и вытекает (1).

Рассматривая соленоидальное поле, умножим $\text{div } a(r_1) = 0$ на $a(r_2)$ и проведем статистическое усреднение, используя соотношение (2) задачи 8. Это приводит к условию $\nabla(U + \Delta V) = 0$, откуда с точностью до постоянной, которую всегда можно включить в U , имеем $U + \Delta V = 0$. Отсюда следует,

$$U = -\Delta V = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^3 \frac{dV}{d\rho} \right) = -\frac{2V'}{\rho} - V''.$$

Согласно формулам (3) задачи 8

$$F = -\frac{1}{\rho} V' - V'', \quad G = -\frac{2}{\rho} V',$$

что эквивалентно (2).

10. Показать, что при условии однородности и изотропности векторное соленоидальное поле $a(r)$ не коррелировано со скалярным полем $\phi(r)$ (А. М. Обухов) и с векторным потенциальным полем $b(r) = -\nabla\phi(r)$.

Решение. Для однородных и изотропных полей корреляционная функция $\langle \phi(r_1) a^*(r_2) \rangle$ должна быть вектором, параллельным ρ :

$$\langle \phi(r_1) a^*(r_2) \rangle = H(\rho) \frac{\rho}{\rho} = B(\rho),$$

где $H(\rho)$ — скалярная функция. Поскольку для соленоидального поля $\text{div } a = 0$, должно быть

$$\nabla_{r_2} \langle \phi(r_1) a^*(r_2) \rangle = -\text{div}_\rho B(\rho) = 0,$$

т. е. вектор B должен быть соленоидальным (∇_ρ означает дифференцирование по r_2). В отсутствие источников единственное допустимое решение есть $B = 0$,

что и означает некоррелированность скалярного и соленоидального векторного полей. Отсюда вытекает также некоррелированность соленоидального и потенциального векторных полей:

$$\langle b_\beta(r_1) a_\alpha^*(r_2) \rangle = -\frac{\partial}{\partial r_{1\beta}} \langle \varphi(r_1) a_\alpha^*(r_2) \rangle = -\frac{\partial B_\alpha(\rho)}{\partial \rho_\beta} = 0.$$

11. О флюктуациях с корреляционными функциями типа (2.24) и (2.25) говорят как об однокаскадных флюктуационных полях, имея в виду, что поведение $\psi(r)$ характеризуется только одним масштабом l (пространственный спектр таких флюктуаций содержит, разумеется, множество масштабов, сосредоточенных в области $k \leqslant 1/l$). Реальные функции корреляции часто имеют много характерных масштабов (при этом говорят о многомасштабных флюктуациях). Иногда удобно аппроксимировать такие функции суперпозицией гауссовых функций корреляции, т. е. записывать коэффициент корреляции в виде [9]

$$K(\rho) = \int_0^\infty f(a) e^{-\rho^2/a^2} da,$$

подчиняя, конечно, весовую функцию $f(a)$ условию нормировки

$$K(0) = \int_0^\infty f(a) da = 1.$$

Обычный гауссов коэффициент корреляции $K(\rho) = e^{-\rho^2/2l^2}$ получается отсюда при $f(a) = \delta(a - \sqrt{2}l)$.

Найти весовую функцию $f(a)$, отвечающую:

а) экспоненциальному коэффициенту корреляции $e^{-r/l}$;
б) локально однородной и изотропной модели турбулентных флюктуаций диэлектрической проницаемости воздуха; коэффициент корреляции для таких флюктуаций в соответствии с (4.19) имеет асимптотические выражения

$$K(r) = \frac{\psi(r)}{\psi(0)} = 1 - \frac{D(r)}{D(\infty)} = \begin{cases} 1 - r^2 l_0^{-4/3} L_0^{-2/3}, & r \ll l_0, \\ 1 - (r/L_0)^{4/3}, & l_0 \ll r \ll L_0, \\ 0, & L_0 \ll r. \end{cases}$$

Ответ.

а) $f(a) = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} e^{-a^2/4l^2}$.

б) $f(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } a < l_0 \text{ и } a > L_0, \\ \frac{2}{3} a^{-1/3} L_0^{-2/3} & \text{при } l_0 \leqslant a \leqslant L_0. \end{cases}$

12. В ч. I, § 47 было выведено выражение для функции корреляции интенсивностей двух нормальных комплексных колебаний $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в предположении, что $\bar{\zeta}_1 = \bar{\zeta}_2 = 0$. Получить аналогичное выражение для случая, когда среднее значение случайного поля $\zeta(t, r)$ отлично от нуля.

Ответ. В обозначениях $I_m = |\zeta_m|^2$, где $\zeta_m = \zeta(t_m, r_m)$, $m = 1, 2$, функция корреляции интенсивностей есть

$$\Phi_I(1, 2) = \langle I_1 I_2 \rangle - \bar{I}_1 \bar{I}_2 = \langle \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \rangle,$$

где

$$\tilde{I} = I - \bar{I} = |\zeta|^2 - \langle |\zeta|^2 \rangle + (\bar{\zeta} \bar{\zeta}^* + \text{к. с.}).$$

Используя результаты задачи 2 к гл. VI ч. I, получим

$$\psi_I(1, 2) = |\psi_\zeta(1, 2)|^2 + |\tilde{\psi}_\zeta(1, 2)|^2 + [\psi_\zeta(1, 2)\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 + \tilde{\psi}_\zeta(1, 2)\bar{\zeta}_1^*\bar{\zeta}_2^* + \text{к. с.}].$$

При $\bar{\zeta}_1 = \bar{\zeta}_2 = 0$ отсюда следует формула

$$\psi_I(1, 2) = |\psi_\zeta(1, 2)|^2 + |\tilde{\psi}_\zeta(1, 2)|^2,$$

которая в случае $\tilde{\psi}_\zeta = 0$ принимает вид $\psi_I(1, 2) = |\psi_\zeta(1, 2)|^2$.

13. Пусть $F_N[u]$ — функционал N -й степени:

$$F_N[u] = \int A(x_1, \dots, x_N) u(x_1) \dots u(x_N) dx_1 \dots dx_N.$$

Показать, что

а) значение $F_N[u]$ зависит только от симметричной по всем аргументам части функции A ;

$$6) \frac{\delta F_N[u]}{\delta u(x)} = \int [A(x, x_1, \dots, x_{N-1}) + A(x_1, x, x_2, \dots, x_{N-1}) + \dots + A(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x)] u(x_1) \dots u(x_{N-1}) dx_1 \dots dx_{N-1};$$

в) в случае симметричной функции A

$$\frac{\delta F_N[u]}{\delta u(x)} = N \int A(x, x_1, \dots, x_{N-1}) u(x_1) \dots u(x_{N-1}) dx_1 \dots dx_{N-1}$$

(аналог формулы $\frac{dx^N}{dx} = Nx^{N-1}$).

Указание. Задачу полезно решить тремя способами: исходя из определения (7.2), при помощи формулы (7.4) и при помощи правил (7.5)–(7.8).

14. Найти вариационную производную функционала действия классической механики

$$S[x(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 - V(x(\tau)) \right] d\tau.$$

Решение. Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \frac{\delta}{\delta x(t)} \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 - \frac{\delta V(x(\tau))}{\delta x(t)} \right] d\tau.$$

На основании (7.7)

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 = 2 \frac{dx(\tau)}{d\tau} \frac{\delta}{\delta x(t)} \frac{dx(\tau)}{d\tau}.$$

Так как производная $dx(\tau)/d\tau$ есть предел отношения $\frac{x(\tau_2) - x(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}$, можно на основании (7.5) внести операцию функционального дифференцирования под знак $d/d\tau$, после чего использовать (7.8):

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\delta x(\tau)}{\delta x(t)} = \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - t) = -\frac{\partial}{\partial t} \delta(\tau - t).$$

Для второго слагаемого в $S[x]$, используя (7.7) и (7.8), получаем

$$\frac{\delta V(x(\tau))}{\delta x(t)} = V'(x(\tau)) \frac{\delta x(\tau)}{\delta x(t)} = \delta(\tau - t) V'(x(\tau)).$$

В результате

$$\begin{aligned}\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{dx(\tau)}{d\tau} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\tau-t) - V'(x(\tau)) \delta(\tau-t) \right] d\tau = \\ &= -m \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx(\tau)}{d\tau} \delta(\tau-t) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} V'(x(\tau)) \delta(\tau-t) d\tau,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = -m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - V'(x(t)).$$

Принцип наименьшего действия $\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = 0$ дает уравнение движения $m\ddot{x} = -V'(x)$.

15. Найти $\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)}$ для функционала

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau.$$

Ответ.

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

т. е. вариационная производная представляет собой левую часть уравнения Эйлера—Лагранжа.

Для получения этого результата следует использовать формулы (7.5)—(7.8), подобно тому как это сделано в предыдущей задаче.

16. Вывести формулу для $\psi_3(x_1, x_2, x_3)$, аналогичную формуле (7.17) для $\psi_2(x_1, x_2)$.

Ответ.

$$\begin{aligned}\psi_3(x_1, x_2, x_3) &= \langle \tilde{\xi}(x_1) \tilde{\xi}(x_2) \tilde{\xi}(x_3) \rangle - \bar{\tilde{\xi}}(x_1) \langle \tilde{\xi}(x_2) \tilde{\xi}(x_3) \rangle - \bar{\tilde{\xi}}(x_2) \langle \tilde{\xi}(x_1) \tilde{\xi}(x_3) \rangle - \\ &\quad - \bar{\tilde{\xi}}(x_3) \langle \tilde{\xi}(x_1) \tilde{\xi}(x_2) \rangle + 2\bar{\tilde{\xi}}(x_1) \bar{\tilde{\xi}}(x_2) \bar{\tilde{\xi}}(x_3).\end{aligned}$$

17. Исходя из выражений (7.20) для центральных моментов гауссова случайного поля $\tilde{\xi}(x)$, получить характеристический функционал для флюктуаций $\tilde{\xi}(x)$.

Решение. Согласно (7.14) имеем

$$\Phi_{\tilde{\xi}}[u] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int \langle \tilde{\xi}(x_1) \dots \tilde{\xi}(x_k) \rangle u(x_1) \dots u(x_k) dx_1 \dots dx_k,$$

причем, в силу (7.20), в этой сумме присутствуют только члены с $k=2m$:

$$\Phi_{\tilde{\xi}}[u] = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int \langle \tilde{\xi}(x_1) \dots \tilde{\xi}(x_{2m}) \rangle u(x_1) \dots u(x_{2m}) dx_1 \dots dx_{2m},$$

Используя теперь вторую формулу (7.20), получаем

$$\begin{aligned}\Phi_{\tilde{\xi}}[u] &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{p, n} \int \langle \tilde{\xi}(x_{\alpha_1}) \tilde{\xi}(x_{\alpha_2}) \dots \tilde{\xi}(x_{\alpha_{2m-1}}) \tilde{\xi}(x_{\alpha_{2m}}) \rangle u(x_{\alpha_1}) u(x_{\alpha_2}) \dots \\ &\quad \dots u(x_{\alpha_{2m-1}}) u(x_{\alpha_{2m}}) dx_1 \dots dx_{2m}\end{aligned}$$

Интеграл кратности $(2m)$ распадается на произведение m двукратных интегралов, отличающихся друг от друга лишь обозначением переменных интегрирования. Каждый из двукратных интегралов имеет вид

$$I = \int \int \langle \tilde{\xi}(x') \tilde{\xi}(x'') \rangle u(x') u(x'') dx' dx''.$$

Следовательно, каждый из членов внутренней суммы равен I^m , а так как сумма содержит всего $(2m-1)!!$ членов, функционал $\Phi_{\tilde{\xi}}[u]$ равен

$$\Phi_{\tilde{\xi}}[u] = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} (2m-1)!! I^m,$$

или, поскольку $(2m)! = (2m)!! \cdot (2m-1)!! = 2^m m! (2m-1)!!$,

$$\Phi_{\tilde{\xi}}[u] = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{I}{2}\right)^m = \exp\left\{-\frac{1}{2} I\right\}.$$

Таким образом,

$$\Phi_{\tilde{\xi}}[u] = \exp\left\{-1/2 \int \int \psi_{\tilde{\xi}}(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2\right\}.$$

Очевидно, эта формула является частным случаем (7.18), отвечающим нулевому среднему значению, как это и должно было получиться для $\tilde{\xi} = \xi - \bar{\xi}$, поскольку $\langle \tilde{\xi} \rangle = 0$. Тем самым доказана эквивалентность определений гауссова случайного поля при помощи равенств (7.20) и при помощи характеристического функционала (7.18).

18. Найти характеристический функционал пуассоновского случайного поля (7.21).

Решение. По определению пуассоновского поля

$$\Phi[u] = \langle \langle \langle \exp \left\{ i \int dx u(x) \sum_{k=0}^m A_k g(x-x_k) \right\} \rangle_{A_k} \rangle_{x_k} \rangle_m,$$

где каждая из угловых скобок с индексом внизу означает усреднение по соответствующим случайным величинам. Очевидно,

$$\Phi[u] = \langle \langle \langle \prod_{k=0}^m \exp \left\{ i A_k \int g(x-x_k) u(x) dx \right\} \rangle_{A_k} \rangle_{x_k} \rangle_m.$$

Выполним усреднение по A_k . Так как $\langle \exp\{i A_k \lambda\} \rangle_{A_k} = \chi(\lambda)$, где $\chi(\lambda)$ — характеристическая функция для A_k , находим

$$\Phi[u] = \langle \langle \prod_{k=0}^m \chi \left(\int g(x-x_k) u(x) dx \right) \rangle_{x_k} \rangle_m.$$

Далее произведем усреднение по x_k . Оно сводится к интегрированию каждого сомножителя по x_k с весом V^{-1} по области V :

$$\begin{aligned} \Phi[u] &= \left\langle V^{-1} \int_V \chi \left(\int g(x-x_1) u(x) dx \right) dx_1 \dots \right. \\ &\quad \dots V^{-1} \int_V \chi \left(\int g(x-x_m) u(x) dx \right) dx_m \rangle_m = \\ &= \left\langle \left[V^{-1} \int_V \chi \left(\int g(x-x') u(x) dx \right) dx' \right]^m \right\rangle_m. \end{aligned}$$

Обозначим здесь выражение в квадратных скобках через a . Последнее усреднение (по распределению Пуассона для m) дает

$$\langle a^m \rangle_m = \sum_{m=0}^{\infty} P(m) a^m = e^{-\bar{m}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\bar{m})^m}{m!} a^m = e^{-\bar{m}} e^{\bar{m}a} = \exp\{\bar{m}(a-1)\}.$$

Таким образом, получаем

$$\Phi[u] = \exp \left\{ \bar{m} \left[V^{-1} \int_V \chi \left(\int g(x-x') u(x) dx' \right) dx' - 1 \right] \right\},$$

что, в силу тождества

$$1 = V^{-1} \int_V 1 \cdot dx',$$

можно записать в виде

$$\Phi[u] = \exp \left\{ \frac{\bar{m}}{V} \int_V \left[\chi \left(\int g(x-x') u(x) dx' \right) - 1 \right] dx' \right\}.$$

Вводя $v = \bar{m}/V$ — среднее число случайных точек в единице объема, приходим к формуле (7.22).

19. Исходя из формулы (7.22), получить кумулятивные функции пуассонского случайного поля.

Решение. Имеем

$$\Theta[u] = \ln \Phi[u] = v \int \left[\chi \left(\int g(x-x') u(x) dx' \right) - 1 \right] dx'.$$

Подстановка разложения характеристической функции

$$\chi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} \langle A^k \rangle$$

дает

$$\Theta[u] = v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \langle A^k \rangle \int \left[\int g(x-x') u(x) dx' \right]^k dx'.$$

Запишем k -ю степень интеграла в виде k -кратного интеграла и изменим порядок интегрирования по x и x_l ($l=1, 2, \dots, k$):

$$\begin{aligned} \Theta[u] &= v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \langle A^k \rangle \int dx' \int dx_1 \dots \int dx_k g(x_1-x') \dots g(x_k-x') u(x_1) \dots u(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int u(x_1) \dots u(x_k) dx_1 \dots dx_k \left\{ v \langle A^k \rangle \int dx' g(x_1-x') \dots g(x_k-x') \right\} \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с (7.15), получаем, что

$$\psi_k(x_1, \dots, x_k) = v \langle A^k \rangle \int g(x_1-x') \dots g(x_k-x') dx'.$$

20. Показать, что если A имеет гауссово распределение вероятностей и $\bar{A}=0$, то при $v \rightarrow \infty$, $\bar{A}^2 \rightarrow 0$ и $v\bar{A}^2 = \text{const}$ пуассоновское случайное поле стремится к гауссову. Показать, что аналогичный результат можно получить, если считать, что A имеет плотность вероятностей $w(A) = (2A_0)^{-1} \times \exp\{-|A|/A_0\}$, т. е. нормальность распределения вероятностей для амплитуд несущественна.

Указание. Воспользоваться формулой (7.23) для кумулянтов пуассоновского случайного поля.

21. Исходя из (7.27), получить формулу для вычисления среднего значения от произведения пуассоновского случайного поля $\xi(x)$ на функционал $R[\xi]$.

Решение. Согласно (7.22)

$$\Theta[u] = v \int \left[\chi \left(\int g(x'' - x') u(x'') dx'' \right) - 1 \right] dx'.$$

Действуя на это равенство оператором $\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(x)}$, найдем

$$\Omega[x, u] = \frac{v}{i} \int dx' \chi' \left(\int g(x'' - x') u(x'') dx'' \right) g(x - x').$$

Но

$$\chi(\lambda) = \int e^{i\lambda A} w(A) dA, \quad \frac{1}{i} \chi'(\lambda) = \int e^{i\lambda A} w(A) A dA.$$

Полагая $\lambda = \frac{1}{i} \int dx'' g(x'' - x') \frac{\delta}{\delta \xi(x'')}$, получаем

$$\Omega \left[x, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi} \right] = v \int dx' g(x - x') \int w(A) A \exp \left\{ A \int dx'' g(x'' - x') \frac{\delta}{\delta \xi(x'')} \right\} dA.$$

В результате формула (7.27), с учетом операторной записи функционального ряда Тейлора (7.10), принимает вид

$$\langle \xi(x) R[\xi] \rangle = v \int g(x - x') dx' \int w(A) A \langle R[\xi(t) + Ag(\tilde{x} - x')] \rangle dA.$$

22. Пусть $X_i(x, t)$ —детерминированные функции, $f_i(x, t)$ —случайные гауссова функции ($n+1$) переменных (x, t) , причем

$$\langle f_i \rangle = 0, \quad \langle f_i(x, t) f_k(x', t') \rangle = 2F_{ik}(x, x', t, t') \delta(t - t'). \quad (1)$$

Пусть функции $\xi_i(t)$ подчинены системе динамических уравнений

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = X_i(\xi_i(t), t) + f_i(\xi_i(t), t) \quad (2)$$

с начальным условием $\xi_i(0) = \xi_i^0$.

Вывести дифференциальное уравнение для плотности вероятностей $w(x, t) = \langle \delta(\xi_i(t) - x) \rangle$ решения уравнений (2).

Решение. Продифференцируем $w(x, t)$ по t :

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \delta(\xi_i(t) - x) \right\rangle = \left\langle - \frac{\partial \delta(\xi_i(t) - x)}{\partial x_i} \frac{d\xi_i(t)}{dt} \right\rangle,$$

и подставим сюда $d\xi_i(t)/dt$ из уравнений (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} &= - \left\langle \frac{\partial \delta(\xi_i(t) - x)}{\partial x_i} [X_i(\xi_i(t), t) + f_i(\xi_i(t), t)] \right\rangle = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta(\xi_i(t) - x) [X_i(\xi_i(t), t) + f_i(\xi_i(t), t)] \rangle. \end{aligned}$$

Последнее выражение — результат вынесения $\frac{\partial}{\partial x_i}$ [за скобку и за знак среднего, поскольку единственный сомножитель, зависящий от x , — это дельта-функция. Используя равенство

$$\delta(\xi(t) - x) F(\xi(t)) = \delta(\xi(t) - x) F(x),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta(\xi(t) - x) [X_i(x, t) + f_i(x, t)] \rangle = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} [X_i(x, t) \langle \delta(\xi(t) - x) \rangle + \langle f_i(x, t) \delta(\xi(t) - x) \rangle], \end{aligned}$$

где мы вынесли за знак среднего неслучайный множитель $X_i(x, t)$. Так как $\langle \delta(\xi(t) - x) \rangle = \omega(x, t)$, получаем уравнение

$$\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [X_i(x, t) \omega(x, t)] = -\frac{\partial Q_i}{\partial x_i}, \quad (3)$$

где

$$Q_i(x, t) = \langle f_i(x, t) \delta(\xi(t) - x) \rangle. \quad (4)$$

Уравнение (3) не является замкнутым, так как кроме искомой функции ω в него входят еще неизвестные функции Q_i . Дальнейшая задача состоит в том, чтобы выразить Q_i через ω . Используем для этого формулу Фурье-Новикова (7.33), которая в нашем случае с учетом (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle f_i(x, t) R[f] \rangle &= \langle f_i(x, t) \rangle \langle R \rangle + \\ &+ \int dx' \int dt' \langle \tilde{f}_i(x, t) \tilde{f}_k(x', t') \rangle \left\langle \frac{\delta R[f]}{\delta f_k(x', t')} \right\rangle = \\ &= 2 \int dx' \int dt' F_{ik}(x, x', t) \delta(t - t') \left\langle \frac{\delta R[f]}{\delta f_k(x', t')} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Для того чтобы получить $Q_i(x, t)$, надо, согласно (4), положить $R[f] = \delta(\xi(t) - x)$. Это вполне законное равенство, поскольку $\xi(t)$, будучи решением системы уравнений (2), является функционалом от f_i .

Чтобы найти $\langle \delta R / \delta f_k \rangle$, обратимся снова к уравнениям (2). Проинтегрировав их по t , находим

$$\xi_i(t) = \xi_i^0 + \int_0^t [X_i(\xi(\tau), \tau) + f_i(\xi(\tau), \tau)] d\tau. \quad (6)$$

Отсюда видно, что $\xi_i(t)$ зависит от значений $f_k(\tau)$, принимаемых только на интервале $0 \leq \tau \leq t$. Поэтому

$$\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_k(t')} = 0, \text{ если } t' < 0 \text{ или } t' > t. \quad (7)$$

Формула (7) показывает, что решения системы уравнений (2) удовлетворяют принципу динамической причинности. Запишем (6) в виде

$$\xi_i(t) = \xi_i^0 + \int_0^t dt \int dx \delta(\xi(\tau) - x) [X_i(x, \tau) + f_i(x, \tau)]$$

и применим к этим выражениям оператор $\delta/\delta f_j(x', t')$, где $0 < t' < t$:

$$\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_j(x', t')} = \int_0^t d\tau \int dx \left\{ -\frac{\partial \delta(\xi(\tau) - x)}{\partial x_k} \frac{\delta \xi_k(\tau)}{\delta f_j(x', t')} [X_i(x, \tau) + f_i(x, \tau)] + \right. \\ \left. + \delta(\xi(\tau) - x) \frac{\delta f_i(x, \tau)}{\delta f_j(x', t')} \right\}.$$

Первое слагаемое в фигурной скобке проинтегрируем по частям. Во втором же слагаемом учтем, что, согласно (7.32),

$$\frac{\partial f_i(x, \tau)}{\partial f_j(x', t')} = \delta_{ij} \delta(x - x') \delta(\tau - t'),$$

и используем при интегрировании наличие этих дельта-функций. В результате

$$\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_j(x', t')} = \delta_{ij} \delta(\xi(t') - x') + \\ + \int_0^t d\tau \int dx \delta(\xi(\tau) - x) \frac{\delta \xi_k(\tau)}{\delta f_j(x', t')} \frac{\partial}{\partial x_k} [X_i(x, \tau) + f_i(x, \tau)].$$

Но, в силу условия причинности (7), $\frac{\delta \xi_k(\tau)}{\delta f_j(x', t')} = 0$ при $\tau < t'$, что позволяет заменить нижний предел интеграла по τ на t' :

$$\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_j(x', t')} = \delta_{ij} \delta(\xi(t') - x') + \int_{t'}^t d\tau \dots$$

Тогда переход к пределу при $t' \rightarrow t$ обращает интеграл в нуль и мы получаем точную формулу

$$\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_j(x', t')} = \delta_{ij} \delta(\xi(t) - x'), \quad (8)$$

являющуюся следствием динамических уравнений (2).

Вернемся к формуле (5) для Q_i . Так как при $t' > t$ в силу (7) имеем $(\delta R / \delta f_k) = 0$, интегрирование по t' в (5) происходит в пределах $(0, t)$. При выполнении интегрирования по t' следует учесть, что $\int_0^t \delta(t - t') dt' = 1$, поскольку фигурирующая здесь дельта-функция предполагается пределом четной корреляционной функции. Поэтому

$$Q_i(x, t) = \int F_{ik}(x, x'; t) \left\langle \frac{\delta R[f]}{\delta f_k(x', t)} \right\rangle dx'. \quad (9)$$

Так как $R[f] = \delta(\xi(t) - x)$, имеем

$$\frac{\delta R[f]}{\delta f_k(x', t)} = \frac{\delta}{\delta f_k(x', t)} \delta(\xi(t) - x) = -\frac{\partial \delta(\xi(t) - x)}{\partial x_l} \frac{\delta \xi_l(t)}{\delta f_k(x', t)},$$

или, в силу (8),

$$\begin{aligned} \frac{\delta R[f]}{\delta f_k(x', t)} &= -\delta_{lk}\delta(\xi(t) - x') \frac{\partial \delta(\xi(t) - x)}{\partial x_l} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} [\delta(\xi(t) - x') \delta(\xi(t) - x)] = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\delta(x - x') \delta(\xi(t) - x)]. \end{aligned}$$

Усредняя это равенство, получаем формулу

$$\left\langle \frac{\delta R[f]}{\delta f_k(x', t)} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\delta(x - x') w(x, t)],$$

с учетом которой выражение (9) принимает вид

$$Q_i(x, t) = - \int F_{ik}(x, x', t) \frac{\partial}{\partial x_k} [w(x, t) \delta(x - x')] dx'.$$

Записывая интегrand в виде

$$\begin{aligned} -F_{ik}(x, x', t) \frac{\partial}{\partial x_k} [w(x, t) \delta(x - x')] &= \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} [F_{ik}(x, x', t) w(x, t) \delta(x - x')] + \frac{\partial F_{ik}(x, x', t)}{\partial x_k} w(x, t) \delta(x - x'), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} Q_i(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \int F_{ik}(x, x', t) w(x, t) \delta(x - x') dx' + \\ &\quad + \int \frac{\partial F_{ik}(x, x', t)}{\partial x_k} w(x, t) \delta(x - x') dx' = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} [F_{ik}(x, x, t) w(x, t)] + \left[\frac{\partial F_{ik}(x, x', t)}{\partial x_k} \right]_{x'=x} w(x, t). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $Q_i(x, t)$ выражена через искомую плотность вероятностей $w(x, t)$, после чего (3) становится замкнутым уравнением:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial A_i(x, t) w}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F_{ik}(x, x, t) w}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (10)$$

где введено обозначение

$$A_i(x, t) = X_i(x, t) + \left[\frac{\partial F_{ik}(x, x', t)}{\partial x_k} \right]_{x'=x}.$$

Уравнение (10) представляет собой уравнение Эйнштейна — Фоккера, соответствующее динамической системе (2). В ч. I, § 36 оно было приведено без вывода, причем множители при $\delta(t - t')$ в корреляционной матрице воздействий $f_i(x, t)$ были обозначены через $C_{ik}(x, x', t) = 2F_{ik}(x, x', t)$.

Глава II

ИЗЛУЧЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

§ 8. Основные типы статистических волновых задач

Среди разнообразных случайных полей, с которыми имеет дело статистическая радиофизика, волновые поля занимают центральное место. Мы тоже сосредоточим внимание на волновых (в первую очередь электромагнитных) полях и ограничимся при этом только линейными и неквантовыми задачами¹⁾. Весьма широкий класс таких задач можно сформулировать следующим образом.

Пусть распространение волн той или иной физической природы (электромагнитных, упругих, поверхностных и т. д.) описывается линейным пространственно-временным оператором \hat{L} (обычно дифференциальным, реже — интегро-дифференциальным), так что волновое поле u удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}u = q, \quad (8.1)$$

где функция $q(t, r)$ описывает источники волн. Поля u и q могут быть и многокомпонентными (в частности, векторными), и тогда \hat{L} — операторная матрица (в частности, тензор). Во многих задачах пространственная область, в которой рассматривается поле u , выделенная некоторой поверхностью S_0 , не содержит источ-

1) Укажем некоторые обзоры и монографии по нелинейным волновым задачам и по квантовой статистике излучения. Статистическим явлениям в *нелинейной оптике* посвящены книга [1] и обзор [2]. Обширные исследования ведутся по теории *слабой турбулентности* — явлению, которое происходит во многих ситуациях, в том числе в случае волн в плазме [3, 4], на поверхности жидкости [4, 5], в активных распределенных системах и т. д. Статистические вопросы *нелинейной акустики* рассмотрены в книге [45]. Вопросы *квантовых флуктуаций* электромагнитного поля, ставшие особенно актуальными в связи с развитием лазерной техники, освещены в работах [6—10].

ников ($q = 0$), а задано первичное волновое поле u_0 , приходящее в эту область извне. Тогда уравнение (8.1) однородно:

$$\hat{L}u = 0, \quad (8.2)$$

но на S_0 заданы значения первичного поля (или его производных), например:

$$v = u_0(t, r) |_{r \in S_0}. \quad (8.3)$$

(Обычно в этом случае говорят, что на S_0 заданы «виртуальные» источники поля.) Искомым является здесь рассеянное или дифракционное поле, т. е. это задачи теории дифракции.

При наличии внутри поверхности S_0 границ раздела между разными средами или телами (поверхности раздела S) поле и должно удовлетворять еще определенным *граничным условиям*. Если поверхность S_0 не замкнута или же охватывает все пространство, так что волны от реальных источников, расположенных в конечной области, могут уходить в бесконечность, то должны также выполняться известные *условия излучения* (на достаточно больших расстояниях от источников должны существовать только убегающие волны).

В задачах прикладного характера часто представляет интерес *измерение* излученного или дифракционного поля — для получения информации об источниках поля, о рассеивающих телах или о среде, в которой распространяются волны. Тогда в описанную схему может быть включен еще *приемник излучения*¹⁾, а также разного рода *помехи* как внешнего (по отношению к приемнику), так и внутреннего происхождения. Отклик приемника w будет зависеть и от измеряемого поля u , и от помех ξ :

$$w = \hat{w}(u, \xi), \quad (8.4)$$

где \hat{w} — в общем случае нелинейный оператор.

Все, что было сказано в ч. I, § 33 об обыкновенных стохастических дифференциальных уравнениях, теперь, когда мы рассматриваем случайные поля, переносится на уравнения в частных производных. Статистические волновые задачи ставятся *теми же уравнениями и условиями*, что и динамические, но теперь это будут *стохастические* уравнения и условия, т. е. уравнения и условия для *отдельных реализаций случайного поля* u . Другими словами, фигурирующие в задаче параметры, функции и операторы теперь *случайны* (все или их часть) и, соответственно, заданы своими распределениями вероятностей.

¹⁾ Под приемником подразумевается все измерительное устройство в целом, например радиоантenna вместе с усилительным трактом и регистрирующим устройством или фотодетектор с измерительными приборами и т. п.

Поэтому гораздо большее разнообразие возможностей для пространственно-временных полей (по сравнению с процессами во времени) в равной мере затрагивает как динамические, так и статистические задачи.

В соответствии с описанной постановкой динамической волновой задачи случайными могут быть

1) *источники поля* (реальные или виртуальные, так что можно различать заданную «статистику источников» q и «статистику первичного поля» v);

2) *свойства среды* (задана «статистика среды», а значит, оператора \hat{L});

3) *форма и положение границ раздела S* (задана «статистика границ»);

4) *условия приема и регистрации волн* (заданы «статистика приемника» — оператора $\hat{\omega}$ и «статистика помех» ξ).

К этим четырем основным статистическим схемам, которые мы назовем первичными, фактически сводится постановка подавляющего большинства задач статистической волновой теории. Конечно, возможны задачи и смешанного типа, например о тепловом излучении в случайно-неоднородной среде [11], но пока таких задач рассмотрено немного (краткий их обзор приведен в [12]).

Если бы мы располагали *точным решением динамической задачи*, например некоторым интегральным представлением исходного поля и в виде

$$u = \hat{G}q, \quad (8.5)$$

где $\hat{G}q = \hat{L}^{-1}q$ — решение неоднородного уравнения (8.1), записанное, скажем, через функцию Грина, учитывающую все граничные и другие условия, то вычисление моментов поля свелось бы к *усреднению произведений* вида $u(1)u(2)\dots u(n)$ по совместному распределению всех фигурирующих в задаче случайных параметров и функций, характеризующих статистику источников, среды, границ раздела и т. д. Но в реальных ситуациях этот идеал осуществляется не часто, например, в задачах о возбуждении полей случайными источниками, которые рассматриваются в данной главе. Чаще же всего мы не умеем находить точное решение при любых детерминированных функциях и, тем самым, при произвольных реализациях всех случайных величин и функций, в силу чего приходится уже на этапе решения динамической задачи обращаться к разного рода *приближенным методам*. Эти разнообразные методы и приемы приурочены к конкретным особенностям задачи.

Флуктуации случайных параметров и функций могут быть (в каких-то характерных масштабах) большими и малыми, плав-

ными, медленными и, наоборот, резкими, быстрыми; корреляция может быть сильной, «далекой», или же слабой, «короткой», и т. п. Эти различия требуют использования разных приближенных подходов и приводят к многочисленным вторичным статистическим схемам, связанным уже с теми или иными приближенными методами решения.

Следует заметить, что во многих случаях, в особенности когда нас интересуют только моменты поля, этап отыскания динамического решения (для последующего вычисления моментов) опускается и речь идет о выводе уравнений и условий для самих моментов (исходя из уравнений и условий для поля u). Однако и в такой постановке практически нельзя обойтись без максимально возможного упрощения исходных уравнений для u , заранее учитывая особенности флуктуаций и характер детерминированных функций.

Выделенные выше четыре первичные статистические схемы отражают лишь фактически часто встречающееся разделение параметров и функций, входящих в условия задачи, на детерминированные и случайные. Остановимся коротко на этих схемах и укажем некоторые примеры относящихся к ним задач.

В схеме 1), если присутствуют реальные источники, мы имеем дело с *неоднородным* уравнением (8.1), в котором статистически задана *правая часть* q . Однородные граничные условия детерминированы. Задач такого типа много и в радиофизике, и в оптике, и в акустике. Они охватывают, в частности, статистическую теорию антенн и теорию тепловых флуктуаций в распределенных системах.

С виртуальными случайными источниками мы сталкиваемся, очевидно, во всех задачах о дифракции случайных (иначе — частично когерентных) полей¹⁾, когда однородное уравнение (8.2) и все необходимые условия детерминированы, за исключением случайного первичного поля u_0 . Такие задачи типичны прежде всего для оптики (формирование оптического и голографического изображений, действие интерферометров и др.), но с ними приходится иметь дело и в радиодиапазоне (в частности, в радиоастрономии), и при дифракции рентгеновских волн.

Задачи типа I) мы рассмотрим в данной главе, но тепловые флуктуации в распределенных системах, ввиду важности и специфики этого круга вопросов, мы выделяем в самостоятельную (следующую) главу.

Схема 2) охватывает проблему распространения и дифракции волн в *случайно-неоднородных* средах (*случайный* оператор \hat{L}). Эти

¹⁾ Применительно к волновым полям термины «случайный» и «частично когерентный» равнозначны.

вопросы представляют большой интерес для радиосвязи, лазерной связи, гидроакустики, радиоастрономии, диагностики плазмы и т. п., и им уделена поэтому половина данной части книги.

К схеме 3) относятся волновые задачи при наличии тел имеющих *случайную форму* или занимающих *случайное положение*. Речь может идти, в частности, о граничных поверхностях со множеством случайных неровностей (так называемые *шероховатые* или *статистически неровные* поверхности). Различные методы расчета рассеяния волн на таких поверхностях рассмотрены в гл. IX.

В задачах о телах, занимающих случайное положение в пространстве, речь может идти о рассеянии как на одном или немногих телах, так и на очень большой совокупности дискретных вкраплений (осадки, туман, аэрозоли и т. п.). Последняя весьма общая задача требует, вообще говоря, учета многократного рассеяния. Мы ограничимся ее рассмотрением лишь в приближении однократного рассеяния (§ 31).

Наконец, схема 4) охватывает многочисленные задачи приема и обработки информации о волновых полях при наличии помех. Если статистические свойства поля ψ , помех ξ и оператора \hat{w} , опи- сывающего приемник, известны, то, в соответствии с (8.4), в принципе можно рассчитать статистические характеристики отклика приемника w .

Однако более важным и вместе с тем более сложным является другой вопрос — о выборе оптимального (в каком-то определенном смысле) способа приема при наличии помех, т. е. вопрос о нахождении *оптимального оператора* \hat{w} . Примером задачи такого типа может служить проблема восстановления формы объекта по его изображению, представляющая первостепенный интерес для оптики, радиоастрономии, радиолокации, гидроакустики и т. д. Эта проблема оптимального приема случайных полей требует привлечения идей и методов теории информации — возможно, даже в большей степени, чем вопросы обработки случайных процессов. Но, как и в ч. I, мы не будем углубляться в эти проблемы, поскольку они ближе по своему характеру к «радиоматематике», а не к радиофизике. Ряд вопросов оптимального приема и пространственной фильтрации рассматривается в работах [13—20].

§ 9. Случайные волны в неограниченной однородной среде

Задачи возбуждения полей случайными источниками (реальными или виртуальными), отнесенные нами к статистической схеме 1), принадлежат к тем весьма немногочисленным проблемам статистической волновой теории, которые допускают, п-

существу, универсальный подход. Это обусловлено тем, что поле u связано с источниками линейным детерминированным оператором, который, в принципе, может быть обращен.

При возбуждении поля реальными источниками в силу (8.5) любые моменты поля могут быть получены усреднением произведений вида $u(1)u(2)\dots u(n)$ лишь по ансамблю случайных источников q . В частности, для двух низших моментов имеем

$$\langle u \rangle = \hat{G} \langle q \rangle, \quad \langle u_1 u_2^* \rangle = \hat{G}_1 \hat{G}_2^* \langle q_1 q_2^* \rangle. \quad (9.1)$$

В случае *виртуальных* источников, когда в соответствии с (8.3) заданы значения v первичного поля (или его производных) на некоторой поверхности S_0 , а искомое поле выражается через v при помощи линейного детерминированного оператора $\hat{\mathcal{P}}$:

$$u = \hat{\mathcal{P}} v, \quad (9.2)$$

искомые моменты u связаны с известными моментами v линейными соотношениями, подобными (9.1):

$$\langle u \rangle = \hat{\mathcal{P}} \langle v \rangle, \quad \langle u_1 u_2^* \rangle = \hat{\mathcal{P}}_1 \hat{\mathcal{P}}_2^* \langle v_1 v_2^* \rangle, \dots \quad (9.3)$$

Соотношения вида (9.1) или (9.3), в принципе, дают полное решение статистических задач схемы 1), поскольку совокупность всех статистических моментов однозначно определяет всю совокупность n -мерных плотностей вероятностей случайного поля. Однако эта формально простая процедура фактически реализуема крайне редко. Удобные для физического анализа выражения для моментов поля u в большинстве случаев удается получать только для низших моментов и лишь при использовании тех или иных приближений для обратных операторов \hat{G} или $\hat{\mathcal{P}}$. Получение же плотности вероятностей поля осуществимо обычно лишь при условиях, когда применима центральная предельная теорема.

С необходимостью прибегать к различным приближениям мы сталкиваемся даже в простейшем 'случае скалярного волнового поля в однородной безграничной среде, когда мы располагаем сравнительно простыми точными выражениями для операторов \hat{G} и $\hat{\mathcal{P}}$. Приведем относящиеся к этому случаю и необходимые для дальнейшего динамические соотношения и выясним на примере скалярного поля ряд свойств случайных волновых полей. В последующих параграфах мы обратимся к конкретным радиофизическим задачам, относящимся к схеме 1).

В однородной и стационарной среде без дисперсии и поглощения скалярное поле u удовлетворяет волновому уравнению

$$\hat{L}u = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(t, r) = q(t, r), \quad (9.4)$$

где c — скорость распространения волн, а q — поле случайных источников. Решение уравнения (9.4), удовлетворяющее условиям излучения на бесконечности, имеет, как известно, вид

$$u(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{q(t-R/c, \mathbf{r}')}{R} d^3 r', \quad (9.5)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Это частный случай линейной связи (8.5) поля с источниками.

Во многих задачах удобнее рассматривать не само случайное поле $u(t, \mathbf{r})$, а его спектральную амплитуду

$$u(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} dt, \quad (9.6)$$

которая, в силу (9.4), удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(\omega, \mathbf{r}) + k^2 u(\omega, \mathbf{r}) = q(\omega, \mathbf{r}), \quad k = \omega/c, \quad (9.7)$$

где $q(\omega, \mathbf{r})$ — спектральная амплитуда $q(t, \mathbf{r})$. Для спектральных амплитуд решение (9.5) принимает вид

$$u(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{q(\omega, \mathbf{r}') e^{ikR}}{R} d^3 r' \equiv \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') q(\omega, \mathbf{r}') d^3 r'. \quad (9.8)$$

Здесь введена функция Грина для неограниченной однородной среды

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (9.9)$$

удовлетворяющая уравнению

$$\Delta G + k^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

При помощи (9.8) легко записать выражения для всех моментов поля.

Если источники сосредоточены в ограниченной области, скажем в пределах сферы радиуса a , а нас интересует поле u в дальней (фраунгоферовой) зоне распределения источников, то формулы (9.5) и (9.8) упрощаются, так как можно воспользоваться приближенным выражением функции Грина. Пусть начало координат помещено в центр области, занятой источниками. Тогда при $r \gg ka^2$ расстояние $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в формуле (9.9) можно приближенно заменить на $r - (\mathbf{n}\mathbf{r}')$ в показателе экспоненты и на r в знаменателе, что и приводит к фраунгоферову приближению. В этом приближении (9.8) принимает вид

$$u(\omega, \mathbf{r}) \approx -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int q(\omega, \mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{n}\mathbf{r}'} d^3 r', \quad r \gg ka^2, \quad (9.10)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ единичный вектор в направлении на точку наблюдения.

Приведем теперь динамические соотношения для того случая, когда заданы *виртуальные* источники. Будем исходить из формулы Грина, которая связывает спектральную амплитуду поля $u(\omega, \mathbf{r})$ внутри области, ограниченной поверхностью S_0 , со спектральной амплитудой граничного поля $v(\omega, \mathbf{r}')$:

$$u(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint \left[v(\omega, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial v(\omega, \mathbf{r}')}{\partial N} \right] dS_0. \quad (9.11)$$

Здесь $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — расстояние от точки наблюдения до точки \mathbf{r}' , лежащей на поверхности S_0 , по которой ведется интегрирование, а $\partial/\partial N$ означает дифференцирование в направлении внешней нормали \mathbf{N} к S_0 . Граничные значения $v(\omega, \mathbf{r}')$ и $\partial v(\omega, \mathbf{r}')/\partial N$, как известно, должны быть заданы математически непротиворечивым образом. Поэтому двучленная формула Грина (9.11) может быть использована лишь в тех случаях, когда из каких-либо дополнительных соображений вытекает связь (точная или приближенная) между граничным полем v и его нормальной производной $\partial v/\partial N$.

Особым является случай, когда поверхностью S_0 служит плоскость, замкнутая полусферой бесконечно большого радиуса. В этом случае, которым мы и ограничимся, двучленная формула (9.11) сводится к одночленной.

Если на плоскости $z=0$ задано само поле $v(\omega, \rho) \equiv u(\omega, \mathbf{r})|_{z=0}$, где $\rho = (x, y)$ — двумерный вектор, то интеграл по бесконечно удаленной сфере обращается в нуль, и тогда в полупространстве $z > 0$

$$u(\omega, \mathbf{r}) = u(\omega, \rho, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega, \rho') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) d^2\rho', \quad (9.12)$$

$$R = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + z^2}.$$

Если же на плоскости $z=0$ задана нормальная производная $\partial v(\omega, \rho)/\partial z = \partial u(\omega, \mathbf{r})/\partial z|_{z=0}$, то

$$u(\omega, \rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial v(\omega, \rho')}{\partial z} d^2\rho'. \quad (9.13)$$

Таким образом, в случае плоской границы $z=0$ достаточно задания на S_0 либо самого поля u , либо его нормальной производной $\partial u/\partial z$.

Другой метод расчета полей в полупространстве $z > 0$ восходит к Релею и основан на разложении полей по плоским волнам. Представим граничное поле $v(\omega, \rho)$ двумерным

интегралом Фурье:

$$v(\omega, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega, \kappa) \exp(i\kappa\rho) d^2\kappa, \quad (9.14)$$

где $\kappa = (\kappa_x, \kappa_y)$ — двумерный волновой вектор, а $v(\omega, \kappa)$ — ожидаемая амплитуда граничного поля, связанная с $v(\omega, \rho)$ обратным преобразованием Фурье:

$$v(\omega, \kappa) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega, \rho) \exp(-i\kappa\rho) d^2\rho.$$

В полупространстве $z > 0$ каждая пространственная гармоника граничного поля $v(\omega, \kappa) \exp(i\kappa\rho)$ порождает плоскую собственную волну $v(\omega, \kappa) \exp(i\kappa\rho + ipz)$ (напомним, что множитель $e^{-i\omega t}$ опущен), которая удовлетворяет волновому уравнению при условии, что

$$\kappa^2 + p^2 = \omega^2/c^2 \equiv k^2.$$

Таким образом, в случае волнового уравнения для однородной и изотропной среды дисперсионная поверхность (см. § 6) представляет собой в четырехмерном пространстве (ω, κ) трехмерный конус с осью по ω и вершиной в начале координат. В соответствии с этим дисперсионным уравнением в свободной от источников области $z > 0$ возможны при заданном κ собственные волны двух типов — в зависимости от того, вещественна или мнимая z -компоненты p волнового вектора κ :

$$p = \sqrt{k^2 - \kappa^2} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \kappa^2} & \kappa \leq k = \omega/c, \\ i\sqrt{|k^2 - \kappa^2|} & \kappa > k. \end{cases} \quad (9.15)$$

При $\kappa < k$ компонента p вещественна и мы имеем *бегущие* волны. При $\kappa > k$, когда период осцилляций на границе $2\pi/\kappa$ меньше длины волны $\lambda = 2\pi/k$, соответствующей частоте ω , компонента p мима и получаются *неоднородные* волны. Они экспоненциально ослабевают с удалением от границы $z = 0$. Практически уже при $z \geq \lambda$ остаются только бегущие волны.

Результирующее волновое поле $u(\omega, r) = u(\omega, \rho, z)$, удовлетворяющее граничному условию $u(\omega, r)|_{z=0} = v(\omega, \rho)$, выражается суперпозицией плоских волн обоих типов:

$$u(\omega, \rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega, \kappa) \exp(i\kappa\rho + ipz) d^2\kappa. \quad (9.16)$$

Аналогичное представление поля нетрудно записать и в том случае, когда на плоскости $z = 0$ задана производная по нормали $\partial u / \partial z$.

Формула Грина (9.12) и разложение по плоским волнам (9.16), разумеется, эквивалентны друг другу. В дальнейшем мы будем пользоваться той из них, которая быстрее ведет к окончательному результату. Любая из них позволяет выразить моменты $u(\omega, \mathbf{r})$ через моменты $v(\omega, \rho)$.

При вычислении моментов поля при помощи приведенных выше формул часто приходится рассматривать те или иные частные случаи. Перечислим наиболее существенные из них. При $kz \gg 1$, т. е. в волновой зоне, для ядра в формуле (9.12) имеем

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikR}}{R} \approx \frac{kz}{2\pi i R^2} e^{ikR} \quad (kz \gg 1).$$

При выполнении неравенств $|\rho - \rho'| \ll z$ и $k|\rho - \rho'|^4 \ll z^3$ справедливо так называемое *френелевское приближение*, в котором $R = \sqrt{z^2 + (\rho - \rho')^2}$ заменяется на $z + (\rho - \rho')^2/2z$ в показателе экспоненты и на z в знаменателе предыдущей формулы; при этом формула Грина (9.12) принимает вид

$$u(\omega, \rho, z) = \frac{ke^{ikz}}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega, \rho') \exp\left(ik \frac{(\rho - \rho')^2}{2z}\right) d^2\rho'. \quad (9.17)$$

Наконец, в зоне *Фраунгофера*, $z \gg ka^2$, где a — радиус области, в которой граничное поле $v(\omega, \rho)$ отлично от нуля, имеем

$$u(\omega, \rho, z) = \frac{k \exp[ik(z + \rho^2/2z)]}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega, \rho') \exp\left[-ik \frac{(\rho - \rho')}{z}\right] d^2\rho'. \quad (9.18)$$

Обратимся теперь к некоторым свойствам моментов и спектров волновых полей. Статистические моменты волновых случайных полей часто называют *функциями когерентности*, так как соответствующие коэффициенты корреляции служат количественной мерой когерентности этих полей (ч. I, §§ 47 и 48). Термины «время когерентности», «длина когерентности», «степень когерентности» являются в отношении волновых полей синонимами «времени корреляции», «радиуса корреляции», «коэффициента корреляции». В связи с этим мы предпочитаем и в этой части книги говорить о *теории случайных волн*, а не о «теории когерентности», рассматривая последнюю просто как одно из приложений общей теории случайных полей. Однако мы не будем избегать и терминов «функция когерентности» или «степень когерентности», которые уже прочно вошли в физический обиход.

Смешанный момент волнового поля $u(t, \mathbf{r})$ порядка $m+n$ (функция когерентности порядка $m+n$) определяется соотношением вида (2.30) и вместо $B_{m,n}$ обычно обозначается $\Gamma_{m,n}$. Корреляционная теория случайных волн ограничивается рассмотрением

моментов лишь первого и второго порядков: *среднего поля* $\langle u \rangle$ (функции когерентности первого порядка $\Gamma_1 \equiv \langle u \rangle$) и двух *смешанных моментов второго порядка*, называемых первой и второй функциями когерентности второго порядка:

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,1}(1,2) &= \langle u(1) u^*(2) \rangle \equiv \Gamma(1,2), \\ \Gamma_{2,0}(1,2) &= \langle u(1) u(2) \rangle \equiv \tilde{\Gamma}(1,2).\end{aligned}\quad (9.19)$$

Последние связаны с первой и второй *функциями корреляции* поля формулами

$$\begin{aligned}\psi(1,2) &= \langle \tilde{u}(1) \tilde{u}^*(2) \rangle = \Gamma(1,2) - \langle u(1) \rangle \langle u^*(2) \rangle, \\ \tilde{\psi}(1,2) &= \langle \tilde{u}(1) \tilde{u}(2) \rangle = \tilde{\Gamma}(1,2) - \langle u(1) \rangle \langle u(2) \rangle\end{aligned}\quad (9.20)$$

(как обычно, здесь $\tilde{u} = u - \langle u \rangle$).

Для зависимости волновых полей от времени мы примем комплексное представление в виде аналитического сигнала¹⁾

$$u(t, r) = \int_0^\infty u(\omega, r) e^{-i\omega t} d\omega,\quad (9.21)$$

где спектральная амплитуда $u(\omega, r)$ тождественно равна нулю для отрицательных частот, а для $\omega \geq 0$ равна удвоенной спектральной плотности исходного вещественного поля $u_r(t, r) = \operatorname{Re} u(t, r)$.

Если поле $u(t, r)$ является как функция t аналитическим сигналом и *стационарно*, то среднее значение поля $\langle u \rangle$ и его второй смешанный момент $\tilde{\Gamma}$ равны нулю (ч. I, § 38).

Без предположения об аналитическом сигнале среднее значение стационарного поля может быть отличным от нуля и представляет собой некоторую функцию ~~только~~ от r , удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u(r) = 0$. Так как такие статистические детерминированные поля нас не интересуют, можно и в этом случае рассматривать только флуктуации $u = u - \bar{u}$, т. е. считать, что $\bar{u} = 0$. Что касается нестационарных и, в частности, монохроматических полей ($\sim e^{-i\omega t}$), то для них среднее поле и $\tilde{\Gamma}$, вообще говоря, отличны от нуля.

Энергетические величины (интенсивность, плотность энергии, плотность ее потока) квадратичны по полю, в силу чего их средние значения можно выразить через статистические моменты первого и второго порядков (ч. I, § 47 и задача 1).

¹⁾ Еще раз напомним, что при разложении в интеграл Фурье по t мы берем здесь и далее функцию $e^{-i\omega t}$, а не $e^{i\omega t}$, как в ч. I. Поэтому поле u как функция t аналитично теперь не в верхней, а в нижней полуплоскости комплексного времени t .

Из высших моментов наибольший интерес представляет момент четвертого порядка

$$\Gamma_{2,2}(1,2,3,4) = \langle u(1)u(2)u^*(3)u^*(4) \rangle, \quad (9.22)$$

через который выражается, в частности, корреляционная функция *флуктуаций интенсивности* комплексного поля $I=|u|^2$:

$$\Psi_I(1,2) = \langle \tilde{I}(1)\tilde{I}(2) \rangle = \Gamma_{2,2}(1,2;2,1) - \bar{I}(1)\bar{I}(2), \quad (9.23)$$

причем $\bar{I}(1) = \langle |u(1)|^2 \rangle = \Gamma(1,1)$. Если поле u нормально, то все высшие моменты выражаются через первый (\bar{u}) и вторые (Γ и $\bar{\Gamma}$) моменты. Функция корреляции интенсивности для этого случая приведена (в несколько иных обозначениях) в задаче 12 к гл. I.

Выражения для моментов поля мы получали выше, используя динамические решения для u . Как уже было отмечено, существует и другой способ нахождения моментов — из уравнений, которым подчиняются сами статистические моменты. В рассматриваемой задаче о возбуждении полей реальными источниками, которая в общем случае описывается уравнением (8.1) с детерминированным оператором \hat{L} и с детерминированными граничными условиями, уравнения для вторых моментов легко получить простым перемножением левых и правых частей (8.1), взятых в разных пространственно-временных точках. Так, второй момент $\Gamma(1,2) = \langle u(1)u^*(2) \rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}_1\hat{L}_2^*\Gamma(1,2) = \langle q(1)q^*(2) \rangle, \quad (9.24)$$

которое становится однородным в области, свободной от источников.

В рамках схемы 1), когда динамическое решение задачи для поля u известно, находить моменты из уравнений типа (9.24) обычно гораздо менее удобно, чем по формулам типа (9.1) или (9.3). Волновые уравнения для моментов представляют здесь интерес, пожалуй, лишь в том отношении, что из них очевидны *волновые свойства самих моментов* и, соответственно, можно говорить о распространении и дифракции этих моментов почти в том же смысле, что и для поля u ¹⁾. Одно из важных волновых свойств статистических моментов поля u состоит в том, что их значения на некоторой поверхности S_0 определяют поведение моментов во всем объеме, ограниченном поверхностью S_0 , подобно тому как это имеет место для самого поля.

1) Однако в тех случаях, когда мы не располагаем решением динамической задачи, уравнения для моментов, получаемые из уравнений для u , приобретают самостоятельную ценность (гл. VI—VIII).

Как уже было отмечено в § 6, в рассматриваемом случае волнового уравнения для однородной и стационарной среды дисперсионная гиперповерхность представляет собой конус $\kappa^2 = \omega^2/c^2 = k^2$ или $|\kappa| = k$. Поэтому спектральная плотность $G(\omega, \mathbf{k})$ в разложении Фурье корреляционной функции однородного и стационарного поля (6.3) содержит множитель $\delta(|\kappa| - k)$:

$$G(\omega, \kappa) = f(\omega, \mathbf{n}) \delta(|\kappa| - k), \quad (9.25)$$

где $f(\omega, \mathbf{n})$ — функция частоты ω и направления $\mathbf{n} = \kappa/\kappa$.

В коэффициенте при дельта-функции можно выделить множитель k^{-2} :

$$G(\omega, \kappa) = \mathcal{I}(\omega, \mathbf{n}) k^{-2} \delta(\kappa - k). \quad (9.26)$$

Величина $\mathcal{I}(\omega, \mathbf{n})$ носит название *лучевой интенсивности* или *яркости* и играет большую роль в теории переноса излучения (гл. VIII). Связь этой величины с функцией корреляции можно установить, подставив (9.26) в (6.3) и положив $d^3\kappa = \kappa^2 d\kappa d\Omega(\mathbf{n})$ ($d\Omega(\mathbf{n})$ — элемент телесного угла). Выполнив интегрирование по κ , получаем искомое соотношение ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $t = t_1 - t_2$):

$$\begin{aligned} \Psi(t, \mathbf{r}) &= \iiint \mathcal{I}(\omega, \mathbf{n}) k^{-2} \delta(\kappa - k) \exp[i(\kappa \mathbf{r} - \omega t)] \kappa^2 d\kappa d\Omega(\mathbf{n}) d\omega = \\ &= \int_0^\infty d\omega \oint \mathcal{I}(\omega, \mathbf{n}) \exp[i(k \mathbf{r} - \omega t)] d\Omega(\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (9.27)$$

При $\mathbf{r} = 0$ и $t = 0$ эта формула дает дисперсию поля

$$\sigma_u^2 = \langle |\tilde{u}|^2 \rangle = \Psi(0, 0) = \int_0^\infty d\omega \oint \mathcal{I}(\omega, \mathbf{n}) d\Omega(\mathbf{n}). \quad (9.28)$$

Из последнего выражения видно, что лучевая интенсивность $\mathcal{I}(\omega, \mathbf{n})$ описывает распределение энергии по (положительным) частотам и по углам, т. е. представляет собой *частотно-угловой спектр* поля. В частности, изотропному полю отвечает лучевая интенсивность, не зависящая от углов (общее выражение для функции корреляции в этом случае дано в задаче 2). Заметим, что угловым спектром часто называют также двумерное разложение функции корреляции в интеграл Фурье:

$$F(\omega; \kappa_\perp, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega; \rho, z) \exp(-i\kappa_\perp \rho) d^2\rho, \quad \kappa_\perp = (\kappa_x, \kappa_y). \quad (9.29)$$

Как показано в задаче 4, при малой ширине углового спектра величина $F(\omega; \kappa_\perp, z)$ пропорциональна лучевой интенсивности (при $z = 0$ эти величины отличаются лишь множителем k^{-2}).

При помощи (9.27) можно оценить минимальный радиус корреляции l_a свободного волнового поля. Пусть ω_{\max} — максимальная частота волн, еще заметно представленных в спектре $\mathcal{I}(\omega, n)$. В силу (9.27) радиус корреляции поля l_a можно оценить из условия $k_{\max}(n, r) \geq 1$, что приводит к оценке

$$l_a \geq \frac{1}{k_{\max}} \sim \lambda_{\min}.$$

Иными словами, радиус корреляции случайного волнового поля не может быть меньше минимальной длины волны, имеющейся в спектре колебаний. Строго говоря, эта оценка относится к случаю изотропного поля, когда лучевая интенсивность не зависит от n . Оценки продольного и поперечного радиусов корреляции поля для случая, когда его лучевая интенсивность сосредоточена в узком конусе, даны в задаче 3.

Описанные выше свойства статистических моментов и спектральных плотностей характерны не только для скалярных, но и для векторных случайных полей. Мы не будем приводить здесь векторные аналоги рассмотренных выражений для полей и их моментов, поскольку в принципе они не выходят за рамки общих соотношений (9.1) и (9.3). Отметим только, что статистические характеристики поляризации плоских квазимохроматических волн мы уже рассмотрели в ч. I, § 49. Введенная там матрица поляризации характеризует статистическую связь разных компонент поля в одной и той же точке в один и тот же момент времени (см. также [13, 14, 21] и [22]). Общий вид корреляционной матрицы стационарного, однородного и изотропного поля приведен в задаче 6, а в задаче 5 указана связь энергетических характеристик поля с корреляционной матрицей поля и с матрицей лучевых интенсивностей.

§ 10. Дифракция плоской волны на безграничном хаотическом экране

Первичное поле на границе рассматриваемой области может флюктуировать как из-за флюктуаций в его источниках (находящихся вне данной области), так и в результате случайных возмущений, внесенных в первоначально детерминированную первичную волну при ее распространении. Примером может служить прохождение этой волны через случайно-неоднородную среду или слой такой среды. Если толщина этого слоя достаточно мала, то его можно рассматривать как бесконечно тонкий экран. Применимость общих методов расчета поля в области, на границе которой S_0 задано случайное поле (§ 9), конечно, не связана с тем, по каким причинам флюктуирует поле на границе. Существенно лишь то, что статистика этих флюктуаций известна.

Начнем с простейшей задачи о прохождении плоской монохроматической волны через плоский безграничный хаотический экран, следя в основном работе [23]¹⁾.

1. Основные соотношения. Пусть монохроматическая волна $u_n(\rho, z) e^{-i\omega t}$ падает на безграничный экран, расположенный в плоскости $z=0$. Экран пространственно модулирует падающую волну в соответствии со своей функцией пропускания $f(\rho)$ — комплексной функцией, модуль которой описывает амплитудную модуляцию, а аргумент — фазовую. Границное поле $v(\rho)$, т. е. поле непосредственно за экраном $z=0$, есть

$$v(\rho) = f(\rho) u_n(\rho, 0). \quad (10.1)$$

Для краткости мы опускаем множитель $e^{-i\omega t}$, а также аргумент ω в спектральных амплитудах.

Если падающая волна плоская и распространяется по нормали к экрану, то $u_n(\rho, z) = e^{ikz}$, так что

$$v(\rho) = f(\rho) \quad (10.2)$$

— поле на граничной плоскости $z=0$ просто равно функции пропускания, и, соответственно, статистика $v(\rho)$ в случае хаотического экрана та же, что и $f(\rho)$. Формулы (9.12) и (9.16) позволяют связать статистические моменты поля $u(r) = u(\rho, z)$ за экраном (т. е. в области $z > 0$) с моментами граничного поля $v(\rho)$. Найдем первый и второй моменты поля $u(r)$ в простейшем случае статистически однородного хаотического экрана, для которого

$$\langle f(\rho) \rangle = f_0 = \text{const}, \quad \sigma_f^2 = \langle |\tilde{f}|^2 \rangle = \langle |f - f_0|^2 \rangle = \text{const},$$

а корреляционная функция зависит только от разностей координат:

$$\psi_f(\rho', \rho'') = \langle f(\rho') f^*(\rho'') \rangle = \psi_f(\rho' - \rho'').$$

В силу (10.2) имеем

$$\langle v \rangle = v_0 = f_0, \quad \sigma_v^2 = \sigma_f^2, \quad \psi_v(\rho' - \rho'') = \psi_f(\rho' - \rho'').$$

Для среднего поля за экраном по формуле (9.12) находим

$$\langle u(\rho, z) \rangle = -\frac{v_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikR}}{R} d^3 \rho'.$$

¹⁾ В этой работе суммированы результаты и предшествующих исследований [24—26], относящихся преимущественно к прохождению радиоволн через случайно-неоднородную ионосферу. Более полный список литературы по последнему вопросу содержится в обзоре [27].

Интеграл легко вычисляется и равен $-2\pi \exp(ikz)$. Таким образом, среднее поле за экраном — это плоская волна

$$\bar{u} = v_0 e^{ikz}, \quad (10.3)$$

амплитуда которой v_0 равна средней прозрачности f_0 .

Для нахождения функции корреляции воспользуемся выражением (9.16), из которого следует, что

$$\begin{aligned} \Psi_u(\rho_1, z_1; \rho_2, z_2) &= \langle \tilde{u}(\mathbf{r}_1) \tilde{u}^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa' d^2\kappa'' \langle \tilde{v}(\kappa') \tilde{v}^*(\kappa'') \rangle \exp(i\kappa' \rho_1 - i\kappa'' \rho_2 + ip' z_1 - ip'' z_2), \end{aligned} \quad (10.4)$$

где p' и p'' даются выражением (9.15) соответственно при $\kappa = \kappa'$ и $\kappa = \kappa''$. Но для однородного граничного поля

$$\langle \tilde{v}(\kappa') \tilde{v}^*(\kappa'') \rangle = F_v(\kappa') \delta(\kappa' - \kappa''), \quad (10.5)$$

где $F_v(\kappa)$ — двумерная спектральная плотность, через которую выражается корреляционная функция граничного поля:

$$\Psi_v(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} F_v(\kappa) \exp(i\kappa\rho) d^2\kappa. \quad (10.6)$$

Подставляя (10.5) в (10.4), находим

$$\Psi_u = \Psi_u(\rho_1 - \rho_2, z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F_v(\kappa) \exp[i\kappa(\rho_1 - \rho_2) + i(pz_1 - p^*z_2)] d^2\kappa. \quad (10.7)$$

Таким образом, поле $u(\rho, z)$ статистически однородно в плоскостях $z = \text{const}$, что является следствием однородности $v(\rho)$ в плоскости $z = 0$. Из сравнения (10.7) с двумерным спектральным представлением

$$\Psi_u(\rho_1 - \rho_2, z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F_u(\kappa, z_1, z_2) \exp[i\kappa(\rho_1 - \rho_2)] d^2\kappa \quad (10.8)$$

следует, что пространственная спектральная плотность есть

$$\begin{aligned} F_u(\kappa; z_1, z_2) &= F_v(\kappa) \exp[i(pz_1 - p^*z_2)] = \\ &= F_v(\kappa) \times \begin{cases} \exp[i\sqrt{k^2 - \kappa^2}(z_1 - z_2)], & \kappa^2 \leq k^2, \\ \exp[-i\sqrt{k^2 - \kappa^2}(z_1 + z_2)], & \kappa^2 > k^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Спектральные составляющие с $\kappa > k$ (неоднородности граничного поля $v(\rho)$ меньше длины волны) порождают в полупространстве $z > 0$ неоднородные волны, ослабевающие при удалении от экрана по экспоненциальному закону. Для точек наблюдения z_1

и z_2 , удаленных от экрана уже на несколько длин волн ($z_1, z_2 \gg \lambda$), приближенно

$$F_n(\kappa; z_1, z_2) \approx \begin{cases} F_v(\kappa) \exp[i\sqrt{k^2 - \kappa^2}(z_1 - z_2)], & \kappa^2 \leq k^2, \\ 0, & \kappa^2 > k^2. \end{cases} \quad (10.9)$$

Подставляя (10.9) в (10.8), получаем для корреляционной функции выражение

$$\Psi_n(\rho, \xi) = \int_{\kappa \leq k} F_v(\kappa) \exp[i\kappa\rho + i\sqrt{k^2 - \kappa^2}\xi] d^2\kappa, \quad (10.10)$$

где $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\xi = z_1 - z_2$. Из (10.10) видно, что при $z_1, z_2 \gg \lambda$ случайное поле $u(\rho, z)$ становится статистически однородным не только в поперечных плоскостях $z = \text{const}$, но и в продольном направлении z .

Используя формулу (10.10), рассмотрим частные случаи мелкомасштабных и крупномасштабных флуктуаций граничного поля $v(\rho)$.

В случае мелкомасштабных флуктуаций, когда радиус корреляции граничного поля l_v мал по сравнению с длиной волны λ , т. е. при $kl_v \ll 1$, можно принять, что спектральная плотность $F_v(\kappa)$ практически постоянна в круге $\kappa \leq k$ и приближенно равна $F_v(0) = F_0$. Тогда из (10.10) получаем

$$\Psi_n(\rho, \xi) = F_0 \int_{\kappa \leq k} \exp(i\kappa\rho + ip\xi) d^2\kappa, \quad kl_v \ll 1. \quad (10.11)$$

Поперечная функция корреляции, т. е. функция корреляции в плоскости $z = \text{const}$, перпендикулярной к направлению распространения, получается из (10.11) при $\xi = z_1 - z_2 = 0$:

$$\Psi_{\perp}(\rho) \equiv \Psi_n(\rho, 0) = F_0 \int_{\kappa \leq k} \exp(i\kappa\rho) d^2\kappa = 2\pi F_0 \frac{kJ_1(k\rho)}{\rho},$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка. При увеличении ρ отношение $J_1(k\rho)/\rho$ проходит в первый раз через нуль при $k\rho = 3,83$, т. е. при $\rho \approx 0,61\lambda$. Таким образом, уже на расстояниях в несколько λ от экрана поперечный радиус корреляции поля l_{\perp} — величина порядка длины волны, т. е. значительно больше радиуса корреляции l_v в плоскости $z = 0$: $l_{\perp} \sim \lambda \gg l_v$.

Из выражения для продольной функции корреляции

$$\Psi_{\parallel}(\xi) \equiv \Psi_n(0, \xi) = F_0 \int_{\kappa \leq k} e^{ip\xi} d^2\kappa = 2\pi F_0 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1 - e^{-ik\xi}}{\xi} \right)$$

следует, что продольный радиус корреляции l_{\parallel} тоже порядка длины волны: $l_{\parallel} \sim \lambda \gg l_v$. Таким образом, в случае мелкомасштабных флуктуаций на экране как поперечный, так и продоль-

ный радиусы корреляции поля при удалении от экрана увеличиваются и при $z \gg \lambda$ достигают значений порядка длины волны.

Вместе с тем происходит уменьшение дисперсии флюктуаций, т. е. их сглаживание. Действительно, при помощи (10.11) находим

$$\sigma_u^2 = \langle |\tilde{u}|^2 \rangle = \psi_u(0, 0) = F_0 \int_{|x| \leq k} d^2 x = \pi k^2 F_0.$$

Но

$$F_0 \equiv F_v(0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_v(\rho') d^2 \rho' \sim \frac{1}{4\pi^2} \sigma_v^2 l_v^2,$$

так что

$$\sigma_u^2 = \pi k^2 F_0 \sim (kl_v)^2 \sigma_v^2 \ll \sigma_v^2.$$

В пределе при $kl_v \rightarrow 0$ (очень мелкие неоднородности экрана) флюктуационное поле \tilde{u} вообще исчезает, так как столь мелкие неоднородности порождают за экраном только неоднородные (экспоненциально спадающие) волны.

Обратимся теперь к *крупномасштабным* неоднородностям граничного поля ($kl_v \gg 1$). Такие флюктуации порождают бегущие волны, в силу чего они особенно важны в приложениях. Мы уделим им поэтому основное внимание.

В случае крупномасштабных флюктуаций граничного поля двумерный спектр $F_v(x)$ сосредоточен в узком интервале значений $x \leq x_v \sim 1/l_v \ll k$. Это позволяет разложить продольное волновое число $p = \sqrt{k^2 - x^2}$ в формуле (10.10) в ряд Тейлора по степеням x^2 и ограничиться двумя первыми членами:

$$p = \sqrt{k^2 - x^2} \approx k - x^2/2k.$$

Кроме того, не совершая заметной ошибки, можно раздвинуть пределы интегрирования в (10.10) до $\pm \infty$, и тогда

$$\psi_u(\rho, \zeta) \approx e^{ik\rho} \int_{-\infty}^{\infty} F_v(x) \exp(i\zeta x - ix^2 \zeta / 2k) d^2 x \quad (kl_v \gg 1). \quad (10.12)$$

Нетрудно убедиться, что сделанные допущения эквивалентны использованию для поля $u(\rho, z)$ френелевского приближения (9.17).

Положив в (10.12) $\zeta = 0$, получаем *поперечную* функцию корреляции:

$$\psi_{\perp}(\rho) \equiv \psi_u(\rho, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F_v(x) \exp(ix\rho) d^2 x = \psi_v(\rho) \quad (10.13)$$

(см. (10.6)). Таким образом, поперечная функция корреляции волнового поля u равна функции корреляции граничного поля

и не меняется при удалении от экрана. Тем самым и поперечный радиус корреляции такой же, как в плоскости экрана:

$$l_{\perp} = l_v.$$

Сохранение поперечной функции корреляции, отмеченное впервые в работе [24], означает сохранение и дисперсии ($\sigma_u^2 = \sigma_v^2$), и поперечной функции когерентности. В самом деле, учитывая закон изменения среднего поля (10.3), имеем для волны, не ограниченной в поперечной плоскости,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp}(\rho, z) &= \langle u(\rho_1, z) u^*(\rho_2, z) \rangle = \psi_{\perp}(\rho) + \bar{u}(\rho_1, z) \bar{u}^*(\rho_2, z) = \\ &= \psi_v(\rho) + |v_0|^2 = \Gamma_v(\rho). \end{aligned} \quad (10.14)$$

При $\rho = \rho_1 - \rho_2 = 0$ отсюда вытекает постоянство средней интенсивности при удалении от экрана:

$$\bar{I}_u(z) = \langle |u|^2 \rangle = \Gamma_v(0) = \langle |v|^2 \rangle = \text{const.}$$

Следует подчеркнуть, что сохранение ψ_{\perp} , Γ_{\perp} и \bar{I} при удалении от плоскости $z = 0$ не имеет места для статистически неоднородного экрана и для неплоской падающей волны, а более высокие моменты поля не сохраняются даже для плоской волны и статистически однородного экрана.

Продольная функция корреляции $\psi_{\parallel}(\zeta)$ получается из (10.12) при $\rho = 0$:

$$\psi_{\parallel}(\zeta) = e^{ik\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} F_v(x) e^{-ikx\zeta/2k} dx.$$

Заметное уменьшение модуля функции $\psi_{\parallel}(\zeta)$ по сравнению с максимальным значением $\psi_{\parallel}(0) = \sigma_u^2$ наступает при $\zeta \sim 2k/x_0^2$, когда подынтегральная экспонента начинает осциллировать в пределах интервала $x \leq x_v \sim 1/l_v$, в котором сосредоточен спектр $F_v(x)$. Отсюда можно оценить продольный радиус корреляции l_{\parallel} :

$$l_{\parallel} \sim \frac{2k}{x_0^2} \sim k l_v^2,$$

т. е. l_{\parallel} в $k l_v \gg 1$ раз больше поперечного масштаба $l_{\perp} \sim l_v$. Можно сказать, что продольная корреляция флюктуаций поля исчезает тогда, когда радиус первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda |z_1 - z_2|} = \sqrt{\lambda |\zeta|}$ для отрезка $|\zeta| = |z_1 - z_2|$ становится больше поперечного радиуса корреляции: $\sqrt{\lambda_{\parallel}} \sim l_v$.

Проиллюстрируем сказанное о соотношении между продольным и поперечным масштабами корреляции примером, в котором функция корреляции поля вычисляется точно. Пусть у поля на экране корреляционная функция гауссова: $\psi_v(\rho) = \sigma_v^2 \exp[-\rho^2/2l_v^2]$.

Для нее

$$F_v(x) = \sigma_v^2 \exp[-x^2 l_v^2 / 2],$$

и простой расчет по формуле (10.12) дает

$$\Phi_v(\rho, \zeta) = \sigma_v^2 \gamma e^{ikz} \exp[-\rho^2 \gamma / 2l_v^2] = \gamma \Psi_v(\rho) \exp\{(1 - \gamma) \rho^2 / 2l_v^2\},$$

где $\gamma = [1 + i\zeta / k l_v^2]^{-1}$. Характерный масштаб изменения $|\Phi_v|$ имеет порядок $l_1 \sim l_v$ в поперечном направлении и $l_{\parallel} \sim k l_v^2 \gg l_v$ в продольном. Поверхности равных значений $|\Phi_v|$ имеют при этом форму овалоидов, сильно вытянутых вдоль оси z .

2. Прохождение плоской волны через фазовый хаотический экран. Так называют прозрачный экран с функцией пропускания $f(\rho) = \exp[iS(\rho)]$, где S — вещественная случайная функция, т. е. экран модулирует только фазу, но оставляет неизменной амплитуду (и, следовательно, интенсивность) волны. В полупространстве $z > 0$ фазовый экран вызывает в прошедшей волне как фазовую, так и амплитудную модуляцию. Последнюю можно наблюдать, например, на листе бумаги при прохождении света через оптически неоднородное или неровное (скажем, обычное оконное) стекло, если отодвинуть бумагу на некоторое расстояние от стекла.

Фазовый экран часто используется в качестве модели для описания ряда явлений как в оптике, так и в радиофизике. Например, линза с оптическими неоднородностями модулирует главным образом фазу проходящей световой волны. Такое же действие оказывает ионосфера Земли на проходящие через нее радиоволны УКВ-диапазона. Модель фазового экрана применяют также (хотя и с меньшими основаниями) при анализе мерцаний радиоволн, посыпаемых внеземными радиоисточниками и проходящих через статистически неоднородную межпланетную или межзвездную среду.

Если на неограниченный плоский фазовый экран падает плоская волна $u_n = e^{ikz}$, то граничное значение поля в плоскости экрана $z=0$ равно

$$v(\rho) = \exp[iS(\rho)] u_n|_{z=0} = \exp[iS(\rho)].$$

Выясним, как связаны статистические моменты поля прошедшей волны с функцией корреляции фазы

$$\psi_S(\rho) = \langle \tilde{S}(\rho_1) \tilde{S}(\rho_2) \rangle = \sigma_S^2 K_S(\rho),$$

где σ_S^2 — дисперсия, а $K_S(\rho)$ — коэффициент корреляции фазы.

Предположим, что флуктуации S статистически однородны в плоскости $z=0$, имеют нулевое среднее значение ($\bar{S}=0$) и подчиняются нормальному закону распределения вероятностей.

Учитывая, что для нормально распределенной величины α с $\bar{\alpha}=0$ справедлива формула $\langle e^{i\alpha} \rangle = \exp(-\bar{\alpha}^2/2)$, находим

$$\langle v \rangle \equiv v_0 = \langle e^{iS} \rangle = e^{-\sigma_S^2/3},$$

$$\Gamma_v(\rho) = \langle v(\rho_1) v^*(\rho_2) \rangle = \langle \exp\{i[S(\rho_1) - S(\rho_2)]\} \rangle = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle [S(\rho_1) - S(\rho_2)]^2 \rangle\right\}.$$

Но при $\bar{S}=0$ средний квадрат разности фаз — это структурная функция фазы $D_S(\rho)$, связанная с корреляционной функцией $\psi_S(\rho)$ соотношением (4.6). Поэтому

$$\Gamma_v(\rho) = \exp[-1/2 D_S(\rho)] = \exp[\psi_S(\rho) - \psi_S(0)] = \exp\{\sigma_S^2 [K_S(\rho) - 1]\}.$$

Среднее значение и поперечную функцию когерентности поля за экраном можно найти по формулам (10.3) и (10.14):

$$\bar{u} = v_0 e^{ikz} = \exp\{-\sigma_S^2/2 + ikz\},$$

$$\Gamma_{\perp}(\rho) = \Gamma_v(\rho) = \exp[-1/2 D_S(\rho)],$$

причем поперечная функция корреляции равна

$$\psi_{\perp}(\rho) = \psi_v(\rho) = \exp\{\sigma_S^2 [K_S(\rho) - 1]\} - e^{-\sigma_S^2}. \quad (10.15)$$

Если флюктуации фазы на экране слабы ($\sigma_S^2 \ll 1$), то из (10.15) имеем

$$\psi_{\perp}(\rho) \approx \sigma_S^2 K_S(\rho) = \psi_S(\rho) \quad (\sigma_S^2 \ll 1), \quad (10.16)$$

т. е. при малых флюктуациях фазы поперечная функция корреляции поля во всем полупространстве $z > 0$ совпадает с $\psi_S(\rho)$. В случае же больших дисперсий фазы ($\sigma_S^2 \gg 1$) среднее значение поля $v_0 = e^{-\sigma_S^2/3}$ пренебрежимо мало по сравнению с единицей, а величина $\exp\{\sigma_S^2 [K_S(\rho) - 1]\}$ заметно отличается от нуля только при малых ρ . Учитывая это, пренебрежем в (10.15) членом $e^{-\sigma_S^2}$ и разложим коэффициент корреляции $K_S(\rho)$ в ряд Тейлора.

Считая для простоты флюктуации фазы на экране изотропными, имеем

$$K_S(\rho) = 1 + K_S''(0) \frac{\rho^2}{2} + \dots, \quad (10.17)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ρ (линейный по ρ член в разложении (10.17) отсутствует, так как случайное поле фазы $S(\rho)$ предполагается дифференцируемым, $K_S'(0) = 0$). В результате получаем

$$\psi_{\perp}(\rho) \approx e^{1/2 \sigma_S^2 K_S''(0) \rho^2} = e^{-1/2 |\psi_S''(0)| \rho^2} \quad (\sigma_S^2 \gg 1), \quad (10.18)$$

де учтено, что значения в нуле вторых производных $K'_S(0)$ и $K''_S(0) = \sigma_S^2 K'_S(0)$ отрицательны.

Из (10.18) видно, что корреляция исчезает при $\rho \gg |\sigma_S^2 K'_S(0)|^{-1/2} \approx \pm l_S / \sigma_S$, где $l_S \sim |K'_S(0)|^{-1/2}$ — радиус корреляции фазы. Поэтому для поперечного радиуса корреляции получаем оценку

$$l_{\perp} \sim l_S / \sigma_S \quad (\sigma_S \gg 1).$$

аким образом, при $\sigma_S \gg 1$ радиус корреляции примерно в σ_S раз меньше корреляционного масштаба фазы l_S . Нетрудно понять, с чем связано это различие масштабов l_{\perp} и l_S .

При смещении вдоль экрана на расстояние порядка радиуса корреляции l_S фаза S изменяется на величину $\Delta S \sim \sigma_S$, совершив при этом не более одной осцилляции. В то же время гравитационное поле $v(\rho) = e^{iS}$ испытывает на том же расстоянии $\rho \sim l_S$ примерно $n \sim \sigma_S / \pi$ осцилляций, откуда и следует, что $l_{\perp} \sim l_S / n \sim l_S / \sigma_S \ll l_S$.

Приведенные выше соотношения используются, например, при интерпретации данных о прохождении ультракоротких радиоволн от внеземных источников через ионосферу Земли [23—26], в которой имеются неоднородности электронной концентрации. При определенных условиях можно считать, что поле $v(\rho)$ на выходе из ионосферы испытывает только фазовые флуктуации.

Если дисперсия фазы σ_S^2 мала по сравнению с единицей, то пространственная функция корреляции поля на поверхности Земли совпадает, согласно (10.16), с функцией корреляции фазы $\psi_S(\rho)$, которая определенным образом связана с функцией корреляции ионосферных неоднородностей. Следовательно, при $\sigma_S^2 \ll 1$ можно непосредственно измерить корреляционную функцию фазы волны, прошедшей через ионосферу, и судить о неоднородностях ионосферы.

Значительно сложнее интерпретировать данные наблюдений при $\sigma_S^2 \gg 1$. В этом случае функция корреляции изотропного поля $\psi_{\perp}(\rho)$ связана с $\psi_S(\rho)$ соотношением (10.18), при помощи которого можно оценить лишь величину $|\psi_S(0)| \sim \sigma_S^2 / l_S^2$. Дополнительные сведения о σ_S и l_S можно извлечь из данных об относительных флуктуациях интенсивности волны (см. ниже), но и с привлечением этих данных добиться однозначной интерпретации трудно.

Дело в том, что ионосферные неоднородности расположены не на фиксированной высоте, а распределены (причем неравномерно) на высотах от 100 до 400 и более километров над уровнем Земли. Кроме того, эти неоднородности имеют широкий диапазон горизонтальных масштабов (от $l \leq 1$ до $l \geq 500$ км), их действие часто маскируется сильными фокусирующими образованиями («ионосферными линзами») и т. д. Поэтому наблюдения флуктуаций поля на Земле позволяют оценивать только грубые

характеристики ионосферных неоднородностей: их горизонтальные масштабы, степень анизотропии (неоднородности, как правило, вытянуты вдоль линий магнитного поля Земли), вероятную высоту их расположения, а также среднюю скорость перемещения (дрейфа) неоднородностей [28, 29].

3. Флуктуации амплитуды и фазы за безграничным фазовым экраном. Во многих приложениях, в частности в задачах радиосвязи и радионавигации, представляют самостоятельный интерес статистические характеристики амплитуды и фазы волны. Для их вычисления кроме первой функции корреляции комплексного поля $\psi_{\perp}(\rho) = \langle \tilde{u}(\rho_1, z) \tilde{u}^*(\rho_2, z) \rangle$, которая в случае плоской волны и статистической однородности экрана не меняется при удалении от последнего, необходима и вторая корреляционная функция $\tilde{\psi}_{\perp}(\rho) = \langle \tilde{u}(\rho_1, z) \tilde{u}(\rho_2, z) \rangle$.

Закон преобразования второй функции корреляции при удалении от экрана можно получить при помощи френелевского приближения (9.17), которое применимо к полям именно с крупномасштабными неоднородностями на границе. Используя (9.17) и опуская для краткости аргумент ω , находим

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\perp}(\rho, z) &= \\ &= \left(\frac{ke^{ikz}}{2\pi iz} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_v(\rho' - \rho'') \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(\rho_1 - \rho')^2 + (\rho_2 - \rho'')^2] \right\} d^2\rho' d^2\rho'', \end{aligned} \quad (10.19)$$

где $\tilde{\Psi}_v(\rho) = \langle \tilde{u}(\rho_1) \tilde{u}(\rho_1 - \rho) \rangle$ — вторая корреляционная функция поля на экране. Введем новые переменные интегрирования $\xi = \rho' - \rho''$ и $\eta = (\rho' + \rho'')/2$. Интеграл по η легко вычисляется, при этом зависимость от $\rho_1 + \rho_2$ из (10.19) выпадает и остается лишь зависимость от $\rho_1 - \rho_2$. Переобозначив в оставшемся интеграле ξ через ρ' и $\rho_1 - \rho_2$ через ρ , получаем

$$\tilde{\psi}_{\perp}(\rho, z) = \frac{ke^{ikz}}{4\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_v(\rho') \exp \left[\frac{ik}{4z} (\rho - \rho')^2 \right] d^2\rho'. \quad (10.20)$$

Таким образом, вторая корреляционная функция преобразуется почти так же, как и само поле: отличие от (9.17) заключается лишь в том, что в (10.20) входит удвоенное расстояние от экрана $2z$.

Последующие выкладки упростятся, если вместо флуктуационной части поля \tilde{u} ввести вспомогательную случайную величину $a = ue^{-ikz}$, $\bar{a} = 0$, которая представляет собой комплексную амплитуду флуктуаций поля. Первая и вторая корреляционные функции этой величины преобразуются по формулам, аналогичным

(10.13) и (10.20):

$$\psi_a(\rho, z) = \psi_v(\rho), \quad (10.21)$$

$$\tilde{\psi}_a(\rho, z) = \frac{k}{4\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_v(\rho') \exp\left[\frac{ik}{4z}(\rho - \rho')^2\right] d^2\rho'. \quad (10.22)$$

В отличие от (10.20), в (10.22) не входит множитель e^{2ikz} .

Кроме того, удобно нормировать средний квадрат поля на экране $v(\rho)$ к единице:

$$\langle |v|^2 \rangle = v_0^2 + |v_0|^2 = 1. \quad (10.23)$$

Такая нормировка отвечает непоглощающим и неотражающим экранам, поскольку падающая волна единичной интенсивности $I_u = |e^{ikz}|^2 = 1$ порождает за экраном волну с той же средней интенсивностью:

$$\bar{I}_u = \langle |u|^2 \rangle = \langle |v|^2 \rangle = 1.$$

Это условие, очевидно, выполнено для чисто фазового экрана.

Связем теперь величину a с амплитудой A и фазой S волны $u = Ae^{i(S+ikz)}$, распространяющейся за экраном. Имеем

$$u(\rho, z) = A(\rho, z) \exp[ikz + iS(\rho, z)] = \\ = \bar{u} + \tilde{u} = (v_0 + a) e^{ikz},$$

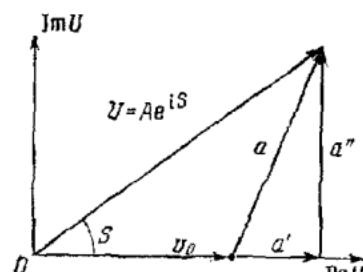


Рис. 3.

где v_0 без ограничения общности можно считать вещественной величиной. Разделяя a на вещественную (a') и мнимую (a'') части, находим, что

$$Ae^{iS} = v_0 + a = (v_0 + a') + ia'',$$

откуда

$$A = \sqrt{(v_0 + a')^2 + a''^2}, \quad S = \arctg \frac{a''}{v_0 + a'}. \quad (10.24)$$

На рис. 3 показаны соответствующие векторы на комплексной плоскости амплитуды $U = Ae^{iS}$.

Задача о нахождении из (10.24) статистических характеристик амплитуды A и фазы S решается до конца в двух частично перекрывающихся случаях: при *слабых флюктуациях поля на экране*, когда $|a'|$ и $|a''|$ малы по сравнению с единицей, и во *фраунгоферовой зоне*, когда величины a' и a'' распределены по нормальному закону. Эти случаи будут рассмотрены ниже.

Исследуем сначала флюктуации амплитуды и фазы при слабых флюктуациях. Пренебрегая малыми членами порядка $|a'|^3$ и $|a''|^3$,

и учитывая, что в силу (10.23) $\sigma_0^2 + (a')^2 + (a'')^2 = 1$, при помощи (10.24) получаем средние значения A и S :

$$\bar{A} = 1 - \frac{1}{2} \langle a'^2 \rangle, \quad \bar{S} = -\langle a'a'' \rangle, \quad (10.25)$$

а также выражения для корреляционных функций ($\rho = \rho_1 - \rho_2$):

$$\begin{aligned}\Psi_A(\rho, z) &= \langle \tilde{A}(\rho_1, z) \tilde{A}(\rho_2, z) \rangle = \Psi_{11}^a(\rho, z), \\ \Psi_S(\rho, z) &= \langle \tilde{S}(\rho_1, z) \tilde{S}(\rho_2, z) \rangle = \Psi_{22}^a(\rho, z), \\ \Psi_{AS}(\rho, z) &= \langle \tilde{A}(\rho_1, z) \tilde{S}(\rho_2, z) \rangle = \Psi_{12}^a(\rho, z),\end{aligned}\quad (10.26)$$

где $\Psi_{ij}^a(\rho, z)$, $i, j = 1, 2$ — корреляционные функции вещественной и мнимой частей комплексного случайного поля a . В общем случае они выражаются через первую и вторую функции корреляции $\Psi_a(\rho, z)$ и $\tilde{\Psi}_a(\rho, z)$ при помощи формул (2.14). Однако, если $\Psi_a(\rho, z)$ — четная функция ρ , то справедливы более простые формулы (2.22):

$$\begin{aligned}\Psi_{11}^a &= \frac{1}{2} (\Psi_a + \operatorname{Re} \tilde{\Psi}_a), \quad \Psi_{22}^a = \frac{1}{2} (\Psi_a - \operatorname{Re} \tilde{\Psi}_a), \\ \Psi_{12}^a &= \Psi_{11}^a = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \tilde{\Psi}_a.\end{aligned}\quad (10.27)$$

Таким образом, посредством формул (10.25) и (10.26) первые два момента амплитуды и фазы выражены через первую и вторую корреляционные функции комплексного поля a . Последние же преобразуются при удалении от экрана в соответствии с выражениями (10.21) и (10.22), чем и решается поставленная задача [23].

В частном случае фазового экрана с начальной фазой S , определенной по нормальному закону, имеем

$$\Psi_{A, S}(\rho, z) = \frac{1}{2} \left[\Psi_S^0(\rho) \mp \frac{k}{4\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_S^0(\rho') \sin \frac{k(\rho - \rho')^2}{4z} d^2\rho' \right], \quad (10.28)$$

$$\Psi_{AS}(\rho, z) = \frac{k}{8\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_S^0(\rho') \cos \frac{k(\rho - \rho')^2}{4z} d^2\rho', \quad (10.29)$$

где $\Psi_S^0(\rho)$ — корреляционная функция фазы в плоскости $z = 0$.

Для гауссовой корреляционной функции фазы

$$\Psi_S^0(\rho) = \sigma_{S_0}^2 e^{-\rho^2/2\sigma_{S_0}^2} \quad (10.30)$$

эти интегралы легко вычисляются и, в частности, при $\rho = 0$ дают

$$\sigma_{A, S}^2(z) = \frac{\sigma_{S_0}^2}{2} \left(1 \mp \frac{1}{1+D^2} \right), \quad \langle \tilde{A} \tilde{S} \rangle = -\frac{\sigma_{S_0}^2}{2} \frac{D}{1+D^2}, \quad (10.31)$$

где $D = D(z) = 2z/kl_S^2$. Величину D называют вслед за Г. С. Годриком [43] *волновым параметром*. Этот параметр показывает

во сколько раз площадь первой зоны Френеля $\pi(\sqrt{\lambda z})^2 = 2\pi^2 z/k$ превышает по порядку величины «площадь» одной неоднородности $\sim \pi l_s^2$, т. е. сколько неоднородностей умещается в этой зоне. В зависимости от значения волнового параметра можно выделить три области дистанции z (которые тоже называют зонами): ближнюю ($D \ll 1$), френелевскую ($D \sim 1$) и фраунгоферову ($D \gg 1$) зоны (по отношению к отдельной неоднородности). Для каждой из них характерны определенные особенности флуктуаций.

В ближней зоне ($D \ll 1$) преобладают, естественно, фазовые флуктуации: $\sigma_A^2 \ll \sigma_S^2 \approx \sigma_{S_0}^2$. При удалении от экрана амплитудные флуктуации нарастают, а фазовые уменьшаются, причем в пределе $D \rightarrow \infty$ (фраунгоферова зона) дисперсии амплитуды и фазы выравниваются:

$$\sigma_{A, S}^2 |_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \sigma_{S_0}^2. \quad (10.32)$$

Корреляция между A и S пренебрежима в ближней и дальней зонах и максимальна при $D \sim 1$.

Обратимся теперь к флуктуациям в зоне *Фраунгофера* ($D \gg 1$) при произвольных (не обязательно слабых) флуктуациях поля на экране. При $D \gg 1$ в пределах первой зоны Френеля с радиусом $\sqrt{\lambda z}$, которая только и существенна для интегрирования в (9.17), умещается много неоднородностей поля на экране. В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей закон распределения величин a' и a'' приближается поэтому к нормальному.

Нормализация этих величин обусловлена «фильтрующим» действием свободного пространства и имеет такую же природу, как и нормализация временных сигналов на выходе узкополосных фильтров (ч. I, § 50). Действительно, преобразование случайного поля по формуле (9.17) вполне аналогично преобразованию случайных процессов, причем аналогом импульсной функции в нашем случае является разностное ядро преобразования (9.17), которое и осуществляет фильтрацию с эффективной шириной полосы пространственных частот $\Delta k \sim \sqrt{k/z} \sim (\lambda z)^{-1/2}$. С ростом дистанции z эта полоса сужается и при $z \gg kl_v^2$ (т. е. в дальней зоне, $D \gg 1$) становится значительно уже первоначальной ширины пространственного спектра $k_v \sim 1/l_v$. При этих условиях и происходит нормализация поля $u(\rho, z)$.

То обстоятельство, что a' и a'' в дальней зоне распределены по нормальному закону, дает возможность найти плотности вероятностей амплитуды и фазы и вычислить моменты этих величин. По существу, речь идет о хорошо изученной задаче о статистике огибающей A и фазы S сигнала $u(\rho, z) = Ae^{iS + ikz} = (v_0 + a)e^{ikz}$, представляющего собой сумму гармонического колебания $v_0 e^{ikz}$ и гауссова шума $a = ae^{ikz}$.

Для гауссовых величин закон распределения вероятностей полностью характеризуется только низшими моментами — средними значениями и функциями корреляции. В нашем случае $\bar{a}' = \bar{a}'' = 0$, а функции корреляции ψ_{11}^a , ψ_{12}^a и ψ_{22}^a выражаются через первую и вторую функции корреляции комплексного поля a посредством формул (10.27). В зоне Фраунгофера эти формулы существенно упрощаются, поскольку при $D \gg 1$ вторая корреляционная функция $\psi_a(\rho, z)$ пренебрежимо мала по сравнению с первой. В результате при $D \gg 1$ имеем

$$\psi_{11}^a(\rho, z) = \psi_{22}^a(\rho, z) = \frac{1}{2} \psi_v(\rho), \quad \psi_{12}^a(\rho, z) = 0, \quad (10.33)$$

т. е. в зоне Фраунгофера поля a' и a'' некоррелированы, а их автокорреляционные функции одинаковы и отличаются коэффициентом $\frac{1}{2}$ от первой функции корреляции поля на экране. Как следствие этого, функции ψ_{11}^a и ψ_{22}^a и связанные с ними статистические характеристики амплитуды и фазы не зависят от расстояния до экрана: с ростом дистанции z они остаются такими же, как на «входе» в дальнюю зону $z \geq k l_z^2$.

Определение статистических моментов амплитуды и фазы при известной (гауссовой) статистике a' и a'' проводится таким же образом, как и в ч. I, §§ 25 и 44 (см. также [30, 31]).

4. Флуктуации интенсивности за безграничным фазовым экраном. При рассмотрении флуктуаций интенсивности обычно интересуются их функцией корреляции ($\rho = \rho_1 - \rho_2$)

$$\psi_I(\rho, z) = \langle \tilde{I}(\rho_1, z) \tilde{I}(\rho_2, z) \rangle = \langle I(\rho_1, z) I(\rho_2, z) \rangle - \bar{I}^2 \quad (10.34)$$

и так называемым индексом мерцаний β :

$$\beta^2(z) = \frac{\langle I^2(z) \rangle - \bar{I}^2(z)}{\bar{I}^2} = \frac{\sigma_I^2(z)}{\bar{I}^2}, \quad (10.35)$$

который характеризует относительные флуктуации интенсивности. Если принять, как и выше, что $\bar{I} = 1$, то

$$\psi_I(\rho, z) = \langle I(\rho_1, z) I(\rho_2, z) \rangle - 1, \quad (10.34')$$

$$\beta^2(z) = \langle I^2(z) \rangle - 1 = \sigma_I^2(z). \quad (10.35')$$

Как и при анализе амплитудных и фазовых флуктуаций, расчеты ψ_I и β удается довести до конца лишь в двух частично пересекающихся предельных случаях — для слабых флуктуаций и для фраунгоферовой зоны.

Используя результаты п. 3, легко показать, что в случае слабых флуктуаций

$$\psi_I(\rho, z) = 4\psi_A(\rho, z),$$

$$\beta^2(z) = 4\sigma_A^2(z).$$

Таким образом, флюктуации интенсивности меняются при удалении от экрана по тому же закону, что и флюктуации амплитуды. При $D \gg 1$ (зона Фраунгофера) $\beta^2(z)$ стремится к предельному значению

$$\beta_{\infty}^2 = 2\sigma_{S_0}^2, \quad \sigma_{S_0}^2 \ll 1, \quad (10.36)$$

независимо от вида функции корреляции фазы на экране.

При расчете ψ_I в дальней зоне ($D \gg 1$) воспользуемся формулой из задачи 12 к гл. I, которая справедлива для полей, распределенных по нормальному закону. При $D \gg 1$ имеем $\bar{\Phi}_u = e^{ikz}\bar{\Psi}_u \approx 0$, так что $\bar{\Gamma}(1, 2) = \bar{u}(1)\bar{u}(2)$ и

$$\psi_I(\rho, z) = |\Gamma_u(\rho)|^2 - |\bar{u}|^4 = |\Gamma_v(\rho)|^2 - |v_0|^4. \quad (10.37)$$

Так как мы приняли, что $\Gamma_v(0) = \bar{I} = 1$, для индекса мерцаний в дальней зоне ($z \rightarrow \infty$) получаем

$$\beta_{z \rightarrow \infty}^2 \equiv \beta_{\infty}^2 = \psi_I(0) = 1 - |v_0|^4. \quad (10.38)$$

Согласно этим формулам функция корреляции интенсивности ψ_I и индекс мерцаний β^2 при $D \gg 1$ уже не зависят от z .

В частном случае фазового экрана с гауссовыми флюктуациями фазы, когда $v_0 = e^{-\sigma_{S_0}^2/2}$, а $\psi_v(\rho)$ дается выражением (10.15), получаем

$$\psi_I(\rho) = e^{-2\sigma_{S_0}^2} \{ \exp[2\beta_{\infty}^2(\rho)] - 1 \}, \quad \beta^2 = 1 - e^{-2\sigma_{S_0}^2}. \quad (10.39)$$

При $\sigma_{S_0}^2 \ll 1$ последнее выражение переходит, как и следовало ожидать, в формулу (10.36). В другом частном случае—экран с нулевым средним полем ($v_0 = 0$)—выражения (10.37) и (10.38) принимают особенно простой вид:

$$\psi_I(\rho) = |\Gamma_v(\rho)|^2 = |\psi_v(\rho)|^2, \quad \beta_{\infty}^2 = 1.$$

Анализ флюктуаций в общем случае паталкивается на значительные математические трудности. Если флюктуации поля на экране не малы и точка наблюдения не удалена во фраунгоферову зону по отношению к отдельной неоднородности, то расчет индекса мерцаний сводится, в рамках френелевского приближения (9.17), к вычислению интеграла

$$\begin{aligned} \beta^2(z) &= \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^4 \iiint_{-\infty}^{\infty} \int \int \int \int \Gamma_v^{(2,2)}(1, 2, 3, 4) \times \\ &\quad \times \exp \left[\frac{ik}{2z} (\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2 - \rho_4^2) \right] d^2\rho_1 \dots d^2\rho_4 - 1, \end{aligned} \quad (10.40)$$

где

$$\Gamma_v^{(2,2)}(1, 2, 3, 4) = \langle v(\rho_1)v(\rho_2)v^*(\rho_3)v^*(\rho_4) \rangle$$

— смешанный момент четвертого порядка. Для произвольных функций $\Gamma_v^{(2,2)}(1, 2, 3, 4)$ значения интегралов вида (10.40) можно находить лишь численными методами. Рассмотрим полученные таким путем в [32] результаты для фазового экрана.

Если фазовые флуктуации распределены по нормальному закону, то

$$\begin{aligned} \Gamma_v^{(2,2)}(1, 2, 3, 4) &= \langle \exp \{i[S(\rho_1) + S(\rho_2) - S(\rho_3) - S(\rho_4)]\} \rangle = \\ &= \exp \{-[2\sigma_{S_0}^2 - \psi_{13} - \psi_{14} - \psi_{23} - \psi_{24} + \psi_{12} + \psi_{34}]\}, \end{aligned}$$

где $\psi_{ik} = \psi_S(\rho_i - \rho_k)$ — значения функции корреляции фазы S при $\rho = \rho_i - \rho_k$, а $\sigma_{S_0}^2$ — дисперсия фазы. На рис. 4 показаны полу-ченные в [32] графики зависимости индекса мерцаний β^2 от волнового параметра $D = 2z/kl_S^2$ для гауссовой функции корреляции фазы (10.30) и для значений дисперсии $\sigma_{S_0}^2$ от 0,1 до 5.

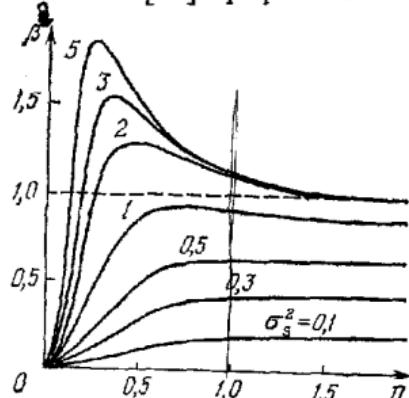


Рис. 4.

Поведение этих кривых нам уже частично известно: в зоне Фраунгофера ($D \gg 1$) $\beta^2 = \beta_\infty^2 = 1 - e^{-2\sigma_{S_0}^2}$, а при слабых флуктуациях фазы ($\sigma_{S_0}^2 \ll 1$) $\beta^2 = -2\sigma_{S_0}^2 D^2 / (1 + D^2)$. Новым является наличие при $\sigma_{S_0}^2 > 1$ максимумов β^2 при промежуточных значениях $D \leq 1$. Для величины максимумов β^2 при сильных флуктуациях фазы ($\sigma_{S_0}^2 \gg 1$) в [32], а также в [33], где было проведено качественное рассмотрение вопроса, дана оценка $\beta_{\max}^2 \sim \ln \sigma_{S_0}^2$. Более аккуратные расчеты, проделанные в [34, 35] для функции корреляции фазы $\psi_S(\rho)$ произвольного вида, привели к следующему асимптотическому значению β_{\max}^2 при $\sigma_{S_0}^2 \gg 1$:

$$\beta_{\max}^2 \approx \frac{1}{\pi e} \ln \left(\frac{2\sigma_{S_0}^2}{\gamma} \right).$$

Здесь γ — численный коэффициент, равный $\frac{l_1^4}{6} \frac{\partial^4 K_S(0)}{\partial \rho^4}$, а $l_1 = |K'_S(0)|^{-1/2}$ — величина порядка радиуса корреляции фазы. Для гауссовой функции корреляции (10.30) $\gamma = 1/2$, $l_1 = l_S$. Эти оценки указывают на логарифмическое «насыщение» индекса мерцаний β_{\max}^2 с ростом $\sigma_{S_0}^2$.

Максимум индекса мерцаний приходится, согласно [32—35], на расстояние z_m , равное

$$z_m = \frac{k l_S^2}{\sigma_{S_0}}. \quad (10.41)$$

Формула (10.41), как и самий факт появления максимумов, допускает простую геометрическую интерпретацию: флуктуации интенсивности максимальны там, где волны за фазовым экраном *фокусируются*. Действительно, в приближении геометрической оптики фокусировка происходит на расстоянии $z_m \sim 1/v$ от фазового экрана, где v — кривизна фазового фронта. По порядку величины $v \sim \frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right)$ (x — одна из координат в плоскости $z=0$) и $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \sim \frac{\sigma_{S_0}}{l_S^2}$. Следовательно, $z_m \sim 1/v \sim k l_S^2 / \sigma_{S_0}$, что совпадает с (10.41). Очевидно, чем больше дисперсия фазы $\sigma_{S_0}^2$, тем ближе к экрану расположена зона фокусировок.

Эффект фокусировки волн и обусловленные им максимумы индекса мерцаний характерны, очевидно, только при условии, что на экране хорошо выражены именно фазовые флуктуации. Если же на экране флуктуирует только амплитуда, то дифракция приводит не к увеличению, а, наоборот, к *сглаживанию* флуктуаций интенсивности, т. е. к уменьшению индекса мерцаний. Примеры такого сглаживания рассмотрены в задачах 7 и 8. Сглаживание флуктуаций интенсивности происходит также в том случае, когда на фазовый экран падает не плоская волна, а волна от источника конечных угловых размеров [32].

§ 11. Дифракция случайных полей в простейших оптических системах

В предыдущем параграфе мы рассмотрели одну из простейших статистических дифракционных задач — дифракцию *детерминированной* плоской и монохроматической волны на бесконечном и статистически однородном *хаотическом* экране. Здесь мы обратимся к дифракции *случайных* полей на *детерминированных* объектах. В основном мы будем иметь в виду слабо расходящиеся волновые пучки, чаще всего встречающиеся в оптических и квазиоптических системах.

1. Прохождение случайной волны через отверстие в экране. Теорема Ван-Циттерта—Цернике. Пусть $u(\omega, \rho) = u_n(\omega, r)|_{z=0}$ — спектральная амплитуда поля, создаваемого каким-либо источником в плоскости $z=0$. Если поместить в этой плоскости непрозрачный экран с отверстием S , вырезающим пучок волн конечного диаметра, то непосредственно за экраном образуется поле «на выходе» $u_b(\omega, \rho)$, которое в

приближении Кирхгофа равно¹⁾

$$u_0(\omega, \rho) = \begin{cases} v(\omega, \rho) & \text{на } S, \\ 0 & \text{вне } S. \end{cases}$$

Это поле можно записать через функцию пропускания отверстия:

$$u_0(\omega, \rho) = M(\rho)v(\omega, \rho), \quad (11.1)$$

считая, что

$$M(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{на } S, \\ 0 & \text{вне } S. \end{cases} \quad (11.2)$$

В случае плавных (в масштабе длины волны) флуктуаций граничного поля $v(\omega, \rho)$ для вычисления поля за отверстием можно воспользоваться френелевским приближением (9.17), которое с учетом (11.1) дает

$$u(\omega, r) = \frac{ke^{ikz}}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho')v(\omega, \rho') \exp\left[\frac{ik}{2z}(\rho - \rho')^2\right] d^2\rho'. \quad (11.3)$$

Среднее по ансамблю источников значение $v(\omega, \rho)$ равно нулю, вследствие чего и

$$\langle u(\omega, r) \rangle = 0. \quad (11.4)$$

Вычислим *поперечную* функцию когерентности дифракционного поля, т. е. функцию когерентности в плоскости $z = \text{const}$. В соответствии с (11.3) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp}(\omega, \rho_1, \rho_2, z) &= \langle u(\omega, \rho_1, z) u^*(\omega, \rho_2, z) \rangle = \\ &= \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} M(\rho') M(\rho'') \Gamma_v(\omega, \rho' - \rho'') \times \\ &\times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(\rho_1 - \rho')^2 - (\rho_2 - \rho'')^2]\right\} d^2\rho' d^2\rho'', \end{aligned} \quad (11.5)$$

где $\Gamma_v(\omega, \rho' - \rho'')$ — пространственная функция когерентности граничного поля $v(\omega, \rho)$, которое предполагается статистически однородным. Пространственно-временные функции когерентности полей $u(t, r)$ и $v(t, \rho)$ связаны с $\Gamma_{\perp}(\omega, \rho_1, \rho_2, z)$ и $\Gamma_v(\omega, \rho' - \rho'')$ преобразованиями Фурье, например:

$$\Gamma_{\perp}(\tau, \rho_1, \rho_2, z) = \int_0^{\infty} \Gamma_{\perp}(\omega, \rho_1, \rho_2, z) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (11.6)$$

¹⁾ Приближение Кирхгофа применимо, как известно, при условии, что размеры отверстия a велики по сравнению с длиной волны, $a \gg \lambda$.

В силу (11.4) все эти функции когерентности совпадают с соответствующими функциями корреляции.

Не конкретизируя вида функции когерентности (корреляции) граничного поля, интеграл (11.5) можно вычислить в двух предельных случаях — при больших и малых размерах отверстия a по сравнению с радиусом корреляции l_v (но всегда при $a \gg \lambda$).

При $a \ll l_v$ (малое отверстие) функция когерентности граничного поля Γ_v практически постоянна в пределах отверстия и ее можно вынести за знак интеграла со значением $\Gamma_v(\omega, 0) = \bar{\Gamma}_v(\omega)$. В результате¹⁾

$$\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z) = \bar{\Gamma}_v u_M(\rho_1, z) u_M^*(\rho_2, z), \quad (11.7)$$

где поле $u_M(\rho, z)$ дается выражением

$$u_M(\rho, z) = \frac{ke^{ikz}}{2\pi iz} \int M(\rho') \exp \left[\frac{ik}{2z} (\rho - \rho')^2 \right] d^2\rho' \quad (11.8)$$

и представляет собой дифракционное поле за отверстием при нормальном падении на него плоской волны единичной амплитуды.

Коэффициент корреляции при дифракции на малом отверстии равен

$$K_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z) = \frac{\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z)}{\sqrt{\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_1, z) \Gamma_{\perp}(\rho_2, \rho_2, z)}} = \frac{u_M(\rho_1, z) u_M^*(\rho_2, z)}{|u_M(\rho_1, z)| |u_M(\rho_2, z)|},$$

так что $|K_{\perp}| = 1$. Это означает, что случайная волна, прошедшая через малое отверстие, порождает *пространственно когерентное* поле. До создания лазеров пропускание света через малое отверстие (наряду с использованием малых источников света) было практически единственным способом получения пространственно когерентного света. Этим способом пользуются и в настоящее время, если не требуется высокой интенсивности поля.

Обратимся к другому предельному случаю $a \gg l_v$ (*широкое отверстие*). Прежде всего отметим, что вблизи отверстия имеется область, в которой функция корреляции будет такой же, как и в отсутствие непрозрачного экрана. Форму и размеры этой области можно оценить, используя спектральное представление. Ширина двумерного спектра $F_v(\mathbf{x})$ случайного поля v имеет порядок $\kappa_v \sim 1/l_v$, или, в пересчете на углы, $\delta \sim \kappa_v/k \sim \lambda/l_v$. Следовательно, если точки наблюдения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 находятся внутри

¹⁾ Начиная с формулы (11.7), мы опускаем аргумент ω всюду, где это не может привести к недоразумениям.

конуса с основанием a и углом при вершине δ (рис. 5), то поле «не почувствует» влияния краев диафрагмы. Для всех точек внутри этого конуса поперечная функция корреляции будет такой же, как у граничного поля:

$$\Gamma_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z) = \Gamma_v(\rho_1 - \rho_2).$$

Предельная дистанция $z_{\text{пр}}$, на которой еще справедливо это соотношение, оценивается как¹⁾

$$z_{\text{пр}} \sim \frac{a}{\delta} \sim \frac{al_v}{\lambda} \sim k al_v. \quad (11.9)$$

При $a \gg l_v$ эта дистанция отвечает дальней зоне по отношению к размеру неоднородностей l_v , так как

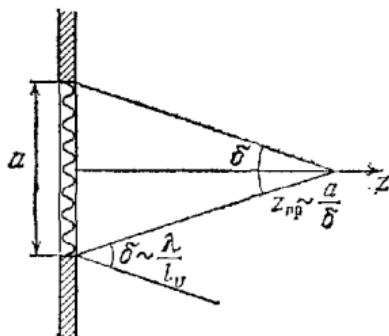


Рис. 5.

и ближней зоне по отношению к размеру отверстия a :

$$\frac{z_{\text{пр}}}{ka^2} \sim \frac{l_v}{a} \ll 1.$$

Отсюда, в частности, следует практически важный вывод, что распределение флуктуаций поля за отверстием нормализуется еще в ближней зоне апертуры a .

Вычислим интеграл (11.5) при $z \gg z_{\text{пр}}$. Для этого перейдем к новым переменным $\xi = \rho' - \rho''$ и $\eta = (\rho' + \rho'')/2$ и обозначим полусумму $(\rho_1 + \rho_2)/2$ через ρ_+ , а разность $\rho_1 - \rho_2$ — через ρ . Тогда (11.5) принимает вид

$$\Gamma_{\perp}(\rho, \rho_+, z) =$$

$$= \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \exp \left(\frac{ik\rho\rho_+}{z} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M\left(\eta + \frac{\xi}{2}\right) M\left(\eta - \frac{\xi}{2}\right) \Gamma_v(\xi) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{z} [\xi\eta - \eta\rho - \xi\rho_+] \right\} d\xi d\eta.$$

Область интегрирования по ξ ограничена здесь неравенством $\xi \leq \xi \leq l_a \ll a$, так как при $\xi \geq l_v$ функция корреляции $\Gamma_v(\xi)$ близка к нулю. В то же время $\eta \leq a$, поскольку при $\eta > a$ обращается в нуль произведение $M(\eta + \xi/2) M(\eta - \xi/2) \approx M^2(\eta) = M(\eta)$. Поэтому первое слагаемое в показателе экспоненты ограничено сверху неравенством $k\xi\eta/z \leq k al_v/z \sim z_{\text{пр}}/z$. При $z \gg z_{\text{пр}}$ этим слагаемым

¹⁾ Если $l_v \leq a$, то в качестве $z_{\text{пр}}$ следует брать величину $z_{\text{пр}} \sim a$, так как в этом случае ширина углового спектра δ сравнима с $\pi/2$.

можно пренебречь, и тогда интегралы по ξ и η разделяются

$$\Gamma_{\perp}(\rho, \rho_+, z) = \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \exp \left(\frac{ik\rho\rho_+}{z} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2\eta M(\eta) \exp \left(-\frac{ik\eta\rho}{z} \right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi \Gamma_v(\xi) \exp \left(-\frac{ik\xi\rho_+}{z} \right). \quad (11.10)$$

Точно такое же выражение можно получить и непосредственно из формулы (9.18) для поля во фраунгоферовой зоне:

$$u(\rho, z) = \frac{k \exp \left[ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} \right) \right]}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') v(\rho') \exp \left(-\frac{ik\rho\rho'}{z} \right) d^2\rho'. \quad (11.11)$$

Однако приближение (11.11) справедливо только в дальней зоне $z \gg ka^2$, а формула (11.10) применима и на гораздо меньших дистанциях $z \gg z_{\text{пп}} \sim k a l_v$. Иными словами, функция когерентности (11.10) формируется еще в ближней зоне по отношению к отверстию.

Зависимость функции когерентности (11.10) от поперечных координат $\rho = \rho_1 - \rho_2$ и $\rho_+ = (\rho_1 + \rho_2)/2$ определяется произведением трех сомножителей. Множитель перед интегралом

$$\exp \{ik\rho\rho_+/z\} = \exp \{ik(\rho_1^2 - \rho_2^2)/2z\} \approx \exp \{ik(r_1 - r_2)\}$$

возникает просто из-за того, что сферические волны, покидающие отверстие, не согласованы с плоской формой поверхности $z = \text{const}$, на которой рассматривается корреляция поля. Если взять корреляцию на сфере $r = \text{const}$, этот множитель обратится в единицу.

Интеграл по η в (11.10), зависящий только от разности $\rho = \rho_1 - \rho_2$, характеризует поле когерентного источника с распределением амплитуды $M(\eta)$. При размере отверстия a угловая ширина диаграммы направленности такого излучателя имеет порядок λ/a , а линейная ширина центрального дифракционного лепестка в плоскости $z = \text{const}$ равна $\Delta\rho \sim \lambda z/a$. Отсюда для поперечного радиуса корреляции сразу же следует, что

$$l_{\perp} \sim \frac{\lambda z}{a} \sim \frac{\lambda}{\gamma}, \quad (11.12)$$

где $\gamma \sim a/z$ — угловой размер отверстия из точки наблюдения. Как и ширина дифракционных лепестков, поперечный радиус корреляции возрастает по мере удаления от плоскости $z = 0$. Увеличение радиуса когерентности геометрически объясняется

тем, что при удалении от отверстия фазовые фронты всех элементарных сферических волн можно считать (с точностью до λ) совпадающими на все большей площади.

Второй интеграл в (11.10) определяет пространственное распределение средней интенсивности дифракционного поля. Положив в (11.10) $\rho = 0$ и учитывая, что интеграл по η при $\rho = 0$ равен площади отверстия S , имеем

$$\bar{I}_u(\rho_+, z) = \frac{k^2 S}{(2\pi z)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\xi) \exp\left(-\frac{ik\rho_+ \xi}{z}\right) d\xi. \quad (11.13)$$

По предположению масштаб l_v изменения функции Γ_v мал по сравнению с поперечником отверстия a . Поэтому ширина распределения интенсивности \bar{I}_u в плоскости $z = \text{const}$, составляющая $\rho_+ \sim \lambda z / l_v$ (угловая ширина имеет порядок $\rho_+/z \sim \lambda/l_v \sim 1/k l_v$),

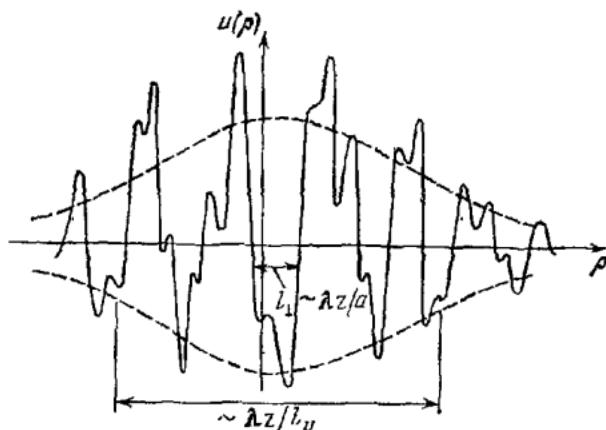


Рис. 6.

велика по сравнению с поперечным радиусом корреляции l_\perp :

$$\frac{\lambda z}{l_v} \gg l_\perp \sim \frac{\lambda z}{a} \quad (l_v \ll a).$$

Таким образом, мы имеем здесь дело с примером квазиоднородного (в плоскости $z = \text{const}$) поля. В данном случае все реализации дифракционного поля за отверстием представляют собой быстрые пространственные осцилляции с масштабом l_\perp и с размахом порядка $\sqrt{\bar{I}_u(\rho)}$ (рис. 6.).

Если разделить функцию когерентности (11.10) на среднюю интенсивность дифракционного поля, то мы получим коэффи-

циент поперечной пространственной корреляции поля

$$K_{\perp}(\rho) = \exp\left(-\frac{ik\rho\rho_+}{z}\right) \mathcal{F}_M\left(\frac{k\rho}{z}\right),$$

где величина

$$\mathcal{F}_M(x) = \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{\infty} M(\eta) \exp(-ix\eta) d^2\eta \quad (11.14)$$

представляет собой нормированное к единице ($\mathcal{F}(0)=1$) преобразование Фурье от $M(\eta)$ и одновременно — диаграмму направленности отверстия при нормальном падении на него плоской монохроматической волны. В частном случае круглого отверстия, когда $M(\rho)=1$ при $\rho < a$ и обращается в нуль вне этого круга,

$$\mathcal{F}_M(x) = 2J_1(ka)/ka,$$

где $J_1(ka)$ — функция Бесселя первого порядка.

В пределе, когда радиус корреляции граничного поля l_v мал по сравнению с длиной волны, интеграл по ξ перестает зависеть от ρ_+ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\xi) \exp\left(-\frac{ik\rho+\xi}{z}\right) d^2\xi \approx \bar{I}_v S_v \quad (l_v \ll \lambda).$$

Через S_v здесь обозначена эффективная площадь когерентности граничного поля:

$$S_v = \frac{1}{\bar{I}_v} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\xi) d^2\xi = \int_{-\infty}^{\infty} K_v(\xi) d^2\xi, \quad (11.15)$$

которая по порядку величины равна l_v^2 . В результате при $l_v \ll \lambda$ из (11.10) вытекает так называемая *теорема Ван-Циттерта — Цернике*:

$$\Gamma_v(\rho, \rho_+, z) = \frac{1}{z^2} \exp\left(\frac{ik\rho\rho_+}{z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} J(\rho') \exp\left(-\frac{ik\rho\rho'}{z}\right) d^2\rho'. \quad (11.16)$$

Входящую сюда величину

$$J(\rho') = \frac{k^2}{4\pi^2} \bar{I}_v S_v M(\rho') \quad (11.17)$$

называют *приведенной интенсивностью*.

Согласно теореме Ван-Циттерта — Цернике модуль поперечной функции когерентности Γ_{\perp} зависит от разности $\rho = \rho_1 - \rho_2$ так

же, как и поле в зоне Фраунгофера, создаваемое полностью когерентным источником с распределением амплитуды, пропорциональным $J(\rho')$. От обычных дифракционных формул выражение (11.16) отличается в двух отношениях. Во-первых, квадратичная по полю величина Γ_{\perp} обратно пропорциональна квадрату (а не первой степени) расстояния. Во-вторых, это выражение вместе с исходной формулой (11.10) применимо, как уже отмечалось, на дистанциях $z \gg z_{\text{пп}}$, причем в рассматриваемом пределе $l_v \ll a$ величина $z_{\text{пп}}$ сравнима с a , тогда как диаграмма когерентного источника с поперечником a формируется на значительно больших дистанциях $z \gg ka^2 \gg z_{\text{пп}} \sim a$.

Обычно теорему Ван-Циттерта—Цернике (11.16) получают путем формального введения дельта-коррелированных флуктуаций граничного поля, полагая в (11.5) или в (11.10)

$$\Gamma_v(\rho - \rho') = \bar{I}_v(\rho') \delta(\rho' - \rho'') S_v, \quad (11.18)$$

при этом в выражении (11.16) для приведенной интенсивности вместо произведения $\bar{I}_v M(\rho')$ возникает переменная интенсивность $\bar{I}_v(\rho')$. Источник с независимыми значениями поля в сколь угодно близких точках называют пространственно *некогерентным*.

Представление о пространственно некогерентном источнике является идеализацией, имеющей ограниченную область применимости. Дело в том, что поле *бегущих* волн по самой своей природе не может быть дельта-коррелированным в пространстве, поскольку (§ 9) масштаб изменения поля l_v не может быть меньше длины волны λ ¹⁾. Поэтому в рассматриваемой постановке задачи (дифракция случайного поля на отверстии) переход к пределу $l_v \rightarrow 0$ является, строго говоря, незаконным, что ставит справедливость вывода теоремы Ван-Циттерта—Цернике на основе (11.18) под сомнение. С теоремой (11.16) мы встретимся еще в одном важном случае, а именно в задаче об излучении поля системой точечных независимых источников, к которой мы обратимся в § 12. Смысл приведенной интенсивности в этой задаче будет, разумеется, иным, чем в (11.17).

Результаты, полученные выше для пространственной корреляции спектральных амплитуд, в случае квазимохроматического поля сохраняют силу и для самих полей. В самом деле,

¹⁾ Заметим попутно, что отождествление приведенной интенсивности (11.17) со средней интенсивностью поля в отверстии $\bar{I}_v(\rho)$ ведет к тому же выводу. Такое отождествление возможно при $k^2 S_v / 4\pi^2 = 1$, а это означает, что $S_v = \lambda^2$, что противоречит принятой в (11.18) гипотезе о дельта-корреляции, по которой $S_v = l_v^2 \ll \lambda^2$.

согласно (11.6) пространственная корреляционная функция равна

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp}(\tau=0, \rho_1, \rho_2, z) &= \int_0^{\infty} \Gamma_{\perp}(\omega, \rho_1, \rho_2, z) e^{i\omega\tau} d\omega |_{\tau=0} = \\ &= \int_0^{\infty} d\omega \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \exp \left(\frac{i k \rho \rho_+}{z} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \xi \Gamma_v(\omega, \xi) \exp \left(-\frac{i k \xi \rho_+}{z} \right) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \eta M(\eta) \exp \left(-\frac{i k \eta \rho}{z} \right). \quad (11.19) \end{aligned}$$

Для квазимохроматического поля функция $\Gamma_v(\omega, \xi)$ сосредоточена в узкой полосе частот $\Delta\omega$ вблизи частоты ω_0 . Поэтому приближенно ($k_0 = \omega_0/c$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp}(\tau=0, \rho_1, \rho_2, z) &= \\ &= \left(\frac{k_0}{2\pi z} \right)^2 \exp \left(\frac{i k_0 \rho \rho_+}{z} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \xi \Gamma_v(\tau=0, \xi) \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{i k_0 \xi \rho_+}{z} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \eta M(\eta) \exp \left(-\frac{i k_0 \eta \rho}{z} \right), \quad (11.20) \end{aligned}$$

где

$$\Gamma_v(\tau=0, \xi) = \int_0^{\infty} \Gamma_v(\omega, \xi) e^{i\omega\tau} d\omega |_{\tau=0} = \Delta\omega_{\text{эфф}} \Gamma_v(\omega_0, \xi)$$

— пространственная функция корреляции граничного поля, а $\Delta\omega_{\text{эфф}}$ — эффективная ширина полосы частот.

Переход от (11.19) к (11.20) возможен при выполнении неравенства

$$\left| \frac{\Delta k}{z} (\rho \rho_+ - \xi \rho_+ - \eta \rho) \right| = \frac{\Delta k}{2z} [(\rho_1 - \rho')^2 - (\rho_2 - \rho'')^2] \ll 1, \quad (11.21)$$

физический смысл которого заключается в том, что разность хода волн от разных частей отверстия должна быть мала по сравнению с длиной когерентности $l_k = c t_k \sim c/\Delta\omega$. Простые оценки показывают, что для выполнения неравенства (11.21) достаточно условия квазимохроматичности ($\Delta\omega \ll \omega_0$) и условия $\rho_+ \leq a$, которое требует, чтобы «центр тяжести» точек наблюдения $\rho_+ = 1/2(\rho_1 + \rho_2)$ не выходил за пределы размеров отверстия a .

2. Фокусировка случайных волн. Дифракционную картину в фокусе линзы можно получить из предыдущих результатов при помощи простых преобразований, поскольку поле

в фокальной плоскости линзы подобно полю отверстия на бесконечности.

Пусть в отверстии непрозрачного экрана находится тонкая линза с главным фокусным расстоянием F . Действие линзы можно описать, введя под знак интеграла в (11.3) фазовый множитель $\exp\{-ik\rho'^2/2F\}$:

$$u(r) = \frac{ke^{ikz}}{2\pi iz} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') v(\rho') \exp\left(-\frac{ik\rho'^2}{2F}\right) \exp\left(\frac{ik(\rho-\rho')^2}{2z}\right) d^2\rho'. \quad (11.22)$$

В главной фокальной плоскости $z=F$ показатель экспоненты упрощается и поле $u(\rho, F)$ выражается просто преобразованием Фурье от $M(\rho') v(\rho')$:

$$u(\rho, F) = \frac{k \exp\left[ik\left(F + \frac{\rho^2}{2F}\right)\right]}{2\pi i F} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') v(\rho') \exp\left(-\frac{ik\rho\rho'}{F}\right) d^2\rho'. \quad (11.23)$$

От фраунгофера приближения (11.11) для поля отверстия (без линзы) выражение (11.23) отличается только заменой z на F , так что формулы для функций корреляции повторяют соответствующие выражения из п. 1. Так, при $a \ll l_v$ (малое отверстие) распределение интенсивности в фокальной плоскости оказывается таким же, как и для пространственно когерентной плоской волны. В противоположном случае $a \gg l_v$ (большое отверстие) распределение интенсивности может быть получено из (11.13):

$$\bar{I}_u(\rho_+, F) = \frac{k^2 S}{(2\pi F)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\xi) \exp\left(-\frac{ik\rho_+ \xi}{F}\right) d^2\xi \quad (a \gg l_v).$$

Размер фокального пятна в этом случае дается выражением $\rho_\Phi \sim \lambda F / l_v$, т. е. оно в a/l_v раз больше, чем для детерминированного поля плоской волны ($\rho_\Phi \sim \lambda F/a$). Однако интенсивность в центре дифракционной картины теперь равна

$$\bar{I}_u(\rho_+ = 0, F) \approx \frac{k^2 S S_v \bar{I}_v}{(2\pi F)^2},$$

что примерно в $S/S_v \sim (a/l_v)^2$ раз меньше, чем при когерентном освещении (малое отверстие). Разумеется, полная интенсивность, полученная интегрированием \bar{I}_u по всей плоскости $z=F$, в обоих случаях одинакова и равна полной «входной» интенсивности $\bar{I}_v S$.

Как и при дифракции на отверстии, распределение интенсивности для квазимонохроматического поля оказывается практически таким же, как и для строго монохроматической волны. Более того, в оптике даже в случае белого света, у которого $\Delta\phi \sim \omega_0$, распределение интенсивности в плоскости $z = F$ лишь незначительно отличается от соответствующей картины для монохроматического поля. Именно поэтому при рассмотрении задач о формировании оптического изображения допустимо пренебрежение эффектами, обусловленными временнй некогерентностью поля [21, 36].

3. О роли пространственной когерентности освещения в формировании оптического изображения. Рассмотрим простейшую оптическую систему, содержащую только одну тонкую линзу (рис. 7). Полупрозрачный

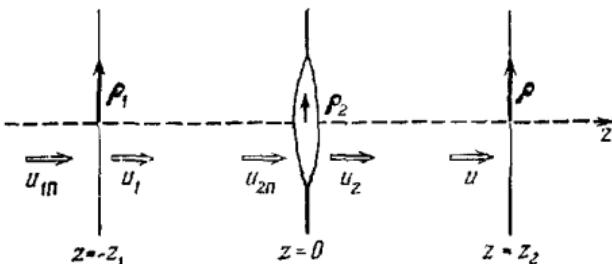


Рис. 7.

объект, например диапозитив, характеризуемый комплексным коэффициентом пропускания $f(\rho_1)$, расположен в предметной плоскости $z = -z_1$. При освещении этого объекта слева плоской монохроматической волной $u_{1\text{над}} = u_{1\text{n}}(\rho, z)$ непосредственно за объектом создается поле

$$u_1(\rho_1) = f(\rho_1) v(\rho_1), \quad v(\rho_1) \equiv u_{1\text{n}}(\rho, z)|_{z=-z_1}, \quad (11.24)$$

где ρ_1 — радиус-вектор точки в предметной плоскости.

В плоскости $z = 0$, где расположена линза, образуется поле $u_{2\text{n}}(\rho_2)$ (ρ_2 — вектор в плоскости $z = 0$), которое во Френелевском приближении (9.17) равно

$$u_{2\text{n}}(\rho_2) = \frac{ke^{ikz_1}}{2\pi iz_1} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho_1) \exp\left[\frac{ik(\rho_2 - \rho_1)^2}{2z_1}\right] d^2\rho_1. \quad (11.25)$$

«На выходе» линзы возникает поле

$$u_2(\rho_2) = u_{2\text{n}}(\rho_2) M(\rho_2) \exp\left(-\frac{ik\rho_2^2}{2F}\right), \quad (11.26)$$

где множитель $M(\rho_2)$, равный нулю вне линзы и единице на линзе, описывает действие ограничивающей линзу диафрагмы, а множитель $\exp\{-ik\rho_2^2/2F\}$ — действие линзы с фокусным расстоянием F .

Наконец, пересчет поля (11.26) от линзы к плоскости изображения $z = z_2$ также может быть произведен во френелевском приближении:

$$u(\rho) = \frac{ke^{ikz_2}}{2\pi iz_2} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho_1) \exp\left(\frac{ik(\rho - \rho_1)^2}{2z_2}\right) d^2\rho_1. \quad (11.27)$$

Выражения (11.24) — (11.27) связывают поле $u(\rho)$ в плоскости изображения с коэффициентом пропускания $f(\rho_1)$, характеризующим объект, и с первичным полем $v(\rho_1)$, свойства которого определяются источником света. Не рассматривая собственно оптический аспект задачи, уделим основное внимание особенностям формирования изображения в зависимости от степени пространственной когерентности освещения полупрозрачного объекта.

С этой целью примем с самого начала, что плоскости предмета и изображения сопряжены в смысле геометрической оптики, т. е. $1/z_1 + 1/z_2 = 1/F$. Подставив последовательно (11.26), (11.25) и (11.24) в (11.27), получаем

$$u(\rho) = \frac{-k^2}{4\pi^2 z_1 z_2} \exp\left[ik\left(z_1 + z_2 + \frac{\rho^2}{2z_2}\right)\right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho_1) v(\rho_1) M(\rho_2) \exp\left[-ik\rho_2\left(\frac{\rho}{z_2} + \frac{\rho_1}{z_1}\right) + ik\frac{\rho_1^2}{2z_1}\right] d^2\rho_1 d^2\rho_2.$$

Интегрирование по ρ_2 дает

$$\int M(\rho_2) \exp\left[-ik\rho_2\left(\frac{\rho}{z_2} + \frac{\rho_1}{z_1}\right)\right] d^2\rho_2 = S \mathcal{F}_M\left[k\left(\frac{\rho}{z_2} + \frac{\rho_1}{z_1}\right)\right],$$

где S — площадь отверстия, а через $\mathcal{F}_M(x)$ обозначена нормированная к единице ($\mathcal{F}_M(0) = 1$) трансформанта Фурье от $M(\rho)$ (см. (11.14)). В результате

$$u(\rho) = -\frac{k^2 S \exp[ik(z_1 + z_2 + \rho^2/2z_2)]}{4\pi^2 z_1 z_2} \int_{-\infty}^{\infty} v(\rho_1) f(\rho_1) \mathcal{F}_M\left[k\left(\frac{\rho}{z_2} + \frac{\rho_1}{z_1}\right)\right] \times \\ \times \exp\left(\frac{ik\rho_1^2}{2z_1}\right) d^2\rho_1. \quad (11.28)$$

Выражение (11.28) представляет собой частный случай более общей формулы

$$u(\rho) = \int v(\rho_1) f(\rho_1) \mathcal{P}(\rho, \rho_1) d^2\rho_1, \quad (11.29)$$

которая принадлежит к соотношениям типа (9.2) и в рассматриваемой задаче связывает поле в предметной плоскости произвольной оптической системы с облучающим полем $v(\rho_1)$ и функцией пропускания объекта $f(\rho_1)$. Функцию $\mathcal{P}(\rho, \rho_1)$ называют *аппаратной функцией* системы. Характерный масштаб изменения аппаратной функции в плоскости изображения (т. е. по ρ) — это радиус дифракционного пятна, отвечающего точечному объекту, а масштаб изменения \mathcal{P} по аргументу ρ_1 определяет размер области в плоскости предмета, дающей заметный вклад в поле в данной точке плоскости изображения. Иными словами, это предел разрешения оптической системы.

В рассматриваемом случае однолинзовой системы с круглой диафрагмой аппаратная функция равна

$$\mathcal{P}(\rho, \rho_1) = -\frac{k^2 S \exp [ik(z_1 + z_2 + \rho^2/2z_2 - \rho_1^2/2z_1)]}{4\pi^2 z_1 z_2} \frac{2J_1(ka)}{ka}, \quad (11.30)$$

где $k = k|\rho/z_2 + \rho_1/z_1|$. Согласно (11.30) точечному объекту, помещенному в точку ρ_{10} , отвечает дифракционное пятно с центром в точке $\rho_0 = -\rho_{10}z_2/z_1$. Отношение z_2/z_1 характеризует увеличение данной системы, а знак минус отвечает перевернутому изображению. Так как функция Бесселя $J_1(ka)$ первый раз обращается в нуль при $ka = 3,83$, характерным масштабом аппаратной функции по ρ может служить радиус первого темного кольца Эйри в дифракционном изображении точечного объекта, равный $\frac{3,83}{ka} z_2 \approx 0,61 \lambda \frac{z_2}{a}$, тогда как масштаб изменения по ρ_1 (с точностью до множителя порядка единицы — это релеевский предел разрешения) равен $\delta = 0,61 \lambda \frac{z_1}{a}$.

При анализе свойств изображения мы будем исходить из общей формулы (11.29), а частный вид этой формулы (11.28) используем только для иллюстрации общих выводов. Согласно (11.29) при освещении объектов частично когерентным светом средняя интенсивность поля в плоскости изображения равна

$$\bar{I}(\rho) = \int \Gamma_v(\rho', \rho'') f(\rho') f^*(\rho'') \mathcal{P}(\rho, \rho') \mathcal{P}^*(\rho, \rho'') d^2\rho' d^2\rho'', \quad (11.31)$$

где

$$\Gamma_v(\rho', \rho'') = \langle v(\rho') v^*(\rho'') \rangle$$

— пространственная функция когерентности первичного поля.

Для заданного объекта (функция f фиксирована) характер распределения интенсивности в предметной плоскости зависит

от соотношения между радиусом когерентности первичного поля l_v (это характерный масштаб изменения функции когерентности Γ_v), размером области разрешения δ (характерный масштаб изменения аппаратной функции по ρ_1) и размером наиболее мелких деталей объекта ρ_{\min} . Соотношение между ρ_{\min} и δ определяется характеристиками соответственно объекта и оптического прибора. Если считать эти величины заданными, то воздействовать на изображение можно, только меняя l_v , т. е. меняя характер облучения.

Рассмотрим предельные случаи $l_v \gg \rho_{\min}$, δ и $l_v \ll \rho_{\min}$, δ , которые принято называть соответственно когерентным и некогерентным освещением предмета. При когерентном освещении ($l_v \gg \rho_{\min}$, δ) можно считать, что в области, существенной для интегрирования в (11.31) (в этой области обе функции $\mathcal{P}(\rho, \rho')$ и $\mathcal{P}^*(\rho, \rho'')$ отличны от нуля, так что $|\rho' - \rho''| \leq \delta$), функция когерентности $\Gamma_v(\rho' - \rho'')$ практически постоянна (поскольку $|\rho' - \rho''| \leq \delta \ll l_v$). Вынося ее за знак интеграла со значением \bar{l}_v , где $\bar{l}_v = \Gamma_v(0)$ — интенсивность облучающего поля, получаем

$$\bar{l}(\rho)_{\text{kog}} = \bar{l}_v \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho_1) \mathcal{P}(\rho, \rho_1) d^2 \rho_1 \right|^2. \quad (11.32)$$

Такую же формулу можно получить, разумеется, и непосредственно из (11.31), если считать первичное поле $v(\rho_1)$ когерентным на всей плоскости предмета. Из приведенного вывода видно, что требование когерентности на всем предмете является излишним: для справедливости (11.32) достаточно, чтобы первичное поле $v(\rho)$ было когерентным лишь в пределах области разрешения δ .

В другом предельном случае некогерентного освещения ($l_v \ll \delta, \rho_{\min}$) существенная для интегрирования область в (11.32) ограничена площадью когерентности с линейными размерами $|\rho' - \rho''| \leq l_v$. В пределах этой площади функции $f^*(\rho'')$ и $\mathcal{P}^*(\rho, \rho'')$ можно приближенно заменить соответственно на $f^*(\rho')$ и $\mathcal{P}^*(\rho, \rho')$, и в результате получим

$$\bar{l}(\rho)_{\text{неког}} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\rho') \mathcal{P}(\rho, \rho')|^2 d^2 \rho' \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_v(\rho' - \rho'') d^2 \rho''. \quad (11.33)$$

Внутренний интеграл равен $\bar{l}_v S_v$, где, подобно (11.15), введена площадь когерентности S_v , равная интегралу от коэффициента корреляции первичного поля $K_v = \Gamma_v / \bar{l}_v$.

Таким образом, распределение средней интенсивности в плоскости изображения при некогерентном освещении дается выражением

$$\bar{l}(\rho)_{\text{неког}} = \bar{l}_v S_v \int |f(\rho_1)|^2 |\mathcal{P}(\rho, \rho_1)|^2 d^2 \rho_1. \quad (11.33)$$

Формально это выражение можно получить из (11.31), считая, как и в (11.18), первичное поле дельта-коррелированным.

Формулы (11.32) и (11.33) существенно отличаются друг от друга. Можно сказать, что при когерентном (в указанном выше смысле, т. е. при $I_v \gg \delta, \rho_{min}$) освещении происходит преобразование самого комплексного коэффициента пропускания $f(\rho_1)$ (с передаточной функцией $\sqrt{\bar{I}_v} \mathcal{F}(\rho, \rho_1)$), а при некогерентном освещении ($I_v \ll \delta, \rho_{min}$) преобразуется квадрат модуля $|f(\rho_1)|^2$ (с передаточной функцией $\bar{I}_v S_v |\mathcal{F}(\rho, \rho_1)|^2$). Отсюда следует, в частности, что при некогерентном освещении изображение не зависит от фазы комплексной функции пропускания f , тогда как когерентное освещение может выявить резкие вариации фазы f даже при $|f| = \text{const}$. Например, если на некоторой линии в плоскости предмета фаза скачком меняется на π , а $|f| = \text{const}$, то, как следует из (11.32), в плоскости изображения на соответствующей (сопряженной) линии интенсивность $\bar{I}(\rho)$ обратится в нуль и мы увидим там темную полосу. Правда, при *плавном* (в масштабе δ) изменении модуля и аргумента коэффициента прозрачности, т. е. при $\rho_{min} \gg \delta$, оба вида освещения дают практически одинаковое изображение, так как в обоих случаях распределение интенсивности в плоскости изображения $\bar{I}(\rho)$ пропорционально $|f(\rho_1)|^2$.

Укажем еще на два различия между когерентным и некогерентным освещением. Во-первых, при одинаковой интенсивности освещения I_v , интенсивность в плоскости изображения при когерентном свете будет больше, чем при некогерентном, поскольку ширина углового спектра у некогерентного облучения больше, чем у когерентного. Во-вторых, в предельных случаях освещения возникают различия и в величине разрешающей способности: при некогерентном освещении размер наименьших различимых по Релею деталей несколько меньше (примерно на 30%), чем при когерентном. Это различие связано просто с тем, что входящий в формулу (11.33) квадрат модуля $|\mathcal{F}(\rho, \rho_1)|^2$ меняется в функции от координаты ρ_1 круче, чем сама аппаратная функция $\mathcal{F}(\rho, \rho_1)$ в формуле (11.32). В результате при разрешении двух точечных объектов с центрами в точках ρ'_1 и ρ''_1 провал между горбами в распределении интенсивности в плоскости изображения получается более глубоким, если световые колебания в точках ρ'_1 и ρ''_1 некогерентны. Провал можно сделать еще глубже, если добиться *отрицательной* корреляции освещающего поля в точках ρ'_1 и ρ''_1 (отрицательные значения может принимать, например, функция когерентности вида $2J_1(x)/x$, отвечающая равномерно светящемуся диску или же пучку света, пропущенному через малое круглое отверстие). Этот красивый по своей идее способ увеличения разрешающей способности дает, однако, весьма незначительный выигрыш (всего лишь на несколько

процентов) по сравнению с некогерентным облучением. Более подробно этот вопрос рассмотрен в книге [21].

Возникающие в оптике статистические задачи, конечно, не исчерпываются приведенными примерами. Среди других проблем упомянем пространственную фильтрацию, статистические вопросы, связанные с несовершенством оптических систем и с зернистостью фотоматериалов, использование оптических систем для корреляционного анализа и т. д. С этими и некоторыми другими приложениями можно познакомиться по работам [13—22]. Многие идеи, развитые первоначально в оптике, нашли применение и в радиотехнике [37].

§ 12. Воздействие полей случайными источниками

Флуктуации поля, возбуждаемого случайными источниками, представляют интерес для многих разделов физики. Здесь мы остановимся на излучении радиоантенн со случайными вариациями токов в раскрыве и рассмотрим особенности излучения большого числа независимых источников.

1. Статистика поля, излученного большой антенной. Причиной флуктуаций поля, излученного антенной, могут быть случайные отклонения амплитуд и фаз токов в апертуре от заданных значений, обусловленные различными факторами. Главными из них являются неровности антенного зеркала, разброс параметров излучающих вибраторов, случайные отклонения в системах возбуждения и т. д. Определенную роль играют также деформации антенн при изменении температуры или из-за ветровых нагрузок. Рассмотрим одну из моделей антены с флуктуациями токов.

Если размеры плоской антенны велики по сравнению с длиной волны, а токи в раскрыве монохроматические ($\sim e^{-i\omega t}$) и имеют только одну компоненту, скажем j_x , то в направлениях, не сильно отклоняющихся от нормали к плоскости раскрыва $z=0$, можно считать, что электрическое поле имеет только компоненту E_x , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta E_x + k^2 E_x = -\frac{4\pi i k}{c} j_x.$$

Таким образом, с учетом иных обозначений ($u=E_x$, $q=-\frac{4\pi i k}{c} j_x$) задача сводится к уже рассмотренной скалярной задаче (9.7), имеющей решение (9.8).

В случае антенн с плоским раскрывом токи сосредоточены в плоскости $z=0$, т. е. объемный интеграл (9.8) превращается в поверхностный. Сохраняя для плотности поверхностных токов

обозначение q , получаем

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S q(\mathbf{p}') \frac{e^{ikR}}{R} d^2 p', \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (12.1)$$

где для краткости опущен аргумент ω , а интегрирование распространяется на площадь раскрыва S .

Обычно представляет интерес поле в дальней (фраунгоферовой) зоне $z \gg ka^2$, где a — поперечник раскрыва. Можно поэтому воспользоваться приближением фраунгоферовой дифракции, т. е. формулой (9.10), которая в данном случае (поверхностные источники, излучение сосредоточено в узком конусе около оси z) принимает вид

$$u(\rho, z) = \frac{1}{4\pi z} \exp \left[ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} \right) \right] \int_S q(\rho') \exp \left(-\frac{ik\rho\rho'}{z} \right) d^2 \rho'. \quad (12.2)$$

Здесь $\rho = (x, y)$ — координаты точки наблюдения на удаленной плоскости $z = \text{const}$. Ограничимся нахождением среднего значения и пространственной функции корреляции поля, излученного большой антенной, имея в виду лишь основные эффекты, к которым приводят флуктуации токов в антенах. Систематическому изложению вопросов статистической теории антенн посвящена книга [38].

Как и в § 11, удобно ввести функцию $M(\rho)$, которая равна единице на раскрыве S и обращается в нуль вне S (см. (11.2)):

$$q(\rho) = M(\rho) [\bar{q}(\rho) + \tilde{q}(\rho)],$$

что позволяет раздвинуть пределы интегрирования в (12.2) до бесконечности:

$$u(\rho, z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi z} \exp \left[ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') [\bar{q}(\rho') + \tilde{q}(\rho')] \exp \left(-\frac{ik\rho\rho'}{z} \right) d^2 \rho'. \quad (12.3)$$

Среднее по ансамблю реализаций токов значение поля дается интегралом

$$\bar{u}(\rho, z) = \frac{1}{4\pi z} \exp \left[ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(\rho') M(\rho') \exp \left(-\frac{ik\rho\rho'}{z} \right) d^2 \rho',$$

который можно представить в виде

$$\bar{u}(\rho, z) = \frac{1}{4\pi z} \exp \left[ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} \right) \right] \bar{q}_m S_A \mathcal{T}_A \left(\frac{k\rho}{z} \right), \quad (12.4)$$

где \bar{q}_m — максимальное значение среднего тока в раскрыве, а $\mathcal{F}_A(\mathbf{x})$ — нормированная к единице ($\mathcal{F}_A(0)=1$) диаграмма направленности антенны:

$$\mathcal{F}_A(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_A} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') \frac{\bar{q}(\rho')}{\bar{q}_m} \exp(i\mathbf{x}\rho') d^2\rho', \quad (12.5)$$

причем направление на точку наблюдения (x, y) в плоскости $z=\text{const}$ задается вектором $\mathbf{x}=k\rho/z=(kx/z, ky/z)$. Наконец,

$$S_A = \frac{1}{\bar{q}_m} \int M(\rho') \bar{q}(\rho') d^2\rho'$$

— нормировочный множитель, значение которого близко к площади раскрыва ($S_A=S$ при $\bar{q}=\text{const}$).

Функция корреляции поля в плоскости $z=\text{const}$ (поперечная функция корреляции) выражается двукратным интегралом

$$\begin{aligned} \psi_{\perp}(\rho_1, \rho_2, z) &= \langle \tilde{u}(\rho_1, z) \tilde{u}^*(\rho_2, z) \rangle = \\ &= \frac{\exp[ik(\rho_1^2 - \rho_2^2)/2z]}{(4\pi z)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\rho') M(\rho'') \psi_q(\rho', \rho'') \times \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ik(\rho_1\rho' - \rho_2\rho'')}{z}\right] d^2\rho' d^2\rho'', \end{aligned} \quad (12.6)$$

где $\psi_q(\rho', \rho'') = \langle \tilde{q}(\rho') \tilde{q}^*(\rho'') \rangle$ — функция корреляции тока. Вообще говоря, флуктуации тока в раскрыве статистически неоднородны, что связано с краевыми эффектами: вследствие взаимного влияния элементов излучающей системы статистика токов на краях раскрыва может отличаться от статистики в середине антенны. Однако в случае больших антенн, размеры которых a велики по сравнению с радиусом корреляции токов l_q , краевым эффектом можно пренебречь и считать, что на всем раскрыве

$$\psi_q(\rho', \rho'') \approx \psi_q(\rho' - \rho''), \quad l_q \ll a.$$

Принимая модель мелкомасштабных ($l_q \ll a$) флуктуаций тока в раскрыве, мы можем воспользоваться изложенными в § 11 приемами вычисления интегралов типа (11.5). Если обозначить $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\rho_+ = (\rho_1 + \rho_2)/2$, то (12.6) примет вид

$$\begin{aligned} \psi_{\perp}(\rho, \rho_+, z) &= \\ &= \frac{\exp(i k \rho \rho_+/z)}{(4\pi z)^2} \sigma_q^2 \int_{-\infty}^{\infty} M(\eta) \exp\left(\frac{i k \rho \eta}{z}\right) d^2\eta \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\xi) \exp\left(\frac{i k \rho_+ \xi}{z}\right) d^2\xi, \end{aligned} \quad (12.7)$$

где $\sigma_q^2 = \langle |\tilde{q}|^2 \rangle$ — дисперсия, а K_q — коэффициент корреляции флуктуаций тока.

Первый интеграл в (12.7) равен $S\mathcal{F}_M\left(\frac{k\rho}{z}\right)$, где S —площадь раскрыва, а \mathcal{F}_M дается выражением (11.14). Эта величина несколько отличается от диаграммы антенны (12.5), но при $\bar{q}=\text{const}$ $\mathcal{F}_M=\mathcal{F}_A$. Второй интеграл (по ξ) тоже можно записать в виде произведения двух множителей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_q(\xi) \exp\left(\frac{i k \rho + \xi}{z}\right) d^2\xi = S_q \mathcal{F}_q\left(\frac{k \rho_+}{z}\right), \quad (12.8)$$

где

$$S_q = \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\xi) d^2\xi$$

—эффективная площадь когерентности токов, а $\mathcal{F}_q(\kappa)$ —нормированная к единице ($\mathcal{F}_q(0)=1$) диаграмма направленности флукуационных токов.

С введением этих обозначений корреляционная функция ψ_{\perp} принимает вид

$$\psi_{\perp}(\rho, \rho_+, z) = \exp\left(i k \frac{\rho \rho_+}{z}\right) \frac{\sigma_q^2 S S_q}{(4\pi z)^2} \mathcal{F}_M\left(\frac{k \rho}{z}\right) \mathcal{F}_q\left(\frac{k \rho_+}{z}\right). \quad (12.9)$$

Эту формулу можно рассматривать как обобщение теоремы Ван-Циттерта—Цернике на случай конечного радиуса корреляции источников. При дельта-коррелированных флюктуациях $\mathcal{F}_q=1$, и тогда (12.9) отличается от (11.16) только обозначениями. Отсюда следует, что пространственное распределение дисперсии поля определяется сравнительно широкой (с угловым раствором $\sim \lambda/l_q$) диаграммой \mathcal{F}_q :

$$\sigma_u^2(\rho_+, z) = \psi_{\perp}(0, \rho_+, z) = \frac{\sigma_q^2 S S_q}{(4\pi z)^2} \mathcal{F}_q\left(\frac{k \rho_+}{z}\right), \quad (12.10)$$

тогда как пространственный коэффициент корреляции поля зависит от диаграммы \mathcal{F}_M :

$$K_{\perp}(\rho, z) = \frac{\psi_{\perp}(\rho, \rho_+, z)}{\sigma_u^2(\rho_+, z)} = \exp\left(i k \frac{\rho \rho_+}{z}\right) \mathcal{F}_M\left(\frac{k \rho}{z}\right).$$

Последняя имеет угловую ширину $\sim \lambda/a$, меньшую, чем ширина $\Delta\mathcal{F}_q$ флюкуационной диаграммы \mathcal{F}_q , поскольку $a \gg l_q$. Поперечный радиус корреляции l_{\perp} оказывается таким же, как в (11.12), т. е. $l_{\perp} \sim \lambda z/a$.

Пространственное распределение средней интенсивности \bar{I}_u можно получить при помощи (12.4) и (12.10):

$$\begin{aligned} \bar{I}_u(\rho_+, z) &= |\bar{u}(\rho_+, z)|^2 = \sigma_u^2(\rho_+, z) = \\ &= \frac{1}{(4\pi z)^2} \left[\bar{q}_m^2 S_A^2 \left| \mathcal{F}_A\left(\frac{k \rho_+}{z}\right) \right|^2 + \sigma_q^2 S_q S \mathcal{F}_q\left(\frac{k \rho_+}{z}\right) \right]. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Здесь первое слагаемое описывает вклад среднего поля, а второе—вклад флуктуационного поля. На рис. 8 показана зависимость \bar{I}_n от ρ_+ для различных соотношений между этими слагаемыми в предположении, что полная мощность, подводимая к антенне, постоянна, т. е.

$$|\bar{q}_m|^2 + \sigma_q^2 = \text{const} \equiv Q^2. \quad (12.12)$$

В отсутствие флуктуаций, когда $\sigma_q = 0$ и $|\bar{q}_m| = Q$, мы имеем невозмущенную интенсивность

$$J_0(\rho_+, z) = \frac{S_A^2 Q^2}{(4\pi z)^2} \left| \mathcal{F}_A \left(\frac{k\rho_+}{z} \right) \right|^2, \quad (12.13)$$

пропорциональную квадрату модуля диаграммы направленности \mathcal{F}_A . Ширина этой диаграммы, скажем расстояние между ее нулями, составляет $\lambda z/a$ (кривая 1 на рис. 8). При малых

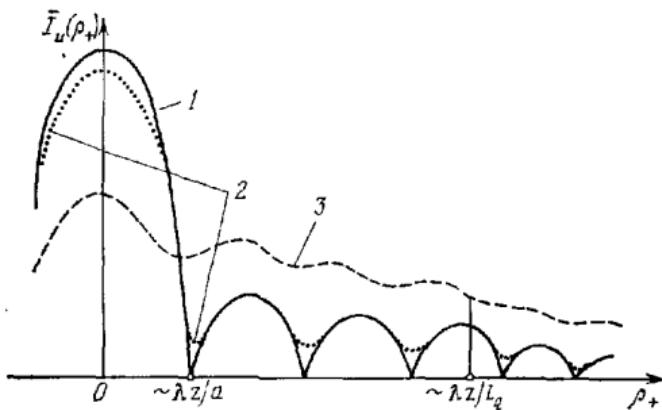


Рис. 8.

возмущениях появляется флуктуационная компонента, пропорциональная угловому спектру флуктуаций $\mathcal{F}_q(k\rho_+/z)$ и имеющая ширину $\Delta\rho_+ \sim \lambda z/l_q \gg \lambda z/a$. Эта составляющая приводит к «замыванию» нулей (или минимумов) регулярной диаграммы (кривая 2 на рис. 8) и к росту бокового излучения, т. е. излучения вне центрального максимума. Вместе с тем несколько уменьшается вклад регулярной составляющей поля, так как при неизменной мощности, подводимой к антенне, величина $|\bar{q}_m|^2$ уменьшается по сравнению с Q^2 : $|\bar{q}_m|^2 = Q^2 - \sigma_q^2$.

Распределение интенсивности в плоскости $z = \text{const}$ в случае примерного равенства регулярной и флуктуационной компонент в центре диаграммы изображает кривая 3 на рис. 8. Согласно

(12.11) равенство $|\bar{u}|^2 = \sigma_u^2$ достигается при $\sigma_q^2 = Q^2 \left(1 - \frac{SS_q}{S_A^2}\right)$; при этом квадрат среднего значения тока $|\bar{q}_m|^2 = Q^2 - \sigma_q^2$ мал по сравнению с Q^2 , т. е. $|\bar{q}_m|^2 \approx \frac{SS_q}{S_A^2} Q^2 \ll Q^2$. При столь больших возмущениях говорят о *разрушении* диаграммы направленности антенны.

С дальнейшим ростом флюктуаций регулярное слагаемое в (12.11) становится пренебрежимо малым и распределение средней интенсивности уже совсем не похоже на невозмущенное распределение (12.13):

$$\bar{I}_u(\rho_+, z) \approx \sigma_u^2(\rho_+, z) = \frac{SS_q}{(4\pi z)^3} \sigma_q^2 \mathcal{F}_q\left(\frac{k\rho_+}{z}\right).$$

Ширина диаграммы излучения здесь порядка $\lambda z/l_q$, а максимум интенсивности в S_q/S раз меньше, чем в отсутствие флюктуаций.

Уменьшение интенсивности в направлении максимума излучения удобно характеризовать величиной *коэффициента направленного действия* (к. н. д.), который показывает, во сколько раз интенсивность поля в центре главного лепестка диаграммы больше, чем у ненаправленной антенны, излучающей ту же мощность. Вычислим средний к. н. д. антенны $\langle G \rangle$ при сделанных выше допущениях. Очевидно, если G_0 — к. н. д. невозмущенной антенны, то

$$\langle G \rangle = G_0 \frac{\bar{I}_{\max}}{I_{0\max}}.$$

Так как

$$I_{0\max} = \frac{S_A^2 Q^2}{(4\pi z)^3}, \quad \bar{I}_{\max} = \frac{1}{(4\pi z)^3} [|\bar{q}_m|^2 S_A^2 + SS_q \sigma_q^2],$$

для величины $\langle G \rangle / G_0$ с учетом (12.12) получаем

$$\frac{\langle G \rangle}{G_0} = \frac{|\bar{q}_m|^2 + (S_q S / S_A^2) \sigma_q^2}{Q^2} = 1 - \left(1 - \frac{SS_q}{S_A^2}\right) \frac{\sigma_q^2}{Q^2}. \quad (12.14)$$

При малых возмущениях токов в раскрыве ($\sigma_q \ll Q$) средний к. н. д. антенны мало отличается от G_0 : $\langle G \rangle \approx G_0 (1 - \sigma_q^2/Q^2)$ (напомним, что $S_q \ll S$). Уменьшение среднего к. н. д. вдвое наступает уже при заметных флюктуациях, когда $\sigma_q^2 \sim 1/2 Q^2$. При сильных же флюктуациях, когда $\sigma_q \rightarrow Q$, а регулярная составляющая тока $|\bar{q}_m| = \sqrt{Q^2 - \sigma_q^2}$ стремится к нулю, получаем

$$\frac{\langle G \rangle}{G_0} \approx \frac{S_q S}{S_A^2} \sim \frac{S_q}{S_A}. \quad (12.15)$$

Таким образом, при сильных флуктуациях к. и. д. антенны тем меньше, чем больше неоднородностей $N = S/S_q$ содержит раскрыв: $\langle G \rangle = G_0/N$. Учитывая, что $G_0 \sim S/\lambda^2$, соотношение (12.15) можно записать иначе:

$$\langle G \rangle \sim \frac{S_q}{\lambda^2}.$$

Отсюда видно, что если радиус корреляции l_q сравним с длиной волны λ , то $S_q \approx l_q^2 \sim \lambda^2$ и $\langle G \rangle \sim 1$. Иными словами, при сильных ($\sigma_q \gg |\bar{q}_m|$) и мелких ($l_q \sim \lambda$) флуктуациях излучение антенны полностью теряет направленность.

В статистической теории антенн возможны и многие другие задачи. Например, может представлять интерес направление центрального лепестка диаграммы направленности, уровень бокового излучения, статистика амплитуды и фазы и т. д. Эти вопросы достаточно полно освещены в монографии [38]. Отметим, что при исследовании статистики излучения антенны основная трудность заключается, по-видимому, не в вычислении тех или иных интегралов, входящих в выражения для моментов поля, а в физически обоснованном задании статистики флуктуирующих по раскрыву антенных токов. Ясно, что предсказать эту статистику только из теоретических соображений невозможно. В то же время прямые измерения статистических характеристик сопряжены со значительными трудностями, в частности, из-за того, что при внесении в антенну измерительных зондов распределение токов в ней меняется. Косвенное же нахождение флуктуаций путем измерения полей, излученных антенной, тоже не дает исчерпывающего решения проблемы: такие измерения подвержены влиянию дополнительных посторонних факторов (расположенные рядом предметы и постройки, неровности местности и т. д.), не говоря уже о том, что измерения поля сложны сами по себе как в ближней, так и в дальней зонах.

2. Статистика поля, излученного системой независимых источников. Для простоты будем считать волновое поле скалярным, а источники — точечными. Если j -й точечный источник движется по траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j(t)$, а его интенсивность меняется по закону (вообще говоря, случайному) $Q_j(t)$, то для системы N точечных источников правая часть волнового уравнения (9.4) запишется в виде

$$q(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N!} Q_j(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)].$$

В результате поле излучения (9.5) будет выражаться суммой

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N Q_j \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)|}{c} \right), \quad (12.16)$$

которой $|r - r_j(t)|$ — расстояние от точки наблюдения до j -го источника.

Не интересуясь средним значением поля, которое в подавляющем большинстве задач равно нулю, вычислим пространственно-временную функцию когерентности, сначала — для системы *неподвижных* источников ($r_j = \text{const}$). В силу (12.16)

$$\Gamma(t', r'; t'', r'') = \langle u(t', r') u^*(t'', r'') \rangle =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \overline{\left\langle Q_j \left(t' - \frac{1}{c} |r' - r_j| \right) Q_l^* \left(t'' - \frac{1}{c} |r'' - r_l| \right) \right\rangle}, \quad (12.17)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю положений источников, а черта сверху — усреднение по ансамблю реализаций случайных процессов $Q_j(t)$.

Выражение (12.17) принимает особенно простой вид для системы *независимых и одинаковых* источников. Для такой системы при $j \neq l$

$$\overline{Q_j(t') Q_l^*(t'')} = 0,$$

и если одинаковую для всех процессов $Q_j(t)$ корреляционную функцию обозначить через $\Psi_Q(\tau)$ (предполагается стационарность этих процессов), то двойная сумма (12.17) превратится в сумму N одинаковых слагаемых:

$$\Gamma_a(\tau; r_1, r_2) = \frac{N}{(4\pi)^2} \left\langle \frac{\Psi_Q(\tau - s/c)}{|r_1 - R| |r_2 - R|} \right\rangle,$$

где $\tau = t_1 - t_2$, а $s = |r_1 - R| - |r_2 - R|$ — разности хода от источника, находящегося в точке R до точек наблюдения r_1 и r_2 (рис. 9).

Усреднение по положениям источников можно представить виде интеграла по объему с весовой функцией $w(R)$, которая представляет собой плотность вероятностей для радиуса-вектора R :

$$\Gamma_a(\tau; r_1, r_2) = \frac{N}{(4\pi)^2} \int \frac{\Psi_Q(\tau - s/c)}{|r_1 - R| |r_2 - R|} w(R) d^3R,$$

или, если ввести среднюю концентрацию источников $\bar{n}(R) = Nw(R)$,

$$\Gamma_a(\tau; r_1, r_2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int \frac{\Psi_Q(\tau - s/c)}{|r_1 - R| |r_2 - R|} \bar{n}(R) d^3R. \quad (12.18)$$

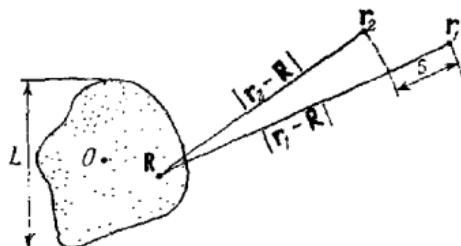


Рис. 9.

В частном случае, когда источники распределены по объему V равномерно, $n = N/V = \text{const}$.

Временная функция когерентности может быть получена из (12.18), если положить $r_1 = r_2 = r$. Тогда $s = 0$ и

$$\Gamma_u(\tau; r, r) = \frac{\Phi_Q(\tau)}{(4\pi)^2} \int \frac{\bar{n}(R)}{|r - R|^2} d^3R.$$

Отсюда видно, что коэффициенты времений корреляции поля и источников совпадают: $K_u(\tau) = K_Q(\tau)$, т. е. временная когерентность излученного поля оказывается такой же, как у источников. Это естественно, так как при неподвижных источниках изменения поля обусловлены только изменениями функций $Q_j(t)$.

Обращаясь к пространственной корреляции излученного поля, рассмотрим некоторые частные случаи.

Если размеры «облака» источников малы по сравнению со средней длиной волны излучения λ_0 , $L \sim V^{1/3} \ll \lambda_0$, то можно считать задержку s/c в формуле (12.18) постоянной величиной, равной $s_0/c = (|r_1 - R_0| - |r_2 - R_0|)/c = (r_1 - r_2)/c$, где $R_0 = 0$ — центр объема V . Для точек наблюдения r_1 и r_2 , лежащих вне объема V , тогда находим

$$\Gamma_u(\tau; r_1, r_2) \approx \frac{N\Phi_Q(\tau - s_0/c)}{(4\pi)^2 r_1 r_2},$$

где учтено, что $\int \bar{n}(R) d^3R = N$. При $\tau = 0$ отсюда получается пространственная функция когерентности излучателя малых размеров:

$$\Gamma_u(0; r_1, r_2) = \frac{N\Phi_Q(-s_0/c)}{(4\pi)^2 r_1 r_2}, \quad L \ll \lambda_0. \quad (12.19)$$

Согласно (12.19) поле пространственно когерентно внутри шарового слоя толщины $c\tau_k$, где τ_k — время корреляции источников. Таким образом, пространственный радиус корреляции l_k совпадает в данном случае с длиной когерентного цуга $c\tau_k$.

Иначе обстоит дело для больших (по сравнению с λ_0) объемов V . Соответствующие закономерности проще всего установить при помощи величины $\Gamma_u(\omega; r_1, r_2)$, являющейся преобразованием Фурье по времени от $\Gamma_u(\tau; r_1, r_2)$ ¹. Для функции когерентности (12.18) имеем [44]

$$\begin{aligned} \Gamma_u(\omega; r_1, r_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_u(\tau, r_1, r_2) e^{i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} g_Q(\omega) \int \frac{\bar{n}(R) e^{ikr}}{|r_1 - R||r_2 - R|} d^3R. \end{aligned} \quad (12.20)$$

¹) В оптике эту величину называют *взаимной спектральной интенсивностью*, так как она относится к *взаимной функции когерентности* $\Gamma_u(\tau; r_1, r_2)$, характеризующей статистическую связь поля в двух точках,

Здесь $k = \omega/c$, а

$$g_Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_Q(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

— спектральная плотность процесса $Q(t)$.

Непосредственно из вида формулы (12.20) можно заключить, что если размеры «облака» источников L велики по сравнению с длиной волны λ , а точки r_1 и r_2 находятся внутри облака, то смещение любой из точек r_1 или r_2 на λ приведет к существенному изменению величины Γ_a , так как под интегралом имеется быстро осциллирующая функция e^{iks} . Отсюда следует, что внутри большого ($L \gg \lambda$) облака излучателей пространственный радиус корреляции сравним с длиной волны¹⁾:

$$l_a \sim \lambda.$$

По мере удаления точек наблюдения от облака должно, очевидно, происходить некоторое упорядочение интерференционной картины — хотя бы из-за того, что волны будут приходить теперь только из ограниченного телесного угла. Это упорядочение проявляется в увеличении пространственного радиуса корреляции вдали от системы излучателей, подобно вытекающему из теоремы Ван-Циттерта — Цернике увеличению l_a для дифракционного поля отверстия (§ 11). Теорема Ван-Циттерта — Цернике может быть сформулирована и для системы независимых излучателей, но вывод оказывается несколько сложнее, чем в задаче о дифракции случайного поля.

Приведем только окончательный результат. Пусть точки r_1 и r_2 лежат в плоскости $z = \text{const}$, при этом $r_{1,2} = (\rho_{1,2}, z)$. У вектора R тоже выделим продольную (z') и поперечную (ρ') координаты: $R = (\rho', z')$, $d^3R = d^2\rho' dz'$. Если расстояние от облака велико по сравнению с его поперечником ($z \gg L$), а точки наблюдения расположены не слишком далеко от оси z ($\rho_{1,2} \ll z$), то формула (12.20) принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma_a(\omega; \rho, \rho_+, z) &= \\ &= \frac{g_Q(\omega) \exp\left(\frac{ik\rho\rho_+}{z}\right)}{(4\pi z)^2} \int \bar{n}(\rho', z') \exp\left(-\frac{ik\rho\rho'}{z}\right) d^2\rho' dz', \quad (12.21) \end{aligned}$$

¹⁾ Простая иллюстрация: от брошенного в воду камня расходятся волны правильной круговой формы. Если же бросить пригоршню камней, то интерференция круговых волн создает в месте падения камней беспорядочную картину гребней и впадин, сменяющих друг друга при смещении примерно на длину волны в любом направлении.

где $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\rho_+ = (\rho_1 + \rho_2)/2$. Это соотношение эквивалентно (11.16), если под приведенной (к плоскости $z' = 0$) интенсивностью понимать величину

$$J(\rho') = \frac{1}{4\pi^2} g_Q(\omega) \bar{n}_s(\rho'), \quad (12.22)$$

где

$$\bar{n}_s(\rho') = \int \bar{n}(\mathbf{R}) dz' = \int \bar{n}(\rho', z') dz'$$

— число излучателей, приходящихся на единицу площади в плоскости $z=0$.

Теорема Ван-Циттерта — Цернике сохраняет силу и в случае движущихся источников, но спектральная плотность $g_Q(\omega)$, входящая в определение приведенной интенсивности (12.22), а также в формулы (12.20) и (12.21), должна быть усреднена по всем возможным значениям доплеровского смещения частоты, возникающего из-за движения источников. Иными словами, в формулах (12.20) — (12.22) нужно произвести замену

$$g_Q(\omega) \rightarrow \langle g_Q(\omega - \Omega_d) \rangle, \quad (12.23)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по распределению доплеровского сдвига $\Omega_d = \omega v_{||}/c$, пропорционального лучевой скорости $v_{||} = (m, v)$, $m = (\mathbf{r} - \mathbf{R})/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$.

Замена (12.23) справедлива при условии, что «длина свободного пробега» источника $l_{\text{своб}}$ (т. е. длина, на которой заметно меняется скорость излучателя, или же расстояние, проходимое источником за время корреляции излучаемого сигнала) мала по сравнению с расстоянием $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ до точки наблюдения: $l_{\text{своб}} \ll \ll |\mathbf{r} - \mathbf{R}|$. В подавляющем большинстве практически интересных случаев это условие выполнено.

В качестве конкретного выражения для спектральной плотности $g_Q(\omega)$ укажем на результаты расчетов, проведенных в ч. I (задача 11 к гл. VI) для пуассоновского импульсного процесса, состоящего из следующих друг за другом отрезков экспоненциально затухающих синусоидальных цугов. Этот процесс может служить моделью излучения атомов, возбуждаемых ударами соседей. Окончательная формула для спектральной плотности (формула (1) в указанной задаче) имеет вид

$$g_Q(\omega) = \frac{n_1(\gamma + n_1)}{\pi(2\gamma + n_1)} \bar{A}^2 \left\langle \frac{1}{(\bar{\omega}_0 + \Omega_d - \omega)^2 + (\gamma + n_1)^2} \right\rangle, \quad (12.24)$$

где n_1 — средняя частота соударений, γ — радиационная ширина линий излучения и одновременно показатель затухания импульсов вида $Q(t) = A \exp\{-(\gamma + i\bar{\omega}_0)t + i\beta\}$, A — случайная амплитуда со средним квадратом \bar{A}^2 , β — случайная фаза, распределенная

равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, а $\bar{\omega}_0$ — частота излучения в системе отсчета, в которой осциллятор покойится. В случае максвелловского распределения скоростей частиц формула (12.24), в зависимости от соотношения между шириной линии излучения $n_1 + \gamma$ и среднеквадратичным доплеровским уширением $\sigma_\omega = \sqrt{\bar{Q}_d^2}$, дает либо гауссову (при $\sigma_\omega \gg n_1 + \gamma$), либо лоренцеву (при $\sigma_\omega \ll n_1 + \gamma$) форму линии излучения.

Теорема Ван-Циттерта — Цернике допускает обобщение еще в одном направлении. Спектральная плотность (12.24) соответствует модели, в которой излучают атомы только одного сорта и только на одной частоте. Между тем в реальных нагретых газах могут содержаться атомы многих сортов, излучающие на многих частотах; в плотном облаке многие световые импульсы поглощаются другими атомами, не достигнув наблюдателя, и т. д. Все эти эффекты можно учесть в теореме Ван-Циттерта — Цернике, если под $J(\rho)$ понимать *сумму приведенных интенсивностей*, отвечающих различным линиям излучения:

$$J(\rho) = \sum_m J_m(\rho) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_m g_Q^{(m)}(\omega) \bar{n}_s^{(m)}(\rho).$$

Спектр каждой из этих линий излучения характеризуется собственной частотой излучателя $\bar{\omega}_0^{(m)}$, силой осциллятора \bar{A}_m^2 , радиационной шириной γ_m и средним числом столкновений $n_1^{(m)}$. Величина $\bar{n}_s^{(m)}(\rho)$ определяет тогда эффективную поверхностную концентрацию излучателей, импульсы от которых в состоянии выйти из объема V . Разумеется, если излучатели распределены не в объеме, а на поверхности, то при расчете следует с самого начала ввести вместо объемной концентрации $\bar{n}(\mathbf{R})$ поверхностную концентрацию $\bar{n}_s(\rho)$ (см., например, [39]).

Задачи

1. Выразить среднюю плотность звуковой энергии в жидкости $W = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \beta \rho^2$ и средний вектор Умова (плотность потока энергии) $\mathcal{S} = \rho \mathbf{v}$ через функцию когерентности потенциала скорости и через лучевую интенсивность.

Решение. Выразив давление ρ и скорость \mathbf{v} через потенциал скорости $\Phi(t, \mathbf{r})$:

$$\rho = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi,$$

имеем

$$W = \frac{\rho}{2} \left[(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right], \quad \mathcal{S} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla \Phi,$$

где $c = (\beta \rho)^{-1/2}$ — скорость звука, ρ — средняя плотность, β — сжимаемость жидкости. Если $\mu(t, \mathbf{r})$ — комплексный потенциал скорости (аналитический сигнал), отвечающий вещественному потенциальному $\Phi(t, \mathbf{r})$: $\Phi = \operatorname{Re} \mu$, то W и \mathcal{S}

записываются через u следующим образом:

$$W = \frac{\rho}{4} \left\{ |\nabla u|^2 + \frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \operatorname{Re} \left[(\nabla u)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\mathcal{S} = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \nabla u^* + \frac{\partial u}{\partial t} \nabla u \right).$$

Усреднение этих выражений дает

$$\langle W \rangle = \frac{\rho}{4} \left\{ \left(\nabla_1 \nabla_2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \right) [\Gamma_u(1, 2) + \operatorname{Re} \tilde{\Gamma}_u(1, 2)] \right\}_{2 \rightarrow 1}, \quad (1)$$

$$\langle \mathcal{S} \rangle = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial t_1} \nabla_2 [\Gamma_u(1, 2) + \tilde{\Gamma}_u(1, 2)] \right\}_{2 \rightarrow 1}.$$

Символом $2 \rightarrow 1$ здесь обозначен предельный переход $t_2 \rightarrow t_1$, $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$, который следует сделать после вычисления временных и пространственных производных. Заметим, что закон сохранения $\operatorname{div} \mathcal{S} + \partial W / \partial t = 0$, который должен выполняться и для средних значений $\langle W \rangle$ и $\langle \mathcal{S} \rangle$, при подстановке в него выражений (1) можно рассматривать как своеобразное уравнение сохранения для функций Γ_u и $\tilde{\Gamma}_u$.

Если поле u стационарно, то $\bar{u} = 0$, $\bar{\Gamma} = 0$, и тогда

$$\langle W \rangle = \frac{\rho}{4} \left[\left(\nabla_1 \nabla_2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \right) \Psi_u(1, 2) \right]_{2 \rightarrow 1},$$

$$\langle \mathcal{S} \rangle = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \nabla_2 \Psi_u(1, 2) \right)_{2 \rightarrow 1}.$$

Если поле u к тому же и однородно, то его корреляционная функция $\Psi_u(1, 2)$ имеет вид (9.27), что позволяет выразить $\langle W \rangle$ и $\langle \mathcal{S} \rangle$ через лучевую интенсивность:

$$\langle W \rangle = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty k^2 d\omega \oint \mathcal{I}(\omega, \mathbf{n}) do(\mathbf{n}),$$

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty k^2 d\omega \oint \mathbf{n} \cdot \mathcal{I}(\omega, \mathbf{n}) do(\mathbf{n}).$$

Для изотропного случайного звукового поля, очевидно, $\langle \mathcal{S} \rangle = 0$. Для квазимонохроматического звукового поля (спектр сосредоточен вблизи частоты ω_0) множитель k^2 в написанных выражениях можно вынести за знак интеграла со значением $k_0^2 = \omega_0^2/c^2$.

2. Найти общий вид функции корреляции изотропного, однородного и стационарного скалярного волнового поля.

Решение. Лучевая интенсивность $\mathcal{I}(\omega, \mathbf{n})$ для изотропного поля не зависит от направления: $\mathcal{I}(\omega, \mathbf{n}) = \mathcal{P}(\omega)$, так что корреляционная функция (9.27) выражается однократным интегралом:

$$\Psi_u(l, \mathbf{r}) = 4\pi \int_0^\infty \mathcal{P}(\omega) \frac{\sin kl}{kl} d\omega,$$

поскольку

$$\oint e^{ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} do(\mathbf{n}) = 4\pi \frac{\sin kr}{kr}.$$

3. Оценить продольный и поперечный радиусы корреляции волнового поля, лучевая интенсивность которого $\mathcal{J}(\omega, \mathbf{n})$ сосредоточена в узком конусе направлений с раствором $\theta \ll 1$.

Решение. Пусть ось z отвечает направлению, по которому лучевая интенсивность максимальна. Записав единичный вектор \mathbf{n} в виде

$$\mathbf{n} = l_z \mathbf{n}_z + \mathbf{n}_{\perp},$$

при $|n_{\perp}| \leq \theta \ll 1$ имеем $n_z = \sqrt{1 - n_{\perp}^2} \approx 1 - n_{\perp}^2/2$, так что $(n_r) \approx z - 1/2 n_{\perp}^2 z + (n_{\perp}, \mathbf{p})$, $\mathcal{J}(\omega, \mathbf{n}) \approx \mathcal{J}(\omega, \mathbf{n}_{\perp}, 1)$ и корреляционная функция (9.27) принимает вид

$$\Psi(t, r) =$$

$$= \int_0^{\infty} d\omega \exp(i k z - i \omega t) \oint \mathcal{J}(\omega, \mathbf{n}_{\perp}, 1) \exp\left(i k n_{\perp} \rho - \frac{i}{2} k n_{\perp}^2 z\right) d\omega(n), \quad (1)$$

где $\mathbf{p} = (x, y)$. Поперечный (l_{\perp}) и продольный (l_{\parallel}) радиусы корреляции оцениваются из условий $|k n_{\perp} \rho| \leq 1$, $|k n_{\perp}^2 z| \leq t$, если подставить в них $n_{\perp} \approx \theta$. В результате находим

$$l_{\perp} \sim \frac{1}{k \theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \quad l_{\parallel} \sim \frac{1}{k \theta^2} \sim \frac{\lambda}{\theta^2}. \quad (2)$$

4. Установить связь между лучевой интенсивностью и двумерным спектром (9.29) в случае узкого углового спектра [40].

Решение. В узком конусе $|n_{\perp}| \leq \theta \ll 1$ выполняется приближенное соотношение $d\omega(n) \approx dn_x dn_y$, которое можно представить в эквивалентной форме $d\omega(n) = k^{-2} dx_x dx_y = k^{-2} d^2 \mathbf{x}_{\perp}$, если ввести двумерный волновой вектор $\mathbf{x}_{\perp} = k \mathbf{n}_{\perp} = (k n_x, k n_y)$. Формула (1) предыдущей задачи принимает тогда вид двумерного спектрального разложения:

$$\Psi(t, r) = \int_0^{\infty} d\omega \exp(i k z - i \omega t) \int_{-\infty}^{\infty} k^{-2} \mathcal{J}(\omega, \mathbf{n}_{\perp}, 1) \exp\left(i \mathbf{x}_{\perp} \rho - \frac{i \mathbf{x}_{\perp}^2 z}{2k}\right) d^2 \mathbf{x}_{\perp}.$$

Сравнение этого разложения с разложением

$$\Psi(t, r) = \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega; \mathbf{x}_{\perp}, z) \exp(i \mathbf{x}_{\perp} \rho - i \omega t) d^2 \mathbf{x}_{\perp},$$

обратным (9.29), показывает, что

$$F(\omega; \mathbf{x}_{\perp}, z) = k^{-2} \mathcal{J}(\omega, \mathbf{n}_{\perp}, 1) \exp\left(i k z - \frac{i \mathbf{x}_{\perp}^2 z}{2k}\right).$$

5. Выразить среднюю плотность электромагнитной энергии и средний вектор Пойнтинга в вакууме через матрицу лучевых интенсивностей $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$, которая вводится аналогично (9.26):

$$G_{\alpha\beta}^{(E)}(\omega, \mathbf{x}) = \mathcal{J}_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{n}) k^{-2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{k}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad k \equiv \frac{\omega}{c};$$

при этом, подобно (9.27),

$$\Psi_{\alpha\beta}^{(E)}(t, r) = \int_0^{\infty} d\omega \oint \mathcal{J}_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{n}) e^{i(knr - \omega t)} d\omega(n). \quad (1)$$

Здесь $G_{\alpha\beta}^{(E)}$ — матрица спектральных плотностей, представляющая собой преобразование Фурье корреляционной матрицы свободного статистически однородного электромагнитного поля

$$\Psi_{\alpha\beta}^{(E)}(t, \tau) = \langle \tilde{E}_\alpha(t_1, \tau_1) \tilde{E}_\beta^*(t_2, \tau_2) \rangle.$$

Решение. Рассматривая случай стационарного и однородного электромагнитного поля с нулевым средним значением и учитывая, что в вакууме $|\mathbf{H}|^2 = |\mathbf{E}|^2$, имеем

$$\langle W \rangle = \frac{1}{16\pi} (\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle + \langle |\mathbf{H}|^2 \rangle) = \frac{1}{8\pi} \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle.$$

Но при $\bar{\mathbf{E}} = 0$ в силу (1)

$$\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \Psi_{\alpha\beta}^{(E)}(0, 0) = \int_0^\infty d\omega \oint \mathcal{I}(\omega, n) do(n),$$

где введена лучевая интенсивность

$$\mathcal{I}(\omega, n) = \sum_{\alpha=1}^3 \mathcal{I}_{\alpha\alpha}(\omega, n). \quad (2)$$

В результате имеем

$$\langle W \rangle = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty d\omega \oint \mathcal{I}(\omega, n) do(n).$$

Среднее значение вектора Пойнтинга

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \langle [\mathbf{E} \mathbf{H}^*] \rangle$$

можно получить, используя спектральные разложения для \mathbf{E} и \mathbf{H} и соотношение $\mathbf{H}_{\omega\kappa} = [n \mathbf{E}_{\omega\kappa}]$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \iint_{-\infty}^{\infty} d^3\kappa' d^3\kappa'' \iint_0^\infty d\omega' d\omega'' \times \\ &\quad \times \langle [\mathbf{E}_{\omega'\kappa'}^* [\mathbf{n}'' \mathbf{E}_{\omega''\kappa''}^*]] \rangle \exp[i(\kappa' - \kappa'')\tau - i(\omega' - \omega'')], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{n}'' = \mathbf{k}''/\kappa''$. Раскрывая двойное векторное произведение, получаем выражение

$$\langle \dots \rangle = \mathbf{n}'' \langle \mathbf{E}_{\omega'\kappa'} \mathbf{E}_{\omega''\kappa''}^* \rangle - \langle \mathbf{E}_{\omega''\kappa''}^* (\mathbf{n}' \mathbf{E}_{\omega'\kappa'}) \rangle.$$

Вследствие дельта-корреляции спектральных амплитуд вектор \mathbf{n}'' можно заменить на $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/\kappa'$, но в силу поперечности электромагнитного поля $(\mathbf{n}' \mathbf{E}_{\omega'\kappa'}) = 0$. В результате, с учетом (2), имеем

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle &= \sum_{\alpha=1}^3 \mathbf{n}' G_{\alpha\alpha}(\omega', \kappa') \delta(\omega' - \omega'') \delta(\kappa' - \kappa'') = \\ &= \mathbf{n}' \mathcal{I}(\omega, n) k^{-2} \delta(\omega' - \omega'') \delta(\kappa' - \kappa'') \delta(\kappa' - k). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3), получаем

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \int_0^\infty d\omega \oint n \mathcal{I}(\omega, n) do(n). \quad (4)$$

Легко видеть, что электромагнитные формулы для $\langle W \rangle$ и $\langle J \rangle$ отличаются от акустических выражений (см. задачу 1) только множителем $1/\theta^2$ вместо $\rho k^2/2$.

Из (4) следует, что величина $\frac{c}{8\pi} n J(\omega, n)$ имеет смысл потока энергии через единичную площадку в единичный телесный угол в расчете на единичный частотный интервал. Именно так вводится лучевая интенсивность (яркость) в феноменологической теории переноса излучения [41, 42].

6. Построить корреляционную матрицу $\Psi_{\alpha\beta}^{(E)}$ для изотропного, однородного и стационарного электромагнитного поля.

Решение. Входящая в формулу (1) предыдущей задачи матрица $J_{\alpha\beta}$ в случае изотропного поля должна иметь вид

$$J_{\alpha\beta}(\omega, n) = P(\omega) \delta_{\alpha\beta} + Q(\omega) n_\alpha n_\beta.$$

Кроме того, в силу поперечности электромагнитных волн в свободном пространстве матрица $J_{\alpha\beta}$ должна удовлетворять условиям

$$n_\alpha J_{\alpha\beta} = n_\beta J_{\alpha\beta} = 0.$$

Это возможно только при $Q = -P$, и тогда

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}^{(E)}(t, r) &= \int_0^\infty d\omega P(\omega) \oint e^{iknr - i\omega t} (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) d\omega (n) = \\ &= \int_0^\infty d\omega P(\omega) e^{-i\omega t} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{(ik)^2} \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \right) \oint e^{iknr} d\omega (n) = \\ &= \int_0^\infty d\omega P(\omega) e^{-i\omega t} k^{-2} \left\{ \left[k^2 s + \frac{s'}{r} \right] \delta_{\alpha\beta} + \left[s'' - \frac{s'}{r} \right] \frac{r_\alpha r_\beta}{r^2} \right\}, \end{aligned}$$

где $s = 4\pi \sin kr / kr$, а штрихом обозначено дифференцирование по r . Лучевая интенсивность $J = \sum J_{\alpha\alpha}$ в данном случае равна $2P(\omega)$ и, следовательно, не зависит от направления; при этом, в соответствии с результатами задачи 5,

$$\langle J \rangle = 0, \text{ а } \langle W \rangle = \int_0^\infty P(\omega) d\omega.$$

7. Вычислить индекс мерцаний в дальней зоне для амплитудно-фазового экрана с логарифмически нормальным законом распределения вероятностей поля.

Решение. Пусть $v = e^{\chi + iS}$, где фаза S и уровень χ распределены по нормальному закону, так что v — логарифмически нормальное поле. Предположим, что $\bar{S} = 0$ и $\langle S\chi \rangle = 0$. В силу нормировки (10.23) $\bar{\chi} = -\sigma_\chi^2$. В результате

$$v_0 = \langle e^{\chi + iS} \rangle = e^{\bar{\chi} + 1/2 \langle (\chi + iS)^2 \rangle} = e^{-1/2 (\sigma_S^2 + \sigma_\chi^2)}.$$

Следовательно, в дальней зоне

$$\beta^2 = \beta_\infty^2 = 1 - |v_0|^4 = 1 - \exp \{-2(\sigma_S^2 + \sigma_\chi^2)\}.$$

В случае чисто амплитудных флуктуаций ($\sigma_S^2 = 0$) квадрат индекса мерцаний в дальней зоне равен $\beta_\infty^2 = 1 - e^{-2\sigma_v^2}$, тогда как на самом экране $\beta^2 = \beta_0^2 = e^{4\sigma_v^2} - 1$. Очевидно, $\beta_0^2 > 1 > \beta_\infty^2$, т. е. амплитудные флуктуации за экраном сглаживаются.

8. Пусть поле в плоскости экрана *вещественно* и распределено по нормальному закону. Показать, что квадрат индекса мерцаний в дальней зоне вдвое меньше, чем на экране.

Решение. В дальней зоне, согласно (10.38), $\beta_\infty^2 = 1 - |v_0|^4$. На экране же

$$\beta^2 = \beta_0^2 = \langle v^4 \rangle - 1 = v_0^4 + 6v_0^2 \langle \tilde{v}^2 \rangle + \langle \tilde{v}^4 \rangle.$$

Но для вещественного нормального случайного поля $\langle \tilde{v}^4 \rangle - 3 \langle \tilde{v}^2 \rangle^2 = 3\sigma_v^2$. Поэтому, с учетом нормировки $v_0^2 + v_0^2 = 1$, имеем

$$\beta_0^2 = v_0^4 + 6v_0^2(1 - v_0^2) + 3(1 - v_0^2)^2 = 2(1 - v_0^4) = 2\beta_\infty^2,$$

т. е. $\beta_\infty^2 = 1/2\beta_0^2$. В этой и предыдущей задачах $\beta_\infty^2 < \beta_0^2$, потому что поле *v* порождается за экраном помимо амплитудных еще и фазовые флуктуации, которые, очевидно, не влияют на величину флуктуаций интенсивности.

9. Вывести из френелевского приближения (9.17) соотношение (10.13), согласно которому при падении плоской волны корреляционная функция за бесконечным экраном $\psi_\perp(\rho)$ совпадает с функцией корреляции граничного поля $\psi_v(\rho)$.

Решение. Во френелевском приближении

$$\psi_\perp(\rho_1, \rho_2, z) =$$

$$= \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_v(\rho' - \rho'') \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(\rho_1 - \rho')^2 - (\rho_2 - \rho'')^2] \right\} d^2\rho' d^2\rho''.$$

Вводя обозначения $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\rho_+ = (\rho_1 + \rho_2)/2$, $\xi = (\rho' - \rho'')$, $\eta = (\rho' + \rho'')/2$, получаем выражение

$$\psi_\perp(\rho, \rho_+, z) = \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_v(\xi) \exp \left\{ \frac{ik}{z} [\rho\rho_+ + \xi\eta - \eta\rho - \xi\rho_+] \right\} d^2\xi d^2\eta.$$

Интеграл по η здесь вычисляется точно и равен $\left(\frac{2\pi z}{k} \right)^2 \delta(\xi - \rho)$, что и приводит к соотношению $\psi_\perp(\rho, z) = \psi_v(\rho)$.

10. Найти закон изменения среднего значения и функции корреляции сферической волны, прошедшей через неограниченный статистически однородный хаотический экран.

Решение. Пусть слева от плоскости $z=0$, в которой расположен экран, находится источник, излучающий сферическую волну

$$\exp \{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\}/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|,$$

где $\mathbf{r}_0 = (0, -z_0)$ (рис. 10). Если $f(\rho)$ — комплексная функция пропускания экрана, то граничное поле в плоскости $z=0$ равно

$$v(\rho') = f(\rho') \frac{\exp(i k \sqrt{z_0^2 + \rho'^2})}{\sqrt{z_0^2 + \rho'^2}}.$$

Подставим это выражение для поля в формулу Грина (9.12) и, зафиксировав точку наблюдения $r = (\rho, z)$, разложим показатель экспоненты в ряд по степеням отклонения $\delta = \rho' - \rho_{\text{ст}}$ перемешной ρ' от стационарной точки $\rho_{\text{ст}} = \rho z / (z + z_0)$, лежащей на луче, соединяющем точку наблюдения с источником. Все предэкспоненциальные множители, кроме $f(\rho)$, заменим стационарными значениями, т. е. значениями при $\rho' = \rho_{\text{ст}}$.

Получившуюся приближенную формулу

$$u(\rho, z) \approx \frac{ke^{ikR_0}(z+z_0)^3}{2\pi i R_0^3 z z_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho_{\text{ст}} + \delta) \exp\left(\frac{ik}{2L}\left[\delta^2 - \frac{(\delta\rho)^2}{R_0^2}\right]\right) d^2\delta \quad (1)$$

можно назвать френелевским приближением для сферической волны. Здесь

$$R = |r - r_0| = \sqrt{(z+z_0)^2 + \rho^2}, \quad L = R_0 z z_0 / (z+z_0)^2.$$

Из (1) находим среднее поле

$$\bar{u}(r) = \bar{f} \frac{e^{ikR_0}}{R_0},$$

представляющее собой сферическую волну с амплитудой \bar{f} , и функцию корреляции поля в плоскости $z = \text{const}$:

$$\psi_u(\rho_1, \rho_2, z) = \psi_u(\rho, \rho_+, z) = \frac{\exp\left(ik \frac{\rho \rho_+}{R_0}\right)}{R_0^2} \psi_f\left(\rho \frac{z}{z+z_0}\right),$$

где $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\rho_+ = (\rho_1 + \rho_2)/2$. Аналогичное выражение получается и для функции когерентности.

В отличие от рассмотренного в § 10 случая плоской волны, функция корреляции сферической волны, прошедшей через экран, не сохраняется. В частности, радиус корреляции поля в плоскости $z = \text{const}$ растет при удалении от экрана пропорционально расстоянию от источника $l_u = l_f \frac{z+z_0}{z_0}$, где l_f — радиус

корреляции функции пропускания f . Роль волнового параметра в данной задаче играет величина $D_{\text{сф}} = 2L/kl_f^2$, которая при $z \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу

$D_{\text{max}} = 2z_0/kl_f^2$. Легко понять, что

при $D_{\text{max}} \ll 1$, когда радиус первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda z z_0 / (z+z_0)}$ при любых z меньше размера неоднородностей на экране l_f , поле сферической волны за экраном не нормализуется даже на бесконечности.

11. Найти распределение интенсивности поля в дальней зоне ограниченного хаотического экрана.

Решение. Поле в зоне Фраунгофера определяется выражением (11.11), в котором под v нужно понимать граничное поле $v(\rho) = f(\rho) u_n$, возникающее при падении плоской волны $u_n = e^{ikz}$ на хаотический экран с функцией пропускания $f(\rho)$. Распределение интенсивности в дальней зоне можно вычислить из (11.11) так же, как это было сделано в § 12 для поля (12.3), возбужденного антенной с флуктуирующими токами. Учитывая, что выражение (12.3) переходит в (11.11) при замене $q \rightarrow -2ikv$, по аналогии с распределе-

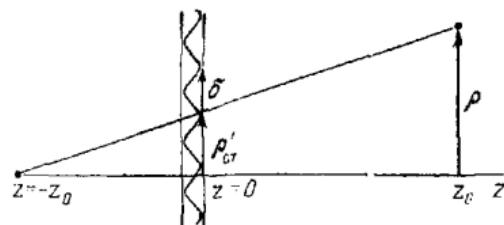


Рис. 10.

нием интенсивности (12.11) можно написать

$$\bar{I}_v(\rho_+, z) = \left(\frac{k}{2\pi z} \right)^2 \left[|\bar{v}|^2 S^2 \left| \mathcal{F} M \left(\frac{k\rho_+}{z} \right) \right|^2 + \sigma_v^2 S_v S \mathcal{F}_v \left(\frac{k\rho_+}{z} \right) \right], \quad (1)$$

где величины S_v и \mathcal{F}_v вводятся по аналогии с (12.8).

Заметим, что подобное же распределение интенсивности (с заменой $z \rightarrow F$) получится в фокальной плоскости линзы, поставленной непосредственно после ограниченного хаотического экрана. В обоих случаях при переходе от слабых флуктуаций ($\sigma_v \ll v$) к сильным ($\sigma_v \gg v$) распределение интенсивности трансформируется так же, как на рис. 8.

12. Найти средний коэффициент направленного действия параболической зеркальной антенны с пологими неровностями.

Решение. Пусть $z = \rho^2/2F$ — уравнение невозмущенного параболоида, а $z = \rho^2/2F + \zeta(\rho)$ — уравнение зеркала при наличии неровностей $\zeta(\rho)$. Облучатель, помещенный в фокусе параболоида (рис. 11), посыпает на зеркало сферическую волну, которая после отражения превращается в искаженную

плоскую волну. При плавных (в масштабе λ) неровностях зеркала искажение поля в апертуре можно учесть введением фазового множителя $\exp[iS(\rho)] = \exp[2ik\zeta(\rho)]$ ($2k\zeta$ — дополнительный набег фазы, обусловленный неровностями). Тем самым задача сведена к расчету дифракции поля с граничным значением на апертуре $v(\rho) = \exp[2ik\zeta(\rho)]$.

Если высота неровностей $\zeta(\rho)$ распределена по нормальному закону, то

$$\bar{v} = \exp(-2k^2\sigma_\zeta^2),$$

$$\sigma_v^2 = 1 - |\bar{v}|^2 = 1 - e^{-4k^2\sigma_\zeta^2},$$

при этом для малых неровностей

$$\sigma_v^2 \approx 4k^2\sigma_\zeta^2 \ll 1, \quad I_v \sim I_\zeta \quad (k\sigma_\zeta \ll 1),$$

а для больших неровностей

$$\sigma_v^2 \approx 1, \quad I_v \sim I_\zeta/k\sigma_\zeta \ll I_\zeta \quad (k\sigma_\zeta \gg 1),$$

где I_ζ — радиус корреляции неровностей, а величина $4k^2\sigma_\zeta^2$ играет ту же роль, что и дисперсия фазы σ_ζ^2 в теории фазового экрана.

Используя для расчета к. н. д. формулу (12.14), в которой, с учетом предыдущей задачи, можно заменить S_q , σ_q^2 , $|q|^2$ и $Q^2 = \sigma_q^2 + |q|^2$ соответственно на S_v , σ_v^2 , $|\bar{v}|^2$ и $\sigma_v^2 + |\bar{v}|^2 = 1$, получаем

$$\bar{G} = G_0 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{S_v}{S} \right) \sigma_v^2 \right\} = G_0 \left\{ \frac{S_v}{S} + \left(1 - \frac{S_v}{S} \right) e^{-4k^2\sigma_\zeta^2} \right\}$$

(здесь, кроме того, учтено, что $S_A = S$ при $\bar{v} = \text{const}$). В предельных случаях имеем

$$\begin{aligned}\bar{G} &= G_0 (1 - \sigma_v^2) \approx G_0 (1 - 4k^2 \sigma_\zeta^2) \quad (k\sigma_\zeta \ll 1), \\ \bar{G} &\approx G_0 \left(\frac{S_v}{S} + e^{-4k^2 \sigma_\zeta^2} \right) \quad (k\sigma_\zeta \gg 1),\end{aligned}\quad (1)$$

или, если принять во внимание оценку $S_v \sim l_v^2 \sim l_\zeta^2 / (k\sigma_\zeta)^2$,

$$\bar{G} \approx G_0 \left(e^{-4k^2 \sigma_\zeta^2} + \frac{l_\zeta^2}{S k^2 \sigma_\zeta^2} \right) \quad (k\sigma_\zeta \gg 1). \quad (2)$$

Качественный ход зависимости нормированного среднего к. н. д. \bar{G}/G_0 от среднеквадратичного набега фазы $k\sigma_\zeta$ показан на рис. 12. Начальный участок кривой отвечает первой формуле (1), а конечный — формуле (2). Из рисунка видно, что заметное уменьшение к. н. д. начинается со значений $k\sigma_\zeta \sim 1$, т. е. при $\sigma_\zeta \sim 1/k = \lambda/2\pi$, что согласуется с инженерным критерием гладкости зеркал $\sigma_\zeta < \lambda/8$. Для больших зеркальных антенн современных радиотелескопов величина σ_ζ может быть доведена примерно до сантиметра. В соответствии с критерием $\sigma_\zeta < \lambda/8$ резкое снижение эффективности таких антенн происходит при переходе от сантиметрового к миллиметровому диапазону волн.

13. Оценить продольный радиус корреляции поля, созданного облаком статистически независимых источников.

Решение. Расположим точки наблюдения r_1 и r_2 на оси z : $r_1 = (0, 0, z + \zeta)$, $r_2 = (0, 0, z)$. Для входящей в формулу (12.20) разности хода s имеем

$$s = |r_1 - R| - |r_2 - R| = \sqrt{(z + \zeta - z')^2 + p'^2} - \sqrt{(z - z')^2 + p'^2}, \quad (1)$$

где переменные интегрирования p' и z' меняются в пределах объема V , занятого источниками: $|p'| \leq L$, $|z'| \leq L$. При анализе продольной корреляции рассмотрим три характерные зоны.

В ближней зоне ($z \leq L$) можно ожидать малости l_1 по сравнению с L , что позволяет разложить (1) в степенной ряд по ζ и ограничиться только линейным членом:

$$s \approx \zeta |z - z'| / \sqrt{|z - z'|^2 + p'^2}. \quad (2)$$

При всех значениях p' и z' множитель при ζ не превышает единицы. Поэтому присутствие множителя $\exp(iks)$ под знаком интеграла в (12.20) проявится лишь при $k\zeta \gg 1$. Следовательно, продольный радиус корреляции может быть оценен из условия $k\zeta \sim 1$, т. е.

$$l_1 \sim \frac{1}{k} \sim \lambda \quad (z \leq L). \quad (3)$$

В промежуточной зоне ($L \ll z \ll kL^2$) отношения z'/z и p'/z малы по сравнению с единицей, в результате чего выражение (2) упрощается и

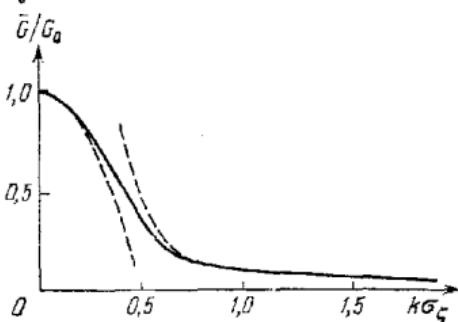


Рис. 12.

принимает вид

$$s \approx \zeta \left(1 - \frac{\rho'^2}{2z^2} \right). \quad (4)$$

Первое слагаемое в (4) не зависит от переменных интегрирования и его можно не принимать во внимание при рассмотрении корреляции, так как $|e^{ik\zeta}| = 1$. Второе слагаемое по модулю не превышает величины $\zeta L^2 / 2z^2$. Из условия $k\zeta L^2 / z^2 \sim 1$ получаем оценку

$$I_1 \sim \lambda \frac{z^2}{L^2} \quad (L \ll z \ll kL^2). \quad (5)$$

Эта оценка аналогична формуле (2) из задачи 3 для продольного радиуса корреляции однородного случайного поля с шириной углового спектра $\theta \sim a/z$. Можно сказать, что в данном случае ширина углового спектра θ определяется видимым угловым размером облака источников $\gamma \sim L/z$.

В дальней зоне ($z \gg kL^2$) величина ks для всех ρ' и z' отличается от $k\zeta$ не более чем на π . Поэтому в дальней зоне $e^{iks} \approx e^{ik\zeta}$, а продольный радиус корреляции увеличивается до бесконечности:

$$l_1 = \infty \quad (z \gg kL^2), \quad (6)$$

что отвечает полностью сформировавшейся диаграмме излучения в зоне Фраунгофера.

Г л а в а III

ТЕПЛОВОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 13. Предварительные замечания

Тепловое электромагнитное поле создается в результате хаотического теплового движения заряженных микрочастиц (электронов, ионов и т. п.), из которых построены тела. Уже отсюда ясно, что интенсивность теплового поля должна возрастать с повышением температуры, подобно тому как с ростом температуры убывает брауновское движение или усиливаются тепловые шумы в электрических цепях. Но в макроскопической электродинамике электромагнитное поле рассматривается не как сумма полей отдельных микрочастиц, а как поле макроскопических же источников, описываемых, например, объемными плотностями заряда и тока. Применительно к тепловому электромагнитному полю это означает, что его источниками являются *пространственно-временные флуктуации заряда и тока* в физически бесконечно малых элементах объема тел. Чаще всего масштабом малости таких объемов служит при спектральном описании поля интересующая нас длина волны, но аналогичную роль могут играть и размеры тел или их неоднородностей, расстояния между телами и т. п. Если физические и геометрические условия задачи допускают выделение таких физически бесконечно малых элементов объема, то можно пользоваться уравнениями макроскопической электродинамики, т. е. уравнениями Максвелла.

Мы уже рассматривали тепловые флуктуации электрических величин, но в *квазистационарной* области, т. е. для электрических систем, размеры которых l много меньше длины волны λ : $l \ll \lambda^1$. Состояние таких систем можно описать конечным числом *интегральных* функций времени — сил токов через сечения проводов, зарядов на сосредоточенных емкостях и т. п. При помощи теоремы Найквиста и обобщающей ее *флуктуационно-диссиационной* теоремы (ФДТ) мы получили в ч. I, § 54 выражения для вторых моментов *термодинамически равновесных* флуктуаций таких интегральных величин. Мы уже знакомы, таким

¹⁾ Не следует смешивать квазистационарность в этом электродинамическом смысле со статистической квазистационарностью случайных процессов.

образом, с корреляционной теорией электрических тепловых флюктуаций в квазистационарных цепях, т. е. в случае $l \ll \lambda$.

Но существует и совсем иная область явлений, для которых теория тепловых электромагнитных полей была развита уже давно, причем при прямо противоположных условиях, когда все характерные размеры тел l велики по сравнению с длиной волны: $l \gg \lambda$. Это классическая теория теплового излучения, созданная Г. Кирхгофом, Л. Больцманом и рядом других выдающихся физиков конца прошлого века. Ее завершило в 1900 г. открытие М. Планком закона, дающего спектральное распределение энергии равновесного теплового излучения, заключенного в полости достаточно больших размеров: $l \gg \lambda$. Другие законы этой теории (например, законы Кирхгофа) тоже опираются на асимптотическое описание электромагнитного поля в *приближении геометрической оптики*, пригодном только для достаточно коротких волн. Исторически это произошло потому, что классическая теория теплового излучения развивалась прежде всего для *оптического диапазона*.

Общая флюктуационная электродинамика полей теплового происхождения, основанная на уравнениях Максвелла (понимаемых, конечно, как *стохастические* уравнения), должна быть, очевидно, свободна от ограничений, касающихся соотношения между размерами тел l и длиной волны λ . Она должна охватывать, наряду с найквистовской теорией тепловых шумов в квазистационарных цепях ($l \ll \lambda$) и классической теорией теплового излучения ($l \gg \lambda$), также промежуточную область $l \sim \lambda$, в которой оба предельных подхода неприменимы. Такая общая теория тепловых электромагнитных полей была построена сравнительно недавно [1], и в данной главе излагаются ее основы. Для краткости мы будем далее называть случайное электромагнитное поле теплового происхождения просто *флюктуационным полем*.

Прежде чем перейти к систематическому изложению, остановимся на двух вопросах, которые легко могут возникнуть после сказанного выше. Один из них можно поставить следующим образом: почему в классической теории теплового излучения речь идет не вообще о тепловом флюктуационном поле, а именно об *излучении*, т. е. только о *волновом поле*?

Это вполне резонный вопрос, потому что флюктуации заряда и тока в каждом элементе объема тела порождают не только разбегающуюся электромагнитную волну, но и так называемое *ближнее квазистационарное поле*. Известно, однако, что оно убывает с расстоянием R от своего «точечного» источника гораздо быстрее, чем волновое поле,— не как $1/R$, а как $1/R^2$ и $1/R^3$, простираясь лишь на расстояния порядка λ . Кроме того, это ближнее поле в среднем за период не создает потока энергии. Именно поэтому классическая теория теплового излучения, инте-

ресурсующаяся только *переносом «лучистой» энергии* и только достаточно короткими волнами ($\lambda \ll l$), просто игнорирует ближнее флуктуационное поле. Она не может поэтому правильно описать флуктуационное поле, например, в полости, размеры которой невелики или тем более малы по сравнению с длиной волны. Равным образом она оставляет без внимания особенности теплового поля на малых расстояниях ($l \leq \lambda$) от поверхности нагретого тела. Между тем нетрудно понять, в чем заключаются эти особенности и каково их происхождение.

Внутри нагретого тела, в каждом элементе его объема происходят непрерывные тепловые флуктуации плотностей заряда и тока, непрерывное электрическое «кишление», если воспользоваться образным выражением М. А. Леоновича. Сумма *волновых полей* этих источников дает вне тела его тепловое электромагнитное излучение, описываемое законом Кирхгофа. Сумма же *ближних полей* (от приповерхностных элементов объема) создает *квазистационарное тепловое поле*, которое как бы *выстилает поверхность* любого тела. Это поле сосредоточено около поверхности, в слое толщины порядка λ , так что на расстояниях $l \gg \lambda$ им можно пренебречь, но при $l \rightarrow 0$ его напряженность *неограниченно* возрастает. В этом, конечно, нет никакого парадокса, так как на удалениях от поверхности порядка межатомных расстояний макроскопическое описание поля уже становится непригодным.

Хотя квазистационарное флуктуационное поле не участвует в создании потока энергии, его наличие проявляется вполне наблюдаемым образом, например, в молекулярных силах сцепления между телами (см. § 21).

Использование приближения геометрической оптики ограничивает классическую теорию теплового излучения не только тем, что она не учитывает квазистационарного флуктуационного поля, но и тем, что от нее ускользают *дифракционные явления* в самом излучении.

Другой законный вопрос касается того, представляет ли интерес область $l \sim \lambda$, т. е. тот случай, когда размеры тел сравнимы с длиной волны.

При своем зарождении радиотехника использовала метровые и даже сантиметровые волны, возникающие при колебательном искровом разряде. Весьма быстро, однако, она была вынуждена перейти к очень длинным (километровым) волнам, после чего — уже с электронными лампами в генераторах и усилителях — начался длительный процесс настоящего технического освоения все более коротких волн. Постепенно этот путь привел к дециметровому диапазону, а затем — к сантиметровым и миллиметровым волнам и, соответственно, к радиотехническим устройствам, у которых все (или некоторые) размеры сравнимы с длиной

волны, т. е. к не квазистационарным *распределенным волновым* системам. Такого рода устройства (волноводы, объемные резонаторы, рупорные и зеркальные антенны и т. п.) составили предмет так называемой электродинамики сверхвысоких частот (СВЧ). По мере повышения чувствительности и точности применяемых радиотехнических методов естественно приобрели остроту вопросы, касающиеся тепловых шумов и в распределенных системах. Таким образом, если говорить о нуждах радиотехники, то развитие общей флюктуационной электродинамики было стимулировано проблемой тепловых шумов в диапазоне СВЧ. Однако физические результаты флюктуационной электродинамики, конечно, не исчерпываются ее радиотехническими приложениями. Например, одним из основных ее следствий является обобщение такого фундаментального закона, как кирхгофовский закон излучения, на общий случай произвольного соотношения между размерами тел и длиной волны (§ 17).

Заметим кстати, что закон Кирхгофа, строго говоря, относится уже к *неравновесным* условиям. Ведь речь идет об излучении нагретого тела в окружающую более холодную среду, т. е. температура не одинакова во всем пространстве. Если теряется телом энергия не компенсируется, то процесс даже нестационарен: тело «высвечивается» и остывает. Разумеется, несложно создать и стационарные условия, поддерживая температуру тела постоянной путем подвода энергии от какого-либо стороннего источника, как это происходит, скажем, в лампочке накаливания. Ясно, однако, что и такое стационарное состояние все равно термодинамически *неравновесно*: в теле происходит одностороннее преобразование энергии и протекают явления переноса (например, связанные с теплопроводностью). В этих условиях применение равновесных законов (в том числе ФДТ) уже не вполне строго, но оно оправдано, если, как часто бывает, роль явлений переноса еще невелика.

Последнее замечание, которое уместно здесь сделать, касается функций распределения вероятностей флюктуационного поля. Казалось бы, нахождение этих функций — более сложная задача, чем вычисление моментов, но во многих случаях дело обстоит как раз наоборот. Флюктуационное поле слагается из множества микрополей, порожденных флюктуациями заряда и тока в разных элементах объема. Если эти вклады можно считать статистически независимыми и «равноправными» по величине (например, по их доле в суммарной дисперсии), то в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей суммарное поле будет *гауссовым*. Тем самым, для его полного статистического описания достаточно знать только функции корреляции его напряженностей (поскольку средние значения этих напряженностей равны нулю).

§ 14. Стохастические уравнения Максвелла

Исходные уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14.1)$$

необходимо, как известно, дополнить так называемыми *материальными уравнениями*, связывающими индукции \mathbf{D} и \mathbf{B} с напряженностями \mathbf{E} и \mathbf{H} . Эти уравнения описывают электродинамические свойства среды и могут быть в общем случае нелинейны. Однако если задача о тепловых флуктуациях ставится *макроскопическими* уравнениями (а именно так она ставится во флуктуационной электродинамике) и если мы интересуемся только термодинамически *равновесными* флуктуациями, то макроскопическая нелинейность системы не играет роли, т. е. достаточно пользоваться линеаризованными уравнениями. Это обстоятельство было разъяснено ранее для дискретных систем (ч. I, § 54), но оно остается в силе и для распределенных систем. Другими словами, сохранив полную общность, мы можем исходить из *линеаризованных* материальных уравнений. Последние можно было бы взять наиболее общими, учитывающими наличие неоднородности и анизотропии среды, временную и пространственную дисперсию, а также движение среды. Однако для упрощения выкладок и для более четкого выделения принципиальных моментов мы ограничимся случаем неподвижной и поначалу изотропной среды, обладающей только временной нелокальностью (частотной дисперсией). В этом частном случае среду можно описать материальными уравнениями вида (см. сноску на стр. 173)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(t-t', \mathbf{r}) \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt', \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t-t', \mathbf{r}) \mathbf{H}(t', \mathbf{r}) dt', \end{aligned} \quad (14.2)$$

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Переходя к стохастическим максвелловским уравнениям, введем теперь в правые части уравнений (14.1) случайные сторонние источники, которые «вызывают» тепловые флуктуации напряженностей поля и всех связанных с ними электродинамических величин. Эти распределенные источники играют здесь такую же вспомогательную роль эквивалентных ланжевеновских «сил», как интегральные э. д. с. Найквиста в электрических цепях с сосредоточенными параметрами (ч. I, § 54).

Флуктуационные источники можно выбирать различным образом, в частности в виде объемных плотностей электрических (j_e)

и магнитных (j_m) токов¹). Стохастические уравнения Максвелла примут тогда вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m. \quad (14.3)$$

Можно было бы воспользоваться вместо токов сторонними индукциями \mathbf{D} и \mathbf{B} , положив

$$\mathbf{j}_e = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{j}_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (14.4)$$

что, как мы увидим далее, оказывается в некоторых случаях целесообразным. Поля флуктуационных источников \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_m (равно как и \mathbf{D} , \mathbf{B}) мы будем считать *стационарными* во времени.

Обратим внимание на вытекающее из (14.3) уравнение баланса энергии (теорему Пойнтинга), которое мы запишем для *полного поля*²). Умножив первое уравнение (14.1) на \mathbf{E} , второе — на $-\mathbf{H}$; сложив результаты и взяв интеграл по объему V , ограниченному поверхностью Σ , получаем

$$\int_V (\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}) d^3r = \frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{dU}{dt} + Q + \int_V (\mathbf{E} \mathbf{j}_e + \mathbf{H} \mathbf{j}_m) d^3r \right\},$$

где

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3r, \quad Q = \int_V \mathbf{j} \mathbf{E} d^3r.$$

dU/dt — скорость изменения заключенной в объеме V электромагнитной энергии, а Q — диссилируемая в этом объеме мощность. Интеграл в левой части равенства пропорционален потоку энергии (потоку вектора Пойнтинга) через поверхность Σ , так что для *полного поля* он обращается в нуль. Поэтому $dU/dt \equiv Q$ представляет собой не что иное, как диссилируемую в объеме V мощность. После усреднения по ансамблю случайных «сил» \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_m , если учесть, что для *полного* и *стационарного* поля $d\langle U \rangle/dt = 0$, мы получим для средней диссилируемой мощности выражение

$$\langle Q \rangle = - \int_V \langle \mathbf{E} \mathbf{j}_e + \mathbf{H} \mathbf{j}_m \rangle d^3r. \quad (14.5)$$

¹) Использование магнитных токов является, конечно, лишь формальным приемом, но для многих задач оно удобно (см., например, [2]).

²) Напомним, что *полным* называется в электродинамике поле, равное нулю за пределами некоторой *замкнутой* поверхности Σ . Возможность построения такой поверхности обусловлена либо наличием идеально отражающих оболочек, либо достаточно быстрым убыванием поля на бесконечности (поверхность Σ может быть частично или целиком бесконечно удаленной).

Нас будут интересовать спектральные амплитуды стационарных во времени электродинамических величин, т. е. пространственные поля трансформант Фурье

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} dt,$$

и аналогично для \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{j}_e , \mathbf{j}_m . Для спектральных амплитуд уравнения (14.3) принимают вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = -ik\mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e, \quad \text{rot } \mathbf{E} = ik\mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m, \quad (14.6)$$

где $k = \omega/c$, а материальные уравнения (14.2) — вид

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) &= \epsilon(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}), \\ \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) &= \mu(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (14.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(\omega, \mathbf{r}) \\ \mu(\omega, \mathbf{r}) \end{aligned} \right\} = \int_0^{\infty} \left. \begin{aligned} \epsilon(\tau, \mathbf{r}) \\ \mu(\tau, \mathbf{r}) \end{aligned} \right\} e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (14.8)$$

Заметим, что член $4\pi j/c$ мы объединили в (14.6) с членом $ik\mathbf{D}$. Это означает включение электрической проводимости в ϵ или, точнее, в ее мнимую часть ϵ'' ($\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$). Вводя μ ($\mu = \mu' + i\mu''$) можно учесть и магнитные потери.

Система неоднородных линейных уравнений (14.6), (14.7) однозначно определяет спектральные амплитуды напряженностей и индукций флюктуационного поля при заданных граничных условиях и (если это нужно) условиях на бесконечности, а также, разумеется, при заданных случайных источниках $\mathbf{j}_e(\omega, \mathbf{r})$ и $\mathbf{j}_m(\omega, \mathbf{r})$. Таким образом, это задача со случайными источниками (схема I по классификации, введенной в § 8), вероятностные свойства которых должны быть известны. Так как уравнения линейны, для нахождения вторых (n -х) моментов флюктуационного поля надо знать только вторые же (n -е) моменты источников. Эти вторые моменты, если речь идет о флюктуациях около состояния термодинамического равновесия, полностью определены (как в случае сосредоточенных систем) флюктуационно-диссилиационной теоремой (ФДТ), которую нетрудно распространить и на распределенные системы (поля). Поэтому мы теперь оставим на время уравнения Максвелла и обратимся к указанному обобщению ФДТ.

§ 15. Равновесные тепловые флуктуации в непрерывных диссипативных системах

В ч. I, § 54 была приведена формулировка ФДТ для *дискретных* систем, состояние которых описывается совокупностью какого-то конечного числа n обобщенных координат $q_i(t)$. При помощи этой дискретной формы ФДТ можно получать результаты, относящиеся и к распределенным системам,— либо косвенным путем, как сделано в задаче 1, либо используя искусственную дискретизацию непрерывной системы, например разбиение пространства, занимаемого полем, на малые ячейки и замену дифференциальных операторов разностными. Именно с помощью последнего способа дискретная ФДТ применена к стохастическим уравнениям Максвелла в книге [3], гл. 13. Однако представляет больший интерес получить *общую* форму ФДТ для *непрерывных* систем, состояние которых описывается случайными полями — функциями времени и точки пространства. Такое обобщение, удобное для приложений теоремы к полям равновесных тепловых флуктуаций любой физической природы — как электромагнитным, так и механическим (в аэро- и гидродинамике, теории упругости), температурным и энтропийным и т. п., — можно осуществить следующим образом [4].

Пусть флуктуации в распределенной системе, занимающей объем V , описываются стационарным и однородным полем $\xi(t, \mathbf{r})$. Для простоты мы берем случай одномерного поля¹⁾. Обобщение на многомерное поле $\xi^{(i)}(t, \mathbf{r}) (i = 1, 2, \dots)$ легко может быть получено, и соответствующий результат будет далее приведен. Пусть $f(t, \mathbf{r})$ — объемная плотность поля обобщенной силы, сопряженной в лагранжевом смысле с обобщенной координатой $\xi(t, \mathbf{r})$, причем спектральные амплитуды $\xi(\omega, \mathbf{r})$ и $f(\omega, \mathbf{r})$ связаны между собой посредством линейных пространственных операторов \hat{A} и \hat{A}^{-1} :

$$\xi(\omega, \mathbf{r}) = \hat{A}f(\omega, \mathbf{r}), \quad f(\omega, \mathbf{r}) = \hat{A}^{-1}\xi(\omega, \mathbf{r}). \quad (15.1)$$

\hat{A} и \hat{A}^{-1} — взаимно обратные операторы, т. е. их произведение равно единичному оператору \hat{E} ($\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{E}$), который оставляет функцию неизменной ($\hat{E}f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$). В приложениях обычно задан оператор \hat{A}^{-1} , являющийся большей частью дифференциальным.

Если, например, мы имеем дело с волновым уравнением

$$\Delta\xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -4\pi f(t, \mathbf{r}),$$

¹⁾ Одномерного в смысле числа описывающих его функций ξ .

частное решение которого равно, как известно,

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \int f\left(t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}'\right) \frac{d^3 r'}{R} \quad (R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|),$$

то для спектральных амплитуд получаем ($k = \omega/c$)

$$(\Delta + k^2) \xi(\omega, \mathbf{r}) = -4\pi f(\omega, \mathbf{r}),$$

$$\xi(\omega, \mathbf{r}) = \int f(\omega, \mathbf{r}') \frac{e^{ikR}}{R} d^3 r'.$$

Таким образом,

$$\hat{A}^{-1} = -\frac{\Delta + k^2}{4\pi}, \quad \hat{A}\{\dots\} = \int \{\dots\} \frac{e^{ikR}}{R} d^3 r'.$$

Допустим теперь, что мы располагаем полной ортонормированной системой вещественных функций $\varphi_j(\mathbf{r})$, определенной для области V :

$$\int_V \varphi_j(\mathbf{r}) \varphi_k(\mathbf{r}) d^3 r = \delta_{jk}. \quad (15.2)$$

Разложим $\xi(t, \mathbf{r})$ и $f(t, \mathbf{r})$ по функциям $\varphi_j(\mathbf{r})$:

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \sum_j \xi_j(t) \varphi_j(\mathbf{r}), \quad f(t, \mathbf{r}) = \sum_j f_j(t) \varphi_j(\mathbf{r}), \quad (15.3a, b)$$

или в спектральной форме:

$$\xi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_j \xi_j(\omega) \varphi_j(\mathbf{r}), \quad f(\omega, \mathbf{r}) = \sum_j f_j(\omega) \varphi_j(\mathbf{r}), \quad (15.4a, b)$$

где

$$\xi_j(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_j(t) e^{i\omega t} dt,$$

и аналогично для $f_j(\omega)$. Заметим, что согласно (15.2) и (15.3) средняя мощность, диссилируемая в объеме V под действием силы $f(t, \mathbf{r})$, записывается в виде

$$\langle Q \rangle = \int \left\langle f \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle d^3 r = - \int \left\langle \xi \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle d^3 r = - \sum_j \left\langle \xi_j(t) \frac{\partial f_j(t)}{\partial t} \right\rangle. \quad (15.5)$$

Принимая $\xi_j(t)$ за те дискретные переменные, которые описывают флуктуации в рассматриваемой системе, естественно распространить дискретную ФДТ на спектральные амплитуды $\xi_j(\omega)$ и $f_j(\omega)$. Единственное допущение, которое необходимо при этом сделать, заключается в том, что ФДТ остается в силе для бесконечного множества дискретных переменных $\xi_j(t)$. Опираясь на это допущение, мы и найдем теперь пространственные функции корреляции для спектральных амплитуд $\xi(\omega, \mathbf{r})$ и $f(\omega, \mathbf{r})$.

Как связаны между собой спектральные амплитуды $\xi_j(\omega)$ и $f_j(\omega)$? Подставив (15.3а, б) в первое уравнение (15.1), получаем

$$\sum_k \xi_k(\omega) \varphi_k(r) = \sum_k f_k(\omega) \hat{A} \varphi_k(r).$$

Умножим это равенство слева на $\varphi_j(r)$ и проинтегрируем по объему V . Учитывая (15.2), находим

$$\xi_j(\omega) = \sum_k f_k(\omega) \int_V \varphi_j(r) \hat{A} \varphi_k(r) d^3r \equiv \sum_k \alpha_{jk}(\omega) f_k(\omega), \quad (15.6a)$$

где величины

$$\alpha_{jk}(\omega) = \int_V \varphi_j(r) \hat{A} \varphi_k(r) d^3r \quad (15.7a)$$

представляют собой, очевидно, не что иное, как коэффициенты разложения функции $\hat{A} \varphi_k(r)$ по базисным функциям $\varphi_j(r)$, т. е.

$$\hat{A} \varphi_k(r) = \sum_j \alpha_{jk} \varphi_j(r). \quad (15.8a)$$

Точно такие же операции над вторым уравнением (15.1) приводят к обратной (15.6а) системе уравнений:

$$f_j(\omega) = \sum_k \alpha_{jk}^{-1}(\omega) \xi_k(\omega), \quad (15.6b)$$

где

$$\alpha_{jk}^{-1}(\omega) = \int_V \varphi_j(r) \hat{A}^{-1} \varphi_k(r) d^3r, \quad (15.7b)$$

т. е. α_{jk}^{-1} — коэффициенты разложения по $\varphi_j(r)$ функции $\hat{A}^{-1} \varphi_k(r)$:

$$\hat{A}^{-1} \varphi_k(r) = \sum_j \alpha_{jk}^{-1} \varphi_j(r). \quad (15.8b)$$

Величины (15.7а, б), являющиеся коэффициентами в уравнениях (15.6а, б), связывающих $\xi_j(\omega)$ и $f_j(\omega)$, образуют, таким образом, элементы бесконечномерной матрицы *обобщенной восприимчивости* $\{\alpha_{jk}\}$ и обратной ей матрицы $\{\alpha_{jk}^{-1}\}$.

Дискретная ФДТ дает следующие выражения для спектральных плотностей переменных $\xi_j(t)$ и ланжевеновских сил $f_j(t)$ (ч. I, (54.18) и (54.22); отметим, что перед правыми частями теперь стоит знак минус, поскольку мы пользовались ранее спектральным разложением с $e^{i\omega t}$, а в данной книге перешли к разложению по $e^{-i\omega t}$):

$$\langle \xi_j(\omega) \xi_k^*(\omega) \rangle = - \frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} (\alpha_{jk} - \alpha_{kj}^*), \quad (15.9a)$$

$$\langle f_j(\omega) f_k^*(\omega) \rangle = - \frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} (\alpha_{jk}^{-1*} - \alpha_{kj}^{-1}), \quad (15.9b)$$

где $\Theta(\omega, T)$ — средняя энергия квантового осциллятора:

$$\Theta(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}. \quad (15.10)$$

Формулами (15.9а, б) мы теперь и воспользуемся.

Согласно (15.4а) и (15.9а)

$$\begin{aligned} \langle \xi(\omega, r) \xi^*(\omega, r') \rangle &= \sum_{j, k} \langle \xi_j(\omega) \xi_k^*(\omega) \rangle \varphi_j(r) \varphi_k(r') = \\ &= -\frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} \sum_{j, k} (\alpha_{jk} - \alpha_{kj}^*) \varphi_j(r) \varphi_k(r'). \end{aligned}$$

При помощи (15.8а) можно записать это выражение в виде

$$\langle \xi(\omega, r) \xi^*(\omega, r') \rangle = -\frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} \sum_j \{ \varphi_j(r') \hat{A} \varphi_j(r) - \varphi_j(r) \hat{A}^* \varphi_j(r) \},$$

причем оператор \hat{A} действует на функции точки r , а \hat{A}^* — на функции точки r' . Поэтому оба они могут быть вынесены за знак суммы, которая оказывается тогда разложением дельта-функции от $r - r'$ по базисным функциям:

$$\sum_j \varphi_j(r) \varphi_j(r') = \delta(r - r').$$

В результате

$$\langle \xi(\omega, r) \xi^*(\omega, r') \rangle = -\frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} (\hat{A} - \hat{A}^*) \delta(r - r'). \quad (15.11a)$$

Совершенно аналогичным путем при помощи (15.4б), (15.9б) и (15.8б) получается пространственная функция корреляции для электрической амплитуды силы $f(\omega, r)$:

$$\langle f(\omega, r) f^*(\omega, r') \rangle = -\frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} (\hat{A}^{-1*} - \hat{A}^{-1}) \delta(r - r'). \quad (15.11b)$$

Поскольку дельта-функция зависит лишь от разности $r = r - r'$, оба оператора \hat{A} и \hat{A}^* можно выразить через компоненты r . Равным образом можно и дифференциальные операторы \hat{A}^{-1} и \hat{A}^{-1*} (первый содержит ∇ , а второй ∇') записать через оператор $\nabla_r = \nabla - \nabla'$.

Формулы (15.11а, б), в которых уже никак не проявляются форма и размеры области V , и представляют ФДТ для одномерного однородного поля $\xi(t, r)$ и соответствующего ему поля ланжевеновской силы $f(t, r)$.

Обобщение полученного результата на многомерное поле, т. е. на случай системы однородных и однородно связанных между собой полей $\xi^{(V)}(t, r)$, почти очевидно. Вместо уравнений (15.1)

теперь будут *системы линейных уравнений*

$$\begin{aligned}\xi^{(j)}(\omega, \mathbf{r}) &= \sum_k \hat{A}_{jk} f^{(k)}(\omega, \mathbf{r}), \\ f^{(j)}(\omega, \mathbf{r}) &= \sum_k \hat{A}_{jk}^* \xi^{(k)}(\omega, \mathbf{r}),\end{aligned}\quad (15.12)$$

где \hat{A}_{jk} и \hat{A}_{jk}^* — элементы прямой и обратной *операторных матриц*, а вместо выражения (15.5) для мощности, развивающей силами $f^{(j)}(t, \mathbf{r})$, будет сумма

$$\begin{aligned}\langle Q \rangle &= \sum_i \int_V \left\langle f^{(j)}(t, \mathbf{r}) \frac{\partial \xi^{(j)}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \right\rangle d^3 r = \\ &= - \sum_i \int_V \left\langle \xi^{(j)}(t, \mathbf{r}) \frac{\partial f^{(j)}(t, \mathbf{r})}{\partial t} \right\rangle d^3 r.\end{aligned}\quad (15.13)$$

Наконец, окончательные формулы (15.11а, б) заменяются на корреляционные *матрицы спектральных амплитуд* $\xi^{(j)}(\omega, \mathbf{r})$ и $f^{(j)}(\omega, \mathbf{r})$:

$$\langle \xi^{(j)}(\omega, \mathbf{r}) \xi^{(k)*}(\omega, \mathbf{r}') \rangle = - \frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} (\hat{A}_{jk} - \hat{A}_{kj}^*) \delta(\rho), \quad (15.14a)$$

$$\langle f^{(j)}(\omega, \mathbf{r}) f^{(k)*}(\omega, \mathbf{r}') \rangle = - \frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} (\hat{A}_{kj}^{1*} - \hat{A}_{jk}^{-1}) \delta(\rho), \quad (15.14b)$$

где по-прежнему $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Итак, в распределенных системах, как и в дискретных, ФДТ выражает корреляционные функции (матрицы) ω -амплитуд¹⁾ совершенно регулярным образом. Эти функции однозначно определены видом операторов \hat{A}_{jk} и \hat{A}_{jk}^{-1} , т. е. *самиими линеаризованными макроскопическими уравнениями* рассматриваемой системы. Если это уравнения Максвелла, то формулы (15.14) позволяют найти пространственную корреляцию напряженностей флюктуационного поля и тех сторонних полей (индукций или токов), которые «создают» флюктуационное электромагнитное поле. Если же мы имеем дело, например, с уравнениями теории упругости, то при помощи тех же формул (15.14) определяется корреляция тепловых флюктуаций деформаций и температуры, равно как и соответствующих сторонних напряжений и источников тепла [5] и т. д. Более точно: корреляционные матрицы флюктуационных и сторонних тепловых полей определяются *антиэрмитовыми частями* соответствующих линейных операторов, или иначе говоря, обусловлены *диссипативными* свойствами системы. В отсутствие поглощения энергии, т. е. в отсутствие дисси-

¹⁾ А тем самым и ω -амплитуд, если ω -амплитуды разложить в пространственные интегралы Фурье (см. задачу 6).

ции, операторы или операторные матрицы будут эрмитовыми и разности, стоящие в правых частях любой из формул, выражавших ФДТ, обращаются в нуль. Это означает, что в среде (или участке среды), не обладающей потерями, сторонних источников флуктуаций нет и, следовательно, нет и вклада от такого участка среды во флуктуационное поле. В формулах (15.11а) и (15.14а) учтен *только этот вклад*, и он в данном случае тоже обращается в нуль. Но флуктуационное поле может создаваться источниками, локализованными *вне* данного поглощающего объема среды, т. е. может приходить в этот объем извне. Поэтому корреляционные функции *флуктуационного поля*, вообще говоря, отличны от нуля и в тех областях пространства, где среда не обладает поглощением.

§ 16. Корреляция сторонних тепловых источников в электродинамике

Вернемся к спектральным уравнениям Максвелла (14.6), исключив из них при помощи материальных уравнений (14.7) индукции \mathbf{D} и \mathbf{B} :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\epsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mu \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m. \quad (16.1)$$

Состояние рассматриваемой системы—флуктуационного электромагнитного поля—описывается 6-вектором напряженностей $\xi^{(v)} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$. Каков при этом 6-вектор сопряженных с $\xi^{(v)}$ по Лагранжу сторонних сил $f^{(v)}$?

Согласно общему выражению (15.13) средняя диссилируемая мощность $\langle Q \rangle$ равна (со знаком минус) сумме произведений координат на *скорости* изменения сил. Сопоставляя с (15.13) формулу (14.5), нетрудно усмотреть, что [сторонние *токи* \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_m не являются сопряженными «силами» для «координат» $\xi^{(v)} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$. Если же воспользоваться сторонними *индукциями* \mathfrak{D} и \mathfrak{B} и подставить в (14.5) выражения (14.4), то мы получим для $\langle Q \rangle$ формулу как раз вида (15.13):

$$\langle Q \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right) d^3r.$$

Таким образом, для напряженностей $\xi^{(v)} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ «силами» являются величины $f^{(v)} = \{\mathfrak{D}/4\pi, \mathfrak{B}/4\pi\}$ и общие формулы (15.14а, б), выражающие ФДТ, следует применять именно к таким $\xi^{(v)}$ и $f^{(v)}$.

Разумеется, получив корреляционную матрицу для спектральных амплитуд сторонних индукций \mathfrak{D} и \mathfrak{B} , мы тотчас же сможем написать такую матрицу и для спектральных амплитуд

сторонних токов, поскольку, в силу (14.4),

$$\mathbf{j}_e = -\frac{i\omega}{4\pi} \mathbf{D}, \quad \mathbf{j}_m = -\frac{i\omega}{4\pi} \mathbf{B}. \quad (16.2)$$

Подставив (16.2) в (16.1), запишем уравнения (16.1) в компонентах:

$$\mathfrak{D}_1 = -\frac{\epsilon E_1}{4\pi} + \frac{1}{4\pi ik} (\nabla_2 H_3 - \nabla_3 H_2) \circ,$$

$$\mathfrak{B}_1 = -\frac{\mu H_1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi ik} (\nabla_2 E_3 - \nabla_3 E_2) \circ,$$

где $k = \omega/c$, а знак \circ обозначает круговую перестановку индексов 1, 2, 3. Сопоставление этих шести уравнений со второй группой уравнений (15.12), где, как мы помним, надо положить

$$\xi^{(j)} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}, \quad f^{(j)} = \{\mathfrak{D}/4\pi, \mathfrak{B}/4\pi\} \quad (j = 1, \dots, 6),$$

дает нам матрицу операторов $\hat{A}_{jk}^{-1}(\nabla)$:

$$\hat{A}_{jk}^{-1}(\nabla) = \left\{ \begin{array}{c|c} -\frac{\epsilon}{4\pi} \delta_{\alpha\beta} & \frac{1}{4\pi ik} \begin{pmatrix} 0 & \nabla_3 & -\nabla_2 \\ -\nabla_3 & 0 & \nabla_1 \\ \nabla_2 & -\nabla_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline -\frac{1}{4\pi ik} \begin{pmatrix} 0 & \nabla_3 & -\nabla_2 \\ -\nabla_3 & 0 & \nabla_1 \\ \nabla_2 & -\nabla_1 & 0 \end{pmatrix} & -\frac{\mu}{4\pi} \delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Транспонированная комплексно сопряженная матрица, зависящая от ∇' , будет

$$\hat{A}_{kj}^{-1*}(\nabla') = \left\{ \begin{array}{c|c} -\frac{\epsilon^*}{4\pi} \delta_{\alpha\beta} & -\frac{1}{4\pi ik} \begin{pmatrix} 0 & \nabla'_3 & -\nabla'_2 \\ -\nabla'_3 & 0 & \nabla'_1 \\ \nabla'_2 & -\nabla'_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \frac{1}{4\pi ik} \begin{pmatrix} 0 & \nabla'_3 & -\nabla'_2 \\ -\nabla'_3 & 0 & \nabla'_1 \\ \nabla'_2 & -\nabla'_1 & 0 \end{pmatrix} & -\frac{\mu^*}{4\pi} \delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Учитывая, что $\nabla' = -\nabla$ (поскольку операторы действуют на функцию от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$), получаем

$$\hat{A}_{kj}^{-1*}(\nabla') - \hat{A}_{jk}^{-1}(\nabla) = \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{\epsilon - \epsilon^*}{4\pi} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \hline 0 & \frac{\mu - \mu^*}{4\pi} \delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Наконец, подстановка этого результата в формулу (15.146), выражающую ФДТ для ланжевеновских сил, дает нам корреляционные функции сторонних индукций \mathfrak{D} и \mathfrak{B} :

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{D}_\alpha(\omega, \mathbf{r}) \mathfrak{D}_\beta^*(\omega, \mathbf{r}') \rangle &= -\frac{2i\Theta(\omega, T)}{\omega} (\epsilon - \epsilon^*) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \langle \mathfrak{B}_\alpha(\omega, \mathbf{r}) \mathfrak{B}_\beta^*(\omega, \mathbf{r}') \rangle &= -\frac{2i\Theta(\omega, T)}{\omega} (\mu - \mu^*) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \langle \mathfrak{D}_\alpha(\omega, \mathbf{r}) \mathfrak{B}_\beta^*(\omega, \mathbf{r}') \rangle &= 0.\end{aligned}\quad (16.3)$$

В более общем случае *анизотропной* или *гиротропной* среды, описываемой тензорами проницаемостей $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$, мы получили бы те же формулы (16.3), но с заменой диагональных тензоров $\epsilon\delta_{\alpha\beta}$ и $\mu\delta_{\alpha\beta}$ на $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta}$, а $\epsilon^*\delta_{\alpha\beta}$ и $\mu^*\delta_{\alpha\beta}$ на $\epsilon_{\beta\alpha}^*$ и $\mu_{\beta\alpha}^*$.

Пользуясь (16.2) и (16.3), нетрудно написать корреляционные функции сторонних токов. Мы приведем эти функции сразу для случая анизотропной среды¹⁾:

$$\begin{aligned}\langle j_{\alpha\alpha}(\omega, \mathbf{r}) j_{\beta\beta}^*(\omega, \mathbf{r}') \rangle &= -\frac{i\omega\Theta(\omega, T)}{8\pi^2} (\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \langle j_{m\alpha}(\omega, \mathbf{r}) j_{m\beta}^*(\omega, \mathbf{r}') \rangle &= -\frac{i\omega\Theta(\omega, T)}{8\pi^2} (\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\beta\alpha}^*) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \langle j_{\alpha\alpha}(\omega, \mathbf{r}) j_{m\beta}^*(\omega, \mathbf{r}') \rangle &= 0.\end{aligned}\quad (16.4)$$

Менее формальный вывод этих формул дан в задаче 2.

Итак, электрические и магнитные источники флуктуационного поля пространственно не коррелированы между собой, а радиус пространственной корреляции тех и других порознь равен нулю (дельта-функция $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$). Для сред без пространственной дисперсии, которыми мы здесь и ограничиваемся, этот последний результат представляется очевидным. Действительно, фактический радиус корреляции *источников теплового поля* в таких средах может быть только микролинией (порядка, например, межатомных расстояний), и поэтому в макроскопической теории, рассматривающей среду как сплошную, он и должен быть равен нулю. Напротив, в средах с *пространственной дисперсией* материальные уравнения нелокальны не только по t , но и по \mathbf{r} , т. е. вместо (14.2) будут уравнения, содержащие операторы как по t , так и по \mathbf{r} ²⁾. Это приводит к

¹⁾ Формулы (16.4) были получены Л. Д. Ландау и Е. М. Либшицем [3] при помощи ФДТ в ее дискретной форме. На основе непрерывной формы ФДТ формулы вида (16.4) были выведены в [4]. В дальнейшем, независимо от полученной в [4] общей непрерывной формы ФДТ, формулы вида (16.4) выводили многие авторы (см., например, ссылки [23, 55–62] в книге [6]).

²⁾ Соответственно уравнения (14.7) тоже не будут алгебраическими, а будут содержать пространственные операторы. Алгебраическими будут лишь уравнения для ω -амплитуд.

отличному от нуля радиусу корреляции источников флуктуационного поля, имеющему тот же порядок величины, что и размер области нелокальности в материальных уравнениях (см. [6], § 4).

Для кусочно-однородных сред, т. е. при наличии резких границ раздела между средами, формулы (16.3) и (16.4) справедливы (из-за дельта-корреляции) вплоть до самых границ раздела. При наличии же пространственной нелокальности положение меняется: вблизи от границ раздела, а именно в слое, толщина которого порядка радиуса корреляции, поля сторонних источников неоднородны (их корреляционные функции зависят от \mathbf{r} и \mathbf{r}' в отдельности, а не от разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$) и анизотропны даже в том случае, когда сама среда изотропна.

Мы смогли, используя теорему (15.14б), сразу написать корреляционные функции *источников* флуктуационного поля только потому, что входящие в (15.14б) операторы $\hat{A}_{\alpha\beta}^{-1}$ нам известны из самих уравнений Максвелла. Иначе обстоит дело с корреляцией «координат», т. е. *напряженностей* флуктуационного электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . Для того чтобы написать корреляционные функции \mathbf{E} и \mathbf{H} , надо, согласно (15.14а), знать *обратные* операторы $\hat{A}_{\alpha\beta}$, т. е. надо «обернуть» уравнения Максвелла, выразив \mathbf{E} и \mathbf{H} через \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_m (или \mathbf{O} и \mathbf{W}). Другими словами, надо решить неоднородные уравнения Максвелла, считая распределение источников \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_m произвольным, но заданным и налагая граничные условия, отвечающие данной конкретной задаче.

Если краевая задача решена, то тем самым мы получаем операторы $\hat{A}_{\alpha\beta}$ (обычно в виде интегралов, распространенных на области пространства, в которых сторонние токи \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_m отличны от нуля) и можем воспользоваться тогда «готовой» теоремой (15.14а). Можно поступить и иначе: составить из полученных решений для \mathbf{E} и \mathbf{H} интересующие нас билинейные комбинации и усреднить их. Под кратные интегралы, выраждающие вторые моменты напряженностей, войдут при этом корреляционные функции сторонних токов \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_m , вместо которых надо будет подставить уже полученные выражения (16.4). Оба способа вполне правомерны, и ряд флуктуационных электродинамических задач был решен именно таким путем [1, 7, 8].

Однако в обоих указанных вариантах это трудоемкий и неэкономный путь, так как для каждой конкретной задачи его надо проделывать заново. Попытаемся поэтому выяснить, к чему приводит ФДТ, если применить ее к решению уравнений Максвелла, записанному в *общей интегральной форме* — через *функции Грина*.

§ 17. Обобщенный закон Кирхгофа

Функции Грина представляют собой решения краевой задачи с элементарными точечными источниками поля. Введем их в нашем электродинамическом случае следующим образом.

Пусть j_{oe} — детерминированный электрический ток, сосредоточенный в некоторой точке A ($r = r_A$) и направленный по постоянному единичному вектору l :

$$j_{oe} = l\delta(r - r_A). \quad (17.1)$$

Можно считать ток j_{oe} поляризационным, т. е. рассматривать источник как точечный электрический диполь с моментом $p = -l/i\omega^1$. Решение уравнений Максвелла, т. е. напряженности электромагнитного поля, созданного в данной системе тел и сред источником (17.1), мы обозначим через $E_{oe}(r, r_A, l)$, $H_{oe}(r, r_A, l)$ и для краткости будем называть это *детерминированное поле дифракционным*. Напряженности E_{oe} и H_{oe} являются функциями Грина.

Наша цель состоит в том, чтобы выразить напряженности E и H флюктуационного поля, порождаемого случайными распределенными токами j_e и j_m , через эти токи и через функции Грина E_{oe} и H_{oe} . Проще всего сделать это при помощи электродинамической *теоремы взаимности*, которая связывает «накрест» напряженности и источники двух различных полей 1 и 2 в одной и той же системе тел и сред.

Пусть имеются два распределения сторонних электрических и магнитных токов j_{1e} , j_{1m} и j_{2e} , j_{2m} , которые создают при прочих одинаковых условиях поля E_1 , H_1 и E_2 , H_2 соответственно. Теорема взаимности выводится весьма просто (при очень широких допущениях) из двух систем уравнений Максвелла — одной для поля и источников 1 и другой для поля и источников 2 (см., например, [6]). Она гласит, что

$$\int_V (E_1 j_{e2} - H_1 j_{m2}) d^3r = \int_V (E_2 j_{e1} - H_2 j_{m1}) d^3r, \quad (17.2)$$

где V — объем полного поля. Фактически интегралы в (17.2) распространяются только на те области пространства, в которых сторонние токи отличны от нуля.

¹⁾ Плотность поляризационного тока равна $\partial P / \partial t$, где P — объемная плотность поляризации. Для точечного диполя с моментом p имеем $P = p\delta(r - r_A)$, так что $j_{oe} = \frac{\partial P}{\partial t} \delta(r - r_A)$, а для спектральных амплитуд $j_{oe} = -i\omega p \delta(r - r_A)$. При $p = -1/i\omega$ мы получаем (17.1).

Отождествим теперь в теореме (17.2) интересующее нас флюктуационное поле с полем 1:

$$\mathbf{j}_{e1} = \mathbf{j}_e, \quad \mathbf{j}_{m1} = \mathbf{j}_m, \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}, \quad (17.3)$$

а вспомогательное дифракционное поле — с полем 2:

$$\mathbf{j}_{e2} = 1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad \mathbf{j}_{m2} = 0, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{0e}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{0e},$$

формула (17.2) дает тогда

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) 1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) d^3r &= E_t(\mathbf{r}_A) = \\ &= \int_V \{ \mathbf{E}_{0e}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_A, 1) \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_{0e}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_A, 1) \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \} d^3r, \end{aligned} \quad (17.4)$$

т. е. именно то, что нам нужно: компонента по направлению 1 электрической напряженности флюктуационного поля в точке A выражена через распределение случайных токов и через функции Грина — напряженности детерминированного поля, созданного электрическим диполем, направленным по 1 и находящимся в точке A .

Для того чтобы получить аналогичное выражение для компоненты магнитного флюктуационного поля, надо, сохранив (17.3), воспользоваться в теореме взаимности (17.2) другим полем 2, а именно дифракционным полем \mathbf{E}_{0m} , \mathbf{H}_{0m} , которое создается **магнитным** точечным током

$$\mathbf{j}_{0m} = 1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)$$

или, что то же, **магнитным диполем** с моментом $m = -1/i\omega$, помещенным в точку A :

$$\mathbf{j}_{e2} = 0, \quad \mathbf{j}_{m2} = 1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{0m}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{0m}.$$

Мы получаем тогда из (17.2)

$$H_t(\mathbf{r}_A) = - \int_V \{ \mathbf{E}_{0m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_A, 1) \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_{0m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_A, 1) \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \} d^3r. \quad (17.5)$$

Линейные относительно \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_m выражения (17.4) и (17.5) позволяют получать теперь любые моменты напряженностей флюктуационного поля, если нам известны моменты того же порядка для токов \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_m . В частности, мы заведомо можем вычислить вторые моменты компонент флюктуационного поля, поскольку вторые моменты сторонних токов дает нам (16.4).

Найдем, например, среднее значение произведения $E_{t1}(\mathbf{r}_1) H_{t1}^*(\mathbf{r}_2)$. Полагая в (17.4) $1 = l_1$, $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_1$ и записывая скалярные произведения векторов в компонентах ($\mathbf{ab} = a_\alpha b_\alpha$, где по дважды вхо-

дляшим индексам производится суммирование от 1 до 3), имеем

$$\langle E_{l_1}(\mathbf{r}_1) = - \int \{E_{0e\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1) j_{e\alpha}(\mathbf{r}) - H_{0m\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1) j_{m\beta}(\mathbf{r})\} d^3 r. \quad (17.6)$$

Полагая в (17.5) $\mathbf{l} = \mathbf{l}_2$, $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_2$, получаем

$$\begin{aligned} H_{l_2}(\mathbf{r}_2) &= - \int \{E_{0m\beta}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_2) j_{e\beta}(\mathbf{r}') - H_{0e\alpha}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_2) j_{m\alpha}(\mathbf{r}')\} d^3 r'. \quad (17.7) \end{aligned}$$

Для краткости мы далее опустим аргументы \mathbf{r}_1 , \mathbf{l}_1 в E_{0e} , H_{0e} и аргументы \mathbf{r}_2 , \mathbf{l}_2 в E_{0m} , H_{0m} . Умножив (17.6) на выражение, комплексно сопряженное (17.7), и взяв среднее по равновесному ансамблю случайных источников j_e и j_m , находим

$$\begin{aligned} \langle E_{l_1}(\mathbf{r}_1) H_{l_2}^*(\mathbf{r}_2) \rangle &= - \int \int \{E_{0e\alpha}(\mathbf{r}) E_{0m\beta}^*(\mathbf{r}') \langle j_{e\alpha}(\mathbf{r}) j_{e\beta}^*(\mathbf{r}') \rangle + \\ &\quad + H_{0e\alpha}(\mathbf{r}) H_{0m\beta}^*(\mathbf{r}') \langle j_{m\alpha}(\mathbf{r}) j_{m\beta}^*(\mathbf{r}') \rangle - \\ &\quad - E_{0e\alpha}(\mathbf{r}) H_{0m\beta}^*(\mathbf{r}') \langle j_{e\alpha}(\mathbf{r}) j_{m\beta}^*(\mathbf{r}') \rangle - \\ &\quad - H_{0e\alpha}(\mathbf{r}) E_{0m\beta}^*(\mathbf{r}') \langle j_{m\alpha}(\mathbf{r}) j_{e\beta}^*(\mathbf{r}') \rangle\} d^3 r d^3 r'. \end{aligned}$$

Согласно (16.4) последние два члена интегрanda равны нулю из силу некоррелированности электрических и магнитных сторонних токов; корреляционные же функции токов в первых двух членах содержат $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, что позволяет сразу выполнить интегрирование по \mathbf{r}' . В результате

$$\begin{aligned} \langle E_{l_1}(\mathbf{r}_1) H_{l_2}^*(\mathbf{r}_2) \rangle &= \frac{i\omega\Theta(\omega, T)}{8\pi^2} \int \{E_{0e\alpha} E_{0m\beta}^* (\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*) + \\ &\quad + H_{0e\alpha} H_{0m\beta}^* (\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\beta\alpha}^*)\} d^3 r. \quad (17.8) \end{aligned}$$

Но величина

$$q_{em*}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{16\pi} \{E_{0e\alpha} E_{0m\beta}^* (\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*) + H_{0e\alpha} H_{0m\beta}^* (\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\beta\alpha}^*)\} \quad (17.9)$$

представляет собой не что иное, как спектральную объемную плотность смешанных тепловых потерь (электрических + магнитных) в точке \mathbf{r}^1). Интеграл от $q_{em*}(\mathbf{r})$ по \mathbf{r} — это спектральная

¹⁾ Поясним понятие «смешанных» потерь на примере изотропной среды, обладающей только электрическими потерями, когда $\epsilon_{\alpha\beta} = \left(\epsilon' + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \delta_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\alpha\beta} = \mu' \delta_{\alpha\beta}$, где ϵ' и μ' — вещественные проницаемости, σ — электрическая проводимость. Формула (17.9) принимает для такой среды вид

$$q_{em*}(\mathbf{r}) = 1/2 \epsilon_{0e} E_{0m}^*, \quad q_{em*} = (q_{em*})^*.$$

См. продолжение примечания на следующей странице.)

плотность потерь во всем объеме среды (фактически во всех областях, где есть диссипация энергии, т. е. $\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^* \neq 0$ и (или) $\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\beta\alpha}^* \neq 0$):

$$Q_{em^*}(\mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_2) = \int q_{em^*}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (17.10)$$

Конечно, q_{em^*} и Q_{em^*} зависят от координат и направлений точечных источников вспомогательных дифракционных полей, в данном случае—электрического диполя с моментом $\mathbf{p} = -\mathbf{l}_1/i\omega$ в точке \mathbf{r}_1 и магнитного диполя с моментом $\mathbf{m} = -\mathbf{l}_2/i\omega$ в точке \mathbf{r}_2 . Из (17.8)—(17.10) следует, что

$$\langle E_{l_1}(\mathbf{r}_1) H_{l_2}^*(\mathbf{r}_2) \rangle = -\frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) Q_{em^*}(\mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_2). \quad (17.11)$$

Аналогичный расчет при помощи формул (17.4), (17.5) и (16.4) функций корреляции компонент \mathbf{E} или компонент \mathbf{H} приводит к следующим результатам:

$$\langle E_{l_1}(\mathbf{r}_1) E_{l_2}^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) Q_{ee^*}(\mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_2), \quad (17.12)$$

$$\langle H_{l_1}(\mathbf{r}_1) H_{l_2}^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) Q_{mm^*}(\mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_2). \quad (17.13)$$

В формулу (17.12) входят смешанные потери дифракционных полей от двух электрических диполей ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{l}_1/i\omega$ в точке \mathbf{r}_1 и $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{l}_2/i\omega$ в \mathbf{r}_2), а в (17.13)—от двух магнитных диполей ($\mathbf{m}_1 = -\mathbf{l}_1/i\omega$ в \mathbf{r}_1 и $\mathbf{m}_2 = -\mathbf{l}_2/i\omega$ в \mathbf{r}_2). Не смешанные, а собственные потери дифракционного поля одного источника определяют среднеквадратичное значение какой-либо одной компоненты флуктуационного поля в *одной и той же* точке. Например, полагая в (17.12) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ и $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}$, получаем

$$\langle |E_l(\mathbf{r})|^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) Q_{ee^*}(\mathbf{r}, \mathbf{l}; \mathbf{r}, \mathbf{l}), \quad (17.14)$$

Мы назвали эти потери «смешанными», так как они обусловлены полями от двух разных источников. Посмотрим на том же примере, как такие потери возникают.

Как известно, мгновенная объемная плотность джоулева тепла есть $q(t, \mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) E^2(t, \mathbf{r})$. Для гармонического поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 1/\sqrt{2} [\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{r}) e^{i\omega t}]$ в среднем по периоду $T = 2\pi/\omega$ имеем

$$q(\omega, \mathbf{r}) = 1/2 \sigma(\mathbf{r}) |\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})|^2.$$

Если поле \mathbf{E} представляет собой суперпозицию двух полей ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$), то, очевидно,

$$q(\omega, \mathbf{r}) = q_{11*} + q_{12*} + q_{21*} + q_{22*},$$

где $q_{11*}(\omega, \mathbf{r}) = 1/2 \sigma |\mathbf{E}_1|^2$, $q_{22*}(\omega, \mathbf{r}) = 1/2 \sigma |\mathbf{E}_2|^2$ —потери каждого из полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 в отдельности, а $q_{12*}(\omega, \mathbf{r}) = 1/2 \sigma \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*$, $q_{21*}(\omega, \mathbf{r}) = 1/2 \sigma \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2$ —смешанные потери полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 .

т. е. сюда входят собственные потери дифракционного поля, создаваемого электрическим диполем с моментом $\mathbf{p} = -1/i\omega$, находящимся в точке \mathbf{r} .

Формулы (17.11)–(17.13) можно назвать *кирхгофовской формой ФДТ*, потому что они представляют собой *прямое обобщение закона Кирхгофа* классической теории теплового излучения. Этот закон связывает, как известно, интенсивность теплового излучения тела в каком-либо направлении с поглощением в этом теле при падении на него плоской волны с обратным направлением распространения (можно сказать, что это волна от бесконечно удаленного точечного источника). Обобщение касается сразу трех сторон дела.

Во-первых, мы можем теперь находить средние значения произведений любых компонент \mathbf{E} и \mathbf{H} , а не только тех, которые определяют плотность энергии и ее поток (поток вектора Пойнティングа) — две величины, которыми только и интересуется классическая теория излучения.

Во-вторых, мы можем вычислять не только средние произведения компонент, взятых в *одной и той же точке* ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$), что требуется для расчета плотности энергии и ее потока, но и пространственные *функции корреляции* флюктуационного поля ($\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$).

И в-третьих, что наиболее существенно, в формулах (17.11)–(17.13) нет никаких ограничений для соотношения между длиной волны λ и характерными масштабами задачи l (размерами тел, радиусами кривизны их поверхностей, расстояниями от тела до точки наблюдения и т. п.). Иначе говоря, в отличие от классической теории теплового излучения, связанной условиями применимости геометрической оптики, мы можем вычислять теперь вторые моменты флюктуационного поля — как волновой его части (с учетом всех дифракционных явлений), так и неволновой (квазистационарной) — при любом соотношении λ и l .

Необходимо остановиться на преимуществах, которые дает обобщенный закон Кирхгофа и в отношении вычислительной стороны дела. Конечно, для нахождения вспомогательных дифракционных полей (функций Грина) по-прежнему необходимо решать обычными методами соответствующие краевые электродинамические задачи. Однако эти задачи проще тех, о которых говорилось в конце предыдущего параграфа. Для формул (17.11)–(17.13) надо находить решения однородных уравнений Максвелла, обладающие дипольными особенностями в заданных точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , а не решения неоднородных уравнений с заданным, но произвольным распределением сторонних токов j_e и j_m . Более того, во многих случаях можно использовать уже известные функции Грина, т. е. готовые решения задач с точечными источниками (например, классической задачи А. Зоммерфельда о поле

диполя, расположенного над плоской границей поглощающей среды).

Наконец, далеко не всегда необходимо вычислять напряженности дифракционных полей. Ведь в формулы (17.11)–(17.13) входят, в конечном счете, не эти напряженности, а *тепловые потери* дифракционных полей. Во многих практических интересных случаях эти потери можно с достаточной точностью получить приближенными методами. Сюда относится, например, случай хорошо проводящих тел (сильный скин-эффект), случай тел, больших по сравнению с λ или, наоборот, малых по сравнению с λ (хотя бы по некоторым своим размерам, как это имеет место для тонких проводов). Далее мы приведем несколько примеров применения обобщенного закона Кирхгофа и заодно проиллюстрируем предельный переход к результатам классической теории теплового излучения. В заключение же этого параграфа сделаем еще два общих замечания.

Первое касается распространения обобщенного закона Кирхгофа (17.11)–(17.13) на случай *неравномерно нагретых* тел. Если градиенты температуры достаточно малы, так что $\Theta = \Theta(r)$ — настолько плавная функция, что роль неравновесных процессов еще пренебрежимо мала, то, очевидно, учет неравномерного нагрева сводится к тому, что $\Theta(r)$ надо оставлять под интегралом по объему. Вместо произведения ΘQ_0 , в формулах (17.11)–(17.13) надо при таких *квазиоднородных* условиях писать $\int \Theta dQ_0$, где $dQ_0 = q_0 d^3r$ — тепловые потери дифракционного поля в элементе объема d^3r рассматриваемого тела.

Второе замечание касается *нулевых колебаний*. Во все формулы корреляционной теории равновесных и квазиравновесных флукуационных полей входит множителем средняя энергия осциллятора $\Theta(\omega, T)$, содержащая слагаемое $\hbar\omega/2$ — энергию так называемых *нулевых колебаний* (см. (15.10)). Слагаемое в (15.10), зависящее от температуры T и обращающееся в нуль при $T = 0$, соответствует так называемому *черному излучению*. Только эта часть обычно и рассматривается, когда речь идет об излучении, т. е. о *потоке* энергии, поскольку лишь она является в таких случаях наблюдаемой величиной. Между тем в формулах типа (17.11) содержится поток энергии и нулевых колебаний. Когда и почему его не следует учитывать?

Дело в том, что при выводе формул типа (17.11)–(17.13) сделано неявное допущение, что рассматриваемое тело является *единственным* источником флукуационного поля. В действительности же нулевые колебания существуют и в отсутствие данного тела, так как они создаются *всеми* телами без исключения, в том числе и абсолютно холодными ($T = 0$). Можно сказать, что по отношению к нулевым колебаниям всегда имеет место равно-

весное состояние, т. е. нулевые колебания — это всегда *стоячие волны* и, соответственно, любой поток энергии этих колебаний всюду гасится встречным потоком той же интенсивности¹⁾. Поэтому в любых формулах, относящихся к потоку энергии (но не к ее *плотности*!), следует удерживать лишь ту часть $\Theta(\omega, T)$, которая относится к черному излучению, вычитая поток энергии нулевых колебаний, который всегда компенсирован при любом окружении данного тела.

§ 18. Примеры применений обобщенного закона Кирхгофа

Рассмотрим в качестве первого примера случай полупространства $z < 0$, заполненного поглощающей однородной и изотропной средой с проницаемостями ϵ_1, μ_1 , над которым ($z > 0$) среда тоже однородна и изотропна, но прозрачна (проницаемости ϵ и μ вещественны) (рис. 13). Как мы знаем, для нахождения авторых моментов флукуационного поля в какой-либо точке прозрачной среды надо знать дифракционные поля E_{oe}, H_{oe} и E_{om}, H_{om} элементарных электрического и магнитного диполей с моментами $p = -I_1/i\omega$ и $m = -I_2/i\omega$, помещенных в эту точку (I_1 и I_2 — единичные векторы). Решение этой классической задачи можно найти в любом учебнике по распространению радиоволн (подробное изложение см., например, в монографиях [9, 10]). Потери дифракционного поля $E_0 = E_{oe} + E_{om}$, $H_0 = H_{oe} + H_{om}$ в поглощающем полупространстве $z < 0$ проще всего вычислить как поток энергии через границу $z = 0$ в это полупространство:

$$Q_0 = -\frac{c}{16\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\phi \{[E_0 H_0^*]_x + [E_0^* H_0]_x\}_{z=0}. \quad (18.1)$$

На плоскости $z = 0$ мы ввели в (18.1) полярные координаты r и ϕ , причем диполи находятся на высоте h над началом отсчета $r = 0$. Ясно, что Q_0 будет зависеть только от h и, конечно, от ориентаций диполей I_1 и I_2 .

Разные выражения для Q_0 , отвечающие различным ориентациям I_1 и I_2 , определят по формулам (17.11)–(17.14) средние значения произведений соответствующих компонент флукуационного поля. Если, скажем, направить I_1 по оси x и положить

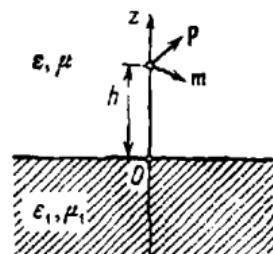


Рис. 13.

¹⁾ Разумеется, гасится в *среднем*, т. е. гасятся средние значения встречных потоков. Если интересоваться флукуациями потока энергии, то в них вносят вклад нулевые колебания.

$m=0$, то мы получим $\langle |E_x|^2 \rangle$; если направить I_1 по оси x , а I_2 по оси y , то соответствующее Q_0 даст $\langle E_x H_y^* \rangle$ и т. д. Отличными от нуля оказываются только следующие моменты¹⁾:

$$\begin{aligned}\langle |E_x|^2 \rangle &= \langle |E_y|^2 \rangle, \quad \langle |H_x|^2 \rangle = -\langle |H_y|^2 \rangle, \\ \langle |E_z|^2 \rangle &= \langle |H_z|^2 \rangle, \quad \langle E_x H_y^* \rangle = -\langle E_y H_x^* \rangle,\end{aligned}\quad (18.2)$$

зависящие уже только от высоты h точки наблюдения над границей раздела.

Зная моменты (18.2), нетрудно составить выражения для спектральных плотностей (по $\omega > 0$) электрической и магнитной энергий флуктуационного поля в прозрачной среде (с ϵ и μ , не зависящими от ω , т. е. в отсутствие дисперсии) и для z -компоненты вектора Пойнтинга:

$$\begin{aligned}u_{e0}(h) &= \frac{\epsilon}{4\pi} \langle |E|^2 \rangle, \quad u_{m0}(h) = \frac{\mu}{4\pi} \langle |H|^2 \rangle, \\ \mathcal{S}_{\omega z}(h) &= \frac{c}{4\pi} \langle E_x H_y^* - E_y H_x^* + E_x^* H_y - E_y^* H_x \rangle.\end{aligned}\quad (18.3)$$

Как и моменты (18.2), величины (18.3) выражаются однократными интегралами от 0 до ∞ по некоторой переменной p , причем расстояние h точки наблюдения от границы $z=0$ входит в подынтегральные выражения только через экспоненту $\exp[-(q+q^*)h]$, где $q=\sqrt{p^2-k^2}$, а k —волновое число в прозрачной среде ($k=k_0\sqrt{\epsilon\mu}$, $k_0=\omega/c$). Тем самым, интегралы по p , выражающие величины (18.3), распадаются на два существенно различных слагаемых. 1) Интегралы по интервалу p от 0 до k . Здесь q чисто мнимое, $q+q^*=0$, и эта доля в величинах (18.3) не зависит от h . Это *волновая* часть флуктуационного поля. 2) Интегралы по интервалу p от k до ∞ , где q вещественно и положительно; соответствующие вклады в $u_{e0}(h)$ и $u_{m0}(h)$ убывают с удалением от границы $z=0$, а в потоке энергии $\mathcal{S}_{\omega z}$ эта часть вообще отсутствует, так как в подынтегральное выражение для $\mathcal{S}_{\omega z}$ входит еще и множитель $q-q^*$, который при вещественном q обращается в нуль. Это *квазистационарное* флуктуационное поле, не дающее вклада в поток энергии.

Для *волнового* поля, если в качестве переменной интегрирования ввести вместо p угол θ между волновым вектором \mathbf{k} и плоскостью $z=0$, так что $p=k \sin \theta$, величины (18.3) приводятся

¹⁾ Подробно все вычисления приведены в [6], § 6.

к виду

$$u_{e\omega}^B = u_{m\omega}^B = \frac{u_{0\omega}^n}{2} = \frac{u_{0\omega} n^3}{4} \int_0^{\pi/2} [1 - R(\theta)] \sin \theta d\theta, \quad (18.4)$$

$$\mathcal{S}_{\omega z}^n = 2\pi J_{0\omega} n^3 \int_0^{\pi/2} [1 - R(\theta)] \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (18.5)$$

Здесь $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ — показатель преломления прозрачной среды, $u_{0\omega}$ и $J_{0\omega} = \frac{c}{4\pi} u_{0\omega}$ — соответственно плотность энергии и интенсивность равновесного излучения в *вакууме*, а $R(\theta)$ — полусумма френелевских коэффициентов отражения (по энергии) при угле падения плоской волны θ и при двух ее поляризациях — с электрическим вектором, параллельным плоскости падения и перпендикулярным к ней:

$$R(\theta) = \frac{1}{2} [R_{||}(\theta) + R_{\perp}(\theta)], \quad (18.6)$$

$$R_{||}(\theta) = \left| \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon} \cos \theta - \sqrt{N^2 - \sin^2 \theta}}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon} \cos \theta + \sqrt{N^2 - \sin^2 \theta}} \right|^2,$$

$$R_{\perp}(\theta) = \left| \frac{\frac{\mu_1}{\mu} \cos \theta - \sqrt{N^2 - \sin^2 \theta}}{\frac{\mu_1}{\mu} \cos \theta + \sqrt{N^2 - \sin^2 \theta}} \right|^2$$

($N = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 / \epsilon \mu}$ — относительный показатель преломления). В (18.6) вошла полусумма $R_{||}$ и R_{\perp} , так как в рассматриваемой задаче обе поляризации совершенно равноправны.

Сопоставление (18.5) с общим выражением нормальной к поверхности компоненты вектора Пойнтинга $\mathcal{S}_{\omega z}$ через интенсивность $J_{\omega}(\theta, \phi)$:

$$\mathcal{S}_{\omega z} = \int_{\theta < \pi/2} J_{\omega}(\theta, \phi) \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} J_{\omega}(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta,$$

показывает, что в нашем случае, т. е. в случае излучения полупространства, заполненного однородной и изотропной поглощающей средой, интенсивность J_{ω} не зависит от угла ϕ и равна (закон Кирхгофа)

$$J_{\omega}(0) = J_{0\omega} n^2 [1 - R(\theta)]. \quad (18.7)$$

Отсюда можно перейти к случаю бесконечного пространства, заполненного прозрачной средой с показателем преломления n , просто положив $R=0$. Тогда получается закон Клаузиуса,

связывающий равновесные интенсивности в прозрачной среде и в вакууме:

$$\mathcal{I}_\omega = \mathcal{I}_{0\omega} n^2.$$

Тот же переход к $\mathcal{R} = 0$ дает, согласно (18.4),

$$u_{\omega}^2 = \frac{1}{2} u_{0\omega} n^2,$$

т. е. *половину* плотности энергии $u_{0\omega} n^2$ равновесного излучения в прозрачной среде, как и должно быть, поскольку мы выделили из этого излучения *односторонний* поток энергии (в сторону $z > 0$).

Для *квазистационарного* поля квадратуры, выражающие плотности энергии $u_{e\omega}^{KB}$ и $u_{m\omega}^{KB}$, сложнее, и можно дать лишь приближенные их оценки.

Если kh гораздо больше величин $\left| \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \sqrt{N^2 - 1} \right|$ и $\left| \frac{\mu}{\mu_1} \sqrt{N^2 - 1} \right|$, то

$$u_{e\omega}^{KB} \approx u_{m\omega}^{KB} \approx \frac{u_{0\omega}^{KB}}{2} \approx \frac{u_{0\omega} n}{8(kh)^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\epsilon_1 \mu + \mu_1 \epsilon}{\sqrt{N^2 - 1}} \right),$$

т. е. убывание плотностей энергии с удалением от границы (с ростом h) происходит по закону $1/h^2$. На расстояниях h , при которых

$$(kh)^2 \geq \frac{1}{4n^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\epsilon_1 \mu + \mu_1 \epsilon}{\sqrt{N^2 - 1}} \right), \quad (18.8)$$

плотность энергии квазистационарной части теплового поля уже пренебрежимо мала по сравнению с постоянной в полупространстве $z > 0$ плотностью энергии волновой части поля (18.4). Напротив, на малых расстояниях h преобладает квазистационарное поле, так что малые зазоры и полости, для которых условие (18.8) не выполнено, практически заполнены именно квазистационарным флуктуационным полем.

При малых kh с точностью до членов порядка $1/(kh)^2$ получаются оценки

$$\begin{aligned} u_{e\omega}^{KB} &\approx \frac{u_{0\omega} n^2 \epsilon}{4(kh)^2} \left\{ \frac{\epsilon_1}{|\epsilon + \epsilon_1|^2 kh} + \operatorname{Re} \left(\frac{\epsilon_1 \sqrt{N^2 - 1}}{(\epsilon + \epsilon_1)^2} \right) \right\}, \\ u_{m\omega}^{KB} &\approx \frac{u_{0\omega} n^2 \mu}{4(kh)^2} \left\{ \frac{\mu_1}{|\mu + \mu_1|^2 kh} + \operatorname{Re} \left(\frac{\mu_1 \sqrt{N^2 - 1}}{(\mu + \mu_1)^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Отсюда видно, что при наличии только электрических потерь ($\mu_1 = \operatorname{Im} \mu_1 = 0$) плотность электрической энергии $u_{e\omega}^{KB}$ растет с уменьшением h , как $1/h^2$, а магнитной $u_{m\omega}^{KB}$ — лишь как $1/h^2$ (а в случае, когда $\epsilon_1 = \operatorname{Im} \epsilon_1 = 0$, — наоборот). Интеграл от $u_{\omega}^{KB} = u_{e\omega}^{KB} + u_{m\omega}^{KB}$ по любому конечному объему, прилегающему к границе раздела, тоже расходится. Как уже было сказано в § 16,

это результат принятой нами дельта-корреляции сторонних источников в поглощающей среде. Если бы мы взяли нелокальную среду, в которой, тем самым, сторонние флуктуационные токи обладали бы некоторым отличным от нуля радиусом корреляции a , то плотность u_{ω}^k оставалась бы при $h \rightarrow 0$ конечной, достигая значения порядка $u_{\infty}/(ka)^2$.

Современная усилительная техника в диапазоне СВЧ вполне позволяет поставить прямой опыт, выявляющий сильное нарастание квазистационарного флуктуационного поля вблизи поверхности нагревшего проводящего тела, но, к сожалению, такой опыт пока не осуществлен.

В рассмотренном примере мы получили для волновой части поля классический закон Кирхгофа (18.7), так как в случае бесконечного полупространства этот закон справедлив для любой длины волны. Правда, для достаточно малых расстояний h от поверхности среды были прослежены эффекты, выходящие за рамки классической теории теплового излучения (наличие квазистационарного флуктуационного поля). Но особый интерес представляют приложения общей теории к таким задачам, где классическая теория вообще неприложима, так как размеры тел не слишком велики по сравнению с длиной волны. Тогда и в волновой части теплового поля должна проявиться новая закономерность — зависимость характеристик волнового поля от отношения l/λ , где l — характерный размер (выше это было расстояние h от границы). Приведем пример, иллюстрирующий сказанное, — тепловое излучение равномерно нагревшего шара.

Общий метод остается прежним: надо найти вспомогательное (дифракционное) поле диполей с моментами $\mathbf{p} = -I_1/i\omega$ и $\mathbf{m} = -I_2/i\omega$, находящихся в какой-либо точке прозрачной среды (вещественные проницаемости ϵ и μ), окружающей шар, который заполнен средой с комплексными проницаемостями ϵ_1 и μ_1 . Решение этой краевой задачи (с обычными условиями непрерывности потенциальных компонент \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 на поверхности шара и условием излучения на бесконечности) нетрудно получить в виде рядов по фундаментальным векторным функциям шара. Потери Q_0 дифракционного поля в шаре можно вычислить затем как поток энергии внутрь шара через его поверхность¹⁾. Напомним, что во всех таких, по сути дела, неравновесных задачах («высвечивание» нагревшего тела) предполагается, что внутри тела каким-то образом поддерживается квазинеутральное состояние и, в частности, постоянная температура.

Мы приведем только один результат — зависимость среднегоектора Пойнтинга флуктуационного поля нагревшего шара от

¹⁾ Подробное изложение расчета см. в [6], § 7, где таким же путем решена задача и для бесконечного круглого цилиндра.

радиуса шара a . На рис. 14 для случая шара, обладающего хорошей электрической проводимостью, но лишенного магнитных потерь, показана зависимость удельной мощности p_ω (т. е. мощности, излучаемой с единицы поверхности шара) от параметра $\alpha = k_0 a = \omega a / c = 2\pi a / \lambda$. При $\lambda/a \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$) мощность стремится к постоянному значению p_∞ , которое отвечает классическому закону Кирхгофа. По оси ординат на рис. 14 отложено отношение p_ω/p_∞ .

Мы видим, что с ростом α удельная мощность излучения сначала растет, а затем спадает со слабо выраженным максимумом, который несколько сдвинут вправо от значений α , соответствующих собственным частотам ω электрических колебаний шара¹⁾. У малого ($\alpha \sim 1$) хорошо проводящего шара излучение с единицы поверхности оказывается в полтора—два раза интенсивнее, чем у большого ($\alpha \gg 1$). Зависимость p_ω от отношения λ/a — это и есть то новое, что дает флукутационная электродинамика.

Полный поток энергии, излучаемой шаром на частоте ω , равен $P_\omega = 4\pi a^2 p_\omega$ и, конечно, одинаков через любую окружающую шар замкнутую поверхность. Но средняя плотность энергии u_ω флукутационного поля ведет себя иначе. Вдали от шара u_ω убывает, как $1/R^2$. Это плотность энергии излучения (волнового поля). При приближении же к поверхности шара u_ω быстро нарастает и при $R = a$ обращается в бесконечность. Разумеется, и здесь это нарастание u_ω обусловлено квазистационарной частью флукутационного поля.

Заметим, что решение вспомогательной дифракционной задачи о полях диполей r и t существенно облегчается в случае хорошо проводящих тел (сильно выраженный скрин-эффект). Для таких тел можно воспользоваться решением дифракционной задачи с так называемыми импедансными граничными условиями, т. е. вообще не рассматривать поле внутри тела. В первом приближении дифракционное поле рассчитывается для идеально проводящих тел той же формы и расположения, что и рассматриваемые (кстати сказать, случай идеально проводящих тел пользуется из-за простоты граничных условий наибольшим вниманием специалистов по теории дифракции). Тепловые потери вычисляются

¹⁾ Если бы у шара были только магнитные потери, то максимумы приходились бы на собственные частоты колебаний магнитного типа. При наличии обоих видов потерь картина была бы более сложной.

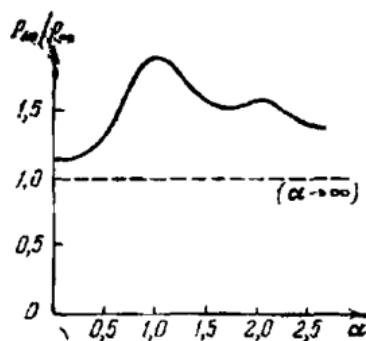


Рис. 14.

затем интегрированием по поверхности тела *поверхностной плотности* джоулема тепла. На элементе $d\Sigma$ поверхности тела поглощается тепло

$$dQ_0 = \frac{c_b^*}{8\pi} |H_{0t}|^2 d\Sigma, \quad \zeta' = \sqrt{\frac{\mu_1 \omega}{8\pi\sigma_1}}, \quad (18.10)$$

где ζ' —вещественная часть импеданса, а H_{0t} (тангенциальная компонента H_0) берется из решения дифракционной задачи для идеально проводящего тела.

Другой приближенный способ вычисления потерь Q_0 дифракционного поля применим в тех случаях, когда, во-первых, все характерные размеры тела (включая радиусы кривизны его поверхности) велики по сравнению с длиной волны λ и с глубиной проникновения поля внутрь тела и, во-вторых, моменты флукуционного поля ищутся лишь вдали от тела — на расстояниях, значительно превышающих λ . Соответственно точечные источники дифракционного поля тоже помещаются на таких расстояниях. Кроме того, предполагается, что форма тела такова, что в приближении геометрической оптики лучи, выходящие из точечного источника, испытывают на границе тела лишь однократные отражения.

Перечисленные условия позволяют считать, что в ближайшей окрестности каждого элемента поверхности тела поле удаленного точечного источника имеет структуру плоской волны, а значит, полное дифракционное поле у поверхности можно найти, пользуясь *френелевскими коэффициентами отражения* (для каждой из поляризаций и с локальным значением угла падения первичной волны). Так как, по предположению, многократных отражений нет, а преломленная волна поглощается, не доходя до других участков поверхности тела, потери Q_0 дифракционного поля равны просто суммарной мощности преломленных в теле волн, причем интеграл берется по «освещенной» части поверхности тела.

Ряд примеров использования обоих приближенных методов расчета потерь Q_0 (т. е. применение формул сильного скин-эффекта и применение френелевских отражательных формул) приведен в монографии [6].

Остановимся теперь на случае, когда излучение тела, находящегося в свободном пространстве (для простоты — в вакууме), интересует нас только в волновой зоне этого тела, т. е. на расстояниях $R \gg l^2/\lambda$, где l — размеры тела. Помещая диполи r и t на столь большом расстоянии, мы можем считать, что в области, занятой телом, приходящая волна — плоская. Если моменты r и t (т. е. орты l_1 и l_2) взять взаимно ортогональными и образующими с R ортогональную правовинтовую связку (рис. 15), то напряженности в падающей на тело волне будут различаться

только знаком:

$$\mathbf{E}_{0e} = -\mathbf{E}_{0m} \equiv \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H}_{0e} = -\mathbf{H}_{0m} \equiv \mathbf{H}_0, \quad (18.11)$$

т. е. падающая волна линейно поляризована (по \mathbf{l}_1), а ее амплитуда (при $p = 1/i\omega$) равна $|E_0| = 2\pi/c\lambda R$.

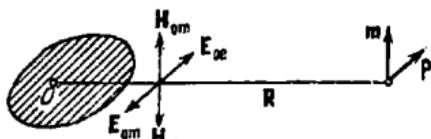


Рис. 15.

В силу (18.11) формулы (17.4) и (17.5) дают для напряженностей теплового поля в точке R выражения

$$E_1 = H_2 = \int_V (\mathbf{E}_0 \mathbf{j}_e - \mathbf{H}_0 \mathbf{j}_m) d^3 r, \quad (18.12)$$

где V — объем тела, а индексы 1 и 2 обозначают компоненты по ортам \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 . По формулам (17.11) — (17.13) мы получаем поэтому, что

$$\langle |E_1|^2 \rangle = \langle |H_2|^2 \rangle = \langle E_1 H_2^* \rangle = \frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) Q_0.$$

Соответственно поток энергии (вектор Пойнтинга) излучения тела (с поляризацией \mathbf{l}_1 и в направлении R) будет

$$\mathcal{S}_R = \frac{c}{4\pi} \langle E_1 H_2^* + E_2 H_1^* \rangle = \frac{c}{2\pi} \langle |E_1|^2 \rangle = \frac{c}{\pi^2} \Theta(\omega, T) Q_0, \quad (18.13)$$

а поток в телесный угол $d\sigma$, т. е. через площадку $R^2 d\sigma$, находящуюся на расстоянии R от тела, составит

$$dP_\omega = \mathcal{S}_R R^2 d\sigma = \frac{c}{\pi^2} \Theta(\omega, T) Q_0 R^2 d\sigma. \quad (18.14)$$

Индекс ω указывает, как обычно, что речь идет о спектре по частотам $\omega \geq 0$.

Выразим теперь потери Q_0 дифракционного поля в теле через так называемый *эффективный попечник поглощения*:

$$\sigma_{\text{эфф}} = \frac{Q_0}{\frac{c}{8\pi} |E_0|^2}.$$

Таким образом, $\sigma_{\text{эфф}}$ — это та площадь фронта падающей на тело плоской волны, поток энергии через которую равен поглощающей телом мощности Q_0 (на поляризации \mathbf{l}_1). Подставив в $\sigma_{\text{эфф}}$ значение $|E_0|$, находим

$$Q_0 = \sigma_{\text{эфф}} \frac{\pi}{2c\lambda^3 R^3}.$$

Наконец, внося это выражение для Q_0 в (18.14) и удвоив результат (для учета обеих независимых поляризаций), получаем

$$dP_\omega = \frac{\Theta(\omega, T)}{\pi\lambda^3} \sigma_{\text{вфф}} d\Omega. \quad (18.15)$$

Таков поток энергии теплового излучения тела в дальней зоне в телесный угол $d\Omega$ в направлении \mathbf{R} и на частоте ω .

Если тело представляет собой перпендикулярную к R пластину, размеры которой гораздо большие λ , то $\sigma_{\text{вфф}} = A\Sigma$, где Σ — площадь пластины, а A — ее коэффициент поглощения. Тогда

$$dP_\omega = \frac{\Theta(\omega, T)}{\pi\lambda^2} A\Sigma d\Omega = \frac{\omega^2\Theta(\omega, T)}{4\pi^2 c^2} A\Sigma d\Omega \quad (18.16)$$

в соответствии с классической теорией теплового излучения.

§ 19. Волноводная форма закона Кирхгофа

При рассмотрении передачи электромагнитных сигналов по волноводам представляет интерес спектральная интенсивность тепловых «шумов», т. е. мощность теплового излучения, переносимая по волноводу в спектральном интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Тепловое поле может создаваться стенками самого волновода, такими-либо антennыми устройствами, к которым он присоединен (щель, рупор), рефлекторами, диафрагмами, аттенюаторами и т. п. Рассмотрим для краткости любую систему таких элементов *излучателем*. Разумеется, флуктуационное *волновое* поле в волноводе тоже может быть представлено как суперпозиция *бегущих* (доктрических) собственных волн волновода, или так называемых *собственных мод*.

На основании формулы (17.11) — (17.13) нетрудно заранее предвидеть, что мощность теплового излучения, посылаемая в волновод любым излучателем на какой-либо n -й моде и на частоте ω , будет связана с *коэффициентом поглощения* этого излучателя, когда на него падает n -я собственная волна частоты ω . Соответствующую формулу, названную *волноводной формой закона Кирхгофа* ([1], § 17), легко получить как при помощи теоремы взаимности, так и на основе принципа детального равновесия ([6], § 9). Мы приведем только второй способ вывода, хотя сказать, не предполагающий заранее выполнения теоремы взаимности.

В ч. I, § 54 было показано, что произвольный излучатель, расположенный с линией (волноводом, коаксиалом) на частоте $\omega \geq 0$, посылает в линию в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$

мощность¹⁾

$$P_{\omega} d\omega = \frac{\Theta(\omega, T)}{2\pi} d\omega.$$

Если согласованный излучатель возбуждает только одну (n -ю) собственную волну, то это равенство должно выполняться и для данной волны, т. е. для каждой моды и частоты, на которых излучатель согласован, имеем

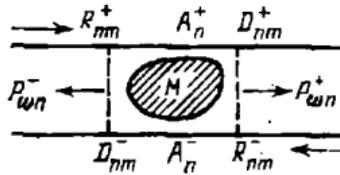


Рис. 16.

M (причем рассогласование, вообще говоря, различно по обе стороны от M).

Введем для M коэффициенты поглощения n -й волны A_n^{\pm} и коэффициенты ее трансформации ($n \rightarrow m$) при отражении от M (R_{nm}^{\pm}) и при прохождении через занятую M область (D_{nm}^{\pm}), где индексы плюс и минус означают падение первичной n -й волны на M соответственно слева и справа. Из закона сохранения энергии имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_m (R_{nm}^+ + D_{nm}^+) + A_n^+, \\ 1 &= \sum_m (R_{nm}^- + D_{nm}^-) + A_n^-. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Штрих около знака суммы должен напоминать, что суммирование распространяется только на те m -е волны, которые на частоте ω являются бегущими (докритическими).

Пусть по обе стороны от излучателя M находятся черные излучатели, т. е. тела, которые имеют ту же температуру, что и M , и согласованы с волноводом (при данной частоте ω) на каждой из рассматриваемых бегущих волн. Обозначим через $P_{\omega n}^{\pm}$ мощности, излучаемые M на n -й волне вправо и влево (рис. 16). Принцип детального равновесия требует, чтобы встречные потоки энергии на этой волне были одинаковы (как справа, так и слева

¹⁾ Разумеется, под $\Theta(\omega, T)$ надо понимать здесь только энергию черного излучения (§ 17). Если же речь идет о неквантовой области $\hbar\omega \ll kT$, то $\Theta(\omega, T) = kT$ без каких-либо оговорок.

от M):

$$\begin{aligned}\frac{\Theta}{2\pi} &= P_{\omega n}^+ + \frac{\Theta}{2\pi} \sum_m' (R_{mn}^- + D_{mn}^+), \\ \frac{\Theta}{2\pi} &= P_{\omega n}^- + \frac{\Theta}{2\pi} \sum_m' (R_{mn}^+ + D_{mn}^-).\end{aligned}\quad (19.3)$$

Умножая (19.2) на $\Theta/2\pi$ и вычитая из соответствующих равенств (19.3), получаем

$$\begin{aligned}P_{\omega n}^+ &= \frac{\Theta}{2\pi} \left\{ A_n^- + \sum_m' (R_{nm}^- - R_{mn}^- + D_{nm}^- - D_{mn}^+) \right\}, \\ P_{\omega n}^- &= \frac{\Theta}{2\pi} \left\{ A_n^+ + \sum_m' (R_{nm}^+ - R_{mn}^+ + D_{nm}^+ - D_{mn}^-) \right\},\end{aligned}\quad (19.4)$$

что и является искомым результатом.

При выполнении принципа взаимности матрицы R и D обладают симметрией:

$$R_{nm}^\pm = R_{mn}^\pm, \quad D_{nm}^\pm = D_{mn}^\mp,$$

и мы получаем тогда из (19.4)

$$P_{\omega n}^+ = \frac{\Theta}{2\pi} A_n^-, \quad P_{\omega n}^- = \frac{\Theta}{2\pi} A_n^+, \quad (19.5)$$

т. е. мощность, излучаемая M направо (налево), определяется коэффициентом поглощения M при падении n -й волны справа (слева).

В отсутствие трансформации типов волн, когда матрицы R и D диагональны, получаем из (19.4)

$$\begin{aligned}P_{\omega n}^+ &= \frac{\Theta}{2\pi} (A_n^- + D_n^- - D_n^+), \\ P_{\omega n}^- &= \frac{\Theta}{2\pi} (A_n^+ + D_n^+ - D_n^-).\end{aligned}\quad (19.6)$$

Выполнение принципа взаимности ($D_n^+ = D_n^-$) или же полная непрозрачность излучателя M ($D_n^\pm = 0$) снова приводят к (19.5).

Заметим, что поскольку $P_{\omega n}^\pm$ — неотрицательные величины, из (19.6) следует, что для любого тела или системы M

$$1 - R_n^\mp = A_n^\mp + D_n^\mp \geq D_n^\pm,$$

т. е. доля энергии, поглощенная и пропущенная при облучении M в одном направлении, всегда не меньше, чем доля энергии, прошедшей через M при облучении во встречном направлении.

Если материальные уравнения для тел, составляющих излучатель M , локальны, то можно перейти к квазиравновесному случаю, считая температуру T функцией точки, и пользоваться средним значением $\Theta(\omega, T)$, взвешенным по локальной величине джоулевых потерь внутри тел:

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{Q_{\text{оп}}(\omega)} \int \Theta(\omega, T) dQ_{\text{оп}},$$

тогда (19.5) залишется в более общем виде:

$$P_{\omega n}^{\pm} = \frac{\bar{\Theta}}{2\pi} A_n^{\mp}(\omega). \quad (19.7)$$

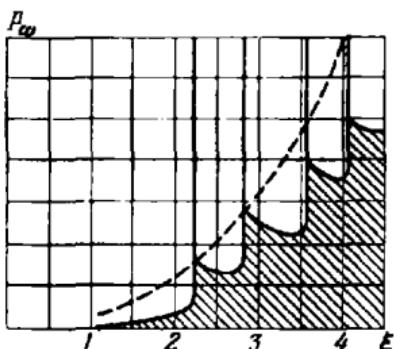
Значения величин $A_n^{\pm}(\omega)$ определяются, конечно, всей структурой поля, создаваемого в излучателе M падающей на него n -й волной, а не только его поглощающими элементами (см. задачу 4).

Согласно (19.5) какое-либо удовлетворяющее принципу взаимности тело излучает, находясь в волноводе, следующие полные мощности в интервале частот $d\omega$:

$$P_{\omega}^{\pm} d\omega = \frac{\Theta}{2\pi} \sum_n' A_n^{\mp}(\omega) d\omega. \quad (19.8)$$

Рис. 17.

Сумма берется по всем докритическим волнам, число которых при разных значениях ω различно. Рис. 17 иллюстрирует формулу (19.8) на примере одностороннего излучения хорошо проводящей поперечной перегородки в прямоугольном волноводе. Мощность P_{ω} (в некотором произвольном масштабе) показана в функции параметра $\xi = 2a/\lambda$, где a — меньшая сторона прямоугольного сечения. С ростом ξ (повышением ω) все большее число собственных E - и H -волн переходит в разряд бегущих. Из-за того, что перегородка обладает только электрическими потерями и лишена магнитных, коэффициенты поглощения E - и H -волн ведут себя при переходе через критические частоты различно: для H -волн они плавно нарастают (от нуля при критической частоте), а для E -волн они начинаются с острых пиков, расположенных вплотную к критической частоте. Эти пики и дают сильные выбросы P_{ω} , которые в принятом масштабе далеко выходят за пределы чертежа. Пунктиром на рисунке показан тот ход $P_{\omega}(\xi)$, который получился бы при экстраполяции на область малых ξ классического закона Кирхгофа. Неприменимость этого асимптотического закона вполне очевидна.



Следует отметить, что для любой совокупности волн, распространяющихся в одном измерении (например, по радиальному направлению в случае излучения шара), можно представить излучаемую мощность в виде (19.8), т. е. в виде суммы по взаимно ортогональным модам. Таким образом, называя формулы типа (19.8) волноводной формой закона Кирхгофа, мы несколько сужаем область их применимости. Однако это оправдано, так как именно волноводы дают реальную возможность выделять волны отдельных типов (E и H) и номеров, тогда как при излучении тел в свободное пространство представляет интерес лишь вся входящая в (19.8) сумма, причем сумма бесконечная (ввиду отсутствия критических частот).

Волноводная форма закона Кирхгофа справедлива не только в бесконечном регулярном волноводе, но и в том случае, когда излучатель (система тел) M находится на конце полубесконечного волновода. Пусть, например, к концу волновода присоединен рупор, перед которым и (или) внутри него расположены любые тела $M_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots)$ с температурами T_α (рис. 18). Под излучателем M надо понимать всю систему тел M_α , заключенную внутри замкнутой поверхности, охватывающей левое полупространство и достаточно удаленной от конца волновода, т. е. пересекающей его там, где уже существует одномерная совокупность взаимно ортогональных собственных волн регулярного волновода (сечение Σ на рис. 18). Мощность теплового излучения, посыпаемого системой тел M в волновод на n -й собственной волне, запишется в том же виде (19.7):

$$P_{\text{an}}^+ = \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha} \Theta_{\alpha} A_{\alpha n}(\omega), \quad (19.9)$$

где суммирование распространяется на все тела M_α (включая, конечно, и рупор, если в нем есть джоулевы потери).

Напомним, что $A_{\alpha n}(\omega)$ — это поглощенная телом M_α доля мощности n -й волны, падающей справа через сечение Σ , т. е. при работе всего устройства в передающем режиме. При этом часть мощности излучается в окружающее пространство. Простое рассуждение показывает, однако, что можно и эту часть включить в (19.9). Действительно, допустим, что среда, заполняющая пространство, охваченное замкнутой поверхностью, и окружающая тела M_α , обладает сколь угодно малым поглощением. Если при этом вся мощность, излучаемая в передающем режиме, в конечном счете поглощается средой, то последнюю можно рассматривать

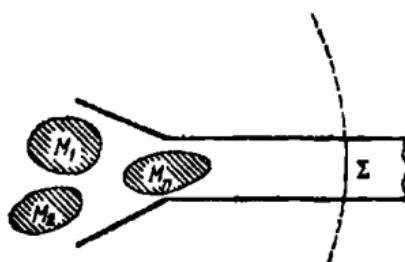


Рис. 18.

вать как одно из тел M_α . Таким образом, один из членов суммы (19.9) будет относиться к среде, а роль соответствующего A_n^- будет играть так называемый *энергетический коэффициент излучения*, т. е. доля мощности падающей справа n -й волны, *излученная* рассматриваемой системой в *непоглощающую* среду.

§ 20. Тепловое излучение и антенны

Как известно, существуют разные виды антенн, например: *тонкие* (проводочные) антенны, широко применяемые в радиовещании и связи на коротких и более длинных волнах, *зеркальные* антенны, используемые в радиоастрономии и для связи на ультракоротких и еще более коротких волнах, и др. В любой антenne происходят тепловые флуктуации в материале антены и возникает обусловленное этими флуктуациями собственное тепловое излучение антены. Но во многих случаях представляют интерес не только эти собственные шумы и излучение, но и воздействие на антенну (а значит, и на последующие каналы) флуктуационных полей внешних нагретых тел и сред. Мы остановимся на этих *наведенных* тепловых шумах и только на *тонких* антенах¹).

Внешнее флуктуационное поле наводит в проводах антенных токи, которые и представляют основной интерес, так как обычно именно они являются здесь непосредственно измеряемыми величинами. В принципе, если корреляционная функция падающего на антенну теплового излучения известна, моменты наведенного тока можно найти, используя формулы теории возбуждения антенн. Однако такого рода расчеты связаны с трудностями, которые обусловлены в первую очередь тем, что флуктуационное поле не обладает дельта-корреляцией вдоль проводов антены. Эти трудности можно в значительной мере обойти, если вновь воспользоваться функцией Грина и теоремой взаимности.

В теории тонких антенн удобно и принято оперировать не со сторонними токами, а со сторонними полями и э. д. с. Целесообразно поэтому соответствующим образом видоизменить и теорему взаимности. Запишем «электрическую часть» этой теоремы (17.2):

$$\int \mathbf{E} \mathbf{j}_{oe} d^3r = \int \mathbf{E}_0 \mathbf{j}_e d^3r, \quad (20.1)$$

и заменим сторонние токи \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_{oe} — источники флуктуационного (\mathbf{E}) и вспомогательного дифракционного (\mathbf{E}_0) полей на — напряжен-

¹⁾ Теория, позволяющая рассчитывать собственное тепловое излучение антенн, развита в книге [6]. в §§ 10 и 11 — для зеркальных антенн, а в § 12 — специально для тонких антенн. § 13 указанной книги посвящен наведенным тепловым шумам в антенных и содержит более обширный материал, чем приводимый ниже в данном параграфе.

ности сторонних полей соответственно K и K_0 . Так как в спектральном представлении $j_e = -i\omega\Theta/4\pi$, а $\Theta = \epsilon K$, где $\epsilon = \epsilon' + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ (ϵ' — вещественная проницаемость, σ — проводимость), имеем

$$j_e = -\frac{i\omega\epsilon}{4\pi} K, \quad j_{0e} = -\frac{i\omega\epsilon}{4\pi} K_0, \quad (20.2)$$

где вторая формула — для дифракционного тока j_{0e} , — разумеется, аналогична первой. Если обозначить плотности токов, наведенных в антенну полями E и E_0 , соответственно через j и j_0 , то и для них будет

$$j = -\frac{i\omega\epsilon}{4\pi} E, \quad j_0 = -\frac{i\omega\epsilon}{4\pi} E_0. \quad (20.3)$$

Из (20.2) и (20.3) следует, что $E_j_{0e} = K_0 j$ и $E_0 j_e = K j_0$, так что теорема (20.1) принимает вид¹⁾

$$\int K_0(r') j(r') d^3r' = \int K(r) j_0(r) d^3r. \quad (20.4)$$

Именно такая форма теоремы взаимности — с напряженностями сторонних полей и плотностями наведенных токов — чаще всего используется в случае тонких проводов (в том числе в теории проволочных антенн), а также в квазистационарной области (в том числе в теории цепей с сосредоточенными параметрами).

При применениях (20.4) надо знать корреляционную функцию компонент стороннего флуктуационного поля $K(r)$. Ее нетрудно получить из первого равенства (20.2) и первой формулы ФДТ (16.4), причем мы ограничимся случаем изотропного материала проводов, когда $\epsilon_{ab} = \epsilon \delta_{ab}$:

$$\begin{aligned} \langle K_\alpha(r) K_\beta^*(r') \rangle &= \frac{16\pi^2}{\omega^2 |e|^2} \langle j_{e\alpha}(r) j_{e\beta}^*(r') \rangle = \\ &= -\frac{2i}{\omega} \Theta(\omega, T) \left(\frac{1}{\epsilon''} - \frac{1}{s} \right) \delta_{\alpha\beta} \delta(r - r'). \end{aligned} \quad (20.5)$$

Более того, если речь идет, как в нашем случае, о металлических проволоках, то обычно можно пренебречь токами смещения внутри этих проволок и считать, что $\epsilon \approx i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$. Тогда

$$\langle K_\alpha(r) K_\beta^*(r') \rangle = \frac{\Theta(\omega, T)}{\pi\sigma} \delta_{\alpha\beta} \delta(r - r'). \quad (20.6)$$

Пусть нас интересует наведенный флуктуационный ток I в некотором сечении какого-либо из проводов, входящих в со-

¹⁾ Для последующего нам удобнее обозначить переменную интегрирования в левой части иначе, чем в правой; поэтому мы и ввели r' .

став антенны. Сечение Σ этого тонкого (квазилинейного, как говорят в электродинамике) проводника, вообще говоря, может меняться по длине провода s , но, по условию, всюду имеет линейные размеры, малые по сравнению с длиной волны λ в окружающей непроводящей среде. Кроме координаты s , отсчитываемой по оси провода, введем еще радиус-вектор r , лежащий в плоскости поперечного сечения провода. Таким образом, $d^3r' = d^3\rho' ds'$.

Для того чтобы выразить ток $I(s)$ через K , допустим, что вспомогательное стороннее поле $K_0(r')$ действует только в поперечном сечении провода с координатой $s' = s$, на всем сечении постоянно и направлено по оси провода (орт s):

$$K_0(r', s') = \mathcal{E}_0 s \delta(s' - s). \quad (20.7)$$

Очевидно, \mathcal{E}_0 — это интегральная сторонняя э. д. с., приложенная в сечении с координатой s :

$$\int K_0 s ds' = \mathcal{E}_0.$$

Коль скоро K_0 имеет вид (20.7), интеграл в левой части (20.4) равен

$$\begin{aligned} \int K_0(r', s') j(r', s') d^3\rho' ds' &= \\ &= \mathcal{E}_0 \int_{\Sigma} d^3\rho' \int j_s(r', s') \delta(s' - s) ds' = \\ &= \mathcal{E}_0 \int_{\Sigma} d^3\rho' j_s(r', s) = \mathcal{E}_0 I(s) \end{aligned}$$

и теорема взаимности (20.4) дает

$$\mathcal{E}_0 I(s) = \int K(r) j_0(r) d^3r. \quad (20.8)$$

При помощи этой формулы нетрудно получить теперь средний квадрат модуля флуктуационного тока $I(s)$. Умножая (20.8) на комплексно сопряженное равенство и усредня, получаем

$$|\mathcal{E}_0|^2 \langle |I(s)|^2 \rangle = \iint \langle K_\alpha(r) K_\beta^*(r') \rangle j_{0\alpha}(r) j_{0\beta}^*(r') d^3r d^3r'.$$

Подставив сюда функцию корреляции (20.6) стороннего теплового поля K , находим

$$|\mathcal{E}_0|^2 \langle |I(s)|^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \int \Theta(\omega, T) dQ_s, \quad (20.9)$$

где

$$dQ_s = \frac{\sigma}{2} |\mathbf{E}_s|^2 d^3r = \frac{|j_s|^2}{2\sigma} d^3r \quad (20.10)$$

— джоулевы потери тока, вызываемые сосредоточенной в сечении s вспомогательной э. д. с. \mathcal{E}_0 . Очевидно, равенство (20.9)

представляет собой модифицированную форму обобщенного закона Кирхгофа (17.14). Оно позволяет не решать неоднородную краевую задачу о флукутационном поле \mathbf{E} в материале антенны, а сводит нахождение $\langle |I(s)|^2 \rangle$ к вычислению квадратуры, если известно решение задачи о вспомогательном поле $\hat{\mathbf{E}}_0$, дельта-запитываемой антенны, т. е. о поле, возбуждаемом э. д. с. $\hat{\mathcal{E}}_0$, приложенной в интересующем нас сечении s .

Если $Z_{bx}(s)$ — входной импеданс антенны по отношению к э. д. с., включенной в сечение s , то $\hat{\mathcal{E}}_0 = Z_{bx}(s) I_0(s)$, где

$$I_0(s) = \int j_{0s}(\mathbf{r}, s) d^3 r$$

— полная сила «дифракционного» тока в этом сечении. Можно ввести аналогичным образом эквивалентную тепловую э. д. с. $\hat{\mathcal{E}}(s)$ в сечении s , определив ее через импеданс $Z_{bx}(s)$ и полный флукутационный ток:

$$\hat{\mathcal{E}}(s) = Z_{bx}(s) I(s). \quad (20.11)$$

Таким образом, $\hat{\mathcal{E}}(s) = \hat{\mathcal{E}}_0 I(s)/I_0(s)$, т. е., согласно (20.8),

$$\hat{\mathcal{E}}(s) = \frac{1}{I_0(s)} \int K(r) j_0(r) d^3 r. \quad (20.12)$$

Таково выражение эквивалентной тепловой э. д. с. в сечении s в общем случае, когда обусловливающее ее стороннее поле $K(r)$ произвольно распределено в объеме проводов антенны. В силу (20.9) средний квадрат модуля $\hat{\mathcal{E}}(s)$ равен

$$\langle |\hat{\mathcal{E}}(s)|^2 \rangle = \frac{2}{\pi |I_0(s)|^3} \int \Theta(\omega, T) dQ_0. \quad (20.13)$$

Следует подчеркнуть, что $\hat{\mathcal{E}}(s)$ не представляет собой флукутационной э. д. с., распределенной вдоль провода. Формула (20.11) вводит (по сути дела, формально) для каждого сечения s свою сосредоточенную в этом сечении э. д. с. $\hat{\mathcal{E}}(s)$, смысл которой состоит только в том, что она обеспечивает правильное значение флукутационного тока в том же сечении.

Однако в случае *квазистационарной* цепи, когда в *каждой ее ветви* полная сила тока I и входной импеданс цепи Z_{bx} не зависят от s , э. д. с. $\hat{\mathcal{E}}$ тоже не зависит от s , т. е. может быть включена в любое сечение данной ветви. Если к тому же цепь имеет всюду одинаковую температуру ($\Theta = \text{const}$), то $\hat{\mathcal{E}}$ можно отождествить с *локальной найквистовской* э. д. с. e того двухполюсника, который получается при размыкании рассматриваемой ветви цепи. При этих условиях (квазистационарности и равновес-

ности) (20.13) переходит в формулу Найквиста:

$$\langle |\tilde{e}(\omega)|^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \Theta \frac{Q_0}{|I_0|^2} = \frac{1}{\pi} \Theta R_s, \quad (20.14)$$

где R_s — энергетическое (активное) сопротивление двухполюсника:

$$Q_0 = \frac{1}{2} R_s |I_0|^2.$$

Вернемся к антенной формуле (20.13) и рассмотрим два иллюстрирующих ее примера.

1. Антenna в поле равновесного излучения. Пусть антenna находится в свободном пространстве, заполненном прозрачной средой со всюду одинаковой температурой ($\Theta=\text{const}$).

Включенная в каком-то сечении s антenna вспомогательная э. д. с. $\hat{\mathcal{E}}_0$ создает дифракционное поле антены, которое отнюдь не локализовано только в проводах антены или в их ближайшей окрестности. Напротив, это поле содержит и излучаемые антенной волны, так что джоулевы потери Q_0 имеют место как в материале самой антены, так и в любых проводящих телах, оказавшихся на пути излучаемых волн. Пока мы предположим, что таких тел нет (свободное пространство) и, следовательно, мощность, отдаваемая э. д. с. $\hat{\mathcal{E}}_0$, расходуется только на нагревание самой антены и на излучение, причем во всякой антenne, отвечающей своему назначению, подавляющая доля приходится именно на излучение.

Предполагая, что среда обладает исчезающе малой проводимостью, и пренебрегая тепловыми потерями в самой антenne, мы можем считать, что полные потери Q_0 дифракционного поля просто равны *мощности излучения* P_0 . Последняя записывается обычно в виде $P_0 = R_\Sigma(s) |I_0(s)|^2/2$, где R_Σ — так называемое *сопротивление излучения* антены, зависящее, конечно, от того, в каком сечении s включена э. д. с. $\hat{\mathcal{E}}_0$. Таким образом,

$$Q_0 = \frac{1}{2} R_\Sigma(s) |I_0(s)|^2. \quad (20.15)$$

При $\Theta=\text{const}$ формула (20.13) имеет вид $\langle |\hat{\mathcal{E}}(s)|^2 \rangle = 2\Theta Q_0/\pi |I_0(s)|^2$. Подставив сюда (20.15), получаем

$$\langle |\hat{\mathcal{E}}(s)|^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \Theta R_\Sigma(s),$$

а спектральная плотность флюктуационной э. д. с. по положительным частотам вдвое больше:

$$\hat{\mathcal{E}}_w(s) = 2 \langle |\hat{\mathcal{E}}(s)|^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \Theta R_\Sigma(s). \quad (20.16)$$

Из вывода ясно, что этот результат справедлив для любой сколь угодно сложной антенны в свободном пространстве, если только относить R_Σ и $\hat{\mathcal{E}}_\omega^2$ к одному и тому же сечению антенны.

2. Термальные шумы, наводимые удаленными телами. Если тело находится на достаточно большом расстоянии R от антенны, точнее — в ее фраунгоферовой зоне, и размеры тела тоже малы по сравнению с зоной Френеля, то в области пространства, занятой телом, можно считать антеннное поле суперпозиций плоской волны и дифрагированного телом вторичного поля. Обозначая, как и в § 18, эффективный попечник поглощения тела для падающей на него плоской волны соответствующей поляризации через $\sigma_{\text{эфф}}$, можно записать поглощаемую телом мощность в виде $Q_0 = \sigma_{\text{эфф}} \mathcal{S}_0$, где \mathcal{S}_0 — модуль вектора Пойнティングа первичной волны. Связь \mathcal{S}_0 с полной мощностью $P_0 = R_\Sigma |I_0|^2 / 2$, излучаемой антенной, дается известным соотношением

$$\mathcal{S}_0 = P_0 \frac{G}{4\pi R^2},$$

где G — функция направления, называемая *приведенным коэффициентом направленности* антенны и описывающая угловое распределение излучаемой мощности P_0 (среднее значение G по единичной сфере равно единице: $\frac{1}{4\pi} \oint G d\Omega = 1$). Таким образом,

$$Q_0 = \sigma_{\text{эфф}} \mathcal{S}_0 = P_0 \frac{G \sigma_{\text{эфф}}}{4\pi R^2} = \frac{R_\Sigma |I_0|^2 G \sigma_{\text{эфф}}}{8\pi R^2}.$$

Согласно (20.13) средний квадрат эквивалентной тепловой э. д. с., создаваемой рассматриваемым телом в сечении s антенны, равен (на $\omega > 0$)

$$\hat{\mathcal{E}}_\omega^2(s) = 2 \langle |\hat{\mathcal{E}}(s)|^2 \rangle = \frac{\Theta R_\Sigma(s) G \sigma_{\text{эфф}}}{2\pi^2 R^2}. \quad (20.17)$$

Здесь предполагается, что тело обладает всюду одинаковой температурой ($\Theta = \text{const}$). Если в поле излучения антенны находится несколько тел с различными температурами и на разных удалениях от антенны, то

$$\hat{\mathcal{E}}_\omega^2(s) = \frac{R_\Sigma(s)}{2\pi^2} \sum_\alpha \frac{\Theta_\alpha G_\alpha \sigma_{\text{эфф}\alpha}}{R_\alpha^2}. \quad (20.18)$$

Для абсолютно черных тел эффективное сечение совпадает с геометрическим ($\sigma_{\text{эфф}} = \sigma$, предполагается, что линейные размеры σ гораздо больше длины волны λ) и, следовательно, $\sigma_{\text{эфф}}/R^2 = \sigma/R^2 = o$, где o — телесный угол, под которым тело видно из места расположения антенны. Формула (20.18) запишется тогда

в виде

$$\hat{\mathcal{G}}_{\omega}^2(s) = \frac{2R_{\Sigma}(s)}{\pi} \sum_{\alpha} \Theta_{\alpha} G_{\alpha} \frac{o_{\alpha}}{4\pi}$$

или даже

$$\hat{\mathcal{G}}_{\omega}^2(s) = \frac{2R_{\Sigma}(s)}{\pi} \int \Theta G \frac{do}{4\pi}$$

(при условии, что $do \gg \lambda^2/R^2$). Если температура всех тел одинакова, то мы получаем

$$\hat{\mathcal{G}}_{\omega}^2(s) = \frac{2}{\pi} \Theta R_{\Sigma}(s) \frac{1}{4\pi} \int G do.$$

При сплошном заполнении периферии черными телами со всюду одинаковой температурой (черная оболочка) мы возвращаемся к формуле (20.16).

§ 21. Равновесное тепловое поле. Равновесная форма ФДТ

До сих пор мы рассматривали главным образом *неравновесные* задачи—о поле, создаваемом нагретыми телами в окружающей среде¹⁾, которая считалась либо прозрачной (и поэтому не вносящей никакого вклада в тепловые потери вспомогательного дифракционного поля), либо настолько холодной, что ее собственным флуктуационным полем можно было пренебречь. В этом параграфе мы обратимся к случаю, когда *во всем объеме полного поля температура одинакова*, т. е. будем рассматривать *равновесное* флуктуационное поле. Если, в частности, речь идет о телах, окруженных прозрачной средой, не заключенной в идеальную зеркальную оболочку, то мы будем предполагать, что на достаточно больших расстояниях поле ограничено полностью поглощающей оболочкой, имеющей ту же температуру, что и нагретые тела.

Общие формулы (17.11)—(17.13) для пространственных корреляционных функций спектральных амплитуд флуктуационного поля, созданного равномерно нагретыми телами, можно объединить в одну формулу, если обозначить через *A* и *B* какие-либо две из шести компонент *E* и *H*. Тогда вместо (17.11)—(17.13) можно написать

$$\langle A(r_1) B^*(r_2) \rangle = \pm \frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) Q_{AB^*}. \quad (21.1)$$

¹⁾ Напомним, что состояние самих нагретых тел необходимо предполагать при этом квазиравновесным.

Верхний знак отвечает случаю обеих электрических или обеих магнитных компонент, нижний — одной электрической и другой магнитной; Q_{AB} — смешанные потери дифракционного поля, создаваемого единичными точечными источниками соответствующего типа, помещенными в точках Γ_1 и Γ_2 .

Кирхгофовская форма ФДТ (21.1) справедлива, конечно, и для равновесного поля, но под Q_{AB} надо понимать теперь смешанные потери дифракционного поля во всем занимаемом им пространстве. Это обстоятельство позволяет существенно упростить выражение для Q_{AB} , воспользовавшись так называемой комплексной леммой Лоренца. Эта лемма, в известном смысле аналогичная теореме взаимности, отличается от последней тем, что она связывает «накрест» поле одной системы источников с комплексно сопряженным полем другой системы источников.

Написав, как и при выводе теоремы взаимности (17.2), две системы уравнений Максвелла (16.1) — одну для поля и источников 1, другую для поля и источников 2, — умножим уравнения первой системы соответственно на $-H_2^*$ и E_2^* , а комплексно сопряженные уравнения второй системы на $-H_1$ и E_1 и сложим результаты. Это приводит к равенству

$$\begin{aligned} -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} \{ [E_1 H_2^*] + [E_2^* H_1] \} = \\ = j_{e1} E_2^* + j_{m1} H_2^* + j_{e2}^* E_1 + j_{m2}^* H_1 - \\ - \frac{i\omega}{4\pi} (D_1 E_2^* - E_1 D_2^* + B_1 H_2^* - H_1 B_2^*). \end{aligned}$$

При интегрировании этого равенства по всему объему V *полного* поля интеграл от div обращается в нуль и мы получаем лемму Лоренца:

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{16\pi} \int_V (D_1 E_2^* - E_1 D_2^* + B_1 H_2^* - H_1 B_2^*) d^3 r = \\ = -\frac{1}{4} \int_V (j_{e1} E_2^* + j_{m1} H_2^* + j_{e2}^* E_1 + j_{m2}^* H_1) d^3 r. \quad (21.2) \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в левой части (21.2), если учесть, что $D_{1\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta} E_{1\beta}$, $D_{2\beta}^* = \epsilon_{\beta\alpha}^* E_{2\alpha}^*$ (и аналогично для B_1 и B_2), представляет собой не что иное, как смешанные тепловые потери Q_{12} полей 1 и 2 во всем пространстве (см. (17.9), (17.10)), и, значит,

$$Q_{12} = -\frac{1}{4} \int_V (j_{e1} E_2^* + j_{m1} H_2^* + j_{e2}^* E_1 + j_{m2}^* H_1) d^3 r. \quad (21.3)$$

Этим результатом леммы Лоренца мы теперь и воспользуемся применительно к дифракционным полям, создаваемым единичными точечными источниками.

Возьмем случай, когда A и B в (21.1) — компоненты **электрической** напряженности теплового поля \mathbf{E} . Тогда

$$\mathbf{j}_1 \equiv \mathbf{j}_{e1} = \mathbf{l}_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{j}_2 \equiv \mathbf{j}_{e2} = \mathbf{l}_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{j}_{m1} = \mathbf{j}_{m2} = 0$$

и (21.3) дает

$$Q_{ee*}(\mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_2) = -\frac{1}{4} \{ \mathbf{l}_1 \mathbf{E}_{02}^*(\mathbf{r}_1) + \mathbf{l}_2 \mathbf{E}_{01}(\mathbf{r}_2) \}. \quad (21.4)$$

Но из обычной теоремы взаимности (17.2) следует, что в этом же случае

$$\mathbf{l}_1 \mathbf{E}_{02}^*(\mathbf{r}_1) = \mathbf{l}_2 \mathbf{E}_{01}(\mathbf{r}_2).$$

Исключая из (21.4) при помощи последнего равенства либо \mathbf{E}_{01} , либо \mathbf{E}_{02}^* , можно записать потери Q_{ee*} в следующих двух формах:

$$Q_{ee*}(\mathbf{r}_1, \mathbf{l}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{l}_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{l}_1 \mathbf{E}_{02}^*(\mathbf{r}_1) \} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{l}_2 \mathbf{E}_{01}(\mathbf{r}_2) \}.$$

Подстановка этих выражений в (17.12) дает

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}_{l_1}(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_{l_2}^*(\mathbf{r}_2) \rangle &= -\frac{1}{\pi} \Theta(\omega, T) \operatorname{Re} \{ \mathbf{l}_1 \mathbf{E}_{02}^*(\mathbf{r}_1) \} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \Theta(\omega, T) \operatorname{Re} \{ \mathbf{l}_2 \mathbf{E}_{01}(\mathbf{r}_2) \}. \end{aligned} \quad (21.5)$$

Применение (21.3) к случаю двух компонент магнитной напряженности теплового поля \mathbf{H} приводит к аналогичному выражению для Q_{mm*} и, в соответствии с (17.13), к результату:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_{l_1}(\mathbf{r}_1) \mathbf{H}_{l_2}^*(\mathbf{r}_2) \rangle &= -\frac{1}{\pi} \Theta(\omega, T) \operatorname{Re} \{ \mathbf{l}_1 \mathbf{H}_{02}^*(\mathbf{r}_1) \} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \Theta(\omega, T) \operatorname{Re} \{ \mathbf{l}_2 \mathbf{H}_{01}(\mathbf{r}_2) \}. \end{aligned} \quad (21.6)$$

Наконец, в случае, когда A — компонента \mathbf{E} , а B — компонента \mathbf{H} , мы получаем Q_{em*} и из (17.11) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}_{l_1}(\mathbf{r}_1) \mathbf{H}_{l_2}^*(\mathbf{r}_2) \rangle &= -\frac{i}{\pi} \Theta(\omega, T) \operatorname{Im} \{ \mathbf{l}_1 \mathbf{E}_{02}^*(\mathbf{r}_1) \} = \\ &= \frac{i}{\pi} \Theta(\omega, T) \operatorname{Im} \{ \mathbf{l}_2 \mathbf{H}_{01}(\mathbf{r}_2) \}, \end{aligned} \quad (21.7)$$

т. е. корреляционные функции между электрической и магнитной напряженностями чисто мнимые.

Формулы (21.5) — (21.7) показывают, что с точностью до множителя $-\Theta/\pi$ корреляционные функции равновесного поля совпадают с вещественными или мнимыми частями соответствующих функций Грина. Эти формулы можно назвать *равновесной формой ФДТ*. Она избавляет от необходимости вычислять после нахождения вспомогательного дифракционного поля его тепловые потери. Достаточно взять вещественную или мнимую часть самих напряженностей этого поля. Вместе с тем линейная связь между вторыми моментами теплового поля и напряженностями дифрак-

ционного поля сразу же позволяет использовать аппарат теории аналитических функций комплексного переменного при нахождении тех или иных интегральных (по спектру) эффектов в равновесном поле, т. е. при интегрировании корреляционных функций теплового поля по частоте ω .

Располагая функциями корреляции спектральных компонент флуктуационного поля и зная, в частности, средние значения произведений этих компонент в одной точке, мы имеем возможность находить не только средние плотности энергии и ее потока, но и другие средние билинейные величины. Мы можем, например, вычислить средние значения компонент максвелловского тензора напряжений, т. е. найти механические (пондеромоторные) силы, с которыми равновесное поле действует на тела. Сказанное относится как к квазиравновесным полям, когда в нашем распоряжении обобщенный закон Кирхгофа (21.1), так и к равновесным, когда можно пользоваться равновесной формой ФДТ (21.5) и (21.6). Однако эти интересные физические применения указанных теорем [6] не имеют прямого отношения к радиофизике, и поэтому мы ограничимся лишь немногими замечаниями.

На первый взгляд может показаться странным, что даже в равновесном случае флуктуационное электромагнитное поле обусловливает действие сил на тела (в том числе и на идеальные проводники). Но ничего удивительного здесь нет просто потому, что, говоря о равновесии, мы постоянно имели в виду только *тепловое равновесие*, т. е. одинаковую во всей рассматриваемой системе температуру T (в частности, $T = 0$). Это вовсе не исключает действия электродинамических сил, которые либо уравновешены внешними связями, либо вызывают перемещение тел к *механически равновесной* конфигурации. Поэтому нет ничего удивительного и в том, например, что равновесное поле в полу-пространстве над идеальным плоским зеркалом оказывает на это зеркало давление, спектральная плотность которого в случае недиспергирующей среды равна

$$\rho_0 = -\frac{1}{4\pi} \{e \langle |E_n|^2 \rangle - \mu \langle |H_n|^2 \rangle\} = \frac{\Theta k^2}{3\pi^2 \omega} = \frac{a_0}{3}.$$

Как всегда, член $\hbar\omega/2$ в $\Theta(\omega, T)$ (т. е. нулевые колебания) дает при интегрировании по ω расходящееся выражение. Однако эта часть давления компенсируется «нулевым» давлением поля по другую сторону от зеркала, где равновесное излучение может, вообще говоря, иметь другую температуру. Результирующая сила, действующая на зеркало, определяется разностью давлений по обе стороны и не содержит в данном примере вклада нулевых колебаний.

Это не означает, что нулевые колебания вообще не создают пондеромоторных сил. В случае плоского зеркала геометричес-

кие условия симметричны, одинаковы по обе стороны от зеркала. Если же взять, скажем, образованный двумя идеальными зеркалами двугранный угол (рис. 19), то структура «нулевых» стоячих волн внутри угла и вне его будет различна. В результате получается, что даже при $T=0$ на зеркала действует «склоняющий» интегральный (по ω) момент. Интегрирование по ω надо при этом распространять не до $\omega=\infty$, а лишь до некоторой частоты $\omega_n \ll \sigma$ (σ — проводимость; неравенство является условием того, что при нормальном скин-эффекте металл еще можно считать идеально проводящим).



Рис. 19.

Разумеется, флуктуационное электромагнитное поле порождает силы, действующие и на поглощающие тела. Более

того, поскольку поверхности таких тел «выстланы» слоем ближнего (квазистационарного) теплового поля, сильно нарастающего при приближении к поверхности, эффект механического взаимодействия (сил сцепления) становится особенно большим в случае малых зазоров между поверхностями тел. На такого рода явления обратил внимание Е. М. Лифшиц, исследовавший их в работе [7] (см. также [11], [12] и § 18 в [6]).

Теория макроскопических сил сцепления строилась ранее на основе элементарного закона ван-дер-ваальсовых сил попарного взаимодействия между атомами или молекулами, что заранее ограничивало результат случаем разреженных сред. Чисто феноменологическая теория, основанная на флуктуационной электродинамике, снимает это ограничение. Напротив, исходя из выражения для макроскопической силы сцепления, можно в случае разреженных сред сделать обратное заключение — о законе попарного взаимодействия отдельных нейтральных атомов и молекул. Такой путь, как это ни парадоксально на первый взгляд, оказывается проще, чем прямой квантовомеханический расчет для двух нейтральных частиц, при котором закон взаимодействия получается лишь в высоких порядках при вычислениях методом возмущений.

§ 22. Тепловое поле в гиротропных телах

Многие среды (ферриты, плазма), находясь в достаточно сильном постоянном (во времени) внешнем магнитном поле B_0 , становятся гиротропными¹⁾. Это означает, в частности, что в одно-

¹⁾ Под «достаточно сильным» понимается поле, модуль напряженности которого B_0 существенно больше стандартов напряженностей флуктуационного поля. Поэтому при линеаризации уравнений Максвелла относительно этих флуктуационных полей сохраняет смысл учет зависимости параметров среды от B_0 .

родной среде и однородном поле \mathbf{B}_0 , собственными волнами являются монохроматические волны с круговой (правой и левой) поляризацией, т. е. только эти волны распространяются без изменения вида поляризации. Если же в среду впущена, скажем, линейно поляризованная волна, то по мере распространения ее плоскость поляризации будет, вообще говоря, поворачиваться вокруг направления распространения — за счет разницы фазовых скоростей волн с правой и левой круговой поляризацией, на которые можно разложить линейно поляризованную волну.

В то время как в анизотропных средах тензоры проницаемостей симметричны:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{r}) = \epsilon_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{r}),$$

$$\mu_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{r}) = \mu_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{r}),$$

в гиротропной среде, будучи функциями \mathbf{B}_0 , они обладают симметрией с *переменой знака* \mathbf{B}_0 :

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{B}_0) = \epsilon_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{r}, -\mathbf{B}_0),$$

$$\mu_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{B}_0) = \mu_{\beta\alpha}(\omega, \mathbf{r}, -\mathbf{B}_0).$$

Тем самым, для гиротропных сред обычная теорема взаимности (17.2) несправедлива. Ее заменяет равенство, связывающее «накрест» источники и напряженности поля 1 в среде, находящейся в магнитном поле $\mathbf{B}_0(j_{e1}, j_{m1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, и источники и напряженности поля 2 в той же среде, но с *обращенным внешним магнитным полем* — $-\mathbf{B}_0$. Будем отмечать электромагнитные величины, относящиеся к полю 2 в такой «обращенной среде», значком «тильда» ($\tilde{j}_{e2}, \tilde{j}_{m2}, \tilde{\mathbf{E}}_2, \tilde{\mathbf{H}}_2$). Вместо (17.2) для гиротропной среды выполняется теорема

$$\int_V (\tilde{\mathbf{E}}_2 j_{e1} - \tilde{\mathbf{H}}_2 j_{m1}) d^3 r = \int_V (\mathbf{E}_1 \tilde{j}_{e2} - \mathbf{H}_1 \tilde{j}_{m2}) d^3 r. \quad (22.1)$$

Формулы (16.4) для корреляционных функций *сторонних токов* справедливы, конечно, и в гиротропной среде, но обобщенный закон Кирхгофа (21.1), дающий корреляцию *напряженностей флуктуационного поля*, уже теряет силу, так как при выводе этого закона была использована теорема взаимности (17.2).

Если повторить весь вывод, но опираясь на равенство (22.1), то мы придем к следующему результату, обобщающему формулы (21.1) на случай гиротропных сред:

$$\langle A(\mathbf{r}_1) B^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \pm \frac{2}{\pi} \Theta(\omega, T) \bar{Q}_{MB*}, \quad (22.2)$$

а при достаточно плавном пространственном изменении температуры —

$$\langle A(r_1) B^*(r_2) \rangle = \pm \frac{2}{\pi} \int \Theta(\omega, T, r) d\tilde{Q}_{AB*}. \quad (22.3)$$

Таким образом, корреляция спектральных амплитуд флюктуационного поля в гиротропной среде, находящейся во внешнем магнитном поле $B_0(r)$, определяется тепловыми потерями вспомогательного дифракционного поля в обращенной среде, т. е. *потери надо вычислять при изменении знака внешнего магнитного поля ($B_0(r) \rightarrow -B_0(r)$)*¹⁾. Формулы (22.2), (22.3) универсальны в том смысле, что они не налагают никаких ограничений ни на размеры и форму тел, ни на их электрические и магнитные свойства, включая и гиротропию, зависящую также от интенсивности и конфигурации постоянного (во времени) подмагничивающего поля B_0 .

Формулы (22.2), (22.3) облегчают решение флюктуационных задач для гиротропных тел в не меньшей степени, чем формулы (21.1) в отсутствие гиротропии. Разумеется, необходимое для вычисления тепловых потерь решение вспомогательной дифракционной задачи связано, вообще говоря, с большими трудностями, чем для негиротропных тел и сред. Достаточно указать, что даже нахождение френелевских коэффициентов отражения плоской волны от однородного гиротропного полупространства представляет собой при произвольной ориентации однородного же поля B_0 чрезвычайно громоздкую задачу. Обычно здесь ограничиваются поэтому лишь частными случаями (поле B_0 перпендикулярно или параллельно границе, первичная волна падает нормально). Круг точно решаемых дифракционных задач, т. е. допускающих нахождение точных функций Грина, ограничен для гиротропных тел еще более жестко, чем для тел изотропных, но это лежит в природе вещей, а не в методе решения флюктуационных задач. Нахождение статистических характеристик теплового поля в принципе столь же просто.

Естественно, что все формулы, выводимые на основе обобщенного закона Кирхгофа, претерпевают при рассмотрении гиротропных тел такое же изменение, какое содержится в (22.2). Так, например, для потока энергии теплового излучения в телесный угол $d\Omega$ в волновой зоне гиротропного тела вместо формулы (18.15) будет теперь

$$dP_\omega = \frac{\Theta(\omega, T)}{\pi \lambda^3} \tilde{\sigma}_{\text{eff}} d\Omega, \quad (22.4)$$

¹⁾ Не только обобщенный, но и классический закон Кирхгофа для гиротропных сред долгое время оставался неизвестным. Закон (22.3) был получен М. Л. Левиным лишь в конце 50-х годов, а опубликован еще позднее, в книге [6].

где $\tilde{\sigma}_{\text{eff}}$ — эффективный поперечник поглощения данного тела при *обращенном* поле $-B_0$. Волноводная форма закона Кирхгофа (19.5) тоже заменится на

$$P_{\omega n}^{\pm} = \frac{\Theta}{2\pi} \tilde{A}_n^{\mp}. \quad (22.5)$$

Ряд примеров применения формул (22.2) — (22.5) см. в книге [6], §§ 21—23.

Что касается равновесной формы ФДТ (§ 21), то для нее при наличии гиротропии дело обстоит следующим образом. Формулы (21.5) — (21.7) были получены при помощи обобщенного закона Кирхгофа (21.1) и комплексной леммы Лоренца, т. е. результата (21.4). Лемма Лоренца справедлива для любых сред с *линейными* материальными уравнениями, но (21.1) заменяется в случае гиротропных сред на (22.2). Поэтому, например, вместо формулы (см. (21.5))

$$\langle E_{I_1}(r_1) E_{I_2}^*(r_2) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \Theta(\omega, T) \{ I_1 E_{02}^*(r_1) + I_2 E_{01}(r_2) \}$$

мы получим теперь

$$\langle E_{I_1}(r_1) E_{I_2}^*(r_2) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \Theta(\omega, T) \{ I_1 \tilde{E}_{02}^*(r_1) + I_2 \tilde{E}_{01}(r_2) \}, \quad (22.6)$$

где справа входят функции Грина в обращенной среде.

Но из теоремы (22.1), т. е. из обобщенной на гиротропные среды теоремы взаимности, следует, что при рассматриваемых точечных источниках

$$I_1 \tilde{E}_{02}^*(r_1) = I_2 E_{01}(r_2). \quad (22.7)$$

При помощи этого равенства можно исключить из (22.6), скажем $\tilde{E}_{02}^*(r_1)$, что дает

$$\langle E_{I_1}(r_1) E_{I_2}^*(r_2) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \Theta(\omega, T) I_2 \{ E_{01}^*(r_2) + \tilde{E}_{01}(r_2) \}. \quad (22.8)$$

Это смешанная форма корреляционной функции, содержащая функции Грина как в исходной среде, так и в среде с обращенным подмагничивающим полем. При $B_0 = 0$ формулы смешанного типа (в частности, (22.8)) непосредственно переходят в полученные ранее формулы для негиротропных тел (в частности, (21.5)).

Можно также, пользуясь (22.7), заменить в (22.6) обе напряженности с тильдами на напряженности в исходной среде (без обращения B_0), и тогда

$$\langle E_{I_1}(r_1) E_{I_2}^*(r_2) \rangle = -\frac{1}{2\pi} \Theta(\omega, T) \{ I_2 E_{01}^*(r_2) + I_1 E_{02}(r_1) \}. \quad (22.9)$$

Аналогично формулам (22.8) и (22.9) записываются и функции для компонент H , и взаимные функции корреляции между компонентами E и H .

Таким образом, в случае равновесного поля гиротропность не вносит никаких принципиальных усложнений. Как и для негиротропных тел, надо знать только функции Грина, хотя их практическое вычисление, конечно, значительно сложнее, чем для изотропных тел.

Ясно, что наличие гиротропности не должно нарушать универсальную связь между *интегральным* излучением и поглощением одного и того же тела, вытекающую из второго начала термодинамики. Если, например, тело окружено достаточно удаленной абсолютно черной оболочкой с той же температурой, что и у тела, то тепловое равновесие между телом и оболочкой должно иметь место независимо от того, обладает тело гиротропией или нет. Это значит, что интегральная (по телесному углу) суммарная (по обеим поляризациям) интенсивность излучения тела должна быть в обоих случаях одинакова ($P_\omega = \tilde{P}_\omega$). Но в отсутствие гиротропии, согласно (18.15),

$$P_\omega = \frac{\Theta}{\pi \lambda^2} \oint \sigma_{\text{эфф}} d\Omega,$$

а при ее наличии, согласно (22.4),

$$\tilde{P}_\omega = \frac{\Theta}{\pi \lambda^2} \oint \tilde{\sigma}_{\text{эфф}} d\Omega.$$

Из равенства $P_\omega = \tilde{P}_\omega$ следует, что

$$\oint \sigma_{\text{эфф}} d\Omega = \oint \tilde{\sigma}_{\text{эфф}} d\Omega. \quad (22.10)$$

Точно так же суммарное излучение тела, находящегося в волноводе между двумя черными пробками, вправо и влево

$$P_\omega = P_\omega^+ + P_\omega^- = \sum_n' (P_{\omega n}^+ + P_{\omega n}^-)$$

не должно зависеть от наличия гиротропии, т. е. должно быть $P_\omega = \tilde{P}_\omega$. Суммируя выражения (19.4) по всем номерам n бегущих волн, получаем

$$P_\omega^+ = \frac{\Theta}{2\pi} \left\{ \sum_n A_n^- + \sum_{m,n} (D_{nm}^- - D_{mn}^+) \right\},$$

$$P_\omega^- = \frac{\Theta}{2\pi} \left\{ \sum_n A_n^+ + \sum_{m,n} (D_{nm}^+ - D_{mn}^-) \right\}.$$

Конечно, в двойных суммах по m и n эти индексы можно переставлять. Поэтому

$$P_\omega = P_\omega^+ + P_\omega^- = \frac{\Theta}{2\pi} \sum_n' (A_n^- + A_n^+).$$

Из равенства $P_\omega = \tilde{P}_\omega$ вытекает соотношение, аналогичное (22.10):

$$\sum_n' (A_n^- + A_n^+) = \sum_n' (\tilde{A}_n^- + \tilde{A}_n^+). \quad (22.11)$$

§ 23. Термическое поле в среде с пространственной дисперсией

До сих пор мы ограничивались материальными уравнениями (14.2), описывающими среду (вообще говоря, неоднородную) в отсутствие пространственной дисперсии: индукции D и B в точке r зависели от свойств и предыстории как среды (от ϵ и μ), так и поля (напряженностей E и H) только в той же точке r . Если же состояние среды в точке r зависит от предыстории (в чем заключается временная нелокальность) не только в этой же точке, но и в некоторой ее окрестности (*пространственная нелокальность*), то материальные уравнения надо брать более общего вида:

$$\begin{aligned} D(t, r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(t-t', r, r') E(t', r') d^3r', \\ B(t, r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t-t', r, r') H(t', r') d^3r'. \end{aligned} \quad (23.1)$$

Зависимость ядер ϵ и μ от *разности* $t-t'$ отражает *стационарность* интересующих нас процессов, т. е. предполагает неизменность свойств среды во времени (если бы среда менялась во времени, то ϵ и μ зависели бы от t и t' порознь). Зависимость ϵ и μ от r и r' отвечает пространственно *неоднородной* среде. В однородной среде ядра ϵ и μ зависят только от разности $r=r-r'$. Если область пространственной нелокальности стягивается в точку, то

$$\epsilon(t-t', r, r') \rightarrow \epsilon(t-t', r) \delta(r-r'),$$

и аналогично для μ . Материальные уравнения (23.1) тотчас же переходят при этом в локальные уравнения (14.2)¹⁾.

В (23.1), как и в (14.2), имеются в виду изотропная и неизотропная среды. Для анизотропной или гиротропной среды соотношение между D и E устанавливается тензором диэлектри-

¹⁾ Состояние среды в момент t в точке r может зависеть только от событий, которые находятся внутри обращенного в прошлое светового конуса с вершиной в «точке» (t, r) . Иначе говоря, это события, которые предшествуют моменту t по времени и создают поля, распространяющиеся не быстрее света в вакууме (принцип причинности). Таким образом, интегрирование по t' и r' в (23.1) и в последующей формуле (23.2а) в бесконечных пределах предполагает, что функции ϵ , μ и ϵ_{ab} обращаются вне указанного конуса в нуль. Это налагает определенные ограничения и на их ф-амплитуды. А именно устанавливает определенную связь между вещественными и минимальными частями этих функций. В отсутствие пространственной дисперсии такая связь выражается формулами Крамерса—Кронига ([3], § 62), а при ее наличии—более общими формулами [13].

ческой проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), так что первое уравнение (23.1) заменяется на

$$D_\alpha(t, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_{\alpha\beta}(t-t', r, r') E_\beta(t', r') d^3r'. \quad (23.2a)$$

Что касается второго уравнения (23.1), то из общих соображений следует, что введение еще одного тензора μ_{ab} было бы излишним. Дело в том, что при введении $D = E + 4\pi P$ и $B = H + 4\pi M$ мы описываем состояние среды поляризацией P и намагничением M , разбивая для этого индуцированные в среде токи и заряды на «сорт» (связанные и свободные заряды с соответствующими поляризационным током и током проводимости, а кроме того, молекулярные амперовы токи). Но в нелокальной среде проще и естественнее включить в D все виды наведенного тока, так что

$$B = H, \quad (23.26)$$

а для D справедливо материальное уравнение (23.2a). Конечно, определения D и B (т. е. их связь с микрополями и микротоками) при этом иные, чем в (23.1), так что при отсутствии пространственной дисперсии уравнения (23.2a, б) не переходят в (23.1).

Возможность полного описания среды материальными уравнениями (23.2a, б) показывает, что достаточно *одного* тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ при $\mu_{ab} = \delta_{ab}$ (подробней см. [8, 14]). Заметим, что в *толще* нелокальной среды, даже если она однородна и изотропна, тензор $\epsilon_{\alpha\beta}(t-t', r, r')$ в (23.2a) не вырождается в диагональный, а имеет общий для данного случая вид:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\tau, \rho) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\rho_\alpha \rho_\beta}{\rho^2} \right) \epsilon_t(\tau, \rho) + \frac{\rho_\alpha \rho_\beta}{\rho^2} \epsilon_\ell(\tau, \rho), \quad (23.3)$$

где $\tau = t - t'$, $\rho = r - r'$, т. е. содержит *две* независимые скалярные функции ϵ_t и ϵ_ℓ — поперечную и продольную (по отношению к ρ) диэлектрические проницаемости. Отсюда ясно, что для *однородной* и *изотропной* нелокальной среды допустимы материальные уравнения и вида (23.1), поскольку в них тоже фигурируют только две независимые скалярные функции $\epsilon(\tau, \rho)$ и $\mu(\tau, \rho)$. О связи между ϵ_t , ϵ_ℓ и ϵ , μ мы скажем несколько дальше.

Выше мы не случайно подчеркнули, что выражение (23.3) для $\epsilon_{\alpha\beta}$ относится к *толще* среды, т. е. к областям, достаточно удаленным от ее границ. При приближении к границе среды $\epsilon_{\alpha\beta}$ не может оставаться функцией только разности $\rho = r - r'$, так как направление по нормали к границе становится выделенным. Иначе говоря, прилегающий к границе слой с толщи-

ной порядка радиуса нелокальности неоднороден и анизотропен по своим электродинамическим свойствам. Это в особой степени усложняет электродинамическую часть задачи, т. е. нахождение вспомогательных дифракционных полей (функций Грина) или же плотности их джоулевых потерь, если необходимо учитывать и указанный приграничный слой. Что же касается собственно флукутационной части задачи, то в ней все обстоит так же, как и в случае локальных сред, поскольку и обобщенный закон Кирхгофа (17.11) — (17.13), и равновесная форма ФДТ (21.5) — (21.7) справедливы при любой форме материальных уравнений.

Мы ограничимся далее простейшим случаем однородной и изотропной нелокальной среды, причем среды *неограниченной*, когда во всем пространстве можно пользоваться как $\epsilon_{\alpha\beta}(\tau, \rho)$ в форме (23.3), так и скалярами $\epsilon(\tau, \rho)$, $\mu(\tau, \rho)$. Целесообразно при этом перейти к трансформантам Фурье как по τ , так и по ρ :

$$\epsilon(\tau, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(\omega, \kappa) \exp[-i(\omega\tau - \kappa\rho)] d\omega d^3\kappa, \quad (23.4)$$

и аналогично для $\mu(\tau, \rho)$. Такое же преобразование Фурье для тензора $\epsilon_{\alpha\beta}(\tau, \rho)$ содержит под интегралом трансформанту

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \kappa) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\kappa^2} \right) \epsilon_t(\omega, \kappa) + \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\kappa^2} \epsilon_l(\omega, \kappa), \quad (23.5)$$

где $\epsilon_t(\omega, \kappa)$ и $\epsilon_l(\omega, \kappa)$ — поперечная и продольная (по отношению к κ) проницаемости, конечно, не являющиеся преобразованиями Фурье от $\epsilon_t(\tau, \rho)$ и $\epsilon_l(\tau, \rho)$ в (23.3). Связь скалярных функций $\epsilon(\omega, \kappa)$ и $\mu(\omega, \kappa)$ с функциями $\epsilon_t(\omega, \kappa)$ и $\epsilon_l(\omega, \kappa)$ очень проста [8]:

$$\epsilon(\omega, \kappa) = \epsilon_t(\omega, \kappa), \quad (23.6)$$

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega, \kappa)} = \frac{k_0^2}{\kappa^2} [\epsilon_t(\omega, \kappa) - \epsilon_l(\omega, \kappa)], \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Вторая из этих формул показывает, что $\mu(\omega, \kappa)$ не может обращаться в нуль.

Целесообразность использования при указанных условиях пространственно-временных трансформант Фурье ($\omega\kappa$ -амплитуд) или пространственных трансформант Фурье от спектральных амплитуд, вытекает из того, что при этом все линейные уравнения для полей превращаются в алгебраические линейные уравнения для их $\omega\kappa$ -амплитуд. В частности, уравнения Максвелла (14.6), если мы полагаем

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega, \kappa) \exp[-i(\omega t - \kappa r)] d\omega d^3\kappa \quad (23.7)$$

и аналогично для \mathbf{H} , индукций \mathbf{D} , \mathbf{B} и сторонних токов \mathbf{j}_0 , \mathbf{j}_m , принимают для ω -амплитуд следующий вид (аргументы ω и \mathbf{x} мы для краткости опускаем):

$$\begin{aligned} i[\omega \mathbf{H}] &= -ik_0 \mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e, \\ i[\omega \mathbf{E}] &= ik_0 \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m, \end{aligned} \quad (23.8)$$

а материальные уравнения для ω -амплитуд, полученные из (23.1) с учетом (23.4) и (23.7) (среда однородна!), сводятся к соотношениям

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{x}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{x}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = \mu(\omega, \mathbf{x}) \mathbf{H}(\omega, \mathbf{x}). \quad (23.9)$$

Наличие пространственной дисперсии отражено в том, что ε и μ зависят от \mathbf{x} (для изотропной среды они зависят только от $x = |\mathbf{x}|$).

Алгебраическую форму принимает и ФДТ. В общем случае многомерного флуктуационного поля $\xi^{(j)}(t, \mathbf{r})$ и сопряженного по Лагранжу силового поля $f^{(j)}(t, \mathbf{r})$ операторные уравнения (15.12) переходят для спектральных амплитуд в результате пространственного преобразования Фурье в алгебраические уравнения

$$\begin{aligned} \xi^{(j)}(\omega, \mathbf{x}) &= \sum_k A_{jk}(-i\omega, i\mathbf{x}) f^{(k)}(\omega, \mathbf{x}), \\ f^{(j)}(\omega, \mathbf{x}) &= \sum_k A_{jk}^{-1}(-i\omega, i\mathbf{x}) \xi^{(k)}(\omega, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (23.10)$$

а вытекающие из ФДТ выражения для корреляционных матриц ω -амплитуд $\xi^{(j)}$ и $f^{(j)}$ имеют вид (см. задачу 6)

$$\begin{aligned} \langle \xi^{(j)}(\omega, \mathbf{x}) \xi^{(k)*}(\omega, \mathbf{x}') \rangle &\equiv G_{jk}^{\xi}(\omega, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ &= -\frac{i\Theta(\omega, T)}{(2\pi)^4 \omega} \{ A_{jk}(-i\omega, i\mathbf{x}) - A_{kj}^*(-i\omega, i\mathbf{x}) \} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (23.11)$$

$$\begin{aligned} \langle f^{(j)}(\omega, \mathbf{x}) f^{(k)*}(\omega, \mathbf{x}') \rangle &\equiv G_{jk}^f(\omega, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ &= -\frac{i\Theta(\omega, T)}{(2\pi)^4 \omega} \{ A_{kj}^{-1*}(-i\omega, i\mathbf{x}) - A_{jk}^{-1}(-i\omega, i\mathbf{x}) \} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (23.12)$$

где $G_{jk}(\omega, \mathbf{x})$ — ω -плотности. Преобразование Фурье этих плотностей по \mathbf{x} дает, конечно, спектральные плотности. Например,

$$\begin{aligned} g_{jk}^{\xi}(\omega, \mathbf{r}) &\equiv \langle \xi^{(j)}(\omega, \mathbf{r}) \xi^{(k)*}(\omega, \mathbf{r}') \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi^{(j)}(\omega, \mathbf{x}) \xi^{(k)*}(\omega, \mathbf{x}') \rangle \exp[i(\mathbf{x}\mathbf{r} - \mathbf{x}'\mathbf{r}')] d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{jk}^{\xi}(\omega, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \exp[i(\mathbf{x}\mathbf{r} - \mathbf{x}'\mathbf{r}')] d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_{jk}^{\xi}(\omega, \mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x}\mathbf{r}) d^3\mathbf{x} \quad (\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (23.13)$$

Применим равенство (23.11) к уравнениям Максвелла (23.8). Исключив при помощи материальных уравнений (23.9) индукции \mathbf{D} и \mathbf{B} , получаем

$$ik_0\epsilon\mathbf{E} + i[\kappa\mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e, \quad ik_0\mu\mathbf{H} - i[\kappa\mathbf{E}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_m. \quad (23.14)$$

Для того чтобы воспользоваться формулой (23.11), надо разрешить эти уравнения относительно \mathbf{E} и \mathbf{H} . Детерминант уравнений (23.14) равен $\mathcal{D} = k_0^2\epsilon\mu\Delta^2$, где

$$\Delta = \kappa^2 - k_0^2\epsilon\mu. \quad (23.15)$$

Пусть среда однородна. Так как $\mu(\omega, \kappa)$ не может обращаться в нуль, дисперсионное уравнение $\mathcal{D}=0$ распадается на два: либо $\epsilon(\omega, \kappa)=0$ (продольные волны), либо $\Delta(\omega, \kappa)=0$ (поперечные волны). Решение уравнений (23.14) есть

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{i\omega\Delta} \left\{ -k_0^2\mu\mathbf{j}_e + \frac{\kappa}{\epsilon} (\kappa\mathbf{j}_e) + k_0 [\kappa\mathbf{j}_m] \right\}, \\ \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{i\omega\Delta} \left\{ -k_0^2\epsilon\mathbf{j}_m + \frac{\kappa}{\mu} (\kappa\mathbf{j}_m) - k_0 [\kappa\mathbf{j}_e] \right\}, \end{aligned}$$

или в компонентах

$$\begin{aligned} E_\alpha &= -\frac{1}{i\omega} (A_{\alpha\beta}^{(E, e)} j_{e\beta} + A_{\alpha\beta}^{(E, m)} j_{m\beta}), \\ H_\alpha &= -\frac{1}{i\omega} (A_{\alpha\beta}^{(H, e)} j_{e\beta} + A_{\alpha\beta}^{(H, m)} j_{m\beta}), \end{aligned} \quad (23.16)$$

где

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{\alpha\beta}^{(E, e)} & A_{\alpha\beta}^{(E, m)} \\ \hline A_{\alpha\beta}^{(H, e)} & A_{\alpha\beta}^{(H, m)} \end{array} \right] = \frac{4\pi}{\Delta} \left[\begin{array}{c|c} k_0^2\mu\delta_{\alpha\beta} - \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta}{\epsilon} & -k_0\epsilon_{\alpha\gamma\beta}\kappa_\gamma \\ \hline k_0\epsilon_{\alpha\gamma\beta}\kappa_\gamma & k_0^2\epsilon\delta_{\alpha\beta} - \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta}{\mu} \end{array} \right]. \quad (23.17)$$

Здесь $\epsilon_{\alpha\gamma\beta}$ — полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга ($\epsilon_{123} = 1$), а по дважды входящему в (23.16) индексу β , конечно, производится суммирование. Заметим, что в силу (23.15)

$$\frac{1}{\Delta\epsilon} = \frac{1}{\kappa^2\epsilon} + \frac{k_0^2\mu}{\Delta\kappa^2}, \quad \frac{1}{\Delta\mu} = \frac{1}{\kappa^2\mu} + \frac{k_0^2\epsilon}{\Delta\kappa^2}.$$

Поэтому элементы диагональных квадратов матрицы (23.17) можно записать и в другом виде:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{(E, e)} &= 4\pi \left[\frac{k_0^2\mu}{\Delta} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta}{\kappa^2} \right) - \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta}{\kappa^2\epsilon} \right], \\ A_{\alpha\beta}^{(H, m)} &= 4\pi \left[\frac{k_0^2\epsilon}{\Delta} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta}{\kappa^2} \right) - \frac{\kappa_\alpha\kappa_\beta}{\kappa^2\mu} \right]. \end{aligned}$$

Согласно § 16 величины $\Phi/4\pi = -j_e/i\omega$ и $\mathbf{B}/4\pi = -\mathbf{j}_m/i\omega$ являются для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} обобщенными силами, так что введенные в (23.16) коэффициенты A — это именно те коэффициенты A_{jk} , которые входят в формулу (23.11). Применяя эту формулу, получаем для ω -плотностей $G_{\alpha\beta}^{(E)}(\omega, \mathbf{x}) = \langle E_\alpha(\omega, \mathbf{x}) E_\beta^*(\omega, \mathbf{x}) \rangle$ и т. д. следующие выражения:

$$G_{\alpha\beta}^{(E)}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{i\Theta(\omega, T)}{4\pi^2\omega} \left\{ \frac{k_0}{\Delta} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\kappa^2} \right) - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\varepsilon \kappa^2} - \text{к. с.} \right\}, \quad (23.18a)$$

$$G_{\alpha\beta}^{(H)}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{i\Theta(\omega, T)}{4\pi^2\omega} \left\{ \frac{k_0^2}{\Delta} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\kappa^2} \right) - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\mu \kappa^2} - \text{к. с.} \right\}, \quad (23.18b)$$

$$G_{\alpha\beta}^{(EH)}(\omega, \mathbf{x}) = -G_{\alpha\beta}^{(HE)}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{i\Theta(\omega, T)}{4\pi^2 c} \epsilon_{\alpha\gamma\beta} \kappa_\gamma \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta^*} \right). \quad (23.18c)$$

Из (23.18c) мы видим, что, в отличие от сторонних токов j_e и j_m , компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно коррелированы, но только их *ортогональные* компоненты, так как $\epsilon_{\alpha\gamma\beta} = 0$ при $\alpha = \beta$. Первые члены в формулах (23.18a, б), содержащие в знаменателях Δ , определяют корреляцию поперечного (по отношению к \mathbf{x}) поля, т. е. напряженностей $E_\perp = \mathbf{E} - E_\parallel$ и $H_\perp = \mathbf{H} - H_\parallel$, а вторые члены — корреляцию продольного поля $E_\parallel = \kappa(\mu E)/\kappa^2$, и аналогично для H_\parallel . Между собой поперечные и продольные напряженности не коррелированы (в силу чего $G = G_\perp + G_\parallel$).

Остановимся в заключение настоящего параграфа на флюктуациях *полного* тока в среде, под которым понимается ток, состоящий из всех «видов» электрического тока, за исключением вакуумного тока смещения. В рамках микроскопической теории полный ток — это сумма конвекционных токов, обусловленных движением любых (не подразделяемых на «виды») микрозарядов, усредненная по физически бесконечно малым объемам среды. При таком усреднении лоренцевых уравнений для микрополей e и h мы получаем для $\mathbf{E} = \dot{\mathbf{e}}$ и $\mathbf{B} = \dot{\mathbf{h}}$ (волнистая черта — усреднение по физически бесконечно малому объему) макроскопические уравнения следующего вида:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_n, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}. \quad (23.19)$$

Здесь через \mathbf{j}_n обозначена объемная плотность *полного* тока, а штрих над \mathbf{B} поставлен для того, чтобы не смешивать эту магнитную индукцию, включающую и *стороннюю* магнитную индукцию, с индукцией \mathbf{B} в уравнениях (14.3), в которых сторонний магнитный ток выделен. Объемные плотности *полного* заряда и *полного* тока связаны, конечно, уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_n = 0. \quad (23.20)$$

Именно эти полные плотности представляют интерес в ряде задач, в частности, в задачах о флюктуациях в плазме.

Установим прежде всего связь величин B' и j_n с величинами, фигурирующими в стандартной симметричной форме уравнений Максвелла. Запишем уравнения (23.19) и (23.20) для ω -амплитуд:

$$i[\kappa B'] = -ik_0 E + \frac{4\pi}{c} j_n, \quad i[\kappa E] = ik_0 B', \quad (23.21)$$

$$-\omega p_n + \kappa j_n = 0. \quad (23.22)$$

Сопоставление вторых уравнений (23.21) и (23.8) показывает, что $B' = B - \frac{4\pi}{ik_0 c} j_m$, в силу чего первое уравнение (23.21) принимает вид

$$i[\kappa B] - \frac{4\pi}{k_0 c} [\kappa j_m] = -ik_0 E + \frac{4\pi}{c} j_n.$$

Вычитая отсюда первое уравнение (23.8), получаем

$$j_n = j_e - \frac{ik_0 c}{4\pi} (D - E) - \frac{1}{k_0} [\kappa j_m] + \frac{ic}{4\pi} [\kappa (B - H)]. \quad (23.23)$$

Отсюда непосредственно видно, что полный ток слагается из стороннего электрического тока (первый член), наведенного поляризационного тока (второй член, включающий, конечно, и ток проводимости) и электрических токов, обусловленных сторонним магнитным током (третий член) и наведенным намагничением (последний член, включающий и магнитную проводимость).

Нетрудно записать полный ток в функции только электрической напряженности E . Для этого достаточно подставить в (23.23) вытекающие из (23.8) выражения для сторонних токов j_e и j_m . Это дает

$$j_n = \frac{i\omega}{4\pi} \left\{ E + \frac{1}{k_0^2} [\kappa [\kappa E]] \right\},$$

или в компонентах

$$j_{n\alpha} = \frac{i\omega}{4\pi} \left\{ (1 - \eta^2) \delta_{\alpha\beta} + \eta^2 \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\kappa^2} \right\} E_\beta \quad \left(\eta = \frac{\kappa}{k_0} \right).$$

Следовательно, ω -плотности полного тока j_n и электрической напряженности E связаны соотношением

$$G_{\alpha\beta}^{(I_n)}(\omega, \kappa) =$$

$$= \frac{\omega^2}{16\pi^2} \left[(1 - \eta^2) \delta_{\alpha\gamma} + \eta^2 \frac{\kappa_\alpha \kappa_\gamma}{\kappa^2} \right] \left[(1 - \eta^2) \delta_{\beta\delta} + \eta^2 \frac{\kappa_\beta \kappa_\delta}{\kappa^2} \right] G_{\gamma\delta}^{(E)}(\omega, \kappa).$$

Подставив сюда выражение (23.18a) для $G_{\gamma\delta}^{(E)}$ и выполнив суммирование по дважды входящим в правую часть индексам γ и δ ,

находим

$$G_{\alpha\beta}^{(U_p)}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{i\omega\Theta(\omega, T)}{64\pi^6} \left\{ \frac{k_0^2\mu}{\Delta} (1-\eta^2)^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta}{\mathbf{x}^2} \right) - \frac{\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta}{e\mathbf{x}^2} - \text{к. с.} \right\}. \quad (23.24)$$

Для ω -плотности флюктуаций полного заряда ρ_n единицы объема среды, в соответствии с уравнением непрерывности (23.22) и результатом (23.24), получаем

$$G^{(p_n)}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta}{\omega^2} G_{\alpha\beta}^{(U_p)}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{i\Theta(\omega, T)\mathbf{x}^2}{64\pi^6\omega} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \right). \quad (23.25)$$

В флюктуации полного тока (23.24) вносят вклад как попеченные, так и продольные волны, но флюктуации объемной плотности полного заряда (23.25) связаны только с продольными волнами: в знаменателе выражения для $G^{(p_n)}$ содержится только $e(\omega, \mathbf{x})$, а $\Delta(\omega, \mathbf{x})$ не входит. Множитель \mathbf{x}^2 в (23.25) подчеркивает большую роль мелкомасштабных флюктуаций. Из-за того, что в однородной среде e — функция только $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|$, преобразование Фурье (23.13), дающее спектральную плотность флюктуаций, принимает для заряда ρ_n вид

$$\begin{aligned} g^{(p_n)}(\omega, \rho) &= \frac{i\Theta(\omega, T)}{64\pi^6\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mathbf{x}\rho) \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \right) \mathbf{x}^2 d^3\mathbf{x} = \\ &= \frac{i\Theta(\omega, T)}{16\pi^6\omega\rho} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \right) \mathbf{x}^2 \sin \mathbf{x}\rho d\mathbf{x} \quad (\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \end{aligned} \quad (23.26)$$

В задаче 7 формулы (23.24) и (23.25) применены к простой модели среды, обладающей пространственной дисперсией и представляющей интерес для описания флюктуаций в ионосферной плазме.

Сделаем несколько дополнительных замечаний в заключение этой главы.

В § 20 мы отметили, что теория случайных полей, обусловленных равновесными тепловыми флюктуациями, относится к статистической схеме 1), т. е. имеет дело с задачами, в которых известна статистика случайных источников поля. Тем не менее мы выделили тепловые поля в отдельную главу, указав не только на их важность, но и на специфичность. Последняя заключается именно в том, что в данном круге задач статистика источников не задается извне, а определяется самими динамическими уравнениями задачи. Говоря точнее, функции корреляции сторонних (ланжевеновских) сил определены антиэрмитовыми частями тех детерминированных линейных операторов, через которые записываются динамические уравнения. В этом и состоит флюктуационно-диссипационная теорема (§ 15).

Если же речь идет о существенно неравновесных тепловых флуктуациях или вообще о полях нетеплового происхождения, то статистика источников обычно не определена видом самих уравнений, а должна быть задана — либо формально, либо на основе статистического исследования микроскопических моделей.

Другое замечание касается универсальности различных форм ФДТ. Мы рассматривали в этой главе *электромагнитные* тепловые поля, хотя опирались на ФДТ, которая применима к равновесным тепловым флуктуациям любой физической природы (§ 15). Для электромагнитных полей были получены другие формы ФДТ — кирхгофовская (§§ 17, 18), волноводная (§ 19), равновесная (§ 21), — более прозрачные физически, более «экономные» по процедуре решения конкретных задач и обладающие более широкими возможностями в отношении охвата задач, поддающихся решению. Естественно возникает вопрос о том, являются ли эти формы ФДТ столь же физически универсальными, как и исходная «каноническая» ее форма (15.14).

Все, что нам понадобилось учесть в электродинамике для получения указанных форм ФДТ, сводится к электродинамической теореме взаимности (17.2) или (22.1) и комплексной лемме Лоренца (21.2). Можно поэтому ожидать, что для любых равновесных (и квазиравновесных) флуктуационных полей, для которых справедливы теорема взаимности и аналог леммы Лоренца, будут верны и перечисленные формы ФДТ. Анализ этого вопроса показывает, что дело обстоит именно так [15], и отсюда вытекает ряд интересных следствий.

Например, кирхгофовская форма ФДТ и, в частности, формула (18.15) полностью справедливы для акустических волн. Тепловые потери обусловлены здесь вязкостью и теплопроводностью среды. Представим себе, что тело, обладающее такими потерями, погружено в «прозрачную» жидкость, т. е. жидкость с малым поглощением продольных волн. Послав на тело плоскую волну частоты ω (скажем, в звуковом или ультразвуковом диапазоне), мы можем найти эффективный попечник поглощения тела $\sigma_{\text{эфф}}$ (при данной ориентации тела). Формула (18.15), в которой можно, конечно, положить $\Theta = \kappa T$, определяет тогда поток энергии продольных волн частоты ω , излучаемых телом в телесный угол $d\Omega$, в направлении, противоположном направлению прихода вспомогательной плоской волны. Хотя физический механизм тепловых флуктуаций в теле (флуктуаций плотности, температуры, скоростей макрочастиц) совершенно иной, чем в электродинамике, «вызувчивание» нагревного тела в окружающую «прозрачную» среду происходит по такому же закону, как и «высвечивание» на электромагнитных волнах, а именно по закону Кирхгофа.

Задачи

1. С учетом реакции излучения уравнение движения упругого связанныго электрона имеет при малых его скоростях $|r| \ll c$ вид

$$\ddot{m}r - \frac{2e^2}{3c^3} r + m\omega_0^2 r = \mathbf{F}(t) = e\mathbf{E}(t), \quad (1)$$

где e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света в вакууме, ω_0 — собственная частота осциллятора. Пусть $\mathbf{E}(t)$ — напряженность электрического поля равновесного излучения. Применив ФДТ к уравнению (1), найти спектральную плотность энергии этого излучения (по положительным частотам ω), т. е. величину (электрон находится в вакууме)

$$\mu_0\omega = \frac{1}{8\pi} \langle |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 \rangle.$$

Решение. Уравнение движения (1) в спектральной форме есть

$$r(\omega) = \alpha(\omega) f(\omega),$$

где

$$\frac{1}{\alpha(\omega)} = m(\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{2e^2\omega^2}{3c^3}. \quad (2)$$

Спектральная плотность компоненты $E_x(t) = f_x(t)/e$ флюктуационного поля по $\omega > 0$ равна

$$g_{E_x}^+(\omega) = \frac{1}{e^2} g_{f_x}^+(\omega) = \frac{2}{e^2} \langle |f_x(\omega)|^2 \rangle, \quad (3)$$

где $\langle |f_x(\omega)|^2 \rangle$ — спектральная плотность силы $f_x(t)$ по ω от $-\infty$ до $+\infty$. Согласно дискретной ФДТ $\langle |f_x(\omega)|^2 \rangle$ выражается через обобщенную восприимчивость $\alpha(\omega)$ следующим образом:

$$\langle |f_x(\omega)|^2 \rangle = -\frac{i\Theta(\omega, T)}{2\pi\omega} \left[\frac{1}{\alpha^*(\omega)} - \frac{1}{\alpha(\omega)} \right] \quad (4)$$

(это формула (15.96) в частном случае единственной переменной). Из (2) — (4) следует, что

$$g_{E_x}^+(\omega) = \frac{4\omega^2}{3\pi c^3} \Theta(\omega, T).$$

Заметим, что $\text{Re}\{\alpha(\omega)\}$ не играет роли, и поэтому электрон мог бы быть и свободным ($\omega_0 = 0$).

Для того чтобы получить спектральную плотность энергии электромагнитного поля, достаточно учесть, что равновесное излучение в неограниченном пространстве изотропно, в силу чего

$$\langle |E_x|^2 \rangle = \langle |E_y|^2 \rangle = \langle |E_z|^2 \rangle,$$

и что его магнитная энергия равна электрической:

$$\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = \langle |\mathbf{H}|^2 \rangle.$$

Поэтому

$$\mu_0\omega = 6 \frac{1}{8\pi} g_{E_x}^+(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \Theta(\omega, T),$$

т. е. мы получили формулу Планка.

2. Формулы (16.4) для корреляционных функций сторонних токов можно получать и более физическим путем, чем использованный в § 16, опираясь на классический закон Кирхгофа и *принцип детального равновесия*. Последний требует, чтобы для двух одинаково нагретых тел 1 и 2 мощности $Q_{1\theta}$, поглощаемая телом 1 из излучения тела 2, была на каждой частоте ω равна мощности $Q_{2\theta}$, поглощаемой телом 2 из излучения тела 1. Пользуясь этим, вывести формулы (16.4) из рассмотрения обмена энергией между телом и пластиной (рис. 20), разнесенными на столь большое расстояние R , что их размеры гораздо меньше радиуса $\sqrt{\lambda R}$ первой зоны Френеля (т. е. они находятся во фраунгоферовой зоне друг друга). Вместе с тем размеры пластины настолько больше длины волн λ , что излучение пластины можно вычислять по классическому закону Кирхгофа.

Решение. Подсчитаем при указанных условиях мощности Q_t и Q_n , поглощаемые телом и пластиной на частоте ω .

Пусть A — коэффициент поглощения пластины и Σ — ее площадь ($\lambda R \gg \Sigma \gg \lambda^2$). Поглощаемая пластиной мощность есть

$$Q_n = \mathcal{F}_z A \Sigma, \quad (1)$$

где \mathcal{F}_z — z -компоненты вектора Пойнтинга теплового излучения тела. Для \mathcal{F}_z на одной поляризации мы имеем выражение (18.13), так что при учете обеих независимых поляризаций $\mathcal{F}_z = \frac{c}{\pi} \langle |E_1|^2 \rangle$. Подставив сюда E_1 из (18.12) и записывая скалярные произведения векторов в компонентах, получаем в соответствии с (1), что

$$\begin{aligned} Q_n = & \frac{c A \Sigma}{\pi} \iint \left\{ E_{0\alpha}(r) E_{0\beta}^*(r') \langle j_{e\alpha}(r) j_{e\beta}^*(r') \rangle + \right. \\ & + H_{0\alpha}(r) H_{0\beta}^*(r') \langle j_{m\alpha}(r) j_{m\beta}^*(r') \rangle - E_{0\alpha}(r) H_{0\beta}^*(r') \langle j_{e\alpha}(r) j_{m\beta}^*(r') \rangle - \\ & \left. - H_{0\alpha}(r) E_{0\beta}^*(r') \langle j_{m\alpha}(r) j_{e\beta}^*(r') \rangle \right\} d^3 r d^3 r'. \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь подсчитаем Q_t — мощность, поглощаемую телом из излучения пластины. Так как ее размеры велики по сравнению с λ , для интенсивности излучения пластины в телесный угол $d\sigma$, ось которого направлена на тело, справедлива формула (18.16).

Сопоставим выражение (18.16) с мощностью, излучаемой в тот же телесный угол $d\sigma$ единичным точечным источником (электрическим диполем в точке M с моментом $p = l/\omega$, лежащим в плоскости пластины):

$$dP_{\text{точка}} = \frac{\omega^3}{8\pi c^3} d\sigma.$$

Мы видим, что пластина излучает в

$$\frac{dP_{\text{точка}}}{dP_{\text{пластина}}} = \frac{2c\Theta}{\pi^3} A\Sigma$$

раз больше точечного источника. Следовательно, во столько же раз большее и мощность Q_t по сравнению с мощностью Q_0 , поглощаемой телом из

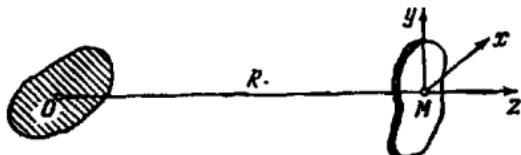


Рис. 20.

излучения точечного источника:

$$Q_1 = \frac{2c\Theta}{\pi^3} A \Sigma Q_0.$$

Потери же Q_0 дифракционного поля, создаваемого электрическим диполем, равны

$$Q_0 = -\frac{i\omega}{16\pi} \int_V \left\{ E_{0\alpha}(r) E_{0\beta}^*(r) (\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*) + H_{0\alpha}(r) H_{0\beta}^*(r) (\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\beta\alpha}^*) \right\} d^3 r,$$

так что

$$Q_T = -\frac{i\omega c A \Sigma \Theta(\omega, T)}{8\pi^3} \int_V \left\{ E_{0\alpha}(r) E_{0\beta}^*(r) (\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*) + H_{0\alpha}(r) H_{0\beta}^*(r) (\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\beta\alpha}^*) \right\} d^3 r. \quad (3)$$

Выражения (2) и (3) должны быть равны друг другу. Понятное сравнение подынтегральных выражений дает формулы (16.4). Однозначность результата следует из того, что равенство интегралов должно иметь место при любой форме, величине и расположении тела и пластины (конечно, не нарушающих условий $\lambda R \gg \Sigma \gg \lambda^2$).

Следует заметить, что при данном выводе формул (16.4) надо понимать под $\Theta(\omega, T)$ только ту часть средней энергии осциллятора, которая зависит от температуры. Энергия нулевых колебаний $\hbar\omega/2$ не должна учитываться, поскольку рассматривается обмен энергией посредством излучения (§ 17).

3. В волноводе между двумя черными излучателями с температурой T_0 находится тело с температурой $T \neq T_0$. Найти поток энергии флуктуационного поля на n -й собственной волне волновода и показать, что при любых T и T_0 нулевые колебания из этого потока выпадают.

Решение. Поток энергии, скажем, справа от тела равен собственному излучению тела ($P_{\omega n}^+$) плюс отраженное телом излучение правового излучателя $\left(\frac{\Theta_0}{2\pi} \sum_m' R_{mn}^- \right)$ плюс прошедшее излучение левого излучателя $\left(\frac{\Theta_0}{2\pi} \sum_m' D_{mn}^+ \right)$ и минус встречный поток излучения справа ($\Theta_0/2\pi$):

$$P_{\omega n} = P_{\omega n}^+ + \frac{\Theta_0}{2\pi} \sum_m' (R_{mn}^- + D_{mn}^+) - \frac{\Theta_0}{2\pi}.$$

Согласно (19.3)

$$P_{\omega n}^+ = \frac{\Theta}{2\pi} \left[1 - \sum_m' (R_{mn}^- + D_{mn}^+) \right],$$

так что

$$P_{\omega n} = \frac{\Theta - \Theta_0}{2\pi} \left[\sum_m' (R_{mn}^- + D_{mn}^+) - 1 \right].$$

Но нулевая энергия $\hbar\omega/2$ из разности $\Theta - \Theta_0$ выпадает, т. е. встречные потоки энергии нулевых колебаний взаимно уничтожаются при любых T и T_0 . Именно потому, что эти колебания никогда не участвуют в переносе энергии, член $\hbar\omega/2$ в $\Theta(\omega, T)$ можно отбрасывать во всех случаях, когда речь идет о (среднем) потоке энергии.

4. Найти мощность, излучаемую в идеальный волновод на волны с постоянной распространения h излучателем, состоящим из поперечной идеально отражающей перегородки и поперечной же полупрозрачной пластинки, отстоящей от перегородки на расстояние l (рис. 21). Пластинка предполагается тонкой, т. е. ее толщина мала по сравнению с длиной волн в ее материале, так что интерференция внутри пластинки можно не учитывать и характеризовать пластинку вещественными амплитудными коэффициентами отражения (r) и пропускания (d). При этом $r^2 + d^2 + a = 1$, где a — энергетический коэффициент поглощения пластинки.

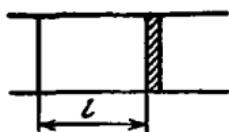


Рис. 21.

Решение. Излучаемая мощность $P = \frac{\Theta}{2\pi} A$, где

$A = 1 - \mathcal{R}$ (излучатель в целом непрозрачен). \mathcal{R} — энергетический коэффициент отражения излучателя. Если справа падает волна $e^{-i\omega t}$, то в результате первого отражения от пластинки и последующих многочленных повторных отражений прошедшей через нее волны между пластинкой и идеально отражающей перегородкой, амплитуда отраженной излучателем волны будет

$$r + d^2 e^{-2ih} + r^2 d^2 e^{-4ih} + r^4 d^2 e^{-6ih} + \dots = r + \frac{d^2}{e^{2ih} - r}.$$

Следовательно,

$$A = 1 - \mathcal{R} = 1 - \left| r + \frac{d^2}{e^{2ih} - r} \right|^2 = a \left[1 + \frac{d^2}{1 + r^2 - 2r \cos 2ih} \right].$$

От l поглощение зависит осцилляторно с периодом, равным половине длины волны $\Lambda = 2\pi/h$, и с максимумами на резонансных длинах резонатора, образуемого перегородкой и пластинкой. При уменьшении прозрачности пластинки ($d \rightarrow 0$) получаем $A = a$. Если же коэффициент отражения от пластинки $r^2 \rightarrow 1$ (при этом с необходимостью $d \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$), то $A \rightarrow 0$.

Б. Формула Найквиста для спектральной плотности тепловой э. д. с. $e(l)$ в двуполюснике с импедансом $Z(\omega)$ имеет вид

$$\langle |e(\omega)|^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \Theta(\omega, T) \operatorname{Re} Z(\omega).$$

Для хороших проводников часто заменяют $\operatorname{Re} Z$ на омическое сопротивление R . При каких условиях эта замена законна? Ведь при переходе от проводника к идеальному диэлектрику (проводимость $\sigma \rightarrow 0$ и соответственно $R \rightarrow \infty$) получается неограниченное нарастание э. д. с. Как уже было отмечено в ч. I, § 54, этот кажущийся парадокс возникает при забвении того, что замена $\operatorname{Re} Z$ на R законна лишь для столь хороших проводников, внутри которых можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости. Ясно, что при $\sigma \rightarrow 0$ это условие рано или поздно нарушается. Вывести формулу для $\langle |e(\omega)|^2 \rangle$ в тонком проводе с учетом тока смещения.

Решение. Если при выводе формулы (20.9) для $\langle |I(s)|^2 \rangle$, а значит, и при выводе выражения (20.13) для $\langle |\hat{E}(s)|^2 \rangle$ не пренебречь током смещения в проводе, т. е. пользоваться общим выражением (20.5) для корреляции компонент теплового поля, то результатом снова будут формулы (20.9) и (20.13), но, в отличие от (20.10), теперь

$$dQ_0 = \frac{|I_0|^2}{2\sigma} \frac{d^3 r}{1 + (\omega\varphi/4\pi\sigma)^2}.$$

Следовательно, для квазистационарной (I_0 не зависит от s) равновесной ($\Theta = \text{const}$) цепи энергетическое сопротивление, определенное равенством,

аналогичным (20.15), равно

$$R_s = \frac{1}{|I_0|^2} \int \frac{|j_0|^2 d^3r}{\sigma [1 + (e'\omega/4\pi\sigma)^2]} . \quad (1)$$

Смысл этого выражения лучше всего пояснить переходом к предельному случаю слабого скин-эффекта в проводе из однородного материала (ϵ' и σ постоянны). Тогда $j_0 = I_0/\Sigma$ и для участка провода длины l формула (1) принимает вид

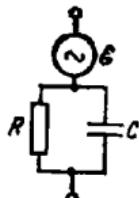


Рис. 22.

где $R = l/\sigma\Sigma$ — омическое сопротивление, а $C = \epsilon'\Sigma/4\pi l$ — внутренняя емкость данного участка провода. Таким образом, R_s представляет собой в этом случае активное сопротивление RC -ячейки (рис. 22) и при $R \rightarrow \infty$ получаем $R_s = 0$. Замена R_s на R справедлива лишь при условии $(RC\omega)^2 \ll 1$.

6. Пользуясь формулами (15.11а, б), получить корреляционные функции ω -амплитуд полей $\xi(t, r)$ и $f(t, r)$ в неограниченной однородной среде, т. е. амплитуд в пространственных разложениях Фурье

$$\xi(\omega, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\omega, \mathbf{x}) \exp(i\omega t) d^3x, \quad f(\omega, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega, \mathbf{x}) \exp(i\omega t) d^3x.$$

Решение. Проведем сначала расчет функции корреляции для ω -амплитуды $f(t, r)$:

$$f(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega, r) \exp(-i\omega r) d^3r.$$

С учетом (15.11б) имеем

$$\begin{aligned} & \langle f(\omega, \mathbf{x}) f^*(\omega, \mathbf{x}') \rangle = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f(\omega, r) f^*(\omega, r') \rangle \exp(-i\omega r + i\omega' r') d^3r d^3r' = \\ & = -\frac{i\Theta(\omega, T)}{(2\pi)^7 \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{A}^{-1} - \hat{A}^{-1}) \delta(r - r') \exp(-i\omega r + i\omega' r') d^3r d^3r'. \end{aligned} \quad (1)$$

Представим дельта-функцию в виде интеграла Фурье:

$$\delta(r - r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(r-r')} d^3p.$$

Поскольку $\nabla e^{ipr} = ip e^{ipr}$, действие линейного оператора $\hat{A}^{-1}(\nabla)$ на e^{ipr} дает

$$\hat{A}^{-1}(\nabla) \delta(r - r') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}^{-1}(ip) e^{ip(r-r')} d^3p,$$

где $A^{-1}(ip)$ — функция p , получающаяся при замене $\nabla \rightarrow ip$ в операторе $\hat{A}^{-1}(\nabla)$. Аналогично¹⁾,

$$\hat{A}^{-1*}(\nabla') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{-1*}(ip) e^{ip(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3 p,$$

так что (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle f(\omega, \mathbf{x}) f^*(\omega, \mathbf{x}') \rangle &= -\frac{i\Theta(\omega, T)}{(2\pi)^6 \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \{A^{-1*}(ip) - A^{-1}(ip)\} d^3 p \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i[(p-\mathbf{x})\mathbf{r} - (p-\mathbf{x}')\mathbf{r}']\} d^3 r d^3 r'. \end{aligned}$$

Интегралы по \mathbf{r} и \mathbf{r}' дают $(2\pi)^6 \delta(\mathbf{p}-\mathbf{x}) \delta(\mathbf{p}-\mathbf{x}')$, после чего интегрирование по \mathbf{p} приводит к исходному результату:

$$\langle f(\omega, \mathbf{x}) f^*(\omega, \mathbf{x}') \rangle = -\frac{i\Theta(\omega, T)}{(2\pi)^6 \omega} \{A^{-1*}(i\mathbf{x}) - A^{-1}(i\mathbf{x})\} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (2)$$

Можно получить функцию корреляции для $\xi(\omega, \mathbf{x})$ таким же путем (пользуясь формулой (15.11а)), а можно сделать это и иначе — исходя из того, что $\xi(\omega, \mathbf{x}) = A(-i\omega, i\mathbf{x}) f(\omega, \mathbf{x})$. Полагая $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ в множителе при $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$, имеем

$$\begin{aligned} \langle \xi(\omega, \mathbf{x}) \xi^*(\omega, \mathbf{x}') \rangle &= A(i\mathbf{x}) A^*(i\mathbf{x}') \langle f(\omega, \mathbf{x}) f^*(\omega, \mathbf{x}') \rangle = \\ &= -\frac{i\Theta(\omega, T)}{(2\pi)^6 \omega} A(i\mathbf{x}) A^*(i\mathbf{x}) \{A^{-1*}(i\mathbf{x}) - A^{-1}(i\mathbf{x})\} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \\ &= -\frac{i\Theta(\omega, T)}{(2\pi)^6 \omega} \{A(i\mathbf{x}) - A^*(i\mathbf{x})\} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (3) \end{aligned}$$

Уравнения (15.1) (если явным образом записать зависимость операторов \hat{A} и \hat{A}^{-1} от $-i\omega$) принимают для $\omega\mathbf{x}$ -амплитуд вид

$$\xi(\omega, \mathbf{x}) = A(-i\omega, i\mathbf{x}) f(\omega, \mathbf{x}), \quad f(\omega, \mathbf{x}) = A^{-1}(-i\omega, i\mathbf{x}) \xi(\omega, \mathbf{x}).$$

Первым из них мы только что воспользовались при выводе (3), а из второго видно, что уравнение

$$A^{-1}(-i\omega, i\mathbf{x}) = 0 \quad (4)$$

¹⁾ В связи с этой и последующими формулами необходимо сделать одно разъяснение. Знак комплексного сопряжения * понимается здесь и далее в обычном смысле, т. е. как замена i на $-i$ во всех аргументах вещественной функции от $-i\omega$, $i\mathbf{x}$, ip и т. д. В книге [6] использовано другое (и менее удачное) обозначение: знак * означает там комплексное сопряжение только в спектральной амплитуде, т. е. в вещественной функции от $i\omega$ и \mathbf{r} , и сводится, таким образом, к замене $-i\omega \rightarrow +i\omega$. Поэтому в [6] выражение для $\hat{A}^{-1*}(\nabla') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ содержит под интегралом функцию $A^{-1*}(-ip)$. Звездочка означает изменение знака в $i\omega$, а в аргументе $-ip$ знак минус записан явно. Обычное обозначение, принятое в данной книге, конечно, проще.

представляет собой дисперсионное уравнение задачи. Из (3) ясно, что любой интеграл по ω и ω' , содержащий $\langle \xi(\omega, \mathbf{x}) \xi^*(\omega, \mathbf{x}') \rangle$, сразу же сводится к интегралу только по \mathbf{x} (из-за наличия $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$), а последний часто может быть взят вычетами в полюсах функции $A(-i\omega, i\mathbf{x})$, т. е. в нулях функции $A^{-1}(i\omega, i\mathbf{x})$, или, иначе говоря, при значениях \mathbf{x} , являющихся корнями дисперсионного уравнения (4).

Нетрудно воспроизвести расчеты, проделанные при выводе формул (2) и (3), для случая *многомерных однородных полей* $\xi^{ij}(t, \mathbf{r})$ и $f^{ij}(t, \mathbf{r})$, используя при этом формулы (15.14а, б). Это приводит к корреляционным *матрицам* (23.11) и (23.12) для $\omega\mathbf{x}$ -амплитуд.

7. Для продольных волн, длинных по сравнению с радиусом нелокальности $a(ka \ll 1)$, не слишком разженная плазма, состоящая из электронов, ионов разного сорта и нейтральных атомов и молекул, может быть хорошо описана в так называемом *квазигидродинамическом* приближении. Уравнения гидродинамики надо писать при этом для всех видов частиц, но мы ограничимся простейшей моделью *одножидкостной* (электронной) плазмы, т. е. будем считать ионы неподвижным¹⁾.

Тогда линеаризованное уравнение движения электронной жидкости (газа) запишется в виде

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m \mathbf{v} \mathbf{v} = -\frac{1}{N} \nabla \tilde{p} - e \mathbf{E}, \quad (1)$$

где m — масса электрона, e — абсолютная величина его заряда, N — средняя концентрация электронов, \tilde{p} — переменная часть давления:

$$\tilde{p} = \gamma \Theta \bar{N} \quad (2)$$

(γ — отношение Пуассона, $\Theta = kT$ — энергетическая температура электронного газа, \bar{N} — переменная часть концентрации). В уравнение (1) введено также «трение» — через эффективное число соударений в единицу времени (v). Плотность электронного тока (в данной модели это и *полный* ток) в линейном приближении равна $J = -Nev$, а переменная часть плотности заряда есть $\rho_f = -\bar{N}e$ (средние плотности электронного и ионного зарядов скомпенсированы, т. е. плазма *квазинейтральна*). Поэтому линеаризованное уравнение непрерывности будет

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + N \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Найти для описанной модели плазмы спектральную плотность флюктуаций электронной концентрации.

Решение. Согласно (23.2б) для нахождения $\omega\mathbf{x}$ -плотности флюктуаций ρ_f достаточно знать продольную диэлектрическую проницаемость $\epsilon(\omega, \mathbf{x})$. Для $\omega\mathbf{x}$ -амплитуд ($\bar{N}, \tilde{p}, v, E \sim \exp[-i(\omega t - \mathbf{x}r)]$), исключая из (1) — (3) все величины, кроме $v = -J/Ne$, получаем следующее уравнение для полного тока J (в компонентах):

$$\left(1 + i \frac{v}{\omega}\right) J_\alpha - \frac{\gamma \Theta}{m \omega^2} \kappa_\alpha \kappa_\beta J_\beta = \frac{i \omega_e^2}{4 \pi \omega} E_\alpha,$$

где ω_e — плазменная (электронная) частота:

$$\omega_e^2 = 4\pi Ne^2/m.$$

1) О более общих случаях и, в частности, о *двухжидкостной* модели (электроны и один сорт ионов), причем модели *неравновесной* (температуры электронов и ионов различны), см. в [14, 16].

Удобно ввести обозначения

$$X = \omega_e^2/\omega^2, \quad Z = v/\omega_e, \quad a = \sqrt{\gamma}d,$$

где

$$d = \frac{1}{\omega_e} \sqrt{\frac{\Theta}{m}}$$

—так называемый *дебаевский радиус* (или радиус экранирования электрического поля, см. [16]). В этих обозначениях уравнение для \mathbf{j} принимает вид

$$(1 + iZ \sqrt{X}) j_\alpha - a^2 X \kappa_\alpha \kappa_\beta j_\beta = \frac{i\omega}{4\pi} X E_\alpha ,$$

откуда

$$j_\alpha = \frac{i\omega X}{4\pi(1 + iZ \sqrt{X})} \left(E_\alpha + \frac{a^2 X \kappa_\alpha \kappa_\beta E_\beta}{1 + iZ \sqrt{X} - \kappa^2 a^2 X} \right) .$$

Электрическая индукция $D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta$ связана с полным током \mathbf{j} соотношением $D = E - 4\pi j/i\omega$ ¹⁾, так что

$$D_\alpha = E_\alpha - \frac{4\pi}{i\omega} j_\alpha = \\ = \left\{ \left(1 - \frac{X}{1 + iZ \sqrt{X}} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{a^2 X^2 \kappa_\alpha \kappa_\beta}{(1 + iZ \sqrt{X})(1 + iZ \sqrt{X} - \kappa^2 a^2 X)} \right\} E_\beta .$$

Выражение в фигурных скобках — это диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \kappa)$. Она легко преобразуется к виду

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \kappa) = \left(1 - \frac{X}{1 + iZ \sqrt{X}} \right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\kappa^2} \right) + \\ + \left(1 - \frac{X}{1 + iZ \sqrt{X} - \kappa^2 a^2 X} \right) \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\kappa^2} .$$

откуда следуют выражения для поперечной и продольной проницаемостей:

$$\epsilon_t(\omega, \kappa) = 1 - \frac{X}{1 + iZ \sqrt{X}} , \quad (4)$$

$$\epsilon_l(\omega, \kappa) = \epsilon(\omega, \kappa) = 1 - \frac{X}{1 + iZ \sqrt{X} - \kappa^2 a^2 X} .$$

Таким образом, в рассматриваемой модели ϵ_t не обладает пространственной дисперсией (не зависит от κ). Пространственная же дисперсия $\epsilon_l = \epsilon$ возникает из-за члена с $\bar{v}p$ в (1), т. е. обусловлена *упругостью* электронного газа.

Согласно выражению (4) для ϵ имеем

$$\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^*} = - \frac{2iZX^{1/2}}{(1 - X - \kappa^2 a^2 X)^{3/2} + Z^2 X} .$$

1) Это ясно из первого уравнения (23.21), если записать его в виде $i[\kappa B] = -ik_0 D$.

Подставив это в формулы (23.25) и (23.26), получаем, что ω -плотность флуктуаций электронной концентрации $\tilde{N} = -\rho_\Phi/e$ есть

$$G^{(\tilde{N})}(\omega, x) = \frac{1}{e^2} G(\rho_\Phi)(\omega, x) = \frac{\Theta Z X^3}{32\pi^6 \omega_e e^8} \frac{x^2}{(1-X-x^2 a^2 X)^2 + Z^2 X}, \quad (5)$$

а ее спектральная плотность равна

$$g^{(\tilde{N})}(\omega, \rho) = \frac{\Theta Z X^3}{8\pi^4 \omega_e e^2 \rho} \int_0^\infty \frac{x^3 \sin k\rho}{(1-X-x^2 a^2 X)^2 + Z^2 X} dx. \quad (6)$$

Интеграл в (6) легко вычисляется. Из-за четности интегрanda по x можно взять половину значения интеграла в пределах $\pm \infty$. Записав далее $\sin k\rho$ в виде $(e^{ik\rho} - e^{-ik\rho})/2i$, изменим знак x в интеграле с $e^{-ik\rho}$. Это просто удваивает первый интеграл ($e^{ik\rho}$) и дает

$$g^{(\tilde{N})}(\omega, \rho) = \frac{\Theta Z X^3}{16\pi^4 i \omega_e e^2 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\rho} x^3 dx}{(1-X-x^2 a^2 X)^2 + Z^2 X}.$$

Замыкание пути интегрирования в верхней полуплоскости комплексного x сводит интеграл к вычетам в полюсах $x=k$ и $x=-k^*$, где k — корень дисперсионного уравнения $\epsilon(\omega, x)=0$, лежащий в первом квадранте плоскости x :

$$k = k' + ik'' =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{2X}} \left\{ \sqrt{\sqrt{(1-X)^2 + Z^2 X} + (1-X)} + i\sqrt{\sqrt{(1-X)^2 + Z^2 X} - (1-X)} \right\}. \quad (7)$$

Окончательный результат:

$$g^{(\tilde{N})}(\omega, \rho) = \frac{Nm\gamma}{4\pi^2 \gamma^2 \Theta} \frac{e^{-k'\rho}}{\rho} \left[\cos k'\rho + \frac{1-X}{Z\sqrt{X}} \sin k'\rho \right]. \quad (8)$$

Как это видно уже из (6), $g^{(\tilde{N})}(\omega, 0) = \infty$. Эта особенность при $\rho=0$, вполне очевидная в (8), обусловлена недостаточно быстрым убыванием $1/e - 1/e^2$ к нулю при возрастании x . Однако само гидродинамическое описание справедливо лишь для $xa \ll 1$, т. е. для пространственных гармоник флуктуаций \tilde{N} с длинами волн $2\pi/a = \Lambda \gg a$. Поэтому брать значения $\rho \leq a$ нет смысла. В этой области x фазовая скорость продольных волн становится одного порядка с тепловой скоростью электронов и, как показывает кинетическое рассмотрение, происходит сильное затухание продольных волн. Гидродинамическая модель не учитывает этого затухания, обусловленного тепловым движением зарядов ([14], § 2). Отметим в связи со сказанным, что, например, в слое F ионосферы, если принять $N = 5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$, $T = 300 \text{ К}$ и $\gamma = 3^1$, то

$$\omega_e = 4 \cdot 10^7 \text{ Гц}, \quad a \approx 0,3 \text{ см}.$$

В диапазоне частот $\omega > \omega_e (X < 1)$ и при $Z \ll 1-X$ из (7) имеем приближенно

$$k' \approx \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1-X}{X}}, \quad k'' \approx \frac{Z}{2a\sqrt{1-X}}.$$

¹⁾ Основанием для такого выбора γ является кинетическое рассмотрение ([14], § 2).

т. е. $k' \gg k^*$, и основную роль в (8) играет член с $\sin k'\rho$. Спектральная плотность (8) представляет собой в функции от ρ медленно затухающее колебание. Напротив, при $\omega_e(X > 1)$ и $Z \ll X-1$ значения k' и k^* меняются местами:

$$k' \approx \frac{Z}{2a \sqrt{X-1}}, \quad k^* \approx \frac{1}{a} \sqrt{\frac{X-1}{X}}$$

так что экспонента затухает гораздо быстрее, чем за период колебания $2\pi/k'$. В окрестности ω_e , т. е. при $X \approx 1$ и $|1-X| \ll Z$, имеем

$$k' \approx k^* \approx \frac{1}{a} \sqrt{\frac{Z}{2}}.$$

Заметим в заключение, что, ограничившись в рамках гидродинамической модели описанием состояния электронного газа переменными v , $\tilde{\rho}$ и \tilde{N} , мы исключили тем самым из рассмотрения флуктуации его температуры $\tilde{T} = T - \bar{T}$.

Г л а в а IV

ТЕОРИЯ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН

§ 24. Метод малых возмущений

В этой и последующих главах мы займемся флюктуациями волн, распространяющихся в случайно-неоднородных средах, т. е. по классификации § 8 задачами типа 2).

Случайные неоднородности реальных сред влияют на характеристики волн, распространяющихся в этих средах, и возникающие при этом явления чрезвычайно разнообразны. Мерцание звезд и флюктуации радиоизлучения от внеземных источников, замирания (фединги) радиоволн и релеевское рассеяние света, уширение лазерных пучков в тропосфере и рассеяние звука в море — это лишь немногие примеры наблюдаемых эффектов. Исследованием такого рода эффектов занимается статистическая теория распространения и рассеяния волн.

Задачи о распространении волн в средах с флюктуирующими параметрами решаются, как правило, *приближенными* методами. Дело в том, что соответствующие дифференциальные уравнения содержат в коэффициентах случайные функции точки (а возможно, и времени), описывающие неоднородную среду. *Точное* решение такой *параметрической* задачи означало бы, что мы в состоянии написать, например, функцию Грина для любых реализаций входящих в уравнения случайных функций, что практически никогда не осуществимо¹⁾. Это и вынуждает обращаться к приближенным методам. Характер приближения зависит, разумеется, от постановки задачи — слабо или сильно флюктуируют параметры среды, каково соотношение между длиной волны и размерами неоднородностей, какова геометрия задачи (длина трассы, ширина волнового пучка) и т. д. При всем разнообразии конкретных

¹⁾ Если не говорить о тех весьма частных случаях, когда среда описывается специального вида детерминированными функциями, зависящими от конечного числа случайных параметров.

условий значительная часть задач типа 2) может быть решена при помощи небольшого числа разработанных к настоящему времени приближенных методов.

Если относительные флуктуации параметров среды достаточно слабы, а рассеянное поле мало по сравнению с полем первичной волны, то применяется *метод малых возмущений*. Анализ полей, рассчитанных в первом порядке теории возмущений, составляет содержание *теории однократного рассеяния*, которой и посвящена данная глава.

При нарушении условий применимости теории однократного рассеяния (флуктуации в среде недостаточно слабы, рассеянное поле не мало) необходимо принимать во внимание двух-, трех- и т. д. кратное рассеяние поля, т. е. нужно строить теорию с учетом *многократного рассеяния волн*. В случае слабых, но крупных (по сравнению с длиной волны) неоднородностей многократно рассеянные волны лишь незначительно уклоняются от направления распространения первичной волны. В таких условиях многократное рассеяние эффективно описывается *методом геометрической оптики* (МГО) и примыкающими к нему более общими коротко-волновыми асимптотическими методами теории дифракции — *методом плавных возмущений* (МПВ) и *методом параболического уравнения* (МПУ). Последние три метода мы рассмотрим в гл. V—VII.

Другая возможность учета многократного рассеяния волн основана на приближенном суммировании рядов теории возмущений (в основном при помощи методов, развитых первоначально в квантовой электродинамике). При таком подходе удается, в частности, рассмотреть не только слабые, но и сильные флуктуации среды. Однако при этом необходимо, чтобы неоднородности были мелкомасштабными. Элементы теории многократного рассеяния изложены в гл. VIII.

Начнем с простейшей постановки задачи: волновое поле $u(t, \mathbf{r})$ будем считать *скалярным и монохроматическим* ($u(t, \mathbf{r}) = -u(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$), а неоднородности среды — *не меняющимися во времени и покоящимися*¹⁾. Хотя при скалярной постановке задачи не охвачена поляризация, она достаточна для ряда общеволновых явлений, таких, как интерференция и дифракция. К поляризационным эффектам в рассеянии электромагнитных волн мы обратимся в § 30.

При указанных выше условиях распространение волны в неоднородной среде описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k_0^2 \epsilon(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = 0, \quad (24.1)$$

¹⁾ В этой главе мы будем в основном придерживаться монографии [1]. Библиография по вопросам теории однократного рассеяния содержится также в обзоре [2].

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число в невозмущенной среде или в случае электрического поля — в вакууме. Функцию $\epsilon(r)$, описывающую неоднородность среды, мы будем называть (диэлектрической) проницаемостью, имея в виду в основном электромагнитное поле. Для случайно-неоднородной среды проницаемость $\epsilon(r)$ можно представить в виде

$$\epsilon(r) = \bar{\epsilon}(r) + \tilde{\epsilon}(r), \quad (24.2)$$

где $\bar{\epsilon}$ — среднее (по ансамблю реализаций среды) значение ϵ , а $\tilde{\epsilon}$ — флуктуации проницаемости. Уравнение Гельмгольца принимает при этом вид¹⁾

$$\Delta u(r) + k_0^2 [\bar{\epsilon}(r) + \tilde{\epsilon}(r)] u(r) = 0. \quad (24.3)$$

Общих методов решения даже такого простого волнового уравнения не существует. Наиболее распространенным из приближенных методов является *метод возмущений*: флуктуации $\tilde{\epsilon}$ считаются достаточно слабыми, а волновое поле $u(r)$ ищется в виде ряда по степеням $\tilde{\epsilon}(r)$, или, что то же — по степеням $\sigma_\epsilon \ll \bar{\epsilon}$. Чтобы построить такой ряд, удобно перейти от дифференциального уравнения (24.3) к эквивалентному интегральному уравнению.

Пусть $u_0(r)$ — поле первичной волны, удовлетворяющее невозмущенному уравнению Гельмгольца, т. е. уравнению (24.3) при $\tilde{\epsilon} = 0$:

$$\Delta u_0(r) + k_0^2 \bar{\epsilon}(r) u_0(r) = 0. \quad (24.4)$$

Обозначим через $G(r, r')$ невозмущенную функцию Грина, которая удовлетворяет уравнению для точечного источника

$$\Delta G(r, r') + k_0^2 \bar{\epsilon}(r) G(r, r') = \delta(r, r'). \quad (24.5)$$

Разумеется, первичное поле u_0 и функция Грина G удовлетворяют необходимым граничным условиям. Решение неоднородного уравнения

$$\Delta u + k_0^2 \bar{\epsilon} u = F(r)$$

выражается через функцию Грина следующим образом:

$$u(r) = u_0(r) + \int G(r, r') F(r') d^3 r'. \quad (24.6)$$

¹⁾ Рассеяние звуковых волн в турбулентной среде описывается более сложным скалярным уравнением, чем (24.3), поскольку распространение сопровождается нелинейным взаимодействием звуковых волн и гидродинамических турбулентных движений. Упрощенное описание достигается путем линеаризации исходных нелинейных уравнений гидродинамики по отношению к слабым звуковым возмущениям. Связанные с этим особенности рассеяния звука рассмотрены в [1].

Записав исходное уравнение (24.3) в форме

$$\Delta u + k_0^2 \bar{\epsilon} u = -k_0^2 \bar{\epsilon} u = F(r) \quad (24.7)$$

и используя (24.6), получаем следующее интегральное уравнение для волнового поля:

$$u(r) = u_0(r) - k_0^2 \int G(r, r') \bar{\epsilon}(r') u(r') d^3 r', \quad (24.8)$$

где интегрирование распространяется, очевидно, на область V , занятую неоднородностями $\bar{\epsilon}(r)$. Уравнение (24.8) эквивалентно исходному дифференциальному уравнению (24.3), но учитывает (через функцию G) и все граничные условия задачи.

Ряд теории возмущений строится путем итерирования интегрального уравнения (24.8). Чтобы получить первую итерацию, запишем значение поля в точке $r = r'$:

$$u(r') = u_0(r') - k_0^2 \int G(r', r'') \bar{\epsilon}(r'') u(r'') d^3 r'',$$

и подставим это выражение в правую часть (24.8). Это дает

$$u(r) = u_0(r) - k_0^2 \int G(r, r') \bar{\epsilon}(r') u_0(r') d^3 r' + \\ + k_0^4 \int G(r, r') \bar{\epsilon}(r') d^3 r' \int G(r', r'') \bar{\epsilon}(r'') u(r'') d^3 r''. \quad (24.9)$$

Записав значение поля $u(r)$ в точке $r = r''$ и подставив его в правую часть (24.9), получим вторую итерацию. Повторяя такую операцию, мы и получим бесконечный ряд теории возмущений:

$$u(r) = u_0(r) - k_0^2 \int G(r, r') \bar{\epsilon}(r') u_0(r') d^3 r' + \\ + k_0^4 \int \int G(r, r') G(r', r'') \bar{\epsilon}(r') \bar{\epsilon}(r'') u_0(r'') d^3 r' d^3 r'' - \\ - k_0^6 \int \int \int G(r, r') G(r', r'') G(r'', r''') \bar{\epsilon}(r') \bar{\epsilon}(r'') \bar{\epsilon}(r''') \times \\ \times u_0(r''') d^3 r' d^3 r'' d^3 r''' + \dots \quad (24.10)$$

В математике этот ряд называется рядом Неймана для интегрального уравнения (24.8), а в физике — борновским разложением¹⁾.

Первый член борновского ряда (24.10) — первичное поле $u_0(r)$. Второе слагаемое,

$$u_1(r) = -k_0^2 \int G(r, r') \bar{\epsilon}(r') u_0(r') d^3 r', \quad (24.11)$$

¹⁾ М. Борн впервые применил теорию возмущений в задаче о рассеянии в квантовой механике. Правда, задолго до М. Борна метод возмущений в сходной форме был применен Релеем при рассмотрении рассеяния света на прозрачных телах. В оптике и теперь говорят о релеевском, а не о борновском рассеянии света.

описывает однократно рассеянное поле. Оно порождено непосредственно первичным полем $u_0(\mathbf{r})$ и линейно относительно возмущений $\tilde{e}(\mathbf{r})$. Третье слагаемое в (24.10) можно представить в форме, аналогичной (24.11):

$$u_s(\mathbf{r}) = -k_0^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{e}(\mathbf{r}') u_1(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (24.12)$$

Это—двукратно рассеянное поле, порожденное уже не первичным, а однократно рассеянным полем. Двукратно рассеянное поле в свою очередь возбуждает трехкратно рассеянные волны u_s и т. д. Таким образом, ряд теории возмущений (24.10) представляет собой разложение *рассеянного поля* $u_s = u - u_0$ по кратности *рас-сения*:

$$u_s \equiv u - u_0 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (24.13)$$

Из самого способа построения этого ряда видно, что n -й его член, описывающий n -кратное рассеяние, содержит под знаком n -кратного интеграла произведение $\tilde{e}(\mathbf{r}_1) \dots \tilde{e}(\mathbf{r}_n)$. Отсюда следует, что для вычисления даже среднего значения поля u надо знать для \tilde{e} моменты $\langle \tilde{e}(\mathbf{r}_1) \dots \tilde{e}(\mathbf{r}_n) \rangle$ любого порядка. При произвольной статистике \tilde{e} нахождение таких моментов само по себе представляет сложную задачу, но если даже она и разрешима (как, например, в случае нормального распределения), то остается еще открытым вопрос о методах суммирования усредненных рядов теории возмущений. В общей постановке этот вопрос будет освещен в гл. VIII. Здесь же, как сказано, мы ограничимся более простой задачей нахождения статистических характеристик поля в приближении однократного рассеяния (так называемое *первое борновское или, чаще, просто борновское приближение*).

В этом приближении флюктуации \tilde{e} предполагаются настолько малыми, что в разложении (24.13) можно ограничиться первым членом u_1 . С выражениями такого типа мы уже встречались в § 12 при рассмотрении возбуждения полей случайными источниками. В данном случае в качестве заданных источников $q(\mathbf{r})$ выступает правая часть уравнения (24.7) с u_0 вместо u : $q(\mathbf{r}) = -k_0^2 \tilde{e}(\mathbf{r}) u_0(\mathbf{r})$. Таким образом, в приближении однократного рассеяния задача о распространении волн в случайно-неоднородных средах (задача типа 2)) сводится к задаче типа 1)—воздействию полей заданными случайными источниками..

Согласно (24.11) рассеянное поле $u_s \approx u_1$ является *линейным функционалом* от флюктуаций \tilde{e} . Поэтому и все моменты поля u_1 линейно же выражаются через моменты \tilde{e} того же порядка. В частности, у однократно рассеянного поля u_1 среднее значение равно нулю, поскольку $\langle \tilde{e}(\mathbf{r}) \rangle = 0$, а корреляционная функция $\psi_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle u_1(\mathbf{r}_1) u_1^*(\mathbf{r}_2) \rangle$ линейно выражается через функцию

корреляции неоднородностей $\psi_e(r', r'')$:

$$\psi_e(r_1, r_2) = k_0^4 \int \int G(r_1, r') G^*(r_2, r'') u_0(r') u_0^*(r'') \times \\ \times \psi_e(r', r'') d^3 r' d^3 r''. \quad (24.14)$$

Выражение (24.14) и аналогичные квадратуры для высших моментов рассеянного поля u_1 в принципе дают *полное статистическое решение задачи* в рассматриваемом борновском приближении. Однако этот математический результат еще нуждается в физическом истолковании.

§ 25. Средняя интенсивность рассеянного поля

Для того чтобы лучше уяснить основные закономерности рассеяния, сделаем ряд допущений, которые упрощают анализ, но вместе с тем сохраняют общность, достаточную для многих приложений теории. Допущения сводятся к следующему.

а) Среда в среднем однородна, т. е. $\epsilon = \text{const}$.

б) Первичное поле $u_0(r)$ представляет собой ненаправленную *сферическую волну* с центром в точке r_0 :

$$u_0(r) = \frac{A}{|r - r_0|} e^{ik|r - r_0|}, \quad (25.1)$$

где k — волновое число в однородной среде: $k = k_0 \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}$.

в) Функция Грина $G(r, r')$ описывает поле точечного источника в *неграниченной однородной среде*:

$$G(r, r') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r - r'|}}{|r - r'|}. \quad (25.2)$$

г) Поле флуктуаций \tilde{e} статистически *квазиоднородно*, т. е. корреляционная функция e имеет вид (§ 5)

$$\psi_e(r', r'') = \langle \tilde{e}(r') \tilde{e}(r'') \rangle = \psi_e(\rho, R), \quad (25.3)$$

где $\rho = r' - r''$, $R = (r' + r'')/2$ и зависимость $\psi_e(\rho, R)$ от R «*медленна*», т. е. масштаб L_e изменения ψ_e по аргументу R существенно больше, чем характерный масштаб l_e (радиус корреляции \tilde{e}) по разностному аргументу ρ . Спектральная плотность таких флуктуаций, определяемая выражением

$$\Phi_{e\bar{e}}(x, R) = \frac{1}{8\pi^3} \int \psi_e(\rho, R) \exp(-ix\rho) d^3 \rho, \quad (25.4)$$

— медленная функция R , т. е. она мало меняется на расстояниях порядка l_e .

д) Наконец, будем считать, что случайные неоднородности заполняют *ограниченный объем* V и в этом объеме содержится

много неоднородностей. Последнее условие можно записать в виде неравенства

$$V \sim L^3 \gg l_e^3, \quad \text{или} \quad L \sim V^{1/3} \gg l_e, \quad (25.5)$$

где L — поперечный размер области, занятой неоднородностями. Предположение о конечности рассеивающего объема необходимо для обеспечения малости однократно рассеянного поля, тогда как неравенство (25.5) принято лишь для упрощения расчетов.

Конечность рассеивающего объема удобно учитывать при помощи обрезающей функции

$$M(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{внутри } V, \\ 0 & \text{вне } V. \end{cases} \quad (25.6)$$

Введя ее под знак интеграла в (24.11), можно распространить интегрирование на все пространство. Для первичной сферической волны (25.1) и функции Грина свободного пространства (25.2) однократно рассеянное поле (24.11) запишется в виде

$$u_1(\mathbf{r}) = \frac{k_0^3 A}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[ik(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + |\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|)]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'||\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|} M(\mathbf{r}') \tilde{e}(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (25.7)$$

В дальнейшем мы обратимся к некоторым более общим постановкам задачи (учет временных изменений \tilde{e} , расчет поляризационных характеристик электромагнитного поля и др.). Вместе с тем мы будем иногда вводить частные допущения (плоская первичная волна, статистически однородные флуктуации и т. д.). Здесь же, исходя из (25.7), мы получим выражения для функции корреляции и, в частности, для средней интенсивности рассеянного поля.

Согласно (25.7) пространственная функция корреляции поля равна

$$\Psi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{k_0^4 |A|^2}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{r}') M(\mathbf{r}'') \Psi_e(\rho, \mathbf{R}) \times \\ \times \frac{\exp[ik(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'| - |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}''| + |\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0| - |\mathbf{r}''-\mathbf{r}_0|)]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'||\mathbf{r}_2-\mathbf{r}''||\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0||\mathbf{r}''-\mathbf{r}_0|} d^3 r' d^3 r''. \quad (25.8)$$

От выражения (24.14) эта формула отличается только тем, что в ней конкретизированы вид первичного поля и вид функции Грина.

Перейдем в (25.8) к переменным интегрирования $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}''$, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2$, откуда $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \rho/2$, $\mathbf{r}'' = \mathbf{R} - \rho/2$, причем $d^3 r' d^3 r'' = d^3 \rho d^3 R$.

Формула (25.8) принимает вид

$$\Psi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{k_0^4 |A|^2}{(4\pi)^4} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\Psi_1 + \Psi_2)} M\left(\mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) M\left(\mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right) \Psi_a(\rho, \mathbf{R}) d^3\rho d^3R}{\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right| \left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right| \left|\mathbf{R} + \frac{\rho}{2} - \mathbf{r}_0\right| \left|\mathbf{R} - \frac{\rho}{2} - \mathbf{r}_0\right|}, \quad (25.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= k(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'| - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}''|) = k\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{R} - \frac{\rho}{2}| - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{R} + \frac{\rho}{2}|\right), \\ \Psi_2 &= k(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| - |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_0|) = k\left(|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0 + \frac{\rho}{2}| - |\mathbf{R} - \mathbf{r}_0 - \frac{\rho}{2}|\right). \end{aligned} \quad (25.10)$$

Все последующие упрощения формулы (25.9) основаны на том, что функция корреляции неоднородной среды $\Psi_a(\rho, \mathbf{R})$ становится при $\rho \gg l_s$ очень малой. Мы можем поэтому воспользоваться разложением модуля вектора $|\mathbf{r} - \rho|$ в ряд Тейлора по степеням малого отношения ρ/r :

$$|\mathbf{r} - \rho| = \sqrt{(\mathbf{r} - \rho)^2} \approx r - n\rho + \frac{1}{2r}\rho^2 + O\left(\frac{\rho^3}{r^2}\right), \quad (25.11)$$

где $n = \mathbf{r}/r$, а ρ_\perp — перпендикулярная к n составляющая вектора ρ : $\rho_\perp = \rho - n(n\rho)$.

Применим разложение (25.11) к каждому из слагаемых, входящих в Ψ_1 и Ψ_2 . Для Ψ_1 получаем

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= k \left[s - \frac{1}{2}(n_{s1} + n_{s2})\rho + \frac{\rho_{\perp 1}^2}{8|\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}|} - \frac{\rho_{\perp 2}^2}{8|\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}|} + \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{\rho^3}{|\mathbf{r}_{1,2} - \mathbf{R}|^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (25.12)$$

Здесь

$$s = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}| - |\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}| \quad (25.13)$$

— разность хода от «точки рассеяния» \mathbf{R} ¹⁾ до точек наблюдения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 ; n_{s1} и n_{s2} — единичные векторы, направленные на точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (рис. 23):

$$n_{s1} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}|}, \quad n_{s2} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}|}, \quad (25.14)$$

а $\rho_{\perp 1}$ и $\rho_{\perp 2}$ — перпендикулярные к n_{s1} и n_{s2} составляющие вектора ρ .

¹⁾ Точнее, от «центра тяжести», т. е. от точки, лежащей посередине между точками рассеяния \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' , разделенными на малое расстояние $\rho \ll l_s$.

Выясним условия, при которых в (25.12) можно пренебречь квадратичными и кубичными по ρ членами. Фактическая область

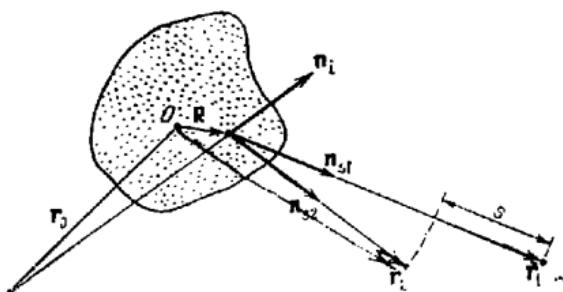


Рис. 23.

интегрирования по ρ выделена неравенством $\rho \leq l_e$. Требуя малости квадратичных членов в (25.12) по сравнению с π при $\rho \sim l_e$, получаем неравенство

$$\left. \frac{k}{8} \left(\frac{\rho_{\perp 1}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}|} - \frac{\rho_{\perp 2}}{|\mathbf{r}_{1,2} - \mathbf{R}|} \right) \right|_{\rho \sim l_e} \ll \pi, \quad (25.15)$$

которое заведомо будет выполнено, если оно справедливо для каждого из слагаемых:

$$\left. \frac{k \rho_{\perp 1,2}^2}{8 |\mathbf{r}_{1,2} - \mathbf{R}|} \right|_{\rho \sim l_e} \ll \pi.$$

Смысл же последних неравенств заключается в том, что точки наблюдения \mathbf{r}_1 и $\mathbf{r}_{1,2}$ должны находиться во фраунгоферовой зоне по отношению к неоднородностям размера l_e :

$$|\mathbf{r}_{1,2} - \mathbf{R}| \gg \frac{kl_e^2}{8\pi} \sim \frac{l_e^2}{\lambda}. \quad (25.16)$$

Ясно, однако, что неравенство (25.16) следует рассматривать как *достаточное* условие пренебрежения высшими степенями ρ , поскольку в (25.15) входит разность двух примерно одинаковых по величине слагаемых. Если точки наблюдения совмещены ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1,2}$), то левая часть (25.15) обращается в нуль и квадратичные члены в разложении (25.12) просто отсутствуют. Вместо (25.15) следует потребовать в этом случае малости (по сравнению с π) уже не квадратичных, а кубичных членов:

$$\left. \frac{k \rho^3}{|\mathbf{r}_{1,2} - \mathbf{R}|^2} \right|_{\rho \sim l_e} \ll \pi.$$

Это неравенство налагает на расстояния $|\mathbf{r}_{1,2} - \mathbf{R}|$ ограничение

$$|\mathbf{r}_{1,2} - \mathbf{R}| \gg \sqrt{kl_e^3} \approx \sqrt{l_e^3/\lambda}. \quad (25.17)$$

В случае крупных неоднородностей ($l_e \gg \lambda$) условие (25.17) значительно слабее условия (25.16), согласно которому точки наблюдения должны находиться во фраунгоферовой зоне отдельной неоднородности (размер $\sim l_e$). Напротив, при $l_e \leq \lambda$ неравенство (25.17) сильнее условия (25.16). Для неоднородностей, размеры которых сравнимы с длиной волны, оба условия (25.16) и (25.17) равносильны.

Что касается слагаемого Ψ_2 , то разложение этой величины содержит только нечетные степени ρ . Поэтому при выполнении аналогичного (25.17) условия

$$|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0| \gg \sqrt{l_e^3/\lambda}, \quad (25.18)$$

позволяющего отбросить кубичные члены разложения, имеем

$$\Psi_2 \approx k n_i \rho,$$

где

$$n_i(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|} \quad (25.19)$$

— единичный вектор в направлении распространения первичной волны в точке \mathbf{R} (рис. 23). В результате

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \approx k \left[s^{-1/2} (\mathbf{n}_{s1} + \mathbf{n}_{s2}) \rho - \mathbf{n}_i \rho \right]. \quad (25.20)$$

В знаменателе подынтегрального выражения (25.9) и в произведении $M(\mathbf{R} + \rho/2) M(\mathbf{R} - \rho/2)$ мы просто пренебрежем ρ . Для такого упрощения знаменателя достаточно, чтобы обе точки наблюдения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 и точка излучения \mathbf{r}_0 отстояли от точки рассеяния \mathbf{R} не меньше, чем на l_e . Замена же произведения $M(\mathbf{R} + \rho/2) \times M(\mathbf{R} - \rho/2)$ на $M^2(\mathbf{R})$ или, что то же, на $M(\mathbf{R})$ пригодна во всем объеме V , за исключением приграничного слоя толщины порядка l_e . Совершаемая при этой замене относительная ошибка — порядка отношения объема пограничного слоя $L^3 l_e$ к полному объему $V \sim L^3$, т. е. порядка $l_e/L \ll 1$ (см. (25.5)).

При сделанных допущениях формула (25.9) принимает вид

$$\Psi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{k_0^4 |A|^2}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \frac{M(\mathbf{R}) \exp(iks - iQ\rho) \Phi_e(\rho, \mathbf{R})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}| |\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}| |\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|^2} d^3 \rho d^3 R, \quad (25.21)$$

где введено обозначение

$$Q(\mathbf{R}) = k \left\{ \frac{1}{2} \left[\mathbf{n}_{s1}(\mathbf{R}) + \mathbf{n}_{s2}(\mathbf{R}) \right] - \mathbf{n}_i(\mathbf{R}) \right\}. \quad (25.22)$$

Согласно (25.4) интеграл по ρ можно выразить через спектральную плотность квазиоднородных флуктуаций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_a(\rho, \mathbf{R}) \exp(-iQ\rho) d^3 \rho = 8\pi^3 \Phi_e(Q, \mathbf{R}), \quad (25.23)$$

так что окончательно получаем

$$\Psi_a(r_1, r_2) = \frac{\pi k_0^4 |A|^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(R) \Phi_e(Q, R) e^{iks}}{|r_1 - R| |r_2 - R| |R - r_0|^2} d^3 R. \quad (25.24)$$

Анализ этой функции корреляции мы отложим до § 27, а здесь рассмотрим только пространственное распределение *средней интенсивности*

$$\bar{I}_1(r) = \langle |u_1(r)|^2 \rangle = \Psi_a(r, r). \quad (25.25)$$

При совмещении точек наблюдения ($r_1 = r_2 = r$, так что $s = 0$) вектор \mathbf{Q} (25.22) переходит в так называемый *вектор рассеяния*

$$\mathbf{q}(R) = k[\mathbf{n}_s(R) - \mathbf{n}_i(R)]. \quad (25.26)$$

В результате средняя интенсивность будет

$$\bar{I}_1(r) = \frac{\pi k_0^4 |A|^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(R) \Phi_e(q, R)}{|r - R|^2 |R - r_0|^2} d^3 R. \quad (25.27)$$

Как видно отсюда, волны, рассеянные отдельными элементами объема $d^3 R$, складываются *некогерентно*, т. е. складываются их интенсивности: выражение под интегралом (конечно, вместе с коэффициентом, вынесенным в (25.27) из-под интеграла) представляет собой среднюю интенсивность $d\bar{I}_1$ поля, рассеянного элементом объема $d^3 R$.

Формулу (25.27), выведенную для сферической первичной волны (25.1), нетрудно распространить на волны другой формы. Величина $I_0(R) = |A|^2 / |R - r_0|^2$ — это интенсивность сферической волны в точке R . Записав (25.27) в виде

$$\bar{I}_1(r) = \frac{\pi k_0^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(R) I_0(R) \Phi_e(q, R)}{|r - R|^2} d^3 R, \quad (25.28)$$

мы получаем выражение, справедливое для *любого* первичного поля, если его структура в пределах одной неоднородности размера l_e практически не отличается от структуры сферической волны. Последнее означает, что в пределах отдельной неоднородности амплитуду поля и радиус кривизны R_{kp} волнового фронта можно считать постоянными, причем радиус R_{kp} должен удовлетворять еще неравенствам вида (25.18), т. е. $R_{kp} \gg \sqrt{l_e^2/\lambda}$.

Таким образом, мы можем применить выражение (25.28) и к *плоской* первичной волне

$$u_i = A_0 e^{ik_0 r}, \quad (25.29)$$

для которой $I_0 = |A_0|^2 = \text{const}$ (в отличие от (25.19), единичный вектор \mathbf{n}_i , указывающий направление распространения первичной волны, здесь постоянен во всем пространстве), и к *направленной сферической волне*

$$u_i = A f_0(\mathbf{n}_i) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (25.30)$$

($f_0(\mathbf{n}_i)$ — диаграмма направленности излучателя), для которой

$$I_0(\mathbf{R}) = \frac{|A|^2 |f_0(\mathbf{n}_i)|^2}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_0|^2}. \quad (25.31)$$

Наиболее существенная особенность формул (25.27) и (25.28) заключается в том, что они отражают *селективный* характер рассеяния. Пусть θ — угол между волновыми векторами падающей (\mathbf{k}_i) и рассеянной (\mathbf{k}_s) волн, называемый *углом рассеяния*. Очевидно,

$$q = k |\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_i| = 2k \sin \frac{\theta}{2}. \quad (25.32)$$

Этому значению q отвечает пространственная гармоника возмущений e^{iqr} с длиной волны

$$\Lambda_q = \frac{2\pi}{q} = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}, \quad (25.33)$$

а направление нормали к фронту параллельно вектору \mathbf{q} , т. е. параллельно ($\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_i$) (рис. 24). Следовательно, равенство (25.33) — это условие Вульфа — Брэгга, определяющее пространственный период той гармоники, на которой волна дифрагирует под углом θ .

Разумеется, пространственный спектр флуктуаций $\tilde{e}(r)$ содержит бесконечный набор таких гармоник (объемных «дифракционных решеток») со всевозможными периодами и ориентациями. Селективность рассеяния заключается в том, что в заданном направлении \mathbf{n}_s дают вклад волны, рассеянные лишь на выделенной решетке — с пространственным периодом (25.33) и с ориентацией, отвечающей закону отражения (в точке \mathbf{R}) первичной волны из точки \mathbf{r}_0 в точку \mathbf{r} . Интенсивность этой гармоники пропорциональна спектральной плотности $\Phi_e(\mathbf{q})$, которая и фигурирует в (25.27) и (25.28).

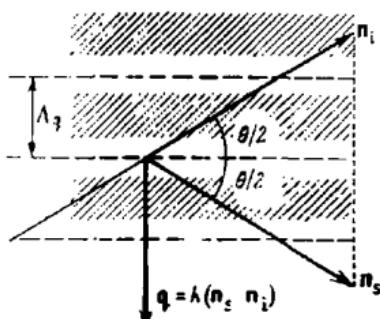


Рис. 24.

При *обратном* рассеянии, когда $\mathbf{k}_s = -\mathbf{k}_i$, так что вектор рассеяния равен $\mathbf{q} = -2\mathbf{k}_i$, а $\theta = \pi$, рассеяние обусловлено гармоникой с периодом $\Lambda_q = \lambda/2$, т. е. с периодом, равным половине длины волны падающего излучения. Обратное рассеяние наблюдают в очень многих случаях, например в радио- и гидроакустике, когда источник и приемник излучения расположены в одной точке.

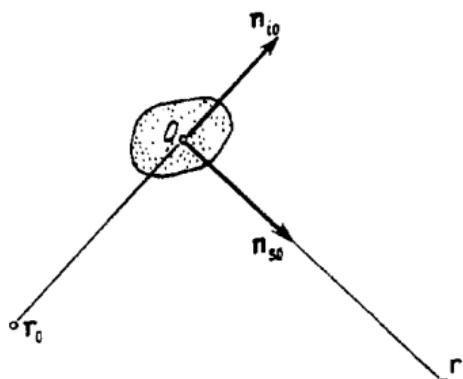


Рис. 25.

Рассеяние под произвольным углом часто используется в оптике при изучении неоднородностей в прозрачных материалах.

При уменьшении угла рассеяния θ период Λ_q увеличивается. Значения Λ_q и λ равны друг другу при $\theta = \pi/3$. При дальнейшем уменьшении θ пространственный период рассеивающей решетки Λ_q превышает λ , и для рассеяния *вперед* ($\theta \rightarrow 0$) величина q обращается в нуль, а Λ_q — в бесконечность. Это означает, что рассеяние вперед обусловлено наиболее крупными объемными возмущениями с пространственными масштабами $\Lambda_q \gg \lambda$.

Формула (25.28) упрощается для столь малого рассеивающего объема, что в его пределах величины $\Phi_e(\mathbf{q}, \mathbf{R})$, $I_0(\mathbf{R})$ и $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2$ практически постоянны. Вынося их из-под знака интеграла со значениями, соответствующими, скажем, центру O рассеивающего объема ($\mathbf{R} = 0$), получаем

$$\bar{I}_1(\mathbf{r}) = \frac{\pi k_0^4}{2} \frac{I_0(0) \Phi_e(\mathbf{q}_0, 0)}{r^2} V. \quad (25.34)$$

Здесь $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0) = \mathbf{k}(\mathbf{n}_{s0} - \mathbf{n}_{i0})$ — вектор рассеяния, отвечающий центру рассеивающего объема, а $\mathbf{n}_{s0} = \mathbf{r}/r$ и $\mathbf{n}_{i0} = \mathbf{r}_0/r_0$ — единичные векторы, направленные из O (рис. 25).

Замена множителя $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2$ на $1/r^2$ возможна при очевидном условии, что точка наблюдения удалена на расстояние, значительно превышающее поперечный размер L рассеивающего объема:

$$r \gg L. \quad (25.35)$$

Если падающая волна сферическая, то переход от точного выражения для интенсивности $I_0(\mathbf{R}) = |A|^2/|\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|^2$ к приближенному значению $I_0(0) = |A|^2/r_0^2$ требует выполнения такого же неравенства и для расстояния до источника: $r_0 \gg L$.

Что касается замены $\Phi_e(\mathbf{q}, \mathbf{R})$ постоянным значением $\Phi_e(\mathbf{q}_0, 0)$, то для этого необходима, во-первых, статистическая однородность

флуктуаций в пределах V (масштаб l_e должен быть больше попечника L) и, во-вторых, малость изменения (в пределах объема V) вектора \mathbf{q} по сравнению с характерным масштабом изменения спектра $\Phi_e(\mathbf{q}, 0)$, равным $1/l_e$:

$$\Delta q \ll 1/l_e. \quad (25.36)$$

По порядку величины $\Delta q \sim k \Delta n_s$ или $k \Delta n_t$ (Δn_s и Δn_t — вариации направлений падающей и рассеянных волн в пределах V). Очевидно, $\Delta n_s \sim L/r$, так что неравенство (25.36) сводится к условию

$$r \gg kLl_e \sim Ll_e/\lambda. \quad (25.37)$$

Поскольку ограничения для расстояния r_0 до источника сферической волны формулируются аналогичным образом, мы будем далее говорить только о неравенствах, относящихся к расстоянию r до точки наблюдения.

В случае мелкомасштабных неоднородностей ($l_e \ll \lambda$) из двух неравенств (25.35) и (25.37) более жестким, очевидно, является первое, тогда как для крупномасштабных неоднородностей ($l_e \gg \lambda$) минимальное расстояние до точки наблюдения ограничено условием (25.37). Обозначив через r_{\min} меньшую из величин L и Ll_e/λ , можно записать оба неравенства (25.35) и (25.37) в виде

$$r \gg r_{\min} = \min\{L, Ll_e/\lambda\}. \quad (25.38)$$

Обычно упрощенное выражение (25.34) выводят в предположении, что точка наблюдения находится во фраунгоферовой зоне всего объема V . Для этого в выражении (25.7) (или в аналогичном ему выражении для плоской первичной волны) разлагают модуль разности $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в ряд по степеням \mathbf{r}' и пренебрегают квадратичным слагаемым $kr'^2/2r$ непосредственно в функции Грина (25.2). Это и приводит к фраунгоферову приближению

$$u_1(\mathbf{r}) = \frac{k_0^2 A e^{ikr}}{4\pi r r_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_0 r'} M(\mathbf{r}') \tilde{s}(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (25.39)$$

Выражение для средней интенсивности, вычисляемое при помощи (25.39), значительно проще, чем в общем случае, а именно совпадает с (25.34). Однако условие

$$\frac{kr'^2}{2r} \ll \frac{kL^2}{2r} \ll \pi, \text{ или } r \gg \frac{L^2}{\lambda}, \quad (25.40)$$

которое необходимо для фраунгоферова приближения (25.39), гораздо жестче, чем условие (25.38), достаточное для применимости (25.34).

Во многих прикладных задачах измеряется не само рассеянное поле $u_1(\mathbf{r})$, а сигнал на выходе приемной антенны. Если

центр приемной апертуры расположен в точке r , то выходной сигнал v представляет собой поле $u_1(r + \rho)$, проинтегрированное по апертуре Σ с весовой функцией $b(\rho)$, которая описывает распределение тока в антenne в передающем режиме:

$$v = \widetilde{u_1(r)} = \int_{\Sigma} u_1(r + \rho) b(\rho) d^2\rho. \quad (25.41)$$

Интегрирование по апертуре (волнистая черта), разумеется, не равносильно статистическому усреднению.

Подставим в (25.41) рассеянное поле (25.7), не конкретизируя пока вида первичной волны $u_0(r)$:

$$v = \int_{\Sigma} b(\rho) d^2\rho \int \frac{k_0^2}{4\pi} \frac{\exp(ik|r - \rho - r'|)}{|r - \rho - r'|} M(r') \tilde{e}(r') u_0(r') d^3r'. \quad (25.42)$$

Величину $|r - \rho - r'|$ разложим в ряд Тейлора по ρ :

$$|r - \rho - r'| = |r - r'| + n'_s \rho + \frac{1}{2|r - r'|} [\rho^2 - (n'_s \rho)^2] + \dots, \quad (25.43)$$

где $n'_s = \frac{r - r'}{|r - r'|}$ — единичный вектор, направленный из точки рассеяния r' в центр приемной апертуры r (рис. 26).

Пусть d — наибольший размер приемной антенны, так что в пределах ее апертуры $\rho \leq d$, и пусть выполнено условие

$kd \ll |r - r'|$ (точка r' лежит во фраунгоферовой зоне антенны, где уже сформировалась диаграмма направленности). Тогда в показателе экспоненты в (25.42) можно ограничиться двумя первыми членами разложения (25.43), а в знаменателе подынтегрального выражения — первым членом этого разложения. Выполнив интегрирование по ρ , находим

$$v = \frac{k_0^2}{4\pi} \int f_1(n'_s) \frac{e^{ik|r - r'|}}{|r - r'|} M(r') u_0(r') \tilde{e}(r') d^3r', \quad (25.44)$$

где

$$f_1(n'_s) = \int_{\Sigma} b(\rho) \exp(ikn'_s \rho) d^2\rho \quad (25.45)$$

— диаграмма направленности приемной антенны. Максимальное значение $|f_1(n'_s)|$ удобно нормировать к единице. Если весовая функция $b(\rho)$ симметрична относительно центра $\rho = 0$, то максимум $|f_1(n'_s)|$ достигается при $n'_s \rho = 0$, т. е. при ориентации вектора n'_s по нормали к плоскости антенны.

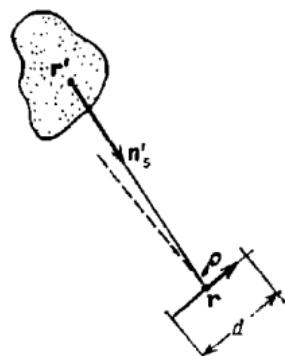


Рис. 26.

От исходной формулы (25.7) выражение (25.44) отличается тем, что под интегралом появился диаграммный множитель $f_1(n'_s)$. При малых по сравнению с длиной волны размерах приемной антенны ($kd \ll 1$) этот множитель не зависит от направления n'_s , и мы возвращаемся тогда к формуле (25.7).

Взяв в качестве первичной направленную сферическую волну (25.30), получаем для v выражение

$$v = \frac{k_0^2 A}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(r') \frac{e^{ik(|r-r'|+|r'-r_0|)}}{|r-r'| |r'-r_0|} f_0(n'_i) f_1(n'_s) \tilde{e}(r') d^3 r', \quad (25.46)$$

которое, если ввести обозначение

$$\mathcal{P}(r') = \frac{k_0^2 A}{4\pi} M(r') \frac{f_0(n'_i) f_1(n'_s)}{|r-r'| |r'-r_0|}, \quad (25.47)$$

можно записать в виде

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(r') e^{ik(|r-r'|+|r'-r_0|)} \tilde{e}(r') d^3 r'. \quad (25.48)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае, когда излучение и прием осуществляются направленными антеннами, область интегрирования в (25.46) или (25.48) остается конечной и тогда, когда неоднородности $\tilde{e}(r)$ заполняют все пространство, т. е. $M(r')$ всюду равно единице. Специальное ограничение величины занятого объема теперь излишне, так как произведение диаграммных множителей спадает практически до нуля вне области пересечения центральных (главных) лепестков обеих диаграмм (рис. 27).

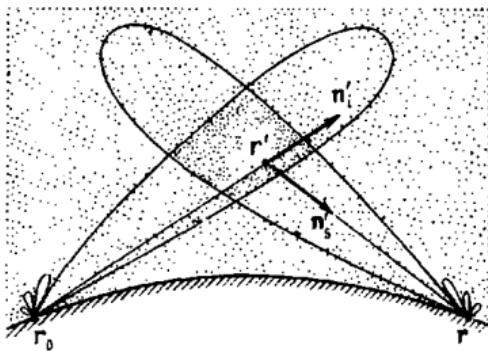


Рис. 27.

Располагая выражением (25.46), нетрудно вычислить среднюю интенсивность сигнала на выходе антенны $\bar{I}_v = \langle |v|^2 \rangle$. В отличие от (25.27), под знак интеграла теперь войдет множитель $|f_0(n_i) f_1(n_s)|^2$:

$$\bar{I}_v = \frac{\pi k_0^4 |A|^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(R) \Phi_e(q, R)}{|r-R|^2 |R-r_0|^2} |f_0(n_i)|^2 |f_1(n_s)|^2 d^3 R. \quad (25.49)$$

При использовании остронаправленных передающих и приемных антенн интенсивность рассеянного поля удобно характеризовать величиной *эффективного рассеивающего объема*. Обозначим через \mathbf{q}_0 вектор рассеяния $\mathbf{k}(\mathbf{n}_{i_0} - \mathbf{n}_{s_0})$, отвечающий точке пересечения максимумов диаграмм направленности, которую естественно принять за начало координат, и запишем (25.49) в форме, аналогичной выражению (25.34) ($I_0 = |A|^2/r_0^2$):

$$\bar{I}_v = \frac{\pi k_0^4 \Phi_e(\mathbf{q}_0, 0) I_0}{2r^2} V_{\text{эфф}}. \quad (25.50)$$

Множитель

$$V_{\text{эфф}} = \int M(\mathbf{R}) \left[\frac{rr_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}| |\mathbf{R}-\mathbf{r}_0|} \right]^2 |f_0(\mathbf{n}_i) f_1(\mathbf{n}_s)|^2 \frac{\Phi_e(\mathbf{q}, \mathbf{R})}{\Phi_e(\mathbf{q}_0, 0)} d^3 R, \quad (25.51)$$

определенный из сравнения (25.49) с (25.34), и представляет собой эффективный рассеивающий объем.

Величина $V_{\text{эфф}}$, как следует из (25.51), зависит от многих факторов: от расстояний до источника и приемника, от формы диаграмм направленности антенн и от вида спектра $\Phi_e(\mathbf{q}, \mathbf{R})$. При использовании остронаправленных антенн, если область пересечения диаграмм целиком лежит в рассеивающем объеме, величины $M(\mathbf{R})$ и $rr_0/|\mathbf{R}-\mathbf{r}_0| |\mathbf{r}-\mathbf{R}|$ можно с хорошим приближением принять равными единице, и тогда

$$V_{\text{эфф}} = \int_{-\infty}^{\infty} |f_0(\mathbf{n}_i) f_1(\mathbf{n}_s)|^2 \frac{\Phi_e(\mathbf{q}, \mathbf{R})}{\Phi_e(\mathbf{q}_0, 0)} d^3 R. \quad (25.52)$$

Эта формула часто используется при расчетах интенсивности радиоволн, рассеянных в тропосфере и нижней ионосфере [1].

§ 26. Эффективный поперечник рассеяния. Границы применимости приближения однократного рассеяния

Для скалярного монохроматического поля $u(\mathbf{r})$, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца (24.1), в случае прозрачной среды, т. е. вещественной проницаемости $\epsilon(\mathbf{r})$, выполняется соотношение

$$u^* \Delta u - u \Delta u^* = 0, \text{ или } \operatorname{div}(u^* \nabla u - u \nabla u^*) = 0, \quad (26.1)$$

которое вытекает непосредственно из (24.1). Из (26.1) следует, что величину

$$\mathcal{S} = \frac{a}{2ik} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) = \frac{a}{k} \operatorname{Im}(u^* \nabla u), \quad (26.2)$$

удовлетворяющую в прозрачной среде закону сохранения

$$\operatorname{div} \mathcal{S} = 0, \quad (26.3)$$

можно при подходящем выборе нормировочного множителя a интерпретировать как плотность потока энергии¹⁾.

Найдем среднюю плотность потока энергии однократно рассеянного поля

$$\bar{\mathcal{S}}_1 = \frac{a}{2ik} \langle u_1^* \nabla u_1 - u_1 \nabla u_1^* \rangle. \quad (26.4)$$

Дифференцируя выражение (25.7), получаем

$$\nabla u_1(\mathbf{r}) = \frac{k_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{r}') \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') \left(ik - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (26.5)$$

Единичный вектор $\mathbf{n}'_s \equiv (\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, направленный из точки рассеяния \mathbf{r}' в точку наблюдения \mathbf{r} , можно при помощи разложения (25.11) преобразовать к виду

$$\mathbf{n}'_s = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{r-(nr')} \approx \mathbf{n}_{s0} - \frac{\mathbf{r}'_\perp}{r}, \quad \mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}' - \mathbf{n}_{s0}(\mathbf{n}_{s0}\mathbf{r}'), \quad (26.6)$$

где по-прежнему $\mathbf{n}_{s0} = \mathbf{r}/r$. Принимая, что точка наблюдения \mathbf{r} достаточно далека от рассеивающей области ($r \gg L$), имеем $|\mathbf{r}'_\perp| \ll r$ и $\mathbf{n}'_s \approx \mathbf{n}_{s0}$. Кроме того, при $r \gg L$ заведомо выполнено неравенство $k \gg |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$. В результате выражение (26.5) сильно упрощается:

$$\nabla u_1(\mathbf{r}) \approx ik n_{s0} u_1(\mathbf{r}),$$

а формула (26.4) дает

$$\bar{\mathcal{S}}_1 \approx a n_{s0} \langle |u_1|^2 \rangle = a n_{s0} \bar{I}_1. \quad (26.7)$$

Зная $\bar{\mathcal{S}}_1$, нетрудно найти эффективный поперечник (сечение) рассеяния σ единичного объема в единичный телесный угол в направлении \mathbf{n}_s ²⁾.

По определению

$$\sigma(n_s) = \sigma(\theta, \varphi) = \frac{1}{V |\mathcal{S}_0|} \frac{d\bar{P}_1}{d\Omega}, \quad (26.8)$$

1) Для звуковых волн, если u — потенциал скорости, множитель a равен $\rho c^2/2c$ (ρ — плотность жидкости, c — скорость звука), а для электромагнитных полей $a = c/8\pi$, где c — скорость электромагнитной волны, если под u понимать напряженность электрического поля.

2) Для эффективного поперечника рассеяния часто используется сокращение ЭПР.

где $d\bar{P}_1$ — средняя мощность, рассеиваемая в телесный угол $d\sigma$ в направлении \mathbf{n}_s , V — рассеивающий объем, а $|S_0|$ — модуль плотности потока энергии в первичной волне. Через θ и ϕ обозначены полярный и азимутальный углы, отвечающие направлению \mathbf{n}_s (рис. 28).

Мощность $d\bar{P}_1$ равна

$$d\bar{P}_1 = |\mathcal{S}_1| r^2 d\sigma = \bar{a} I_1 r^2 d\sigma, \quad (26.9)$$

или, поскольку при выполнении условия (25.38) средняя интенсивность \bar{I}_1 дается выражением (25.34),

$$d\bar{P}_1 = \frac{\pi a k_0^4 I_0(0) V}{2} \Phi_e(\mathbf{q}) d\sigma. \quad (26.10)$$

Плотность же потока энергии в первичной волне, будь то плоская, сферическая или направленная сферическая волна, согласно (26.2), равна (по модулю) $|\mathcal{S}_0| = a I_0(0)$, так что (26.8) дает

$$\sigma(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \pi k_0^4 \Phi_e(\mathbf{q}). \quad (26.11)$$

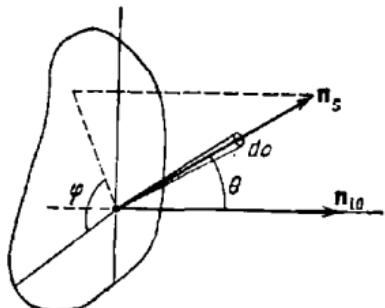


Рис. 28.

В соответствии со свойствами преобразования Фурье пространственный спектр (25.23) практически не зависит от \mathbf{q} , если корреляционная функция $\Phi_e(\rho)$ отличается от нуля только в малой области $\rho \leq l_e \ll \lambda$. В этом случае мелкомасштабных неоднородностей рассеяние изотропно:

$$\sigma(\theta, \phi) \approx \text{const} = \frac{1}{2} \pi k_0^4 \Phi_e(0). \quad (26.12)$$

Напротив, в случае крупномасштабных неоднородностей ($l_e \gg \lambda$) спектральная плотность $\Phi_e(\mathbf{q})$ быстро уменьшается с ростом q , т. е. с ростом угла рассеяния θ , что отвечает преимущественному рассеянию вперед. Сектор углов θ , в котором сосредоточено излучение, можно оценить из условия $q l_e \leq 1$ или $\theta \leq 1/k l_e$. Ниже мы проиллюстрируем эти особенности рассеяния несколькими примерами.

Величину (26.8) называют также дифференциальным сечением рассеяния — в отличие от полного поперечника рассеяния

$$\sigma_0 = \oint \sigma(\theta, \phi) d\sigma = \frac{1}{2} \pi k_0^4 \oint \Phi_e(\mathbf{q}) d\sigma, \quad (26.13)$$

который представляет собой отношение средней полной рассеянной мощности $\bar{P}_1 = r^2 \oint \bar{S}_1 d\sigma$ к плотности потока энергии в

первичной волне в расчете на единицу объема:

$$\sigma_0 = \frac{\bar{P}_1}{V|\mathcal{S}_0|} = \frac{r^2 \int |\bar{\mathcal{F}}_1|^d \Omega}{V|\mathcal{S}_0|}. \quad (26.14)$$

Как σ , так и σ_0 имеют размерность обратной длины, сечение же рассеяния всего объема V , равное σV , измеряется в единицах площади.

Согласно (26.8) и (26.9) для средней плотности потока рассеянной энергии $\bar{\mathcal{F}}_1$ и для средней интенсивности \bar{I}_1 имеем

$$\bar{\mathcal{F}}_1 = \frac{n_{\text{so}}}{r^2} |\mathcal{S}_0| V \sigma(\theta, \varphi), \quad \bar{I}_1 = \frac{1}{r^2} I_0 V \sigma(\theta, \varphi). \quad (26.15)$$

В оптике $\sigma(\theta, \varphi)$ обычно называют *индикаторисой рассеяния*, причем чаще всего имеется в виду величина $f(\theta, \varphi)$ — значение $\sigma(\theta, \varphi)$, отнесенное либо к максимальному значению поперечника σ_{\max} , либо к полному сечению σ_0 :

$$f(\theta, \varphi) = \frac{\sigma(\theta, \varphi)}{\sigma_{\max}} \quad \text{или} \quad f(\theta, \varphi) = \frac{\sigma(\theta, \varphi)}{\sigma_0}. \quad (26.16)$$

Полный поперечник рассеяния σ_0 непосредственно связан с ослаблением первичной волны *за счет рассеяния* (так называемой *экстинкции*). Представим себе малый цилиндр с осью вдоль волнового вектора первичной волны $\mathbf{k}_1 = k\mathbf{n}_1$. Объем цилиндра равен $dV = dz d\Sigma$, где $d\Sigma$ — площадь поперечного сечения цилиндра, а dz — его длина. Мощность, приносимая первичной волной на передний торец цилиндра, равна $P = |\mathcal{S}_0| d\Sigma$, а на заднем торце она изменена до значения $P + dP$, где $dP = -d\bar{P}_1$, а $d\bar{P}_1$ — мощность, рассеянная объемом dV , равная, согласно (26.14),

$$d\bar{P}_1 = \sigma_0 |\mathcal{S}_0| dV = \sigma_0 |\mathcal{S}_0| d\Sigma dz = P \sigma_0 dz. \quad (26.17)$$

Следовательно,

$$dP = -d\bar{P}_1 = -P \sigma_0 dz,$$

т. е. мощность первичной волны уменьшается по экспоненциальному закону $P \sim e^{-\sigma_0 z}$. По такому же закону уменьшается и плотность потока энергии:

$$|\mathcal{S}_0| \sim e^{-\sigma_0 z}. \quad (26.18)$$

Ослабление в e раз происходит на пути $d_s = 1/\sigma_0$, который называется *длиной экстинкции* (σ_0 называют также *коэффициентом экстинкции*). Произведение $\tau = \sigma_0 z$, где z — путь, пройденный волной в рассеивающей среде, называют *оптической толщиной* ($\tau = 1$ на пути $z = d_s$).

Теория однократного рассеяния строится в предположении, что амплитуда первичной волны u_0 , а стало быть, и плотность потока энергии \mathcal{S}_0 практически постоянны в пределах рассеивающего объема. Согласно (26.18) это справедливо, если оптическая толщина, отвечающая размерам рассеивающего объема $L \sim V^{1/3}$, мала по сравнению с единицей:

$$\sigma_0 L \ll 1. \quad (26.19)$$

Условие (26.19) можно записать и в форме

$$\sigma_0 V \approx \sigma_0 L^3 \ll L^3, \quad (26.20)$$

т. е. полное сечение рассеяния всего объема $\Sigma_0 = \sigma_0 V$ должно быть мало по сравнению с площадью порядка L^3 , вырезаемой объемом V из фронта первичной волны.

Приведем несколько примеров вычисления поперечника рассеяния $\sigma(\theta, \phi)$.

1. Неоднородности с изотропной гауссовой корреляционной функцией:

$$\Psi_e(r) = \sigma_e^2 e^{-r^2/2l_e^2}. \quad (26.21)$$

Пространственная спектральная плотность флуктуаций в рассматриваемом случае равна (см. (3.12))

$$\Phi_e(q) = \frac{\sigma_e^2 l_e^3}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{q^2 l_e^2}{2}\right) = \frac{\sigma_e^2 l_e^3}{(2\pi)^{3/2}} \exp[-2k^2 l_e^2 \sin^2(1/2\theta)], \quad (26.22)$$

так что для эффективного поперечника рассеяния единичного объема по формуле (26.11) находим

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_e^2 k_e^4 l_e^8}{4\sqrt{2\pi}} \exp[-2k^2 l_e^2 \sin^2(1/2\theta)]. \quad (26.23)$$

Полный поперечник рассеяния σ_0 вычисляется интегрированием $\sigma(\theta)$ по единичной сфере ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$) и равен

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{k_0^2 l_e \sigma_e^2}{8} \left(1 - e^{-2k^2 l_e^2}\right). \quad (26.24)$$

Условие (26.19) применимости приближения однократного рассеяния принимает в случае (26.21) вид (для простоты полагаем $\bar{e} = 1$, так что $k = k_0$)

$$\sigma_e^2 k_0 L \ll \frac{2\sqrt{2}}{\pi k_0 l_e [1 - \exp(-2k_0^2 l_e^2)]} = \mathcal{F}(k_0 l_e). \quad (26.25)$$

Это условие ограничивает величину произведения дисперсии

флуктуаций σ_e^2 на $k_0 L$. С ростом дисперсии σ_e^2 или с увеличением L неравенство (26.25) рано или поздно нарушается. Функция $\mathcal{F}(k_0 l_e)$ при $k_0 l_e \rightarrow 0$ растет, как $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(k_0 l_e)^{-\frac{1}{2}}$, а при $k_0 l_e \rightarrow \infty$

убывает, как $2\sqrt{2}/\pi k_0 l_e$. Следовательно, чем больше радиус корреляции l_e , тем жестче ограничена величина $\sigma_e^2 k_0 L$. Поэтому рассеяние на крупных неоднородностях описывается борновским приближением лишь на сравнительно малых дистанциях. Увеличение же L требует учета многократного рассеяния. Соответствующие методы будут рассмотрены в гл. V—VII.

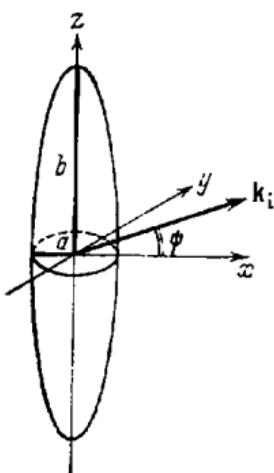


Рис. 29.

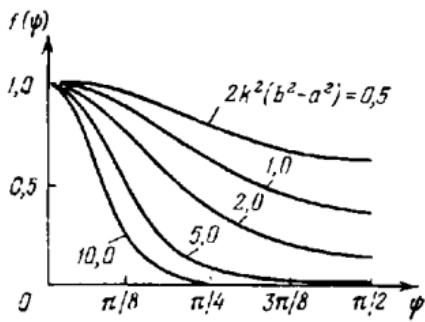


Рис. 30.

2. Обратное рассеяние на анизотропных (анизомерных) флуктуациях с гауссовой корреляционной функцией:

$$\psi_e(\mathbf{r}) = \psi_e(x, y, z) = \sigma_e^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a^2} - \frac{z^2}{2b^2}\right). \quad (26.26)$$

Спектральная плотность таких флуктуаций дается выражением (3.16). Будем считать, что $b > a$, т. е. что большая ось эллипсоидальных неоднородностей направлена по оси z .

Пусть волновой вектор первичной волны \mathbf{k}_i лежит в плоскости (x, z) и составляет угол ψ с осью x (рис. 29), так что $\mathbf{k}_i = (k \cos \psi, 0, k \sin \psi)$. При обратном рассеянии $\mathbf{q} = -2\mathbf{k}_i$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{обр}}(\psi) &= \frac{\pi}{2} k_0^4 \Phi_e(-2\mathbf{k}_i) = \\ &= \frac{\pi}{2} k_0^4 \frac{\sigma_e^2 a^2 b}{(2\pi)^{3/2}} \exp[-2k^2(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)]. \end{aligned} \quad (26.27)$$

Рассмотрим зависимость сечения обратного рассеяния $\sigma_{обр}$ от угла ψ , который иногда называют *ракурсным углом*. При $\psi = 0$ (так называемое «ракурсное условие») волновой вектор первичной волны k_1 перпендикулярен к большой оси неоднородностей. Индикатриса рассеяния выражается формулой

$$f(\psi) = \frac{\sigma_{обр}(\psi)}{\sigma_{обр}(0)} = \exp \{-2k^2(b^2 - a^2)\sin^2\psi\}. \quad (26.28)$$

Она имеет максимум при $\psi = 0$ (рис. 30) и минимум при $\psi = \pm\pi/2$ (k_1 параллелен большой оси неоднородностей).

Этот эффект (так называемой *ракурсной чувствительности*) особенно отчетливо выражен при сильно вытянутых неоднородностях, когда $k\sqrt{b^2 - a^2} \gg 1$. В этом случае индикатрису (26.28) можно аппроксимировать выражением

$$f(\psi) \approx \exp \{-2k^2(b^2 - a^2)\psi^2\}, \quad (26.29)$$

т. е. узкой гауссовой кривой с шириной

$$\Delta\psi \sim 1/k\sqrt{b^2 - a^2} \ll 1. \quad (26.30)$$

3. Рассеяние на турбулентных флюктуациях в атмосфере. В инерционном интервале волновых чисел $2\pi/L_0 \ll q \ll 2\pi/l_0$, соответствующем колмогоровскому закону $2/3$ (§ 4), спектральная плотность турбулентных флюктуаций описывается степенным законом

$$\Phi_e(q) = \mathcal{A} C_e^2 q^{-11/3}, \quad \mathcal{A} = 0,033. \quad (26.31)$$

Для такого спектра поперечник рассеяния единицы объема в единичный телесный угол равен (полагаем $\bar{e} = 1$)

$$\sigma(\theta) = 2^{-4/3}\pi\mathcal{A}C_e^2 k_0^{-1/3} (\sin^{1/2}\theta)^{-11/3} = 0,016 C_e^2 k_0^{1/3} (\sin^{1/3}\theta)^{-11/3}. \quad (26.32)$$

Полный поперечник рассеяния оказывается в этом случае бесконечным, так как интеграл

$$\sigma_0 = \oint \sigma d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin\theta d\theta$$

расходится при малых углах рассеяния θ . Объясняется это тем, что выражение для спектральной плотности (26.31), отвечающей инерционному интервалу $2\pi/L_0 \ll q \ll 2\pi/l_0$, непригодно при малых значениях $q = 2k \sin^{1/2}\theta$. Расчет полного сечения рассеяния для другой модели спектра (4.20), принимающего при $q \rightarrow 0$ конечные значения, приведен в задаче 2.

§ 27. Пространственная корреляция и вероятностные распределения рассеянного поля

Возвращаясь к выражению (25.24) для функции пространственной корреляции рассеянного поля, обратим внимание на сходство этой формулы с формулой (12.20), которая описывает пространственную корреляцию поля системы независимых излучателей. В обеих формулах зависимость от координат точек наблюдения r_1 и r_2 входит через один и тот же подынтегральный множитель $\exp(iks)/|r_1 - R||r_2 - R|$, где

$$s = |r_1 - R| - |r_2 - R|. \quad (27.1)$$

Это не случайное совпадение. Как уже было отмечено (§ 24), нахождение однократно рассеянного поля — задача, относящаяся к схеме 2), т. е. к распространению волн в случайно-неоднородной среде, фактически сводится к задаче типа 1), к возбуждению полей заданными случайными источниками. Согласно (24.11) эти источники непрерывно распределены по объему V . Однако, в силу конечности радиуса корреляции l_e неоднородностей \mathbf{v} , непрерывное распределение источников равносильно конечному числу (порядка V/l_e^3) дискретных некоррелированных источников. Именно в этом и лежит причина сходства формул (25.24) и (12.20).

Опираясь на это сходство, можно сделать ряд качественных и количественных заключений о характере пространственной корреляции рассеянного поля. Так, можно утверждать, что внутри рассеивающего объема, а также вблизи него (т. е. при $r \leq L$) радиус корреляции поля l_e порядка длины волны λ , если неоднородности мелкие ($l_e \ll \lambda$), и порядка l_e , если $l_e \gg \lambda$. Оба утверждения вытекают из оценки

$$l_e \sim \lambda/\gamma, \quad (27.2)$$

где γ — видимый угловой размер области, занятой источниками. В самом деле, в случае мелкомасштабных неоднородностей, которые рассеивают изотропно, угол γ сравним с π , так что $l_e \sim \lambda/\pi \sim \lambda$. Крупномасштабные же неоднородности имеют узкую индикаторису ($\gamma \sim \lambda/l_e$), ширина которой определяет эффективный угловой размер области, занятой источниками. В результате здесь $l_e \sim \lambda/\gamma \sim l_e$.

По мере удаления от рассеивающего объема происходит некоторое упорядочение поля, что выражается в увеличении масштабов пространственной корреляции. При $r \geq L$ угловой размер рассеивающего объема γ становится величиной порядка $L/r \ll 1$, и в результате поперечный (по отношению к направлению рассеяния n_s) радиус корреляции превышает длину волны в r/L раз:

$$l_1 \sim \lambda r/L. \quad (27.3)$$

При приближении к началу фраунгоферовой зоны, $r \sim kL^2$, по-перечный радиус корреляции увеличивается до диаметра рассеивающего объема, $l_1 \sim L$, а при $r \gg kL^2$ превышает L .

Что касается продольного радиуса корреляции l_{\parallel} , то его можно оценить по формулам задачи 13 к гл. II: в пределах ближней зоны рассеивающего объема ($r \ll kL^2$)

$$l_{\parallel} \sim \frac{\lambda}{r^3} \sim \frac{\lambda r^2}{L^2} \quad (r \ll kL^2), \quad (27.4)$$

но, начиная с расстояний $r \sim kL^2$, корреляция простирается до бесконечности:

$$l_{\parallel} = \infty \quad (r \gg kL^2). \quad (27.5)$$

Сказанное можно частично проиллюстрировать на примере пространственной функции корреляции (25.24) при условиях, что точки наблюдения находятся в зоне Фраунгофера, $r \gg kL^2$, а рассеивающий объем заполнен статистически однородными флуктуациями. При этих предположениях можно заменить ks приближенным значением

$$ks \approx kr_1 - kr_2 + k \Delta n_s R, \quad (27.6)$$

где $\Delta n_s = n_{s1} - n_{s2} - r_1/r_1 - r_2/r_2$, и вынести за знак интеграла в (25.9) все множители, кроме $M(\mathbf{R})$ и $e^{ik \Delta n_s \mathbf{R}}$:

$$\Psi_a(r_1, r_2) = \frac{\pi k_0^4 |A|^2}{2} \frac{\Phi_e(q_0)}{r^2 r_0^2} e^{ik(r_1 - r_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\mathbf{R}) e^{ik \Delta n_s \mathbf{R}} d^3 R. \quad (27.7)$$

Мы заменили здесь произведение $|r_1 - \mathbf{R}| |r_2 - \mathbf{R}|$ на $r^2 = (r_1 + r_2)^2/4$, сделав дополнительное предположение о малости расстояния между точками наблюдения $|r_1 - r_2|$ по сравнению с расстоянием r от центра рассеивающего объема до «центра тяжести» точек наблюдения.

Интеграл в (27.7) представляет собой дельтообразную функцию. Если ввести обозначение

$$\delta_V(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\mathbf{R}) \exp(i\mathbf{x}\mathbf{R}) d^3 R, \quad (27.8)$$

то формула (27.7) примет вид

$$\Psi_a(r_1, r_2) = \frac{\pi k_0^4 |A|^2 \Phi_e(q_0) e^{ik(r_1 - r_2)}}{2r^2 r_0^2} 2\pi^3 \delta_V(k \Delta n_s). \quad (27.9)$$

Функция $\delta_V(\mathbf{x})$ равна $V/8\pi^3$ при $\mathbf{x} = 0$ и, в соответствии со свойствами преобразования Фурье, спадает до малых значений при $\mathbf{x} \geq 2\pi/L$, где L — поперечник объема V . При $V \rightarrow \infty$ она переходит в $\delta(\mathbf{x})$.

Разделив корреляционную функцию (27.9) на среднюю интенсивность (25.34), получаем коэффициент корреляции

$$K_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\Psi_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{I_1(\mathbf{r}_1) I_1(\mathbf{r}_2)}} = \frac{8\pi^3 e^{ik(r_1 - r_2)}}{V} \delta_V(k \Delta n_s). \quad (27.10)$$

Поскольку $\delta_V(k \Delta n_s)$ заметно отличается от пуля только при $k |\Delta n_s| \lesssim 2\pi/L$, значения рассеянного поля в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 становятся некоррелированными при $\Delta n_s \gtrsim 2\pi/kL = \lambda/L$.

Величина $|\Delta n_s|$ приблизительно равна углу $\Delta\theta$ между единичными векторами \mathbf{n}_{s1} и \mathbf{n}_{s2} (рис. 23), так что полученная оценка определяет «угол корреляции»

$$\Delta\theta_k \sim \frac{\lambda}{L}. \quad (27.11)$$

Но вместе с тем $\Delta\theta_k \sim l_{\perp}/r$, так что для поперечного радиуса корреляции из (27.11) следует прежняя оценка (27.3).

Что касается продольной корреляции, то при расположении точек наблюдения на одной прямой, когда $\Delta n_s = 0$, коэффициент корреляции дается выражением

$$K_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{ik(r_1 - r_2)},$$

т. е. равен по модулю единице при любых r_1 и r_2 , лежащих в дальней зоне. Это означает, в согласии с (27.5), что для амплитуды рассеянного поля $A_1 = |u_1|$ продольный радиус корреляции бесконечен, $l_{\parallel} = \infty$, а разность фаз полей в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , лежащих на одной прямой, равна разности оптических путей $k(r_1 - r_2)$.

Обратим внимание на то, что в формулу (27.10) входят только геометрические параметры задачи r и L , а также длина волны первичного поля λ , но не входят статистические характеристики флуктуаций $\tilde{\sigma}$. Это говорит о том, что корреляционные характеристики рассеянного поля вытекают из чисто динамических соображений и лишь косвенно связаны со статистическим описанием.

Действительно, синусоидальная дифракционная решетка конечной длины L и с периодом Λ_q дает в направлении θ (см. (25.33)) волновой пучок конечной угловой ширины $\Delta\theta \sim \lambda/L$. Поскольку в спектре флуктуаций представлены различные пространственные гармоники, рассеяние на данный угол обусловлено не только той объемной решеткой, которая точно удовлетворяет условию Вульфа—Брегга (25.33), но и близкими по размерам и ориентациям решетками, для которых рассматриваемое направление лежит в пределах главных дифракционных максимумов ширины $\Delta\theta \sim \lambda/L$. Таким образом, пока угловое расстояние между точками наблюдения меньше $\Delta\theta \sim \lambda/L$, рассеяние обусловлено

вполне определенной группой дифракционных решеток. Напротив, при $\Delta\theta \geq \lambda/L$ поля, рассеянные в направлениях $n_{s1} = r_1/r_1$ и $n_{s2} = r_2/r_2$, обусловлены уже различными группами решеток (с неперекрывающимися главными максимумами), что и приводит к исчезновению пространственной корреляции.

Обратимся теперь к вероятностным распределениям рассеянного поля. В приближении однократного рассеяния поле $u_1(\mathbf{r})$ выражается интегралом (24.11) от произведения некоторой детерминированной функции на случайную функцию $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}')$. Поскольку линейные размеры L рассеивающего объема по предположению велики по сравнению с радиусом корреляции l_ϵ флюктуаций $\tilde{\epsilon}$, можно утверждать, что в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей закон распределения для рассеянного поля близок к нормальному.

Найдем параметры, характеризующие совместные функции распределения вещественной и мнимой частей комплексного поля:

$$u_1(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) + iV(\mathbf{r}). \quad (27.12)$$

Так как величины $U_j \equiv U(r_j)$ и $V_k \equiv V(r_k)$ распределены по нормальному закону, достаточно получить матрицу вторых моментов этих величин, которая совпадает с корреляционной матрицей, поскольку среднее значение рассеянного поля, а значит, и средние значения $\langle U_j \rangle$ и $\langle V_k \rangle$ равны нулю. Билинейные средние $\langle U_j V_k \rangle$ можно выразить тогда через корреляционные функции комплексного поля

$$\begin{aligned} \Psi_a(r_j, r_k) &= \langle u_1(r_j) u_1^*(r_k) \rangle, \\ \tilde{\Psi}_a(r_j, r_k) &= \langle u_1(r_j) u_1(r_k) \rangle. \end{aligned} \quad (27.13)$$

Первая из этих функций была вычислена в § 25 и рассмотрена выше. Покажем, что вторая корреляционная функция $\tilde{\Psi}_a$ почти всюду мала по сравнению с Ψ_a . С этой целью оценим величину $\langle u_1^2(\mathbf{r}) \rangle = \tilde{\Psi}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ в зоне Фраунгофера. Согласно (25.39),

$$\begin{aligned} \langle u_1^2(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{k_0^4 A^2 e^{2ikr}}{(4\pi r r_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{r}') d^3 r' \int_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{r}'') d^3 r'' \psi_e(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') e^{-iq(\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')} = \\ &= \frac{k_0^4 A^2 e^{2ikr}}{(4\pi r r_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p d^3 R M(\mathbf{R} + \mathbf{p}/2) M(\mathbf{R} - \mathbf{p}/2) \psi_e(\mathbf{p}) e^{-2iq\mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (27.14)$$

Заменяя $M(\mathbf{R} + \mathbf{p}/2) M(\mathbf{R} - \mathbf{p}/2)$ на $M(\mathbf{R})$, получаем

$$\langle u_1^2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{k_0^4 A^2 e^{2ikr}}{(4\pi r r_0)^2} (2\pi)^6 \Phi_e(0) \delta_V(2\mathbf{q}), \quad (27.15)$$

где функция $\delta_V(\mathbf{x})$ определена выражением (27.8).

При рассеянии вперед ($\mathbf{q} = 0$) средний квадрат поля $\langle u_1^2 \rangle$ с точностью до фазы совпадает со средней интенсивностью $\bar{I}_1 = \langle |u_1|^2 \rangle$, поскольку $\delta_V(0) = V/8\pi^3$. Однако при $|2\mathbf{q}| \geq 2\pi/L$ значения функции $\delta_V(2\mathbf{q})$ резко уменьшаются по сравнению с $\delta_V(0)$, т. е.

$$|\langle u_1^2(\mathbf{r}) \rangle| \ll \bar{I}_1 - \langle |u_1^2(\mathbf{r})| \rangle, \quad q \geq \pi/L. \quad (27.16)$$

Так как $q = 2k \sin \frac{1}{2}\theta$, неравенство $q \geq \pi/L$ выполняется вне узкого конуса с раствором $\theta \sim \lambda/2L$, откуда и следует, что при рассеянии на не слишком малые углы ($\theta \geq \lambda/2L$)

$$|\tilde{\Psi}_u| \ll |\Psi_u|. \quad (27.17)$$

Практически это означает, что вне указанного конуса вторую корреляционную функцию $\tilde{\Psi}_u$ можно положить равной нулю:

$$\tilde{\Psi}_u(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \approx 0. \quad (27.18)$$

Этот результат получен для дальней зоны рассеивающего объема ($r \gg kL^2$), но в ближней зоне ($r \ll kL^2$) он справедлив и подавно. Действительно, если разбить рассеивающий объем на отдельные элементы с линейными размерами, малыми по сравнению с L , но большими по сравнению с радиусом корреляции неоднородностей, и поместить точку наблюдения в зону Фраунгофера каждого из таких элементов, то результирующий средний квадрат поля $\langle u_1^2 \rangle$ можно получить, суммируя выражения типа (27.15), поскольку флуктуации в различных элементах статистически независимы. Ясно, что суммирование величин, содержащих осциллирующий множитель e^{2ikr} , может привести только к уменьшению $\langle u_1^2 \rangle$ по сравнению с $\bar{I}_1 = \langle |u_1|^2 \rangle$ даже внутри конуса с углом раствора $\theta \sim \lambda/2L$.

Воспользовавшись этим, применим для вычисления моментов $\langle U_1 V_k \rangle$ формулы (2.14), которые при равенстве нулю второй корреляционной функции дают

$$\begin{aligned} \langle U_1 U_2 \rangle &= \langle V_1 V_2 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Psi_u(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \\ \langle V_1 U_2 \rangle &= -\langle U_1 V_2 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \Psi_u(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (27.19)$$

Положив в (27.19) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, находим, в частности, что

$$\langle U^2 \rangle - \langle V^2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{I}_1, \quad \langle U(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (27.20)$$

Последующие вычисления статистических моментов амплитуды и фазы производятся так же, как в ч. I, §§ 25 и 44.

§ 28. Рассеяние на нестационарных неоднородностях

1. Временная функция корреляции. Поле, рассеянное на неоднородностях $\tilde{e}(t, \mathbf{r})$, зависящих от времени, создает на выходе антенны отклик, аналогичный (25.48):

$$v(t, \mathbf{r}) = e^{-i\omega t} \int \mathcal{P}(\mathbf{r}') e^{ik(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - |\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0|)} \tilde{e}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}, \mathbf{r}'\right) d^3 r'. \quad (28.1)$$

В отличие от (25.48), мы восстановили здесь множитель $e^{-i\omega t}$, который для краткости ранее опускали. Волновое возмущение, возникающее при рассеянии в точке \mathbf{r}' , достигает точки наблюдения \mathbf{r} за конечное время $\Delta t = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ (для простоты считаем, что $\tilde{e}=1$). Поэтому под интеграл входят значения \tilde{e} не в момент t , а в предшествующий момент $t' = t - \Delta t$. Функция $\mathcal{P}(\mathbf{r}')$ по-прежнему дается выражением (25.47).

Вычислим временную корреляционную функцию рассеянного поля в предположении, что флуктуации \tilde{e} статистически однородны и стационарны, так что пространственно-временная корреляционная функция неоднородностей зависит лишь от разностных (пространственных и временных) переменных:

$$\Psi_v(t', \mathbf{r}'; t'', \mathbf{r}'') = \langle \tilde{e}(t', \mathbf{r}') \tilde{e}(t'', \mathbf{r}'') \rangle - \Psi_e(t' - t'', \mathbf{r}' - \mathbf{r}''). \quad (28.2)$$

Из (28.1) сразу же видно, что временная корреляционная функция отклика на выходе антенны

$$\Psi_v(t', t'') = \langle v(t') v^*(t'') \rangle$$

тоже зависит только от разности $\tau = t' - t''$:

$$\Psi_v(\tau) = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int \mathcal{P}(\mathbf{r}') \mathcal{P}^*(\mathbf{r}'') e^{i\Psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')} \psi_e(\tau - \Delta\tau, \mathbf{r}' - \mathbf{r}'') d^3 r' d^3 r'', \quad (28.3)$$

где

$$\Psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = k \{ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + |\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0| - |\mathbf{r}-\mathbf{r}''| - |\mathbf{r}''-\mathbf{r}_0| \}.$$

Таким образом, в случае стационарных флуктуаций \tilde{e} отклик $v(t)$, как и само рассеянное поле $u_1(t)$, является стационарным случным процессом.

Входящая в (28.3) величина

$$\Delta\tau = (|\mathbf{r}'-\mathbf{r}| - |\mathbf{r}''-\mathbf{r}|)/c$$

представляет собой разность временных задержек возмущений, пришедших из точек \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' . В силу того, что пространственная корреляция неоднородностей простирается на расстояния $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \leq l_e$, разность задержек $\Delta\tau$ фактически не превышает времени l_e/c , за которое волна проходит одну неоднородность

$(\Delta\tau \ll l_e/c)$. Интервал $\Delta\tau$ обычно значительно меньше τ_e — времени корреляции флюктуаций \bar{e} :

$$\Delta\tau \sim l_e/c \ll \tau_e. \quad (28.4)$$

Поэтому без большой ошибки можно при этом условии положить в (28.3) $\Delta\tau = 0$, и тогда

$$\Psi_v(\tau) = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\rho} \int_{-\infty}^{\rho} \mathcal{P}(\mathbf{r}') \mathcal{P}^*(\mathbf{r}'') e^{i\Psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')} \psi_e(\tau, \mathbf{r}' - \mathbf{r}'') d^3r' d^3r''. \quad (28.5)$$

Выражение (28.5) отвечает так называемому *квазистационарному* приближению, при котором считается, что рассеяние на отдельных неоднородностях происходит так, как если бы неоднородности покоились, а зависимость ψ_e от времени восстанавливается уже в окончательной формуле (28.5).

Дальнейший анализ временных флюктуаций целесообразно провести отдельно для следующих двух случаев: а) в среднем покоящаяся случайно-неоднородная среда и б) случайно-неоднородная среда, перемещающаяся в среднем равномерно со скоростью \mathbf{v} , которую принято называть *скоростью дрейфа*.

2. Рассеяние в отсутствие регулярного дрейфа. Для среды, в среднем неподвижной, можно почти без изменений повторить выкладки § 25, т. е. перейти к переменным интегрирования $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и разложить показатель экспоненты $\Psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ в ряд по степеням ρ :

$$\begin{aligned} \Psi_v(\tau) &= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\rho} d^3R |\mathcal{P}(\mathbf{R})|^2 \int_{-\infty}^{\rho} d^3\rho \psi_e(\tau, \rho) \exp(i\mathbf{q}\rho) = \\ &= 8\pi^3 e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\rho} d^3R |\mathcal{P}(\mathbf{R})|^2 \Phi_e(\tau, \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (28.6)$$

где

$$\Phi_e(\tau, \mathbf{q}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\rho} \psi_e(\tau, \rho) \exp(-i\mathbf{q}\rho) d^3\rho \quad (28.7)$$

— пространственное преобразование Фурье корреляционной функции $\psi_e(\tau, \rho)$, а $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{R})$ — вектор рассеяния, отвечающий точке \mathbf{R} .

Из выражения (28.6) следует, что время корреляции отклика на выходе антенны того же порядка, что и у флюктуаций \bar{e} . Тот же результат можно выразить и в спектральной форме,

написав спектральную плотность стационарного процесса $v(t)$:

$$g_v(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_a(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d^3R |\mathcal{P}(R)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^3\rho \Psi_e(\tau, \rho) \exp[i(\Omega - \omega)\tau - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}]. \quad (28.8)$$

Учитывая, что пространственно-временной спектр флюктуаций \tilde{e} выражается формулой

$$G_e(\Omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d^3\rho \Psi_e(\tau, \rho) \exp(i\Omega\tau - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}),$$

можно представить частотный спектр сигнала $v(t)$ в виде

$$g_v(\Omega) = 8\pi^3 \int d^3R |\mathcal{P}(R)|^2 G_e[\Omega - \omega, \mathbf{q}(R)]. \quad (28.9)$$

Спектр флюктуаций $G_e(\Omega, \mathbf{k})$ обычно сосредоточен в окрестности нулевой частоты $\Omega \approx 0$, спектр же рассеянного сигнала $g_v(\Omega)$ расположен вблизи частоты первичной волны ω . Как следует из (28.9), частотный спектр рассеянного поля получается суммированием пространственно-временного спектра неоднородностей $G_e[\Omega - \omega, \mathbf{q}(R)]$ по рассеивающей области с весовой функцией

$$8\pi^3 |\mathcal{P}(R)|^2 = \frac{\pi k_0^4 |A|^2}{2} \frac{|f_0(n_i) f_1(n_s)|^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}| |\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|} M(\mathbf{R}).$$

Если условия задачи позволяют пренебречь изменением вектора рассеяния \mathbf{q} в пределах области интегрирования (согласно (25.38) это возможно при $r \gg r_{\min} = \min(L, Ll_e/\lambda)$), то $G_e[\Omega - \omega, \mathbf{q}(R)]$ можно вынести за знак интеграла со значением при $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, где $\mathbf{q}_0 = k(n_{s0} - n_{i0})$ — вектор рассеяния, отвечающий центру рассеивающей области. В результате частотный спектр поля оказывается пропорциональным $G_e(\Omega - \omega, \mathbf{q}_0)$:

$$g_v(\Omega) = 8\pi^3 G_e(\Omega - \omega, \mathbf{q}_0) \int_{-\infty}^{\infty} d^3R |\mathcal{P}(R)|^2 - \\ - G_e(\Omega - \omega, \mathbf{q}_0) \frac{\pi}{2} \frac{k_0^4 |A|^2}{r_0^2 r^2} V_{\text{эфф}}, \quad (28.10)$$

где $V_{\text{эфф}}$ — эффективный рассеивающий объем. Таким образом, при $r \gg r_{\min}$ можно находить форму спектра флюктуаций e непосредственно по измеренным значениям $g_v(\Omega)$. В случае же протяженных рассеивающих областей, когда спектры $g_v(\Omega)$ и G_e связаны между собой интегральным соотношением (28.9), определение формы $G_e(\Omega)$ по измерениям $g_v(\Omega)$ затруднительно.

Спектр комплексной огибающей $\mathfrak{A}(t)$ сигнала $v(t) = \mathfrak{A}(t)e^{-i\omega t}$ сосредоточен в окрестности нулевой частоты, поскольку $g_{\mathfrak{A}}(\Omega) = g_v(\Omega + \omega)$. В частности, при $r \gg r_{\min}$, когда $g_v(\Omega)$ дается выражением (28.10), имеем

$$g_{\mathfrak{A}}(\Omega) = G_e(\Omega, \mathbf{q}_0) \frac{\pi}{2} \frac{k_0^4 |A|^2}{r^2 r_0^2} V_{\text{эфф.}}$$

3. Рассеяние при наличии регулярного дрейфа. Нахождение функции корреляции поля, рассеянного на дрейфующих неоднородностях, несколько сложнее, чем при $\bar{v} = 0$. При рассмотрении этого вопроса мы следуем результатам Г. С. Горелика и его сотрудников [3—6], а также анализу, приведенному в [1].

Пусть $\Psi_{dp}(\tau, \rho)$ — функция корреляции неоднородностей в сопровождающей системе координат, т. е. в системе, равномерно перемещающейся вместе со средой со скоростью \bar{v} . В неподвижной системе координат, связанной с наблюдателем, функция корреляции, очевидно, равна

$$\Psi_e(\tau, \rho) = \Psi_{dp}(\tau, \rho - \bar{v}\tau), \quad \rho = r' - r''. \quad (28.11)$$

Подставим это выражение в формулу (28.5) и введем новые переменные интегрирования R и ρ' , равные

$$R = \frac{1}{2}(r' + r''), \quad \rho' = \rho - \bar{v}\tau - r' - r'' - \bar{v}\tau. \quad (28.12)$$

В этих переменных функция корреляции сигнала $v(t)$ будет

$$\begin{aligned} \Psi_e(\tau) = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}\left(R + \frac{\rho' + \bar{v}\tau}{2}\right) \mathcal{P}^*\left(R - \frac{\rho' - \bar{v}\tau}{2}\right) \Psi_{dp}(\tau, \rho') \times \\ \times \exp[i\Psi'(\tau, \rho', R)] d\rho' dR, \end{aligned} \quad (28.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi'(\tau, \rho', R) = \Psi\left(R + \frac{\rho' + \bar{v}\tau}{2}, \quad R - \frac{\rho' - \bar{v}\tau}{2}\right) = \\ = k\left(\left|r - R - \frac{\rho' + \bar{v}\tau}{2}\right| + \left|R + \frac{\rho' + \bar{v}\tau}{2} - r_0\right| - \right. \\ \left. - \left|r - R + \frac{\rho' - \bar{v}\tau}{2}\right| - \left|R - \frac{\rho' + \bar{v}\tau}{2} - r_0\right|\right). \end{aligned}$$

Поскольку корреляционная функция $\Psi_{dp}(\tau, \rho')$ спадает практически до нуля при $\rho' \geq l_e$, разложим Ψ' в степенной ряд по ρ' и ограничимся первыми двумя членами разложения:

$$\Psi'(\tau, \rho', R) = \Phi(\tau, R) - q'(\tau, R)\rho' + \dots \quad (28.14)$$

Здесь

$$\Phi(\tau, \mathbf{R}) = \Psi'(\tau, 0, \mathbf{R}) = k(|\mathbf{r} - \mathbf{R} - \bar{\mathbf{v}}\tau/2| + |\mathbf{R} + \bar{\mathbf{v}}\tau/2 - \mathbf{r}_0| - |\mathbf{r} - \mathbf{R} + \bar{\mathbf{v}}\tau/2| - |\mathbf{R} - \bar{\mathbf{v}}\tau/2 - \mathbf{r}_0|),$$

$$\mathbf{q}'(\tau, \mathbf{R}) = \frac{k}{2} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{R} - \bar{\mathbf{v}}\tau/2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R} - \bar{\mathbf{v}}\tau/2|} - \frac{\mathbf{R} + \bar{\mathbf{v}}\tau/2 - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{R} + \bar{\mathbf{v}}\tau/2 - \mathbf{r}_0|} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R} + \bar{\mathbf{v}}\tau/2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R} + \bar{\mathbf{v}}\tau/2|} + \frac{\mathbf{R} - \bar{\mathbf{v}}\tau/2 - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{R} - \bar{\mathbf{v}}\tau/2 - \mathbf{r}_0|} \right).$$

Если подставить в (28.13) приближение (28.14), справедливое при выполнении довольно слабых условий типа (25.18), то интегрирование по ρ' дает

$$\psi_v(\tau) = 8\pi^3 e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 R \mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-^* e^{i\Phi(\tau, \mathbf{R})} \Phi_{\text{лр}}(\tau, \mathbf{q}'), \quad (28.15)$$

где $\mathcal{P}_{\pm} \equiv \mathcal{P}(\mathbf{R} \pm \bar{\mathbf{v}}\tau/2)$, а функция

$$\Phi_{\text{лр}}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\text{лр}}(\tau, \rho) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^3\rho \quad (28.16)$$

представляет собой пространственное преобразование Фурье корреляционной функции неоднородностей в сопровождающей системе координат.

Выражение (28.15) сложнее, чем (28.5). Во-первых, под знаком интеграла теперь содержится дополнительный экспоненциальный множитель $e^{i\Phi(\tau, \mathbf{R})}$. Во-вторых, вектор рассеяния \mathbf{q}' и произведение $\mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-^*$, заменяющее теперь $|\mathcal{P}(\mathbf{R})|^2$, зависят от τ . Однако если допустить, что источник первичного поля и приемный пункт удалены от рассеивающей области на расстояния, превышающие ее поперечник ($r \gg L$ и $r_0 \gg L$), то формула (28.15) упрощается. В последующих оценках мы будем писать неравенства, относящиеся только к r . Аналогичные неравенства должны выполняться и для r_0 .

При $R \geq L$ произведение $\mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-^*$ стремится к нулю. Следовательно, в области $R \leq L$, существенной для интегрирования в (28.15), отношение $R/r \ll 1$ в силу принятого допущения $r \gg L$. По той же причине в (28.15) существенны только значения $\bar{v}\tau \leq L$. Имея это в виду, разложим показатель экспоненты $\Phi(\tau, \mathbf{R})$ в степенной ряд по малым параметрам $R/r \ll L/r \ll 1$ и $\bar{v}\tau/r \ll L/r \ll 1$:

$$\Phi(\tau, \mathbf{R}) = -\mathbf{q}_0 \bar{v}\tau + k\mathbf{v}\mathbf{R}\tau + kO\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{v}\tau\right] + kO\left[\frac{(\bar{v}\tau)^3}{r^2}\right]. \quad (28.17)$$

Здесь \mathbf{v} — вектор, имеющий размерность частоты и пропорциональный скорости дрейфа \bar{v} :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r} [\mathbf{n}_{s0} [\bar{\mathbf{v}} \mathbf{n}_{s0}]] + \frac{1}{r_0} [\mathbf{n}_{l0} [\bar{\mathbf{v}} \mathbf{n}_{l0}]]. \quad (28.18)$$

Вектор \mathbf{q}' мы тоже разложим в ряд, но лишь по переменной τ :

$$\mathbf{q}'(\tau, R) = \mathbf{q}(R) + kO\left[\left(\frac{\bar{v}\tau}{r}\right)^2\right], \quad \mathbf{q}(R) = k(n_s - n_l) \quad (28.19)$$

(член, линейный по τ , здесь отсутствует).

Ниже мы убедимся, что условие $r \gg L$ достаточно для того, чтобы сохранить в (28.17) два первых члена, а в (28.19) — только первый член разложения. Если это сделать, то (28.15) принимает вид

$$\Psi_v(\tau) = 8\pi^2 e^{-i(\omega + \mathbf{q}_0 \cdot \bar{\mathbf{v}})\tau} \int \mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-^* \exp(ikvR\tau) \Phi_{dp}(\tau, \mathbf{q}) dR. \quad (28.20)$$

Разумеется, при $\bar{v} \rightarrow 0$ это выражение переходит в формулу (28.5), полученную в отсутствие дрейфа.

С ростом τ значение интеграла в (28.20) уменьшается по трем причинам. Во-первых, уменьшается произведение $\mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-$, которое стремится к нулю при $\bar{v}\tau \gg L$. Во-вторых, экспоненциальная функция $\exp(ikvR\tau)$ начинает заметно осциллировать в пределах существенной для интегрирования области. В-третьих, уменьшается функция $\Phi_{dp}(\tau, \mathbf{q})$, которая описывает временную корреляцию флуктуаций в сопровождающей системе координат и стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.

Из условий $\bar{v}\tau \sim L$ и $kvR\tau \ll kvL\tau/r \sim 1$ находим два характерных интервала времени, отвечающих первым двум факторам

$$\begin{aligned} \tau_1 &\sim \frac{L}{v}, \\ \tau_2 &\sim \frac{r}{kvL} \sim \frac{L}{vL}. \end{aligned} \quad (28.21)$$

Характерное же время изменения функции $\Phi_{dp}(\tau, \mathbf{q})$, т. е. временной интервал корреляции неоднородностей в сопровождающей системе координат, мы обозначим через τ_x . По существу, это «время жизни» неоднородностей. Меньшее из трех перечисленных значений τ определяет, очевидно, время корреляции τ_x сигнала:

$$\tau_x = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}. \quad (28.22)$$

При $\bar{v} \rightarrow 0$ (отсутствие дрейфа) τ_1 и τ_2 бесконечно возрастают, а $\tau_x = \tau_3$.

Применим формулу (28.20) к анализу частного случая рассеяния на замороженных неоднородностях, которые в сопровождающей системе координат не зависят от времени ($\tau_s = \infty$).

4. Рассеяние на замороженных неоднородностях. Очевидно, в лабораторной системе координат, относительно которой не меняющиеся со временем неоднородности дрейфуют со скоростью \bar{v} , флуктуации проницаемости $\tilde{\epsilon}(t, r)$ обладают свойством

$$\tilde{\epsilon}(t, r) = \tilde{\epsilon}(t - \tau, r - \bar{v}\tau), \quad (28.23)$$

т. е. в точку r в момент времени t приходит возмущение $\tilde{\epsilon}(t', r')$, которое в предшествующий момент $t' = t - \tau$ находилось в точке $r' = r - \bar{v}\tau$ и переместилось за время τ со скоростью \bar{v} в точку r .

Как сказано, «время жизни» неоднородностей τ_s в сопровождающей системе координат формально бесконечно: $\tau_s = \infty$. Практически же замороженными можно считать неоднородности, для которых

$$\tau_s \gg \tau_1, \tau_2. \quad (28.24)$$

При выполнении этого условия функцию $\Phi_{dp}(\tau, q)$ в (28.20) можно положить равной $\Phi_{dp}(0, q) = \Phi_e(q)$, поскольку значение интеграла в (28.20) сделается малым раньше, чем начнется уменьшение $\Phi_{dp}(\tau, q)$. Таким образом, для замороженных неоднородностей

$$\psi_v(\tau) = 8\pi^3 e^{-\tau(\omega + q_0 \bar{v})} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-^* \exp(ikvR\tau) \Phi_e(q) d^3q. \quad (28.25)$$

Поведение этой функции корреляции существенно зависит от соотношения между τ_1 и τ_2 . Согласно (28.21) они сравнимы друг с другом при $r \sim kL^2$. В ближней зоне, где $r \ll kL^2$ и одновременно, по условию, $r \gg L$, выполняется неравенство $\tau_2 \ll \tau_1$. Следовательно, время корреляции в ближней зоне совпадает с τ_2 :

$$\tau_k = \tau_2 \sim \frac{r}{kL} \quad (L \ll r \ll kL^2). \quad (28.26)$$

Напротив, в дальней (фраунгоферовой) зоне, где $r \gg kL^2$, время корреляции совпадает с τ_1 , которое значительно меньше τ_2 :

$$\tau_k = \tau_1 \sim L/v \quad (r \gg kL^2). \quad (28.27)$$

Нетрудно убедиться, что в обеих зонах отбрасывание «лишних» слагаемых в разложениях (28.17) и (28.19) вполне оправдано. Например, в ближней зоне, где $r \ll kL^2$ и $\tau_k = \tau_2$, четвертый член разложения (28.17) по порядку величины равен

$$k \frac{(\bar{v}\tau)^3}{r^2} \ll \frac{k}{r^2} \left(\frac{r}{kL} \right)^3 = \frac{r}{kL^2} \frac{1}{kL},$$

т. е. меньше произведения двух малых параметров. Но он мал и в дальней зоне, где $r \gg kL^2$ и $\tau_s = \tau_1$, так что

$$k \frac{(\bar{v}\tau)^3}{r^2} \ll \frac{k}{r^2} L^3 = \frac{kL^3}{r} \frac{L}{r} \ll 1.$$

Отметим, что при нарушении условия замороженности (28.24), т. е. при $\tau_1, \tau_2 \geq \tau_s$, отбрасывание «лишних» членов является тем более оправданным, чем меньше τ_s по сравнению с τ_1 и τ_2 . Иными словами, единственное условие применимости формулы (28.20) выражается неравенством $r \gg L$.

Рассмотрим теперь более детально поведение корреляционной функции (28.25) в ближней и дальней зонах.

Для ближней зоны выражение (28.25) можно упростить, если учесть, что $\bar{v}\tau \leq \bar{v}\tau_s \sim r/kL \ll L$, а при $\bar{v}\tau \ll L$ произведение $\mathcal{P}_+ \mathcal{P}_-$ приближенно равно $|\mathcal{P}(R)|^2$. Таким образом, здесь

$$\psi_v(\tau) = e^{-\ell(\omega + q_0 \bar{v})\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{P}(R)|^2 \exp(ikvR\tau) \Phi_e(q) d^3R. \quad (28.28)$$

Для вычисления интеграла, конечно, надо конкретизировать вид спектра $\Phi_e(q)$ и весовой функции $|\mathcal{P}(R)|^2$. Однако спектральный анализ выражения (28.28) можно провести и без конкретизации этих функций.

Выполнив временнos преобразование Фурье (28.28), находим спектральную плотность сигнала $v(t)$:

$$g_v(\Omega) = 8\pi^3 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{P}(R)|^2 \Phi_e(q) \delta(\Omega - \omega - q_0 \bar{v} - kvR) d^3R. \quad (28.29)$$

Согласно (28.29) каждому элементарному объему d^3R отвечает спектральная линия на частоте $\Omega - \omega + q_0 \bar{v} + kvR$ и с «интенсивностью» $8\pi^3 |\mathcal{P}(R)|^2 \Phi_e(q)$. Суперпозиция этих линий образует частотный спектр $g_v(\Omega)$. Смещение частоты линии $\Omega = \omega + q_0 \bar{v} + kvR$ относительно частоты первичного поля ω обусловлено эффектом Доплера.

Доплеровский сдвиг частоты

$$\Omega_d = \bar{v}q_0 + kvR$$

содержит два слагаемых, из которых первое одинаково для всех точек рассеивающей области, тогда как второе меняется от точки к точке в силу изменения вектора $q(R)$ внутри рассеивающего объема¹⁾.

¹⁾ Более точное выражение доплеровского сдвига: $\Omega_d = \bar{v}q(R)$. Выражение, приведенное выше, содержит только первые члены тейлоровского разложения по R .

Ширина частотного спектра $\Delta\Omega$ определяется, очевидно, разностью доплеровских смещений частоты на краях рассеивающего объема $R \sim L$:

$$\Delta\Omega \approx \Delta\Omega_d \sim kvL \sim k\bar{v}L/r, \quad (28.30)$$

что, как и следовало ожидать, согласуется с оценкой ширины спектра $\Delta\Omega \sim 1/\tau_k \sim 1/\tau_z$. Оценке (28.26) можно дать и другую интерпретацию. Как было показано в § 27, величина r/kL представляет собой в случае неподвижных неоднородностей поперечный радиус корреляции поля l_{\perp} , т. е. пространственный масштаб интерференционной картины, образующейся в результате наложения рассеянных волн. При дрейфе замороженных неоднородностей интерференционная картина будет пробегать мимо точки наблюдения со скоростью \bar{v} , так что характерное время флюктуаций поля $l_{\perp}/\bar{v} \sim r/k\bar{v}L$ как раз совпадает с $\tau_k = \tau_z$.

Оценка (28.26) пригодна, строго говоря, только при $r \gg L$. Если, несмотря на это, применить ее к случаю $r \sim L$, когда точка наблюдения находится вблизи рассеивающей области, то мы получим, что $\tau_k \sim 1/kv \sim \lambda/\bar{v}$. Это не противоречит и оценке $\tau_k \sim l_{\perp}/\bar{v}$, поскольку вблизи рассеивающего объема $l_{\perp} \sim \lambda$ (см. § 27).

Иные закономерности наблюдаются в дальней зоне, для которой, согласно (28.27), время корреляции τ_k равно времени $\tau_1 \sim L/\bar{v}$ пребывания отдельной неоднородности в рассеивающем объеме. В дальней зоне показатель экспоненты в формуле (28.25) мал по сравнению с единицей, а $\Phi_e(\mathbf{q}) \approx \Phi_e(\mathbf{q}_0)$, так что корреляционная функция поля дается выражением

$$\Psi_v(\tau) = e^{-i(\omega + \mathbf{q}_0 \cdot \bar{\mathbf{v}})\tau} 8\pi^3 \Phi_e(\mathbf{q}_0) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_+ \mathcal{P}_- d^3 R. \quad (28.31)$$

Для вычисления интеграла необходима, как и в (28.28), конкретизация вида функции $\mathcal{P}(R)$. В предельно идеализированном случае, когда функция $\mathcal{P}(R) = \mathcal{P}_0 = \text{const}$ внутри куба с ребром L и равна нулю вне этого куба, а скорость дрейфа $\bar{\mathbf{v}}$ перпендикулярна к одной из граней куба, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_+ \mathcal{P}_- d^3 R = \begin{cases} |\mathcal{P}_0|^2 L^3 \left(1 - \frac{|\bar{\mathbf{v}}\tau|}{L}\right) & \text{при } |\tau| \leq L/|\bar{\mathbf{v}}|, \\ 0 & \text{при } |\tau| > L/|\bar{\mathbf{v}}|. \end{cases}$$

Более сложным закономерностям подчинено рассеяние на блуждающих неоднородностях, когда поле скоростей состоит из общей скорости дрейфа $\bar{\mathbf{v}}$ и случайной компоненты \mathbf{v} , т. е.

$v = \bar{v} + \tilde{v}$. Некоторые аспекты этого случая рассмотрены в [1] и [3—6].

5. Флуктуации интенсивности. В § 27 уже было отмечено, что однократно рассеянное поле распределено по гауссову закону с нулевым средним значением. Для такого поля функция корреляции интенсивности

$$\Psi_v(\tau) = \langle I_v(t) I_v(t-\tau) \rangle - \bar{I}_v(t) \bar{I}_v(t-\tau), \quad I_v = |v|^2,$$

выражается через квадрат модуля корреляционной функции поля (см. задачу 12 к гл. I):

$$\Psi_v(\tau) = |\psi_v(\tau)|^2. \quad (28.32)$$

Отсюда следует, что характерное время пульсаций интенсивности несколько меньше (в 1,5—2 раза, в зависимости от вида $\Phi_v(\tau)$), чем время корреляции самого сигнала $v(t)$. Соответственно частотный спектр флуктуаций интенсивности

$$g_v(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_v(\tau)|^2 e^{i\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g_v(\Omega_1) g_v(\Omega_1 - \Omega) d\Omega_1 \quad (28.33)$$

несколько шире, чем $g_v(\Omega)$.

§ 29. Рассеяние импульсных и модулированных сигналов

Рассеяние немонохроматических волн обладает рядом интересных особенностей. Мы ограничимся частным, но важным случаем квазимонохроматических сигналов, которые часто используются и в оптике, и в акустике, и в радиофизике. Представив такой сигнал в виде произведения медленно меняющейся (вообще говоря, комплексной) амплитуды $\mathfrak{A}(t)$ на $e^{-i\omega t}$ (несущая частота ω), мы должны, очевидно записать сигнал на выходе антенны аналогично формуле (25.46), выведенной для монохроматической волны, но с заменой постоянной амплитуды A на переменную амплитуду $\mathfrak{A}(t - b'/c)$ с запаздывающим аргументом ($b' = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$). Если восстановить еще временной фактор $e^{-i\omega t}$, опущенный в (25.46), то для квазимонохроматического сигнала получим

$$v(t) = \frac{k_0^2 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{r}') \frac{f_0(n_l') f_1(n_s')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \mathfrak{A}\left(t - \frac{b'}{c}\right) e^{ik_0 b'} \tilde{e}(\mathbf{r}') ds r'. \quad (29.1)$$

Для упрощения последующих выкладок введем безразмерную амплитуду $a(t) = \mathfrak{A}(t)/\mathfrak{A}_m$, где $\mathfrak{A}_m = \max |\mathfrak{A}(t)|$, а через $\mathcal{P}(\mathbf{r}')$ обозначим произведение неосциллирующих множителей, отли-

чающееся от (25.47) заменой A на Ψ_v . В этих обозначениях (29.1) запишется в виде

$$v(t) = e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(r') a\left(t - \frac{b'}{c}\right) e^{ik_0 b'} \bar{e}(r') d^3 r', \quad (29.2)$$

откуда для временной функции корреляции следует выражение $\Psi_v(t_1, t_2) = \langle v(t_1) v^*(t_2) \rangle =$

$$\begin{aligned} & -e^{-i\omega \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(r') \mathcal{P}^*(r'') a\left(t_1 - \frac{b'}{c}\right) a^*\left(t_2 - \frac{b''}{c}\right) e^{ik_0(b' - b'')} \times \\ & \times \Psi_e(\tau, r' - r'') d^3 r' d^3 r'', \end{aligned} \quad (29.3)$$

где $\tau = t_1 - t_2$. Для общности здесь учтена возможная зависимость флюктуаций \bar{e} от времени, а именно введен временной аргумент τ в функцию корреляции Ψ_e . Процесс $v(t)$, конечно, нестационарен, Ψ_v зависит порознь от t_1 и t_2 . Оценим интервал корреляции $v(t)$ в случае одиночного импульса (периодическая последовательность импульсов рассмотрена в задаче 5).

Пусть $a(t)$ — прямоугольный импульс длительности T ($a(t)=1$ при $|t| \leq T/2$ и равно нулю при $|t| > T/2$). Ясно, что при T , превышающем время корреляции неоднородностей τ_e , время корреляции $v(t)$ совпадает с τ_e . В противоположном же предельном случае $T \ll \tau_e$ время корреляции будет порядка T , поскольку произведение $a(t_1 - b'/c) a^*(t_2 - b''/c)$ обращается в нуль при $|t_1 - t_2| > T$ для любых значений r' и r'' .

Более детальный анализ выражения (29.3) возможен в предположении, что пространственная длина импульса cT велика по сравнению с радиусом корреляции неоднородностей l_e . В этом случае можно выполнить интегрирование по разностному аргументу $\rho = r' - r''$, как это неоднократно делалось в предыдущих параграфах. В результате

$$\begin{aligned} \Psi_v(t_1, t_2) = \\ = 8\pi^3 e^{-i\omega \tau} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{P}(R)|^2 a\left(t_1 - \frac{B}{c}\right) a^*\left(t_2 - \frac{B}{c}\right) \Phi_e(\tau, q) d^3 R, \end{aligned} \quad (29.4)$$

где $B = |r - R| + |R - r_0|$.

В отличие от случая монохроматической первичной волны, средняя интенсивность $\bar{I}_v = \langle |v|^2 \rangle$ зависит теперь от времени:

$$\bar{I}_v(t) = \Psi_v(t, t) = 8\pi^3 \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{P}(R)|^2 \left| a\left(t - \frac{B}{c}\right) \right|^2 \Phi_e(0, q) d^3 R. \quad (29.5)$$

Величина \bar{I}_v меньше, чем в случае монохроматического сигнала той же амплитуды, поскольку под знаком интеграла появился множитель $|a|^3 \leq 1$. Этот множитель отличен от нуля внутри эллипсоидального слоя, для внутренних точек которого имеем $|t - B/c| \leq T/2$, или в развернутой форме

$$c(t - T/2) \leq B(R) \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{R}| + |\mathbf{R} - \mathbf{r}_0| \leq c(t + T/2). \quad (29.6)$$

Фокусы ограничивающих слой эллипсоидов (рис. 31) совпадают с точками наблюдения (\mathbf{r}) и излучения (\mathbf{r}_0), а размеры эллипсоидов с течением времени увеличиваются. Эллипсоидальный слой (29.6) можно назвать *импульсным объемом*. Область, принадлежащая в данный момент одновременно импульсному объему (29.6) и эффективно рассеивающей области $V_{\text{эфф}}$, как раз и определяет величину интенсивности \bar{I}_v .

Толщина импульсного объема δ наиболее просто выражается при обратном рассеянии, когда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ и эллипсоидальный слой (29.6) вырождается в сферический. Как ясно из (29.6), $\delta = cT/2$, т. е. толщина импульсного объема равна половине пространственной длины импульса. В общем случае выражения для δ довольно сложны, но для не очень длинных импульсов ($cT \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$) толщина δ определяется простой формулой [1]:

$$\delta = cT/2 \sin(\theta/2), \quad (29.7)$$

где θ — угол рассеяния (рис. 31). При рассеянии назад ($\theta = \pi$) из (29.7) получается прежний результат $\delta = cT/2$. Отметим, что эллипсоид $|t - B/c| = \text{const}$ расширяется со скоростью по нормали $v_n = c/2 \sin(\theta/2)$.

Временной ход $\bar{I}_v(t)$ существенно зависит от соотношения между толщиной импульсного объема δ и поперечником рассеивающей области L . В случае *длинного* импульса ($\delta \gg L$ или $T \gg (2L/c) \sin(\theta/2)$) происходит монотонное увеличение $\bar{I}_v(t)$, пока весь рассеивающий объем не окажется внутри импульсного объема (29.6). Время нарастания $\bar{I}_v(t)$ до максимального значения \bar{I}_{\max} по порядку величины равно $L/v_n = (L/c) 2 \sin(\theta/2)$. В течение такого же времени происходит уменьшение $\bar{I}_v(t)$ до нуля при выходе из рассеивающей области заднего фронта импульсного объема. Между стадиями нарастания и убывания интен-

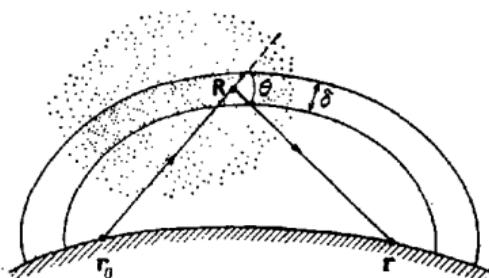


Рис. 31.

сивность $\bar{I}_v(t)$ постоянна и равна средней интенсивности монохроматического сигнала бесконечной длительности. Если

$$\frac{2L}{c} \sin \frac{\theta}{2} \ll T, \quad (29.8)$$

т. е. времена нарастания и спадания малы по сравнению с длительностью сигнала T , то рассеянный импульс практически без искажений повторяет форму излученного импульса.

Неравенство (29.8) можно представить и в другом виде, если ввести ширину полосы частот сигнала

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{T} \ll \frac{\pi c}{L \sin(\theta/2)}. \quad (29.9)$$

Это условие ограничивает ширину полосы пропускания каналов связи, использующих рассеяние. При передаче и приеме микроволновых сигналов при помощи остронаправленных антенн, когда размеры рассеивающего объема атмосферы L порядка нескольких десятков километров, полоса пропускания $\Delta\omega$ оказывается достаточной для передачи телевизионных сигналов ($\Delta f = \Delta\omega/2\pi \sim 10^6$ Гц).

В противоположном предельном случае $\delta \ll L$ или $T \ll (2L/c) \sin(\theta/2)$ (короткий импульс) «время входа» импульса в рассеивающую область, а также «время выхода» из нее имеют порядок длительности импульса: $\delta/v_n \sim T$. Время же, в течение которого импульсный объем находится внутри рассеивающей области, приближенно равно $L/v_n \approx (2L/c) \sin(\theta/2)$. Для короткого импульса это время значительно превышает длительность сигнала T , т. е. короткий первичный импульс при рассеянии существенно растягивается — в общем случае примерно в $(2L/cT) \sin(\theta/2)$ раз, а при обратном рассеянии — в $2L/cT$ раз.

Следует отметить, что, несмотря на существенное растягивание рассеянного сигнала по сравнению с первичным импульсом, время корреляции по-прежнему остается величиной порядка T . Это вытекает как из изложенных выше общих соображений, так и из выражения

$$\Psi_v(t_1, t_2) = \bar{I}_v \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right) K_K(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (\tau = t_1 - t_2), \quad (29.10)$$

которое, как можно показать при помощи (29.4), связывает в случае коротких импульсов функцию корреляции поля со средней интенсивностью \bar{I}_v и «коэффициентом корреляции»

огибающей первичного импульса

$$K_{\text{в}}(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{A}(t) \mathfrak{A}^*(t-\tau) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{A}(t)|^2 dt}. \quad (29.11)$$

Из (29.10) ясно, что в случае коротких импульсов рассеянное поле представляет собой квазистационарный случайный процесс с переменной дисперсией $\bar{T}_v(t)$ и с коэффициентом корреляции $K_{\text{в}}(\tau) e^{-i\omega\tau}$. Коэффициент корреляции огибающей $K_{\text{в}}(\tau)$ обращается при $\tau > T$ в нуль, откуда и следует, что время корреляции рассеянного поля порядка T .

§ 30. Рассеяние электромагнитных волн

При рассеянии электромагнитных волн (как и при рассеянии поперечных упругих волн) возникают два новых эффекта, которые отсутствуют в скалярной задаче. Во-первых, рассеяние сопровождается изменением поляризации волны, а во-вторых, если речь идет об анизотропной среде, может происходить трансформация одних типов поляризации в другие. Мы рассмотрим однократное рассеяние электромагнитных волн лишь в изотропной недиспергирующей среде, в которой могут распространяться волны только одного типа, а именно поперечные электромагнитные волны.

1. Рассеяние монохроматических электромагнитных волн на покоящихся неоднородностях в изотропной среде. В этом случае уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (30.1)$$

нужно решать совместно с материальным уравнением для изотропной недиспергирующей среды

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (30.2)$$

Материальное уравнение (30.2) исключает из рассмотрения не только рассеяние в анизотропных средах (об особенностях такого рассеяния см., например, в [7]), но и рассеяние на *анизотропных флуктуациях* в изотропной среде (так называемые флуктуации анизотропии). Такие флуктуации возникают, например, в вязких жидкостях из-за случайных поворотов молекул, если последние оптически анизотропны (см. [8] и обзор [9]).

Пусть монохроматическая волна распространяется в среде с постоянной средней диэлектрической проницаемостью $\bar{\epsilon}$ и с покоящимися неоднородностями:

$$\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}), \quad \bar{\mathbf{e}} = \text{const}, \quad \langle \tilde{\mathbf{e}} \rangle = 0. \quad (30.3)$$

Уравнения Максвелла принимают вид ($k_0 \equiv \omega/c$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + ik_0 \bar{\epsilon} \mathbf{E} = -ik_0 \tilde{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} - ik_0 \mathbf{H} = 0, \quad (30.4)$$

а их решение может быть представлено при слабых флюктуациях $\langle (\tilde{\epsilon})^2 \rangle \ll \langle \bar{\epsilon} \rangle^2$ рядами теории возмущений

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \dots \quad (30.5)$$

При этом первичное поле \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 удовлетворяет однородным уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + ik_0 \bar{\epsilon} \mathbf{E}_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 - ik_0 \mathbf{H}_0 = 0, \quad (30.6)$$

а однократно рассеянное поле — неоднородным уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_1 + ik_0 \bar{\epsilon} \mathbf{E}_1 = -ik_0 \tilde{\epsilon} \mathbf{E}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 - ik_0 \mathbf{H}_1 = 0. \quad (30.7)$$

Уравнения для последующих приближений получаются из (30.7) при последовательных заменах $\mathbf{E}_m \rightarrow \mathbf{E}_{m+1}$, $\mathbf{H}_m \rightarrow \mathbf{H}_{m+1}$.

Рассеянные поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 можно найти, используя известные функции Грина, т. е. решение задачи о возбуждении электромагнитных волн точечным электрическим источником $\mathbf{j}_s = I_s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. В волновой зоне, т. е. при $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \lambda$, элементарный источник создает поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0e}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{i k_0^2}{\omega} [\mathbf{n}'_s [\mathbf{l}_s \mathbf{n}'_s]] \frac{e^{ikR}}{R}, \\ \mathbf{H}_{0e}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{i k_0^2}{\omega} [\mathbf{n}'_s \mathbf{l}_s] \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \quad (30.8)$$

где $\mathbf{n}'_s = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор, направленный из \mathbf{r}' в \mathbf{r} .

Используя (30.8), решение неоднородных уравнений (30.7) можно представить в виде

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{k_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{r}') \frac{e^{ikR}}{R} \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}') [\mathbf{n}'_s [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}') \mathbf{n}'_s]] d^3 r'. \quad (30.9)$$

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{k_0^2 V \bar{\epsilon}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{r}') \frac{e^{ikR}}{R} \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{r}') [\mathbf{n}'_s \mathbf{E}_0(\mathbf{r}')] d^3 r'.$$

Так как существенно новое по сравнению со скалярной задачей касается только поляризации рассеянного поля, рассмотрим

простейший случай, когда точка наблюдения расположена в зоне Фраунгофера рассеивающего объема ($r \gg kL^2$), а первичное поле представляет собой плоскую волну:

$$\mathbf{E}_0(r) = A e^{ik_r r}, \quad \mathbf{k}_r = k \mathbf{n}_l - k_0 \sqrt{\epsilon} \mathbf{n}_l. \quad (30.10)$$

Здесь ϵ — вектор поляризации первичной волны, вообще говоря — комплексный. Будем считать его нормированным к единице условием $\epsilon \epsilon^* = 1$. В силу поперечности волны, распространяющейся в изотропной среде, вектор поляризации ϵ перпендикулярен к направлению распространения \mathbf{n}_l . Простой расчет с использованием разложений вида (25.11) дает для однократно рассеянных полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(r) &= \frac{k_0^2 A e^{ik_r r}}{4\pi r} [\mathbf{n}_{s0} [\epsilon \mathbf{n}_{s0}]] \int_{-\infty}^{\infty} M(r') \tilde{\epsilon}(r') e^{-i\mathbf{q}_0 r'} d^3 r', \\ \mathbf{H}_1(r) &= \frac{k_0^2 \sqrt{\epsilon} A e^{ik_r r}}{4\pi r} [\mathbf{n}_{s0} \epsilon] \int_{-\infty}^{\infty} M(r') \tilde{\epsilon}(r') e^{-i\mathbf{q}_0 r'} d^3 r', \end{aligned} \quad (30.11)$$

где $\mathbf{n}_{s0} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор, направленный в точку r из центра рассеивающей области, а $\mathbf{q}_0 = k(\mathbf{n}_{s0} - \mathbf{n}_{l0})$ — вектор рассеяния, отвечающий центру этой области. Для упрощения записи мы опустим ниже индекс 0 у векторов \mathbf{n}_{s0} , \mathbf{n}_{l0} и \mathbf{q}_0 .

Легко видеть, что поля \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 отличаются от скалярного поля

$$u_1(r) = \frac{k_0^2 A e^{ik_r r}}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} M(r') \tilde{\epsilon}(r') e^{-i\mathbf{q}_0 r'} d^3 r', \quad (30.12)$$

вычисленного при тех же допущениях, только множителями:

$$\mathbf{E}_1(r) = [\mathbf{n}_s [\epsilon \mathbf{n}_s]] u_1(r), \quad \mathbf{H}_1(r) = \sqrt{\epsilon} [\mathbf{n}_s \epsilon] u_1(r). \quad (30.13)$$

Следовательно, в приближении однократного рассеяния при детерминированной поляризации ϵ первичной волны любые средние билинейные величины, составленные из компонент полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 , могут быть выражены через функцию корреляции скалярного поля $\psi_s(r_1, r_2) = \langle u_1(r_1) u_1^*(r_2) \rangle$. Если же поляризация первичного поля случайна, то усреднения по направлениям ϵ и по ансамблю неоднородностей ϵ производятся раздельно в силу статистической независимости этих величин. Иными словами, и при случайной поляризации первичной волны средние от билинейных комбинаций компонент \mathbf{E}_1 и \mathbf{H}_1 можно выразить через ψ_s или $\bar{\psi}_s$. Рассмотрим примеры.

2. Средний вектор Пойнтинга и эффективный поперечник рассеяния. Среди билинейных комбинаций, составленных из компонент E_1 и H_1 , важную роль играет вектор Пойнтинга

$$\mathcal{S}_1 = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[E_1 H_1^*] = \frac{c}{16\pi} ([E_1 H_1^*] + [E_1^* H_1]). \quad (30.14)$$

Учитывая, что $H_1 = \sqrt{\epsilon} [n_s E_1]$, и используя выражение (25.34) для $\bar{I}_1 = \langle |u_1|^2 \rangle$, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \frac{c\sqrt{\epsilon}}{8\pi} n_s \langle |E_1|^2 \rangle = \frac{c\sqrt{\epsilon} n_s}{8\pi} |[n_s [en_s]]|^2 \bar{I}_1 = \\ &= \frac{c\sqrt{\epsilon} n_s}{8\pi} |[n_s [en_s]]|^2 \frac{\pi k_0^4 |A|^2}{2r^3} \Phi_e(q). \end{aligned} \quad (30.15)$$

Заметим, что в отличие от исходных формул (30.11), это выражение применимо не только в зоне Фраунгофера $r \gg kL^2$, но и на гораздо меньших расстояниях $r \gg r_{\min} = \min\{L, Ll/\lambda\}$ (см. (25.38)).

Введем, как и в § 26, эффективный поперечник рассеяния единицы объема в единичный телесный угол $\sigma = |\mathcal{S}_1| r^2 / |\mathcal{S}_0| V$, где $|\mathcal{S}_0| = c\sqrt{\epsilon} |A|^2 / 8\pi$ — модуль плотности потока энергии первичной волны. При помощи (30.15) находим

$$\sigma = \frac{|\mathcal{S}_1| r^2}{|\mathcal{S}_0| V} = \gamma \sigma_{ck} = \gamma \frac{\pi}{2} k_0^4 \Phi_e(q), \quad (30.16)$$

где σ_{ck} — «скалярный» поперечник рассеяния (26.12). Множитель

$$\gamma = |[n_s [en_s]]|^2 = |e - n_s (en_s)|^2 = 1 - (n_s e)^2 \quad (30.17)$$

связан с особенностями рассеяния электромагнитных волн по сравнению со скалярной задачей и может быть назван *поляризационным*. Вычислим γ для некоторых частных случаев.

Для линейно поляризованной первичной волны e — вещественный единичный вектор. Если χ — угол между e и n_s (рис. 32), то $\gamma = \sin^2 \chi$. Таким образом, для линейно поляризованной первичной волны

$$\sigma = \sigma_{ck} \sin^2 \chi. \quad (30.18)$$

Множитель $\sin^2 \chi$ обращается в нуль в направлениях, коллинеарных с e , что связано с дипольным характером рассеяния электромагнитных волн в каждом элементе рассеивающего объема.

Произвольную эллиптически поляризованную волну можно представить, как известно, в виде суммы двух линейно поляризованных колебаний, сдвинутых по фазе на $\pi/2$. Пусть большая ось эл-

яйпса поляризации направлена вдоль орта e_1 , а малая—вдоль орта e_2 . Векторы e_1 и e_2 ортогональны к направлению распространения n_i , так что e_1, e_2 и n_i образуют ортогональную связку. При эллиптической поляризации

$$\mathbf{e} = p_1 \mathbf{e}_1 + i p_2 \mathbf{e}_2, \quad (30.19)$$

где p_1 и p_2 —вещественные коэффициенты, удовлетворяющие, в силу принятой нами нормировки $\mathbf{e}\mathbf{e}^* = 1$, условию $p_1^2 + p_2^2 = 1$.

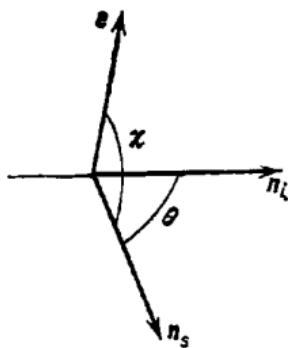


Рис. 32.

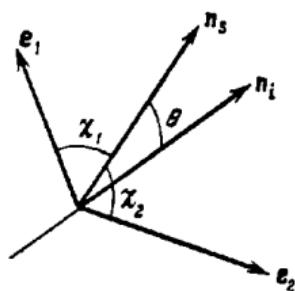


Рис. 33.

Поляризационный множитель γ для волн эллиптической поляризации равен

$$\gamma = 1 - p_1^2 (n_s e_1)^2 - p_2^2 (n_s e_2)^2 = 1 - p_1^2 \cos^2 \chi_1 - p_2^2 \cos^2 \chi_2, \quad (30.20)$$

где χ_1 и χ_2 —углы между вектором n_s и сортами e_1 и e_2 (рис. 33). Подставляя (30.20) в (30.16) и учитывая, что $p_1^2 + p_2^2 = 1$, получаем

$$\sigma = (p_1^2 \sin^2 \chi_1 + p_2^2 \sin^2 \chi_2) \sigma_{\text{ек}}. \quad (30.21)$$

В отличие от линейно поляризованной первичной волны, сечение (30.21) никогда не сбрасывается в нуль, потому что $\sin^2 \chi_1$ и $\sin^2 \chi_2$ не могут обратиться в нуль одновременно. Из (30.13) следует, что в направлениях $n_s = \pm e_1$ и $n_s = \pm e_2$ рассеянное поле поляризовано линейно—в силу уже отмеченного дипольного характера рассеяния. В других направлениях рассеянное поле поляризовано по эллипсу. Параметры эллипса поляризации могут быть найдены из выражений (30.13), если в них подставить (30.19).

В частном случае круговой поляризации волны, когда $p_1 = 1/\sqrt{2}$, $p_2 = \pm 1/\sqrt{2}$ (плюс отвечает правой, а минус—левой поляризации), находим из (30.20)

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2} [(n_s e_1)^2 + (n_s e_2)^2] = 1 - \frac{1}{2} (\cos^2 \chi_1 + \cos^2 \chi_2).$$

В силу взаимной ортогональности векторов e_i , e_s и n , имеем $\cos^2 \chi_1 + \cos^2 \chi_2 + \cos^2 \theta = 1$, так что для волн, поляризованных по кругу,

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (30.22)$$

Таким образом, γ зависит здесь только от угла рассеяния θ , т. е. имеет азимутальную симметрию.

Если в точке наблюдения r измеряется интенсивность рассеянных волн какой-либо одной поляризации, то плотность потока энергии будет, очевидно, меньше плотности полного потока (30.15) и, соответственно, уменьшится величина эффективного сечения рассеяния σ .

Пусть измеряется поток энергии, переносимой компонентой $E_N = (N E_1)$, где N — единичный и, вообще говоря, комплексный вектор, перпендикулярный к направлению рассеяния n_s : $(N n_s) = 0$. Вектор N описывает поляризационные характеристики приемной антенны в случае радиоволн или анализатора в случае световых волн. Из (30.13) следует, что

$$E_N = (N E_1) = (N [n_s [e n_s]]) u_1,$$

так что роль поляризационного множителя γ играет теперь величина

$$\gamma_N = |(N [n_s [e n_s]])|^2 = |(N e) - (N n_s) (e n_s)|^2 = |(N e)|^2.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\gamma_N = \gamma$, если поляризационные характеристики приемной антенны «согласованы» с поляризацией рассеянного излучения, т. е. антенна принимает волну (30.13). В остальных случаях $\gamma_N < \gamma$.

3. Рассеяние неполяризованного (естественного) света. С небольшими изменениями полученные результаты переносятся и на частично поляризованные поля (ч. I, § 49), когда компоненты первичного поля E_0 случайны. Усреднение по этим величинам можно проводить, как уже было отмечено, независимо от усреднения по реализациям флуктуаций e . Рассмотрим простой, но важный случай неполяризованной волны.

Разложим напряженность электрического поля первичной волны на ортогональные компоненты по ортам e_1 и e_2 :

$$E_0 = A_1 e_1 + A_2 e_2.$$

В случае неполяризованной волны амплитуды A_1 и A_2 статистически независимы, имеют нулевые средние значения и одинаковые дисперсии:

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = 0, \langle A_1 A_2 \rangle = 0, \langle |A_1|^2 \rangle = \langle |A_2|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |E_0|^2 \rangle, \quad (30.23)$$

где $|E_0|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2$ — полная интенсивность.

Сечение рассеяния неполяризованной волны можно найти из следующих простых соображений. Если бы первичная волна была линейно поляризована вдоль орта \mathbf{e}_1 , то, согласно (30.21), сечение рассеяния равнялось бы $\sigma = \sigma_1 = \sigma_{\text{ск}} \sin^2 \chi_1$ даже при флукутирующей амплитуде A_1 . При линейной же поляризации вдоль \mathbf{e}_2 мы имели бы $\sigma = \sigma_2 = \sigma_{\text{ск}} \sin^2 \chi_2$. Поскольку в неполяризованной волне поток энергии делится поровну между двумя ортогональными компонентами, полное сечение рассеяния должно быть равно полусумме σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_{\text{сст}} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2} (\sin^2 \chi_1 + \sin^2 \chi_2) \sigma_{\text{ск}}.$$

Но коэффициент при $\sigma_{\text{ск}}$ здесь такой же, как и в случае рассеяния волны с круговой поляризацией, и, следовательно, он равен $(1 + \cos^2 \theta)/2$ (см. (30.22)). Таким образом,

$$\sigma_{\text{сст}} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \sigma_{\text{ск}}. \quad (30.24)$$

Множитель $g(\theta) = (1 + \cos^2 \theta)/2$ называют *релеевской индикаторисой рассеяния*. Уменьшение $g(\theta)$ до значения $1/2$ при $\theta = \pm \pi/2$ объясняется тем, что в этом направлении вклад в рассеянное поле дает только одна компонента первичной волны, т. е. рассеянное поле оказывается линейно поляризованным.

Выражение для степени поляризации $P(\theta)$ рассеянного поля можно получить по формуле (49.18) из ч. I:

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \operatorname{Det} J}{(J_{11} + J_{22})^2}}, \quad (30.25)$$

где $J_{\alpha\beta} = \langle E_\alpha E_\beta^* \rangle$ — элементы поляризационной матрицы в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения. Простые вычисления дают принадлежащее Релею выражение

$$P(\theta) = \sqrt{1 - \frac{4 \cos^2 \theta}{(1 + \cos^2 \theta)^2}} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}. \quad (30.26)$$

Из (30.26) видно, что $P = 0$ при $\theta = 0$ или π , т. е. поле \mathbf{E}_1 сохраняет естественную поляризацию при рассеянии вперед и назад. При рассеянии под прямым углом ($\theta = \pm \pi/2$) степень поляризации равна единице, а в других направлениях рассеянное поле поляризовано частично ($0 < P < 1$).

4. Частотный спектр рассеянного поля. Некогерентное рассеяние электромагнитных волн в изотропной плазме. При неоднородностях ϵ , зависящих от времени, отличия рассеяния электромагнитных волн от аналогичной скалярной задачи тоже могут быть учтены введением в результаты скалярной теории поляризационного множителя $\gamma = 1 - (n_s e)^2$. Так, например, в отсутствие регулярного дрейфа

неоднородностей и при $r \gg r_{\min}$ частотный спектр рассеянного поля

$$g_E(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_1(t) E_1^*(t-\tau) \rangle e^{i\Omega\tau} dt \quad (30.27)$$

в случае сферической первичной волны может быть получен умножением спектра (28.10) на γ :

$$g_E(\Omega) = \gamma \frac{\pi k_0^4 |A|^2 V_{\Phi\Phi}}{2r_s^2 r_0^2} G_s(\omega - \Omega, q), \quad (30.28)$$

где $G_s(\omega, q)$ — ωq -плотность флюктуаций диэлектрической проницаемости.

Применим формулу (30.28) к так называемому *некогерентному рассеянию* электромагнитных волн в плазме. Первоначально предполагалось, что рассеяние волн в плазме происходит на свободных электронах, находящихся в тепловом движении, благодаря чему интенсивности полей, рассеянных отдельными электронами, складываются некогерентно (отсюда и возник термин «некогерентное рассеяние»). В дальнейшем выяснилось, однако, что существенную роль в этом явлении играют коллективные процессы¹⁾. Мы ограничимся вычислением интенсивности высокочастотного поля, рассеянного в изотропной плазме, опираясь на макроскопическую теорию тепловых флюктуаций (гл. III). В § 31 мы вернемся к рассмотрению некогерентного рассеяния в рамках теории рассеяния на отдельных частицах.

В макроскопической электродинамике свойства изотропной холодной плазмы описываются на высоких частотах ($\omega \gg \omega_e$) диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2},$$

где e , m и N — соответственно заряд, масса и концентрация электронов. Таким образом,

$$\bar{\epsilon} = 1 - \frac{4\pi e^2 \bar{N}}{m\omega^2}, \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon - \bar{\epsilon} = -\frac{4\pi e^2 \bar{N}}{m\omega^2}, \quad (30.29)$$

откуда следует связь между ωq -плотностями $\tilde{\epsilon}$ и \bar{N} :

$$G_s(\omega, q) = \frac{16\pi^3 e^4}{m^2 \omega^4} G_N(\omega, q). \quad (30.30)$$

¹⁾ Возможность наблюдать некогерентное рассеяние радиоволн в ионосферной плазме была указана У. Е. Гордоном в 1958 г., а первые наблюдения этого явления осуществил в том же году К. Л. Боулс (см. [10]). Анализу коллективных процессов в плазме посвящены многие работы (см., например, [11]).

Подставляя это выражение для G_E в формулу (30.28), получаем

$$g_E(\Omega) = 8\pi^3 r_e^2 \gamma \frac{|A|^2 V_{\text{эфф}}}{r^2} G_N(\Omega - \omega, \mathbf{q}), \quad (30.31)$$

где $r_e = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона. Спектр флуктуаций электронной концентрации G_N , как было показано в задаче 7 гл. III, пропорционален температуре T и средней концентрации электронов \bar{N} . Таким образом, спектр рассеянного поля g_E пропорционален полному числу электронов $N_\Sigma = \bar{N}V$, находящихся в объеме V .

Из (30.31) следует, что спектр рассеянного поля g_E сосредоточен в окрестности частоты первичной волны ω , а его форма полностью определяется видом спектра флуктуаций $G_N(\omega, \mathbf{x})$. Поэтому частотный спектр рассеянного сигнала $g_E(\Omega)$ позволяет судить о свойствах и состоянии плазмы. Основанный на этом метод диагностики широко применяется для анализа не только ионосферной, но и лабораторной плазмы («метод некогерентного рассеяния»).

§ 31. Рассеяние на дискретных вкраплениях

1. Поле, рассеянное отдельной частицей. Наряду с рассеянием на объемных неоднородностях, большой интерес представляет и рассеяние на совокупности большого числа тел (частиц, вкраплений и т. д.), случайно расположенных и (или) случайно ориентированных в пространстве. Это очень общая задача, имеющая широкие приложения во многих областях физики.

Строго говоря, проблема рассеяния на системе многих тел относится к статистической схеме 3) (§ 8). Но если дискретные рассеиватели имеют сравнительно небольшие размеры и расположены достаточно редко, то дифракционная задача может быть решена в приближении однократного рассеяния, которое основано на допущении, что каждое вкрапление рассеивает падающую волну так, как если бы других вкраплений не было.

Приближение однократного рассеяния сводит задачу для дискретных рассеивателей, как и в случае непрерывных неоднородностей, к схеме 1), т. е. к излучению полей случайными источниками. В данном случае речь идет о совокупности дискретных источников, статистика которых задана статистикой положений (и ориентаций) рассеивателей. Как мы увидим, «внешние» закономерности однократного рассеяния на дискретных вкраплениях и на непрерывных неоднородностях среды (пространственная корреляция, частотный спектр и т. д.) во многом сходны.

Рассмотрим и здесь упрощенную постановку задачи, а именно рассеяние монохроматической волны на совокупности непод-

вижных частиц, размеры которых *малы по сравнению с длиной волны*, причем точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера объема V , занятого частицами.

Для малых частиц рассеянное поле можно рассчитывать в дипольном приближении. Пусть \mathbf{p} —электрический дипольный момент частицы, возникающий под действием электрического поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{p} = \hat{\alpha} \mathbf{E}, \quad (31.1)$$

где $\hat{\alpha}$ —тензор поляризуемости частицы. Для частиц, малых по сравнению с длиной волны, $\hat{\alpha}$ можно вычислить, считая поле \mathbf{E} статистически однородным. Сводка формул для некоторых симметричных тел приведена, например, в монографии [12], посвященной рассеянию волн на малых частицах.

Для сферических частиц из изотропного материала, а также для частиц произвольной формы, но с диэлектрической проницаемостью, близкой к единице, поляризуемость α является скаляром:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}. \quad (31.2)$$

В качестве электрического поля в формуле (31.2) следует брать так называемое *действующее* поле \mathbf{E}_d , которое отличается от поля первичной волны \mathbf{E}_0 тем, что включает также совокупное поле соседних рассеивателей. В приближении однократного рассеяния (борновское приближение) \mathbf{E}_d практически не отличается от поля первичной волны \mathbf{E}_0 , которое для простоты мы будем считать полем плоской волны $\mathbf{E}_0 = A e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t)}$. Тогда

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_d \approx \alpha \mathbf{E}_0 = \alpha A e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}' - i\omega t)}, \quad (31.3)$$

где \mathbf{r}' —радиус-вектор частицы, а \mathbf{e} —вектор поляризации первичной волны.

Волновое поле, излучаемое в вакууме отдельным диполем с моментом (31.3), может быть рассчитано по формуле (30.8), если подставить туда $-i\omega \mathbf{p}$ вместо \mathbf{l}_1 (множитель $e^{-i\omega t}$, как обычно, опускаем):

$$\mathbf{E}_1(r) = k_0^2 [\mathbf{n}' [\mathbf{e} \mathbf{n}']] \alpha A \frac{\exp(i\mathbf{k}R \cdot i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}')}{R}. \quad (31.4)$$

Здесь $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\mathbf{n}' = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ —единичный вектор, направленный из точки \mathbf{r}' в точку наблюдения \mathbf{r} . Магнитное поле рассеянной волны в волновой зоне дается выражением

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{n}' \mathbf{E}_1] = [\mathbf{n}' \mathbf{e}] k_0^2 \alpha A \frac{\exp(i\mathbf{k}R \cdot i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}')}{R}. \quad (31.5)$$

2. Среднее значение однократно рассеянного поля. Пусть в объеме V находятся N одинаковых частиц с центрами в точках $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_m$ ($m = 1, 2, \dots, N$). В приближении одно-

кратного рассеяния поле в точке наблюдения \mathbf{r} представляет собой сумму полей, рассеянных отдельными частицами:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = k_0^2 \sum_{m=1}^N [\mathbf{n}_m [\epsilon \mathbf{n}_m]] \alpha A \frac{\exp(i k R_m + ik_i r_m)}{R_m}, \quad (31.6)$$

где $R_m = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|$, а $\mathbf{n}_m = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|$ — единичный вектор, направленный от m -й частицы в точку наблюдения \mathbf{r} . При учете двукратного рассеяния в качестве \mathbf{E}_d надо взять сумму первичного поля \mathbf{E}_0 и однократно рассеянного поля (31.6) и т. д.

Заметим, что при учете двукратного рассеяния пренебрежение в действующем поле \mathbf{E}_d квазистационарным полем индуцированных диполей, ближайших к точке \mathbf{r} , т. е. пренебрежение полем $\mathbf{E}_{kv} \sim \alpha \mathbf{E}_0 / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ по сравнению с \mathbf{E}_0 , налагает определенное ограничение на среднее расстояние между частицами ρ . Из условия $\mathbf{E}_{kv} \ll \mathbf{E}_0$ следует неравенство $\alpha/\bar{\rho}^3 \ll 1$, или поскольку $n\rho^3 \approx 1$, где n — средняя концентрация частиц, неравенство

$$\bar{n}\alpha \ll 1. \quad (31.7)$$

При выполнении этого условия возможно как $\bar{\rho} > \lambda$, так и $\bar{\rho} < \lambda$. Облако частиц, удовлетворяющее неравенству (31.7), можно называть *разреженным* (конечно, в электродинамическом смысле), в отличие от конденсированной среды, в которой $\bar{n}\alpha \geq 1$.

Поместим начало координат в центр рассеивающего объема $V \sim L^3$, заполненного частицами. Для точек наблюдения \mathbf{r} , вынесенных в зону Фраунгесфера объема V ($r \gg kL^2$), можно использовать разложение (25.11):

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m| \approx r - \mathbf{n}_s \mathbf{r}_m, \quad \mathbf{n}_m = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|} \approx \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{n}_s,$$

подставив которое в (31.6), получим

$$\mathbf{E}_s = \mathcal{E}_1 \sum_{m=1}^N e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_m}, \quad (31.8)$$

где $\mathbf{q} = k\mathbf{n}_s - \mathbf{k}_i = k(\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_i)$ — вектор рассеяния, а

$$\mathcal{E}_1 = k_0^2 [\mathbf{n}_s [\epsilon \mathbf{n}_s]] \alpha A \frac{e^{ikr}}{r} \quad (31.8a)$$

— поле, рассеянное одной частицей, помещенной в начале координат, т. е. в центр области V .

Для нахождения статистических моментов однократно рассеянного поля нужно задаться законом распределения случайных координат $\mathbf{r}_m = (x_m, y_m, z_m)$, а если частицы движутся, то и

законом распределения скоростей $\mathbf{v}_m = (v_{mx}, v_{my}, v_{mz})$. Для расчета среднего значения и функции корреляции рассеянного поля необходимы только одночастичная (w_1) и бинарная (w_2) плотности вероятностей. Примем, что все частицы и все их пары равноправны, т. е. функции $w_1(\mathbf{r}_m)$ и $w_2(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_l)$ не зависят от индексов переменных \mathbf{r}_m и \mathbf{r}_l .

Усредняя (31.8) по положению частиц \mathbf{r}_m , получаем среднее поле рассеянное N частицами:

$$\bar{\mathbf{E}}_s(r) = \mathcal{E}_1 \left\langle \sum_{m=1}^N e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_m} \right\rangle = \mathcal{E}_1 N \int_V e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} w_1(\mathbf{r}) d^3 r = \mathcal{E}_1 N f_1(\mathbf{q}), \quad (31.9)$$

где

$$f_1(\mathbf{q}) = \int_V e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} w_1(\mathbf{r}) d^3 r \quad (31.10)$$

— характеристическая функция одночастичного распределения $w_1(\mathbf{r})$.

Интенсивность среднего поля $|\bar{\mathbf{E}}_s|^2$, т. е. когерентная составляющая интенсивности, равна

$$I_{\text{kog}} = |\bar{\mathbf{E}}_s|^2 = |\mathcal{E}_1|^2 N^2 |f_1(\mathbf{q})|^2. \quad (31.11)$$

Когерентная составляющая отличается от интенсивности $|\mathcal{E}_1|^2$ поля, рассеянного одной частицей, множителем $N^2 |f_1(\mathbf{q})|^2$, т. е. I_{kog} пропорциональна квадрату числа частиц. Величину $N |f_1(\mathbf{q})|$ можно назвать эффективным числом когерентно рассеивающих частиц:

$$N_{\text{kog}} = N |f_1(\mathbf{q})| = \left| \left\langle \sum_{m=1}^N e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_m} \right\rangle \right|. \quad (31.12)$$

При рассеянии вперед ($\theta = 0, q = 0$), когда $f_1(\mathbf{q}) = f_1(0) = 1$, когерентно излучают все частицы ($N_{\text{kog}} = N$) и при этом

$$(\bar{\mathbf{E}}_s)_{\text{вл}} = (N \mathcal{E}_1)_{\text{вл}} = N k_0^2 e \alpha \frac{A}{r} e^{ikr}. \quad (31.13)$$

При рассеянии под углом N_{kog} резко падает, поскольку характеристическая функция $f_1(\mathbf{q})$ сравнима с единицей только при $q \ll 2\pi/L$ или, что то же, при углах рассеяния, лежащих внутри конуса $\theta \ll \lambda/L \ll 1$ (оценки скорости убывания N_{kog} с ростом θ даны в задаче 7).

3. Средняя интенсивность. Согласно (31.8) средняя интенсивность однократно рассеянного поля $\bar{I}_s = \langle |\mathbf{E}_s|^2 \rangle$ равна

$$\bar{I}_s = |\mathcal{E}_1|^2 \left\langle \sum_{m,l=1}^N e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_l)} \right\rangle. \quad (31.14)$$

Выделим из двойной суммы, содержащей N^2 членов, N слагаемых с $m = l$, каждое из которых равно единице, а остальные $N^2 - N$ слагаемых с $m \neq l$ усредним при помощи бинарной плотности вероятностей w_2 . В результате получим

$$\bar{I}_s = |\mathcal{E}_1|^2 [N + (N^2 - N) \tilde{f}_2(\mathbf{q})], \quad (31.15)$$

где

$$\tilde{f}_2(\mathbf{q}) \equiv f_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) = \int_V \int_V w_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')} d^3 r' d^3 r'', \quad (31.16)$$

$\tilde{f}_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ — бинарная характеристическая функция. Фактически $\tilde{f}_2(\mathbf{q})$ — это характеристическая функция распределения *относительных* координат. В самом деле, если заменить в (31.16) $w_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d^3 r' d^3 r''$ на $W_2(\rho, \mathbf{R}) d^3 \rho d^3 R$, где $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}''$, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2$, и выделить интегрирование по \mathbf{R} , то

$$\tilde{f}_2(\mathbf{q}) = \int W(\rho) \exp(-i\mathbf{q}\rho) d^3 \rho, \quad W(\rho) = \int W_2(\rho, \mathbf{R}) d^3 R.$$

Вычитая из (31.15) интенсивность когерентной составляющей поля (31.11), получаем среднюю интенсивность *некогерентного* рассеяния

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\text{неког}} &= \bar{I}_s - I_{\text{ког}} = \langle |E_s|^2 \rangle - \langle \bar{E}_s \rangle^2 = \\ &= |\mathcal{E}_1|^2 \{N[1 - |f_1(\mathbf{q})|^2] + (N^2 - N)[\tilde{f}_2(\mathbf{q}) - |f_1(\mathbf{q})|^2]\}. \end{aligned} \quad (31.17)$$

Если положения частиц статистически независимы, т. е. $w_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = w_1(\mathbf{r}') w_1(\mathbf{r}'')$, то $\tilde{f}_2(\mathbf{q}) - |f_1(\mathbf{q})|^2 = 0$ и второе слагаемое в (31.17), пропорциональное $N^2 - N$, обращается в нуль. Следовательно, слагаемое, пропорциональное $N^2 - N$, описывает рассеяние на частицах, положения которых *коррелированы* между собой, и его можно рассматривать как характеристику *коллективных* эффектов при рассеянии:

$$\bar{I}_{\text{кол}} = |\mathcal{E}_1|^2 (N^2 - N) [\tilde{f}_2(\mathbf{q}) - |f_1(\mathbf{q})|^2]. \quad (31.18)$$

Первое же слагаемое в (31.17) описывает рассеяние на *независимых* частицах:

$$\bar{I}_{\text{нес}} = |\mathcal{E}_1|^2 N [1 - |f_1(\mathbf{q})|^2]. \quad (31.19)$$

Так как $f_1(0) = \tilde{f}_2(0) = 1$, при рассеянии вперед ($\theta = 0$) оба слагаемых в (31.17) обращаются в нуль, $\bar{I}_{\text{неког}}(0) = 0$. Но это имеет место только в приближении однократного рассеяния. Можно показать, что уже при учете двукратного рассеяния $\bar{I}_{\text{неког}}(0) \neq 0$.

Исключив из рассмотрения рассеяние вперед, т. е. в узкий конус с раствором $\theta \ll \lambda/L$, можно пренебречь в формуле (31.19)

слагаемым $|f_1(\mathbf{q})|^2 \ll 1$ (см. задачу 7), что дает

$$\bar{I}_{\text{нез}} \approx |\mathcal{E}_1|^2 N, \quad (31.20)$$

т. е. сумму интенсивностей волн, рассеиваемых независимыми частицами. Если, как чаще всего бывает в приложениях теории, $N \gg 1$, то в (31.18) можно пренебречь N по сравнению с N^2 , и тогда

$$\bar{I}_{\text{кол}} \approx |\mathcal{E}_1|^2 N^2 [\bar{f}_2(\mathbf{q}) - |f_1(\mathbf{q})|^2] \equiv |\mathcal{E}_1|^2 N^2 v(\mathbf{q}). \quad (31.21)$$

Представив бинарную функцию распределения w_2 в виде

$$w_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = w_1(\mathbf{r}') w_1(\mathbf{r}'') [1 + \mu(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')], \quad (31.22)$$

можно связать разность $v = \bar{f}_2 - |f_1|^2$ с величиной μ , которая обращается в нуль для частиц с независимыми координатами \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' :

$$\begin{aligned} v(\mathbf{q}) &= \int \int [w_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') - w_1(\mathbf{r}') w_1(\mathbf{r}'')] e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')} d^3 r' d^3 r'' = \\ &= \int \int w_1(\mathbf{r}') w_1(\mathbf{r}'') \mu(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')} d^3 r' d^3 r''. \end{aligned} \quad (31.23)$$

Если радиус корреляции l_μ , т. е. характерный масштаб изменения μ по разностной переменной $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}''$, мал по сравнению с поперечником облака L (одновременно L является масштабом изменения $w_1(\mathbf{r})$ и μ по аргументу $\mathbf{R} = (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2$), то в пределах сферы $\rho = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| \leq l_\mu$ произведение $w_1(\mathbf{r}') w_1(\mathbf{r}'')$ можно приблизенно заменить на $w_1^2(\mathbf{R})$, после чего в (31.23) можно выполнить интегрирование по ρ . Это дает

$$v(\mathbf{q}) = 8\pi^3 \int w_1^2(\mathbf{R}) \Phi_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{R}) d^3 R, \quad (31.24)$$

где

$$\Phi_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{R}) = \frac{1}{8\pi^3} \int \mu(\rho, \mathbf{R}) \exp(-i\mathbf{q}\rho) d^3 \rho \quad (31.25)$$

— преобразование Фурье $\mu(\rho, \mathbf{R})$ по аргументу ρ . Таким образом, $\bar{I}_{\text{кол}} = N^2 |\mathcal{E}_1|^2 v(\mathbf{q}) = 8\pi^3 |\mathcal{E}_1|^2 N^2 \int w_1^2(\mathbf{R}) \Phi_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{R}) d^3 R$. $\quad (31.26)$

4. Средний вектор Пойнтинга. Эффективный поперечник рассеяния. Поскольку в зоне Фраунгофера

$$\mathcal{S}_s = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s^*] = \frac{c}{8\pi} \mathbf{n}_s |\mathbf{E}_s|^2 = \frac{c}{8\pi} \mathbf{n}_s I_s, \quad (31.27)$$

для среднего значения вектора Пойнтинга $\bar{\mathcal{S}}_{\text{неког}}$, отвечающего флуктуационной (некогерентной) компоненте поля, имеем

$$\bar{\mathcal{S}}_{\text{неког}} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{n}_s \bar{I}_{\text{неког}} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{n}_s (\bar{I}_{\text{нез}} + \bar{I}_{\text{кол}}). \quad (31.28)$$

Обозначим через σ_1 поперечник рассеяния отдельной частицы в единичный телесный угол. Согласно (31.8а)

$$\sigma_1 = \frac{|\mathcal{S}_1| r^2}{|\mathcal{S}_0|} = \frac{|\mathbf{E}_1|^2 r^2}{|\mathbf{E}_0|^2} = k_0^4 [n_s [en_s]]^2 \alpha^2 = \gamma k_0^4 \alpha^2, \quad (31.29)$$

где $\mathcal{S}_0 = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0^*]$ — вектор Пойнтинга первичного поля, \mathcal{S}_1 — поток энергии поля (31.4), рассеянного одной частицей, а γ — поляризационный множитель (30.17). Подставляя в (31.28) выражения (31.20) и (31.26) и учитывая (31.29), получаем для суммарного поперечника рассеяния σ_N системы N частиц в единичный телесный угол выражение

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \frac{|\mathcal{S}_{\text{пеког}}| r^2}{|\mathcal{S}_0|} = [N + N^2 v] \sigma_1 = \\ &= \sigma_1 \left[N + 8\pi^3 N^2 \int w_1^2(\mathbf{R}) \Phi_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{R}) d^3 R \right]. \end{aligned} \quad (31.30)$$

Вводя среднюю концентрацию частиц

$$\bar{n}(\mathbf{r}) = N w_1(\mathbf{r}) \quad (31.31)$$

и учитывая, что $N = \int \bar{n}(\mathbf{r}) d^3 r$, можно представить выражение (31.30) в виде

$$\sigma_N = \int \sigma_1 [\bar{n} + 8\pi^3 (\bar{n})^2 \Phi_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{R})] d^3 R; \quad (31.32)$$

при этом подынтегральное выражение интерпретируется как сечение рассеяния единичного объема:

$$\sigma = \sigma_{\text{нез}} + \sigma_{\text{кол}}, \quad (31.33)$$

где первое слагаемое

$$\sigma_{\text{нез}} = \sigma_1 \bar{n} \quad (31.34)$$

отвечает рассеянию в пренебрежении корреляцией между положениями частиц, а второе слагаемое

$$\sigma_{\text{кол}} = \sigma_1 \cdot 8\pi^3 (\bar{n})^2 \Phi_\mu(\mathbf{q}, \mathbf{R}) \quad (31.35)$$

— рассеянию с учетом попарной корреляции положений частиц.

В зависимости от конкретных условий соотношение между этими слагаемыми может меняться в широких пределах. Ясно, например, что при малой средней концентрации n преобладает слагаемое $\sigma_{\text{нез}}$, а с ростом n — слагаемое $\sigma_{\text{кол}}$; при этом оказывается, что рассеяние на системе частиц с коррелированными положениями может быть описано как рассеяние на макроскопических (объемных) неоднородностях (см. ниже, раздел 5). При рассеянии электромагнитных волн в квазинейтральной плазме

коллективное рассеяние и рассеяние на независимых частицах могут быть сравнимы по величине.

5. Переход к сплошной среде. При макроскопическом рассмотрении диэлектрическая проницаемость разреженного (в смысле неравенства (31.7)) облака частиц равна

$$\epsilon = 1 + 4\pi n\alpha, \quad (31.36)$$

где α — поляризумость частицы, а n — макроскопическая концентрация частиц, являющаяся, вообще говоря, случайной величиной. Тем самым,

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_e + \bar{\epsilon}, \quad \bar{\epsilon} = 1 + 4\pi \bar{n}\alpha, \quad \bar{\epsilon} = 4\pi \bar{n}\alpha. \quad (31.37)$$

Постараемся установить, каковы те статистические характеристики ϵ (или n), при которых макроскопическое описание рассеяния, т. е. описание на языке флюктуаций ϵ , дает те же результаты, что и микроскопическое рассмотрение. Говоря о статистических характеристиках ϵ , мы будем иметь в виду только моменты $\bar{\epsilon}$ и Φ_ϵ .

В силу (31.31) в качестве среднего значения $\bar{\epsilon}(r)$ следует, очевидно, взять

$$\bar{\epsilon}(r) = 1 + 4\pi N w_1(r) = 1 + 4\pi \bar{n}(r). \quad (31.38)$$

Среднее поле, рассчитанное при помощи (31.38) в борновском приближении для зоны Фраунгофера, совпадает с (31.9)..

Для нахождения Φ_ϵ отождествим сечение (31.33), вычисленное для системы частиц, с сечением (30.16), описывающим рассеяние на непрерывных объемных неоднородностях. Приравнивая эти два выражения, учитывая (31.29) и сокращая на $4\pi k_0^4/2$, получаем

$$\Phi_\epsilon(q, R) = \frac{2}{\pi} \bar{n}(R) \alpha^2 + [4\pi \bar{n}(R)]^2 \Phi_\mu(q, R). \quad (31.39)$$

Корреляционная функция $\Phi_\epsilon(\rho, R)$ получается отсюда преобразованием Фурье по q :

$$\begin{aligned} \Psi_\epsilon(\rho, R) &= \int \Phi_\epsilon(q, R) \exp(iq\rho) d^3q = \\ &= \frac{2}{\pi} \bar{n}^2 \int \exp(iq\rho) d^3q + (4\pi \bar{n})^2 \int \Phi_\mu \exp(iq\rho) d^3q. \end{aligned}$$

Интеграл в первом слагаемом правой части равен $8\pi^3 \delta(\rho)$, а интеграл во втором члене, согласно (31.25), равен $\mu(\rho, R)$:

$$\Psi_\epsilon(\rho, R) = (4\pi \bar{n})^2 [\bar{n}(R) \delta(\rho) + (\bar{n})^2(R) \mu(\rho, R)]. \quad (31.40)$$

Учитывая, что $\bar{\epsilon} = 4\pi \bar{n}\alpha$, получаем из (31.40) корреляционную функцию концентрации частиц:

$$\Psi_n(\rho, R) = \bar{n}(R) \delta(\rho) + (\bar{n})^2(R) \mu(\rho, R). \quad (31.41)$$

Первые слагаемые в (31.40) и в (31.41) связаны с дискретностью рассеивателей. Дельта-функция $\delta(\rho)$ появляется в результате замены реальных частиц точечными диполями. При конечных размерах частиц вместо $\delta(\rho)$ появилась бы дельтообразная функция, спадающая практически до нуля на расстояниях порядка размера частиц. Второе слагаемое, обусловленное корреляцией положений, напротив, описывает особенности рассеяния на *коллективе* частиц. При достаточно большой концентрации частиц n^1) это слагаемое становится основным, и тогда можно рассматривать рассеяние на системе частиц с коррелированными положениями как рассеяние на объемных макроскопических неоднородностях сплошной среды с корреляционной функцией

$$\Psi_2 = (4\pi a n)^2 \mu(\rho, R).$$

Условие, при котором можно при *любых углах* рассеяния пренебречь «дискретным» слагаемым $\sigma_{\text{нез}}$ по сравнению с членом $\sigma_{\text{кол}}$, имеет вид

$$8\pi^3 n (\Phi_\mu)_{\min} \gg 1, \quad (31.42)$$

где $(\Phi_\mu)_{\min}$ — минимальное (по q) значение спектра. При выполнении же неравенства $8\pi^3 n (\Phi_\mu)_{\max} \ll 1$ можно пренебречь коллективными эффектами. Если ни одно из этих неравенств не выполняется во всем диапазоне изменения угла рассеяния $0 < \theta < \pi$, то надо пользоваться либо полным сечением (31.33), либо, определив из условия $8\pi^3 n \bar{\Phi}_\mu \sim 1$ граничный угол θ_{rp} , пользоваться различными предельными формулами при $\theta > \theta_{rp}$ и $\theta < \theta_{rp}$.

6. О некогерентном рассеянии в плазме. Этот вопрос мы уже затрагивали в § 30. Здесь мы рассмотрим рассеяние на свободных электронах в плазме под другим углом зрения, а именно как пример явления, в котором, в силу особенностей парной корреляции, коллективное рассеяние оказывается пропорциональным не второй, а *первой* степени концентрации электронов N_e .

Двумерная плотность вероятностей $w_2(r_1, r_2)$ в случае плазмы, находящейся в равновесии при температуре T , выражается распределением Больцмана:

$$w_2(r_1, r_2) = \text{const} \cdot \exp \left[-\frac{U_{12}(r_1, r_2)}{\Theta} \right],$$

где $\Theta = kT$ — температура, выраженная в энергетических единицах, а $U_{12}(r_1, r_2) = U_{12}(r_1 - r_2)$ — эффективная потенциальная

¹⁾ Совместимой, однако, с условием $4\pi a n \ll 1$, при котором можно не учитывать вклада квазистационарного поля. Учет $E_{\text{кв}}$ привел бы к формуле Лоренца — Лоренца [13].

энергия электрона, находящегося в точке \mathbf{r}_2 , в поле другого электрона, расположенного в точке \mathbf{r}_1 .

Предположим, что частицы равномерно заполняют большой объем V , так что $w_1(\mathbf{r}) = \text{const} = 1/V$, и рассмотрим случай, когда энергия взаимодействия двух электронов U_{12} мала по сравнению с энергией теплового движения $\Theta = kT$. Тогда приближенно двумерная плотность будет равна

$$[w_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \frac{1}{V^2} \left(1 - \frac{U_{12}}{\Theta}\right)]. \quad (31.43)$$

Сравнивая (31.43) с формулой (31.23), в которой нужно положить $w_1 = 1/V$, получаем для функции μ , характеризующей корреляцию положений электронов, приближенное выражение

$$\mu(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \approx -\frac{U_{12}}{\Theta} = -\frac{U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\Theta}.$$

В случае изотропной плазмы $U_{12} = e\varphi_{12}$, где φ_{12} — дебаевский потенциал, отличающийся от кулоновского потенциала $e/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ экспоненциальным множителем $\exp\{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/d\}$, где $d = (\Theta/8\pi e^2 \bar{N}_e)^{1/2}$ — дебаевский радиус (радиус экранирования) [14], а \bar{N}_e — средняя концентрация электронов. Таким образом,

$$\mu(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \approx -\frac{e^3}{\Theta |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} e^{-|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/d}.$$

Преобразование Фурье этой функции, равное

$$\Phi_\mu(\mathbf{q}) = -\frac{1}{8\pi^3 \bar{N}_e} \frac{1}{2 + q^2 d^2},$$

обратно пропорционально концентрации \bar{N}_e , так что для поперечника коллективного рассеяния по формуле (31.35) находим

$$\sigma_{\text{кос}} = -\frac{\sigma_1 \bar{N}_e}{2 + q^2 d^2}. \quad (31.44)$$

В результате суммарный поперечник рассеяния (31.33) оказывается равным

$$\sigma = \sigma_1 \bar{N}_e - \frac{\sigma_1 \bar{N}_e}{2 + q^2 d^2} = \sigma_1 \bar{N}_e \frac{1 + q^2 d^2}{2 + q^2 d^2},$$

или, учитывая, что поперечник рассеяния отдельной частицы $\sigma_1 = \gamma k_0^4 \alpha^2$ в случае электрона равен $\gamma r_e^2 = \gamma e^4/m^3 c^4$,

$$\sigma = \gamma r_e^2 \bar{N}_e \frac{1 + q^2 d^2}{2 + q^2 d^2}. \quad (31.45)$$

В предельном случае коротких волн ($qd \gg 1$) из (31.45) следует, что

$$\sigma = \gamma \bar{N}_e r_e^2 \quad (qd \gg 1). \quad (31.46)$$

Таким образом, суммарный эффект при рассеянии коротких волн на тепловых флуктуациях электронной концентрации оказывается таким же, как при рассеянии на N свободных электронах. Это связано с независимым характером движения электронов в пределах области $\Delta r \sim 1/q \ll d$, целиком лежащей внутри сферы дебаевского радиуса d .

В противоположном случае, когда длина волны $\Lambda_q = 2\pi/q$ много больше дебаевского радиуса, движение электронов уже нельзя считать независимым от движения ионов. В этом случае сечение рассеяния будет

$$\sigma = 1/2 \gamma \bar{N}_e r_e^2 \quad (qd \ll 1), \quad (31.47)$$

т. е. вдвое меньше, чем в (31.46).

Задачи

1. Показать, что полный поперечник рассеяния единичного объема σ в случае мелкомасштабных флуктуаций ($kl_e \ll 1$) равен

$$\sigma_0 = 2\pi^2 k_0^4 \Phi_e(0) = \frac{k_0^4}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_e(\rho) d^3\rho, \quad (1)$$

а в случае крупномасштабных флуктуаций ($kl_e \gg 1$) —

$$\sigma_0 = 1/2\pi k_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_e(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = 1/4k_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_e(0, 0, \rho_3) d\rho_3. \quad (2)$$

Решение. Формула (1) сразу же следует из определения (26.13), так как при $kl_e \ll 1$

$$\Phi_e(q) \approx \Phi_e(0) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_e(\rho) d^3\rho.$$

В случае же $kl_e \gg 1$ надо учесть, что существенный вклад в (26.13) дают только малые углы рассеяния $\theta \ll 1/k l_e \ll 1$. Вводя переменные интегрирования $x_1 = k\theta \cos \varphi$, $x_2 = k\theta \sin \varphi$ и учитывая, что при малых углах рассеяния $\Phi_e(q) \approx \Phi_e(x_1, x_2, 0)$ и $dx = \sin \theta d\theta d\varphi \approx \frac{1}{k^2} dx_1 dx_2$, получаем формулу (2).

2. Оценить полный поперечник рассеяния σ_0 световых волн в случае турбулентных флуктуаций со спектральной плотностью $\Phi_e(x) = \mathcal{A} C_e^2 (x^2 + x_0^2)^{-1/4}$, не имеющей особенностей при $x \rightarrow 0$ ($x_0 = 2\pi/L_0$ — волновое число, отвечающее внешнему масштабу турбулентности L_0).

Решение. В оптическом диапазоне длина волны λ мала по сравнению с внутренним масштабом турбулентности l_0 . Поэтому для расчета σ_0 можно воспользоваться формулой (2) предыдущей задачи, что дает (при $\mathcal{A} = 0,033$)

$$\sigma_0 = 3/5 \pi^2 k^2 \mathcal{A} C_e^2 x_0^{-5/4} \approx 0,0091 k^2 C_e^2 L_0^{5/4}.$$

В приземном слое атмосферы при $\lambda = 5 \cdot 10^{-8}$ см, $L_0 = 1$ м и $C_e^2 = 10^{-15}$ см $^{-2}$, для длины экстинкции $d_0 = 1/\sigma_0$ получаем оценку $d_0 \sim 20$ м. Это означает, что в задачах распространения света в приземном слое атмосферы применимость борновского приближения ограничена дистанциями такого порядка.

3. Оценить, пользуясь (27.3), поперечный радиус корреляции поля при обратном рассеянии, считая, что размеры рассеивающего объема L ограничены шириной диаграммы излучающей антенны γ (рис. 34).

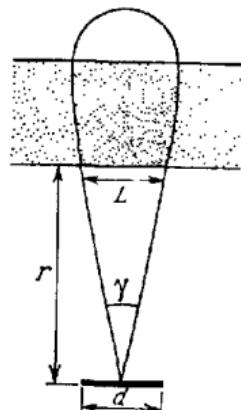


Рис. 34.

Решение. Главный лепесток диаграммы вырезает участок слоя с поперечными размерами $L \sim \gamma r$. По формуле (27.3) имеем $l_{\perp} \sim \lambda/\gamma$. Но $\gamma \sim \lambda/d$, где d — размер антенны. Поэтому $l_{\perp} \sim d$, т. е. при обратном рассеянии поперечный радиус корреляции поля порядка диаметра антенны d .

4. На рассеивающий объем V , расположенный вблизи идеально отражающей плоскости $z=0$, падает плоская волна Ae^{ikmz} . Найти среднюю интенсивность рассеянного поля в зоне Фраунгофера, предполагая, что поверхность $z=0$ абсолютно жесткая, так что граничное условие имеет вид $\frac{\partial u}{\partial N} \Big|_{z=0} = 0$.

Решение. Полное первичное поле, удовлетворяющее граничному условию, имеет вид $u_0 = A(e^{ikmz} + e^{ikm^*z})$, где m^* — единичная нормаль к фазовому фронту отраженной волны ($m_z^* = -m_z$). Функция же Грина для абсолютно жесткой поверхности равна

$$G(r', z) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR^*}}{R^*} \right),$$

где $R = |r - r'|$, $R^* = |r - r'^*|$, а r'^* — радиус-вектор зеркально отраженного источника r' , так что $r'^* = \{x', y', -z\}$.

Подставляя u_0 и G в формулу (24.11) и используя разложения типа (25.12), находим, что в зоне Фраунгофера

$$u_1(r) = \frac{Ak_0^2}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-\infty}^{\infty} M(r') \tilde{e}(r') \sum_{\alpha=1}^4 e^{-i\mathbf{q}_\alpha \cdot \mathbf{r}'} \quad (1)$$

Отдельные слагаемые в (1) отвечают четырем возможным видам рассеяния, схематически показанным на рис. 35. Соответствующие векторы рассеяния равны

$$\mathbf{q}_1 = k(\mathbf{n} - \mathbf{m}), \quad \mathbf{q}_2 = k(\mathbf{n} - \mathbf{m}^*), \quad \mathbf{q}_3 = k(\mathbf{n}^* - \mathbf{m}), \quad \mathbf{q}_4 = k(\mathbf{n}^* - \mathbf{m}^*),$$

где через \mathbf{n}^* обозначен вектор, «зеркальный» по отношению к единичному вектору $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, направленному из центра рассеивающего объема в точку наблюдения ($n_z^* = -n_z$).

Выражение для средней интенсивности $\bar{I}_1 = \langle |u_1|^2 \rangle$, вычисляемое при помощи (1), содержит 16 слагаемых, но существенную роль играют только четыре из них [15]:

$$\bar{I}_1 = \frac{\pi k_0^4 |A|^2 V}{2r^2} \sum_{\alpha=1}^4 \Phi_e(\mathbf{q}_\alpha). \quad (2)$$

Остальными членами можно пренебречь (их нужно учитывать только при $m_z \rightarrow 0$ или $n_z \rightarrow 0$, т. е. при малых углах скольжения первичной или рассеянной волн). В случае крупномасштабных неоднородностей существенный вклад в (2) дают только слагаемые с $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s$ и $\mathbf{q} = -\mathbf{q}_s$, которые отвечают, как это видно из рис. 35, рассеянию на малые углы.

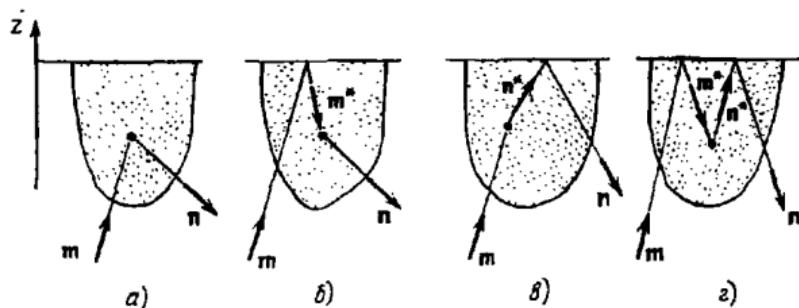


Рис. 35.

5. Найти функцию корреляции рассеянного поля, если первичное излучение представляет собой периодическую последовательность коротких импульсов, повторяющихся с периодом T_n .

Решение. В случае покоящихся неоднородностей рассеянный сигнал в момент $t + T_n$ был бы в точности таким же, как и в момент t , и мы имели

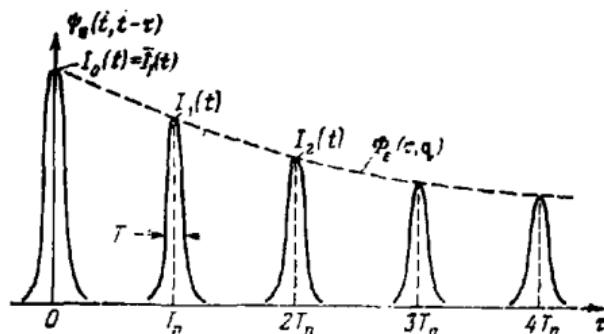


Рис. 36.

бы периодическую по $\tau = t_1 - t_2$ корреляционную функцию, составленную из слагаемых вида (29.10):

$$\Phi_v(t, t-\tau) = \bar{I}_v(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_A(\tau - mT_n) e^{i\omega(\tau - mT_n)},$$

где $K_A(t)$ — коэффициент корреляции огибающей отдельного импульса (29.11).

При рассеянии же на неоднородностях $\tilde{e} = \tilde{e}(t, r)$, меняющихся во времени, корреляция сигналов в моменты времени t и $t + T_n$ будет неполной, потому что за время T_n рассеивающая среда изменяется. В этом случае из

(29.1) и (29.4) можно получить, что

$$\Psi_v(t, t-\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(t) K_A(t-mT_n) e^{i\omega(t-mT_n)},$$

где

$$I_m(t) = 8\pi^3 \int_{-8}^8 |\mathcal{P}(R)|^2 |a(t-B/c)|^2 \Phi_e(mT_n, q) d^3 R.$$

Очевидно, $I_0(t)$ совпадает со средней интенсивностью $\bar{I}_v(t)$, которая дается выражением (29.5).

Зависимость функции корреляции $\Psi_v(t, t-\tau)$ от τ при фиксированном t схематически показана на рис. 36 в предположении, что $T_n \gg T$. Ширина отдельных максимумов Ψ_v определяется длительностью импульсов T , а расстояние между максимумами равно T_n . Высота отдельных максимумов I_m уменьшается с ростом m в соответствии с временным ходом $\Phi_e(mT_n, q)$. Следовательно, по убыванию максимумов с ростом m можно судить о времени корреляции неоднородностей [16].

6. Пусть рассеивающий объем облучается двумя первичными волнами с разными частотами ω_1 и ω_2 . Найти интервал частотной корреляции рассеянного поля в зоне Фраунгофера.

Решение. Обозначив через $u_1(\omega_1, r)$ и $u_1(\omega_2, r)$ соответствующие этим волнам рассеянные поля, которые в зоне Фраунгофера даются выражением (25.39), для коэффициента частотной корреляции находим

$$K_u(\Delta\omega) = \frac{\langle u_1(\omega_1, r) u_1^*(\omega_2, r) \rangle}{\sqrt{\bar{I}_1(\omega_1) \bar{I}_1(\omega_2)}} = \frac{8\pi^3}{V} \delta_V \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} q \right),$$

где $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $\delta_V(x)$ — дельтообразная функция, определенная соотношением (27.8), а $q = \frac{\omega}{c}(n_s - n_i)$ — вектор рассеяния на средней частоте $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Интервал частотной корреляции $\Delta\omega$ можно оценить из неравенства $\frac{\Delta\omega}{\omega} |q| \leq \frac{2\pi}{L}$, при выполнении которого функция $\delta_V \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} q \right)$ еще заметно отличается от нуля. Учитывая (25.32), получаем, что

$$\Delta\omega \leq \frac{2\pi\omega}{Lq} = \frac{\pi c}{L \sin(\theta/2)},$$

т. е. интервал корреляции совпадает с шириной полосы частот (29.9), в которой каналы связи, использующие рассеяние, могут работать без искажений [1].

7. Выяснить, как меняется число когерентно рассеивающих частиц при изменении длины волны в случае облака частиц, равномерно распределенных в объеме шара, и в случае непрерывного плавного (в масштабе длины волны) распределения.

Решение. Для частиц, равномерно распределенных в объеме шара радиуса a ,

$$w_1(r) = \text{const} = \frac{1}{V} = (4/3\pi a^3)^{-1},$$

так что по формулам (31.10) и (31.12) получаем

$$N_{\text{kog}} = \frac{3N}{(aq)^3} |\sin aq - aq \cos aq|, \quad q = 2k \sin(\theta/2).$$

При $qa \gg 1$, т. е. при $\theta \geq \lambda/a$, N_{kog} убывает пропорционально $(aq)^{-2}$.

Еще более быстрое (экспоненциальное) убывание N_{kog} с ростом qa происходит при учете размытых границ облака рассеивателей. Пусть плотность вероятностей $\omega_1(r)$ плавно спадает от центра облака к периферии с характерным масштабом изменения a , равным по порядку величины радиусу облака ($a \gg \lambda$). Учитывая, что $\max \omega_1 \sim 1/a^3$, и используя известные свойства интегралов Фурье [17], для модуля характеристической функции $f_1(q)$ получаем оценку

$$|f_1(q)| \sim \frac{1}{qa} e^{-qa} - \frac{\lambda}{4\pi a \sin(\theta/2)} \exp\left(-\frac{4\pi a \sin(\theta/2)}{\lambda}\right). \quad (1)$$

Отсюда следует, что при рассеянии назад ($\theta = \pi, q = 2k$) величина N_{kog} составляет ничтожную долю от N уже при $ka \geq 10$, т. е. при $a \geq 1.6\lambda$.

Легко объяснить, почему число когерентно рассеивающих частиц уменьшается с ростом ka . Рассмотрим слой толщины $d \ll \lambda$, в котором $qr_k = \text{const}$ с точностью до величин порядка $d/\lambda \ll 1$ (слой ориентирован перпендикулярно к вектору рассеяния q). Частицы, находящиеся в этом слое, рассеивают падающее излучение синхронно (когерентно). Для каждого такого слоя можно подобрать другой тонкий слой, излучающий в противофазе (для этого он должен быть удален на нечетное число полуволн Λ_q) и частично гасящий излучение первого слоя. Гашение было бы полным, если бы оба слоя содержали одинаковые числа частиц. Однако, в силу случайного расположения частиц в пространстве, каждая пара слоев дает малый нескомпенсированный остаток. Сумма таких остатков и оценивается формулой (1).

Г л а в а V

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СРЕДАХ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

§ 32. Уравнения геометрической оптики

В этой и двух последующих главах мы рассмотрим приближенные методы решения задач о прохождении волн через среды с крупными случайными неоднородностями, характерные размеры которых l_e велики по сравнению с длиной волны λ . Как мы уже знаем, при этом рассеяние на большие углы (и, в частности, рассеяние назад) пренебрежимо мало. В результате флюктуации волнового поля определяются преимущественно теми неоднородностями, которые лежат на пути волны, т. е. в окрестности луча, соединяющего источник и точку наблюдения. Обычно говорят поэтому не о рассеянии, а о *распространении* волн в случайно-неоднородных средах с крупными неоднородностями. Задачи такого типа, как и задачи о рассеянии волн, рассмотренные в предыдущей главе, относятся, по классификации § 8, к статистическим проблемам типа 2).

Существуют три основных приближенных метода, используемых для решения задач о флюктуациях коротковолновых ($\lambda \ll l_e$) полей в случайно-неоднородной среде: метод геометрической оптики (МГО), метод плавных возмущений (МПВ) и метод параболического уравнения (МПУ).

Сначала мы рассмотрим наиболее простой и наглядный из них — метод геометрической оптики. Первые расчеты по флюктуациям волн в средах с крупными неоднородностями были проведены именно при помощи МГО ([1, 2] и др.; библиографию см. в [3—5]). Простота метода связана с тем, что, в отличие от метода плавных возмущений и метода параболического уравнения, приближение геометрической оптики не учитывает дифракционных эффектов, в силу чего область его применимости, конечно, уже, чем у МПВ и МПУ. Однако в своей области метод геометрической оптики обладает определенными достоинствами. Во-первых, при помощи МГО удается исследовать ряд эффектов (таких, как влияние регулярной рефракции и усиление флюктуаций поля в окрестности каустик), которые труднее описать при помощи двух других методов. Во-вторых, некоторые результаты МГО сохраняют силу и за пределами области его применимости. Это относится к расчетам флюктуаций фазы и

направления распространения волн (но не к флуктуациям амплитуды). Указанные достоинства немало способствовали тому, что метод геометрической оптики широко применялся, несмотря на успехи, достигнутые при помощи МПВ и МПУ. Можно добавить еще, что приближение геометрической оптики послужило эвристической основой при разработке обоих указанных асимптотических методов, учитывающих дифракционные эффекты.

Напомним коротко вывод уравнений геометрической оптики для простейшего случая скалярной монохроматической волны, распространяющейся в среде с неподвижными непрерывными неоднородностями. Пусть проницаемость $\varepsilon(\mathbf{r})$ в уравнении Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 \varepsilon(\mathbf{r}) u = 0 \quad (32.1)$$

меняется на длине волны λ ($\lambda |\nabla \varepsilon| \ll \varepsilon$ — плавно неоднородная среда). В этих условиях естественно предположить, что поле u в каждой точке приближенно имеет структуру плоской волны:

$$u = A e^{iS} = A e^{ik\Phi}, \quad (32.2)$$

где амплитуда A и градиент фазы ∇S — медленные (в масштабе λ) функции координат.

Воспользовавшись медленностью изменения A и ∇S , нетрудно получить уравнения для A и S или для величины $\Phi = S/k$, которая представляет собой фазовый путь волны и называется эйконалом¹⁾.

Предложенный Дебаем способ вывода уравнений для амплитуды A и эйконала Φ состоит в следующем. Разложим амплитуду A в ряд по обратным степеням волнового числа²⁾:

$$u = \left(A_0 + \frac{A_1}{ik} + \frac{A_2}{(ik)^2} + \dots \right) e^{ik\Phi}. \quad (32.3)$$

Коэффициенты A_m в этом разложении в общем случае комплексны и поэтому дают вклад и в фазу результирующего поля.

Подставив ряд (32.3) в уравнение Гельмгольца и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях k , получаем

¹⁾ Иногда эйконал Φ тоже называют фазой, но мы будем употреблять термин «фаза» только для безразмерной величины $S = k\Phi$.

²⁾ Строго говоря, разложение следует проводить по безразмерному малому параметру $\mu \sim 1/k l_e$, где $l_e \sim \varepsilon / |\nabla \varepsilon| \gg \lambda$ — характерный масштаб неоднородностей (см., например, [6]). Однако разложение по степеням $1/k$ фактически означает именно разложение по степеням $\mu = 1/k l_e$.

систему уравнений для $\varphi, A_0, A_1, A_2, \dots$:

$$(k^1) \quad (\nabla\varphi)^2 = \varepsilon, \quad (32.4)$$

$$(k) \quad 2(\nabla\varphi \nabla A_0) + A_0 \Delta\varphi = 0, \quad (32.5)$$

$$(k^0) \quad 2(\nabla\varphi \nabla A_1) + A_1 \Delta\varphi = -\Delta A_0, \quad (32.5a)$$

$$(k^{1-n}) \quad 2(\nabla\varphi \nabla A_n) + A_n \Delta\varphi = -\Delta A_{n-1}, \quad (32.5b)$$

.....

Уравнение (32.4) носит название *уравнения эйконала*, а последующие уравнения для A_n ($n=0, 1, 2, \dots$) называют *уравнениями переноса* для амплитуд соответственно нулевого, первого и n -го приближений. Обычно ограничиваются нулевым приближением МГО, оставляя в разложении (32.3) только член A_0 . Последующие члены в (32.3) отбрасывают не только из-за сложности их вычисления, но главным образом потому, что ряд (32.3) является *асимптотическим*¹⁾, а для асимптотических разложений, как известно, увеличение числа учитываемых членов не всегда ведет к улучшению аппроксимации.

Уравнению эйконала (32.4) отвечают характеристики (лучи), на которых функционал $\int \sqrt{\varepsilon} ds$ экстремален (принцип Ферма). Уравнения лучей можно записать в различных формах. Для наших целей их удобно представить в виде [3, 4]

$$\frac{dt}{ds} = t, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{2\varepsilon} [\nabla\varphi - t(t\nabla\varphi)], \quad (32.6)$$

где ds — элемент длины луча, а t — касательный к лучу единичный вектор, который одновременно является и нормалью к фазовому фронту $S = k\varphi = \text{const}$. Так как $|\nabla\varphi| = \sqrt{\varepsilon}$, имеем

$$t = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} = \frac{\nabla\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Если тем или иным способом решение лучевых уравнений (32.6) найдено, то уравнение эйконала (32.4) и уравнения переноса (32.5) могут быть проинтегрированы вдоль лучевых траекторий. Эйконал φ находится по формуле

$$\varphi = \int_0^s \sqrt{\varepsilon} ds = \int_0^s \sqrt{\varepsilon[r(s)]} ds, \quad (32.7)$$

1) Он сходится к точному решению уравнения Гельмгольца, если одновременно с увеличением числа членов устремить волновое число k к бесконечности или, точнее, если безразмерный малый параметр $\mu \sim 1/kl_e$ устремить к нулю.

а амплитуда A_0 — из условия сохранения интенсивности $I = \sqrt{\epsilon} A_0^2$ в бесконечно тонкой лучевой трубке сечения $d\Sigma$ (рис. 37):

$$I d\Sigma = \sqrt{\epsilon} A_0^2 d\Sigma = \text{const.} \quad (32.8)$$

Последнее соотношение вытекает непосредственно из уравнения переноса (32.5), если записать последнее в виде

$$\operatorname{div}(A_0^2 \nabla \varphi) = \operatorname{div}(\sqrt{\epsilon} A_0^2 t) = \operatorname{div}(It) = 0$$

и проинтегрировать по объему между двумя сечениями бесконечно тонкой лучевой трубы.

Одно из условий применимости МГО состоит в требовании плавности изменения параметров среды:

$$l_s \gg \lambda. \quad (32.9)$$

В гл. VI, § 38 мы убедимся, что переход к геометрическому приближению (т. е. пренебрежение всеми членами в (32.3), кроме нулевого) допустим при условии малости радиуса первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$ (L — дистанция, проходимая волной) по сравнению с характерным масштабом неоднородностей l_s :

$$\sqrt{\lambda L} \ll l_s. \quad (32.10)$$



Рис. 37.

При выполнении этого условия можно пренебречь дифракционными эффектами, которые в рамках МГО проявляются именно в первом порядке по $\mu = 1/k l_s$.

Обратимся теперь к случайному-неоднородной среде. Получить аналитическое решение уравнения эйконала (32.4) или уравнений лучей (32.6) при произвольной зависимости проницаемости ϵ от координат невозможно. Это вынуждает и здесь при решении статистических задач прибегать к приближенным методам и в первую очередь — к *методу возмущений*¹. Пусть $\epsilon(r) = \bar{\epsilon}(r) + \tilde{\epsilon}(r)$, причем флуктуационная компонента $\tilde{\epsilon}$ мала по сравнению с регулярной: $\sigma_{\tilde{\epsilon}} \ll \bar{\epsilon}$. Представим эйконал в виде ряда

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots, \quad (32.11)$$

предположив, что Φ_0 удовлетворяет «невозмущенному» уравнению эйконала

$$(\nabla \Phi_0)^2 = \bar{\epsilon} \quad (32.12)$$

и $|\nabla \Phi_1| \sim \sigma_{\tilde{\epsilon}} \ll |\nabla \Phi_0|$, $|\nabla \Phi_2| \sim \sigma_{\tilde{\epsilon}}^2 \ll |\nabla \Phi_1|$ и т. д. Подставляя ряд (32.11) в уравнение эйконала (32.4) и учитывая (32.12), получаем

для поправок $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ следующие линейные уравнения:

$$\begin{aligned} 2(\nabla\varphi_0\nabla\varphi_1) &= \tilde{\varepsilon}, \\ 2(\nabla\varphi_0\nabla\varphi_2) &= -(\nabla\varphi_1)^2, \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned} \quad (32.13)$$

Решения этих уравнений можно выразить в квадратурах, если известны невозмущенный эйконал φ_0 и невозмущенные лучи $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(s)$ и $\mathbf{t}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0(s)$, удовлетворяющие лучевым уравнениям (32.6) при $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$. Заметим, что в нулевом приближении $\nabla\varphi_0 = \sqrt{\bar{\varepsilon}} \mathbf{t}_0$, где $\mathbf{t}_0 = d\mathbf{r}_0/ds$ — единичный вектор, касательный к невозмущенному лучу $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$. Тогда уравнение (32.13) для поправки первого порядка φ_1 , которой обычно и ограничиваются при расчетах, принимает вид

$$2(\nabla\varphi_0\nabla\varphi_1) = 2\sqrt{\bar{\varepsilon}} (\mathbf{t}_0 \nabla\varphi_1) = 2\sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{d\varphi_1}{ds} = \tilde{\varepsilon}, \quad (32.14)$$

откуда следует, что

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} ds'. \quad (32.15)$$

Интегрирование здесь ведется вдоль *невозмущенного* луча $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$, т. е. под знак интеграла входят функции $\tilde{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}[\mathbf{r}_0(s')]$ и $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}[\mathbf{r}_0(s')]$.

В простейшем случае плоской волны, распространяющейся вдоль оси z в однородной (в среднем) среде с $\varepsilon = \text{const}$, невозмущенное значение эйконала φ равно $\varphi_0 = \sqrt{\bar{\varepsilon}} z$; при этом лучи представляют собой прямые, параллельные оси z :

$$x_0(s) = \text{const}, \quad y_0(s) = \text{const}, \quad z_0(s) = s.$$

В этом случае

$$\varphi_1 = \varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\bar{\varepsilon}}} \int_0^z \tilde{\varepsilon}(x, y, z') dz'. \quad (32.16)$$

Для приземной атмосферы, а также для ионосферы в случае ультракоротких радиоволн можно считать, что $\bar{\varepsilon} \approx 1$, и тогда

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \int_0^z \tilde{\varepsilon}(x, y, z') dz'. \quad (32.17)$$

Аналогичным образом, как мы увидим далее, можно развить теорию возмущений для амплитуды, направления распространения волн, отклонений луча от невозмущенной траектории и т. д.

Применяя метод возмущений для расчета флюктуаций амплитуды и фазы волн, мы используем малость флюктуаций проницаемости:

$$\sigma_\epsilon \ll \bar{\epsilon}, \quad (32.18)$$

и отбрасываем члены второго порядка малости относительно σ_ϵ . Условия, при которых можно пренебречь членами второго порядка малости, сводятся к требованию малости дисперсии уровня амплитуды $\chi = \ln(A/A^0)$:

$$\sigma_\chi^2 = \langle (\chi - \bar{\chi})^2 \rangle = \langle \tilde{\chi}^2 \rangle \ll 1, \quad (32.19)$$

что эквивалентно (при малых σ_χ) условию $\sigma_A \ll \bar{A}$. Заметные флюктуации уровня χ наступают, очевидно, там, где лучи начинают пересекаться и образуют случайные фокусы и каустики [7]. Поэтому условие (32.19) фактически ограничивает интенсивность флюктуаций σ_ϵ^2 и дистанцию L такими значениями, при которых образование каустик еще маловероятно.

Приведенные условия применимости имеют характер *достаточных* условий. Что же касается необходимых условий, то здесь можно высказать только качественное соображение, состоящее в том, что дифракционные эффекты слабее влияют на поведение фазы, чем амплитуды, вследствие чего пределы применимости расчетов фазы могут оказаться более широкими. И действительно, сравнение с методом плавных возмущений показывает (§ 41), что некоторые результаты геометро-оптического приближения, относящиеся к статистическим характеристикам фазы и углов прихода, справедливы (с точностью до коэффициента порядка единицы) за пределами, устанавливаемыми неравенствами (32.10) и (32.19). Неравенства же (32.9) и (32.18) должны выполняться в любом случае.

Ниже мы проведем расчеты различных характеристик случайной волны (флюктуации фазы и уровня волны, статистика углов прихода и боковых смещений лучей, определение среднего поля и его функции когерентности), которые нужны для решения как прямых, так и обратных задач статистической теории распространения волн. Результаты данной главы (как и двух последующих глав) применимы к анализу широкого круга физических явлений (см., например, [3—5]).

§ 33. Флюктуации эйконала

В первом приближении теории возмущений для эйконала имеем $\phi \approx \phi_0 + \Phi_1$. Среднее значение поправки первого порядка Φ_1 , равно нулю, $\Phi_1 = 0$, так что в принятом приближении флюктуационная компонента эйконала $\phi = \phi - \bar{\phi}$ совпадает с Φ_1 ,

а корреляционная функция равна

$$\psi_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \bar{\Phi}(\mathbf{r}_1) \bar{\Phi}(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle \varphi_1(\mathbf{r}_1) \varphi_1(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (33.1)$$

Корреляционная же функция фазы $S = k\varphi$ равна, очевидно,

$$\psi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = k^2 \psi_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (33.2)$$

Начнем с наиболее простого случая. Пусть плоская волна e^{ikz} распространяется в статистически однородной среде со средним значением диэлектрической проницаемости $\epsilon = 1$. Используя (32.17), получаем для функции корреляции эйконала выражение

$$\psi_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4} \int_0^{z_1} dz' \int_0^{z_2} dz'' \psi_e(\rho_1 - \rho_2, z' - z''), \quad (33.3)$$

где $\mathbf{r}_1 = (\rho_1, z_1)$ и $\mathbf{r}_2 = (\rho_2, z_2)$ — радиусы-векторы точек наблюдения, а ψ_e — корреляционная функция флюктуаций \tilde{e} . Переходим в (33.3)

к новым переменным интегрирования $\zeta = z' - z''$ и $\eta = (z' + z'')/2$. В этих переменных

$$\begin{aligned} \psi_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \\ &= \frac{1}{4} \iint_{\Sigma} d\zeta d\eta \psi_e(\rho_1 - \rho_2, \zeta), \end{aligned} \quad (33.4)$$

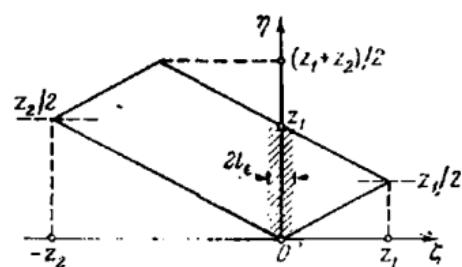


Рис. 38.

вид параллелограмма, показанного на рис. 38.

Существенный вклад в интеграл (33.4) дает только узкая полоса $-l_\eta \leq \zeta \leq l_\eta$ (на рис. 38 она заштрихована), в пределах которой корреляционная функция ψ_e заметно отличается от нуля. Поэтому пределы интегрирования по ζ можно сделать бесконечными, а интеграл по η брать от 0 до z_1 :

$$\psi_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \frac{1}{4} \int_0^{z_1} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \psi_e(\rho_1 - \rho_2, \zeta) = \frac{z_1}{2} \int_0^{\infty} \psi_e(\rho_1 - \rho_2, \zeta) d\zeta.$$

Здесь учтено, что функция ψ_e четна по ζ . При $z_2 < z_1$ мы получили бы аналогичное выражение с z_2 вместо z_1 . Таким образом,

$$\psi_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{z_1}{2} \int_0^{\infty} \psi_e(\rho, \zeta) d\zeta, \quad (33.5)$$

где $z_< = \min \{z_1, z_2\}$ — меньшая из величин z_1 и z_2 , а $\rho = \rho_1 - \rho_2$. В частности, для изотропных флюктуаций

$$\Psi_\Phi(r_1, r_2) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \Phi_e(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta. \quad (33.6)$$

Корреляционную функцию эйконала можно выразить и через пространственный спектр флюктуаций Φ_e . Подставив в (33.5) спектральное разложение

$$\Phi_e(\rho, \zeta) = \int_{-\infty}^\infty \Phi_e(\kappa_\perp, \kappa_z) \exp(i\kappa_\perp \rho + i\kappa_z \zeta) d^2 \kappa_\perp d\kappa_z$$

и выполнив интегрирование по ζ , находим

$$\Psi_\Phi(r_1, r_2) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \Phi_e(\kappa_\perp, 0) \exp(i\kappa_\perp \rho) d^2 \kappa_\perp. \quad (33.7)$$

Если флюктуации Φ_e изотропны, то $\Phi_e(\kappa_\perp, 0) = \Phi_e(\sqrt{\kappa_\perp^2 + 0^2}) = \Phi_e(\kappa_\perp)$ и переход к полярным координатам $\kappa = |\kappa_\perp| = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}(\kappa_y/\kappa_x)$ с последующим интегрированием по угловой переменной α дает

$$\Psi_\Phi(r_1, r_2) = \pi^2 z_< \int_0^\infty \Phi_e(\kappa) J_0(\kappa \rho) \kappa d\kappa, \quad (33.8)$$

где $J_0(\kappa)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Дисперсия эйконала σ_Φ^2 , получающаяся из (33.5) или (33.7) при $\rho = 0$ и $z_1 = z_2 = z$, линейно растет с увеличением дистанции z :

$$\sigma_\Phi^2(z) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \Phi_e(0, \zeta) d\zeta = \frac{\pi^2}{2} \int_{-\infty}^\infty \Phi_e(\kappa_\perp, 0) d^2 \kappa_\perp. \quad (33.9)$$

В случае изотропных флюктуаций

$$\sigma_\Phi^2(z) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \Phi_e(\zeta) d\zeta = \pi^2 z \int_0^\infty \Phi_e(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (33.10)$$

Интеграл от Φ_e в этих выражениях равен произведению дисперсии флюктуаций σ_e^2 на эффективный интегральный радиус корреляции $I_{\text{эфф}} = \int_0^\infty K_e(0, \zeta) d\zeta$. Поэтому (33.9) можно представить также в виде

$$\sigma_\Phi^2(z) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty \sigma_e^2 K_e(0, \zeta) d\zeta = \frac{\pi^2}{2} \sigma_e^2 I_{\text{эфф}}. \quad (33.11)$$

Если, например, функция корреляции ψ_e имеет гауссову форму

$$\psi_e(\rho) = \sigma_e^2 e^{-\rho^2/2l_e^2}, \quad (33.12)$$

то эффективный радиус корреляции $l_{\text{эфф}}$ равен $\sqrt{\pi/2} l_e$ и

$$\sigma_\phi^2(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} z \sigma_e^2 l_e. \quad (33.13)$$

Рассмотрим *продольную* корреляцию эйконала, считая, что точки наблюдения r_1 и r_2 расположены на одном и том же луче ($\rho = \rho_1 - \rho_2 = 0$):

$$\psi_{\parallel}(z_1, z_2) = \frac{z_<}{2} \int_0^\infty \psi_e(0, \zeta) d\zeta = \frac{z_<}{2} \sigma_e^2 l_{\text{эфф}}. \quad (33.14)$$

Из этого выражения видно, что продольная функция корреляции не меняется с ростом большей из величин z_1 и z_2 . Отсюда не следует, однако, что при продольном разнесении точек наблюдения сохраняется также и коэффициент корреляции K_{\parallel} . В самом деле, из (33.14) находим

$$K_{\parallel}(z_1, z_2) = \frac{\psi_{\parallel}(z_1, z_2)}{\sigma_\phi(z_1) \sigma_\phi(z_2)} = \frac{z_<}{\sqrt{z_1 z_2}} = \sqrt{\frac{z_<}{z_>}} = \begin{cases} \sqrt{z_2/z_1} & \text{при } z_2 < z_1, \\ \sqrt{z_1/z_2} & \text{при } z_2 > z_1. \end{cases}$$

График зависимости K_{\parallel} от z_2 при фиксированном значении z_1 показан на рис. 39, из которого ясно, что продольная корреляция Φ (а следовательно, и фазы S) простирается на расстояния порядка пройденного пути, т. е. $l_{\parallel} \sim z$.

Иными линейными масштабами характеризуется *поперечная* корреляция эйконала. Считая, что точки наблюдения разнесены только в поперечном направлении

($z_1 = z_2 = L$), для поперечной функции корреляции имеем

$$\psi_{\perp}(\rho, L) = \frac{L}{2} \int_0^\infty \psi_e(\rho; \zeta) d\zeta, \quad (33.15)$$

а при изотропных флуктуациях \tilde{e}

$$\psi_{\perp}(\rho, L) = \frac{L}{2} \int_0^\infty \psi_e(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta. \quad (33.16)$$

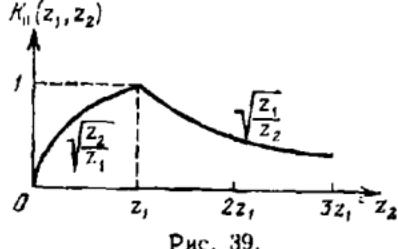


Рис. 39.

Из выражений (33.15) и (33.16) следует, что поперечная корреляция простирается на расстояния порядка l_e — радиуса корреляции диэлектрической проницаемости, т. е. $l_\perp \sim l_e$. Это непосредственно видно и на примере гауссовой корреляционной функции (33.12), для которой

$$\psi_\perp(\rho, L) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} L l_e \sigma_e^2 e^{-\rho^2/2l_e^2} = \sigma_e^2 L e^{-\rho^2/2l_e^2}. \quad (33.17)$$

В дальнейшем нам понадобится также *поперечная структурная функция* эйконала

$$D_\perp(\rho, L) = \langle [\varphi_1(\rho_1, L) - \varphi_1(\rho_2, L)]^2 \rangle,$$

которая выражается через поперечную корреляционную функцию ψ_\perp (если она существует) следующим образом:

$$D_\perp(\rho, L) = 2[\psi_\perp(0, L) - \psi_\perp(\rho, L)] = L \int_0^\infty [\psi_e(0, \xi) - \psi_e(\rho, \xi)] d\xi.$$

Но согласно (4.7)

$$\psi_e(\rho, \xi) = \frac{1}{2}[D_e(\infty) - D_e(\rho, \xi)],$$

и поэтому

$$D_\perp(\rho, L) = \frac{L}{2} \int_0^\infty [D_e(\rho, \xi) - D_e(0, \xi)] d\xi. \quad (33.18)$$

В отличие от (33.15), эта формула пригодна не только для однородных, но и для локально однородных случайных полей \vec{e} , когда корреляционной функции ψ_e не существует. Для локально однородных и изотропных полей вместо (33.18) имеем

$$D_\perp(\rho, L) = \frac{L}{2} \int_0^\infty [D_e(\sqrt{\rho^2 + \xi^2}) - D_e(\xi)] d\xi. \quad (33.19)$$

Приведем также аналогичное (33.8) выражение для D_\perp через пространственный спектр флуктуаций:

$$D_\perp(\rho, L) = 2\pi^2 L \int_0^\infty \Phi_e(x) [1 - J_0(x\rho)] x dx. \quad (33.20)$$

Эти формулы понадобятся в § 36 при анализе флуктуаций эйконала в турбулентной атмосфере.

Мы рассмотрели флуктуации плоской волны в статистически однородной среде. Но, оставаясь в рамках метода геометрической

оптики, нетрудно получить характеристики флуктуаций неплоских (в первую очередь сферических) волн, учесть регулярную рефракцию волн, обусловленную изменением средней проницаемости $\epsilon(\mathbf{r})$, и отказаться от статистической однородности флуктуаций ϵ , ограничившись квазиоднородностью. Эти возможности, собственно говоря, и составляют преимущество МГО по сравнению с другими асимптотическими методами — МПВ и МПУ, в которых указанные обобщения либо приводят к слишком сложным выражениям, либо вообще неосуществимы.

Проведем качественное рассмотрение некоторых обобщений, используя результаты, полученные выше для плоской волны

(разумеется, количественные выводы должны опираться на исходное выражение (32.15)).

Рассмотрим два невозмущенных луча, отвечающие неплоской волне (рис. 40). Обозначим через L_1 и L_2 длины этих лучей, приходящих в точки наблюдения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , через \mathbf{t}_{01} и \mathbf{t}_{02} —

единичные векторы вдоль этих лучей, а через δ — вектор, соединяющий точку на одном луче с ближайшей к ней точкой на другом луче. Для краткости мы будем называть δ «расстоянием» между лучами. В рассмотренном выше случае плоской волны величины L_1 и L_2 были расстояниями от начальной плоскости $z=0$ до точек наблюдения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , векторы \mathbf{t}_{01} и \mathbf{t}_{02} были равны друг другу и направлены по оси z , а расстояние между лучами δ совпадало с поперечным разнесением точек наблюдения $\delta = \rho = \rho_1 - \rho_2$. Поэтому выражение (33.5) в новых обозначениях запишется следующим образом:

$$\Psi_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{L}{2} \int_0^{\infty} \Psi_e(\delta + t_0 \xi) d\xi, \quad (33.21)$$

где $L = \min\{L_1, L_2\}$.

Главная особенность неплоской волны заключается в том, что расстояние между лучами δ является *переменной величиной*, зависящей от пройденного волной пути s . Если поперечное разнесение точек наблюдения мало по сравнению с длинами лучей L_1 и L_2 , то дистанцию s удобно отсчитывать вдоль некоторого среднего луча, приходящего, скажем, в точку $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. При этом единичные векторы \mathbf{t}_{01} и \mathbf{t}_{02} приближенно можно считать равными единичному вектору \mathbf{t}_0 вдоль среднего луча (на рис. 40 средний луч показан пунктиром). Чтобы получить правильный результат при переменном расстоянии между лучами,

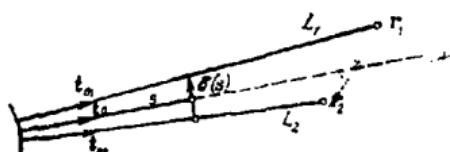


Рис. 40.

нужно заменить в формуле (33.21) $L_<$ на $\int_0^L ds$ и рассматривать \mathbf{t}_0 как единичный вектор вдоль среднего луча. Для функции корреляции неплоской волны в статистически однородной среде с $\epsilon = 1$ мы получим тогда

$$\Psi_\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \int_0^{L_<} ds \int_0^\infty \psi_\epsilon[\delta(s) + \zeta \mathbf{t}_0] d\zeta. \quad (33.22)$$

Совместив точки наблюдения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , т. е. положив $L_1 = L_2 = L$ и $\delta(s) = 0$, находим из (33.22) выражение для дисперсии эйконала:

$$\sigma_\Phi^2(L) = \frac{L}{2} \int_0^\infty \psi_\epsilon(\mathbf{t}_0 \zeta) d\zeta. \quad (33.23)$$

Отсюда видно, что дисперсия эйконала σ_Φ^2 не зависит от вида первичной волны и, в частности, одинакова для плоской, сферической и цилиндрической волн.

Используя (33.22), рассмотрим поперечную функцию корреляции эйконала *расходящейся сферической волны*, полагая, что источник и точки наблюдения находятся внутри случайно-неоднородной среды (флуктуации в слое конечной толщины рассмотрены в задаче 1, а особенности флуктуаций фазы сходящейся сферической волны — в задаче 2). Пусть точки наблюдения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 расположены на одинаковом расстоянии L от источника. Если $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ — поперечное расстояние между точками наблюдения, то текущее расстояние между лучами $\delta(s)$ линейно меняется от нуля при $s=0$ до ρ при $s=L$:

$$\delta(s) = \rho \frac{s}{L}.$$

Следовательно, для сферической волны

$$\Psi_\Phi^{\text{sf}}(\rho, L) = \frac{1}{2} \int_0^L ds \int_0^\infty \psi_\epsilon\left(\rho \frac{s}{L} + \mathbf{t}_0 \zeta\right) d\zeta. \quad (33.24)$$

Эту формулу можно записать иначе, если учесть, что

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \psi_\epsilon\left(\frac{s}{L} \rho + \mathbf{t}_0 \zeta\right) d\zeta = \frac{1}{L} \Psi_\Phi^{\text{pr}}\left(\frac{s}{L} \rho, L\right), \quad (33.25)$$

где $\Psi_{\Phi}^{пл}(\rho, L)$ — поперечная функция корреляции плоской волны (33.15). Отсюда следует полезная формула

$$\Psi_{\Phi}^{сф}(\rho, L) = \frac{1}{L} \int_0^L ds \Psi_{\Phi}^{пл}\left(\rho \frac{s}{L}, L\right) = \int_0^1 d\gamma \Psi_{\Phi}^{пл}(\gamma\rho, L), \quad (33.26)$$

которая связывает функции корреляции эйконала сферической и плоской волн.

В случае изотропных флуктуаций параметров среды, когда $\Psi_{\Phi}^{пл}$ зависит от $\rho = |\rho|$, функция корреляции эйконала сферической волны тоже будет зависеть только от ρ и выражение (33.26) можно записать в форме

$$\Psi_{\Phi}^{сф}(\rho, L) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \Psi_{\Phi}^{пл}(\rho', L) d\rho'. \quad (33.27)$$

Из этой формулы, как и из (33.24), следует, что радиус корреляции эйконала у сферической волны больше, чем у плоской, поскольку при одинаковом конечном расстоянии ρ текущее расстояние $\delta(s)$ между расходящимися лучами меньше, чем между параллельными. Очевидно, для сходящейся сферической волны будет справедливо обратное соотношение (см. задачу 2).

Рассмотрим конкретный пример вычисления $\Psi_{\Phi}^{сф}$. В случае гауссовой корреляционной функции флуктуаций ε , когда $\Psi_{\Phi}^{пл}$ дается выражением (33.17), для $\Psi_{\Phi}^{сф}$ получаем

$$\Psi_{\Phi}^{сф}(\rho, L) = \frac{\pi}{4} L \sigma_{\varepsilon}^2 \frac{l_e^2}{\rho} \Phi\left(\frac{\rho}{l_e}\right) = \sigma_{\Phi}^2(L) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{l_e}{\rho} \Phi\left(\frac{\rho}{l_e}\right),$$

где

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-t'^2/2} dt$$

— интеграл ошибок.

На рис. 41 коэффициенты корреляции эйконала показаны кривой 1 для плоской волны: $K_{\Phi}^{пл}(\rho) = \exp(-\rho^2/2l_e^2)$ — и кривой 2 для сферической волны: $K_{\Phi}^{сф}(\rho) = \sqrt{\pi/2} (l_e/\rho) \Phi(\rho/l_e)$. Из рисунка видно, что уровень $K_{\Phi} = 1/2$ достигается при $\rho = 1,18l_e$ в случае плоской волны и при $\rho = 2,40l_e$ в случае сферической, т. е. поперечный радиус корреляции эйконала сферической волны примерно в два раза больше, чем у плоской.

Обобщение (33.22) на случай среды с постоянной средней диэлектрической проницаемостью ε , отличной от единицы, осуществляется просто изменением масштабов в $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ раз, т. е.

заменой $ds d\xi$ на $ds d\xi/\varepsilon$:

$$\Psi_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \int_0^{L_c} \frac{ds}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \psi_{\varepsilon}[\delta(s) + t_0 \xi] d\xi. \quad (33.28)$$

Эта формула, однако, остается справедливой и тогда, когда ε медленно (в масштабе радиуса корреляции l_{ε}) меняется вдоль среднего луча: $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}[\mathbf{r}_0(s)]$. Сам средний луч под действием регулярной рефракции становится при этом криволинейным, так

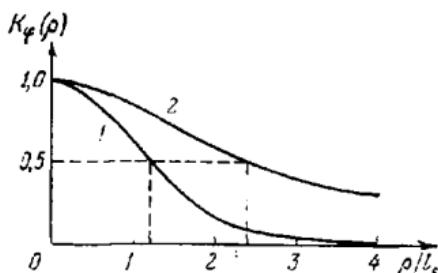


Рис. 41.

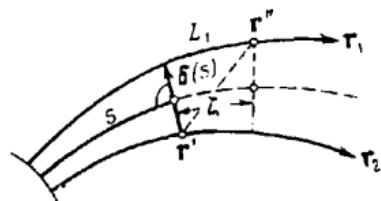


Рис. 42.

что направление касательного к нему единичного вектора t_0 зависит теперь от s : $t_0 = t_0(s)$.

Наконец, можно отказаться и от предположения о статистической однородности флуктуаций среды и рассмотреть более общую модель статистически *квазиоднородных* флуктуаций. Функция корреляции квазиоднородного поля ε имеет вид (§ 5)

$$\Psi_{\varepsilon}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \Psi_{\varepsilon}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'', \mathbf{R}) = \sigma_{\varepsilon}^2(\mathbf{R}) K_{\varepsilon}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'', \mathbf{R}), \quad (33.29)$$

причем здесь дисперсия $\sigma_{\varepsilon}^2(\mathbf{R})$ и коэффициент корреляции $K_{\varepsilon}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'', \mathbf{R})$ медленно (в масштабе l_{ε}) зависят от координаты центра тяжести $\mathbf{R} = (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2$. При подстановке (33.29) в (33.28) значения \mathbf{R} следует брать на невозмущенном среднем луче $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0(s)$, а разность $\mathbf{r}' - \mathbf{r}''$ целесообразно представить в виде суммы $\delta(s) + t_0(s) \xi$, где $\delta(s)$ — поперечное, а $t_0(s) \xi$ — продольное расстояние между точками \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' , лежащими на соседних лучах (рис. 42). В итоге для функции корреляции эйконала имеем

$$\Psi_{\Phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \int_0^{L_c} \frac{ds}{\varepsilon[\mathbf{r}_0(s)]} \int_0^{\infty} \psi_{\varepsilon}[\delta(s) + t_0(s) \xi; \mathbf{r}_0(s)] d\xi. \quad (33.30)$$

Под L_c здесь подразумевается меньшая из длин криволинейных лучей L_1 и L_2 . Дисперсия получается из (33.30) при $L_1 = L_2 = L$

и $\delta = 0$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Phi}^2(L) &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{ds}{\bar{\epsilon}[r_0(s)]} \int_0^\infty \Psi_\epsilon[\zeta t_0; r_0(s)] d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{ds \sigma_e^2[r_0(s)]}{\bar{\epsilon}[r_0(s)]} \int_0^\infty K_\epsilon[\zeta t_0; r_0(s)] d\zeta. \quad (33.31)\end{aligned}$$

Внутренний интеграл в (33.31) представляет собой эффективный радиус корреляции:

$$l_{\text{эфф}}(s) = \int_0^\infty K_\epsilon[\zeta t_0(s); r_0(s)] d\zeta.$$

В общем случае анизотропных флуктуаций $l_{\text{эфф}}$ зависит не только от положения точки $r_0(s)$ на луче, но и от направления луча $t_0(s)$ в этой точке. Записав дисперсию эйконала в виде

$$\sigma_{\Phi}^2(L) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\sigma_e^2[r_0(s)] l_{\text{эфф}}(s)}{\bar{\epsilon}[r_0(s)]} ds, \quad (33.32)$$

заключаем, что наибольший вклад в σ_{Φ}^2 дают те участки луча, на которых величина $\sigma_e^2 l_{\text{эфф}} / \bar{\epsilon}$ максимальна. Отсюда, в частности, следует, что флуктуации эйконала усиливаются по мере уменьшения средней диэлектрической проницаемости $\bar{\epsilon}$. Такое усиление флуктуаций происходит, например, в ионосфере в области отражения радиоволн, излученных с Земли (см. задачу 4).

Рассмотрим некоторые особенности поведения поперечной (относительно невозмущенного луча) функции корреляции эйконала, считая, что точки наблюдения r_1 и r_2 лежат на одном и том же невозмущенном фазовом фронте $\phi_0 = \text{const}$:

$$\Psi_\Phi(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{ds}{\bar{\epsilon}[r_0(s)]} \int_0^\infty \Psi_\epsilon[\delta(s) + \zeta t_0; r_0(s)] d\zeta. \quad (33.33)$$

Очевидно, основной вклад в интеграл (33.33) дают те участки траектории, на которых расстояние между лучами минимально, т. е. участки наибольшего сближения лучей (с этим мы уже сталкивались при сопоставлении флуктуаций в сферической и плоской волнах в среде с $\bar{\epsilon} = \text{const}$). Влияние расстояния между лучами на функцию корреляции эйконала можно проиллюстрировать на примере наклонного падения плоской волны на отражающий слой с $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(z)$. На рис. 43, а и 43, б показаны две

пары лучей при разнесении точек наблюдения r_1 и r_2 на одинаковое расстояние ρ , по один раз — перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 43, а), а другой раз — в плоскости чертежа (рис. 43, б). В первом случае оба луча параллельны друг другу и расстояние δ между ними всюду равно расстоянию ρ между точками наблюдения. Во втором же случае, когда лучи лежат в одной плоскости, расстояние δ всюду меньше ρ и даже обращается в нуль в точке пересечения лучей. Ясно, что величина радиуса корреляции эйконала больше именно во втором случае, когда лучи сближаются. Различие радиусов корреляции в случаях а и б означает, что регулярная рефракция приводит к анизотропии (анизомерии) флюктуаций эйконала в плоскости, поперечной к лучу.

В рассмотренном примере лучи, отраженные от плоского слоя, образуют *каустику*, которая касается лучей в точках их поворота. Строго говоря, применение метода геометрической оптики в этом случае незаконно, поскольку на каустике, как известно, амплитуда волн, вычисленная в приближении геометрической оптики, равна бесконечности в силу обращения в нуль сечения лучевой трубки $d\Sigma$ в формуле (32.8). Этот недостаток метода геометрической оптики можно, однако, исправить, используя для описания поля вблизи каустики более совершенные асимптотические методы, которые обеспечивают конечность поля на самой каустике, а вдали от нее дают сумму падающей и отраженной волн вида $Ae^{ik\Phi}$ [8]. В результате вдали от каустики корреляционная функция эйконала отраженной волны определяется тем же выражением (33.33), что и для падающей волны. В непосредственной же близости к каустике приближение геометрической оптики, разумеется, непригодно.

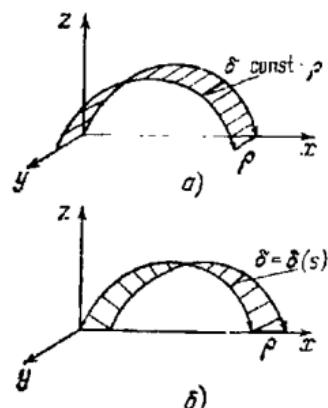


Рис. 43.

§ 34. Флуктуации углов прихода, боковых смещений луча и группового запаздывания волны

1. Флуктуации углов прихода. Углы прихода волны определяются направлением нормали к фазовому фронту, которое в изотропной среде совпадает с направлением единичного вектора $t = \nabla\Phi/\sqrt{\epsilon}$, касательного к лучу. Найдем отклонение этого вектора от невозмущенного положения $t_0 = \nabla\Phi_0/\sqrt{\epsilon}$.

С точностью до первого приближения включительно имеем

$$t = \frac{\nabla \Phi}{V^{\frac{1}{e}}} = \frac{\nabla (\Phi_0 + \Phi_1 + \dots)}{V^{\frac{1}{e}} + \tilde{\epsilon}} = \frac{\nabla \Phi_0}{V^{\frac{1}{e}}} + \frac{1}{V^{\frac{1}{e}}} \left[\nabla \Phi_1 - \frac{\tilde{\epsilon} \nabla \Phi_0}{2\tilde{\epsilon}} + \dots \right].$$

Но согласно (32.14) $\tilde{\epsilon} = 2\sqrt{\tilde{\epsilon}} (t_0 \nabla \Phi_1)$, так что

$$t \approx t_0 + \frac{1}{V^{\frac{1}{e}}} [\nabla \Phi_1 - t_0 (t_0 \nabla \Phi_1)],$$

и поправка первого порядка к направлению невозмущенного луча t_0 оказывается равной

$$t_1 = t - t_0 = \frac{1}{V^{\frac{1}{e}}} [\nabla \Phi_1 - t_0 (t_0 \nabla \Phi_1)] = \frac{\nabla_{\perp} \Phi_1}{V^{\frac{1}{e}}}, \quad (34.1)$$

где ∇_{\perp} — оператор поперечного (по отношению к невозмущенному лучу) дифференцирования.

Согласно (34.1) вектор t_1 перпендикулярен к t_0 и лежит в плоскости, касательной к невозмущенному фазовому фронту $\Phi_0 = \text{const}$.

Пусть α и β — два единичных ортогональных вектора в этой плоскости, составляющие вместе с вектором t_0 , касательным к невозмущенному лучу, ортогональный репер (α, β, t_0) . Вектор t_1 можно разложить на две составляющие — по направлениям α и β :

$$t_1 = t_{1\alpha}\alpha + t_{1\beta}\beta.$$

С точностью до членов второго порядка малости углы прихода луча θ_α и θ_β , отсчитываемые от направления невозмущенного луча t_0

(рис. 44), равны соответственно $t_{1\alpha}$ и $t_{1\beta}$:

$$\theta_\alpha \approx t_{1\alpha} = \frac{1}{V^{\frac{1}{e}}} (\alpha \nabla_{\perp} \Phi_1) = \frac{1}{V^{\frac{1}{e}}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho_\alpha}, \quad \theta_\beta \approx \frac{1}{V^{\frac{1}{e}}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho_\beta}.$$

Отсюда следует, что средние значения углов прихода в обеих взаимно ортогональных плоскостях (t_0, α) и (t_0, β) равны нулю, $\bar{\theta}_\alpha = \bar{\theta}_\beta = 0$, поскольку $\Phi_1 = 0$, а элементы корреляционной матрицы этих углов даются выражением

$$\Psi_{\alpha\beta}^\theta(\rho_1, \rho_2) \equiv \langle \theta_\alpha(\rho_1) \theta_\beta(\rho_2) \rangle = \frac{1}{e} \frac{\partial^2 \Psi_{\perp}(\rho_1, \rho_2)}{\partial \rho_{1\alpha} \partial \rho_{1\beta}}. \quad (34.2)$$

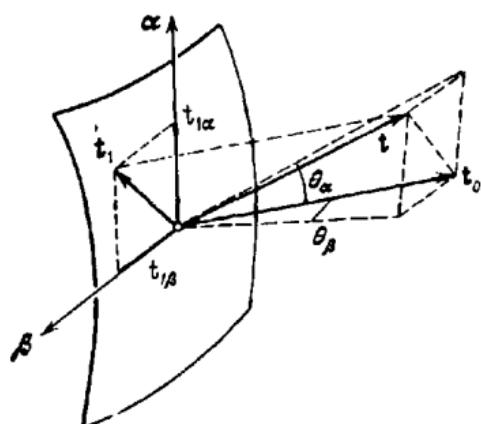


Рис. 44.

Эту формулу можно немножко упростить, если учесть, что флуктуации эйконала в плоскости, касательной к невозмущенному фазовому фронту, квазиоднородны: поперечная функция корреляции эйконала $\Psi_{\perp}(\rho_1, \rho_2) = \psi_{\perp}(\rho, \rho_{\perp})$ «быстро» (с масштабом $\sim l_e$) зависит от разностного аргумента $\rho - \rho_1 - \rho_2$ и «медленно» (с масштабом $l_e \gg l_e$) — от координаты «центра тяжести» $\rho_{\perp} = (\rho_1 + \rho_2)/2$. Поэтому при переходе в формуле (34.2) от переменных ρ_1 и ρ_2 к переменным ρ и ρ_{\perp} мы можем дифференцировать только по разностной переменной $\rho - \rho_1 - \rho_2$. Опуская для краткости второй аргумент ρ_{\perp} у $\Psi_{\alpha\beta}^0$ и ψ_{\perp} , получаем

$$\Psi_{\alpha\beta}^0(\rho) = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2 \psi_{\perp}(\rho)}{\partial \rho_{\alpha} \partial \rho_{\beta}} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{\partial^2 D_{\perp}(0)}{\partial \rho_{\alpha} \partial \rho_{\beta}}. \quad (34.3)$$

Второй вариант этого соотношения сохраняет силу не только для квазиоднородных, но и для локально однородных флуктуаций ϵ , когда корреляционной функции ψ_{ρ} не существует.

Выберем орты α и β так, чтобы при малых ρ структурная функция D_{\perp} имела вид $D_{\perp} \approx c_{\alpha} \rho_{\alpha}^2 + c_{\beta} \rho_{\beta}^2$. Тогда флуктуации углов прихода 0_{α} и 0_{β} , взятые в одной и той же точке наблюдения, т. е. при $\rho = 0$, оказываются некоррелированными:

$$\langle \theta_{\alpha} \theta_{\beta} \rangle = \Psi_{\alpha\beta}^0(0) = \frac{1}{2\epsilon} \frac{\partial^2 D_{\perp}(0)}{\partial \rho_{\alpha} \partial \rho_{\beta}} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (34.4)$$

Дисперсии же этих углов даются выражениями

$$\langle \theta_{\alpha}^2 \rangle = \Psi_{\alpha\alpha}^0(0) = \frac{1}{2\epsilon} \frac{\partial^2 D_{\perp}(0)}{\partial \rho_{\alpha}^2}, \quad \langle \theta_{\beta}^2 \rangle = \frac{1}{2\epsilon} \frac{\partial^2 D_{\perp}(0)}{\partial \rho_{\beta}^2} \quad (34.5)$$

и в общем случае анизотропных флуктуаций эйконала различны. В частности, эти дисперсии неодинаковы в случае отражения плоской волны от плоского слоя, в котором $\epsilon = \epsilon(z)$ (рис. 43): даже при изотропных флуктуациях ϵ флуктуации угла прихода в плоскости чертежа меньше, чем в перпендикулярной плоскости.

При распространении плоской и сферических волн в статистически однородной и изотропной среде флуктуации эйконала в плоскости, перпендикулярной к лучу, изотропны: $D_{\perp}(\rho) = D_{\perp}(\rho)$. В этом случае, в соответствии с общими свойствами изотропных векторных случайных полей (см. задачу 4 к гл. I), корреляционный тензор $\Psi_{\alpha\beta}^0$ выражается через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$ и симметричный тензор $\rho_{\alpha}\rho_{\beta}/\rho^2$ (считаем, что $\epsilon = 1$):

$$\Psi_{\alpha\beta}^0 = \Psi_{\perp}^0 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\rho_{\alpha}\rho_{\beta}}{\rho^2} \right) + \Psi_{||}^0 \frac{\rho_{\alpha}\rho_{\beta}}{\rho^2}. \quad (34.6)$$

Здесь Ψ_{\perp}^0 — поперечная, а $\Psi_{||}^0$ — продольная функции корреляции изотропного двумерного векторного поля $\Theta = \{\theta_{\alpha}, \theta_{\beta}\} = \{t_{1\alpha}, t_{1\beta}\}$

(термины «поперечная» и «продольная» функции корреляции относятся здесь к компонентам корреляционного тензора, а не к корреляции вдоль и поперек луча). Из сравнения (34.6) с (34.3) находим

$$\Psi_{\parallel}^0(\rho) = \frac{1}{2\varepsilon} D_{\perp}''(\rho), \quad \Psi_{\perp}^0 = \frac{1}{2\rho\varepsilon} D_{\perp}'(\rho). \quad (34.7)$$

Эти функции связаны соотношением

$$\Psi_{\parallel}^0(\rho) = [\rho \Psi_{\perp}^0(\rho)]',$$

которое является очевидным следствием потенциальности вектора $\Theta \approx t_1 = \nabla \varphi_1$. Дисперсии углов θ_{α} и θ_{β} для изотропных флуктуаций ε одинаковы:

$$\langle \theta_{\alpha}^2 \rangle = \langle \theta_{\beta}^2 \rangle = \frac{1}{2\varepsilon} D_{\perp}''(0). \quad (34.8)$$

Для плоской волны, когда D_{\perp} дается выражением (33.19), для продольной и поперечной функций корреляции имеем

$$\Psi_{\parallel}^0(\rho) = \frac{L}{4\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} D_{\varepsilon}(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta = -\frac{L}{2\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Psi_{\varepsilon}(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta, \quad (34.9)$$

$$\Psi_{\perp}^0(\rho) = \frac{L}{4\rho\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} D_{\varepsilon}(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta = -\frac{L}{2\rho\varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi_{\varepsilon}(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta.$$

В частности, если функция корреляции имеет гауссову форму (33.12), то

$$\Psi_{\perp}^0(\rho) = \frac{1}{\pi l_{\varepsilon}^2} \Psi_{\perp}(\rho), \quad \Psi_{\parallel}^0(\rho) = \frac{1}{\pi l_{\varepsilon}^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{l_{\varepsilon}^2}\right) \Psi_{\perp}(\rho),$$

$$\langle \theta_{\alpha}^2 \rangle = \langle \theta_{\beta}^2 \rangle = \frac{\sigma_{\Psi}^2}{\pi l_{\varepsilon}^2},$$

где $\Psi_{\perp}(\rho) = \sigma_{\Psi}^2 \exp(-\rho^2/2l_{\varepsilon}^2)$, а σ_{Ψ}^2 дается выражением (33.13).

Аналогичным путем можно вывести формулы и для сферической волны. Укажем на полезное соотношение между дисперсиями углов прихода плоской и сферической волн¹⁾:

$$\langle \theta_{\alpha}^2 \rangle_{\text{сф}} = 1/s \langle \theta_{\alpha}^2 \rangle_{\text{пл}}, \quad (34.10)$$

¹⁾ Считается, как и при выводе (33.26), что источник сферической волны расположен *внутри* случайно-несоднородной среды и обе волны (плоская и сферическая) проходят в среде одинаковый путь L .

которое легко вывести, используя (33.26):

$$[\psi_{\perp}(0)]^{\text{eff}} = \frac{\partial^2}{\partial p^2} \int_0^L dy \psi_{\perp}^{\text{pl}}(y) |_{p=0} = [\psi_{\perp}(0)]^{\text{pl}} \int_0^L y^2 dy = \frac{1}{3} [\psi_{\perp}(0)]^{\text{pl}}.$$

Таким образом, дисперсия углов прихода сферической волны в три раза меньше, чем у плоской волны, прошедшей тот же путь в среде. Качественно это можно объяснить различием в величине поперечного радиуса корреляции (напомним, что у сферической волны l_{\perp} больше, так как лучи идут в среднем ближе друг к другу, чем в плоской волне).

На опыте обычно фиксируются не сами углы θ_{α} или θ_{β} , а некоторые другие величины, при помощи которых затем и определяются θ_{α} и θ_{β} (в большинстве случаев — приближенно). Так, на интерферометре, ориентированном вдоль оси α и имеющем базу r_{α} , измеряется разность фаз $\Delta S(r_{\alpha}) = k \Delta \phi(r_{\alpha})$. Если отнести эту разность фаз к электрической длине базы $k r_{\alpha}$, получится величина

$$\Theta_{\alpha} = \frac{\Delta \phi(r_{\alpha})}{r_{\alpha}},$$

которая при малых r_{α} , а именно при $r_{\alpha} \ll l_{\perp}$, совпадает с θ_{α} . В соответствии с этим дисперсия

$$\langle \Theta_{\alpha}^2 \rangle = \langle [\Delta \phi(r_{\alpha})]^2 \rangle / r_{\alpha}^2 = D_{\perp}(r_{\alpha}) / r_{\alpha}^2$$

при малых r может служить мерой $\langle \theta_{\alpha}^2 \rangle$, поскольку при $r_{\alpha} \ll l_{\perp}$

$$\langle \theta_{\alpha}^2 \rangle \approx \frac{1}{2} D_{\perp}(0),$$

что совпадает с (34.8)

2. Статистика боковых смещений луча. Луч в среде, содержащей случайные неоднородности, представляет собой извилистую пространственную кривую. Вычислим среднеквадратичное смещение луча от его невозмущенного положения, ограничившись для простоты случаем *плоской* волны, распространяющейся в статистически однородной среде.

Запишем для траектории луча $\mathbf{r}(s)$ ряд теории возмущений по \bar{e} : $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0(s) + \mathbf{r}_1(s) + \mathbf{r}_2(s) + \dots$. Для поправки первого порядка $\mathbf{q} \equiv \mathbf{r}_1$ из уравнений лучей (32.6) имеем (при $\bar{e} = 1$)

$$\mathbf{q} = \int_0^L \mathbf{t}_1 ds = \int_0^L \nabla_{\perp} \Phi_1 dz', \quad (34.11)$$

откуда видно, что в первом порядке теории возмущений луч смещается только в поперечном по отношению к невозмущенному лучу направлении: если волна распространяется вдоль оси z , то вектор \mathbf{q} содержит только x - и y -компоненты.

Подставив в (34.11) значение Φ_1 из (32.17) и интегрируя по частям, находим

$$\mathbf{q}(\rho, L) = \frac{1}{2} \int_0^L dz' \int_0^{z'} dz'' \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}(\rho, z'') = \frac{1}{2} \int_0^L (L - z') \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}(\rho, z') dz'. \quad (34.12)$$

Составим корреляционную матрицу боковых смещений луча ($\rho = \rho_1 - \rho_2$):

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}^q(\rho, L) &= \langle q_{\alpha}(\rho_1, z) q_{\beta}(\rho_2, z) \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^{z'} (L - z') (L - z'') \frac{\partial^2}{\partial \rho_{1\alpha} \partial \rho_{2\beta}} \Psi_e(\rho_1 - \rho_2, z' - z'') dz' dz'', \end{aligned} \quad (34.13)$$

где q_{α} и q_{β} — компоненты вектора \mathbf{q} по двум взаимно перпендикулярным направлениям α и β в плоскости $z = \text{const}$. Выражение (34.13) можно упростить, перейдя в нем к переменным интегрирования $\zeta = z' - z''$ и $\eta = (z' + z'')/2$. Повторив рассуждения, использованные при выводе (33.5), получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}^q(\rho, L) &= -\frac{1}{4} \int_0^L \int_0^{\zeta} d\zeta d\eta \left(L - \eta - \frac{\zeta}{2} \right) \left(L - \eta + \frac{\zeta}{2} \right) \frac{\partial^2 \Psi_e(\rho, \zeta)}{\partial \rho_{\alpha} \partial \rho_{\beta}} \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \int_0^L d\eta (L - \eta)^2 \int_0^{\zeta} \frac{\partial^2 \Psi_e(\rho, \zeta)}{\partial \rho_{\alpha} \partial \rho_{\beta}} d\zeta = -\frac{L^3}{6} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \Psi_e(\rho, \zeta)}{\partial \rho_{\alpha} \partial \rho_{\beta}} d\zeta. \end{aligned} \quad (34.14)$$

Если флюктуации $\tilde{\epsilon}$ изотропны, то изотропным будет и двумерное векторное поле \mathbf{q} . Элементы корреляционной матрицы (34.14) в этом случае принимают вид, аналогичный (34.6):

$$\Psi_{\alpha\beta}^q(\rho, L) = \Psi_{\perp}^q(\rho, L) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\rho_{\alpha}\rho_{\beta}}{\rho^2} \right) + \Psi_{\parallel}^q(\rho, L) \frac{\rho_{\alpha}\rho_{\beta}}{\rho^2},$$

где продольная и поперечная функции корреляции боковых смещений луча даются выражениями

$$\begin{aligned} \Psi_{\parallel}^q(\rho, L) &= -\frac{L^3}{6} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \Psi_e(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})}{\partial \rho^2} d\zeta, \\ \Psi_{\perp}^q(\rho, L) &= -\frac{L^3}{6\rho} \int_0^{\infty} \frac{\partial \Psi_e(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})}{\partial \rho} d\zeta. \end{aligned} \quad (34.15)$$

Можно убедиться, что при изотропных флюктуациях $\tilde{\epsilon}$ взаимно ортогональные компоненты боковых смещений $q_{\alpha}(\rho_1)$ и $q_{\beta}(\rho_2)$ при $\rho_1 = \rho_2$ не коррелированы между собой

$$\langle q_{\alpha} q_{\beta} \rangle = \Psi_{\alpha\beta}^q(0) = 0,$$

а средние квадраты q_α и q_β равны друг другу:

$$\langle q_\alpha^2 \rangle_{\text{пл}} = \langle q_\beta^2 \rangle_{\text{пл}} = \psi_{\alpha\alpha}^g(0) = -\frac{L^3}{6} \int_0^\infty \frac{\psi_e'(\zeta)}{\zeta} d\zeta. \quad (34.16)$$

В частности, в случае изотропной гауссовой корреляционной функции флюктуаций проницаемости (33.12) имеем

$$\langle q_\alpha^2 \rangle_{\text{пл}} = \langle q_\beta^2 \rangle_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{L^3 \sigma_e^2}{12 L_e}. \quad (34.17)$$

Если волна неплоская, но среда по-прежнему статистически однородна и $\bar{e}=1$, корреляционная матрица боковых смещений (34.13) приводится к виду

$$\Psi_{\alpha\beta}^g(\rho, L) = -\frac{1}{2} \int_0^L (L-s)^2 ds \int_0^\infty \frac{\partial^2 \psi_e[\delta(s) + \zeta t_0]}{\partial \rho_\alpha \partial \rho_\beta} d\zeta, \quad (34.18)$$

где, как и ранее, $\delta(s)$ — текущее расстояние между лучами, зависящее от поперечного разнесения точек наблюдения ρ . В частном случае *сферической волны* $\delta = \rho s/L$, так что $\frac{\partial}{\partial \rho_\alpha} = \frac{s}{L} \frac{\partial}{\partial \delta_\alpha}$ и можно написать

$$\Psi_{\alpha\beta}^g(\rho, L) = -\frac{1}{2} \int_0^L (L-s)^2 \frac{s^2}{L^2} ds \int_0^\infty \frac{\partial^2 \psi_e(\delta + \zeta t_0)}{\partial \delta_\alpha \partial \delta_\beta} d\zeta. \quad (34.19)$$

Для среднего квадрата смещения q_α получаем отсюда

$$\langle q_\alpha^2 \rangle_{\text{ср}} = \Psi_{\alpha\alpha}^g(0) = -\frac{1}{2} \int_0^L (L-s)^2 \frac{s^2}{L^2} ds \int_0^\infty \left. \frac{\partial^2 \psi_e(\delta + \zeta t_0)}{\partial \delta_\alpha^2} \right|_{\delta=0} d\zeta. \quad (34.20)$$

Но интегрирование по s дает $L^3/30$, и поэтому

$$\langle q_\alpha^2 \rangle_{\text{ср}} = -\frac{L^3}{60} \int_0^\infty \left. \frac{\partial^2 \psi_e(\delta + \zeta t_0)}{\partial \delta_\alpha^2} \right|_{\delta=0} d\zeta = \frac{1}{10} \langle q_\alpha^2 \rangle_{\text{пл}} \quad (34.21)$$

— средний квадрат бокового смещения луча в сферической волне в 10 раз меньше, чем в плоской.

Расчеты флюктуаций углов прихода и боковых смещений лучей можно было бы провести, опираясь на иной подход, развитый в [4] и заключающийся в том, что случайные отклонения и повороты луча можно при определенных условиях описать как марковский процесс, возникающий под действием случайных «толчков», обусловленных градиентами диэлектрической прони-

цаемости (ч. I, §§ 30 и 36). При таком подходе задача сводится к решению уравнения Эйнштейна—Фоккера для совместной плотности вероятностей поперечных смещений и направлений луча. В случае плоской волны, распространяющейся в статистически однородной и изотропной среде, решением уравнения Эйнштейна—Фоккера является нормальный закон распределения, причем вторые моменты, полностью характеризующие нормальное распределение, совпадают с вычисленными выше. Поэтому рассмотрения статистики лучей при помощи уравнения Эйнштейна—Фоккера мы здесь не проводим. Отметим только, что границы применимости такого подхода были установлены в [9, 10], а распространение метода на среды с регулярной рефракцией было дано в работах [11—13].

3. Флуктуации группового пути. Групповой путь \mathcal{L} в однородной и изотропной среде определяется выражением

$$\mathcal{L} = c \int_0^L \frac{ds}{u_{\text{гр}}} = \int_0^L \frac{\partial(\omega V \bar{\epsilon})}{\partial \omega} ds, \quad (34.22)$$

где

$$u_{\text{гр}} = c / \frac{\partial(\omega V \bar{\epsilon})}{\partial \omega}$$

— групповая скорость волны. Очевидно, отношение \mathcal{L}/c представляет собой время распространения сигнала. В случайно-преломляющей среде групповой путь \mathcal{L} , а следовательно, и время распространения сигнала испытывают флуктуации. Дисперсию флуктуаций группового пути можно вычислить методом возмущений. Ограничимся случаем, когда $\bar{\epsilon} = \text{const}$, т. е. регулярная рефракция отсутствует. Разлагая \mathcal{L} в ряд по малым флуктуациям $\bar{\epsilon}$, получаем для поправки первого порядка \mathcal{L}_1 к невозмущенному значению группового пути $\mathcal{L}_0 = \frac{\partial(\omega V \bar{\epsilon})}{\partial \omega} L$ выражение

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\omega \frac{\bar{\epsilon}}{V \bar{\epsilon}} \right) ds. \quad (34.23)$$

Интегрирование ведется, конечно, вдоль невозмущенного луча.

В недиспергирующей среде как $\bar{\epsilon}$, так и $\bar{\epsilon}$ не зависят от частоты. В этом случае

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\bar{\epsilon}}{V \bar{\epsilon}} ds = \Phi_1, \quad (34.24)$$

т. е. возмущение группового пути \mathcal{L}_1 совпадает с возмущением эйконала Φ_1 . Это является следствием равенства групповой и

фазовой скоростей в недиспергирующей среде, так что все сказанное в § 33 относительно флюктуаций эйконала без каких-либо изменений переносится и на флюктуации группового пути. В частности, для дисперсии группового пути, в соответствии с (33.12), имеем

$$\sigma_{\omega}^2 - \sigma_{\phi}^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^L ds \int_0^\infty \psi_\varepsilon [t_0 \zeta; r_0(s)] d\zeta. \quad (34.25)$$

Важным частным случаем диспергирующей среды является изотропная холодная плазма, для которой $\bar{\epsilon}$ и \bar{e} даются выражениями (30.29). Подстановка (30.29) в (34.23) приводит к выражению (при $\bar{\epsilon} = \text{const}$)

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{e}^3} ds, \quad (34.26)$$

в котором под знаком интеграла входит $1/\bar{e}^{3/2}$ вместо $1/\bar{e}^{1/2}$ в выражении (32.15) для эйконала φ_1 . Учитывая это, можно записать выражение для дисперсии группового пути в плазме, аналогичное (33.31), но с заменой $1/\bar{e}$ на $1/(\bar{e})^3$:

$$\sigma_{\omega}^2 = \frac{1}{2(\bar{e})^3} \int_0^L ds \int_0^\infty \psi_\varepsilon [\zeta t_0, r_0(s)] d\zeta. \quad (34.27)$$

Ясно, что дисперсии σ_{ω}^2 и σ_{ϕ}^2 могут совпасть лишь при $\bar{\epsilon} \approx 1$, т. е. в случае достаточно высокочастотных волн, для которых $\omega^2 \gg \omega_e^2 = 4\pi e^2 \bar{N}_e/m$.

§ 35. Флюктуации уровня

Как мы уже указывали, *уровнем амплитуды* или просто *уровнем* называют величину

$$\chi = \ln \frac{A^0}{A},$$

где A^0 — некоторая постоянная величина той же размерности, что и A , например амплитуда невозмущенной волны. Найдем функцию корреляции уровня χ .

Уровень χ удовлетворяет уравнению

$$2\nabla\chi \cdot \nabla\Phi + \Delta\Phi = 0, \quad (35.1)$$

которое непосредственно вытекает из уравнения переноса (32.5). Представим χ в виде ряда по $\bar{\epsilon}$:

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \dots, \quad (35.2)$$

где χ_0 — невозмущенное значение уровня, т. е. решение уравнения

$$2\nabla\chi_0\nabla\Phi_0 + \Delta\Phi_0 = 0. \quad (35.3)$$

Подставляя ряд (35.2) и аналогичное разложение (32.11) для эйконала Φ в уравнение (35.1) и учитывая (35.3), для поправки χ_1 получаем

$$2\nabla\Phi_0\nabla\chi_1 + \Delta\Phi_1 + 2\nabla\chi_0\nabla\Phi_1 = 0. \quad (35.4)$$

В этом уравнении можно приближенно заменить $\nabla\Phi_1$ и $\Delta\Phi_1$ на $\nabla_{\perp}\Phi_1$ и $\Delta_{\perp}\Phi_1$, где $\nabla_{\perp} = \nabla - t_0(t_0\nabla)$ и $\Delta_{\perp} = \nabla_{\perp}^2$ — операторы поперечного дифференцирования. Действительно, по порядку величины

$$|\nabla_{\perp}\Phi_1| \sim \sqrt{|\Delta_{\perp}\Phi_1|} \sim \sqrt{\frac{\psi_{\Phi}}{l_e^2}} \sim \sqrt{\frac{\sigma_e^2 l_e}{l_e^2} L} \sim \sigma_e \sqrt{\frac{L}{l_e}},$$

в то время как $|\nabla_{\parallel}\Phi_1| = \left| \frac{d\Phi_1}{ds} \right| = \frac{1}{2} |\tilde{e}| \sim \sigma_e$. Поскольку нас интересуют дистанции L , большие по сравнению с радиусом корреляции неоднородностей l_e , можно считать, что $|\nabla_{\parallel}\Phi_1| \ll |\nabla_{\perp}\Phi_1|$. Подобным же образом можно показать, что $|\Delta_{\parallel}\Phi_1| \ll |\Delta_{\perp}\Phi_1|$. В результате уравнение (35.4) принимает вид

$$2\nabla\Phi_0\nabla\chi_1 + \Delta_{\perp}\Phi_1 + 2\nabla_{\perp}\chi_0\nabla_{\perp}\Phi_1 = 0. \quad (35.5)$$

У плоской и ненаправленной сферической волны $\nabla_{\parallel}\chi_0 = 0$, поскольку на фазовом фронте $\Phi_0 = \text{const}$ амплитуда таких волн постоянна и последнее слагаемое в (35.5) исчезает. Этим слагаемым можно пренебречь и во многих других случаях, например в случае волнового пучка или направленной сферической волны с шириной луча a , превышающей радиус корреляции неоднородностей l_e . В самом деле, по порядку величины

$$\nabla_{\perp}\chi \sim \frac{1}{a}, \quad \nabla_{\perp}\Phi_1 \sim \frac{\psi_{\Phi}}{l_e}, \quad \Delta_{\perp}\Phi \sim \frac{\sigma_{\Phi}}{l_e^2},$$

откуда следует, что третье слагаемое в (35.5) примерно в l_e/a раз меньше, чем второе. Пренебрегая членом с $\nabla_{\perp}\chi_0$ и учитывая, что

$$(\nabla\Phi_0\nabla\chi_1) = \sqrt{\tilde{e}} (t_0\nabla\chi_1) = \sqrt{\tilde{e}} \frac{d\chi_1}{ds},$$

запишем уравнение для χ_1 в следующей форме:

$$\frac{d\chi_1}{ds} = - \frac{1}{2\sqrt{\tilde{e}}} \Delta_{\perp}\Phi_1. \quad (35.6)$$

Решение уравнения (35.6) имеет вид

$$\chi_1 = - \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\Delta_{\perp}\Phi_1}{\sqrt{\tilde{e}}} ds, \quad (35.7)$$

так что поперечная корреляционная функция уровня $\psi_x(\rho, L) = -\langle \chi_1(\rho_1, L) \chi_1(\rho_2, L) \rangle$ выражается через корреляционную функцию эйконала $\psi_\phi(r', r'')$ таким образом:

$$\psi_x(\rho, L) = \frac{1}{4} \iint_0^L ds' ds'' \frac{\Delta'_\perp \Delta''_\perp \psi_\phi(r', r'')}{\sqrt{\epsilon_{[r_0(s')]}} \sqrt{\epsilon_{[r_0(s'')]}}} . \quad (35.8)$$

Здесь $r' = r'(s')$ и $r'' = r''(s'')$ лежат на невозмущенных лучах, приходящих в точки наблюдения r'_1 и r'_2 (рис. 45), а Δ'_\perp и Δ''_\perp —

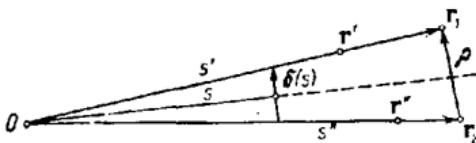


Рис. 45.

поперечные операторы Лапласа по переменным r' и r'' . Ограничимся анализом флуктуаций уровня для плоской и сферической волн, распространяющихся в статистически однородной среде с $\epsilon = 1$.

Согласно (33.5) корреляционная функция эйконала *плоской* волны $\psi_\phi(r', r'')$ равна

$$\psi_\phi(r', r'') = \frac{s_-}{2} \int_0^\infty \psi_\epsilon(\rho, \zeta) d\zeta, \quad (35.9)$$

где s_- — меньшее из двух расстояний s' и s'' , а $\rho = \text{const}$ — расстояние между двумя параллельными лучами, приходящими в точки r'_1 и r'_2 . Подставляя (35.9) в (35.8), получаем

$$\psi_x(\rho, L) = \frac{1}{8} \iint_0^L s_- ds' ds'' \int_0^\infty \Delta''_\perp \psi_\epsilon(\rho, \zeta) d\zeta. \quad (35.10)$$

Двукратный интеграл в (35.10) легко вычисляется:

$$\iint_0^L s_- ds' ds'' = \frac{L^3}{3},$$

так что для плоской волны

$$\psi_x(\rho, L) = \frac{L^3}{24} \int_0^\infty \Delta''_\perp \psi_\epsilon(\rho, \zeta) d\zeta. \quad (35.11)$$

Таким образом, флуктуации уровня нарастают пропорционально кубу пройденной волной дистанции L , тогда как поперечная

корреляционная функция эйконала плоской волны (33.15) растет пропорционально L :

$$\Psi_{\perp}(\rho, L) = \frac{L}{2} \int_0^{\infty} \Psi_a(\rho, \zeta) d\zeta. \quad (35.12)$$

Заметим, что если интеграл в (35.11) выразить через Ψ_{\perp} , то корреляционная функция уровня плоской волны запишется в виде

$$\Psi_x(\rho, L) = \frac{L^3}{12} \Delta_{\perp}^2 \Psi_{\perp}(\rho, L). \quad (35.13)$$

Эта формула упрощает вычисление Ψ_x , если известна корреляционная функция эйконала Ψ_{\perp} .

Корреляционную функцию уровня можно выразить также через спектральную плотность флюктуаций диэлектрической проницаемости:

$$\Psi_x(\rho, L) = \frac{\pi L^3}{24} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_{\perp}^4 \Phi_e(\kappa_{\perp}, 0) e^{i \kappa_{\perp} \rho} d^2 \kappa_{\perp}. \quad (35.14)$$

Полагая в (35.11) или (35.14) $\rho = 0$, получаем два варианта формулы для дисперсии уровня амплитуды:

$$\sigma_x^2 = \frac{L^3}{24} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 \Psi_e(\zeta t_0) d\zeta = \frac{\pi L^3}{24} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_{\perp}^4 \Phi_e(\kappa_{\perp}, 0) d^2 \kappa_{\perp}. \quad (35.15)$$

В случае изотропных флюктуаций $\tilde{\psi}$ функция корреляции уровня зависит только от модуля расстояния ρ между точками наблюдения:

$$\Psi_x(\rho, L) = \frac{L^3}{24} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 \int_0^{\infty} \Psi_e(V \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta, \quad (35.16)$$

или в иной форме

$$\Psi_x(\rho, L) = \frac{\pi^2 L^3}{12} \int_0^{\infty} \kappa^4 \Phi_e(\kappa) J_0(k\rho) d\kappa. \quad (35.17)$$

В частности, для гауссовой корреляционной функции (33.12) расчет по любой из формул (33.16) или (33.17) дает

$$\Psi_x(\rho) = \sigma_x^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{l_e^2} + \frac{1}{8} \frac{\rho^4}{l_e^4} \right) e^{-\rho^2/2l_e^2}, \quad (35.18)$$

где

$$\sigma_x^2 = \frac{2}{3} \frac{L^2}{l_e^4} \sigma_{\Psi}^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}} \sigma_{\Psi}^2 \frac{L^2}{l_e^2}. \quad (35.19)$$

Полезно отметить, что отношение дисперсии уровня σ_x^2 к дисперсии фазы $\sigma_\phi^2 = k^2 \sigma_\phi^2$ по порядку величины равно

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\phi^2} \sim \frac{L^2 \Delta_\perp^2 \Psi_\phi}{k^2 \Psi_\phi} \sim \frac{L^2}{k^2 l_e^4} \sim \left(\frac{\sqrt{\lambda L}}{l_e} \right)^4, \quad (35.20)$$

т. е. определяется квадратом волнового параметра $D \sim L/k l_e^2 \sim (\sqrt{\lambda L}/l_e)^2$. Но в области применимости геометрической оптики выполняется условие $\sqrt{\lambda L} \ll l_e$ (32.10), при котором волновой параметр мал (размер первой зоны Френеля мал по сравнению с размером неоднородностей). Поэтому в пределах применимости метода геометрической оптики флуктуации уровня должны быть малы по сравнению с флуктуациями фазы:

$$\sigma_x^2 \ll \sigma_\phi^2 = k^2 \sigma_\phi^2. \quad (35.21)$$

Это позволяет в ряде случаев, например при вычислении в рамках геометрической оптики среднего поля и функции когерентности, пренебречь амплитудными флуктуациями по сравнению с фазовыми (§ 37).

Обратимся еще раз к выражению (35.14), которое можно рассматривать как двумерное разложение функции корреляции в интеграл Фурье. Следовательно, величина

$$F_x(\mathbf{x}_\perp, L) = \frac{\pi L^3}{24} \mathbf{x}_\perp^4 \Phi_e(\mathbf{x}_\perp, 0) \quad (35.22)$$

представляет собой двумерную спектральную плотность флуктуаций уровня амплитуды. В случае изотропных флуктуаций

$$F_x(\mathbf{x}_\perp, L) = F_x(\mathbf{x}_\perp, L) = \frac{\pi L^3}{24} \mathbf{x}_\perp^4 \Phi_e(\mathbf{x}_\perp). \quad (35.23)$$

Входящий в (35.23) множитель \mathbf{x}_\perp^4 приводит к ослаблению вклада крупномасштабных ($\mathbf{x}_\perp \rightarrow 0$) составляющих спектра флуктуаций \tilde{e} . Это означает, что в приближении геометрической оптики флуктуации амплитуды обусловлены в основном мелкомасштабной частью спектра флуктуаций проницаемости \tilde{e} . Наличие в (35.23) множителя \mathbf{x}_\perp^4 позволяет пользоваться этой формулой и в случае локально однородных и изотропных полей, когда пространственный спектр $\Phi_e(\mathbf{x})$ может иметь при $\mathbf{x} \rightarrow 0$ степенную особенность вида $x^{-\alpha}$ с $\alpha < 5$.

Следует специально отметить, что обращение двумерной спектральной плотности $F_x(\mathbf{x}_\perp, L)$ в нуль при $\mathbf{x}_\perp \rightarrow 0$ эквивалентно равенству

$$(2\pi)^2 F_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(p) d^2 p = 0, \quad (35.24)$$

которое в случае изотропных флуктуаций принимает вид

$$\int_0^\infty \psi_\chi(\rho) \rho d\rho = 0. \quad (35.25)$$

Соотношения (35.24) и (35.25) тесно связаны с законом сохранения энергии. Подробно этот вопрос рассмотрен в § 46, где показано, что в случае плоской волны интеграл от флуктуационной компоненты $\tilde{I} = I - \bar{I}$, взятый по всей плоскости, равен нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(\rho, z) d^2\rho = 0 \quad (35.26)$$

(заметим, что встречающийся иногда вывод соотношения (35.26) с использованием свойства пространственной эргодичности $\int_{\Sigma} I(\rho, L) d^2\rho = \bar{I}\Sigma$ некорректен). Но, поскольку $I = |A|^2 = |A_0|^2 e^{2\chi} \approx |A_0|^2 (1 + 2\chi)$, при малых флуктуациях уровня (когда только и можно пользоваться приближением геометрической оптики) имеем

$$\tilde{I} = I - \bar{I} \approx 2|A_0|^2 (\chi - \bar{\chi}) = 2|A_0|^2 \tilde{\chi},$$

так что из (35.26) вытекает закон сохранения для $\tilde{\chi}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}(\rho, z) d^2\rho = 0. \quad (35.27)$$

Умножая (35.27) на $\tilde{\chi}(\rho', z)$ и усредняя, получаем (35.24).

Из (35.24) следует, что функция корреляции уровня обязательно должна наряду с положительными значениями принимать и отрицательные. Это можно видеть и на частном примере среды, у которой флуктуация $\tilde{\chi}$ имеет гауссову корреляционную функцию: выражение (35.18) в этом случае отрицательно в интервале $(4 - 2\sqrt{2})l_e < \rho < (4 + 2\sqrt{2})l_e$.

Несколько сложнее вычисляется функция корреляции уровня амплитуды сферической волны. Пусть источник и точка наблюдения находятся в статистически однородной среде. Согласно (33.22)

$$\Psi_\Phi^{\Phi\Phi}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \frac{1}{2} \int_0^{s'} ds \int_0^\infty \psi_\Phi(\delta + \zeta t_0) d\zeta, \quad (35.28)$$

причем текущее расстояние между лучами, приходящими в точки

r' и r'' , равно (рис. 45)

$$\delta(s) = \left(\frac{r'}{s'} - \frac{r''}{s''} \right) s.$$

Дифференцирование (35.28) дает

$$\Delta_{\perp}^2 \Lambda_{\perp}^2 \Psi_{\Phi}^{c\Phi}(r', r'') = \frac{1}{2} \int_0^{s''} ds \left(\frac{s^2}{s' s''} \right)^2 \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 \Psi_e(\delta + \zeta t_0) d\zeta, \quad (35.29)$$

и в результате по формуле (35.8) находим

$$\Psi_{\chi}^{c\Phi}(\rho, L) = \frac{1}{8} \int_0^L \frac{ds'}{s'^2} \int_0^L \frac{ds''}{s''^2} \int_0^{s''} s^4 ds \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 \Psi_e(\delta + \zeta t_0) d\zeta. \quad (35.30)$$

Текущее расстояние между лучами δ здесь можно выразить через расстояние $\rho = r_1 - r_2$ между точками наблюдения r_1 и r_2 : $\delta = \rho s/L$.

Упростим выражение (35.30), воспользовавшись соотношением

$$\int_0^L \frac{ds'}{s'^2} \int_0^L \frac{ds''}{s''^2} \int_0^{s''} s^4 F(s) ds = \frac{1}{L^2} \int_0^L s^2 (L-s)^2 F(s) ds,$$

которое легко доказывается повторным интегрированием по частям. В нашем случае

$$F(s) = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 \Psi_e(\delta + \zeta t_0) d\zeta$$

и поэтому

$$\Psi_{\chi}^{c\Phi}(\rho, L) = \frac{1}{8L^2} \int_0^L s^2 (L-s)^2 ds \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 \Psi_e(\delta + \zeta t_0) d\zeta. \quad (35.31)$$

Полученный результат можно представить в иной форме, если учесть, что внутренний интеграл равен корреляционной функции плоской волны (35.11), умноженной на $24/L^2$:

$$\Psi_{\chi}^{c\Phi}(\rho, L) = \frac{3}{L^2} \int_0^L s^2 (L-s)^2 \Psi_{\chi}^{pl}\left(\frac{\rho s}{L}\right) ds, \quad (35.32)$$

или если ввести безразмерную переменную интегрирования $\gamma = s/L$:

$$\Psi_{\chi}^{c\Phi}(\rho, L) = 3 \int_0^1 \gamma^2 (1-\gamma)^2 \Psi_{\chi}^{pl}(\gamma\rho) d\gamma. \quad (35.33)$$

При $\rho = 0$ отсюда следует универсальная связь между дисперсиями уровня в плоской и сферической волнах. Поскольку

$$3 \int_0^1 \gamma^2 (1-\gamma)^2 d\gamma = \frac{1}{10},$$

дисперсия уровня сферической волны в 10 раз меньше, чем у плоской:

$$[\sigma_x^2(L)]^{c\phi} = \psi_x^{c\phi}(0, L) = 3 \int_0^1 \gamma^2 (1-\gamma)^2 \psi_x^{pl}(0) d\gamma = \frac{1}{10} [\sigma_x^2(L)]_{pl}. \quad (35.34)$$

Это соотношение, как и выведенные ранее соотношения, (34.10) и (34.21) для дисперсий углов прихода и боковых смещений луча, универсально, разумеется, только в области применимости приближения геометрической оптики.

Множитель $\gamma^2 (1-\gamma)^2 = s^2 (L-s)^2 / L^4$ в формулах (35.33) и (35.34) определяет относительный вклад различных участков луча в суммарный эффект флуктуаций уровня амплитуды сферической волны. Появление этого множителя, который обращается в нуль в начале ($s=0$) и в конце ($s=L$) трассы, связано с фокусировкой и дефокусировкой на неоднородностях среды, т. е. с их линзовым действием. Известно, что линза, помещенная вблизи точечного источника света или вблизи точки наблюдения, не влияет на интенсивность сферической волны. Линзовым же эффектом объясняется и относительная малость флуктуаций сферической волны по сравнению с плоской: неоднородности, расположенные в начале трассы, практически не влияют на величину флуктуаций амплитуды сферической волны, тогда как именно эти неоднородности сильнее всего сказываются на флуктуациях плоской волны.

§ 36. Флуктуации параметров волн в турбулентной тропосфере

Применим общие формулы геометрической оптики к расчету флуктуаций параметров волн в турбулентной тропосфере. Для тропосферы с хорошей степенью точности можно принять $\bar{\epsilon} = 1$, а флуктуации $\bar{\epsilon}$ считать локально однородным и изотропным полем (§ 4). При этих условиях структурная функция эйконала плоской волны дается выражением (33.19) или (33.20).

Подставим в (33.20) спектральную плотность (4.17):

$$\Phi_\epsilon(x) = 0,033 C_\epsilon^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2), \quad (36.1)$$

где C_e^2 — структурная постоянная, $\kappa_m = 5,92/l_0$, а l_0 — внутренний масштаб турбулентности. Интеграл (33.20) от такого пространственного спектра выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1$ (см. [3], § 42):

$$D_{\perp}(\rho, L) = 2,2 C_e^2 L \kappa_m^{-1/2} \left[{}_1F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right) - 1 \right]. \quad (36.2)$$

Если заменить эту функцию ее асимптотическими значениями при малых и больших значениях ее третьего аргумента, то для $D_{\perp}(\rho, L)$ получаются следующие предельные выражения:

$$D_{\perp}(\rho, L) = \begin{cases} 0,73 C_e^2 L \rho^{1/2}, & \rho \gg l_0, \\ 0,82 C_e^2 L l_0^{-1/2} \rho^2, & \rho \ll l_0. \end{cases} \quad (36.3)$$

Аналогичные предельные выражения для $D_{\perp}(\rho, L)$ можно найти и непосредственно из (33.19), если распространить грубую аппроксимацию для $D_e(r)$, полученную интерполяцией предельных значений (4.12) и (4.13), справедливых соответственно при $r \gg l_0$ и $r \ll l_0$, на область $r \sim l_0$:

$$D_e(r) = \begin{cases} C_e^2 r^{1/2}, & r \geq l_0, \\ C_e^2 l_0^{-1/2} r^2, & r < l_0. \end{cases} \quad (36.4)$$

Проделав указанные выкладки, мы увидим, что найденный результат отличается только заменой коэффициента 0,82 на единицу.

Формула (36.3) дает при малом разнесении точек наблюдения квадратичную зависимость структурной функции от ρ . При больших же ρ поведение D_{\perp} описывается степенным законом «пять третей». Неограниченное нарастание D_{\perp} с ростом ρ соответствует бесконечному значению дисперсии эйконала $\sigma_{\Phi}^2(L) = \Psi_{\perp}(0, L) = 1/2 D_{\perp}(\infty, L)$. Конечно, в действительности дисперсия σ_{Φ}^2 ограничена, поскольку при $\rho \rightarrow \infty$ структурная функция $D_{\perp}(\rho, L)$ «насыщается». Для грубой оценки σ_{Φ}^2 примем для $D_e(\rho)$ аппроксимацию (4.19):

$$D_e(r) = \begin{cases} C_e^2 r^{1/2}, & r \leq l_0, \\ C_e^2 l_0^{1/2} = \text{const}, & r > l_0, \end{cases} \quad (36.5)$$

где L_0 — внешний масштаб турбулентности (по сравнению с (4.19) мы пренебрегаем здесь участком $r \leq l_0$, который вносит несущественный вклад в σ_{Φ}^2).

Поскольку $\Psi_e(r) = [D_e(\infty) - D_e(r)]/2$, из (36.5) находим

$$\Psi_e(r) \approx \begin{cases} \sigma_e^2 [1 - (r/L_0)^{1/2}], & r \leq L_0, \\ 0, & r > L_0, \end{cases} \quad (36.6)$$

где $\sigma_e^2 = \Psi_e(0) = 1/2 C_e^2 L_0^{2/3}$ — дисперсия диэлектрической проницаемости. Оказывается, что функция корреляции (36.6), полученная интерполяцией предельных значений при $r \ll L_0$ и $r \gg L_0$ на промежуточную область $r \sim L_0$, не является положительно определенной (спектральная плотность Φ_e для (36.6) принимает отрицательные значения). Тем не менее, используя (36.6) для вычисления корреляционной функции фазы, мы можем рассчитывать на получение качественно правильных результатов при $r \ll L_0$ и $r \gg L_0$. Оправданием этому служит то, что приводимые ниже формулы (36.7) и (36.8) могут быть получены и более строгим путем.

Подставляя (36.6) в (33.17), получаем корреляционную функцию фазы:

$$\Psi_{\perp}(\rho, L) = \begin{cases} \frac{L_0 \sigma_e^2}{2} \int_0^{\sqrt{L_0 - \rho^2}} \left[1 - \left(\frac{\rho^2 + \zeta^2}{L_0^2} \right)^{1/2} \right] d\zeta, & \rho \leq L_0 \\ 0, & \rho > L_0. \end{cases} \quad (36.7)$$

В частности,

$$\sigma_{\phi}^2 = \Psi_{\perp}(0, L) = \frac{L_0 \sigma_e^2}{2} \int_0^{L_0} \left[1 - \left(\frac{\zeta}{L_0} \right)^{1/2} \right] d\zeta = \frac{L L_0 \sigma_e^2}{5} = \frac{L C_e^2 L_0^{2/3}}{10}. \quad (36.8)$$

Таким образом, средний квадрат флуктуаций эйконала определяется длиной трассы, внешним масштабом турбулентности и дисперсией флуктуаций $\sigma_e^2 = 1/2 C_e^2 L_0^{2/3}$, а функция корреляции эйконала обращается в нуль при $\rho > L_0$.

Положив в (36.8) $C_e^2 = 10^{-15}$ см $^{-1/2}$, $L = 1$ км, $L_0 = 1$ м, получаем для дисперсии эйконала σ_{ϕ}^2 типичное значение $\sigma_{\phi}^2 \sim 2 \cdot 10^{-8}$ см 2 . Типичное же значение дисперсии фазы $\sigma_{\phi}^2 = k^2 \sigma_{\phi}^2$ составляет $3 \cdot 10^2$ на длине волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см (оптический диапазон) и $3 \cdot 10^{-4}$ при $\lambda = 0,05$ см (субмиллиметровые волны).

Статистические характеристики углов прихода луча могут быть рассчитаны при помощи формул § 34. В частности, при помощи (36.3) для дисперсии угла прихода $\langle \theta_{\alpha}^2 \rangle$ по формуле (34.5) находим

$$\langle \theta_{\alpha}^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{\perp}(0, L)}{\partial \rho_{\alpha}^2} = 0,82 C_e^2 L L_0^{-1/2}. \quad (36.9)$$

Подобно структурной функции фазы, функция корреляции уровня тоже может быть выражена (при помощи (35.14)) через гипергеометрические функции [3]. В частности, согласно [3], для спектра (36.1) дисперсия уровня равна

$$\sigma_x^2 = 0,8 C_e^2 L^3 L_0^{-7/2}, \quad (36.10)$$

а коэффициент корреляции уровня $K_x(\rho) = \psi_x(\rho, L)/\sigma_x^2(L)$ ведет себя так, как показано на рис. 46, взятом из [3], причем $x_m = -5.92/l_0$. Как видно из рисунка, коэффициент корреляции $K_x(\rho)$ принимает отрицательные значения, как это и должно быть для плоской волны.

Структурную функцию эйконала сферической волны можно рассчитать при помощи формул (33.26) или (33.27). В предельных случаях $\rho \ll l_0$ и $\rho \gg l_0$ для нее получаются выражения [3]

$$D_{\Phi}^{\text{sf}}(\rho, L) = \begin{cases} 1/2, D_{\perp}^{\text{sf}}(\rho, L) = 0.27C_e^2Ll_0^{-1+\rho^2}, & \rho \ll l_0, \\ 1/2, D_{\perp}^{\text{sf}}(\rho, L) = 0.27C_e^2L\rho^{1/2}, & \rho \gg l_0. \end{cases} \quad (36.11)$$

Что же касается дисперсий углов прихода и уровня амплитуды сферической волны, то для них справедливы соотношения (34.10) и (35.34), показывающие, что дисперсия угла прихода в три раза, а дисперсия уровня амплитуды сферической волны в десять раз меньше, чем у плоской волны. Дисперсия бокового смещения в сферической волне тоже в десять раз меньше, чем в плоской (см. (34.21)).

Общее ограничение МГО — неравенство (32.10) — в случае турбулентной атмосферы сводится к условию малости радиуса первой зоны Френеля по сравнению с *внутренним масштабом турбулентности*:

$$\sqrt{\lambda L} \ll l_0. \quad (36.12)$$

В приземном слое атмосферы, где $l_0 \sim 1$ см, и в оптическом диапазоне ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см) неравенство (36.12) ограничивает дистанцию L значениями порядка 200 м. Однако из дифракционных расчетов (см. § 41) следует, что некоторые результаты приближения геометрической оптики оказываются справедливыми на гораздо больших дистанциях.

Отчасти это объясняется тем, что в спектре турбулентности (36.1) мелкомасштабные неоднородности с $x \geq x_m$ представлены слабее, чем крупные неоднородности с $x \leq x_m$. Поэтому, когда с ростом дистанции размер первой зоны Френеля станет сравним с внутренним масштабом l_0 и неравенство (36.12) нарушится, для большей части неоднородностей еще будет выполнено неравенство $\sqrt{\lambda L} \ll l$, позволяющее применять геометрическую оптику для более крупных неоднородностей, с масштабом $l > l_0$. Эти крупные неоднородности влияют главным образом на фазу волны, а не на ее амплитуду. В результате флюктуации

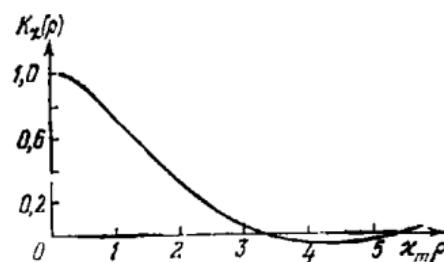


Рис. 46.

фазы в турбулентной среде выражены (по отношению к флуктуациям уровня) сильнее, чем в среде с одномасштабными неоднородностями. Действительно, согласно (36.8) и (36.10) отношение дисперсий уровня и фазы по порядку величины равно

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_x^2}{k^2 \sigma_\phi^2} \sim \frac{C_e^2 L^2 l_0^{-1/2}}{k^2 L L_0^{1/2} C_e^2} \sim \frac{L^2}{k^2 (l_0 L_0)^{1/2}} \sim \left(\frac{V \lambda L}{l_0} \right)^4 \left(\frac{l_0}{L_0} \right)^{1/2}. \quad (36.13)$$

По сравнению с (35.20) здесь появился малый множитель $(l_0/L_0)^{1/2} \ll 1$, который и отражает возросший вклад крупных масштабов в флуктуации фазы (о роли крупных и мелких неоднородностей при учете дифракции см. также § 41).

§ 37. Среднее поле и функция когерентности

В первом приближении геометрической оптики флуктуации фазы и уровня волны распределены по нормальному закону, поскольку обе величины выражаются в этом приближении интегралами от \tilde{e} (или от производных \tilde{e}), причем на пути интегрирования L луч встречает много неоднородностей. Нормализация фазы и уровня при этих условиях является следствием центральной предельной теоремы.

Если флуктуации фазы $\tilde{S} \approx S_1 = k\phi_1$ и уровня $\tilde{x} \approx x_1$ подчиняются нормальному закону, то поле

$$u = e^{iS + x} \approx e^{iS_1 + x_1} e^{iS_1 + x_1} = u_0 e^{iS_1 + x_1} \quad (37.1)$$

($u_0 = e^{iS_1 + x_1}$ — невозмущенное поле) распределено по логарифмическициальному закону. Учитывая, что в зоне применимости геометрической оптики дисперсия уровня σ_x^2 значительно меньше дисперсии фазы σ_S^2 (см. (35.20) и (36.13)), можно при вычислении моментов поля u пренебречь флуктуациями уровня, т. е. положить

$$u \approx u_0 e^{iS_1}. \quad (37.2)$$

Воспользовавшись формулой

$$\langle e^{i\xi} \rangle = e^{-1/2} \langle \xi^2 \rangle, \quad (37.3)$$

которая справедлива для любой нормальной величины ξ с $\bar{\xi} = 0$, находим из (37.2)

$$\bar{u} = u_0 \langle e^{iS_1} \rangle = u_0 e^{-\sigma_S^2/2} = u_0 e^{-k^2 \sigma_\phi^2/2},$$

или, учитывая выражение (33.31) для дисперсии σ_ϕ^2 ,

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u_0 \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^L \frac{ds}{s [\mathbf{r}_0(s)]} \int_0^{r_0} \Psi_e [\zeta t_0; \mathbf{r}_0(s)] d\zeta \right\} = \\ &= u_0 \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^L \alpha(s) ds \right). \end{aligned} \quad (37.4)$$

Величина

$$\alpha(s) = \frac{k^2}{2\bar{e}[r_0(s)]} \int_0^\infty \Psi_e[\zeta t_0; r_0(s)] d\zeta \quad (37.5)$$

выступает здесь как коэффициент ослабления среднего поля вдоль луча, т. е. как коэффициент экстинкции. Согласно (37.4) среднее поле убывает тем быстрее, чем больше дисперсия флюктуаций σ_e^2 .

В статистически однородной среде коэффициент экстинкции постоянен и среднее поле затухает по экспоненциальному закону

$$\bar{u} = u_0 e^{-1/\sigma_e^2 L}. \quad (37.6)$$

При $\bar{e}=1$ и для статистически однородных флюктуаций коэффициент экстинкции (37.5) записывается в виде

$$\alpha = \frac{k^2}{2} \int_0^\infty \Psi_e(t_0 \zeta) d\zeta, \quad (37.7)$$

что совпадает с полным поперечником рассеяния единичного объема σ_s , который определяет затухание поля в приближении однократного рассеяния (см. задачу 4 к гл. IV).

Функцию когерентности поля $\Gamma_u(r_1, r_2) = \langle u(r_1) u^*(r_2) \rangle$ можно вычислить при помощи (37.2) и (37.3). Приведем выражение для поперечной функции когерентности, когда точки r_1 и r_2 расположены на фазовом фронте ($\rho = r_1 - r_2$):

$$\Gamma_u(\rho, L) \approx |u_0|^2 \langle e^{i[S_1(r_1) - S_1(r_2)]} \rangle = |u_0|^2 e^{-1/\sigma_s^2 \langle [S_1(r_1) - S_1(r_2)]^2 \rangle} = \\ = I_0 \exp[-1/\sigma_s^2 D_S(\rho, L)], \quad (37.8)$$

где $I_0 = |u_0|^2$ — интенсивность невозмущенного поля, а $D_S(\rho, L) = -k^2 D_\perp(\rho, L)$ — поперечная структурная функция фазы. В случае статистически однородной среды ($\bar{e}=1$) D_\perp определяется выражениями (33.19) или (33.20), а выражения для D_\perp в турбулентной атмосфере приведены в предыдущем параграфе. В частном случае плоской волны, распространяющейся в турбулентной среде (структурная функция дается (36.3)), функция когерентности равна

$$\Gamma_u(\rho) = \begin{cases} I_0 \exp(-0.37 C_e^2 k^2 L \rho^{1/4}), & \rho \gg l_0, \\ I_0 \exp(-0.41 C_e^2 k^2 L l_0^{-1/4} \rho^2), & \rho \ll l_0. \end{cases} \quad (37.9)$$

Функция корреляции поля равна

$$\Psi_u(\rho, L) = \Gamma_u(\rho, L) - |\bar{u}|^2 = e^{-1/\sigma_s^2 D_S(\rho, L)} - e^{-\sigma_s^2(L)} = \\ = e^{-\sigma_s^2(L)} [e^{\dot{\Psi}_S(\rho, L)} - 1]. \quad (37.10)$$

При слабых флуктуациях фазы, когда $\sigma_s^2 \ll 1$, корреляционные функции (а следовательно, и радиусы корреляции) фазы и самого поля совпадают: $\psi_a(\rho) \approx \psi_s(\rho)$. Если же $\sigma_s^2 \gg 1$, то вторым слагаемым в формуле (37.10) можно пренебречь, и тогда

$$\psi_a(\rho, L) \approx \Gamma_a(\rho, L) = I_0 e^{-\frac{1}{4} D_S(\rho, L)}. \quad (37.11)$$

Радиус корреляции поля можно оценить (при $\sigma_s^2 \gg 1$) из условия $\psi_a(\rho, L) \approx \frac{1}{2} I_0$ или из эквивалентного уравнения $D_S(\rho, L) \approx \approx 2 \ln 2 = 1.4$. Поскольку структурная функция фазы $D_S = k^2 D_\phi$ пропорциональна прошедшему волной расстоянию, радиус корреляции (когерентности) поля с ростом L уменьшается. Например, если плоская волна распространяется в турбулентной тропосфере, а расстояние между точками наблюдения ρ лежит в интервале $L_0 \gg \rho \gg l_0$, то при помощи первой из формул (37.9) для радиуса корреляции поля l_a находим

$$l_a \approx (C_e^2 k^2 L)^{-1/2}.$$

В данном случае он уменьшается с ростом дистанции, как $L^{-1/2}$.

В дальнейшем мы убедимся, что выражение (37.6) для среднего поля и (37.8) для функции когерентности сохраняют силу за пределами применимости приближения геометрической оптики, когда флуктуации уровня не малы и когда нельзя пренебречь дифракционными эффектами. Как уже было сказано, это связано с тем, что в случае крупномасштабных неоднородностей нарушение пространственной когерентности поля происходит в первую очередь за счет фазовых флуктуаций, тогда как флуктуации амплитуды (уровня) играют меньшую роль.

Задачи

1. В общем случае поперечная функция корреляции эйконала дается выражением (33.33). В простейшем случае, когда флуктуации статистически однородны, а средняя диэлектрическая проницаемость постоянна, невозмущенные лучи можно считать прямыми линиями, расходящимися от источника.

Найти поперечную функцию корреляции эйконала сферической полны, прошедшей через случайно-преломляющий слой конечной толщины (рис. 47).

Решение. Если L_0 — толщина слоя, а R_0 — расстояние от источника до слоя, то расстояние между лучами меняется по закону $\delta(s) = ps/(R_1 + L_1)$, а интегрирование по s в (33.33) нужно проводить в пределах от $R_1 - R_0/\cos \theta$ до $R_1 + L_1 - (R_0 + L_0)/\cos \theta$, где θ — угол падения среднего луча на слой. Тогда

$$\Psi_\Phi(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{R_1}^{R_1 + L_1} ds \int_0^\infty \Psi_e \left(\frac{ps}{R_1 + L_1} + t_0 \xi \right) dt,$$

или, если учсть (33.25),

$$\Psi_\Phi(p) = \frac{1}{L_1} \int_{R_1}^{R_1 + L_1} ds \Psi_\Phi^{nl} \left(\frac{ps}{L_1 + R_1}, L_1 + R_1 \right).$$

Эти формулы допускают предельный переход к случаю плоской волны ($R_0 \rightarrow \infty$, т. е. бесконечно удаленный источник) и к случаю источника сферической волны, находящегося на границе слоя ($R_0 \rightarrow 0$).

Выражения такого типа позволяют рассчитывать, например, флуктуации фазы ультракоротких радиоволн, прошедших через статистически неоднородную ионосферу. Во многих случаях флуктуациями амплитуды (уровня) можно пренебречь, заменив ионосферу эквивалентным фазовым экраном, и тогда легко вычислить функцию корреляции поля на выходе из ионосферы. Дальнейшая эволюция поля на пути от ионосферы до поверхности Земли подчиняется закономерностям дифракции волн в свободном пространстве (§ 10).

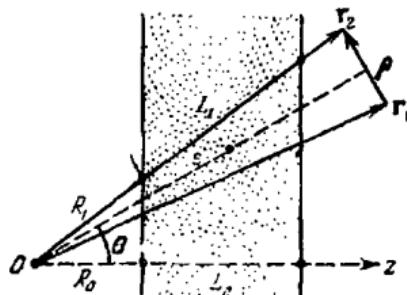


Рис. 47.

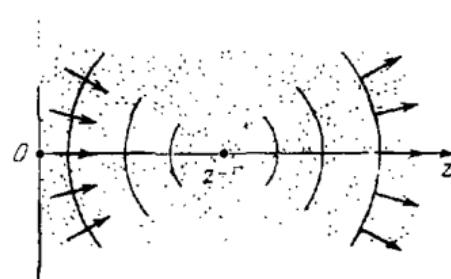


Рис. 48.

2. Пусть на случайно-неоднородное полупространство $z > 0$ падает сходящаяся сферическая волна с фокусом в точке $z = F$ (рис. 48). Найти функцию корреляции эйконала в плоскости $z = \text{const}$.

Ответ.

$$\Psi_{\Phi}^{\text{сф}}(\rho) = \frac{1}{z} \int_0^z ds \Psi_{\Phi}^{\text{пл}} \left(\rho \left| \frac{F-s}{F-z} \right| \right) =$$

$$-\left\{ \begin{array}{l} \frac{F-z}{\rho z} \int_0^{\rho F/(F-z)} \Psi_{\Phi}^{\text{пл}}(\rho') d\rho', \quad z < F, \\ \frac{z-F}{\rho z} \left[\int_0^{\rho F/(z-F)} \Psi_{\Phi}^{\text{пл}}(\rho') d\rho' + \int_0^{\rho} \Psi_{\Phi}^{\text{пл}}(\rho') d\rho' \right], \quad z > F. \end{array} \right. \quad (1)$$

Из этих выражений следует, что в сходящейся сферической волне радиус корреляции меньше, чем в плоской, и стремится к нулю при $z \rightarrow F$ (разумеется, непосредственно в области фокуса приведенная формула непригодна). После прохождения фокуса радиус корреляции начинает увеличиваться и в пределе $z \gg F$ формула (1) описывает флуктуации эйконала расходящейся сферической волны.

3. Найти поперечную функцию корреляции эйконала плоской волны в среде с анизотропными флуктуациями $\tilde{\epsilon}$, описываемыми гауссовой корреляционной функцией вида (2.29) с масштабами a и $b - c$ ($a' > b$).

Ответ. Если большая ось неоднородностей a лежит в плоскости (y, z) и наклонена под углом γ к направлению распространения волны (ось z), то по формуле (33.15) имеем

$$\Psi_{\Phi}(x, y, L) = \sigma_{\Phi}^2(L) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b^2} - \frac{y^2}{2(a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma)} \right\}.$$

где

$$\sigma_{\Psi}^2 = \frac{\sqrt{\pi L} \sigma_e^2 ab}{2 \sqrt{2} \sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}}.$$

При изменении угла γ от 0 до $\pi/2$ масштаб корреляции эйконала по оси y , равный $I_y = \sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}$, меняется от b (при $\gamma = 0$) до a (при $\gamma = \pi/2$), тогда как масштаб корреляции по оси x остается постоянным, $I_x = b$.

4. Вычислить дисперсию эйконала волны, отраженной от плоско-слоистой среды с линейным законом изменения средней диэлектрической проницаемости $\bar{\epsilon} = \epsilon_1 - \epsilon_2 z$ (рис. 49, а) и со статистически однородными флюктуациями ϵ .

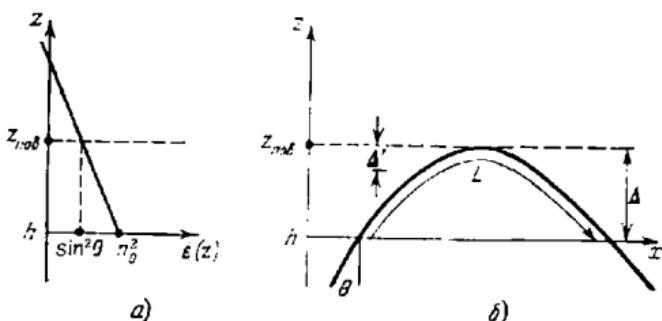


Рис. 49.

Решение. Пусть случайные неоднородности расположены выше уровня $z=h$. Для статистически однородных флюктуаций по формуле (33.32) имеем

$$\sigma_{\Psi}^2 = \frac{\sigma_e^2 l_{\text{эфф}}}{2} \int_0^L \frac{ds}{\bar{\epsilon}[z(s)]} = \frac{\sigma_e^2 l_{\text{эфф}}}{2} \int_0^L \frac{ds}{\epsilon_1 - \epsilon_2 z(s)}, \quad (1)$$

где L — длина дуги луча от входа до выхода из слоя (рис. 49, б). Для вычисления интеграла (1) надо знать зависимость z от текущей длины луча s . Если θ — угол падения луча на слой, а $n_0 = \sqrt{\bar{\epsilon}(h)} = \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2 h}$ — коэффициент преломления в начале слоя, то уравнение луча удобно записать через параметр

$$\tau = \int_0^s ds / \sqrt{\bar{\epsilon}} \quad [8]:$$

$$x(\tau) = x_0 - n_0 \sin \theta, \quad z(\tau) = h + n_0 \tau \cos \theta - \epsilon_2 \tau^2 / 4,$$

причем $\bar{\epsilon}[z(\tau)] = n_0^2 - \epsilon_2 \tau n_0 \cos \theta + \epsilon_2 \tau^2 / 4$. Точки поворота лучей отвечает уровни $z_{\text{пов}} = h - n_0^2 \cos^2 \theta / \epsilon_2$, отстоящий от начала слоя $z=h$ на расстояние $\Delta = z_{\text{пов}} - h = n_0^2 \cos^2 \theta / \epsilon_2$.

Переходя в (1) к интегрированию по τ ($d\tau = ds / \sqrt{\bar{\epsilon}}$) в пределах от нуля до $\tau = 4n_0 \cos \theta / \epsilon_2$, что отвечает возвращению луча на начальный уровень $z=h$, получаем

$$\sigma_{\Psi}^2 = \frac{\sigma_e^2 l_{\text{эфф}}}{\epsilon_2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$$

При помощи этой формулы можно оценить толщину слоя $\Delta' = z_{\text{пов}} - h'$, который дает пятидесятипроцентный вклад в σ_ϕ^2 :

$$\Delta' = \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \theta (1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta}, \quad \Delta = z_{\text{пов}} - h = \frac{n_0^2 \cos^2 \theta}{e_2}.$$

При начальной наклоне луча $\theta = 45^\circ$ находим отсюда $\Delta' = 0,21\Delta$, т. е. половину дисперсии эйконала σ_ϕ^2 дает примерно пятая часть слоя, а при $\theta = 30^\circ$ — шестая часть ($\Delta' = \Delta/6$). Таким образом, меньшая часть слоя, прилегающая к точке поворота $z = z_{\text{пов}}$ (средняя проницаемость на луче $\bar{e}(z)$ здесь минимальна), дает примерно такой же вклад в дисперсию эйконала, как и остальной слой.

б. Вывести общую формулу для поперечной функции корреляции уровня с учетом регулярной рефракции.

Ответ. Пусть $\delta x_i(s_1)$ и $\delta x_k(s_2)$ — приращения координат $x_i(s_1)$ и $x_k(s_2)$ двух точек на одном и том же невозмущенном луче при переходе на близкий соседний луч с сохранением длин s_1 и s_2 . Если ввести обозначения

$$g_{ik}(s_1, s_2) = \frac{\delta x_i(s_1)}{\delta x_k(s_2)} \Big|_{s_{1,2}=\text{const}}, \quad s_< = \min\{s', s''\},$$

$$F_{kl}(s, s') = [\delta_{ij} - t_j(s_<) t_j(s_<)] g_{ik}(s, s') g_{kl}(s, s'),$$

где t_i — компоненты единичного вектора, касательного к невозмущенному лучу, то при помощи (35.7) и (33.22) получаем для поперечной корреляционной функции уровня формулу

$$\Psi_X(p) = \frac{1}{8} \iint_0^L \frac{ds' ds''}{\sqrt{\bar{e}' \bar{e}''}} \int_0^{s_<} \frac{ds}{\bar{e}[r_B(s)]} F_{kl}(s, s') F_{pq}(s, s'') \int_0^\infty \frac{\partial^4 \psi_\theta[\delta(s) : \frac{p}{k} t_0]}{\partial x_k \partial x_l \partial x_p \partial x_q} dz,$$

в которой по повторяющимся индексам производится суммирование.

б. Если волна дважды проходит через один и те же неоднородности (например, в результате отражения от препятствия), то возникают своеобразные эффекты двукратного прохождения [14]. Например, для плоской волны, прошедшей в случайно-неоднородной среде путь L в прямом и обратном направлениях, дисперсия фазы вдвое больше, чем для волны, прошедшей дистанцию $2L$ в той же среде, но в одном направлении. Найти дисперсию фазы сферической волны, отраженной от плоскости, удаленной от источника на расстояние L (рис. 50).



Рис. 50.

Решение. Пусть источник расположен в начале координат. При $\bar{e} = 1$ флюктуации фазы в точке $r = (p, z)$, $p \ll L$, лежащей в плоскости $z = 0$, выражаются суммой

$$\Phi_1(p, z) = \frac{1}{2} \int_0^L \tilde{e} \left(\frac{z' p}{2L}, z' \right) dz' + \frac{1}{2} \int_L^\infty \tilde{e} \left(\frac{p}{2L} (2L - z'), z' \right) dz', \quad (1)$$

первое слагаемое которой соответствует прямому, а второе — обратному пути

волны. Статистическое усреднение (1) дает (при $L \gg l_e$)

$$\sigma_{\Phi_{\text{дв}}}^2(\rho, L) = \int_0^L d\eta \int_0^\infty \left[\Psi_e(0, \xi) + \Psi_e\left(\frac{\rho\eta}{L}, \xi\right) \right] d\xi. \quad (2)$$

При $\rho = 0$, когда точка наблюдения совмещена с источником,

$$\sigma_{\Phi_{\text{дв}}}^2(0, L) = 2L \int_0^\infty \Psi_e(0, \xi) d\xi = 4\sigma_\Phi^2(L) = 2\sigma_\Phi^2(2L), \quad (3)$$

где $\sigma_\Phi^2(z)$ представляет собой, в соответствии с (33.9), дисперсию фазы при однократном прохождении дистанции z . Двукратное увеличение $\sigma_{\Phi_{\text{дв}}}^2(0, L)$ по сравнению с $\sigma_\Phi^2(2L)$ обусловлено корреляцией флуктуаций фазы на прямом и обратном пути. Если же прямой и обратный лучи проходят большую часть пути через разные неоднородности (т. е. $\rho \gg l_e$), то второе слагаемое в (2) становится пренебрежимо малым по сравнению с первым, и тогда

$$\sigma_{\Phi_{\text{дв}}}^2(\rho, L) \approx 2\sigma_\Phi^2(L) - \sigma_\Phi^2(2L), \quad \rho \gg l_e.$$

Корреляция флуктуаций интенсивности на прямом и обратном пути приводит и к другому интересному эффекту — усилинию обратного рассеяния [15].

Г л а в а VI

МЕТОД ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 38. Обоснование параболического уравнения

Мы уже говорили о том, что в случае длин волн λ , малых по сравнению с размерами l_e неоднородностей диэлектрической проницаемости, рассеянные волны концентрируются в узком телесном угле с раствором θ порядка $\lambda/l_e \ll 1$, т. е. распространяются практически в том же направлении, что и первичная волна. В силу этого становится существенным многократное рассеяние.

Одним из приближенных методов, учитывающих многократное рассеяние, является метод геометрической оптики (гл. V), но он полностью игнорирует дифракционные эффекты и ограничен условием $V\sqrt{\lambda L} \ll l_e$. Если это условие нарушается, т. е. расстояние L , проходимое волной в неоднородной среде, достаточно велико: $L \gg (l_e^2/\lambda) = L_d$, то дифракционные эффекты становятся существенными. Это можно пояснить следующим качественным рассуждением. Если неоднородность размера l_e освещается плоской волной, то и размер ее геометрической «тени» на любом расстоянии L равен l_e . Однако дифракция приводит к «расплыванию» резких границ тени на величину порядка $V\sqrt{\lambda L}$ (это размер переходной области свет—тень при дифракции на краю непрозрачного экрана). Ясно, что дифракцией можно пренебречь лишь при условии $V\sqrt{\lambda L} \ll l_e$ (см. (32.10)). Это условие зачастую довольно жестко ограничивает длину трассы L .

Как мы видели в § 36, для света в турбулентной атмосфере уже при $L \approx 200$ м имеет место равенство $V\sqrt{\lambda L} = l_e$, т. е. геометрическая оптика становится неприменимой на расстояниях порядка нескольких сотен метров.

В гл. V уже были упомянуты более общие приближенные методы решения дифракционных задач, связанные с применением параболического уравнения, которые, с одной стороны, используют, как и МГО, малость параметра λ/l_e , но вместе с тем учитывают и дифракционные эффекты. Это—метод плавных

возмущений (МПВ) и метод параболического уравнения (МПУ). В этом параграфе мы выведем параболическое уравнение, причем двумя способами, проясняющими разные стороны МПУ. Уравнения МПВ будут затем получены из параболического уравнения (§ 40).

Будем исходить из скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 [1 - \bar{\epsilon}(r)] u = 0, \quad (38.1)$$

где $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon}$ — квадрат среднего волнового числа (предполагается, что $\bar{\epsilon} = \text{const}$), а $\bar{\epsilon} = [\epsilon(r) - \bar{\epsilon}] / \bar{\epsilon}$ — относительная величина флюктуаций диэлектрической проницаемости, так что $\langle \bar{\epsilon} \rangle = 0$. Приведем сначала простейший вывод параболического уравнения, основанный на наглядных соображениях.

Пусть неоднородная среда занимает полупространство $z > 0$ и на него падает плоская волна $u = A_0 \exp(ikz)$. Так как мы предположили, что $A_0 \gg \lambda$, то рассеянные волны распространяются в основном вперед, и волна, отраженная от неоднородной среды, слаба по сравнению с падающей волной. Будем искать поле u в среде в виде

$$u(\rho, z) = v(\rho, z) \exp(ikz), \quad \rho = (x, y). \quad (38.2)$$

Здесь $v(\rho, z)$ — амплитуда волны (вообще говоря, комплексная). Если бы среда была однородной ($\bar{\epsilon} = 0$), то амплитуда v не зависела бы от координат. В неоднородной среде можно ожидать, что функция $v(\rho, z)$ и ее производная по z будут мало меняться на протяжении длины волны, так как изменения v связаны только с наличием неоднородностей, а их размеры велики по сравнению с λ . Поэтому должны выполняться условия

$$\lambda \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \ll |v|, \quad \lambda \left| \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|,$$

или

$$\left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \ll k |v|, \quad \left| \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \quad (38.3)$$

(быстрое изменение v в зависимости от z уже описывается множителем $\exp(ikz)$). Условия (38.3) могут выполняться лишь в том случае, когда поле, рассеянное назад, мало. Действительно, если поле v содержит и обратную волну $A \exp(-ikz)$, то это означает, что в амплитуде v присутствует слагаемое вида $A \exp(-2ikz)$, быстро меняющееся на расстояниях порядка λ . Таким образом, условия (38.3) уже предполагают, что амплитуда A обратной волны достаточно мала по сравнению с амплитудой прямой волны.

Подставив (38.2) в (38.1), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial v}{\partial z} + k^2 \tilde{\epsilon}(\rho, z)v = 0.$$

Но в силу второго неравенства (38.3) можно пренебречь членом $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ по сравнению с членом $2ik \frac{\partial v}{\partial z}$, что и приводит к параболическому уравнению для амплитуды v :

$$2ik \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 \tilde{\epsilon}(\rho, z)v = 0. \quad (38.4)$$

Уравнение параболического типа впервые было использовано М. А. Леонтьевичем при решении детерминированной задачи о дифракции радиоволн вокруг Земли [1]. Приведенное обоснование уравнения (38.4), конечно, весьма нестрого. Рассмотрим поэтому другой его вывод, где более отчетливо выявляются те величины, которыми нужно пренебречь, чтобы получить (38.4) из (38.1) [2].

Уравнение (38.1) вместе с необходимыми для него граничными условиями эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (38.5)$$

Здесь $u_0(\mathbf{r})$ — первичная волна (волна в отсутствие неоднородностей среды), удовлетворяющая уравнению $\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0$, а $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — функция Грина:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\}, \quad (38.6)$$

удовлетворяющая уравнению $\Delta G + k^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и условиям излучения на бесконечности.

Пусть падающая волна имеет вид $u_0(\rho, z) = A \exp(ikz)$. Разобьем область интегрирования по z' в (38.5) на два участка — $0 < z' < z$ и $z' > z$:

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int_0^z dz' \int d^2 \rho' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') - \\ - k^2 \int_z^\infty dz' \int d^2 \rho' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}'). \quad (38.7)$$

Рассмотрим первый из интегралов. Он является суммой слагаемых вида

$$du_+(\mathbf{r}) = -k^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') dz' d^2 \rho',$$

причем для каждого из этих слагаемых $z > z'$. Величина du_+ представляет сферическую волну (множитель $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$) с центром в точке \mathbf{r}' и амплитудой $-k^2 \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') dz' d^2 \rho'$, определяемой расщеплением волны $u(\mathbf{r}')$ на неоднородности $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}')$. При этом продоль-

ная координата точки рассеяния z' всегда меньше z — продольной координаты точки наблюдения. Это означает, что все источники сферических волн в первом интеграле (38.7) расположены в слое $0 < z' < z$, т. е. рассеянные волны, учитываемые этим слагаемым, приходят в точку наблюдения с той же стороны, что и падающая волна.

Точно так же легко убедиться в том, что второй интеграл в' (38.7) суммирует все волны, приходящие в точку \mathbf{r} из области $z' > z$. Ясно, что для того, чтобы попасть в точку \mathbf{r} из области $z' > z$, волна хотя бы один раз должна испытать рассеяние назад (рис. 51, а).

Если, однако, выполняется условие $\lambda \ll l_e$, то, как мы знаем, при каждом акте рассеяния основная часть рассеянной энергии сосредоточивается в узком телесном угле вблизи первоначального направления распространения волны. В этом случае можно ожидать, что интенсивность волны, испытавшей хотя бы одно *обратное* рассеяние, будет малой по сравнению с интенсивностью волны, которая испытала то же общее число рассеяний *вперед*. На этом основании мы можем пренебречь вторым слагаемым в уравнении (38.7) и записать его в виде¹⁾

$$u^{(0)}(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) - k^3 \int_0^z dz' \int d^3 p' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}') u^{(0)}(\mathbf{r}'). \quad (38.8)$$

В приближении, описываемом уравнением (38.8), которое должно удовлетворяться при любом $z = \tilde{z}$, в каждую точку приходят волны только из области $z' < \tilde{z}$. Это означает, что при переходе от уравнения (38.7) к уравнению (38.8) мы отбрасываем не только

¹⁾ Смысл верхнего индекса (0) в (38.8) разъяснен ниже.

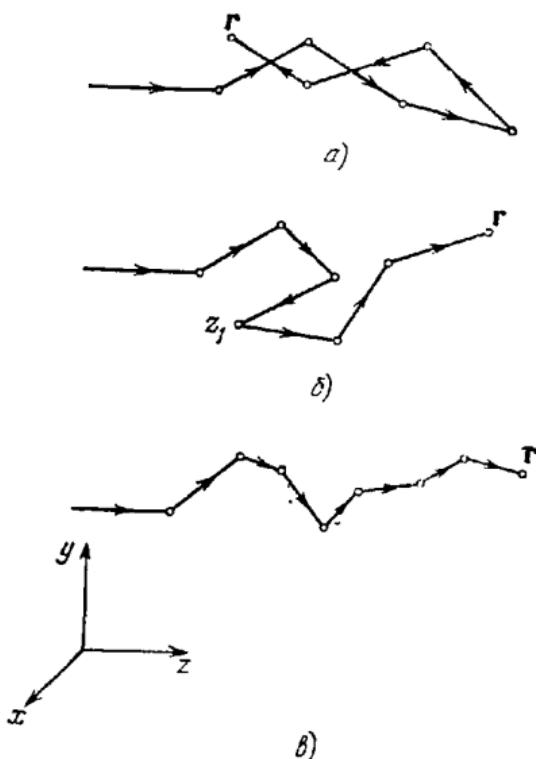


Рис. 51.

волны, изображенные на рис. 51, а, но и волны того типа, который изображен на рис. 51, б, где волна приходит справа в одну из промежуточных точек z_1 . Единственный тип волн, который учитывается в уравнении (38.8), соответствует рис. 51, в. Здесь не только в точку r , но и в каждую из промежуточных точек волна приходит слева. В этом легко убедиться, если записать формальное решение уравнения (38.8) в виде итерационного ряда. Таким образом, уравнению (38.8) удовлетворяют лишь те волны, которые на пути распространения в слое $(0, z)$ не испытали ни одного акта обратного рассеяния. Это отмечено верхним индексом 0 в обозначении $u^{(0)}$. Можно показать [2], что полное волновое поле u разбивается на сумму полей $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots$, где $u^{(l)}$ — волна, испытавшая l актов обратного рассеяния.

Уравнение (38.8) можно упростить и дальше, если более последовательно учесть условие $\lambda \ll l_e$. Как мы знаем, характерный угол рассеяния на неоднородности масштаба l_e имеет порядок $\theta \sim \lambda/l_e$. Если первоначально падающая волна распространялась вдоль оси z , то после первого же акта рассеяния она будет распространяться под углом порядка θ к оси z . Это означает, что в (38.8) отношение поперечной составляющей вектора $r - r'$ к его продольной составляющей имеет порядок величины θ , т. е.

$$\frac{|\rho - \rho'|}{|z - z'|} \sim \frac{\lambda}{l_e} \ll 1. \quad (38.9)$$

Используя малость этого отношения, можно применить разложение $|r - r'|$ в ряд Тейлора:

$$|r - r'| = (z - z') \sqrt{1 + \frac{|\rho - \rho'|^2}{(z - z')^2}} = \\ = (z - z') + \frac{1}{2} \frac{|\rho - \rho'|^2}{(z - z')} - \frac{1}{8} \frac{|\rho - \rho'|^4}{(z - z')^3} + \dots \quad (38.10)$$

Функция Грина G содержит в показателе экспоненты фазовый набег $k|r - r'|$. Подставить вместо $|r - r'|$ приведенное разложение и ограничиться в нем лишь первыми двумя членами можно, если выполняется условие

$$\frac{k}{8} \frac{|\rho - \rho'|^4}{(z - z')^3} \ll 1.$$

Если, согласно (38.9), подставить сюда $|\rho - \rho'| \sim \lambda(z - z')/l_e$, то мы приходим к ограничениям¹⁾

$$\frac{\lambda z}{l_e^2} \ll \left(\frac{l_e}{\lambda}\right)^2, \quad \lambda \ll l_e. \quad (38.11)$$

¹⁾ Отметим, что в силу условия $\lambda \ll l_e$ величина $\lambda z/l_e^2$ должна быть малой не по сравнению с единицей, как в МГО, а по сравнению с большим параметром $(l_e/\lambda)^2$. Таким образом, первое из неравенств (38.11) может выполняться и в том случае, когда условия применимости МГО нарушаются.

при выполнении которых функцию Грина (38.6) можно заменить на ее френелевское приближение

$$G_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi(z-z')} \exp \left\{ ik(z-z') + \frac{ik(p-p')^2}{2(z-z')} \right\}. \quad (38.12)$$

(В знаменателе функции Грина с относительной ошибкой порядка λ/l_p , сказывающейся лишь на амплитуде, можно взять только первый член разложения (38.10).)

Подставляя в (38.8) приближенную формулу (38.12) для функции Грина, приходим к уравнению

$$u^{(0)}(p, z) = u_0(p, z) +$$

$$+ \frac{k^2}{4\pi} \int_0^z \frac{\exp[ik(z-z')]}{z-z'} dz' \int d^3 p' \exp \left(\frac{ik(p-p')^2}{2(z-z')} \right) \tilde{e}(\mathbf{r}') u^{(0)}(p', z'),$$

которое уже эквивалентно параболическому уравнению (38.4). Чтобы убедиться в этом, используем аналогичную (38.2) подстановку $u^{(0)}(p, z) = v(p, z) \exp(ikz)$. В такой же форме представим и падающую волну: $u_0(p, z) = A_0(p) \exp(ikz)$. Отметим, что в силу уравнения $\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0$ амплитуда $A_0(p)$ падающей волны удовлетворяет условию $\Lambda_1 A_0(p) = 0$, где $\Lambda_1 = -\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Тогда, после сокращения на общий множитель $\exp(ikz)$, получим

$$v(p, z) = A_0(p) +$$

$$+ \frac{ik}{2} \int_0^z dz' \int d^3 p' \left[\frac{k}{2\pi i(z-z')} \exp \left(-\frac{k(p-p')^2}{2i(z-z')} \right) \right] \tilde{e}(\mathbf{r}') v(p', z'). \quad (38.13)$$

Чтобы перейти к дифференциальному уравнению для v , следует продифференцировать (38.13) по z . При дифференцировании интеграла по верхнему пределу возникает, однако, неопределенность — значение заключенного в квадратные скобки выражения при $z' = z$. Чтобы установить, к чему стремится это выражение, введем временно обозначение $a^2 = i(z-z')/k$. Тогда оно примет вид

$$\frac{1}{2\pi a^2} \exp \left\{ -\frac{(p-p')^2}{2a^2} \right\}$$

и мы узнаем в нем двумерную гауссову плотность вероятностей, соответствующую дисперсиям a по обеим осям. Но при $a \rightarrow 0$ гауссова плотность вероятностей стремится к дельта-функции, так что

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{k}{2\pi i(z-z')} \exp \left\{ \frac{ik(p-p')^2}{2(z-z')} \right\} = \delta(p-p').$$

Дифференцируя (38.13) по z и используя последнюю формулу, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{ik}{2} \left\{ \tilde{e}(r)v(r) + \int_0^z dz' \int d^3 p' \tilde{e}(r')v(r') \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{2\pi i(z-z')} \exp\left(\frac{ik(p-p')^2}{2(z-z')}\right) \right] \right\}.$$

Теперь учтем, что выполняется легко проверяемое непосредственным дифференцированием соотношение

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{2\pi i(z-z')} \exp\left(\frac{ik(p-p')^2}{2(z-z')}\right) \right] = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \left[\frac{k}{2\pi i(z-z')} \exp\left(\frac{ik(p-p')^2}{2(z-z')}\right) \right].$$

Используя его и вынося оператор Δ_{\perp} за знак интеграла, получим, с учетом (38.13), уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{ik}{2} \tilde{e}(r)v(r) + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp}(v - A_0). \quad (38.14)$$

Но, как отмечалось, $\Delta_{\perp}A_0 = 0$, в силу чего последнее уравнение совпадает с параболическим уравнением (38.4).

В процессе вывода уравнения (38.14) мы установили, что переходить в (38.8) ко френелевскому приближению для функции Грина можно лишь при выполнении условий (38.11). Однако мы не выяснили еще, когда можно пренебрегать волнами, рассеянными назад. Легче всего это сделать, воспользовавшись формулой (26.11) для эффективного поперечника рассеяния из единицы объема (мы рассматриваем простейший случай статистически изотропных флуктуаций):

$$\sigma = \frac{\pi k^4}{2} \Phi_e \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right). \quad (38.15)$$

Если проинтегрировать (38.15) по задней полусфере ($\pi/2 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$), то мы получим эффективный поперечник рассеяния назад из единицы объема:

$$\sigma_{obp} = \frac{\pi k^4}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta \Phi_e \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Интегрируя по ϕ и вводя вместо θ новую переменную интегрирования $x = 2k \sin \frac{1}{2}\theta$, находим

$$\sigma_{obp} = \pi^2 k^4 \int_{-k}^{2k} \Phi_e(x) x dx. \quad (38.16)$$

Эффективный поперечник σ_{obp} равен той доле энергии падающей волны, которая за счет рассеяния преобразуется в обратную волну, когда прямая волна проходит единичное расстояние. Если

пренебречь уменьшением энергии падающей волны за счет этого рассеяния, то на пути z в энергию обратной волны перейдет доля энергии, равная $\sigma_{\text{обр}} z$ (заметим, что, пренебрегая потерями энергии прямой волны, мы *занышиаем* энергию обратной волны). Поэтому условие, необходимое для того, чтобы пренебречь обратным рассеянием и тем самым отбросить второй интеграл в (38.7), можно записать в виде $\sigma_{\text{обр}} z \ll 1$, или

$$\pi^2 k^2 z \int_{k\sqrt{2}}^{2k} \Phi_e(x) x dx \ll 1. \quad (38.17)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если бы мы интегрировали формулу (38.15) по *всем* углам ($0 \leq \theta \leq \pi$), то получили бы *полный* эффективный поперечник рассеяния σ_0 (по всем направлениям) и вместо (38.17) пришли бы к неравенству

$$\sigma_0 z = \pi^2 k^2 z \int_0^{2k} \Phi_e(x) x dx \ll 1, \quad (38.18)$$

т. е. к условию применимости борновского приближения. Мы видим, что условие (38.17) всегда является менее жестким, чем (38.18). Если в области $x > k\sqrt{2}$ функция $\Phi_e(x)$ мала по сравнению с ее значением в области $x < k\sqrt{2}$, то условие (38.18) может нарушаться, даже если (38.17) выполняется.

Пусть, например, $\Psi_e(r) = \sigma_e^2 \exp(-r^2/2a^2)$. Тогда (§ 3) $\Phi_e(x) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_e^2 a^3 \exp(-x^2 a^2/2)$ и, выполняя интегрирование в (38.17), получаем

$$\sqrt{\pi} \sigma_e^2 k^2 z a e^{-k^2 a^2} (1 - e^{-k^2 a^2}) \ll 1. \quad (38.17a)$$

Условие же применимости борновского приближения (38.18) в этом случае имеет вид (см. (26.19))

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_e^2 k^2 z a (1 - e^{-2k^2 a^2}) \ll 1. \quad (38.18a)$$

Если $ka \gg 1$ (крупномасштабные неоднородности), то условие (38.18a) будет $\sigma_e^2 k^2 z a \ll 1$, тогда как из (38.17a) получаем $\sigma_e^2 k^2 z a \ll \exp(k^2 a^2/2)$, т. е. параметр $\sigma_e^2 k^2 z a$ ограничен сверху не единицей, а *большим* числом $\exp(k^2 a^2/2)$ ¹⁾.

С другой стороны, если выполняется условие применимости борновского приближения (38.18), то заведомо выполняется и

1) Если помимо условия $ka \gg 1$ выполняется также условие $ka^2 \gg z$, при котором результаты дифракционного расчета совпадают с расчетами по МГО, то многократное рассеяние вперед оказывается тем не менее учтенным. Отсюда видно, что и МГО учитывает многократное рассеяние вперед.

условие (38.17). В этом случае пренебрежимо мала роль многократного рассеяния вообще, в том числе и роль обратного рассеяния.

В качестве второго примера рассмотрим спектральную плотность $\Phi_e(x) = AC_e^2 x^{-1/2} \exp(-x^2/x_m^2)$, соответствующую флюктуациям диэлектрической проницаемости, обусловленным турбулентностью (см. 4.17)).

Трехмерная спектральная плотность такого вида применима в области $x > 2\pi/L_0$, где L_0 — внешний масштаб турбулентности. Пользуясь этой спектральной плотностью, нельзя оценивать границы применимости борновского приближения, так как в области $x < 2\pi/L_0$ она неверна. Если, однако, $k \gg 2\pi/L_0$, то рассеяние назад обусловлено лишь той частью пространственного спектра неоднородностей, которую приведенная формула описывает. В этом случае, оценивая интеграл (38.17), можно получить следующее условие применимости параболического уравнения:

$$C_e^2 k^{1/2} z \ll 1.$$

В атмосфере Земли, например, $C_e^2 \sim 10^{-14} \text{ см}^{-2/3}$, $x_m \sim 10^8 \text{ см}^{-1}$. Если $k \sim 10^6 \text{ см}^{-1}$ (видимый свет), то последнее условие приводит к ограничению $z \ll 10^8 \text{ км}$, которое заведомо выполняется, так как путь светового луча в атмосфере Земли по порядку величины не может превышать 10^9 км .

Суммируем результаты этого параграфа. Если выполняются условия

$$\lambda \ll l_e, \quad \frac{\lambda z}{l_e^2} \ll \left(\frac{l_e}{\lambda}\right)^2, \quad \pi^2 k^2 z \int_{k V \sqrt{2}}^{2k} \Phi_e(x) x dx \ll 1,$$

то распространение волны в случайно-неоднородной среде можно описывать при помощи параболического уравнения

$$2ik \frac{\partial v}{\partial z} + \Delta_\perp v - k^2 \tilde{\epsilon}(\rho, z) v = 0, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

для медленно меняющейся комплексной амплитуды, связанной с волновым полем и формулой $v(\rho, z) = \exp(ikz) u(\rho, z)$. Приближение параболического уравнения учитывает *многократное* рассеяние волны *вперед* и не учитывает обратного рассеяния. Дифракция при использовании МПУ учитывается в приближении Френеля. Важной особенностью параболического уравнения является то, что оно *первого* порядка по z . Поэтому на плоскости $z = \text{const}$ достаточно ставить только *одно* граничное условие.

**§ 39. Закон сохранения энергии
в приближении параболического уравнения**

Исходное волновое уравнение

$$\Delta u + k^2 [1 + \tilde{\epsilon}(r)] u = 0, \quad (39.1)$$

из которого было получено уравнение (38.4) для $v(\rho, z)$, имеет интеграл энергии (26.2), (26.3):

$$\operatorname{div} \mathcal{S} = 0, \quad (39.2)$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2i} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) = \operatorname{Im} (u^* \nabla u) \quad (39.3)$$

(для упрощения дальнейших формул мы приняли входящий в (26.2) коэффициент a равным k). Вектор \mathcal{S} представляет собой плотность потока энергии волны.

Пусть $u = A \exp(iS)$, где A — амплитуда и S — фаза волны. Тогда для \mathcal{S} легко получить формулу

$$\mathcal{S} = A^2 \nabla S. \quad (39.4)$$

Выразим теперь \mathcal{S} через v . Если комплексную амплитуду v представить в форме $v = A \exp(iS')$, то из выражения $u = v \exp(ikz)$ получаем соотношение

$$S = kz + S' \quad (39.5)$$

между полной фазой S и фазой S' медленной функции v . Согласно (39.5)

$$\mathcal{S}_\perp = A^2 \nabla_\perp S', \quad \mathcal{S}_z = A^2 \left(k + \frac{\partial S'}{\partial z} \right),$$

и закон сохранения энергии (39.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[A^2 \left(k + \frac{\partial S'}{\partial z} \right) \right] + \nabla_\perp [A^2 \nabla_\perp S'] = 0. \quad (39.6)$$

В приближении параболического уравнения имеем

$$2ik \frac{\partial v}{\partial z} + \Delta_\perp v + k^2 \tilde{\epsilon} v = 0.$$

Умножив это уравнение на v^* :

$$2ikv^* \frac{\partial v}{\partial z} + v^* \Delta_\perp v + k^2 \tilde{\epsilon} vv^* = 0,$$

и вычитая из него комплексно сопряженное уравнение

$$-2ikv \frac{\partial v^*}{\partial z} + v \Delta_\perp v^* + k^2 \tilde{\epsilon} vv^* = 0,$$

получаем

$$2ik \frac{\partial vv^*}{\partial z} + \nabla_{\perp} (v^* \nabla_{\perp} v - v \nabla_{\perp} v^*) = 0, \quad (39.7)$$

где мы использовали формулу $v^* \Delta_{\perp} v - v \Delta_{\perp} v^* = \nabla_{\perp} (v^* \nabla_{\perp} v - v \nabla_{\perp} v^*)$. Соотношение (39.7), полученное в приближении параболического уравнения, заменяет закон сохранения (39.2). Подставим в (39.7) $v = A \exp(iS')$, что дает

$$\frac{\partial}{\partial z} (k A^2) + \nabla_{\perp} (A^2 \nabla_{\perp} S') = 0. \quad (39.8)$$

Сравнение (39.8) с (39.6) показывает, что из компоненты \mathcal{S}_z плотности потока энергии при переходе к параболическому уравнению выпадает величина $A^2 \partial S' / \partial z$. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{\partial S'}{\partial z} \right| \ll k, \text{ или } \left| \lambda \frac{\partial S'}{\partial z} \right| \ll 2\pi. \quad (39.9)$$

Неравенство (39.9) означает, что фаза S' должна мало меняться на длине волны в направлении оси z . Это неравенство не является дополнительным ограничением, а вытекает из уже использованного при выводе (38.4) условия $\lambda \ll l_e$. Действительно, чисто геометрический набег фазы волны уже учтен слагаемым kz в (39.5). Поэтому слагаемое S' связано только с наличием неоднородностей. Но характерные размеры последних велики по сравнению с длиной волны, в силу чего неравенство (39.9) удовлетворяется.

Уравнение (39.8) можно интерпретировать еще и иначе. Величина $A^2 = vv^* = uu^* = I$ пропорциональна плотности энергии волны. Разделив (39.8) на k , имеем

$$\frac{\partial I}{\partial z} + \nabla_{\perp} \mathcal{S}'_{\perp} = 0, \quad \mathcal{S}'_{\perp} = A^2 \frac{\nabla_{\perp} S'}{k}. \quad (39.10)$$

Уравнение (39.10) аналогично закону сохранения энергии в нестационарном поле. В (39.10) координата z выступает в роли времени, а энергия распространяется в плоскости (x, y) . Если проинтегрировать (39.10) по некоторой площадке Σ , лежащей в плоскости $z = \text{const}$ и ограниченной замкнутым контуром \mathcal{L} , то получим

$$\frac{d}{dz} \int_{\Sigma} I dx dy + \int_{\mathcal{L}} \operatorname{div} \mathcal{S}'_{\perp} dx dy = 0.$$

Применяя ко второму слагаемому теорему Гаусса для двумерного случая, находим

$$\frac{d}{dz} \int_{\Sigma} I dx dy + \oint_{\mathcal{L}} \mathcal{S}'_n dl = 0.$$

Таким образом, изменение энергии, сосредоточенной на площадке Σ , связано с потоком энергии через контур \mathcal{L} , ограничивающий Σ .

Рассмотрим частный случай, когда неоднородности диэлектрической проницаемости статистически однородны в плоскостях $z = \text{const}$, а падающая волна — плоская. Из соображений симметрии очевидно, что все усредненные величины могут зависеть в этом случае только от z и не зависят от поперечного радиуса-вектора ρ . Усредненное уравнение (39.8):

$$\frac{\partial}{\partial z} (k \bar{A}^z) + \nabla_{\perp} \cdot \langle A^z \nabla_{\perp} S' \rangle = 0.$$

Так как $\langle A^z \nabla_{\perp} S' \rangle$ не зависит от ρ , имеем $\nabla_{\perp} \cdot \langle A^z \nabla_{\perp} S' \rangle = 0$ и, значит,

$$\frac{d}{dz} \langle A^z \rangle = 0.$$

Мы видим, что для плоской волны, распространяющейся в среде, статистически однородной в плоскостях $z = \text{const}$, выполняется равенство

$$\overline{uu^*} - \overline{vv^*} = \bar{A}^z = A_0^z = \text{const}. \quad (39.11)$$

Этот результат строго вытекает из (39.8), но он оказывается приближенным, если исходить из точного уравнения (39.6). Действительно, усредняя (39.6), мы получили бы

$$\bar{A}^z + \frac{1}{k} \left\langle A^z \frac{\partial S'}{\partial z} \right\rangle = \text{const},$$

откуда видно, что равенство (39.11) справедливо с относительной погрешностью порядка λ/l_e .

§ 40. Метод плавных возмущений

Параболическое уравнение (38.4)

$$2ik \frac{\partial v}{\partial z} + \Delta_{\perp} v + k^2 \tilde{e}(\rho, z) v = 0, \\ \rho = \{x, y\}, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (40.1)$$

определенное комплексную амплитуду v , связанную с волновым полем u формулой $u(\rho, z) = \exp(ikz) v(\rho, z)$, в общем случае, как и исходное уравнение Гельмгольца (38.1), не может быть решено точно. Поэтому и для уравнения (40.1) приходится использовать приближенные методы решения. В этом параграфе мы рассмотрим так называемый метод плавных возмущений (МПВ), предложенный С. М. Рытовым в детерминированной задаче о дифракции

света на ультразвуковой волне [3] и примененный для решения статистических задач А. М. Обуховым [4]. МПВ приспособлен в первую очередь для исследования таких параметров волны, как ее фаза и уровень.

Представим комплексную амплитуду $v(\rho, z)$ в виде

$$v(\rho, z) = A_0 \exp \left(iS'(\rho, z) + \ln \frac{A(\rho, z)}{A_0} \right) = A_0 \exp (\Phi(\rho, z)), \quad (40.2)$$

откуда $\Phi = \ln(v/A_0)$. Здесь $S' = S - kz$ (см. (39.5)) — отклонение фазы от регулярного ее набега kz в отсутствие неоднородностей, а $\ln(A/A_0) = \chi$ — уровень. Таким образом,

$$\Phi = \chi + iS', \quad \chi = \operatorname{Re} \Phi, \quad S' = \operatorname{Im} \Phi.$$

Подставив (40.2) в (40.1), получим уравнение

$$2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Phi + (\nabla_{\perp} \Phi)^2 + k^2 \tilde{e}(\rho, z) = 0 \quad (40.3)$$

для комплексной фазы Φ . Уравнение (40.3), в отличие от (40.1), *нелинейно*, но случайная функция \tilde{e} входит в него не в качестве коэффициента, а аддитивно.

Будем искать решение уравнения (40.3) в виде ряда

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots, \quad (40.4)$$

предполагая, что Φ_1 имеет порядок малости $\sigma_e = \sqrt{\langle \tilde{e}^2 \rangle}$, Φ_2 — порядок σ_e^2 и т. д. Подставив (40.4) в (40.3) и приравнивая нуль группы членов одинакового порядка малости, получаем следующую систему уравнений последовательных приближений:

$$2ik \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Phi_1 = -k^2 \tilde{e}(\rho, z), \quad (40.5a)$$

$$2ik \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Phi_2 = -(\nabla_{\perp} \Phi_1)^2, \quad (40.5b)$$

$$2ik \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Phi_3 = -2\nabla_{\perp} \Phi_1 \cdot \nabla_{\perp} \Phi_2, \quad (40.5c)$$

.....

Рассмотрим при помощи этих уравнений задачу о флюктуациях уровня и фазы волны в статистически однородной случайной среде, заполняющей полупространство $z > 0$, если из области $z < 0$ на нее падает плоская волна $u(\rho, z) = A_0 \exp(ikz)$. Поскольку мы пренебрежли обратным рассеянием, на границе $z = 0$ должно быть непрерывным только поле u , но не du/dz :

$$u(\rho, 0) = A_0, \quad v(\rho, 0) = A_0, \quad \Phi(\rho, 0) = \ln \frac{v(\rho, 0)}{A_0} = 0.$$

Таким образом, граничные условия ко всем уравнениям (40.5) имеют один и тот же вид:

$$\Phi_l(\rho, 0) = 0, \quad l = 1, 2, \dots,$$

а сами уравнения различаются только правыми частями. Поэтому решение любого из этих уравнений можно представить в виде

$$\Phi_l(\rho, z) = \int_0^z dz' \int d^3\rho' K(\rho - \rho', z - z') f_l(\rho', z'), \quad (40.6)$$

где K — функция Грина оператора $2ik \frac{\partial}{\partial z} + \Delta_{\perp}$, а f_l — правая часть соответствующего уравнения для Φ_l .

Фактически удается вычислить лишь несколько первых членов ряда (40.4) (обычно используется только первое приближение, а следующий член Φ_2 служит лишь для оценки погрешности). Для того чтобы Φ мало отличалось от Φ_1 , необходимо, чтобы правые части уравнений (40.5) достаточно быстро убывали с ростом номера l , т. е. необходимо потребовать выполнения неравенства

$$|\nabla_{\perp} \Phi_1|^2 \ll k^2 \sigma_e, \quad \text{или} \quad |\lambda \nabla_{\perp} \Phi_1|^2 \ll \sigma_e. \quad (40.7)$$

Условие (40.7) означает, что изменения Φ , на поперечных расстояниях порядка длины волны λ должны быть малыми по сравнению с σ_e (сама величина Φ , имеет тот же порядок малости, что и σ_e). Таким образом, условие (40.7) требует достаточной плавности изменения Φ_l . В связи с этим и сам метод, основанный на использовании теории возмущений для комплексной фазы Φ , получил название метода плавных возмущений (МПВ).

Входящая в (40.6) функция Грина имеет вид (см. задачу 2)

$$K(\rho - \rho', z - z') = -\frac{1}{4\pi(z-z')} \exp\left(\frac{ik(\rho-\rho')^2}{2(z-z')}\right). \quad (40.8)$$

Она отличается от функции Грина уравнения Гельмгольца, взятой в приближении Фрепеля (см. (38.12)), лишь отсутствием множителя $\exp(ik(z-z'))$.

В дальнейшем вместо формулы (40.6) мы будем пользоваться соответствующей формулой, связывающей трансформанты Фурье по поперечным координатам:

$$\Phi_l(\rho, z) = \int \Phi_l(x, z) \exp(ix\rho) d^3x,$$

$$f_l(\rho, z) = \int \mu_l(x, z) \exp(ix\rho) d^3x.$$

Эквивалентная (40.6) формула имеет вид (см. задачу 2)

$$\varphi_t(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{2ik} \int_0^z \exp\left(-\frac{i\mathbf{x}^2(z-z')}{2k}\right) \mu_t(\mathbf{x}, z') dz'. \quad (40.9)$$

Рассмотрим первое приближение Φ_1 . Согласно (40.5а) $f_1(\rho, z) = -k^2 \tilde{\epsilon}(\rho, z)$ и из (40.9) получаем (опустим индекс 1 в Φ_1)

$$\varphi(\mathbf{x}, z) = \frac{ik}{2} \int_0^z \exp\left(-\frac{i\mathbf{x}^2(z-z')}{2k}\right) \epsilon(\mathbf{x}, z') dz', \quad (40.10)$$

где $\epsilon(\mathbf{x}, z)$ — случайная двумерная амплитуда Фурье диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(\rho, z)$. Переайдем теперь к уровню $\chi = \operatorname{Re} \Phi$ и фазе $S' = \operatorname{Im} \Phi$.

Так как

$$\Phi(\rho, z) = \int \varphi(\mathbf{x}, z) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2x,$$

$$\Phi^*(\rho, z) = \int \varphi^*(\mathbf{x}, z) \exp(-i\mathbf{x}\rho) d^2x = \int \varphi^*(-\mathbf{x}, z) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2x,$$

можно написать

$$\begin{aligned} \chi(\rho, z) &= \\ &= \int \chi(\mathbf{x}, z) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2x = \frac{\Phi + \Phi^*}{2} = \int \frac{\varphi(\mathbf{x}, z) + \varphi^*(-\mathbf{x}, z)}{2} \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2x, \end{aligned} \quad (40.11)$$

$$S'(\rho, z) =$$

$$= \int S'(\mathbf{x}, z) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2x = \frac{\Phi - \Phi^*}{2i} = \int \frac{\varphi(\mathbf{x}, z) - \varphi^*(-\mathbf{x}, z)}{2i} \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2x, \quad (40.12)$$

причем спектральные амплитуды уровня и фазы выражаются через $\varphi(\mathbf{x}, z)$ следующим образом:

$$\chi(\mathbf{x}, z) = \frac{\varphi(\mathbf{x}, z) + \varphi^*(-\mathbf{x}, z)}{2}, \quad S'(\mathbf{x}, z) = \frac{\varphi(\mathbf{x}, z) - \varphi^*(-\mathbf{x}, z)}{2i}. \quad (40.13)$$

Найдем $\varphi^*(-\mathbf{x}, z)$. Так как поле $\tilde{\epsilon}(\rho, z)$ вещественно, имеем $\epsilon^*(-\mathbf{x}, z') = \epsilon(\mathbf{x}, z')$, и поэтому из (40.10) получаем

$$\varphi^*(-\mathbf{x}, z) = -\frac{ik}{2} \int_0^z \exp\left\{-\frac{i\mathbf{x}^2(z-z')}{2k}\right\} \epsilon(\mathbf{x}, z') dz'. \quad (40.14)$$

Подставляя (40.10) и (40.14) в (40.13), находим

$$\chi(\mathbf{x}, z) = \frac{k}{2} \int_0^z \sin\left[\frac{\mathbf{x}^2(z-z')}{2k}\right] \epsilon(\mathbf{x}, z') dz', \quad (40.15)$$

$$S'(\mathbf{x}, z) = \frac{k}{2} \int_0^z \cos\left[\frac{\mathbf{x}^2(z-z')}{2k}\right] \epsilon(\mathbf{x}, z') dz'. \quad (40.16)$$

Усреднив эти формулы, получим $\bar{\chi}_1 = \bar{S}_1 = 0$ (здесь мы восстановили индекс 1, так как средние значения уровня и фазы равны нулю только в первом приближении). Во втором приближении в формулах, аналогичных (40.15) и (40.16), вместо $e(\mathbf{x}, z)$ фигурировала бы спектральная плотность величины $(V_1 \Phi_1)^2$ (см. (40.5б)), среднее значение которой не равно нулю. Тем самым и величины $\bar{\chi}_2$ и \bar{S}_2 оказались бы отличными от нуля. На вычислении этих средних мы остановимся позднее. Если же нас интересуют средние квадратичные величины, например $\bar{\chi}^2$, $\bar{S}^{1/2}$, то формулы (40.15) и (40.16) достаточны для их расчета (учет членов второго порядка в $\chi(\mathbf{x}, z)$ привел бы к членам третьего порядка малости в $\langle \chi^2 \rangle$, малым по сравнению с основным членом).

Рассмотрим корреляционную функцию уровня χ в плоскости $z = \text{const}$. Из (40.11) имеем

$$\begin{aligned}\psi_\chi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; z) &= \langle \chi(\mathbf{p}_1, z) \chi(\mathbf{p}_2, z) \rangle = \\ &= \int d^2\mathbf{x}_1 \int d^2\mathbf{x}_2 \exp[i(\mathbf{x}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{p}_2)] \langle \chi(\mathbf{x}_1, z) \chi(\mathbf{x}_2, z) \rangle.\end{aligned}\quad (40.17)$$

Таким образом, для расчета ψ_χ необходимо знать функцию корреляции спектральных компонент, входящую в (40.17). Используя (40.15), получаем

$$\begin{aligned}\langle \chi(\mathbf{x}_1, z) \chi(\mathbf{x}_2, z) \rangle &= \\ &= \frac{k^2}{4} \int_0^z dz_1 \int_0^z dz_2 \sin\left[\frac{\mathbf{x}_1^2(z-z_1)}{2k}\right] \sin\left[\frac{\mathbf{x}_2^2(z-z_2)}{2k}\right] \langle e(\mathbf{x}_1, z_1) e(\mathbf{x}_2, z_2) \rangle.\end{aligned}\quad (40.18)$$

Но для статистически однородной случайной среды справедлива формула

$$\langle e(\mathbf{x}_1, z_1) e(\mathbf{x}_2, z_2) \rangle = \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) F_e(\mathbf{x}_1, z_1 - z_2), \quad (40.19)$$

где двумерная спектральная плотность F_e сосредоточена в области

$$|\mathbf{x}| |z_1 - z_2| < 2\pi \quad (40.20)$$

(см. задачу 4 к гл. I).

Из (40.19) и (40.18) следует, что

$$\langle \chi(\mathbf{x}_1, z) \chi(\mathbf{x}_2, z) \rangle = \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) F_\chi(\mathbf{x}, z), \quad (40.21)$$

где

$$\begin{aligned}F_\chi(\mathbf{x}, z) &= \\ &= \frac{k^2}{4} \int_0^z dz_1 \int_0^z dz_2 \sin\left[\frac{\mathbf{x}^2(z-z_1)}{2k}\right] \sin\left[\frac{\mathbf{x}^2(z-z_2)}{2k}\right] F_e(\mathbf{x}, z_1 - z_2).\end{aligned}\quad (40.22)$$

Если подставить (40.21) в выражение (40.17) для ψ_x , то получим

$$\psi_x(\rho_1, \rho_2; z) = \int d^2x \exp[i\kappa(\rho_1 - \rho_2)] F_x(x, z). \quad (40.23)$$

Мы видим, что функция $F_x(x, z)$ представляет собой двумерный (в плоскости $z = \text{const}$) пространственный спектр флюктуаций уровня.

Формулу (40.22), связывающую двумерные плотности флюктуаций уровня и флюктуаций e , можно существенно упростить, если использовать свойство функции F_e , выражаемое неравенством (40.20). Для этого сначала введем в (40.22) новые

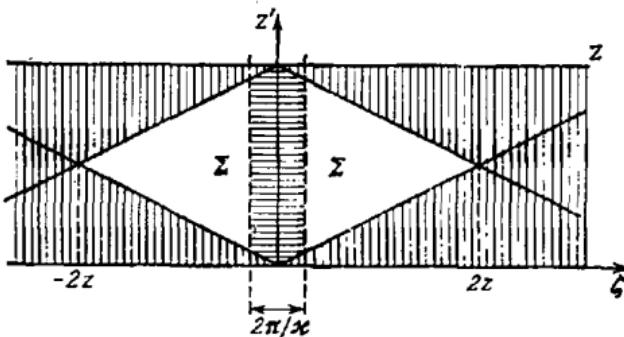


Рис. 52.

переменные интегрирования $z' = (z_1 + z_2)/2$, $\zeta = z_1 - z_2$. Для этих переменных уравнения границ областей интегрирования будут $z' = \pm \zeta/2$, $z' = z \pm (\zeta/2)$, и (40.22) примет вид

$$F_x(x, z) = \frac{k^2}{4} \int_{\Sigma} dz' d\zeta \sin \left[\frac{x^2(z-z')}{2k} - \frac{x^2 \zeta^2}{4k} \right] \times \\ \times \sin \left[\frac{x^2(z-z')}{2k} + \frac{x^2 \zeta^2}{4k} \right] F_e(x, \zeta). \quad (40.24)$$

Область интегрирования Σ изображена на рис. 52.

В силу (40.20) в области, существенной для интегрирования по ζ , справедливо неравенство $x\zeta < 2\pi$. Поэтому члены $x^2\zeta/4k$ в аргументах синусов можно оценить в этой области следующим образом:

$$\frac{x^2 \zeta^2}{4k} < \frac{x^2 \pi}{4k} < \frac{\pi}{2} \frac{x_m}{k} \ll \frac{\pi}{2},$$

поскольку максимальное волновое число x_m , ограничивающее область, где сосредоточена функция $F_e(x, \zeta)$, по предположению мало по сравнению с волновым числом k . Следовательно, с точностью до поправок порядка малости x_m/k можно вообще отбросить члены $\pm x^2 \zeta/4k$ в аргументах синусов, и (40.24) переходит

тогда в формулу

$$F_x(x, z) = \frac{k^2}{4} \int_{\Sigma} dz' d\zeta \sin^2 \left[\frac{x^2(z-z')}{2k} \right] F_e(x, \zeta). \quad (40.25)$$

Рассмотрим спектральную плотность $F_x(x, z)$ при таких x , которые удовлетворяют условию

$$xz \gg 1. \quad (40.26)$$

Это неравенство означает, что характерные поперечные масштабы неоднородностей уровня, которые мы хотим рассмотреть, малы по сравнению с длиной трассы z ($2\pi/x \ll z$). Для таких значений x область, существенная для интегрирования по ζ , ограничена в силу (40.20) неравенством $|\zeta| < 2\pi/x \ll z$. Следовательно, из всей области интегрирования, изображенной на рис. 52, существенной является лишь узкая полоса ширины $2\pi/x \ll z$ вблизи оси $\zeta = 0$ (на рис. 52 она указана горизонтальной штриховкой). Вне этой полосы функция $F_e(x, \zeta)$ пренебрежимо мала, что позволяет добавить к области интегрирования Σ дополнительные участки, изображенные на рис. 52 вертикальной штриховкой, т. е. расширить область интегрирования Σ до бесконечной (по ζ) полосы $0 < z' < z$ (аналогичные соображения использовались в § 33, рис. 38). Так как в добавляемой области интегрирования функция F_e пренебрежимо мала (например, она убывает там с ростом ζ экспоненциально, как в случае степенных спектров Φ_e), то допускаемая при этом погрешность несущественна. В результате описанного преобразования мы получаем из (40.25) выражение

$$F_x(x, z) = \frac{k^2}{4} \int_0^z \sin^2 \left[\frac{x^2(z-z')}{2k} \right] dz' \int_{-\infty}^{\infty} F_e(x, \zeta) d\zeta. \quad (40.27)$$

Но функция $F_e(x, \zeta)$ удовлетворяет равенству (см. формулу (3) в задаче 4 к гл. I)

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_e(x, \zeta) d\zeta = 2\pi \Phi_e(x, 0), \quad (40.28)$$

где $\Phi_e(x, 0)$ — трехмерная спектральная плотность флюктуаций \tilde{e} , аргументом которой является двумерный вектор $(x, 0)$. Используя это равенство и вычисляя первый из входящих в (40.27) интегралов, получаем окончательную формулу для F_x :

$$F_x(x, z) = \frac{\pi k^2 z}{4} \left[1 - \frac{k}{x^2 z} \sin \frac{x^2 z}{k} \right] \Phi_e(x, 0). \quad (40.29)$$

Эта формула получена для области $\kappa z \gg 1$, т. е. $\kappa \gg z^{-1}$. Однако в области $\kappa \ll \sqrt{k/z}$ функция $1 - \frac{k}{\kappa^2 z} \sin \frac{\kappa^2 z}{k}$ стремится к нулю, как κ^4 . Поэтому, если $\sqrt{k/z} \gg z^{-1}$ (т. е. $\sqrt{z} \gg 1$), то практически во всей области, где сосредоточена функция (40.29), условие $\kappa z \gg 1$ хорошо выполняется. Поэтому ограничение $\kappa z \gg 1$, использованное при выводе (40.29), несущественно, если выполняется условие

$$\sqrt{z} \gg 1,$$

означающее, что на длине трассы укладывается много длии волн.

Остановимся еще на одном чисто формальном обстоятельстве, которое, однако, в дальнейшем будет использовано. При выводе формулы (40.29) мы предположили, что $F_e(\kappa, z)$ является «острой» функцией ζ практически для всех представляющих интерес значений κ . Фактически мы плавным образом заменили функцию $F_e(\kappa, z)$ на дельта-функцию $\delta(\zeta)$. Убедимся, что при замене

$$F_e(\kappa, \zeta) \rightarrow 2\pi\Phi_e(\kappa, 0) \delta(\zeta) \equiv F_e^{\text{фф}}(\kappa, z) \quad (40.30)$$

мы сразу же получаем из (40.22) формулу (40.29). Действительно, подставляя (40.30) в (40.22) и выполняя интегрирование по z_2 , мы получаем формулу (40.27), в которой использован интеграл (40.28).

Подобно тому, как, исходя из формулы (40.15), мы подсчитали двумерную спектральную плотность флуктуаций уровня, можно вычислить и двумерную спектральную плотность фазы $F_S(\kappa, z)$, если исходить из формулы (40.16). Не приводя вычисления (см. задачу 3), дадим окончательный результат:

$$F_S(\kappa, z) = \frac{\pi k^2 z}{4} \left[1 + \frac{k}{\kappa^2 z} \sin \frac{\kappa^2 z}{k} \right] \Phi_e(\kappa, 0). \quad (40.31)$$

Корреляционная функция флуктуаций фазы в плоскости $z = \text{const}$ выражается через функцию $F_S(\kappa, z)$ обычным образом:

$$\psi_S(\rho, z) = \int F_S(\kappa, z) \exp(i\kappa\rho) d^2\kappa. \quad (40.32)$$

Если поле $\tilde{\varepsilon}(\rho, z)$ статистически изотропно в плоскостях $z = \text{const}$ или в трехмерном пространстве, то $\psi_e(\rho, z) = \Phi_e(\rho, z)$ и трехмерная спектральная плотность $\Phi_e(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$ имеет вид $\Phi_e(\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}, \kappa_z)$. В этом случае $\Phi_e(\kappa, 0) = \Phi_e(\kappa, 0)$, т. е. зависит лишь от модуля двумерного вектора κ . Из формул (40.29) и (40.31) при этом следует, что спектральные плотности $F_x(\kappa, z)$ и $F_S(\kappa, z)$ тоже зависят лишь от $\kappa = |\kappa|$ и, значит, случайные поля χ и S' статистически изотропны в плоскостях $z = \text{const}$. Формулы, выражающие корреляционные функции ψ_χ и ψ_S через

F_x и F_S , принимают при этом вид

$$\Psi_x(p, z) = \frac{\pi^2 k^2 z}{2} \int_0^\infty J_0(xp) \left(1 - \frac{k}{x^2 z} \sin \frac{x^2 z}{k}\right) \Phi_e(x, 0) dx, \quad (40.33)$$

$$\Psi_S(p, z) = \frac{\pi^2 k^2 z}{2} \int_0^\infty J_0(xp) \left(1 + \frac{k}{x^2 z} \sin \frac{x^2 z}{k}\right) \Phi_e(x, 0) dx, \quad (40.34)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя.

Структурная функция фазы $D_S(p, z) = \langle [S'(p_1, z) - S'(p_1 + p, z)]^2 \rangle$ выражается в этом случае интегралом

$$D_S(p, z) = \pi^2 k^2 z \int_0^\infty [1 - J_0(xp)] \left(1 + \frac{k}{x^2 z} \sin \frac{x^2 z}{k}\right) \Phi_e(x, 0) dx. \quad (40.35)$$

§ 41. Анализ результатов МПВ

Проанализируем полученные в предыдущем параграфе результаты. Рассмотрим функцию

$$W_x(x, z) = 1 - \frac{k}{x^2 z} \sin \frac{x^2 z}{k}, \quad (41.1)$$

т. е. множитель, переводящий $\Phi_e(x, 0)$ в $F_x(x, z)$. Разлагая синус в ряд Тейлора, получаем

$$W_x(x, z) = \frac{1}{6} \left(\frac{x^2 z}{k}\right)^2 - \frac{1}{120} \left(\frac{x^2 z}{k}\right)^4 + \dots \quad (41.2)$$

Таким образом, в области

$$\frac{x^2 z}{k} \ll 1, \text{ или } x \ll x_F = \sqrt{k/z},$$

функция $W_x(x)$ пропорциональна x^4 . Характерное волновое число $x_F = \sqrt{k/z} = \sqrt{2\pi/\lambda z}$ соответствует по порядку величины радиусу первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda z}$. В области $x \gg x_F$ функция W_x перестает зависеть от x и стремится к единице. График функции $W_x(x, z)$ изображен на рис. 53. Что касается функции

$$W_S(x, z) = 1 + \frac{k}{x^2 z} \sin \frac{x^2 z}{k}, \quad (41.3)$$

фигурирующей в (40.31), то при $x = 0$ она равна 2, а при $x \gg x_F$ стремится, как и W_x , к единице (рис. 53).

Вид функции $\Phi_e(x, 0)$ может быть различным в разных задачах, но мы предположили, что волновое число x_{ϕ} , соответствующее размеру наименьших неоднородностей среды, всегда мало по сравнению с волновым числом излучения k , и поэтому

в области $x > x_m$ функция $\Phi_e(x, 0)$ пренебрежимо мала. Что же касается величины $x_m/x_F = \sqrt{x_m^2 z/k} = \sqrt{2\pi\lambda z/l_0^2}$, то она зависит от отношения радиуса первой зоны Френеля к размеру наименьших неоднородностей диэлектрической проницаемости. Как мы помним, величину $D = x_m^2/x_F^2 \sim \lambda z/l_0^2$ принято называть *волновым параметром* (§ 10).

Рассмотрим сначала случай $D \ll 1$, т. е. $x_m \ll x_F$ или $l_0 \gg \sqrt{\lambda z}$ (рис. 54). Как уже отмечалось, в этом случае справедлива геометрическая оптика. Во всей области, где сосредоточена функция $\Phi_e(x, 0)$, можно при $D \ll 1$ с достаточной степенью точности ограничиться первыми членами разложений $W_x(x, z)$ и $W_s(x, z)$, т. е. считать, что

$$W_x(x, z) \approx \frac{1}{6} \frac{x^4 z^2}{k^2},$$

$$W_s(x, z) \approx 2. \quad (41.4)$$

Для двумерных пространственных спектров уровня и фазы формулы (40.29) и (40.31) дают при этом

$$F_x(x, z) = \frac{\pi}{24} z^3 x^4 \Phi_e(x, 0), \quad F_s(x, z) = \frac{\pi k^2 z}{2} \Phi_e(x, 0). \quad (41.5)$$

Таким образом, как уже было показано в гл. V, в области применимости геометрической оптики средний квадрат флуктуаций уровня растет с расстоянием, как z^8 , а средний квадрат флуктуаций фазы — как z . Волновое число k не входит в формулу для $F_x(x, z)$, т. е. в геометро-оптическом пределе флуктуации уровня не зависят от длины волны.

Средний квадрат флуктуаций уровня выражается через F_x при помощи формулы

$$\bar{x}^2 = \int F_x(x, z) d^2x = \frac{\pi z^3}{24} \int x^4 \Phi_e(x, 0) d^2x. \quad (41.6)$$

Отсюда видно, что вклад компонент спектра, соответствующих крупномасштабным неоднородностям, которым отвечают малые значения x , подавляется множителем x^4 , обращающимся в нуль

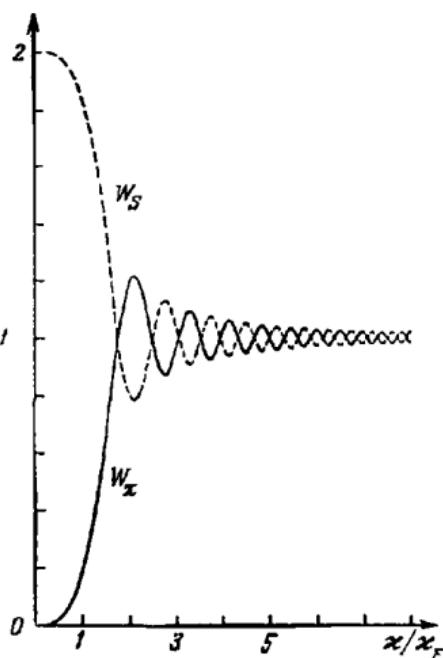


Рис. 53.

при $\chi = 0$. Основной вклад в $\overline{\chi^2}$ вносит часть спектра, отвечающая мелкомасштабным неоднородностям. В этой области произ-

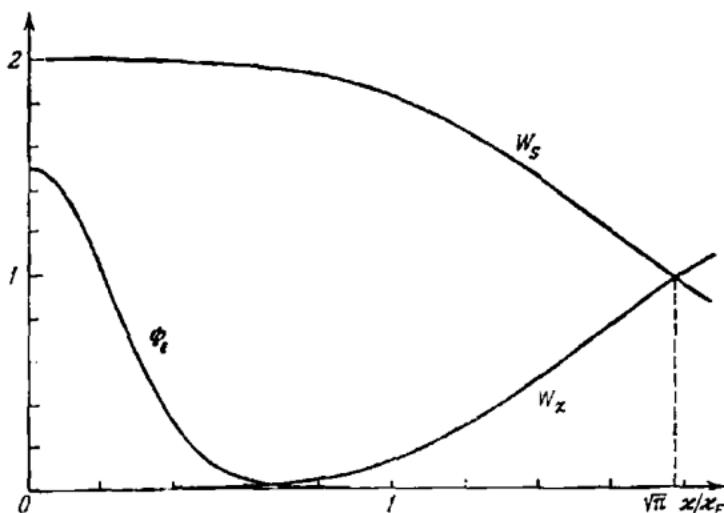


Рис. 54.

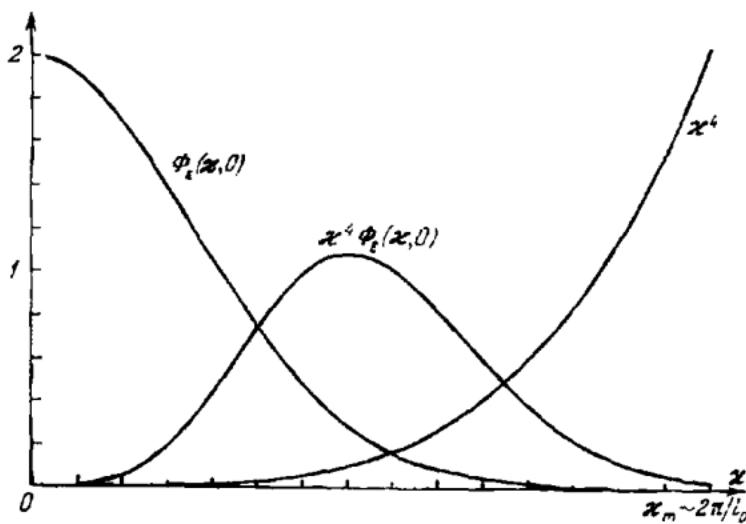


Рис. 55.

ведение $x^4 \Phi_t(x, 0)$ имеет максимум. В связи с этим и поперечный радиус корреляции для флюктуаций χ имеет порядок величины l_0 (рис. 55).

Формулу (41.6) можно представить также в виде

$$\overline{\chi^2} = \frac{z^3}{24} \int_0^\infty [\Delta_{\perp}^2 \Psi_e(\rho, \zeta)]_{\rho=0} d\zeta \quad (41.7)$$

(см. задачу 5). В этой форме выражение для $\overline{\chi^2}$ уже было получено в гл. V при помощи МГО (см. (35.11)).

Для среднего квадрата флюктуаций фазы из (40.31) и (41.4) находим

$$\overline{S'^2} = \frac{\pi k^2 z}{2} \int \Phi_e(\kappa, 0) d^2 \kappa. \quad (41.8)$$

Здесь основной вклад обусловлен той же частью спектра неоднородностей, для которой $\Phi_e(\kappa, 0)$ максимально. Таким образом, амплитудные и фазовые флюктуации обусловлены *разными* участками спектра неоднородностей диэлектрической проницаемости.

Формулу (41.8) можно представить также в виде (см. задачу 5)

$$\overline{S'^2} = \frac{k^2 z}{2} \int_0^\infty \psi_e(0, \zeta) d\zeta, \quad (41.9)$$

что отвечает формуле (33.9) для эйконала $\varphi = S'/k$, полученной при помощи МГО. Мы видим, таким образом, что найденные при помощи МПВ формулы переходят в предельном случае $D \ll 1$ ($\sqrt{\lambda z} \ll l_0$) в соответствующие формулы приближения геометрической оптики.

Рассмотрим теперь другой предельный случай $D \gg 1$, соответствующий фраунгоферовой дифракционной зоне.

Если трехмерный спектр $\Phi_e(\kappa)$ обладает несколькими характерными масштабами κ_n ($n = 1, 2, \dots$), то мы будем считать, что условие $D = \kappa_n^2/\kappa_F^2 \gg 1$ выполнено для наименьшего из этих волновых чисел κ_1 , т. е. область пространства, в которой рассматривается поле, отвечает фраунгоферовой зоне для неоднородностей всех масштабов, присутствующих в среде.

Взаимное расположение кривых W_x , W_s и Φ_e для этого случая показано на рис. 56. Мы видим, что в большей части области, существенной для интегрирования, $W_x \approx W_s \approx 1$. Поэтому, если трехмерная спектральная плотность $\Phi_e(\kappa, 0)$ не имеет неинтегрируемой особенности в нуле (и, значит, изменение в нуле весовой функции $W_x(\kappa, z)$ не играет роли), можно считать, что

$$F_x(\kappa, z) \approx F_s(\kappa, z) \approx \frac{\pi k^2 z}{4} \Phi_e(\kappa, 0), \quad D \gg 1. \quad (41.10)$$

Таким образом, в предельном случае больших D спектральные плотности флуктуаций амплитуды и фазы оказываются примерно одинаковыми, в силу чего примерно одинаковы и корреляционные функции:

$$\psi_x(\rho, z) \approx \psi_s(\rho, z) \approx \frac{\pi k^2 z}{4} \int \exp(i\kappa\rho) \Phi_e(\kappa, 0) d^2\kappa, \quad D \gg 1. \quad (41.11)$$

Для средних квадратов флуктуаций уровня и фазы при $D \gg 1$ получаем

$$\bar{\chi}^2 \approx \bar{S'^2} \approx \frac{\pi k^2 z}{4} \int \Phi_e(\kappa, 0) d^2\kappa, \quad D \gg 1. \quad (41.12)$$

Отметим, что формула для среднего квадрата флуктуаций фазы в случае $D \gg 1$ отличается от формулы (41.8), справедливой при $D \ll 1$, только вдвое меньшим коэффициентом. Что

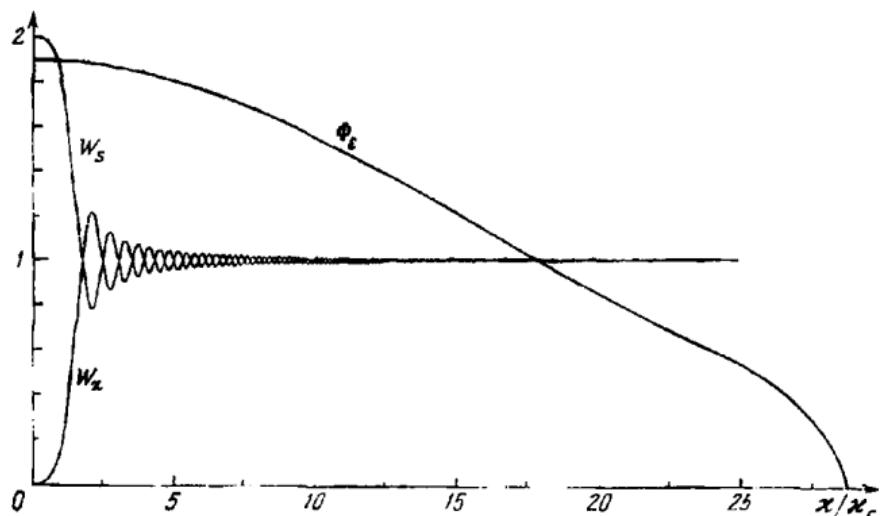


Рис. 56.

касается флуктуаций уровня, то здесь при переходе к случаю $D \gg 1$ меняется вид зависимости $\bar{\chi}^2$ от z : при $D \ll 1$, согласно (41.6), $\bar{\chi}^2 \sim z^3$, тогда как $\bar{\chi}^2 \sim z$ при $D \gg 1$. Иначе говоря, при постепенном увеличении z величина $\bar{\chi}^2$ сначала (в зоне геометрической оптики, где $D \sim \lambda z / l_e^2 \ll 1$) растет, как z^3 , а затем (во фраунгоферовой зоне, когда величина $\lambda z / l_e^2$ становится большой) рост $\bar{\chi}^2$ замедляется до линейного:

$$\bar{\chi}^2 = \begin{cases} \frac{\pi z^3}{24} \int \kappa^4 \Phi_e(\kappa, 0) d^2\kappa & \text{при } z \ll l_e^2/\lambda, \\ \frac{\pi k^2 z}{4} \int \Phi_e(\kappa, 0) d^2\kappa & \text{при } z \gg l_e^2/\lambda. \end{cases} \quad (41.13)$$

Рассмотрим в качестве примера среду, у которой корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости описывается гауссовой кривой

$$\Phi_e(r) = \sigma_e^2 \exp\{-r^2/2a^2\}, \quad (41.14)$$

а соответствующая трехмерная спектральная плотность имеет вид

$$\Phi_e(\kappa) = \frac{\sigma_e^2 a^3}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right\}. \quad (41.15)$$

Размер неоднородностей характеризуется здесь единственным масштабом a .

Несложный расчет приводит для такого спектра $\Phi_e(\kappa)$ к следующим выражениям для $\bar{\chi}^2$ и \bar{S}'^2 (см. задачу 6):

$$\bar{\chi}^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \sigma_e^2 k^2 a z \left[1 - \frac{\operatorname{arctg} D}{D} \right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{16} \sigma_e^2 (ka)^3 (D - \operatorname{arctg} D), \quad (41.16)$$

$$\bar{S}'^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \sigma_e^2 k^2 a z \left[1 + \frac{\operatorname{arctg} D}{D} \right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{16} \sigma_e^2 (ka)^3 (D + \operatorname{arctg} D), \quad (41.17)$$

где $D = 2z/ka^2$. При $D \rightarrow 0$ можно использовать разложение $\operatorname{arctg} D = D - D^3/3 + \dots$, что приводит, в согласии с (41.6) и (41.7), к кубической зависимости $\bar{\chi}^2$ от z :

$$\bar{\chi}^2 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_e^2 \left(\frac{z}{a} \right)^3, \quad D \ll 1, \quad (41.18)$$

а для \bar{S}'^2 , в согласии с (41.8), — к линейной зависимости:

$$\bar{S}'^2 = \frac{1}{4} \sqrt{2\pi} \sigma_e^2 k^2 a z, \quad D \ll 1. \quad (41.19)$$

В случае же $D \gg 1$ членами $\pm \operatorname{arctg} D/D$ в (41.16) и (41.17) можно пренебречь, и тогда, в соответствии с (41.12), получаются примерно одинаковые выражения для $\bar{\chi}^2$ и \bar{S}'^2 :

$$\bar{\chi}^2 \approx \bar{S}'^2 \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \sigma_e^2 k^2 a z, \quad D \gg 1. \quad (41.20)$$

Графики функций $\bar{\chi}^2$ и \bar{S}'^2 , отнесенных к $\sqrt{2\pi} \sigma_e^2 (ka)^3 / 16$ в зависимости от D приведены на рис. 57.

Следует отметить, что формулы того же вида, что и (41.18) — (41.20), справедливы и в более общем случае, когда трехмерная спектральная плотность неоднородностей $\Phi_e(\kappa)$ всюду ограничена ($\Phi_e(\kappa) < C$) и имеет максимум в точке $\kappa = 0$. Исходя из общих формул (41.6), (41.8) и (41.12), можно показать, что при $D \ll 1$

$$\bar{\chi}^2 \sim \sigma_e^2 (z/l_e)^3, \quad \bar{S}'^2 \sim \sigma_e^2 k^2 l_e z,$$

а при $D \gg 1$

$$\bar{\chi}^2 \approx \bar{S'^2} \sim \sigma_e^2 k^3 l_e z,$$

где l_e — радиус корреляции флюктуаций \hat{e} .

Рассмотрим теперь другой пример, который не укладывается в общие предельные соотношения (41.10) — (41.12). Мы имеем в

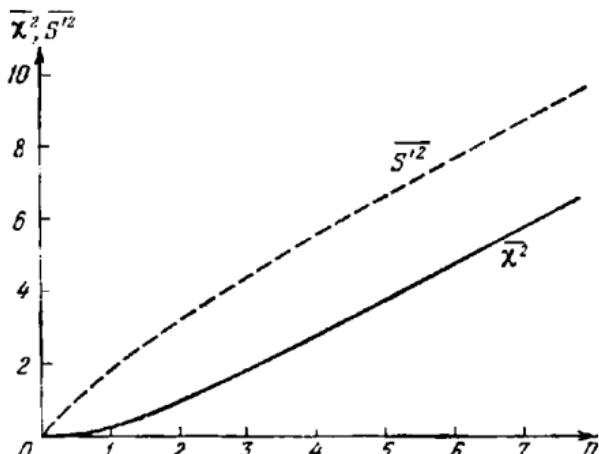


Рис. 57.

виду степенной спектр, соответствующий флюктуациям диэлектрической проницаемости, вызываемым турбулентностью:

$$\Phi_e(x) = A C_e x^{-11/4}. \quad (41.21)$$

Здесь $A \approx 0,033$, а C_e^2 — структурная характеристика, входящая в «закон 2/3» для флюктуаций диэлектрической проницаемости. В действительности спектр $\Phi_e(x)$ является степенным лишь в ограниченном диапазоне волновых чисел

$$\kappa_0 \ll x \ll \kappa_m, \quad \kappa_0 = 2\pi/L_0, \quad \kappa_m = 2\pi/l_0, \quad (41.22)$$

где l_0 и L_0 — соответственно внутренний и внешний масштабы турбулентности. Однако во многих практических интересных случаях волновой параметр $D_0 = \kappa_0^2/\kappa_F^2$, «составленный» из радиуса первой зоны Френеля и внешнего масштаба турбулентности L_0 , не превышает единицы даже на достаточно больших дистанциях z^1 .

¹⁾ Например, при распространении света в атмосфере типичные значения радиуса первой зоны Френеля не превышают несколько десятков сантиметров, тогда как внешний масштаб турбулентности L_0 порядка нескольких метров. На дистанциях в несколько сотен километров D_0 остается малым по сравнению с единицей.

Вместе с тем волновой параметр $D = \kappa_m^2/\kappa_F^2$, «составленный» из *внутреннего* масштаба турбулентности и радиуса первой зоны Френеля, может быть как меньше, так и больше единицы. В последнем случае метод геометрической оптики уже неприменим из-за наличия неоднородностей, меньших радиуса первой зоны Френеля. С другой стороны, поскольку $D_0 \ll 1$, всегда присутствуют и неоднородности размером больше $\sqrt{\lambda z}$, и для них поэтому еще характерен ис режим дифракции Фраунгофера, а френелевская дифракция или даже геометрическая оптика.

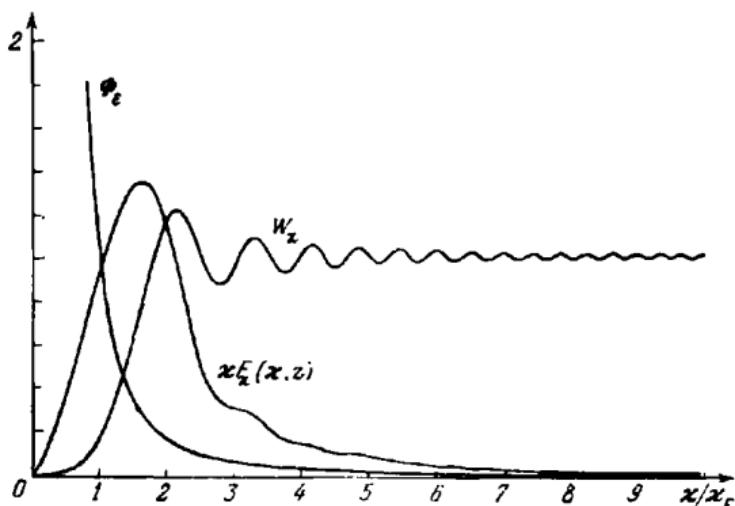


Рис. 58.

Предположим на время, что ограничения (41.22) отсутствуют. Тогда функция $\kappa F_x(x, z)$, интеграл от которой определяет $\bar{\chi}^2$, будет изображаться кривой, показанной на рис. 58. В области $x \ll \kappa_F$ имеем $\kappa F_x(x, z) \sim x \cdot x^4 \cdot x^{-1/2} = x^{11/2}$, т. е. $F_x(0, z) = 0$, а при $x \gg \kappa_F$ получаем $\kappa F_x(x, z) \sim x^{-1/2}$. Поэтому площадь под кривой $\kappa F_x(x, z)$ на рис. 58 конечна и интеграл

$$\bar{\chi}^2 = 2\pi \int_0^\infty F_x(x, z) x dx \quad (41.23)$$

сходится.

Посмотрим теперь, к чему приводит учет реального хода спектра $\Phi_e(x)$ вне интервала (x_0, x_m) , в котором справедлив закон (41.21). В области $x < x_0$ трехмерная спектральная плотность $\Phi_e(x)$ возрастает с уменьшением x медленнее, чем $x^{-1/2}$, или же вообще не возрастает.

Поэтому, если $\kappa_0 \ll \kappa_F$, то в области $\kappa < \kappa_0$ произведение $\kappa W_\kappa \Phi_e$ уже мало и не влияет существенно на значение интеграла (41.23). Следовательно, если «реальная» функция $\Phi_e(\kappa)$ в области $\kappa < \kappa_0$ уменьшится по сравнению с чисто степенной функцией (41.21), то это заметным образом не повлияет на значение интеграла (41.23). Таким образом, если $\kappa_0 \ll \kappa_F$, то отклонения «реального» спектра $\Phi_e(\kappa)$ от чисто степенного можно не учитывать.

Равным образом, если $\kappa_m \gg \kappa_F$, то точка κ_m лежит уже в той области, где произведение $\kappa F_\kappa \Phi_e$ мало и убывает с ростом κ , так что интеграл

$$\int_{\kappa_m}^{\infty} \kappa^{-1/2} \kappa d\kappa = \frac{3}{5} \kappa_m^{-1/2} \quad (41.24)$$

при больших κ_m настолько мал, что его вкладом в полный интеграл (41.23) тоже можно пренебречь. Поскольку интеграл от произведения «реального» спектра на W_κ отличается в высокочастотной части спектра от интеграла с чисто степенным спектром на малую величину (41.24), этой разницей при $\kappa_m \gg \kappa_F$ тоже можно пренебречь.

Итак, если выполняются условия $\kappa_0 \ll \kappa_F \ll \kappa_m$, то при расчете $\bar{\chi}^2$ можно считать, что $\Phi_e(\kappa) \sim \kappa^{-1/2}$ при всех κ , и в этом случае подстановка (41.21) в (40.33) дает

$$\Psi_\kappa(\rho, z) = \frac{\pi^2 \mathcal{A}}{2} C_g^2 k^2 z \int_0^\infty J_0(\kappa \rho) \left(1 - \frac{k}{\kappa^2 z} \sin \frac{\kappa^2 z}{k} \right) \kappa^{-1/2} d\kappa. \quad (41.25)$$

Замена переменной интегрирования $\kappa^2 z / k = t^2$ приводит этот интеграл к виду

$$\Psi_\kappa(\rho, z) = \frac{\pi^2 \mathcal{A}}{2} C_g^2 k^{1/2} z^{11/4} \int_0^\infty J_0 \left(\rho \sqrt{\frac{k}{z}} t \right) \left(1 - \frac{\sin t^2}{t^2} \right) t^{-5/2} dt. \quad (41.26)$$

Полагая $\rho = 0$ (напомним, что $J_0(0) = 1$), получаем для $\bar{\chi}^2 = \Psi_\kappa(0, z)$ выражение

$$\bar{\chi}^2 = N C_g^2 k^{1/4} z^{11/4}, \quad \kappa_0 \ll \kappa_F \ll \kappa_m, \quad (41.27)$$

где N — числовая константа, равная

$$N = \frac{\pi^4 \mathcal{A}}{2} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin t^2}{t^2} \right) t^{-5/2} dt \approx 0,077. \quad (41.28)$$

Степенная зависимость $\bar{\chi}^2$ от z (показатель 11/6) оказывается промежуточной между предельными случаями $\bar{\chi}^2 \sim z^3$ и $\bar{\chi}^2 \sim z$, соответствующими зоне геометрической оптики и зоне Фраунгофера. Это обусловлено тем, что при $\kappa_0 \ll \kappa_F \ll \kappa_m$ всегда существуют неоднородности, для которых точка наблюдения находится в зоне дифракции Френеля.

Расстояние ρ между точками наблюдения входит в (41.26) лишь в комбинации $\rho \sqrt{k'z} = \sqrt{2\pi\rho/\lambda z}$. Это означает, что радиус корреляции флуктуаций уровня имеет порядок величины $\sqrt{\lambda z}$. График корреляционной функции (41.26) приведен на рис. 59 (см. [11]).

Обратимся к флуктуациям фазы. Если подставить трехмерную спектральную плотность вида (41.26) в формулу (40.34) и не принимать во внимание ограничений (41.22), то интеграл в (40.34) будет расходиться в точке $\kappa=0$. Это обусловлено тем, что, в отличие от $W_x(\kappa, z)$, весовая функция $W_s(\kappa, z)$ не обращается в нуль при $\kappa=0$. Таким образом, роль компонент спектра, отвечающих крупномасштабным неоднородностям, пренебрежимо малая для амплитудных флуктуаций, оказывается для флуктуаций фазы не меньшей, чем роль мелкомасштабных компонент. Это не позволяет экстраполировать спектральную плотность вида (41.21) на область $\kappa < \kappa_0$. Для расчета величины \bar{S}'^2 необходимо знать истинную трехмерную спектральную плотность в указанной области волновых чисел, т. е. надо учитывать влияние крупных неоднородностей. Простейший способ учета «насыщения» флуктуаций в области крупных масштабов состоит в замене спектра (41.21) спектром (41.15), который не имеет особенностей при $\kappa \rightarrow 0$. Оценка дисперсии эйконала, отвечающая такому спектру, уже была ранее получена при помощи МГО (см. (36.8)).

Рассмотрим теперь структурную функцию фазы $D_S(\rho, z)$ в плоскости $z = \text{const}$. Здесь мы уже можем ожидать, что крупномасштабные неоднородности (с размерами, много большими ρ) не будут играть роли, так как они дают одинаковый вклад в волны фаз по обоим лучам и поэтому выпадают из разности $S'(\rho_1, z) - S'(\rho_2, z)$. В формуле (40.35) это находит отражение в том, что множитель $1 - J_0(\kappa\rho)$ в области $\kappa \ll \rho^{-1}$ ведет себя как κ^4 . Поэтому, если подставить степенной трехмерный спектр (41.21) в формулу (40.35) и не учитывать ограничения (41.22),

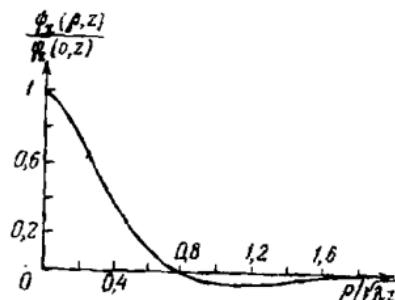


Рис. 59.

то мы получим сходящийся интеграл

$$D_S(\rho, z) = \pi^2 \mathcal{A} C_e^2 k^2 z \int_0^\infty [1 - J_0(x\rho)] \left(1 + \frac{k}{x^2 z} \sin \frac{x^2 z}{k}\right) x^{-1/2} dx. \quad (41.29)$$

Особенность в нуле имеет здесь вид $x^{2-1/2} = x^{-1/2}$, т. е. является интегрируемой. Повторяя рассуждения, проведенные при обосновании формулы (41.24), можно убедиться в том, что при выполнении условий

$$x_0 \ll 1/\rho \ll x_m \text{ или } l_0 \ll \rho \ll L_0 \quad (41.30)$$

справедлива формула (41.29). В этих рассуждениях волновое число $2\pi/\rho$ будет играть ту же роль, что x_F в предыдущем случае, так как весовая функция $[1 - J_0(x\rho)] W_S(x, z)$ при $x \ll 2\pi/\rho$ имеет вид x^2 , а при $x \gg 2\pi/\rho$ она приблизительно постоянна.

Сделав в интеграле (41.29) замену переменной $x\rho = t$, получаем

$$D_S(\rho, z) = \pi^2 \mathcal{A} C_e^2 k^2 \rho^{1/2} z \int_0^\infty [1 - J_0(t)] \left(1 + \frac{k\rho^2}{t^2 z} \sin \frac{t^2 z}{k\rho^2}\right) t^{-1/2} dt. \quad (41.31)$$

Исследование этого интеграла (см. задачу 7) приводит к следующим результатам. Если $l_0 \ll \rho \ll L_0$ и $k\rho^2 \gg z$, то

$$D_S(\rho, z) = 2MC_e^2 k^2 z \rho^{1/2}, \quad M = \pi^2 \cdot 1 \int_0^\infty [1 - J_0(t)] t^{-1/2} dt \approx 0,73, \quad (41.32)$$

а при $k\rho^2 \ll z$

$$D_S(\rho, z) = MC_e^2 k^2 z \rho^{1/2}. \quad (41.33)$$

Чтобы найти вид функций $\Psi_x(\rho, z)$ и $D_S(\rho, z)$ при $\rho \ll l_0$, необходимо учесть, что трехмерная спектральная плотность $\Phi_S(x)$ в области $x \gg x_m$ быстро убывает. Для области $\rho \ll l_0$ можно получить формулы (см. задачу 8)

$$\Psi_x(\rho, z) = \bar{\chi}^2(z) [1 - \alpha_1 (\rho/l_0)^2 + \dots], \quad (41.34)$$

$$D_S(\rho, z) = \alpha_2 (\rho/l_0)^2 + \dots \quad (41.35)$$

В заключение данного параграфа выведем ряд найденных выше основных формул при помощи простых рассуждений качественного характера (разумеется, мы не получим числовых коэффициентов, входящих в эти формулы).

Рассмотрим сначала флуктуации фазы. Как мы убедились выше, для их расчета достаточно использовать приближение геометрической оптики, так как учет дифракционных эффектов приводит лишь к изменению числовых коэффициентов. Возьмем луч

длины z . Если масштаб неоднородностей равен l_e , то на луче укладывается $N \sim z/l_e$ независимых неоднородностей. После прохождения одной неоднородности произойдет набег фазы волны, равный $l_e \frac{\omega}{c} V \tilde{e} \approx l_e k \left(1 + \frac{\tilde{e}}{2}\right)$, т. е. случайная компонента этого набега равна по порядку величины $l_e k \tilde{e}$. Так как случайные величины \tilde{e} , отвечающие различным неоднородностям, статистически независимы, для суммарного среднего квадрата набега фазы имеем $S'^2 \sim N (l_e k \tilde{e})^2 = \frac{z}{l_e} l_e^2 k^2 \sigma_e^2 = \sigma_e^2 k^2 l_e z$, что соответствует формуле (41.19).

Оценим теперь в том же приближении геометрической оптики флуктуации амплитуды. Их можно рассматривать как результат случайных фокусировок и дефокусировок. Пусть по-прежнему неоднородность имеет размер l_e , а отклонение диэлектрической проницаемости от средней равно \tilde{e} . Как известно, фокусное расстояние линзы, ограниченной сферической поверхностью с радиусом R , равно $F = nR/(n - \bar{n})$, где n — показатель преломления линзы, а \bar{n} — окружающей среды. Поэтому для рассматриваемой неоднородности фокусное расстояние будет порядка $F \sim l_e/\tilde{e}$, а угол отклонения луча α (рис. 60) имеет порядок $\alpha \sim (l_e/F) \sim \tilde{e}$. Изменение диаметра упавшего на «линзу» пучка составит на расстоянии z позади нее величину $\Delta d = z\alpha \sim z\tilde{e}$. Но амплитуда волны A связана с диаметром пучка d соотношением $A^2 d^2 = A_0^{2/2}$, откуда $\Delta A/A = -\Delta d/d$. Если рассматривать только слабые флуктуации интенсивности, то фокусное расстояние F очень велико и d для $z \ll F$ будет порядка l_e , т. е. $A \sim A_0$ и, тем самым,

$$\frac{\Delta A}{A_0} \sim \frac{z\tilde{e}}{l_e}. \quad (41.36)$$

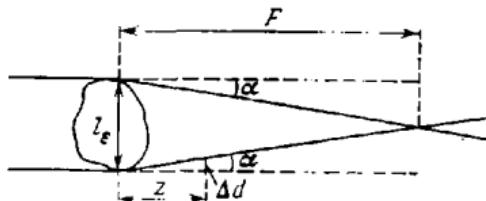


Рис. 60.

Мы подсчитали относительное изменение амплитуды, вызванное действием одной «линзы». Суммарная оптическая сила $1/F$ нескольких слабых «линз», расстояние между которыми мало по сравнению с их фокусными расстояниями, равна сумме оптических сил составляющих, так что суммарное изменение амплитуды будет

$$\frac{\delta A}{A_0} = \sum_j \frac{z\tilde{e}_j}{l_{ej}}.$$

Среднее значение этой суммы равно нулю, а для среднего квадрата получаем

$$\overline{\left(\frac{\delta A}{A_0}\right)^2} \approx \frac{z^2}{l_e^2} \sum \bar{\epsilon}_l^2 = \frac{z^2}{l_e^2} \sigma_e^2 N,$$

где $N \approx z/l_e$ — среднее число неоднородностей на дистанции z . В итоге

$$\overline{\left(\frac{\delta A}{A_0}\right)^2} \sim \sigma_e^2 \left(\frac{z}{l_e}\right)^3.$$

что соответствует формуле (41.18).

Возьмем теперь случай, когда в среде присутствуют неоднородности различных размеров, причем в соответствии с трехмерной спектральной плотностью (41.21), которой отвечает структурная функция $D_e(r) = C_e r^{1/3}$, неоднородность размера l характеризуется флюктуацией диэлектрической проницаемости $\bar{\epsilon}_l \sim C_e l^{1/3}$.

Рассмотрим сначала амплитудные флюктуации. Согласно формуле (41.36)

$$\frac{\Delta A}{A} \sim \frac{z C_e l^{1/3}}{l} \sim C_e \frac{z}{l^{2/3}}. \quad (41.37)$$

Мы видим, что эффект тем больше, чем меньше неоднородность. Если размер наименьших неоднородностей l_0 удовлетворяет условию $l_0 \gg \sqrt{\lambda z}$ (и поэтому дифракционными эффектами можно пренебречь), то в качестве l в (41.37) следует взять l_0 . Число таких неоднородностей на пути распространения волн равно $N \sim z/l_0$, и суммарный средний квадрат флюктуаций амплитуды будет равен по порядку величины

$$\overline{\left(\frac{\delta A}{A_0}\right)^2} \sim C_e^2 \left(\frac{z}{l_0^{2/3}}\right)^2 \frac{z}{l_0} \sim C_e^2 z^3 l_0^{-1/3}, \quad (\sqrt{\lambda z} \ll l_0). \quad (41.38)$$

Пусть теперь $l_0 \ll \sqrt{\lambda z}$, но вместе с тем $\sqrt{\lambda z} \ll L_0$, где L_0 — внешний масштаб неоднородностей. Это означает, что имеются неоднородности с размерами $l > \sqrt{\lambda z}$, к которым применима геометрическая оптика, а значит, и формула (41.37). В то же время к неоднородностям, размер которых l лежит в интервале $(l_0, \sqrt{\lambda z})$, геометрическая оптика неприменима и их действие необходимо рассматривать с учетом дифракционных эффектов. В данном случае роль дифракции сводится к тому, что линзы с размерами, меньшими $\sqrt{\lambda z}$, уже перестают фокусировать или дефокусировать волну, а в обоих случаях создают расходящиеся пучки с углом раствора порядка λ/l . Следовательно, неоднородности с размерами, меньшими $\sqrt{\lambda z}$, можно вообще не учитывать.

Действие же более крупных неоднородностей по-прежнему описывается формулой (41.37). Поэтому окончательную формулу мы можем получить прямо из (41.38), если заменим в ней размер l_0 на размер наименьших неоднородностей, которые еще способны фокусировать (или дефокусировать) волну, т. е. на $\sqrt{\lambda z}$. В результате получаем формулу

$$\left(\frac{\delta A}{A_0}\right)^2 \sim C_e^2 \lambda^{-1/4} z^{11/4} \sim C_e^2 k^{1/4} z^{11/4}, \quad L_0 \gg \sqrt{\lambda z} \gg l_0, \quad (41.39)$$

которая соответствует (41.27).

Перейдем теперь к флуктуациям разности фаз в двух точках с координатами (ρ_1, z) и (ρ_2, z) , отстоящих друг от друга на расстояние $\rho = |\rho_1 - \rho_2|$.

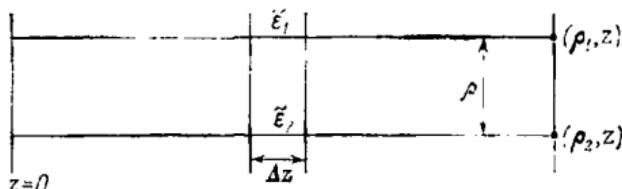


Рис. 61.

Рассмотрим два луча, приходящих в точки (ρ_1, z) и (ρ_2, z) , и выберем слой среды такой толщины Δz , чтобы на протяжении Δz величины $\tilde{\epsilon}(\rho_i, z)$ мало менялись. Этот участок трассы вносит сдвиг фаз $\Delta S \sim k \Delta \epsilon(\rho) \Delta z$, где $\Delta \epsilon(\rho)$ — разность значений $\tilde{\epsilon}$ на лучах (рис. 61). Здесь возможны следующие два случая.

Если $\rho \ll l_0$, то оба луча находятся в пределах одной неоднородности размера l_0 и мы можем выбрать $\Delta z \sim l_0$. Тогда для участка длины l_0 имеем $\overline{\Delta S^2} \sim k^2 [\Delta \epsilon(\rho)]^2 l_0^2$. Но $\Delta \epsilon^2(\rho)$ — это структурная функция $\tilde{\epsilon}$. Как было указано в гл. I, § 4, если $\rho \ll l_0$, то $D_\epsilon(\rho) \sim C_e^2 (\rho/l_0)^{2/5} l_0^{2/5} \sim C_e^2 l_0^{-4/5} \rho^2$ и, следовательно, $\overline{\Delta S^2} \sim C_e^2 k^2 l_0^{-4/5} \rho^2 l_0^2$. Число независимых неоднородностей на пути z в этом случае $N \sim z/l_0$, так что суммарный средний квадрат разности фаз равен

$$\overline{\Delta S^2} \sim C_e^2 k^2 \rho^2 l_0^{2/5} \frac{z}{l_0} \sim C_e^2 k^2 l_0^{-1/5} \rho^2 z, \quad \rho \ll l_0. \quad (41.40)$$

Пусть теперь $L_0 \gg \rho \gg l_0$. В этом случае основной вклад в ΔS вносят неоднородности с размерами порядка ρ . Действительно, более мелкие неоднородности обладают меньшими значениями $\tilde{\epsilon}$, а более крупные вносят одинаковый вклад в сдвиг фазы обоих лучей и поэтому несущественны для разности фаз ΔS . Мы можем поэтому выбрать $\Delta z \sim \rho$, и тогда

$$\Delta S_i \sim k C_e \rho^{1/4} \rho \sim C_e k \rho^{9/4}$$

(поскольку $\Delta e(\rho) \sim C_e \rho^{1/2}$). Полный средний квадрат разности фаз, вызванной всеми $N \sim z/\rho$ неоднородностями, будет иметь порядок величины

$$\overline{\delta S^2} \sim C_e^2 k^2 \rho^{5/2} \frac{z}{\rho} \sim C_e^2 k^2 \rho^{5/2} z, \quad (41.41)$$

что соответствует формуле (41.32).

Из приведенных качественных рассуждений видно, что основные формулы МПВ для турбулентной среды можно получить из геометро-оптического анализа, если только учесть дополнительно, что неоднородности с масштабами, меньшими радиуса первой зоны Френеля, несущественны для амплитудных флуктуаций.

Что же касается предельного случая $D \gg 1$, которому соответствуют формулы (41.20), то здесь геометрическая оптика уже полностью неэффективна. Формулы (41.20) тоже можно получить путем качественных рассуждений, но при этом необходимо пользоваться чисто дифракционным понятием эффективного поперечника рассеяния для зоны фраунгоферовой дифракции [6].

§ 42. Распределение вероятностей флуктуаций амплитуды и фазы. Закон сохранения энергии и границы применимости МПВ

Исследуем законы распределения вероятностей для уровня и фазы волны. Если при расчете комплексной фазы Φ можно ограничиться первым приближением Φ_1 , то, согласно (40.5а) и (40.6),

$$\Phi_1(\rho, z) = -k^2 \int d^3 \rho' \int_0^z dz' K(\rho - \rho', z - z') \tilde{e}(\rho', z'), \quad (42.1)$$

где функция K определяется формулой (40.8). Отсюда для уровня χ и фазы S' следуют формулы

$$\chi_1(\rho, z) = -k^2 \int d^3 \rho' \int_0^z dz' \operatorname{Re} K(\rho - \rho', z - z') \tilde{e}(\rho', z'), \quad (42.2a)$$

$$S'_1(\rho, z) = -k^2 \int d^3 \rho' \int_0^z dz' \operatorname{Im} K(\rho - \rho', z - z') \tilde{e}(\rho', z'). \quad (42.2b)$$

Для того чтобы найти законы распределения вероятностей χ и S' , можно было бы, пользуясь этими формулами, найти моменты $\langle \chi_1^n \rangle$, $\langle S'_1^n \rangle$, $\langle \chi_1^n S'_1^n \rangle$ и по ним построить плотности вероятностей для χ , S' и совместную плотность вероятностей для (χ_1, S'_1) . Такой путь, однако, слишком сложен.

В конце предыдущего параграфа нам удалось получить основные формулы для средних квадратов флуктуаций уровня и фазы, исходя из простых качественных соображений, причем неоднородная среда разбивалась на отдельные объемы, вносящие статистически независимые вклады в χ и S' . Аналогичное разбиение можно провести и в формулах (42.2), представив интегралы как суммы интегралов по слоям (z_i, z_{i+1}) , продольные размеры которых Δz значительно превышают радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости ($\Delta z \gg l_e$). При этом мы получим для χ и S' формулы, имеющие вид

$$\chi = \sum_i \chi^{(i)}, \quad S' = \sum_i S'^{(i)}, \quad (42.3)$$

в которых отдельные слагаемые можно приближенно считать статистически независимыми. Если размер Δz можно выбрать так, что будут выполняться соотношения

$$l_e \ll \Delta z \ll z,$$

то на протяжении пути волны число независимых слагаемых в формуле (42.3) будет велико: $N = z/\Delta z \gg 1$. В этом случае величины χ и S' оказываются представленными в виде сумм большого числа статистически независимых слагаемых и в силу центральной предельной теоремы их можно считать распределенными по нормальному закону.

Приведенное рассуждение весьма нестрого. В действительности вклады отдельных слоев не являются полностью некоррелированными, так как неоднородности, примыкающие к границам этих слоев, вносят коррелированный вклад в соседние члены сумм (42.3). Далее, из некоррелированности отдельных слагаемых, входящих в суммы (42.3), еще не следует их статистическая независимость. Поэтому строгое обоснование утверждения о стремлении законов распределения для χ и S' к нормальным должно опираться на предельные теоремы для линейных функционалов от случайных функций¹⁾ (см., например, [7]). Мы не будем,

¹⁾ Например, для случайных процессов $\xi(t)$ условия, при которых распределение вероятностей интеграла $\eta = \int_{t_1}^t \xi(t) f(t) dt$ стремится к нормальному при увеличении интервала (t_2, t_1) , включают и так называемое условие сильного перемешивания:

$$W_3 \left(\int_{-\infty}^t \xi(\tau) f(\tau) d\tau, \int_{t+T}^{\infty} \xi(\tau) f(\tau) d\tau \right) - \\ - W_1 \left(\int_{-\infty}^t f(\tau) \xi(\tau) d\tau \right) W_1 \left(\int_{t+T}^{\infty} f(\tau) \xi(\tau) d\tau \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

однако, углубляясь в этот вопрос. Отметим, что экспериментальные данные хорошо подтверждают вывод о нормальности распределений вероятностей для $\bar{\chi}$ и S' в тех случаях, когда применимо первое приближение МПВ [8].

Амплитуда A волны связана с уровнем χ формулой

$$\gamma = \ln \frac{A}{A_0}, \quad (42.4a)$$

откуда

$$A = A_0 \exp(\gamma). \quad (42.4b)$$

Как следует из (42.4a), логарифм амплитуды распределен по нормальному закону, откуда вытекает, что сама амплитуда имеет логарифмически нормальное распределение. Легко найти моменты \bar{A}^n . Для этого представим χ в виде $\chi = \bar{\chi} + \tilde{\chi}$. Как уже отмечалось выше, величина $\bar{\chi}$ в первом приближении МПВ равна нулю и для ее расчета необходимо использовать второе приближение. Формула (42.4b) принимает вид $A = A_0 \exp(\bar{\chi}) \exp(\tilde{\chi})$. Отсюда

$$\bar{A}^n = A_0^n e^{n\bar{\chi}} \langle e^{n\tilde{\chi}} \rangle.$$

Так как для нормальной случайной величины $n\bar{\chi}$, среднее значение которой равно нулю, справедлива формула

$$\langle e^{n\bar{\chi}} \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \overline{(n\tilde{\chi})^2}\right) = \exp\left(\frac{n^2}{2} \sigma_{\chi}^2\right),$$

то для \bar{A}^n получаем

$$\bar{A}^n = A_0^n \exp[n\bar{\chi} + \frac{1}{2} n^2 \sigma_{\chi}^2]. \quad (42.5)$$

При распространении плоской волны в статистически однородной среде имеет место закон сохранения $\bar{A}^2 = \text{const} = A_0^2$ (см. (39.11)). Полагая в (42.5) $n = 2$, получаем

$$\bar{A}^2 = A_0^2 \exp[2\bar{\chi} + 2\sigma_{\chi}^2].$$

Отсюда и из равенства $\bar{A}^2 = A_0^2$ следует, что должно выполняться соотношение

$$\bar{\chi} = -\sigma_{\chi}^2, \quad (42.6)$$

являющееся следствием закона сохранения энергии.

Разумеется, величину $\bar{\chi}$ можно было бы найти и непосредственно из второго приближения уравнений МПВ. Такой расчет проведен, например, в работе [9], и его результат согласуется с равенством (42.6).

Если подставить (42.6) в формулу (42.5), то она принимает вид

$$\bar{A}^n = A_0^n \exp \left\{ \frac{n(n-2)}{2} \sigma_x^2 \right\}. \quad (42.7)$$

Найдем средний квадрат флуктуаций интенсивности $I = A^2$. Очевидно, $\bar{I} = \bar{A}^2 = A_0^2$. Для $\bar{I}^2 = \bar{A}^4$ получаем из (42.7) $\bar{I}^2 = A_0^4 e^{4\sigma_x^2}$. Поэтому дисперсия интенсивности $\sigma_I^2 = \bar{I}^2 - (\bar{I})^2$ будет

$$\sigma_I^2 = A_0^4 (e^{4\sigma_x^2} - 1). \quad (42.8)$$

Отметим, что интенсивность $I = A^2 = A_0^2 e^{2x}$ имеет, как и амплитуда, логарифмически нормальное распределение.

Рассмотрим теперь вопрос о границах применимости МПВ. Прежде всего, поскольку уравнения МПВ получены из приближенного параболического уравнения (38.4), условия применимости последнего необходимы и для применимости МПВ. Но уравнения МПВ решены нами лишь в первом приближении, поэтому следует выяснить условия, при которых поправки к величинам σ_x^2 , S''^2 , $D_S(\rho)$ и т. д., найденные из второго приближения, будут малыми. Соответствующие расчеты проведены в целом ряде работ (см., например, [9, 10]), результаты которых сводятся к следующему.

Прежде всего, должно выполняться условие малости флуктуаций уровня, найденных в первом приближении МПВ:

$$\bar{\chi}_1^2 \ll 1. \quad (42.9)$$

При выполнении этого условия поправки второго приближения к величине σ_x^2 будут несущественными. Например, если трехмерная спектральная плотность флуктуаций e имеет чисто степенной вид, как в случае турбулентных неоднородностей, то для величины σ_x^2 (с учетом следующих приближений МПВ) справедлива формула

$$\sigma_x^2 = \bar{\chi}_1^2 + \alpha_2 (\bar{\chi}_1^2)^2 + \alpha_3 (\bar{\chi}_1^2)^3 + \dots = f(\bar{\chi}_1^2), \quad (42.10)$$

причем $f(\bar{\chi}_1^2) \approx \bar{\chi}_1^2$ при $\bar{\chi}_1^2 \ll 1$.

Если же мы интересуемся величиной $D_S(\rho, z)$, то для нее (в случае степенных спектров) с учетом следующих приближений МПВ имеет место формула

$$D_S(\rho, z) = D_{S1}(\rho, z) + \alpha'_2 [D_{S1}(\rho, z)]^2 + \dots, \quad (42.11)$$

в которой $D_{S1}(\rho, z)$ — структурная функция фазы, найденная в первом приближении МПВ. Поэтому условием применимости

МПВ для вычисления $D_s(\rho, z)$ служит неравенство

$$D_{s1}(\rho, z) \ll 1. \quad (42.12)$$

Следует подчеркнуть, что условия (42.9) и (42.12) независимы: возможны такие соотношения между параметрами задачи, когда одно из них выполнено, а другое нет. В этом случае первое приближение МПВ пригодно для расчета одной величины, но непригодно для расчета другой. Ограничение (42.12) является, по-видимому, излишне жестким. Расчеты, проведенные в приближении параболического уравнения (гл. VII), приводят к значительно более слабому ограничению величины $D_s(\rho, z)$, чем (42.12).

Важно отметить также следующее. Если условие $\bar{\chi}_1^2 \ll 1$ нарушено, например $\bar{\chi}_1^2 \approx 1$, то учет второго приближения не спасает положения, так как, согласно (42.10), при этом все члены ряда становятся существенными.

В области применимости МПВ, в силу условия $\sigma_\chi^2 \ll 1$, мы можем разложить экспоненциальные множители в формулах для \bar{A}^n в ряды и ограничиться их первыми членами. Например, вместо (42.8) можно написать

$$\frac{\sigma_\chi^2}{(\bar{I})^2} = e^{i\sigma_\chi^2} - 1 \approx 4\sigma_\chi^2. \quad (42.13)$$

В связи с этим возникает следующий вопрос. Так как МПВ применим лишь в случае слабых флуктуаций уровня (и амплитуды) волны, то имеет ли он преимущества по сравнению с методом малых возмущений?

Если поле $u(r)$ искать в виде $u = u_0 + u_1 + \dots$, то флуктуации амплитуды \tilde{A} и фазы \tilde{S} можно выразить через u_0 и u_1 : $\tilde{A}/A_0 = = \operatorname{Re}(u_1/u_0)$, $\tilde{S} = \operatorname{Im}(u_1/u_0)$. Поэтому, зная вторые моменты для $\operatorname{Re} u_1$ и $\operatorname{Im} u_1$, можно найти соответствующие величины для амплитуды и фазы. Формулы для амплитудных и фазовых флуктуаций, найденные таким путем, совпадают с полученными из уравнений первого приближения МПВ, за исключением того, что вместо $\ln A$ следует подставить $\ln A_0 + \tilde{A}/A_0$, т. е. учесть первый член разложения $\ln A$ в ряд по \tilde{A}/A_0 .

Если же обратиться к законам распределения вероятностей для амплитуды, то здесь выводы, получаемые при помощи обоих сравниваемых способов, будут отличаться коренным образом.

Применив к амплитудным флуктуациям теорию возмущений, мы находим для закона распределения вероятностей амплитуды обобщенный закон Релея (ч. I, формула (25.3)). Для этого закона распределения отношение $\langle \tilde{A}^2 \rangle / A_0^2 = \frac{4}{\pi} - 1 = 0.27$, т. е. боль-

шие флюктуации амплитуды не находят объяснения. В то же время МПВ приводит к логарифмически нормальному закону распределения для A , при котором такого ограничения нет. Хотя формально должно выполняться неравенство (42.9), фактически оказывается, что формулы для σ_x^2 , получаемые в первом приближении МПВ, хорошо согласуются с экспериментальными данными

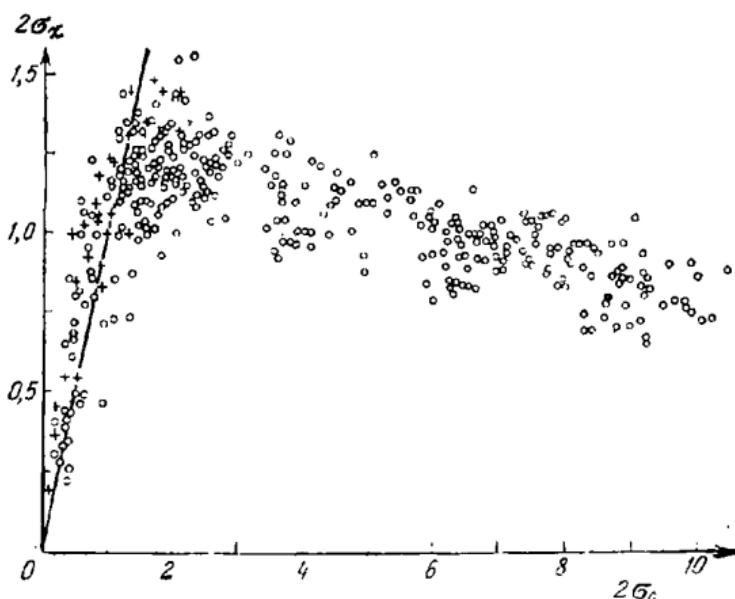


Рис. 62.

вплоть до значений $\sigma_x^2 \leqslant 1$ [8, 11]. Законы распределения вероятностей для A , полученные экспериментально при $\sigma_x^2 \leqslant 1$, тоже хорошо согласуются с логарифмически нормальным распределением, и их нельзя аппроксимировать распределением Релея.

Однако в области, где рассчитанная при помощи МПВ величина σ_x^2 превышает единицу, экспериментальные данные резко расходятся с результатами расчета. Сопоставление измеренных и рассчитанных при помощи МПВ результатов приведено на рис. 62 [8]. На этом рисунке по вертикальной оси отложены измеренные значения σ_x , а по горизонтальной оси — значения $\sigma_0 = \sqrt{\chi_1^2}$, вычисленные в рамках первого приближения МПВ с использованием независимо полученных (из микрометеорологических измерений) величин C_e^2 .

Из сказанного ясно, что для описания области, в которой $\chi_1^2 > 1$, необходимо использовать методы расчета, выходящие за рамки теории малых возмущений и МПВ.

Задачи.

1. Функция Грина $G(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta G(r) + k^2 G(r) = \delta(r) \quad (1)$$

и условию излучения на бесконечности. Вывести для $G(r)$ двумерное спектральное разложение.

Решение. Подставив в (1) трехмерное разложение Фурье

$$G(r) = G(p, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dp g(x, p) \exp\{i(xp + pz)\}, \quad (2)$$

получаем уравнение

$$(k^2 - x^2 - p^2) g(x, p) = \frac{1}{8\pi^3},$$

откуда следует, что

$$G(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\exp\{i(xp + pz)\}}{k^2 - i\epsilon - x^2 - p^2}. \quad (3)$$

В знаменателе подынтегрального выражения введена бесконечно малая ($\epsilon \rightarrow 0$) минимая добавка, соответствующая затуханию волн ($\text{Im } k > 0$) и приводящая при вычислении интеграла (3) к функции Грина, отвечающей расходящимся волнам.

Если выполнить в (3) интегрирование по p , то мы получим искомое разложение функции $G(r)$ в двумерный интеграл Фурье. Рассмотрим интеграл по p :

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipz} dp}{(k^2 - x^2 + i\epsilon) - p^2}. \quad (4)$$

Полюсы $p_{1,2} = \pm \sqrt{k^2 - x^2 + i\epsilon}$ расположены как в верхней полуплоскости ($\text{Im } p_1 > 0$), так и в нижней ($\text{Im } p_2 < 0$). Если $z > 0$, то контур интегрирования можно замкнуть бесконечной полуокружностью в верхней полуплоскости комплексного переменного p , и вычет в верхнем полюсе дает

$$J = -2\pi i \frac{e^{ip_1 z}}{p_1 - p_2} = -\pi i \frac{\exp\{i\sqrt{k^2 - x^2} z\}}{\sqrt{k^2 - x^2}}, \quad (5)$$

причем

$$\sqrt{k^2 - x^2} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - x^2} & \text{при } k^2 > x^2, \\ i\sqrt{x^2 - k^2} & \text{при } k^2 < x^2 \end{cases}$$

(выбор знака в нижнем равенстве обеспечивает выполнение условия $\text{Im } p_1 > 0$ как при $k^2 > x^2$, так и при $k^2 < x^2$). Подставляя (5) в (3), получаем, что при $z > 0$

$$G(p, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \frac{\exp\{i[xp + \sqrt{k^2 - x^2} z]\}}{\sqrt{k^2 - x^2}}, \quad z > 0. \quad (6)$$

Аналогично вычисляется интеграл и при $z < 0$, когда вычет надо брать в полюсе p_2 . Окончательная формула, охватывающая оба случаи, отличается от (6) заменой z на $|z|$.

2. Найти функцию Грина $K(\rho, z)$ уравнения (40.5).

Решение. Будем искать решение уравнения

$$2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Phi = f(\rho, z) \quad (1)$$

с начальным условием $\Phi(\rho, 0) = 0$ в виде двумерного интеграла Фурье

$$\Phi(\rho, z) = \int d^2k \exp(i\mathbf{k}\rho) \varphi(\mathbf{k}, z) d^2k. \quad (2)$$

Подставляя в (1) такое же разложение и для функции $f(\rho, z)$:

$$\begin{aligned} f(\rho', z) &= \int d^2k \exp(i\mathbf{k}\rho') \mu(\mathbf{k}, z) d^2k, \\ \mu(\mathbf{k}, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^2\rho' f(\rho', z) d^2\rho', \end{aligned} \quad (3)$$

получаем

$$2ik \frac{\partial \varphi(\mathbf{k}, z)}{\partial z} - \mathbf{k}^2 \varphi(\mathbf{k}, z) = \mu(\mathbf{k}, z),$$

или

$$2ik \exp\left(\frac{\mathbf{k}^2 z}{2ik}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left[\exp\left(-\frac{\mathbf{k}^2 z}{2ik}\right) \varphi(\mathbf{k}, z) \right] = \mu(\mathbf{k}, z).$$

Умножая это уравнение на $\frac{1}{2ik} \exp\left\{-\frac{\mathbf{k}^2 z}{2ik}\right\}$ и интегрируя по z от 0 до z с учетом граничного условия $\varphi(\mathbf{k}, 0) = 0$, находим

$$\varphi(\mathbf{k}, z) = \frac{1}{2ik} \int_0^z \exp\left[-\frac{i\mathbf{k}^2(z-z')}{2k}\right] \mu(\mathbf{k}, z') dz'. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (2) дает

$$\Phi(\rho, z) = \frac{1}{2ik} \int_0^z dz' \int d^2k \exp\left\{i\mathbf{k}\rho - \frac{i\mathbf{k}^2(z-z')}{2k}\right\} \mu(\mathbf{k}, z').$$

Чтобы получить окончательное выражение для Φ , надо воспользоваться обратным преобразованием Фурье для $\mu(\mathbf{k}, z')$ (вторая формула (3)):

$$\Phi(\rho, z) = \frac{1}{8\pi^2 ik} \int_0^z dz' \int d^2\rho' f(\rho', z) \int d^2k \exp\left\{i\mathbf{k}(\rho-\rho') - \frac{i\mathbf{k}^2(z-z')}{2k}\right\}.$$

Взяв интеграл по \mathbf{k} , получаем формулу вида (40.6), в которой $K(\rho, z)$ определяется формулой (40.8).

3. Найти двумерную пространственную спектральную плотность $F_S(\mathbf{k}, z)$ флюктуаций фазы (40.16).

Решение. Как и для флюктуаций уровня (см. (40.21)), имеем

$$\langle S(\mathbf{k}, z) S(\mathbf{k}', z) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') F_S(\mathbf{k}, z). \quad (1)$$

Из (40.16) следует, что

$$\langle S(\mathbf{x}, z) S(\mathbf{x}', z) \rangle = \frac{k^2}{4} \int_0^z dz' \int_0^z dz'' \cos \left[\frac{\mathbf{x}^2(z-z')}{2k} \right] \times \\ \times \cos \left[\frac{\mathbf{x}'^2(z-z'')}{2k} \right] \langle \varepsilon(\mathbf{x}, z') \varepsilon(\mathbf{x}', z'') \rangle, \quad (2)$$

а так как, согласно (40.19),

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x}, z') \varepsilon(\mathbf{x}', z'') \rangle = \delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}') F_\varepsilon(\mathbf{x}, z' - z''),$$

получаем следующую связь между спектральными плотностями F_S и F_ε :

$$F_S(\mathbf{x}, z) = \frac{k^2}{4} \int_0^z dz' \int_0^z dz'' \cos \left[\frac{\mathbf{x}^2(z-z')}{2k} \right] \cos \left[\frac{\mathbf{x}^2(z-z'')}{2k} \right] F_\varepsilon(\mathbf{x}, z' - z''). \quad (3)$$

Если воспользоваться теперь эффективной двумерной спектральной плотностью (40.30):

$$F_\varepsilon^{\Phi\Phi}(\mathbf{x}, z' - z'') = 2\pi\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) \delta(z' - z''),$$

то формула (3) принимает вид

$$F_S(\mathbf{x}, z) = \frac{\pi k^2}{2} \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) \int_0^z \cos^2 \left[\frac{\mathbf{x}^2(z-z')}{2k} \right] dz',$$

что после вычисления интеграла приводит к выражению (40.31).

4. Найти корреляционные функции флуктуаций уровня и фазы для точек наблюдения, разнесенных как в поперечном, так и в продольном направлении.

Решение. Исходя из формулы (3.11), получаем

$$\psi_\chi(p_1, z_1; p_2, z_2) = \\ = \int d^2\mathbf{x}_1 \int d^2\mathbf{x}_2 \exp[i(\mathbf{x}_1 p_1 + \mathbf{x}_2 p_2)] \langle \chi(\mathbf{x}_1, z_1) \chi(\mathbf{x}_2, z_2) \rangle. \quad (1)$$

Используя формулы (40.15), (40.19) и (40.30), находим, далее,

$$\langle \chi(\mathbf{x}_1, z_1) \chi(\mathbf{x}_2, z_2) \rangle = \frac{k^2}{4} \int_0^{z_1} dz' \int_0^{z_2} dz'' \sin \left[\frac{\mathbf{x}_1^2(z_1-z')}{2k} \right] \times \\ \times \sin \left[\frac{\mathbf{x}_2^2(z_2-z'')}{2k} \right] \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot 2\pi\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1, 0) \delta(z' - z'') = \\ = \frac{\pi k^2}{2} \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1, 0) \int_0^{z_<} dz' \sin \left[\frac{\mathbf{x}_1^2(z_1-z')}{2k} \right] \sin \left[\frac{\mathbf{x}_2^2(z_2-z')}{2k} \right] dz', \quad (2)$$

где $z_< = \min(z_1, z_2)$. Подстановка (2) в (1) дает

$$\psi_\chi(p_1, z_1; p_2, z_2) = \frac{\pi k^2}{2} \int d^2\mathbf{x} \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) \exp[i\mathbf{x}(p_1 - p_2)] \times \\ \times \int_0^{z_<} dz' \sin \left[\frac{\mathbf{x}^2(z_1-z')}{2k} \right] \sin \left[\frac{\mathbf{x}^2(z_2-z')}{2k} \right]. \quad (3)$$

Формула для функции корреляции фазы ψ_S отличается от (3) лишь заменой синусов на косинусы:

$$\begin{aligned} \psi_S(\rho_1, z_1; \rho_2, z_2) = & \frac{\pi k^2}{2} \int d^2\kappa \Phi_e(\kappa, 0) \exp[i\kappa(\rho_1 - \rho_2)] \times \\ & \times \int_0^{z_2} dz' \cos \left[\frac{\kappa^2(z_1 - z')}{2k} \right] \cos \left[\frac{\kappa^2(z_2 - z')}{2k} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Вычислив интегралы по z' и используя равенство $\frac{1}{2}(z_1 + z_2) - z_< = \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$, находим

$$\begin{aligned} \psi_{\chi, S}(\rho_1, z_1; \rho_2, z_2) = & \frac{\pi k^2 z_<}{4} \int d^2\kappa \Phi_e(\kappa, 0) \exp[i\kappa(\rho_1 - \rho_2)] \times \\ & \times \left[\cos \frac{\kappa^2(z_1 - z_2)}{2k} + \frac{k}{\kappa^2 z_<} \sin \frac{\kappa^2(z_1 + z_2)}{2k} \pm \frac{k}{\kappa^2 z_<} \sin \frac{\kappa^2|z_1 - z_2|}{2k} \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь верхние знаки относятся к ψ_χ , нижние — к ψ_S .

При $z_1 - z_2 = z$ формула (5) переходит в формулы (40.29) и (40.31). Заметим, что корреляционные функции, определяемые формулой (5), зависят лишь от $\rho_1 - \rho_2$, т. е. инвариантны по отношению к одновременным сдвигам обеих точек наблюдения в плоскостях $z = z_1$ и $z = z_2$ на одну и ту же величину. Вместе с тем в (5) входит как $(z_1 - z_2)$, так и $(z_1 + z_2)$. Таким образом, флуктуации уровня и фазы статистически однородны по поперечным координатам, но не являются статистически однородными по продольной координате.

5. Вывести формулу (41.7) из (41.6) и (41.9) из (41.8).

Решение. Проинтегрируем разложение Фурье

$$\psi_e(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dp \Phi_e(\kappa, p) \exp[i(\kappa\rho + pz)]$$

по z в пределах $(-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_e(\rho, z) dz = & \int_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dp \Phi_e(\kappa, p) \exp(i\kappa\rho) \cdot 2\pi\delta(p) = \\ & = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d^2\kappa \Phi_e(\kappa, 0) \exp(i\kappa\rho), \end{aligned}$$

или, учитывая четность $\psi_e(\rho, z)$ по z ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_e(\kappa, 0) \exp(i\kappa\rho) d^2\kappa = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_e(\rho, z) dz. \quad (1)$$

Действуя на это равенство оператором Δ_{\perp}^2 и принимая во внимание, что $\Delta_{\perp}^2 \exp(i\kappa\rho) = \kappa^4 \exp(i\kappa\rho)$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \kappa^4 \Phi_e(\kappa, 0) \exp(i\kappa\rho) d^2\kappa = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 \psi_e(\rho, z) dz.$$

Положим здесь $\rho = 0$; тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \kappa^4 \Phi_e(\kappa, 0) d^2\kappa = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Delta_{\perp}^2 \psi_e(\rho, z)]_{\rho=0} dz.$$

Подставляя это равенство в (41.6), получаем (41.7).

Положив $\rho = 0$ в формуле (1), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_e(\kappa, 0) d^2\kappa = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_e(0, z) dz.$$

Подстановка этого равенства в (41.8) приводит к формуле (41.9).

6. Найти средние квадраты флуктуаций уровня и фазы для частного случая гауссовой корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости:

$$\psi_e(r) = \sigma_e^2 \exp\{-r^2/2a^2\}. \quad (1)$$

Решение. Найдем $\bar{\chi}^2 = \psi_e(0, z)$. Полагая в (40.33) $\rho = 0$, получаем

$$\bar{\chi}^2 = \frac{\pi^2 k^2 z}{2} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{k}{\kappa^2 z} \sin \frac{\kappa^2 z}{k}\right) \Phi_e(\kappa, 0) \kappa d\kappa, \quad (2)$$

где $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$. Полагая в (41.15) $\kappa_z = 0$ и подставляя $\Phi_e(\kappa, 0)$ в (2), получим

$$\bar{\chi}^2 = \frac{\sqrt{2\pi} k^2 z \sigma_e^2 a^4}{8} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{k}{\kappa^2 z} \sin \frac{\kappa^2 z}{k}\right) \exp\left\{-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right\} \kappa d\kappa.$$

Произведем замену переменной интегрирования, положив $\kappa^2 a^2/2 = t$. Тогда для $\bar{\chi}^2$ получим

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^2 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{8} k^2 \sigma_e^2 a z \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{\sin Dt}{Dt}\right] e^{-t} dt = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{8} k^2 \sigma_e^2 a z \left[1 - \frac{1}{D} \int_0^{\infty} \frac{\sin Dt}{t} e^{-t} dt\right], \end{aligned}$$

где введен волновой параметр $D = 2z/ka^2$.

Рассмотрим входящий в $\bar{\chi}^2$ интеграл

$$f(D) = \int_0^{\infty} \frac{\sin Dt}{t} e^{-t} dt.$$

Очевидно, при $D = 0$ имеем $f(0) = 0$. Далее,

$$f'(D) = \int_0^{\infty} \cos Dt e^{-t} dt = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-(1+iD)t} dt = \operatorname{Re} \frac{1}{1+iD} = \frac{1}{1+D^2},$$

откуда

$$f(D) = \int_0^D \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} D.$$

Следовательно,

$$\chi^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \sigma_e^2 k^2 a z \left[1 - \frac{\operatorname{arctg} D}{D} \right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{16} \sigma_e^2 (ka)^3 (D - \operatorname{arctg} D).$$

Средний квадрат флуктуаций фазы получается отсюда просто переменой знака перед вторым слагаемым.

7. Найти асимптотические формулы для структурной функции фазы (41.31) для предельных случаев $k\rho^2 \ll z$ и $k\rho^2 \gg z$.

Решение. Наиболее существенный вклад в интеграл (41.31) дает область $t \sim 1$, так как при $t \gg 1$ мал множитель $t^{-\frac{1}{2}}$, а при $t \ll 1$ мал множитель $[1 - J_0(t)]$. Если при $t \sim 1$ справедливо неравенство $k\rho^2/z \ll 1$, то

$$\left| \frac{k\rho^2}{t^2 z} \sin \frac{t^2 z}{k\rho^2} \right| \ll 1 \text{ и}$$

$$\int_0^\infty [1 - J_0(t)] \left(1 + \frac{k\rho^2}{t^2 z} \sin \frac{t^2 z}{k\rho^2} \right) t^{-\frac{1}{2}} dt \approx \int_0^\infty [1 - J_0(t)] t^{-\frac{1}{2}} dt = M,$$

где M — числовая постоянная. Если же $k\rho^2/z \gg 1$, то при $t \sim 1$ имеем

$$\left| \sin \left(\frac{t^2 z}{k\rho^2} \right) \right| \approx 1, \text{ и тогда}$$

$$\int_0^\infty [1 - J_0(t)] \left(1 + \frac{k\rho^2}{t^2 z} \sin \frac{t^2 z}{k\rho^2} \right) t^{-\frac{1}{2}} dt \approx 2 \int_0^\infty [1 - J_0(t)] t^{-\frac{1}{2}} dt = 2M.$$

Именно поэтому коэффициенты в формулах для $D_S(\rho, z)$ в случаях $k\rho^2 \ll z$ и $k\rho^2 \gg z$ отличаются в два раза.

8. Ограничеваясь случаем статистически изотропных флуктуаций $\tilde{\epsilon}$, найти вид функций $\psi_\chi(\rho, z)$ и $D_S(\rho, z)$ при $\rho \ll l_0$, где l_0 — размер наименьших неоднородностей диэлектрической проницаемости.

Решение. Будем исходить из формул (40.33) и (40.35):

$$\psi_\chi(\rho, z) = \psi_\chi(\rho, z) = \frac{\pi^2 k^2 z}{2} \int_0^\infty J_0(x\rho) \left(1 - \frac{k}{x^2 z} \sin \frac{x^2 z}{k} \right) \Phi_\epsilon(x, 0) x dx, \quad (1)$$

$$D_S(\rho, z) = D_S(\rho, z) = \pi^2 k^2 z \int_0^\infty [1 - J_0(x\rho)] \left(1 + \frac{k}{x^2 z} \sin \frac{x^2 z}{k} \right) \Phi_\epsilon(x, 0) x dx. \quad (2)$$

Так как функция $\Phi_\epsilon(x, 0)$ пренебрежимо мала при $x > x_m \sim 2\pi/l_0$, основной вклад в интегралы (1) и (2) дает область $x < 2\pi/l_0$. Если $\rho \ll l_0$, то в этой области $x\rho < 2\pi\rho/l_0 \ll 1$. Поэтому можно воспользоваться первыми членами степенного разложения $J_0(x\rho) = 1 - x^2\rho^2/4 + \dots$. Подстановка этого разложения в (1) и (2) приводит к формулам (41.34) и (41.35).

Г л а в а VII

ПРИБЛИЖЕНИЕ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

§ 43. Обоснование марковского приближения

Во всех рассмотренных в гл. IV—VI приближенных способах описания распространения волн в случайно-неоднородных средах использовалось предположение о малости флуктуаций диэлектрической проницаемости. Оно либо лежало в самой основе способа (метод малых возмущений для точного волнового уравнения), либо вводилось потому, что без него нельзя было продвинуться в решении *приближенных* уравнений (геометрическая оптика, метод плавных возмущений). Только при этом предположении удавалось выразить с помощью указанных методов в явном приближенном виде волновое поле в случайной среде или его амплитуду и фазу через \hat{e} . Для нахождения статистических характеристик различных параметров волны надо было лишь выполнить усреднение полученных выражений или их комбинаций. Разумеется, использование в той или иной форме теории возмущений по \hat{e} налагает на границы применимости этих методов довольно жесткие ограничения. Например, ни один из рассмотренных выше методов решения стохастического волнового уравнения не позволяет дать адекватное описание сильных флуктуаций волнового поля.

В ч. I книги для анализа физических задач, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами, был применен аппарат марковских случайных процессов. При этом в ряде случаев удавалось получить уравнение *непосредственно* для распределений вероятностей или для *усредненных величин* — моментов и т. п. В случае динамических систем, подверженных случайным параметрическим воздействиям (см. задачу 22 к гл. I), для применения аппарата марковских случайных процессов оказалось необходимым выполнение следующих условий.

Во-первых, должен выполняться принцип динамической причинности: решение в некоторый момент времени должно функционально зависеть лишь от *предшествующих по времени* значений случайных коэффициентов.

Во-вторых, время корреляции случайных *воздействий* (т. е. случайных функций, входящих в уравнения) должно быть *малым* по сравнению с наименьшим характерным временем *отклика* динамической системы. В этом случае возможна аппроксимация корреляционных функций случайных воздействий дельта-функциями от времени.

При выполнении обоих условий оказалось возможным получить *замкнутое* уравнение для плотности вероятностей состояния динамической системы. При *гауссовых* дельта-коррелированных коэффициентах это было дифференциальное уравнение Эйнштейна — Фоккера. Если динамическая система к тому же *линейна*, то можно получить замкнутые уравнения и для моментов (ч. I, §§ 36, 37 и задача 7 к гл. V, а также задача 22 к гл. I данной книги).

Аппроксимация марковским случайным процессом использует, в отличие от теории возмущений, другой малый параметр — отношение τ_0/τ , т. е. времени корреляции воздействий τ_0 ко времени корреляции отклика τ . Нулевому приближению по этому параметру и отвечает марковское приближение. Для законности такой аппроксимации, разумеется, могут потребоваться также ограничения интенсивности флуктуаций параметров, но возникающие при этом неравенства содержат и параметр τ_0/τ , так что ограничения интенсивности флуктуаций оказываются менее жесткими.

Можно ли применить теорию марковских процессов к задаче о распространении волн в случайно-неоднородной среде, т. е. к задаче о *случайных полях*?

Прежде всего, само понятие марковского процесса предполагает наличие *упорядоченной* переменной (аналогичной времени), без наличия которой невозможно формулировать основное свойство таких процессов — возможность представления многоточечной плотности вероятностей в виде произведения вероятностей перехода. Ясно, что упорядоченную переменную можно ввести лишь в отношении *одной* координаты. Следовательно, можно надеяться описать распространение волны как марковский случайный процесс либо в *одномерной* задаче (например, для случайно-неоднородной слоистой среды), либо же в том случае, когда одна из координат физически выделена по отношению к другим (например, при распространении *плоской волны* или *уэконааправленного пучка излучения*).

Далее, если из трех пространственных переменных удастся выделить одну, играющую в указанном выше смысле роль времени, то по этой координате должно выполняться условие

динамической причинности, т. е. рассматриваемое волновое поле должно функционально зависеть лишь от *предшествующих*¹⁾ (по данной координате) значений случайного параметра. В общем случае волновое поле не удовлетворяет этому требованию, так как в неоднородной среде присутствуют волны, рассеянные как вперед, так и назад (§ 38), а наличие волн, рассеянных назад, обусловлено теми неоднородностями среды, которые расположены за точкой наблюдения.

Тем не менее для одномерного уравнения Гельмгольца

$$u''(z) + k^2 [1 + \tilde{v}(z)] u = 0,$$

описывающего распространение скалярной волны в слоистой среде, можно ввести функцию

$$R(z) = \frac{iku(z) - u'(z)}{iku(z) + u'(z)},$$

удовлетворяющую уравнению первого порядка

$$\frac{dR}{dz} = -2ikR - \frac{ik}{2} \tilde{v}(z) (1 + R)^2$$

и «начальному» условию (т. е. граничному условию, например, при $z = 0$). В таком случае значения $R(z)$ функционально зависят лишь от $\tilde{v}(\zeta)$ при $0 \leq \zeta \leq z$, так что условие причинности для R выполнено и эту функцию можно аппроксимировать марковским случайным процессом, если радиус корреляции для $\tilde{v}(z)$ достаточно мал (см., например, [1]).

Однако для волн в среде, содержащей *трехмерные* неоднородности, не удается ввести аналогичную функцию, для которой выполнялся бы принцип причинности. Здесь переход к аппроксимации распространения волны марковским случайным процессом возможен лишь в том случае, когда законно *пренебрежение волнами, рассеянными назад*.

Как мы установили в § 38, приближение параболического уравнения как раз и соответствует пренебрежению рассеянными назад волнами. Кроме того, в МПУ имеется физически выделенная координата — вдоль направления распространения волны, падающей на неоднородную среду. Таким образом, в приближении параболического уравнения переход к аппроксимации распространения волны в среде со случайными неоднородностями марковским процессом, вообще говоря, возможен, но необходимо еще предварительно выяснить, каково соотношение между харак-

1) Мы будем пользоваться термином «предшествующий» не только для временной, но и для любой другой координаты, играющей в указанном выше смысле роль времени.

терными продольными масштабами флуктуаций \tilde{v} и флуктуаций волнового поля v .

Существенное математическое отличие неодномерной задачи о распространении волн в случайно-неоднородных средах от задач, рассмотренных в ч. I, заключается в том, что динамическое уравнение является теперь уравнением в частных производных. Вместо случайной величины (или случайного вектора) мы имеем здесь при каждом фиксированном значении z двумерное случайное поле $v(r, z)$. Распределения же вероятностей случайного поля полностью задаются, как мы знаем, *характеристическим функционалом* (§ 7). Поэтому уравнение Эйнштейна — Фоккера в интересующих нас случаях должно определять не функцию, а функционал. В связи с этим оно существенно сложнее, чем для динамических систем с *конечным* числом степеней свободы: вместо уравнения в обычных частных производных оно оказывается уравнением с функциональными производными. Для того чтобы упростить свою задачу, мы ограничимся поэтому выводом *уравнений для моментов* поля $v(r, z)$.

Как мы убедились на примере динамических систем с конечным числом степеней свободы, *замкнутые* уравнения для моментов можно получить из уравнения Эйнштейна — Фоккера только в случае *линейных* систем. Поскольку параболическое уравнение (38.4) линейно, можно и здесь надеяться на получение замкнутых уравнений для моментов. В отличие от (38.4), исходное уравнение МПВ (40.3) целинейно, и поэтому получить из соответствующего функционального уравнения Эйнштейна — Фоккера замкнутые уравнения для моментов комплексной фазы Φ не удается (несмотря на то, что решение уравнения (40.3) для Φ удовлетворяет условию причинности).

Перейдем теперь к оценкам продольных радиусов корреляции флуктуаций различных параметров поля. При этом мы будем основываться на результатах, полученных в гл. VI при помощи МПВ.

Продольный радиус корреляции флуктуаций фазы и интенсивности (или уровня) можно оценить, исходя из качественных соображений, развитых в конце § 41. Мы видели, что фаза волны определяется всеми неоднородностями, которые пересекает приходящий в точку наблюдения луч. Для оценки можно считать, что различные неоднородности вносят в фазу *независимые* вклады ΔS_k . Набег фазы вдоль луча, прошедшего через n неоднородностей, равен $S = \sum_{k=1}^n \Delta S_k$. Для другой точки наблюдения, лежащей на том же луче, набег фазы будет $S' = \sum_{k=1}^{n'} \Delta S_k$. Если $n' > n$,

то $S' = S + \sum_{k=n+1}^{n'} \Delta S_k$ и, следовательно,

$$\overline{SS'} = \left\langle S \left(S + \sum_{k=n+1}^{n'} \Delta S_k \right) \right\rangle = \overline{S^2},$$

поскольку $\overline{S \Delta S_k} = 0$ при $k > n$. Коэффициент корреляции равен поэтому

$$K_S = \frac{\overline{SS'}}{\sqrt{\overline{S^2} \cdot \overline{S'^2}}} = \frac{\overline{S^2}}{\sqrt{\overline{S^2} \cdot \overline{S'^2}}} = \sqrt{\frac{\overline{S^2}}{\overline{S'^2}}}.$$

Но мы видели (см. (41.17)), что $\overline{S^2} \propto z$, где z — длина дистанции, пройденной волной в неоднородной среде. Отсюда следует, что

$$K_S = \sqrt{z/z'} = \sqrt{z_</z_>}. \quad (43.1)$$

Эту формулу можно получить и более строго при помощи МГО или МПВ (см., например, формулу (33.14) и задачу 4 к гл. VI). Если зафиксировать $z_< = z$ и положить $z_> = z + \zeta$, то, согласно (43.1),

$$K_S(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\zeta/z)}}. \quad (43.2)$$

Таким образом, продольный радиус корреляции фазы имеет порядок величины z , т. е. он во много раз больше радиуса корреляции неоднородностей диэлектрической проницаемости. Но, как мы уже убедились ранее, это и есть то необходимое условие, которое позволяет переходить к приближению марковского случайного процесса.

Оценим теперь продольный радиус корреляции флуктуаций уровня. В конце § 41 мы подсчитали порядок величины фокусного расстояния характерной неоднородности с размером l_e и отклонением диэлектрической проницаемости от среднего значения, равным $\tilde{\epsilon}$:

$$F \sim \frac{l_e}{\tilde{\epsilon}}.$$

Если $\tilde{\epsilon} \ll 1$, то $F \gg l_e$. В области применимости МПВ все «линзы» можно считать слабыми, т. е. $F \gg z$. В этом случае к амплитудным флуктуациям допустимо применить те же соображения, которые только что были использованы при оценке продольного радиуса корреляции фазы. Если же условие $F \gg z$ не выполняется, то точка наблюдения может попадать в область фокусировки излучения, где флуктуации интенсивности не малы. Однако при $\tilde{\epsilon} \ll 1$ мы имеем и в этом случае $F \gg l_e$, так что

протяженность по оси z «области влияния» каждой неоднородности намного превышает размер самой неоднородности.

Анализируя амплитудные флуктуации, следует учесть и тот случай, когда размер неоднородностей мал по сравнению с радиусом первой зоны Френеля: $l_e \ll \sqrt{\lambda z}$. Здесь уже нельзя использовать геометрическую оптику, а необходимо привлечь для оценок основные положения теории дифракции. Как мы знаем, дифракция на неоднородности размера l_e начинает существенно проявляться на расстоянии порядка $z_d = l_e^2/\lambda$ от нее. Поэтому фокусирующее действие неоднородностей возможно лишь на расстояниях, не превышающих z_d . Таким образом, «область влияния» неоднородности имеет продольный масштаб z_d и условие $z_d \gg l_e$, при котором можно использовать приближение марковского случайногопроцесса, принимает вид $(l_e^2/\lambda) \gg l_e$, т. е. $\lambda \ll l_e$.

Как мы видим, для слабых флуктуаций и крупномасштабных неоднородностей продольный радиус корреляции амплитудных флуктуаций оказывается во всех рассмотренных случаях большим по сравнению с размерами неоднородностей, что и необходимо для применимости приближения марковского случайногопроцесса.

Разумеется, приведенные качественные соображения не могут служить строгим обоснованием марковского приближения, и границы его применимости будут более последовательно рассмотрены ниже (§ 47). Все же следует подчеркнуть, что нам нигде не пришлось делать предположение о малости флуктуаций амплитуды волны. Поэтому можно надеяться, что марковское приближение окажется пригодным и для описания сильных флуктуаций поля, если только допустимо пренебречь волнами, рассеянными назад.

Проводя в гл. VI конкретные расчеты флуктуаций фазы и уровня при помощи МПВ, мы уже пользовались аппроксимацией корреляционной функции в делта-функцией. В § 40 была применена формула (40.30):

$$F_e(\mathbf{x}, \zeta) \rightarrow F_e^{\text{eff}}(\mathbf{x}, \zeta) = 2\pi\Phi_e(\mathbf{x}, 0)\delta(\zeta), \quad (43.3)$$

и было показано, что подстановка F_e^{eff} вместо F_e приводит при расчете спектров флуктуаций амплитуды и фазы к правильным результатам, если выполнены условия

$$z \gg \rho, \quad z \gg \lambda.$$

Поскольку корреляционная функция $\Phi_e(\rho, \zeta)$ связана с двумерной спектральной плотностью $F_e(\mathbf{x}, \zeta)$ формулой

$$\Phi_e(\rho, \zeta) = \int F_e(\mathbf{x}, \zeta) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2x,$$

легко установить, что замена (43.3) эквивалентна следующей замене корреляционной функции:

$$\psi_e(\rho, \zeta) \rightarrow \psi_e^{\text{ФФ}}(\rho, \zeta) = A(\rho) \delta(\zeta), \quad (43.4)$$

где

$$A(\rho) = 2\pi \int \Phi_e(x, 0) \exp(\pm i\kappa\rho) d^2x \quad (43.5)$$

(в силу четности $A(\rho)$ можно использовать любой знак показателя экспоненты).

Рассмотрим интеграл от $\psi_e(\rho, z)$ по продольной координате ζ . Используя трехмерное спектральное разложение

$$\psi_e(\rho, \zeta) = \int \Phi_e(x, p) \exp[i(x\rho + p\zeta)] d^2x dp$$

и интегрируя его по ζ в бесконечных пределах, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_e(\rho, \zeta) d\zeta &= \int \Phi_e(x, p) \exp(i\kappa\rho) d^2x dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\zeta} d\zeta = \\ &= \int \Phi_e(x, p) \exp(i\kappa\rho) \cdot 2\pi\delta(p) d^2x dp = 2\pi \int \Phi_e(x, 0) \exp(i\kappa\rho) d^2x = \\ &= A(\rho). \end{aligned}$$

С другой стороны, интеграл по ζ от аппроксимирующей корреляционной функции $\psi_e^{\text{ФФ}}(\rho, \zeta) = A(\rho) \delta(\zeta)$ тоже дает функцию $A(\rho)$, так что справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_e(\rho, \zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_e^{\text{ФФ}}(\rho, \zeta) d\zeta = A(\rho). \quad (43.6)$$

В дальнейшем часто будет встречаться комбинация

$$H(\rho) = \frac{1}{\pi} [A(0) - A(\rho)] = 2 \int [1 - \cos \kappa\rho] \Phi_e(x, 0) d^2x. \quad (43.7)$$

Функция $H(\rho)$ зависит от двумерного вектора ρ и выражается при помощи двумерного преобразования Фурье через трехмерную спектральную плотность $\Phi_e(x, 0)$.

Если случайное поле $\tilde{e}(\rho, z)$ является *гауссовым*, то для его полного статистического описания достаточно задания корреляционной функции e и, в частности, эффективной корреляционной функции вида (43.4). Однако если не предполагать нормальности поля $\tilde{e}(\rho, z)$, то необходимо задавать и более высокие моменты

$$\langle \tilde{e}(\rho_1, z_1) \dots \tilde{e}(\rho_n, z_n) \rangle.$$

Для *гауссова* поля $\tilde{e}(\rho, z)$ из делта-коррелированности по z вытекает, что при любых $z_1 \neq z_2$ случайные величины $\tilde{e}(\rho_1, z_1)$ и $\tilde{e}(\rho_2, z_2)$ *статистически независимы*. Но для *негауссовых* полей

некоррелированность еще не влечет за собой независимости. Оказывается, что для негауссовых полей $\bar{e}(\rho, z)$ условие, аналогичное (43.4), при котором для моментов случайного волнового поля $v(\rho, z)$ можно получить замкнутые уравнения, формулируется следующим образом. Пусть z_i ($i = 1, \dots, n$) и z'_j ($j = 1, \dots, m$) удовлетворяют при любых i, j условиям

$$z_i < z_0, \quad z'_j > z_0.$$

Тогда совокупности случайных величин $\bar{e}(\rho_i, z_i)$ и $\bar{e}(\rho'_j, z'_j)$ должны быть статистически независимы. Аналогом дельта-коррелированности здесь является то, что при любом сколь угодно малом «зазоре» между переменными обеих групп уже наступает их полная статистическая независимость.

Известно, что совместные кумулянты для нескольких случайных величин обращаются в нуль, если среди этих величин имеется хотя бы одна, статистически независимая от остальных. Поэтому совместные кумулянты для $\bar{e}(\rho_i, z_i)$ и $\bar{e}(\rho'_j, z'_j)$ должны обращаться в нуль. С другой стороны, для негауссовых случайных величин высшие кумулянты должны быть отличными от нуля. Отсюда следует, что кумулянты для случайных величин $\bar{e}(\rho_i, z_i)$ должны иметь вид дельта-функций по переменным z_i :

$$\Psi_n(\rho_1, z_1; \rho_2, z_2; \dots; \rho_n, z_n) = A(\rho_1, \dots, \rho_n, z_1) \delta(z_2 - z_1) \delta(z_3 - z_2) \dots \delta(z_n - z_{n-1}). \quad (43.8)$$

Случайные функции $\bar{e}(\rho, z)$, удовлетворяющие этому условию, мы и будем называть *дельта-коррелированными* по z .

§ 44. Уравнения для статистических моментов волнового поля в приближении марковского случайного процесса

В соответствии с изложенными выше соображениями рассмотрим теперь приближение параболического уравнения

$$2ik \frac{\partial v(\rho, z)}{\partial z} + \Delta_L v(\rho, z) + k^2 \bar{e}(\rho, z) v(\rho, z) = 0, \quad (44.1)$$

$$v(\rho, 0) = v_0(\rho),$$

считая $\bar{e}(\rho, z)$ случайной функцией, дельта-коррелированной по z .

Получим сначала уравнение для $\bar{v}(\rho, z)$ [2]. Для этого применим тождественное преобразование

$$2ik \frac{\partial v}{\partial z} + k^2 \bar{e}(\rho, z) v(\rho, z) =$$

$$= 2ik \exp \left[-\frac{k^2}{2ik} \int_0^z \bar{e}(\rho, \zeta) d\zeta \right] \frac{\partial}{\partial z} \left[\exp \left(\frac{k^2}{2ik} \int_0^z \bar{e}(\rho, \zeta) d\zeta \right) v(\rho, z) \right],$$

при помощи которого уравнение (44.1) можно записать в следующей форме:

$$2ik \frac{\partial}{\partial z} \left[\exp \left(-\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{e}(\rho, \xi) d\xi \right) v(\rho, z) \right] = \\ = -\exp \left(-\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{e}(\rho, \xi) d\xi \right) \Delta_{\perp} v(\rho, z). \quad (44.2)$$

Проинтегрируем это уравнение в пределах от 0 до z , обозначив переменную интегрирования в правой части через z' , а затем умножим обе его части на

$$\exp \left(\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{e}(\rho, \xi) d\xi \right).$$

В результате с учетом равенства

$$\int_0^z \tilde{e} d\xi - \int_0^{z'} \tilde{e} d\xi = \int_{z'}^z \tilde{e} d\xi$$

получим

$$2ikv(\rho, z) - 2ik \exp \left(\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{e}(\rho, \xi) d\xi \right) v_0(\rho) = \\ = - \int_{z'}^z dz' \exp \left(\frac{ik}{2} \int_{z'}^z \tilde{e}(\rho, \xi) d\xi \right) \Delta_{\perp} v(\rho, z'). \quad (44.3)$$

В правой части (44.3) под знак интеграла входит произведение двух случайных величин $\Delta_{\perp} v(\rho, z')$ и $\exp \left(\frac{1}{2} ik \int_{z'}^z \tilde{e}(\rho, \xi) d\xi \right)$. Так как $v(\rho, z')$ функционально зависит лишь от *предшествующих* по z значений $\tilde{e}(\rho, \xi')$, где $0 \leq \xi' \leq z'$, а в экспоненту входят только *последующие* значения $\tilde{e}(\rho, \xi)$ при $\xi \geq z'$, для дельта-коррелированных по z случайных функций $\tilde{e}(\rho, z)$ эти два сомножителя *статистически независимы*. Поэтому, усредняя уравнение (44.3), получаем соотношение

$$2ik\bar{v}(\rho, z) - 2ik \left\langle \exp \left(\frac{ik}{2} \int_0^z \tilde{e}(\rho, \xi) d\xi \right) \right\rangle v_0(\rho) = \\ = - \int_0^z dz' \left\langle \exp \left(\frac{ik}{2} \int_{z'}^z \tilde{e}(\rho, \xi) d\xi \right) \right\rangle \Delta_{\perp} \bar{v}(\rho, z'), \quad (44.4)$$

представляющее собой замкнутое уравнение относительно функции $\bar{v}(\rho, z)$.

В уравнение (44.4) входит функция

$$P(z, z'; \rho) = \left\langle \exp \left(\frac{ik}{2} \int_{z'}^z \bar{e}(\rho, \zeta) d\zeta \right) \right\rangle. \quad (44.5)$$

Она известна, если заданы статистические характеристики случайной функции \bar{e} .

Рассмотрим частный случай, когда $\bar{e}(\rho, z)$ — гауссово случайное поле. В этом случае величина $a = \int_{z'}^z \bar{e}(\rho, \zeta) d\zeta$ является гауссовой со средним значением, равным нулю. Следовательно,

$$P = \left\langle \exp \left(\frac{ika}{2} \right) \right\rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{k^2}{4} \bar{a}^2 \right) \right]. \quad (44.6)$$

Найдем \bar{a}^2 , используя формулу (43.4):

$$\begin{aligned} \bar{a}^2 &= \int_{z'}^z d\zeta_1 \int_{z'}^z d\zeta_2 \langle \bar{e}(\rho, \zeta_1) \bar{e}(\rho, \zeta_2) \rangle = \\ &= A(0) \int_{z'}^z d\zeta_1 \int_{z'}^z d\zeta_2 \delta(\zeta_1 - \zeta_2) = (z - z') A(0). \end{aligned}$$

В результате получаем для P выражение

$$P(z, z') = \exp \left[-\frac{k^2 A_0}{8} (z - z') \right], \quad (44.7)$$

где введено обозначение $A_0 = A(0)$.

Подставив (44.7) в уравнение (44.4), находим

$$\begin{aligned} 2ik\bar{v}(\rho, z) - 2ik \exp \left[-\frac{k^2 A_0}{8} z \right] v_0(\rho) &= \\ &= - \int_0^z dz' \exp \left[-\frac{k^2 A_0}{8} (z - z') \right] \Delta_{\perp} \bar{v}(\rho, z'). \quad (44.8) \end{aligned}$$

После умножения (44.8) на $\exp(-k^2 A_0 z)$ и дифференцирования по z получаем равенство

$$\begin{aligned} 2ik \exp \left(\frac{k^2 A_0}{8} z \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + 2ik \frac{k^2 A_0}{8} \exp \left(\frac{k^2 A_0}{8} z \right) \bar{v} &= \\ &= - \exp \left(\frac{k^2 A_0}{8} z \right) \Delta_{\perp} \bar{v}(\rho, z), \end{aligned}$$

из которого вытекает искомое дифференциальное уравнение для среднего значения \bar{v} :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{k^2 A_0}{8} \bar{v} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \bar{v} (\rho, z) = 0. \quad (44.9)$$

Решением этого уравнения мы займемся позднее, а сейчас обратимся к выводу аналогичных уравнений для моментов любого порядка

$$\Gamma_{n,m} = \langle v(\rho'_1, z) \dots v(\rho'_n, z) v^*(\rho''_1, z) \dots v^*(\rho''_m, z) \rangle. \quad (44.10)$$

Прежде всего выведем дифференциальное уравнение для случайной функции

$$\gamma = v(\rho'_1, z) \dots v(\rho'_n, z) v^*(\rho''_1, z) \dots v^*(\rho''_m, z). \quad (44.11)$$

Запишем для этого уравнение (44.1) для $v(\rho'_1, z)$, обозначив через Δ'_1 поперечный лапласиан Δ_{\perp} по координатам x_1, y_1 точки ρ'_1 :

$$2ik \frac{\partial v(\rho'_1, z)}{\partial z} + \Delta'_1 v(\rho'_1, z) + k^2 \bar{e}(\rho'_1, z) v(\rho'_1, z) = 0.$$

Умножим это уравнение на $v(\rho'_2, z) v(\rho'_3, z) \dots v(\rho'_n, z) \times v^*(\rho''_1, z) \dots v^*(\rho''_m, z)$. Так как этот множитель не зависит от ρ'_1 , его можно внести под знак Δ'_1 , что дает

$$2ik \frac{\partial v(\rho'_1, z)}{\partial z} v(\rho'_2, z) \dots v^*(\rho''_m, z) + \Delta'_1 \gamma + k^2 \bar{e}(\rho'_1, z) \gamma = 0. \quad (44.12)$$

Записав уравнение (44.1) для $v(\rho'_2, z)$ и умножив его на $v(\rho'_1, z) v(\rho'_3, z) \dots v^*(\rho''_m, z)$, получим

$$2ik v(\rho'_1, z) \frac{\partial v(\rho'_2, z)}{\partial z} v(\rho'_3, z) \dots v^*(\rho''_m, z) + \Delta'_2 \gamma + k^2 \bar{e}(\rho'_2, z) \gamma = 0. \quad (44.13)$$

Уравнения для $v(\rho'_3, z), \dots, v(\rho'_n, z)$ имеют аналогичный вид.

Взяв уравнение, комплексно сопряженное (44.1),

$$2ik \frac{\partial v^*}{\partial z} - \Delta_{\perp} v^* - k^2 \bar{e} v^* = 0,$$

запишем его для $v^*(\rho''_1, z)$ и, умножив на $v(\rho'_1, z) \dots v(\rho'_n, z) \times v^*(\rho''_2, z) \dots v^*(\rho''_m, z)$, получим

$$2ik v(\rho'_1, z) \dots v(\rho'_n, z) \frac{\partial v^*(\rho''_1, z)}{\partial z} v^*(\rho''_2, z) \dots v^*(\rho''_m, z) - \Delta'_1 \gamma - k^2 \bar{e}(\rho''_1, z) \gamma = 0. \quad (44.14)$$

Аналогичные уравнения справедливы также для $v^*(\rho''_2, z), \dots, v^*(\rho''_m, z)$.

Сложив теперь все уравнения, начиная с (44.12), получаем уравнение для случайной функции γ :

$$2ik \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \hat{L}\gamma + k^2 \mu(z) \gamma = 0, \quad (44.15)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \Delta'_1 + \dots + \Delta'_n - \Delta''_1 - \dots - \Delta''_m, \\ \mu(z) &= \tilde{e}(\rho'_1, z) + \dots + \tilde{e}(\rho'_n, z) - \tilde{e}(\rho''_1, z) - \dots - \tilde{e}(\rho''_m, z). \end{aligned} \quad (44.16)$$

Уравнение (44.15) отличается от (44.1) только заменами $\sigma \rightarrow \gamma$, $\Delta_\perp \rightarrow \hat{L}$, $\tilde{e} \rightarrow \mu$. Поэтому, проделав такие же преобразования, как и при переходе от (44.1) к (44.2), (44.3) и (44.4), мы получим уравнение для $\bar{\gamma} = \Gamma_{n, m}(\rho'_1, \rho''_1, 0)$, аналогичное (44.4):

$$\begin{aligned} 2ik\Gamma_{n, m}(\rho'_1, \rho''_1, z) - 2ik \left\langle \exp \left(\frac{ik}{2} \int_0^z \mu(\xi) d\xi \right) \right\rangle \Gamma_{n, m}(\rho'_1, \rho''_1, 0) = \\ = - \int_0^z dz' \left\langle \exp \left(\frac{ik}{2} \int_{z'}^z \mu(\xi) d\xi \right) \right\rangle \hat{L} \Gamma_{n, m}(\rho'_1, \rho''_1, z'). \end{aligned} \quad (44.17)$$

Уравнение (44.17) — замкнутое, а входящая в него функция

$$P_1(z, z') = \left\langle \exp \left(\frac{ik}{2} \int_{z'}^z \mu(\rho'_\alpha, \rho''_\beta, \xi) d\xi \right) \right\rangle \quad (44.18)$$

известна, если заданы статистические свойства $\tilde{e}(\rho_\alpha, z)$.

Рассмотрим, как и для $\bar{v}(\rho, z)$, гауссово случайное поле \tilde{e} . Тогда $P_1(z, z')$ определяется формулой

$$P_1(z, z') = \exp \left\{ - \frac{k^2}{8} \int_{z'}^z d\xi_1 \int_{z'}^z d\xi_2 \langle \mu(\rho'_\alpha, \rho''_\beta, \xi_1) \mu(\rho'_\alpha, \rho''_\beta, \xi_2) \rangle \right\}. \quad (44.19)$$

Учитывая, что

$$\mu(\rho'_\alpha, \rho''_\beta, \xi) = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{e}(\rho'_\alpha, \xi) - \sum_{\beta=1}^m \tilde{e}(\rho''_\beta, \xi),$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle \mu(\rho'_\alpha, \rho''_\beta, \xi_1) \mu(\rho'_\alpha, \rho''_\beta, \xi_2) \rangle &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m \langle \tilde{e}(\rho'_\alpha, \xi_1) \tilde{e}(\rho''_\beta, \xi_2) \rangle - \\ &- 2 \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m \langle \tilde{e}(\rho'_\alpha, \xi_1) \tilde{e}(\rho''_\beta, \xi_2) \rangle + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n \langle \tilde{e}(\rho''_\beta, \xi_1) \tilde{e}(\rho'_\alpha, \xi_2) \rangle. \end{aligned}$$

Согласно (43.4)

$$\langle \bar{e}(\rho_\alpha, \zeta_1) \bar{e}(\rho_\beta, \zeta_2) \rangle = A(\rho_\alpha - \rho_\beta) \delta(\zeta_1 - \zeta_2),$$

так что

$$\int\limits_z^z d\zeta_1 \int\limits_z^z d\zeta_2 \langle \mu(\zeta_1) \mu(\zeta_2) \rangle = (z - z') Q_{n,m},$$

где

$$Q_{n,m} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m A(\rho'_\alpha - \rho'_\beta) - \\ - 2 \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^m A(\rho'_\alpha - \rho''_\beta) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^n A(\rho'_\alpha - \rho''_\beta). \quad (44.20)$$

Следовательно,

$$P_1(z, z') = \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} Q_{n,m}(z - z') \right\}. \quad (44.21)$$

Подставим (44.21) в уравнение (44.17), затем умножим обе его части на $\exp(1/k^2 Q_{n,m} z)$ и продифференцируем по z . В результате получим уравнение

$$2ik \frac{\partial \Gamma_{n,m}}{\partial z} \exp(1/k^2 Q_{n,m} z) + 2ik \cdot 1/k^2 Q_{n,m} \Gamma_{n,m} \exp(1/k^2 Q_{n,m} z) = \\ = \exp(1/k^2 Q_{n,m} z) \hat{L} \Gamma_{n,m}(z),$$

которое, с учетом выражения (44.16) для \hat{L} , приводится к следующему окончательному виду:

$$\frac{\partial \Gamma_{n,m}}{\partial z} - \frac{i}{2k} (\Delta'_1 + \dots + \Delta'_n - \Delta''_1 - \dots - \Delta''_m) \Gamma_{n,m} + \\ + \frac{k^2}{8} Q_{n,m} \Gamma_{n,m} = 0. \quad (44.22)$$

«Начальное» условие к уравнению (44.22) имеет форму

$$\Gamma_{n,m}(\rho'_1, \rho''_1, 0) = v_0(\rho'_1) \dots v_0(\rho'_n) v_0^*(\rho''_1) \dots v_0^*(\rho''_m).$$

При $n=1, m=0$ из формулы (44.20) следует, что

$$Q_{1,0} = A(0) = A_0, \quad (44.23)$$

а для $\Gamma_{1,0} \equiv \bar{v}(\rho, z)$ из (44.22) получаем прежнее уравнение (44.9).

Запишем еще уравнение для момента $\Gamma_{1,1} = \langle v(\rho'_1, z) v^*(\rho''_1, z) \rangle$, т. е. для поперечной функции когерентности. Полагая в (44.20) $n=m=1$, получаем

$$Q_{1,1} = 2A(0) - 2A(\rho'_1 - \rho''_1) = 2\pi H(\rho'_1 - \rho''_1),$$

где использовано обозначение (43.7). Уравнение (44.22) принимает при $n=m=1$ вид

$$\frac{\partial \Gamma_{1,1}(\rho', \rho'', z)}{\partial z} - \frac{i}{2k} (\Delta' - \Delta'') \Gamma_{1,1} + \frac{\pi k^2}{4} H(\rho' - \rho'') \Gamma_{1,1} = 0. \quad (44.24)$$

Решение этого уравнения будет подробно рассмотрено в следующем параграфе. Функция взаимной когерентности $\Gamma_{1,1}$ играет важную роль при описании статистических свойств излучения. В частности, при $\rho'' = \rho'$ она переходит в среднюю интенсивность волны: $\Gamma_{1,1}(\rho', \rho', z) = \langle |v(\rho', z)|^2 \rangle = \langle I(\rho', z) \rangle$.

Наконец, запишем уравнение для момента четвертого порядка

$$\Gamma_{2,2} = \langle v(\rho'_1, z) v(\rho'_2, z) v^*(\rho''_1, z) v^*(\rho''_2, z) \rangle.$$

Полагая $n=m=2$, с учетом четности функции $A(\rho)$ получаем из формулы (44.20)

$$\begin{aligned} Q_{2,2} &= 4A_0 + 2A(\rho'_1 - \rho'_2) + 2A(\rho''_1 - \rho''_2) - \\ &- 2A(\rho'_1 - \rho''_1) - 2A(\rho'_2 - \rho''_2) - 2A(\rho''_2 - \rho'_1) - 2A(\rho''_1 - \rho'_2) = \\ &= 2\pi [H(\rho'_1 - \rho''_1) + H(\rho'_1 - \rho''_2) + H(\rho''_2 - \rho'_1) + H(\rho''_1 - \rho'_2) - \\ &- H(\rho'_1 - \rho'_2) - H(\rho''_1 - \rho''_2)]. \end{aligned}$$

Уравнение (44.22) принимает в этом случае вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{2,2}}{\partial z} &- \frac{i}{2k} (\Delta'_1 + \Delta'_2 - \Delta''_1 - \Delta''_2) \Gamma_{2,2} + \\ &+ \frac{\pi k^2}{4} [H(\rho'_1 - \rho''_1) + H(\rho'_1 - \rho''_2) + H(\rho''_2 - \rho'_1) + \\ &+ H(\rho''_1 - \rho'_2) - H(\rho'_1 - \rho'_2) - H(\rho''_1 - \rho''_2)] \Gamma_{2,2} = 0. \quad (44.25) \end{aligned}$$

Момент $\Gamma_{2,2}$ связан с флюктуациями интенсивности волны. Исследованию их свойств будет посвящен § 46.

Совокупность всех уравнений (44.22) эквивалентна одному уравнению с функциональными производными для совместного характеристического функционала случайных полей $v(\rho, z)$ и $v^*(\rho, z)$ (см. [22]). Это уравнение и является аналогом уравнения Эйнштейна — Фоккера для рассматриваемой здесь задачи.

§ 45. Среднее поле и функция когерентности второго порядка

1. Среднее поле. Среднее поле $\bar{v}(\rho, z)$ подчиняется полученному в предыдущем параграфе уравнению (44.9):

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{k^2 A_0}{8} \bar{v} - \frac{i}{2k} \Delta \perp \bar{v} = 0, \quad \bar{v}(\rho, 0) = v_0(\rho). \quad (45.1)$$

Нетрудно получить решение этого уравнения. Заметив, что

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{k^2 A_0}{8} \bar{v} = e^{-k^2 A_0 z / 8} \frac{\partial}{\partial z} [e^{k^2 A_0 z / 8} \bar{v}],$$

запишем уравнение (45.1) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} [e^{k^2 A_0 z / 8} \bar{v}] - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} [e^{k^2 A_0 z / 8} \bar{v}] = 0. \quad (45.2)$$

Рассмотрим поле $w(\rho, z)$ в однородной среде. Уравнение для него получается из (45.1), если положить $A_0 = 0$:

$$\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} w = 0, \quad w(\rho, 0) = v_0(\rho). \quad (45.3)$$

Сравнивая (45.3) с (45.2), мы видим, что эти уравнения (и начальные условия к ним) совпадают. Тем самым совпадают и функции $\exp\{i/\epsilon k^2 A_0 z\} \bar{v}(\rho, z)$ и $w(\rho, z)$, подчиненные этим уравнениям, т. е. имеет место равенство

$$\bar{v}(\rho, z) = \exp\left(-\frac{k^2 A_0}{8} z\right) w(\rho, z), \quad (45.4)$$

которое связывает среднее поле $\bar{v}(\rho, z)$ с полем $w(\rho, z)$, создаваемым теми же источниками на плоскости $z=0$, но в однородной среде. Таким образом, влияние случайных неоднородностей среды проявляется в том, что среднее поле экспоненциально затухает.

Этот результат нетрудно понять, если сравнить коэффициент экстинкции $k^2 A_0 / 8$ в формуле (45.4) с его значением, полученным в борновском приближении. Последнее определяется формулой (26.13):

$$\sigma_0 = \frac{\pi k^4}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \Phi_e \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

которая сразу записана здесь для статистически изотропных флуктуаций диэлектрической проницаемости. Выполнив интегрирование по ϕ и введя вместо θ новую переменную интегрирования $x = 2k \sin(\theta/2)$, приводим формулу для σ_0 к виду

$$\sigma_0 = \pi^2 k^2 \int_0^{2k} \Phi_e(x) x dx.$$

Но в интересующем нас случае крупномасштабных неоднородностей функция $\Phi_e(x)$ пренебрежимо мала в области $x > 2k$, в силу чего можно, практически не меняя значения интеграла,

отодвинуть верхний предел в бесконечность:

$$\sigma_0 = \pi^2 k^2 \int_0^\infty \Phi_e(x) x dx \quad (45.5)$$

(эта формула была получена в задаче 1 к гл. IV).

Сравним это выражение с величиной $k^2 A_0 / 8$, где, согласно (43.5),

$$A_0 = 2\pi \int \Phi_e(x) d^2x = 4\pi^2 \int_0^\infty \Phi_e(x) x dx.$$

Мы находим, что

$$\frac{k^2 A_0}{8} = \frac{\pi^2 k^2}{2} \int_0^\infty \Phi_e(x) x dx = \frac{1}{2} \sigma_0. \quad (45.6)$$

Для интенсивности среднего поля $|\bar{v}|^2$ из (45.4) и (45.6) получается следующий закон убывания с ростом z :

$$|\bar{v}|^2 = |w(\rho, z)|^2 \exp \left\{ -\frac{k^2 A_0}{4} z \right\} = |w(\rho, z)|^2 e^{-\sigma_0 z}. \quad (45.7)$$

Отсюда ясно, что убывание среднего поля можно целиком объяснить перекачкой энергии из упорядоченной составляющей поля в его неупорядоченную (флуктуирующую) часть. Например, в случае падающей плоской волны, когда $v_0 = \text{const}$ и $w(\rho, z) = \text{const}$, формула (45.7) принимает вид

$$|\bar{v}(\rho, z)|^2 = |\tilde{v}_0|^2 \exp \{-\sigma_0 z\}. \quad (45.8)$$

В то же время средняя интенсивность поля, как мы установили в § 39, в этом случае постоянна:

$$\langle |v^2| \rangle = |v_0|^2 = \text{const}. \quad (45.9)$$

Комбинируя формулы (45.8) и (45.9), получаем

$$\langle |\tilde{v}|^2 \rangle = \langle |v^2| \rangle - |\bar{v}|^2 = |v_0|^2 (1 - e^{-\sigma_0 z}). \quad (45.10)$$

Мы видим, что интенсивность флуктуационной части поля нарастает по мере углубления волны в неоднородную среду, и на расстояниях $z \gg \sigma_0^{-1}$ практически вся интенсивность волны связана с ее случайной компонентой.

2. Функция когерентности второго порядка. Рассмотрим теперь функцию когерентности второго порядка $\Gamma_{1,1}$. Для нее в предыдущем параграфе было получено уравнение (44.24). Преобразуем это уравнение.

Введем на плоскости $z = \text{const}$ координату ρ_+ центра тяжести точек ρ' , ρ'' и относительную координату ρ :

$$\rho_+ = \frac{1}{2}(\rho' + \rho''), \quad \rho = \rho' - \rho''.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \rho'} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho_+} + \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial \rho''} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho_+} - \frac{\partial}{\partial \rho}, \\ \Delta' - \Delta'' &= 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho_+}.\end{aligned}$$

Если ввести обозначения $\Gamma_{1,1}(\rho', \rho'', z) = \Gamma_{1,1}(\rho_+ + \rho/2, \rho_+ - \rho/2, z) = \Gamma(\rho, \rho_+, z)$, то уравнение для Γ , получаемое из (44.24) путем перехода к новым переменным, будет

$$\frac{\partial \Gamma(\rho, \rho_+, z)}{\partial z} - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \rho \partial \rho_+} + \frac{\pi k^2}{4} H(\rho) \Gamma = 0. \quad (45.11)$$

Уравнение (45.11) можно решить при помощи преобразования Фурье по переменной ρ_+ :

$$\Gamma(\rho, \rho_+, z) = \int \gamma(\rho, p, z) \exp(ip\rho_+) dp. \quad (45.12)$$

Подставив это в (45.11), получаем для γ уравнение

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{p}{k} \frac{\partial \gamma}{\partial p} + \frac{\pi k^2}{4} H(p) \gamma = 0. \quad (45.13)$$

Используем операторную запись для ряда Тейлора¹⁾

$$f(p + p_0) = \exp\left(p_0 \frac{\partial}{\partial p}\right) f(p) \quad (45.14)$$

и преобразуем сумму первых двух членов в уравнении (45.13):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{p}{k} \frac{\partial \gamma}{\partial p} = \exp\left(-\frac{pz}{k} \frac{\partial}{\partial p}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left[\exp\left(\frac{pz}{k} \frac{\partial}{\partial p}\right) \gamma(p, p, z) \right].$$

Уравнение (45.13) можно записать поэтому в виде

$$\exp\left(-\frac{pz}{k} \frac{\partial}{\partial p}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left[\exp\left(\frac{pz}{k} \frac{\partial}{\partial p}\right) \gamma(p, p, z) \right] = -\frac{\pi k^2}{4} H(p) \gamma(p, p, z),$$

или, если умножить этот результат слева на оператор $\exp\left(\frac{pz}{k} \frac{\partial}{\partial p}\right)$, — в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left[\exp\left(\frac{pz}{k} \frac{\partial}{\partial p}\right) \gamma(p, p, z) \right] &= \\ &= -\frac{\pi k^2}{4} \exp\left(\frac{pz}{k} \frac{\partial}{\partial p}\right) [H(p) \gamma(p, p, z)]. \quad (45.15)\end{aligned}$$

¹⁾ Разложив $\exp\left\{p_0 \frac{\partial}{\partial p}\right\}$ в ряд, получаем обычную форму записи ряда Тейлора.

Используя формулу (45.14) и полагая в ней $\rho_0 = p z/k$, можно записать уравнение (45.15) еще и следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} \gamma\left(\rho + \frac{pz}{k}, p, z\right) = -\frac{\pi k^2}{4} H\left(\rho + \frac{pz}{k}\right) \gamma\left(\rho + \frac{pz}{k}, p, z\right). \quad (45.16)$$

Решение этого уравнения относительно функции $\gamma(\rho + p z/k, p, z)$ есть

$$\gamma\left(\rho + \frac{pz}{k}, p, z\right) = \gamma^{(0)}(\rho, p) \exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4} \int_0^z H\left(\rho + \frac{p\zeta}{k}\right) d\zeta\right\},$$

где $\gamma^{(0)}(\rho, p) = \gamma(\rho, p, 0)$ — значение функции γ при $z=0$. Если заменить ρ на $\rho - p z/k$, то решение примет вид

$$\begin{aligned} \gamma(\rho, p, z) &= \\ &= \gamma^{(0)}\left(\rho - \frac{pz}{k}, p\right) \exp\left\{-\frac{\pi k^2}{4} \int_0^z H\left(\rho - \frac{p}{k}(z - \zeta)\right) d\zeta\right\}. \end{aligned} \quad (45.17)$$

Подставив (45.17) в (45.12), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho, \rho_+, z) &= \\ &= \int \gamma^{(0)}\left(\rho - \frac{pz}{k}, p\right) \exp\left\{ip\rho_+ - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^z H\left(\rho - \frac{p}{k}(z - \zeta)\right) d\zeta\right\} d^3 p. \end{aligned} \quad (45.18)$$

Остается лишь выразить здесь трансформанту Фурье $\gamma^{(0)}$ через функцию $\Gamma^{(0)}(\rho, \rho_+) = \Gamma(\rho, \rho_+, 0)$. Согласно (45.12)

$$\gamma^{(0)}(\rho, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int \exp(-ip\rho'_+) \Gamma^{(0)}(\rho, \rho'_+) d^3 p'_+.$$

Поставив это разложение в (45.18), находим

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho, \rho_+, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^3 p d^3 \rho'_+ \Gamma^{(0)}\left(\rho - \frac{pz}{k}, \rho'_+\right) \times \\ &\times \exp\left\{ip(\rho_+ - \rho'_+) - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^z H\left(\rho - \frac{p}{k}(z - \zeta)\right) d\zeta\right\}. \end{aligned}$$

Для того чтобы придать правой части этого равенства более симметричный вид, введем вместо ρ новую переменную интегрирования $\rho' = \rho - (pz/k)$, $d^3 p = k^2 d^3 \rho'/z^2$. Тогда окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho, \rho_+, z) &= \frac{k^2}{4\pi^2 z^2} \int d^3 \rho' d^3 \rho'_+ \Gamma^{(0)}(\rho', \rho'_+) \times \\ &\times \exp\left\{\frac{ik}{z}(\rho - \rho')(\rho_+ - \rho'_+) - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^z H\left(\rho \frac{\zeta}{z} + \rho' \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)\right) d\zeta\right\}. \end{aligned} \quad (45.19)$$

Мы получили решение уравнения (45.11) в самом общем случае—для произвольной функции $H(\rho)$ и произвольной функции $\Gamma^{(0)}(\rho, \rho_+)$ на границе [4—6].

Рассмотрим частный случай падения на неоднородную среду плоской волны. Тогда $\Gamma^{(0)}(\rho, \rho_+) = \text{const} = I_0$, и в (45.19) можно выполнить интегрирование по ρ'_+ , что приводит к появлению множителя $(4\pi^2 z^2/k^2) \delta(\rho - \rho')$. После этого выполняется интегрирование и по ρ' , в результате чего получаем

$$\Gamma(\rho, \rho_+, z) = I_0 \exp \left[-\frac{\pi k^2 z}{4} H(\rho) \right] = \Gamma(\rho, z). \quad (45.20)$$

Естественно, в случае плоской волны, распространяющейся в статистически однородной среде, Γ не зависит от координаты центра тяжести ρ_+ . Полагая в (45.20) $\rho = 0$ и учитывая, что $H(0) = 0$, получаем

$$\Gamma(0, \rho_+, z) = \langle v(\rho_+, z) v^*(\rho_+, z) \rangle = \bar{I}(\rho_+, z) = I_0.$$

Равенство $\bar{I} = I_0$ для плоской волны мы уже получали в § 39.

Как мы знаем, функция $H(\rho)$ возрастает при увеличении своего аргумента. Поэтому функция Γ с ростом ρ уменьшается. Можно ввести некий характерный масштаб ρ_k , для которого $\Gamma(\rho_k, z)$ уже мало по сравнению с $\Gamma(0, z)$, определив этот масштаб, скажем, как корень уравнения

$$\frac{\pi k^2 z}{4} H(\rho_k) = 1. \quad (45.21)$$

Если расстояние ρ между точками наблюдения мало по сравнению с ρ_k , то $\Gamma(\rho, z)/\Gamma(0, z) \approx 1$ и значения полей в этих точках сильно коррелированы. Если же $\rho \gg \rho_k$, то $\Gamma \approx 0$ и значения полей оказываются пространственно некоррелированными. Таким образом, масштаб ρ_k является пространственным радиусом корреляции полей, или радиусом когерентности. Ясно, что ρ_k уменьшается с увеличением z . Если, например, $H(\rho) \sim C_b \rho^{-1/4}$, как это имеет место для турбулентной среды, то

$$\rho_k \sim \frac{1}{(C_b k^2 z)^{1/4}}.$$

Этот результат уже был получен в § 37 при помощи МГО.

Обратимся теперь к общему случаю, когда $\Gamma^{(0)}$ не является постоянной величиной (например, $\Gamma^{(0)}$ может быть отлично от нуля лишь в некоторой области ρ'_+ , что соответствует ограниченному волновому пучку). Рассмотрим интеграл от Γ по переменной ρ_+ . Интегрируя выражение (45.19), получаем под интегралами по ρ' и ρ'_+ множитель $(4\pi^2 z^2/k^2) \delta(\rho - \rho')$, что позволяет выполнить интегрирование также по ρ' и приводит к следующему

соотношению:

$$\int \Gamma(\rho, \rho_+, z) d^3\rho_+ = \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{4} z H(\rho) \right\} \int \Gamma^{(0)}(\rho, \rho'_+) d^3\rho'_+. \quad (45.22)$$

Таким образом, усредненная по сечению пучка функция когерентности второго порядка ведет себя так же, как функция когерентности плоской волны.

Полагая в (45.22) $\rho = 0$ и учитывая, что $H(0) = 0$, $\Gamma(0, \rho_+, z) = I(\rho_+, 0)$, получаем закон сохранения

$$\int I(\rho_+, z) d^3\rho_+ = \int I_0(\rho_+) d^3\rho_+. \quad (45.23)$$

Равенство (45.23) показывает, что флюктуации диэлектрической проницаемости приводят лишь к перераспределению средней интенсивности в плоскости $z = \text{const}$; интеграл же от этой интенсивности по плоскости $z = \text{const}$ сохраняется.

Формула (45.19) позволяет рассчитывать распределения средней интенсивности и степени когерентности для волновых пучков в случайно-неоднородных средах (см. задачу 1).

3. Связь с уравнением переноса излучения. Остановимся теперь на связи полученных результатов с так называемым уравнением переноса излучения (УПИ), которое применяется для расчета энергетических характеристик излучения (в том числе теплового) в рассеивающих средах и широко используется во многих задачах астрофизики и геофизики. Обычно УПИ обосновывается феноменологически.

Рассмотрим абсолютную величину плотности потока энергии $|dS|$ в телесный угол $d\Omega$ с вершиной, расположенной в точке R , и осью, направленной вдоль единичного вектора n :

$$|dS| = \mathcal{I}(R, n) d\Omega. \quad (45.24)$$

Введенная таким образом величина \mathcal{I} носит название яркости или лучевой интенсивности. Мы уже рассматривали ее в § 9 для однородной среды (см. формулу (9.26)). Значение $\mathcal{I}(R', n)$ в точке $R' = R + n dl$ отличается от $\mathcal{I}(R, n)$ за счет двух факторов. Первый из них — ослабление излучения на пути dl из-за поглощения и рассеяния в другие направления: $\Delta\mathcal{I}^{(1)} = -\alpha \mathcal{I} dl$. Коэффициент ослабления (экстинкции) α равен сумме коэффициентов рассеяния и поглощения. Второй фактор — прирост потока энергии в направлении n из-за рассеяния потоков энергии, первоначально распространявшихся в других направлениях:

$$\Delta\mathcal{I}^{(2)} = \oint \mathcal{I}(R, n') f(n - n') d\Omega(n') dl.$$

(Здесь $f(n - n')$ — отнесенное к единице объема сечение рассеяния при изменении направления от n' до n). Тогда $\Delta\mathcal{I} = \Delta\mathcal{I}^{(1)} + \Delta\mathcal{I}^{(2)}$,

что приводит к уравнению

$$\frac{d\mathcal{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n})}{dt} = -\alpha \mathcal{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) + \oint \mathcal{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') f(\mathbf{n}-\mathbf{n}') d\sigma(\mathbf{n}'),$$

где $\frac{d\mathcal{I}}{dt}$ — производная по направлению \mathbf{n} , которую можно записать в виде $\frac{d\mathcal{I}}{dR} = \mathbf{n} \frac{d\mathcal{I}}{dR}$. В результате получаем УПИ

$$\mathbf{n} \frac{d\mathcal{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n})}{dR} + \alpha \mathcal{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = \oint \mathcal{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') f(\mathbf{n}-\mathbf{n}') d\sigma(\mathbf{n}'). \quad (45.25)$$

Рассмотрим теперь случай крупномасштабных неоднородностей, когда, как мы знаем, индикатриса рассеяния сильно вытянута вперед, т. е. функция $f(\mathbf{n}-\mathbf{n}')$ заметно отлична от нуля лишь при $\mathbf{n}' \approx \mathbf{n}$. Будем также считать первоначальный пучок излучения узконаправленным, так что функция $\mathcal{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n})$ заметно отлична от нуля лишь в узком конусе направлений около оси z и

$$n_z = \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2} \approx 1 - \frac{1}{2} n_{\perp}^2 \approx 1, \quad |n_{\perp}| \ll 1.$$

То же относится и к вектору \mathbf{n}' : $n'_z \approx 1, |n'_{\perp}| \ll 1$, поскольку рассеяние происходит лишь на малые углы. Интеграл в формуле (45.25) распространяется на единичную сферу, но основной вклад в него дает лишь небольшая область вблизи оси z . Воспользовавшись этим, можно заменить интегрирование по сфере интегрированием по касательной плоскости, перпендикулярной к оси z :

$$\oint \mathcal{I}(\mathbf{R}; 1, \mathbf{n}'_{\perp}) f(\mathbf{n}_{\perp} - \mathbf{n}'_{\perp}) d\sigma(\mathbf{n}') \approx$$

$$\approx \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(\mathbf{R}; 1, \mathbf{n}'_{\perp}) f(\mathbf{n}_{\perp} - \mathbf{n}'_{\perp}) d^3 n'_{\perp}.$$

Это приближенное равенство выполняется в силу того, что функция $\mathcal{I}(\mathbf{R}; 1, \mathbf{n}'_{\perp})$ отлична от нуля лишь при $|n'_{\perp}| \ll 1$ и, значит, далекие от полярной оси части сферы, равно как и далекие части касательной плоскости, не вносят в интеграл заметного вклада.

Далее,

$$\mathbf{n} \frac{d\mathcal{I}}{dR} = n_z \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z} + \mathbf{n}_{\perp} \nabla_{\perp} \mathcal{I} \approx \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z} + \mathbf{n}_{\perp} \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial p_+},$$

где $\mathbf{R} = \{p_+, z\}$, $\nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial R_{\perp}} = \frac{\partial}{\partial p_+}$. Поэтому в случае крупномасштабных неоднородностей и узконаправленных пучков излучения можно записать УПИ в так называемом *малоугловом*

приближении [4, 5]:

$$\frac{\partial g}{\partial z} + n_{\perp} \frac{\partial g}{\partial p_+} + \alpha g = \int_{-\infty}^{\infty} g(p_+, z; n'_{\perp}) f(n_{\perp} - n'_{\perp}) d^3 n'_{\perp}. \quad (45.26)$$

Покажем теперь, что полученное из феноменологических соображений уравнение (45.26) тесно связано с уравнением (45.11) для функции $\Gamma(p, p_+, z)$.

При решении уравнения (45.11) мы вводили преобразование Фурье функции $\Gamma(p, p_+, z)$ по переменной p_+ . Введем теперь трансформанту Фурье от Γ по разностной переменной p :

$$\Gamma(p, p_+, z) = \int \exp(i\kappa p) F(p_+, \kappa, z) d^3 \kappa. \quad (45.27)$$

Умножив уравнение (45.11) на $\exp(i\kappa p)$ и интегрируя по p , получаем с учетом формулы (43.7).

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\kappa}{k} \frac{\partial F}{\partial p_+} + \frac{k^2}{4} \int [A(0) - A(p)] \exp(i\kappa p) \Gamma(p, p_+, z) d^3 p = 0. \quad (45.28)$$

Используем формулу (43.5) с тем, чтобы преобразовать член, содержащий $A(p)$:

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{4} \int \exp(i\kappa p) A(p) \Gamma(p, p_+, z) d^3 p &= \\ &= \frac{\pi k^2}{2} \int \exp[i(\kappa - \kappa')p] \Phi_e(\kappa', 0) \Gamma(p, p_+, z) d^3 p d^3 \kappa' = \\ &= \frac{\pi k^2}{2} \int \Phi_e(\kappa', 0) F(p_+, \kappa - \kappa', z) d^3 \kappa' = \\ &= \int \frac{\pi k^2}{2} \Phi_e(\kappa - \kappa', 0) F(p_+, \kappa', z) d^3 \kappa'. \end{aligned}$$

В результате уравнение (45.28) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\kappa}{k} \frac{\partial F}{\partial p_+} + \frac{k^2 A_0}{4} F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi k^2}{2} \Phi_e(\kappa - \kappa', 0) F(p_+, \kappa', z) d^3 \kappa'. \quad (45.29)$$

Сравнивая уравнения (45.29) и (45.26), мы видим, что если положить $\kappa/k = n_{\perp}$, $F(p_+, \kappa, z) = g(p_+, n_{\perp}, z)$ и $d^3 \kappa' = k^2 d^3 n'_{\perp}$, то уравнение (45.29) совпадет с уравнением (45.26), в котором коэффициенты α и f принимают значения

$$\alpha = \frac{k^2 A_0}{4}, \quad f(n_{\perp} - n'_{\perp}) = \frac{\pi k^4}{2} \Phi_e(k(n_{\perp} - n'_{\perp}), 0). \quad (45.30)$$

Легко показать, что интеграл от f , взятый по всем направлениям рассеяния, равен α . Это означает, что истинное поглощение отсутствует и введенный выше коэффициент ослабления α совпадает с коэффициентом рассеяния, т. е. с полным эффективным поперечником рассеяния из единицы объема.

Обращаясь к формуле (45.6), мы убеждаемся, что $\alpha = \sigma_0$, т. е. эффективный поперечник рассеяния α из единицы объема во все направления — это именно та величина σ_0 , которая фигурировала в формуле для ослабления когерентной составляющей поля. Что же касается $f(p_\perp - p'_\perp)$, то в этой величине мы узнаем найденный в гл. IV эффективный поперечник рассеяния в единичный телесный угол из единичного объема (см. (26.8), (26.11)).

Таким образом, уравнение для функции Γ , полученное из параболического уравнения для поля, описываемого в марковском приближении, оказывается эквивалентным малоугловому приближению УПИ. Эта связь впервые была установлена в работе [7]. Связь между Γ и I дается следующей, вытекающей из (45.27), формулой:

$$\Gamma(p, p_+, z) = k^2 \int \exp(ikp_\perp \rho) I(p_+, p_\perp, z) d^3 p_\perp. \quad (45.31)$$

В гл. VIII мы получим полное уравнение переноса (45.25) из уравнения для функции когерентности поля в более общем случае, исходя не из параболического уравнения, а из уравнения Гельмгольца.

Отметим, что приведенное выше решение уравнения для Γ , выражаемое формулой (45.19), позволяет, в силу соотношения (45.31), одновременно найти в аналитической форме и решение УПИ в малоугловом приближении. Именно для этой задачи оно и было первоначально получено в работах [4, 5].

§ 46. Функция когерентности четвертого порядка и флюктуации интенсивности

Запишем снова уравнение (44.25) для четвертого момента

$$\Gamma_{2,2}(p'_1, p'_2; p''_1, p''_2, z) = \langle v(p'_1, z) v(p'_2, z) v^*(p''_1, z) v^*(p''_2, z) \rangle.$$

Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{2,2}}{\partial z} - \frac{i}{2k} (\Delta'_1 + \Delta'_2 - \Delta''_1 - \Delta''_2) \Gamma_{2,2} + \\ + \frac{\pi k^2}{4} [H(p'_1 - p''_1) + H(p'_1 - p''_2) + H(p'_2 - p''_1) + \\ + H(p'_2 - p''_2) - H(p'_1 - p'_2) - H(p''_1 - p''_2)] \Gamma_{2,2} = 0. \end{aligned} \quad (46.1)$$

Как мы уже указывали, функция $\Gamma_{2,2}$ связана с флюктуациями интенсивности волны. Действительно, если совместить точку p'_1 с p'_2 , а точку p''_2 с p'_1 , то получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,2}(p'_1, p'_2; p'_1, p'_2, z) &= \langle v(p'_1, z) v(p'_2, z) v^*(p'_1, z) v^*(p'_2, z) \rangle = \\ &= \langle I(p'_1, z) I(p'_2, z) \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому корреляционная функция флюктуаций интенсивности может быть выражена через $\Gamma_{2,2}$ и $\Gamma_{1,1}$:

$$\begin{aligned}\Phi_I(\rho_1, \rho_2) &= \langle I(\rho_1) I(\rho_2) \rangle - \bar{I}(\rho_1) \bar{I}(\rho_2) = \\ &= \Gamma_{2,2}(\rho_1, \rho_2; \rho_1, \rho_2, z) - \Gamma_{1,1}(\rho_1, \rho_1, z) \Gamma_{1,1}(\rho_2, \rho_2, z).\end{aligned}$$

Если нас интересуют только флюктуации интенсивности, то, казалось бы, можно не рассматривать четырехточечный момент $\Gamma_{2,2}$, а ограничиться частным случаем двухточечного момента, который получается из $\Gamma_{2,2}$ при попарном слиянии точек ρ'_1 с ρ'_1 и ρ'_2 с ρ'_2 . Однако в уравнении (46.1) произвести такое слияние нельзя, так как при этом войдут, помимо функции $\Gamma_{2,2}(\rho'_1, \rho'_2; \rho'_1, \rho'_2, z)$, еще новые неизвестные функции $[\Delta'_1 \Gamma_{2,2}(\rho'_1, \rho'_2; \rho'_1, \rho'_2, z)]_{\rho'_1=\rho'_2}$.

Поэтому даже для исследования флюктуаций интенсивности необходимо рассматривать полное уравнение (46.1).

Введем новые переменные:

$$\begin{aligned}\rho_+ &= \frac{1}{4} (\rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_1 + \rho'_2), \\ \rho_1 &= \frac{1}{2} (\rho'_1 + \rho'_1) - \frac{1}{2} (\rho'_2 + \rho'_2), \\ \rho_2 &= \frac{1}{2} (\rho'_1 + \rho'_2) - \frac{1}{2} (\rho'_2 + \rho'_1), \\ \rho &= \rho'_1 - \rho'_2 + \rho'_2 - \rho'_1, \\ \rho'_1 &= \rho_+ + \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{4} \rho, \\ \rho'_2 &= \rho_+ - \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{4} \rho, \\ \rho'_1 &= \rho_+ + \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) - \frac{1}{4} \rho, \\ \rho'_2 &= \rho_+ - \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) - \frac{1}{4} \rho.\end{aligned}\tag{46.2}$$

Легко установить, что при этом $\Delta'_1 + \Delta'_2 - \Delta'_1 - \Delta'_2 = 2(\nabla_{\rho_+} \nabla_{\rho} + \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2})$. Момент $\Gamma_{2,2}$, выраженный через аргументы ρ_+ , ρ , ρ_1 , ρ_2 , z , мы будем обозначать через $\Gamma_4(\rho_+, \rho, \rho_1, \rho_2, z)$. Уравнение (46.1) в новых переменных принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial z} = \frac{i}{k} (\nabla_{\rho_+} \nabla_{\rho} + \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2}) \Gamma_4 - \frac{\pi k^2}{4} F(\rho_1, \rho_2, \rho) \Gamma_4.\tag{46.3}$$

Здесь F (с учетом четности функции $H(\rho)$) записывается в виде $F(\rho_1, \rho_2, \rho) = H(\rho_1 + \rho/2) + H(\rho_1 - \rho/2) + H(\rho_2 + \rho/2) + H(\rho_2 - \rho/2) - H(\rho_1 + \rho_2) - H(\rho_1 - \rho_2)$.
(46.4)

Рассмотрим сначала простейший случай, когда на неоднородную среду падает плоская волна. В этом случае можно принять $\Gamma_4(\rho_+, \rho, \rho_1, \rho_2, 0) = 1$. Так как мы рассматриваем статистически однородные флюктуации \hat{e} , ясно, что Γ_4 не может зависеть от ρ_+ , поскольку совместный сдвиг всех четырех точек наблюдения на одну и ту же величину приводит к физически тождественной ситуации. Таким образом, $\nabla_{\rho_+} \Gamma_4 = 0$ и уравнение (46.3)

упрощается:

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial z} = \frac{i}{k} \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} \Gamma_4 - \frac{\pi k^2}{4} F(\rho_1, \rho_2, \rho) \Gamma_4, \\ \Gamma_4(\rho_1, \rho_2, \rho, 0) = 1. \quad (46.5)$$

Здесь теперь отсутствуют производные и по ρ , так что эту переменную можно рассматривать как параметр и выбирать ее значение произвольно. Выберем $\rho = 0$, и тогда, согласно (46.4) и (46.5),

$$F(\rho_1, \rho_2, 0) = F(\rho_1, \rho_2) = \\ = 2H(\rho_1) + 2H(\rho_2) - H(\rho_1 + \rho_2) - H(\rho_1 - \rho_2), \quad (46.6)$$

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial z} = \frac{i}{k} \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} \Gamma_4 - \frac{\pi k^2}{4} F(\rho_1, \rho_2) \Gamma_4(\rho_1, \rho_2, z), \\ \Gamma_4(\rho_1, \rho_2, 0) = 1. \quad (46.7)$$

Так как $\rho = \rho'_1 + \rho'_2 - \rho''_1 - \rho''_2$, равенство $\rho = 0$ означает, что $\rho'_1 - \rho'_2 = \rho''_2 - \rho''_1$, т. е. точки ρ'_1 , ρ'_2 , ρ''_1 , ρ''_2 расположены в вершинах параллелограмма, стороны которого являются векторы

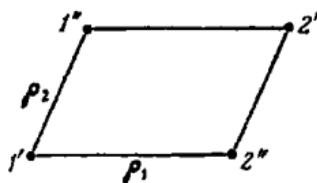


Рис. 63.

ρ_1, ρ_2 (рис. 63). Слиянию точек ρ'_1 с ρ''_1 и ρ'_2 с ρ''_2 соответствует обращение в нуль аргумента ρ_2 функции Γ_4 .

Так как

$$\Gamma_4(\rho_1, \rho_2, z) = \left\langle v\left(\rho_+ + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, z\right) v\left(\rho_+ - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, z\right) \times \right. \\ \left. \times v^*(\rho_+ + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}, z) v^*(\rho_+ - \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}, z) \right\rangle,$$

функция $\Gamma_4(\rho_1, \rho_2, z)$ обладает, очевидно, следующими свойствами симметрии:

$$\Gamma_4(\rho_1, \rho_2, z) = \Gamma_4(\rho_2, \rho_1, z), \\ \Gamma_4(\rho_1, -\rho_2, z) = \Gamma_4^*(\rho_1, \rho_1, z). \quad (46.8)$$

Рассмотрим предельный случай $|\rho_1| \rightarrow \infty$, $\rho_2 = \text{const}$. Это означает, что две пары точек (ρ'_1, ρ''_1) и (ρ'_2, ρ''_2) бесконечно раздвигаются при неизменных расстояниях внутри каждой пары,

но, что корреляции между полями в точках (ρ_1', ρ_1'') и (ρ_2', ρ_2'') должны при этом исчезать, т. е.

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow \infty} \Gamma_4(\rho_1, \rho_2, z) = \langle v(\rho_1', z) v^*(\rho_1'', z) \rangle \langle v(\rho_2', z) v^*(\rho_2'', z) \rangle = \\ = \Gamma\left(\rho_2, \frac{\rho_1' + \rho_1''}{2}, z\right) \Gamma\left(-\rho_2, \frac{\rho_1' + \rho_1''}{2}, z\right). \quad (46.9)$$

В силу симметрии относительно перестановки $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$ функция Γ_4 обладает аналогичным свойством и при $|\rho_2| \rightarrow \infty$. В частном случае плоской волны функции Γ не зависят от $\frac{1}{2}(\rho_1' + \rho_1'')$ и $\frac{1}{2}(\rho_2' + \rho_2'')$ и формула (46.9) принимает вид

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow \infty} \Gamma_4(\rho_1, \rho_2, z) = (\Gamma(\rho_2, z))^2, \quad (46.10)$$

$$\lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} \Gamma_4(\rho_1, \rho_2, z) = (\Gamma(\rho_1, z))^2.$$

Проанализируем теперь следствия из закона сохранения энергии, приводящие к некоторым ограничениям вида функции Γ_4 . Как мы убедились выше (см. уравнение (39.7)), точным следствием параболического уравнения является закон сохранения энергии

$$\frac{\partial I(\rho, z)}{\partial z} + \nabla_{\perp} \cdot \left\{ \frac{1}{2ik} \left[v^*(\rho, z) \nabla_{\perp} v(\rho, z) - v(\rho, z) \nabla_{\perp} v^*(\rho, z) \right] \right\} = 0, \quad (46.11)$$

где $I(\rho, z) = |v(\rho, z)|^2$. Рассмотрим распространение ограниченного волнового пучка, для которого $|v(\rho, z)| \rightarrow 0$ при $|\rho| \rightarrow \infty$. Проинтегрировав (46.11) по плоскости $z = \text{const}$ и используя теорему Гаусса для двумерного случая, получаем

$$\frac{d}{dz} \int I(\rho, z) d^2\rho + \oint \mathcal{S}_n(\rho, z) \Big|_{\rho=\infty} dl = 0,$$

где $\mathcal{S}_n|_{\rho=\infty}$ — компонента плотности потока энергии по направлению вектора $n = \rho/\rho$, взятая на окружности бесконечного радиуса. Но в силу ограниченности пучка $v \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, так что $\mathcal{S}_n|_{\rho=\infty} = 0$, и мы получаем закон сохранения

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\rho, z) d^2\rho = \text{const} = \int I(\rho, 0) d^2\rho. \quad (46.12)$$

В левой части этого равенства фигурирует *случайная* интенсивность $I(\rho, z) = \bar{I}(\rho, z) + \tilde{I}(\rho, z)$. Усредняя (46.12), приходим к формуле

$$\int \bar{I}(\rho, z) d^2\rho = \int I(\rho, 0) d^2\rho, \quad (46.13)$$

которая была уже получена выше из уравнения для Γ (см. (45.23)). Вычитая (46.13) из (46.12), получаем равенство

$$\int \bar{I}(\rho, z) d^3\rho = 0, \quad (46.14)$$

физический смысл которого весьма прост: случайные отклонения интенсивности от средней, имеющие различные знаки, всегда взаимно компенсируются, так что флуктуации вызывает лишь перераспределение интенсивности по поперечному сечению пучка. Отметим, что равенство (46.14) уже было использовано в гл. V (формула 35.25) для объяснения равенства нулю интеграла от корреляционной функции уровня.

Возводя (46.14) в квадрат и усредняя, имеем соотношение

$$\int \psi_1(\rho', \rho'', z) d^3\rho' d^3\rho'' = 0,$$

которое при замене переменных $\rho = \rho' - \rho''$ и $\rho_+ = \frac{1}{2}(\rho' + \rho'')$ можно записать в виде

$$\int \psi_1(\rho_+, \rho, z) d^3\rho_+ d^3\rho = 0. \quad (46.15)$$

Отсюда следует, что корреляционная функция флуктуаций интенсивности обязательно должна иметь отрицательный участок.

В случае плоской волны справедливо равенство, аналогичное (46.15):

$$\int \psi_1(\rho, z) d^3\rho = 0, \quad (46.16)$$

однако его вывод несколько более сложен в связи с тем, что поле $v(\rho, z)$ не убывает при $\rho \rightarrow \infty$. Равенство (46.16) можно получить непосредственно из уравнения (46.7). Введем для этого функцию

$$K(\rho_1, \rho_2, z) = \Gamma_4(\rho_1, \rho_2, z) - \Gamma^2(\rho_1, z). \quad (46.17)$$

Если $\rho_1 = 0$, то $\Gamma_4(0, \rho_2, z) = \langle I(\rho'_1, z) I(\rho'_2, z) \rangle$, $\Gamma^2(0, z) = \bar{I}^2$, а $K(0, \rho_2, z) = \psi_1(\rho_2, z)$ — корреляционная функция интенсивности. Кроме того, при $\rho_2 \rightarrow \infty$ функция K , согласно (46.10), сбрасывается в нуль. Привлекая уравнение (45.11) для функции Γ (в этом уравнении в случае плоской волны $\partial^2\Gamma/\partial\rho\partial\rho_+ = 0$), нетрудно установить, что K удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial z} &= \frac{i}{k} \nabla_{\rho_1} \nabla_{\rho_2} K - \frac{\pi k^2}{4} F(\rho_1, \rho_2) K - \\ &\quad - \frac{\pi k^2}{4} \Gamma^2(\rho_1, z) [F(\rho_1, \rho_2) - 2H(\rho_1)]. \end{aligned} \quad (46.18)$$

Если проинтегрировать это уравнение по ρ_2 в бесконечных пределах, то, в силу отмеченного выше предельного соотношения $\lim_{\rho_2 \rightarrow \infty} K(\rho_1, \rho_2, z) = 0$, интеграл от первого члена правой части

(46.18) обращается в нуль, т. е. получается

$$\frac{\partial}{\partial z} \int K(\rho_1, \rho_2, z) d^3 p_2 = -\frac{\pi k^2}{4} \int F(\rho_1, \rho_2) K(\rho_1, \rho_2, z) d^3 p_2 - \\ - \frac{\pi k^2}{4} \Gamma^2(\rho_1, z) \int [F(\rho_1, \rho_2) - 2H(\rho_1)] d^3 p_2. \quad (46.19)$$

Так как $F(\rho_1, \rho_2) - 2H(\rho_1) \rightarrow 0$ при $\rho_2 \rightarrow \infty$, интеграл от второго слагаемого в правой части (46.19) сходится. Положим теперь в (46.19) $\rho_1 = 0$. В силу равенств $F(0, \rho_2) = 0$, $H(0) = 0$ мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dz} \int K(0, \rho_2, z) d^3 p_2 = \frac{d}{dz} \int \Psi_I(\rho_2, z) d^3 p_2 = 0.$$

Решение этого уравнения с начальным условием $\int \Psi_I(\rho_2, 0) d^3 p_2 = 0$ (при $z = 0$ флюктуации интенсивности отсутствуют) выражается равенством (46.16).

Отметим, что из формулы (46.14), справедливой для ограниченных пучков, можно получить аналогичные (46.15) соотношения для моментов произвольного порядка.

Аналитического решения уравнения (46.7) для Γ_e получить не удается. В настоящее время получены численные решения этого уравнения, соответствующие двум моделям флюктуаций диэлектрической проницаемости среды — со спектральными плотностями вида $\Phi_e(x) \sim \exp\{-x^{2l^2/2}\}$ [8] и $\Phi_e(x) \sim x^{-11/6}$ [9—11]. В обоих случаях средний квадрат флюктуаций интенсивности $\beta^2 = [\bar{I}^2 - (\bar{I})^2]/(\bar{I})^2$ с ростом z насыщается. Численные результаты, полученные для степенного спектра флюктуаций e , удовлетворительно согласуются с экспериментальными результатами.

Для области сильных флюктуаций, где $\beta^2 \approx 1$, получены асимптотические решения уравнения (46.7) [13—16]. Не приводя довольно громоздких вычислений, необходимых для вывода соответствующих асимптотических формул, опишем основные результаты, полученные в указанных работах.

Формальное решение уравнения (46.7) можно записать в виде предела при $N \rightarrow \infty$ $4N$ -кратного интеграла, соответствующего замене непрерывной случайной среды, заполняющей слой $(0, z)$, на N фазовых экранов, расположенных на расстоянии z/N друг от друга. В области сильных флюктуаций в этом бесконечно-кратном (так называемом *континуальном*) интеграле появляется большой параметр $\sqrt{\lambda z}/\rho_k$, равный отношению радиуса первой зоны Френеля к радиусу когерентности ρ_k , определяемому формулой (45.21). Этот параметр имеет ясный физический смысл. В случае $\rho_k \ll \sqrt{\lambda z}$ когерентным образом складываются только поля, рассеянные неоднородностями, разнесенными на расстояние, меньшие ρ_k . Поэтому при $\rho_k \ll \sqrt{\lambda z}$ радиус когерентности играет

такую же роль, как радиус первой зоны Френеля в случае $\sqrt{\lambda z} \ll r_0$.

При $\sqrt{\lambda z}/r_0 \gg 1$ асимптотическая формула для $\beta^2(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\beta^2(z) \approx & 1 + \pi \int_0^z (z-z')^2 dz' \int d^3x x^4 \Phi_e(x, 0) \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{\pi k^2 z'}{2} H \left(\frac{x(z-z')}{k} \right) - \frac{\pi k^2 (z-z')}{2} \int_0^1 H \left(\frac{x(z-z')}{k} \xi \right) d\xi \right\}.\end{aligned}\quad (46.20)$$

Корреляционная функция $\psi_I(\rho, z)$ обладает двумя характерными масштабами. Одним из них является r_0 , другим — отношение $r_0 = z/k\rho_k$. Первый из них с ростом z уменьшается, а второй — растет. В первом приближении

$$\psi_I(\rho, z) = \exp \left\{ -\frac{\pi k^2 z}{2} H(\rho) \right\} + \dots \quad (46.21)$$

Для случая турбулентной среды, когда $\Phi_e(x) = A C_e^2 x^{-1/4}$, формула (46.20) принимает вид

$$\beta^2(z) = 1 + 0,861 (\beta_0^2)^{-1/4} + \dots, \quad (46.22)$$

где $\beta_0^2 = 4\bar{\chi}^2 = 0,307 C_e^2 k^{1/4} z^{1/4}$ — средний квадрат относительных флюктуаций интенсивности, найденный при помощи МПВ (см. (41.27), (41.28) и (42.13)). Корреляционная функция (46.21) в этом случае равна

$$\psi_I(\rho, z) = \exp \left\{ -0,729 C_e^2 k^2 z \rho^{1/4} \right\} + \dots, \quad (46.23)$$

а масштабы ρ_k и r_0 по порядку величины равны

$$\rho_k \sim (C_e^2 k^2 z)^{-1/4}, \quad r_0 \sim (C_e^2 k^{1/4} z^{1/4})^{1/2}.$$

Следует отметить, что функция (46.21) не удовлетворяет условию (46.16). Это связано с тем, что отрицательный участок функции ψ_I при $\beta_0^2 \gg 1$ располагается в области больших значений $\rho \gg r_0$. Так как для статистически изотропных флюктуаций равенство (46.16) записывается в виде

$$\int_0^\infty \psi_I(\rho, z) \rho d\rho = 0,$$

то ясно, что значения $\psi_I(\rho, z)$ при больших ρ входят в интеграл с большим весом ρ . Поэтому достаточно очень небольших по абсолютной величине отрицательных значений ψ_I , чтобы равенство (46.16) удовлетворялось. Но эти малые значения ψ_I не описываются первыми членами асимптотического разложения,

Что для выполнения равенства (46.16) необходимо учитывать следующие малые члены в (46.21).

В заключение этого параграфа сопоставим результаты численных расчетов [11] с приведенными выше асимптотическими формулами для случая степенного спектра $\Phi_2(x) = AC_0^2x^{-1/2}$. На

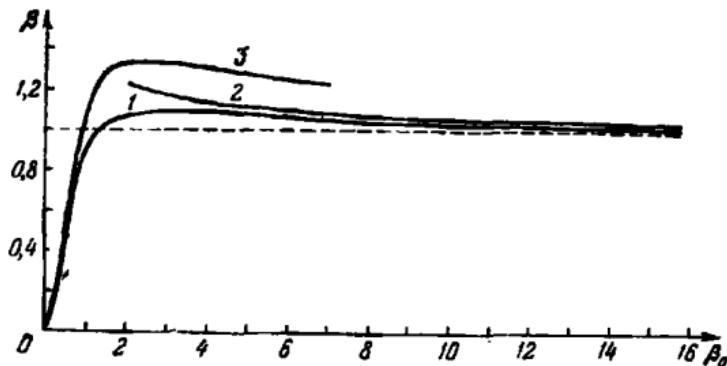


Рис. 64.

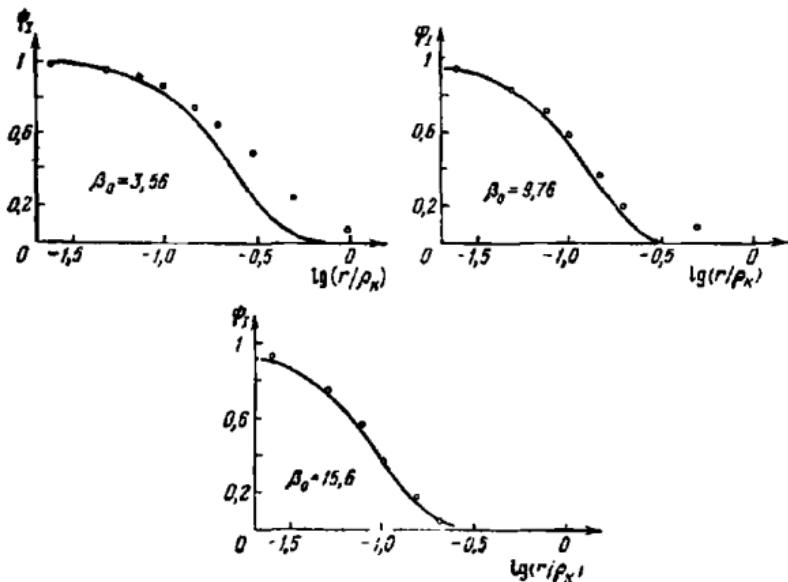


Рис. 65.

рис. 64 приведена полученная в результате этих расчетов кривая $\beta = f(\beta_0)$ (кривая 1). Там же показаны кривая 2, построенная по формуле (46.22), а также усредненные экспериментальные данные (кривая 3). На обороте обложки данной книги — на форзаце приведено распределение интенсивности света в области сильных флюктуаций [23].

На рис. 65 приведены точки, полученные путем численных расчетов функции $\tilde{\epsilon}(\rho, z)$, а также кривые, построенные по асимптотической формуле (46.23). Из рисунка видно, что с увеличением параметра β_0 результаты все лучше согласуются между собой.

§ 47. Учет конечности продольного радиуса корреляции флюктуаций в и границы применимости марковского приближения

До сих пор мы предполагали, что случайную функцию $\tilde{\epsilon}(\rho, z)$ можно считать дельта-коррелированной по z , опираясь на качественный анализ, проведенный в § 43. Однако у нас пока нет количественных оценок, из которых можно было бы получить поправки к результатам марковского приближения, связанные с конечностью продольного радиуса корреляции $\tilde{\epsilon}$. Рассмотрим теперь более общий метод вывода уравнений для моментов волнового поля, позволяющий учесть конечность продольного радиуса корреляции $\tilde{\epsilon}$, но сразу же ограничимся при этом случаем, когда $\tilde{\epsilon}$ — нормальное случайное поле.

Будем исходить из параболического уравнения

$$\frac{\partial v(\rho, z)}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} v(\rho, z) + \frac{ik}{2} \tilde{\epsilon}(\rho, z) v(\rho, z), \quad (47.1)$$

$$v(\rho, 0) = v_0(\rho)$$

и выведем систему уравнений для среднего поля \bar{v} . Усредняя (47.1), получаем уравнение

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \bar{v} + \frac{ik}{2} \langle \tilde{\epsilon}(\rho, z) v(\rho, z) \rangle, \quad (47.2)$$

$$\bar{v}(\rho, 0) = v_0(\rho),$$

которое не замкнуто, поскольку содержит, наряду с искомой функцией \bar{v} , новую неизвестную функцию $\langle \tilde{\epsilon} v \rangle$. Так как $\tilde{\epsilon}$ — гауссова случайная функция, а v — функционал от нее, можно применить для нахождения $\langle \tilde{\epsilon} v \rangle$ формулу Фуруцу — Новикова (7.30), которая в данном случае имеет вид

$$\langle \tilde{\epsilon}(\rho, z) v(\rho, z) \rangle =$$

$$= \int_0^z dz' \int d^3 p' \langle \tilde{\epsilon}(\rho, z) \tilde{\epsilon}(\rho', z') \rangle \left\langle \frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \tilde{\epsilon}(\rho', z')} \right\rangle. \quad (47.3)$$

Верхний предел интегрирования здесь равен z , так как $\delta v(\rho, z)/\delta \tilde{\epsilon}(\rho', z') = 0$ при $z' > z$ в силу условия причинности.

которое мы рассмотрели в § 43. Обозначив

$$\left\langle \frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \tilde{e}(\rho', z')} \right\rangle = S_1(\rho, z; \rho', z'),$$

запишем уравнение (47.2) с подставленным в него значением (47.3) для $\langle \tilde{e}v \rangle$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} &= \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \tilde{v} + \\ &+ \frac{ik}{2} \int_0^z dz' \int d^3 \rho' \langle \tilde{e}(\rho, z) \tilde{e}(\rho', z') \rangle S_1(\rho, z; \rho', z'). \end{aligned} \quad (47.4)$$

Это уравнение, как и (47.2), не замкнуто.

Найдем теперь уравнение для функции S_1 . Для этого лодействуем на равенство (47.1) оператором $\delta/\delta \tilde{e}(\rho', z')$, где $z' < z$:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \tilde{e}(\rho', z')} = \frac{i}{2k} \Delta_{\rho} \frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \tilde{e}(\rho', z')} + \frac{ik}{2} \tilde{e}(\rho, z) \frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \tilde{e}(\rho', z')}, \quad z' < z. \quad (47.5)$$

Здесь отброшен член $\frac{ik}{2} \delta(\rho - \rho') \delta(z - z') v(\rho, z)$, возникающий при дифференцировании $\tilde{e}(\rho, z)$, так как $\delta(z - z') = 0$ при $z > z'$. Усредним уравнение (47.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} S_1(\rho, z; \rho', z') &= \\ &= \frac{i}{2k} \Delta_{\rho} S_1(\rho, z; \rho', z') + \frac{ik}{2} \left\langle \tilde{e}(\rho, z) \frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \tilde{e}(\rho', z')} \right\rangle, \quad z > z'. \end{aligned} \quad (47.6)$$

Но $\delta v/\delta \tilde{e}$ тоже является функционалом от \tilde{e} , в силу чего для вычисления этой величины можно снова применить формулу Фуруцу—Новикова:

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{e}(\rho, z) \frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \tilde{e}(\rho', z')} \right\rangle &= \\ &= \int_0^z dz'' \int d^3 \rho'' \langle \tilde{e}(\rho, z) \tilde{e}(\rho'', z'') \rangle \left\langle \frac{\delta^2 v(\rho, z)}{\delta \tilde{e}(\rho', z') \delta \tilde{e}(\rho'', z'')} \right\rangle. \end{aligned} \quad (47.7)$$

Введем обозначение

$$\left\langle \frac{\delta^2 v(\rho, z)}{\delta \tilde{e}(\rho', z') \delta \tilde{e}(\rho'', z'')} \right\rangle = S_2(\rho, z; \rho', z'; \rho'', z'').$$

Отметим, что функция S_2 не меняется при перестановке аргументов $(\rho', z') \leftrightarrow (\rho'', z'')$. Подставляя (47.7) в (47.6), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1(\rho, z; \rho', z')}{\partial z} &= \frac{i}{2k} \Delta_{\rho} S_1 + \\ &+ \frac{ik}{2} \int_0^z dz'' \int d^3 \rho'' \langle \tilde{e}(\rho, z) \tilde{e}(\rho'', z'') \rangle S_2(\rho, z; \rho', z'; \rho'', z''), \quad z > z'. \end{aligned} \quad (47.8)$$

Ясно, что использованный процесс можно продолжить и получить в результате бесконечную цепочку уравнений для функций \bar{v} и S_n .

Рассмотрим граничные условия к уравнению (47.8) и аналогичным уравнениям для S_n . Так как само уравнение справедливо при $z > z'$, граничное условие должно ставиться при $z = z'$. Иными словами, нам надо найти $S_1(\rho, z'; \rho', z')$. Проинтегрируем для этого уравнение (47.1) по z , после чего применим оператор $\delta/\delta\bar{v}(\rho', z')$:

$$v(\rho, z) = v_0(\rho) + \int_0^z \left[\frac{ik}{2} \bar{e}(\rho, \zeta) + \frac{i}{2k} \Delta_\rho \right] v(\rho, \zeta) d\zeta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \bar{e}(\rho', z')} = & \int_0^z \left[\frac{ik}{2} \bar{e}(\rho, \zeta) + \frac{i}{2k} \Delta_\rho \right] \frac{\delta v(\rho, \zeta)}{\delta \bar{e}(\rho', z')} d\zeta + \\ & + \int_0^z \frac{ik}{2} \delta(\rho - \rho') \delta(\zeta - z') v(\rho, \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Так как $\delta v(\rho, \zeta)/\delta \bar{e}(\rho', z') = 0$ при $\zeta < z'$, нижний предел интегрирования в первом интеграле можно заменить на z' . Второй же интеграл вычисляется, и в результате мы приходим к формуле

$$\frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \bar{e}(\rho', z')} = \int_{z'}^z \left[\frac{ik}{2} \bar{e}(\rho, \zeta) + \frac{i}{2k} \Delta_\rho \right] \frac{\delta v(\rho, \zeta)}{\delta \bar{e}(\rho', z')} d\zeta + \frac{ik}{2} \delta(\rho - \rho') v(\rho, z').$$

Положив здесь $z' = z$ (при этом интеграл обращается в нуль), мы получаем

$$\frac{\delta v(\rho, z)}{\delta \bar{e}(\rho', z)} = \frac{ik}{2} \delta(\rho - \rho') v(\rho, z). \quad (47.9)$$

Это равенство является *точным* следствием уравнения (47.1). Усредняя (47.9) и полагая $z' = z$, получаем граничное условие к уравнению (47.8):

$$S_1(\rho, z'; \rho', z') = \frac{ik}{2} \delta(\rho - \rho') \bar{v}(\rho, z'). \quad (47.10)$$

Из формулы (47.9) можно получить граничные условия и для функции S_2 . Для этого применим к (47.9) оператор $\delta/\delta\bar{e}(\rho'', z'')$, усредним результат и положим затем $z = z'$:

$$\begin{aligned} S_2(\rho, z'; \rho', z'; \rho'', z'') = & S_2(\rho, z'; \rho'', z''; \rho', z') - \\ & - \frac{ik}{2} \delta(\rho - \rho') S_1(\rho, z'; \rho'', z''). \quad (47.11) \end{aligned}$$

производя n -кратное функциональное дифференцирование формулы (47.9), можно аналогичным путем получить граничное условие для функции S_{n+1} .

До сих пор мы не делали предположения о дельта-коррелированности \bar{v} . Если сделать это предположение в уравнении (47.4), т. е. положить в нем

$$\langle \bar{v}(\rho, z) \bar{v}(\rho', z') \rangle \rightarrow \Psi_e^{\text{ФФ}}(\rho, z; \rho', z') = A(\rho - \rho') \delta(z - z'), \quad (47.12)$$

то интеграл по z' в (47.4) вычисляется и мы получаем

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \bar{v} + \frac{ik}{4} \int d^2 \rho' A(\rho - \rho') S_1(\rho, z; \rho', z),$$

причем при интегрировании δ -функции появляется множитель $1/2$. Но функция $S_1(\rho, z; \rho', z)$ при совпадающих значениях продольной координаты нам уже известна из формулы (47.10); подставляя ее в интеграл, получаем замкнутое уравнение для \bar{v} :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \bar{v} - \frac{k^2}{8} A(0) \bar{v}(\rho, z), \quad (47.13)$$

которое совпадает с полученным в § 44 уравнением (44.9). Таким образом, если предположить дельта-коррелированность \bar{v} в первом из уравнений нашей цепочки, то оно замыкается, так что остальные уравнения оказываются излишними.

Сделаем теперь следующий шаг: в первом уравнении нашей цепочки оставим точную корреляционную функцию, а приближение дельта-коррелированности используем лишь во втором уравнении вида (47.8). Тогда интеграл по z'' вычисляется, и в результате мы получаем уравнение

$$\frac{\partial S_1}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} S_1 + \frac{ik}{4} \int d^2 \rho'' A(\rho - \rho'') S_2(\rho, z; \rho', z'; \rho'', z). \quad (47.14)$$

Если заменить в (47.11) z' на z , z'' на z' и поменять местами ρ' и ρ'' , то мы получим необходимое нам значение

$$S_2(\rho, z; \rho', z'; \rho'', z) = \frac{ik}{2} \delta(\rho - \rho'') S_1(\rho, z; \rho', z').$$

После этого уравнение (47.14) становится замкнутым, принимая вид

$$\frac{\partial S_1}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} S_1 - \frac{k^2 A(0)}{8} S_1, \quad z > z'. \quad (47.15)$$

Теперь мы имеем уже систему из двух уравнений (47.4) и (47.15), а остальные уравнения цепочки можно не использовать.

Ясно, что если в первых $(n-1)$ уравнениях мы используем точное значение корреляционной функции Ψ_e , а замену (47.12)

совершим лишь в n -м уравнении, то получим замкнутую систему из n уравнений, которая будет тем точнее, чем больше n .

Рассмотрим подробнее случай $n=2$. Сначала нужно решить уравнение (47.15) с начальным условием (47.10). Нетрудно проверить, что решение имеет вид

$$S_1(\rho, z; \rho', z') = \frac{k^2}{4\pi(z-z')} \exp\left(\frac{ik(\rho-\rho')^2}{2(z-z')}\right) \bar{v}(\rho', z') \exp\left[-\frac{k^2 A_0}{8}(z-z')\right]. \quad (47.16)$$

Подставив это выражение для S_1 в (47.4), получаем уравнение для \bar{v} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \bar{v} + \frac{ik^2}{8\pi} \int_0^z \frac{dz'}{z-z'} \int d^2\rho' \times \\ &\times \exp\left\{\frac{ik(\rho-\rho')^2}{2(z-z')} - \frac{k^2 A_0}{8}(z-z')\right\} \psi_e(\rho-\rho', z-z') \bar{v}(\rho', z'); \end{aligned} \quad (47.17)$$

его легко решить, если воспользоваться преобразованием Лапласа по z и преобразованием Фурье по ρ . Мы, однако, не будем этого делать, а ограничимся выяснением условий совпадения решения уравнения (47.17), которое мы будем называть уравнением *второго* марковского приближения, с решением уравнения (47.13).

Уравнение (47.13) получается из (47.17), если продольный масштаб l_{\parallel} функции $\psi_e(\rho-\rho', z-z')$ мал по сравнению с масштабами по z других сомножителей. Как мы выяснили в § 45 (см. (45.4)), характерный масштаб функции $\bar{v}(\rho', z')$ имеет порядок величины $(k^2 A_0)^{-1}$. Тот же масштаб входит и в множитель $\exp\{-1/8k^2 A_0(z-z')\}$ в (47.17). Поэтому необходимо, чтобы выполнялось условие

$$k^2 A_0 l_{\parallel} \ll 1. \quad (47.18)$$

Если это условие выполнено, то под знаком интеграла в (47.17) можно заменить $\bar{v}(\rho', z')$ на $\bar{v}(\rho', z)$ и считать, что $\exp\{-1/8k^2 A_0(z-z')\} \approx 1$. Тогда это уравнение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \bar{v} - \frac{k^2}{4} \int_0^z dz' \int d^2\rho' \frac{k}{2\pi i(z-z')} \exp\left(\frac{ik(\rho-\rho')^2}{2(z-z')}\right) \times \\ &\times \psi_e(\rho-\rho', z-z') \bar{v}(\rho', z). \end{aligned} \quad (47.19)$$

В области $|\rho-\rho'| \gg \sqrt{(z-z')/k}$ функция

$$f(\rho-\rho') = \frac{k}{2\pi i(z-z')} \exp\left\{\frac{ik(\rho-\rho')^2}{2(z-z')}\right\}$$

быстро осциллирует. Если характерный масштаб функции ψ_e по ρ , который мы обозначим через l_{\perp} , велик по сравнению с $\sqrt{(z-z')/k} \sim \sqrt{l_{\parallel}/k}$, то множитель $\psi_e(\rho-\rho', z-z')$ мало меняется на характерном масштабе функции \bar{v} и его можно считать постоянным. Что касается функции $\bar{v}(\rho', z)$, то ее характерный попеченный масштаб имеет порядок размера пучка a . Поэтому при выполнении условий

$$a \gg \sqrt{l_{\parallel}/k}, \quad l_{\perp} \gg \sqrt{l_{\parallel}/k} \quad (47.20)$$

произведение $\psi_e(\rho-\rho', z-z') \bar{v}(\rho', z)$ можно заменить на $\psi_e(0, z-z') \bar{v}(\rho, z)$, после чего интеграл по ρ' вычисляется и дает единицу. Таким образом, при выполнении условий (47.20) уравнение (47.19) еще более упрощается:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \bar{v} - \frac{k^2}{4} \bar{v}(\rho, z) \int_0^z \psi_e(0, z-z') dz'. \quad (47.21)$$

Наконец, если

$$z \gg l_{\parallel}, \quad (47.22)$$

то верхний предел интегрирования в (47.21) можно заменить на бесконечность, и тогда, с учетом равенства

$$\int_0^{\infty} \psi_e(0, z') dz' = 1/2 A(0),$$

мы получаем из (47.21) уравнение первого марковского приближения (47.13).

Интересно отметить, что даже уравнение (47.21) дает для \bar{v} более точное выражение в области $z \ll l_{\parallel}$, чем первое марковское приближение. Например, в случае плоской падающей волны решение уравнения (47.21) имеет вид

$$\bar{v}(z) = v_0 \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^z (z-\zeta) \psi_e(0, \zeta) d\zeta \right\}. \quad (47.23)$$

При $z \ll l_{\parallel}$ можно на всем участке интегрирования считать $\psi_e(0, \zeta) \approx \psi_e(0, 0) = \sigma_e^2$, и тогда (47.23) дает

$$\bar{v}(z) = v_0 \exp \{ -k^2 \sigma_e^2 z^2 / 8 \} \quad (z \ll l_{\parallel}). \quad (47.24)$$

Если же $z \gg l_{\parallel}$, то в формуле (47.23) можно считать

$$\int_0^z (z-\zeta) \psi_e(0, \zeta) d\zeta \approx z \int_0^{\infty} \psi_e(0, \zeta) d\zeta = A_0 z / 2,$$

и мы получаем

$$\bar{v}(z) = v_0 \exp\{-k^2 A_0 z/8\} \quad (z \gg l_{\perp}). \quad (47.25)$$

В первом же марковском приближении мы при *всех* z получаем для плоской волны формулу (47.25).

Остановимся на условиях (47.18), (47.20) и (47.22) применимости марковского приближения для среднего поля \bar{v} . Первое из условий (47.20) означает, что продольный масштаб корреляции l_{\parallel} должен быть мал по сравнению с дистанцией ka^2 , на которой начинает проявляться дифракция на апертуре пучка. Второе условие тоже можно записать в виде $l_{\parallel} \ll k l_{\perp}^2$, так что масштаб l_{\parallel} должен быть мал и по сравнению с дифракционной длиной, соответствующей поперечным размерам неоднородностей. Условие (47.18) означает, что ослабление среднего поля на масштабе l_{\parallel} должно быть малым (напомним, что согласно формуле (45.6) $k^2 A_0 / 4 = \sigma_0$ — коэффициент рассеяния), или, иначе говоря, $l_{\parallel} \ll d = \sigma_0^{-1}$, где d — длина экстинкции. Наконец, условие (47.22) означает, что l_{\parallel} должно быть мало по сравнению с длиной трассы. Мы видим, что все четыре условия можно формулировать как ограничения сверху величины продольного масштаба корреляции диэлектрической проницаемости. При этом условие (47.18) означает ограничение и величины σ_e^2 . Действительно, $A_0 \sim \sigma_e^2 l_{\parallel}$, так что неравенство (47.18) можно записать еще и в виде

$$\sigma_e^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1. \quad (47.18a)$$

Отметим, что полученные условия применимости марковского приближения *не ограничивают сверху длины дистанции* z , в отличие от любого из ранее рассмотренных методов, использующих теорию возмущений по ϵ .

Мы рассмотрели уравнения более высоких приближений для среднего поля. Подобным же образом можно получить уравнения второго и более высоких приближений для произвольных моментов $\Gamma_{n,m}$ [20]. Мы не будем приводить здесь этих уравнений, а изложим лишь некоторые качественные соображения и выводы работы [20].

Если обратиться к уравнению (44.15) при $n=m=1$, т. е. к уравнению для функции $v(\rho'_1, z)v^*(\rho'_1, z)$, то в него входит в качестве случайного коэффициента только разность $\bar{v}(\rho'_1, z) - \bar{v}(\rho''_1, z)$. При замене $\epsilon \rightarrow \epsilon + \text{const}$ эта разность не меняется. Отсюда следует, очевидно, что крупномасштабные неоднородности не сказываются на произведении $v(\rho'_1, z)v^*(\rho''_1, z)$. Поэтому и условия применимости марковского приближения для функций Γ не могут содержать таких величин, как σ_e^2 , l_{\parallel} и l_{\perp} , которые зависят от

Поведения спектра флуктуаций диэлектрической проницаемости в области малых волновых чисел.

Условия применимости марковского приближения для Γ имеют вид

$$kl_0 \gg 1, k z |\nabla_{\perp} H(\rho)| \ll 1, z \gg \rho. \quad (47.26)$$

Здесь l_0 — масштаб наименьших неоднородностей диэлектрической проницаемости. Второе из условий (47.26) ограничивает величину, характеризующую интенсивность флуктуаций ϵ . Если вспомнить, что радиус когерентности поля определяется из условия $k^2 z H(\rho_k) \sim 1$ (см. (45.21)), то второму условию (47.26) можно придать вид

$$k\rho_k \gg 1. \quad (47.27)$$

Таким образом, применимость марковского приближения требует, чтобы радиус когерентности всегда оставался много большим длины волны.

Задачи

1. Найти распределение средней интенсивности по поперечному сечению пучка излучения, у которого в плоскости $z=0$ поле имеет вид

$$v_0(\rho) = v_0 \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2a^2} + \frac{i k \rho^2}{2F} \right\}. \quad (1)$$

(гауссов пучок с эффективным радиусом a и с расстоянием от плоскости $z=0$ до центра излучения, равным F) [6]. Рассмотреть частный случай, когда $H(\rho) = \rho C_0 \rho^{1/2}$, что соответствует турбулентным флуктуациям диэлектрической проницаемости.

Решение. Средняя интенсивность $\bar{I}(\rho_+, z)$ может быть получена из функции Γ при $\rho=0$. На основании (45.19) имеем поэтому

$$\begin{aligned} \bar{I}(\rho_+, z) &= \frac{k^2}{4\pi^2 z^2} \int d^2 \rho' \int d^2 \rho'_+ \Gamma^{(0)}(\rho', \rho'_+) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{ik\rho'}{z} (\rho_+ - \rho'_+) - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^z H \left(\rho' \left(1 - \frac{t}{z} \right) \right) dt \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подсчитаем функцию $\Gamma^{(0)}$, используя начальное условие (1) для поля: $\Gamma^{(0)}(\rho', \rho'_+) =$

$$= v_0 \left(\rho'_+ + \frac{\rho'}{2} \right) v_0^* \left(\rho'_+ - \frac{\rho'}{2} \right) = |v_0|^2 \exp \left\{ -\frac{\rho'^2}{a^2} - \frac{\rho'^2}{4a^2} + \frac{ik\rho'_+\rho'}{F} \right\}. \quad (3)$$

Подставим (3) в (2) и выполним интегрирование по ρ'_+ . В результате получаем формулу

$$\bar{I}(\rho_+, z) = \frac{k^2 a^2 |v_0|^2}{4\pi z^2} \int d^2 \rho' \exp \left\{ -\frac{ik\rho_+\rho'}{z} - \frac{\rho'^2}{4a^2} g^2(z) - \frac{\pi k^2 z}{4} \int_0^1 H(\rho' t) dt \right\}, \quad (4)$$

где введено обозначение

$$g(z) = \sqrt{1 + k^2 a^4 (1/z + 1/F)^2}. \quad (5)$$

Формула (4) справедлива при любом виде функции $H(\rho)$. Если $H(\rho) = \rho C_e \rho^{1/2}$, то

$$\int_0^1 H(\rho' t) dt = \frac{1}{8} \rho C_e^2 \rho'^{1/2}$$

и формула (4) после перехода к полярным координатам принимает вид

$$\bar{T}(\rho_+, z) = \frac{k^2 a^2 |v_0|^2}{4\pi z^3} \int_0^\infty \rho' d\rho' \exp \left\{ -\frac{\rho'^2 g^2}{4a^2} - \frac{3\pi p}{32} C_e^2 k^2 z \rho'^{1/2} \right\} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{ik\rho' \rho_+}{z} \cos \varphi \right\} d\varphi.$$

Интеграл по φ равен $2\pi J_0(k\rho' \rho_+/z)$, так что для \bar{T} получаем выражение

$$\bar{T}(\rho_+, z) = \frac{k^2 a^2 |v_0|^2}{2z^3} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{g^2(z)}{4a^2} \rho'^2 - \frac{3\pi p}{32} C_e^2 k^2 z \rho'^{1/2} \right\} J_0 \left(\frac{k\rho_+ \rho}{z} \right) \rho d\rho. \quad (6)$$

Введем $J_0(z)$ — интенсивность на оси пучка в однородной среде, т. е. при $C_e = 0$:

$$J_0(z) = \frac{k^2 a^2 |v_0|^2}{2z^3} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{g^2 \rho^2}{4a^2} \right\} \rho d\rho = \frac{k^2 a^4 |v_0|^2}{z^3 g^2(z)}.$$

Отношение $\bar{T}(\rho_+, z)/J_0(z)$ можно записать в виде

$$\frac{\bar{T}(\rho_+, z)}{J_0(z)} = \frac{g^2(z)}{2a^2} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{g^2 \rho^2}{4a^2} - \frac{3\pi p}{32} C_e^2 k^2 z \rho^{1/2} \right\} J_0 \left(\frac{k\rho_+ \rho}{z} \right) \rho d\rho. \quad (7)$$

Если ввести безразмерную переменную интегрирования $(gp/2a)^2 = t$, то (7) запишется так:

$$\frac{\bar{T}(\rho_+, z)}{J_0(z)} = \int_0^\infty \exp \left\{ -t - \frac{3\pi p}{32} C_e^2 k^2 z \left(\frac{2a}{g(z)} \right)^{1/2} t^{1/2} \right\} J_0 \left(\frac{2ka\rho_+}{zg(z)} \sqrt{-t} \right) dt. \quad (8)$$

Из (8) следует простая формула для интенсивности на оси пучка:

$$\frac{\bar{T}(0, z)}{J_0(z)} = f(u) = \int_0^\infty \exp \left\{ -t - ut^{1/2} \right\} dt, \quad (9)$$

где

$$u = \frac{3\pi p}{32} C_e^2 k^2 z \left(\frac{2a}{g(z)} \right)^{1/2}.$$

Параметр u пропорционален структурной функции фазы на базе $2a/g(z)$. Разделяя e^{-t} или $e^{-u^{1/2}}$ в ряды, нетрудно получить для $f(u)$ разложения

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2}n)}{n!} (-u)^n = 1 - 0,94u + 0,75u^2 - 0,56u^3 + \dots, \quad (10)$$

$$f(u) \approx \frac{6}{5u^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))}{n!} [-(u^{-1/2})]^n = \frac{1,10}{u^{1/2}} - \frac{1,49}{u^{3/2}} + \dots \quad (11)$$

Второе из них представляет собой асимптотическое разложение $f(u)$ при больших u . График функции $f(u)$ приведен на рис. 66.

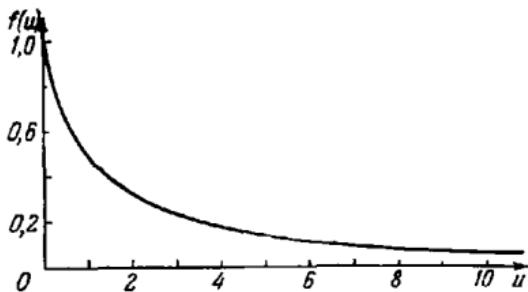


Рис. 66.

Согласно (45.23) интеграл от $\bar{I}(\rho_+, z)$ по поперечному сечению пучка не зависит от z . Уменьшение средней интенсивности на оси пучка можно объяснить его уширением. Если определить эффективную площадь пучка при помощи равенства

$$\int \bar{I}(\rho_+, z) d^2\rho_+ = \bar{I}(0, z) S_{\text{эфф}}(z),$$

то из закона сохранения (45.23) будет следовать, что

$$\bar{I}(0, z) S_{\text{эфф}}(z) = \bar{I}(0, 0) S_{\text{эфф}}(0). \quad (12)$$

Правая часть этого равенства не зависит от неоднородностей среды. Поэтому, если записать (12) для однородной среды, в которую посыпает излучение тот же источник (т. е. то же распределение поля на плоскости $z=0$), то мы получим равенство

$$I_0(z) S_{\text{эфф}}^{(0)}(z) = \bar{I}(0, 0) S_{\text{эфф}}(0), \quad (13)$$

где $I_0(z)$ и $S_{\text{эфф}}^{(0)}(z)$ — интенсивность на оси пучка и его эффективная площадь в однородной среде.

Из (12) и (13) следует, что

$$\frac{S_{\text{эфф}}(z)}{S_{\text{эфф}}^{(0)}(z)} = \frac{I_0(z)}{\bar{I}(0, z)} = \frac{1}{f(u)}. \quad (14)$$

Если $u \gg 1$, то, согласно (11), $f(u) \approx 1,1u^{-1/2}$ и

$$\frac{S_{\text{эфф}}(z)}{S_{\text{эфф}}^{(0)}(z)} \approx \frac{u^{1/2}}{1,1} \sim (C_g^2 k^2)^{1/2} z^{1/2} \left(\frac{2a}{g(z)} \right)^2.$$

Например, при $F = \infty$ (коллимированный пучок) $g^2(z) = 1 + k^2 a^4/z^2$. Если $z \ll ka^2$ (ближняя зона источника), то $g^2(z) \approx k^2 a^4/z^2$, и тогда

$$\frac{S_{\text{афф}}(z)}{S_{\text{афф}}^{(0)}(z)} \sim z^{10/3}.$$

Если же $z \gg ka^2$ (фраунгофера зона источника), то $g^2 \approx 1$ и

$$\frac{S_{\text{афф}}(z)}{S_{\text{афф}}^{(0)}(z)} \sim z^{4/3}.$$

2. Случайный радиус-вектор «центра тяжести» распределения интенсивности пучка в его поперечном сечении определяется формулой

$$\xi = \frac{\int p' I(p', z) d^3 p'}{\int I(p', z) d^3 p'}.$$

Выразить средний квадрат $\bar{\xi}^2$ через функцию когерентности Γ_4 .

Решение. Интеграл в знаменателе является постоянной детерминированной величиной. Обозначая его через P , получаем

$$\bar{\xi}^2 = P^{-2} \iint d^2 p'_1 d^2 p'_2 p'_1 p'_2 \langle I(p'_1, z) I(p'_2, z) \rangle.$$

Но

$$\langle I(p'_1, z) I(p'_2, z) \rangle = \langle v(p'_1, z) v(p'_2, z) v^*(p'_1, z) v^*(p'_2, z) \rangle,$$

т. е. в формуле для Γ_4 следует положить $p''_1 = p'_1$ и $p''_2 = p'_2$, что эквивалентно для новых переменных p_+ , p_- , p_1 , p_2 (см. (46.2)) равенствам $p_3 = 0$, $p = 0$. При этом $p'_1 = p_+ + 1/2p_1$, $p'_2 = p_+ - 1/2p_1$, $p'_1 p'_2 = p_+^2 - 1/4p_1^2$ и

$$\Gamma_4(p_+, p, p_1, p_2, z) = \Gamma_4(p_+, 0, p_1, 0, z).$$

Следовательно,

$$\bar{\xi}^2 = P^{-2} \iint d^2 p_+ d^2 p_1 (p_+^2 - 1/4p_1^2) \Gamma_4(p_+, 0, p_1, 0, z).$$

3. Фотодетектор, представляющий собой диск радиуса R , реагирует на интеграл от интенсивности света $I(p, z)$. Найти закон убывания относительных флуктуаций фототока J при увеличении R в случае, когда падающая плоская световая волна распространяется в статистически изотропной случайно-неоднородной среде.

Решение. Мгновенное значение фототока равно

$$J = \alpha \int \limits_{\Sigma} I(p, z) d^3 p, \quad (1)$$

где α — чувствительность фотодетектора, Σ — круг радиуса R . Усредняя (1), имеем $\bar{J} = \alpha \bar{I} \Sigma$. Из (1) следует также, что

$$\tilde{J} = \alpha \int \limits_{\Sigma} \bar{I}(p, z) d^3 p,$$

так что относительные флуктуации \tilde{J}/\bar{J} выражаются формулой

$$\frac{\tilde{J}}{\bar{J}} = \frac{1}{\Sigma} \int \frac{\bar{I}(p, z)}{\bar{I}} d^3 p. \quad (2)$$

Подвождя (2) в квадрат и усредняя, получаем

$$\sigma^2 = \overline{\left(\frac{\vec{J}}{J}\right)^2} = \frac{1}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} d^3 p_1 \int_{\Sigma} d^3 p_2 \psi_I(p_1 - p_2, z), \quad (3)$$

где ψ_I — корреляционная функция, деленная на $(J)^2$. Вводя функцию $M(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } p \in \Sigma, \\ 0 & \text{при } p \notin \Sigma, \end{cases}$ можно представить σ^2 в виде

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 p_1 d^3 p_2 M(p_1) M(p_2) \psi_I(p_1 - p_2, z),$$

или, после введения новых переменных интегрирования $p = p_1 - p_2$ и $p' = p_2$,

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_I(p, z) d^3 p \int_{-\infty}^{\infty} M(p - p') M(p') d^3 p'. \quad (4)$$

Обозначим через $f(p)$ функцию

$$f(p) = \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} M(p - p') M(p') d^3 p'. \quad (5)$$

Тогда (4) записывается в виде

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_I(p, z) f(p) d^3 p. \quad (6)$$

Из определения M следует, что произведение $f\Sigma$ равно площади пересечения двух кругов радиуса R , центры которых раздвинуты на расстояние p . Элементарный расчет приводит к формуле

$$f(p) = f(p) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos \frac{p}{2R} - \frac{p}{2R} \sqrt{1 - (p/2R)^2} \right] & \text{при } p < 2R, \\ 0 & \text{при } p > 2R. \end{cases}$$

В силу статистической изотропности флюктуаций (т. е. ψ_I тоже зависит только от $p = |p|$) можно записать (6) в виде однократного интеграла:

$$\sigma^2 = \frac{2}{R^2} \int_0^{2R} \psi_I(p, z) f(p) p dp. \quad (7)$$

Рассмотрим случай, когда R намного превышает радиус корреляции флюктуаций. Тогда функция $\psi_I(p, z)$ быстро спадает еще при таких значениях p , при которых $f(p)$ не успевает заметно измениться. Разложим $f(p)$ в ряд Тейлора по степеням $p/2R$:

$$f(p) = 1 - \frac{4}{\pi} \frac{p}{2R} + \dots,$$

и подставим это разложение в (7):

$$\sigma^2 = \frac{2}{R^3} \int_0^{2R} \psi_I(\rho, z) \rho d\rho - \frac{4}{\pi R^3} \int_0^{2R} \psi_I(\rho, z) \rho^3 d\rho + \dots \quad (8)$$

Первый интеграл можно записать в форме

$$\int_0^{2R} = \int_0^{\infty} - \int_{2R}^{\infty}.$$

что приводит к формуле

$$\sigma^2 = \frac{2}{R^3} \int_0^{\infty} \psi_I(\rho, z) \rho d\rho - \frac{2}{R^3} \int_{2R}^{\infty} \psi_I(\rho, z) \rho d\rho - \frac{4}{\pi R^3} \int_0^{2R} \psi_I(\rho, z) \rho^3 d\rho + \dots \quad (9)$$

Но интеграл в первом члене в силу (46.16) равен нулю, и поэтому в разложении (9) член с Σ^{-1} исчезает. Таким образом, флуктуации фототока убывают с ростом R быстрее, чем R^{-2} :

$$\sigma^2 = - \frac{2}{R^3} \int_{2R}^{\infty} \psi_I(\rho, z) \rho d\rho - \frac{4}{\pi R^3} \int_0^{2R} \psi_I(\rho, z) \rho^3 d\rho + \dots \quad (10)$$

Заметим, что при больших ρ функция $\psi_I(\rho, z)$ отрицательна, так что $\sigma^2 \geq 0$.

Убывание σ^2 с ростом R более быстрое, чем R^{-2} , объясняется тем, что на площади фотодетектора $\Sigma = \pi R^2$ при больших R происходит почти полная компенсация положительных и отрицательных флуктуаций интенсивности.

Глава VIII

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН

§ 48. Теория возмущений и диаграммная техника для среднего поля и функции корреляции

В этой главе мы рассмотрим некоторые общие вопросы теории многократного рассеяния волн. С частным случаем такой теории мы уже встречались в гл. VII, где была очерчена теория распространения волн в приближении марковского случайного процесса, учитывающая многократное рассеяние волн, но лишь при условиях, когда рассеяние происходит практически только *вперед*. Если, однако, длина волны недостаточно мала по сравнению с размерами неоднородностей, то, как мы помним, становится существенным рассеяние не только на малые, а на любые углы. Если, кроме того, неоднородная среда достаточно протяжена, то и в этом более общем случае роль многократного рассеяния может сделаться значительной.

Мы уже упоминали о том, что многократное рассеяние возможно как на совокупности *дискретных* рассеивателей (электроны в плазме, частицы аэрозоля в атмосфере и т. д.), так и на *непрерывных* неоднородностях, например на флуктуациях диэлектрической проницаемости сплошной среды. Теория многократного рассеяния для этих двух случаев строится несколько различно, хотя и имеет много общего. Мы ограничимся здесь методически более простой теорией многократного рассеяния на *непрерывных* неоднородностях. Что касается теории рассеяния на дискретных вкраплениях, то первоначальные сведения о ней можно найти, например, в обзоре [1].

Кроме того, мы будем рассматривать лишь наиболее простую постановку задачи, когда распространение волны описывается скалярным волновым уравнением. Здесь следует заметить, что в случае крупномасштабных неоднородностей скалярная постановка задачи позволяла хорошо описать многие закономерности распространения также и векторных (электромагнитных) волн, тогда как при произвольном соотношении между длиной волны и размерами неоднородностей это уже не так.

поскольку при многократном рассеянии происходят сильные изменения поляризации. Тем не менее мы ограничимся скалярным волновым уравнением, так как уже в этом простейшем случае четко выявляется специфика многократного рассеяния.

Наконец, мы ограничимся задачей о распространении волны в безграничной среде, в которой флуктуации показателя преломления являются гауссовым случайным полем. Последние два предположения делаются только для упрощения излагаемой теории, но не являются обязательными.

Рассмотрим первоначально задачу о *среднем* поле точечного источника, находящегося в некоторой точке r_0 неоднородной среды. Случайная функция Грина, т. е. поле такого точечного источника в данной среде, удовлетворяет волновому уравнению

$$\hat{L}(r) G(r, r_0) = \Delta G(r, r_0) + k^2 [1 - \tilde{e}(r)] G(r, r_0) = \delta(r - r_0) \quad (48.1)$$

(где Δ — лапласиан по переменной r), а также условию излучения при $|r - r_0| \rightarrow \infty$.

Запишем ряд теории возмущений для этой задачи, который получается из формулы (24.10), если считать в ней $u_0(r) = G_0(r, r_0)$, где

$$G_0(r, r_0) = -\frac{\exp\{ik|r - r_0|\}}{4\pi|r - r_0|} \quad (48.2)$$

— функция Грина однородной среды («свободного пространства»). Подставляя (48.2) вместо u_0 в (24.10), получаем ряд

$$\begin{aligned} G(r, r_0) = & G_0(r, r_0) - k^2 \int G_0(r, r_1) \tilde{e}(r_1) G_0(r_1, r_0) d^3 r_1 + \\ & + (-k^2)^2 \int G_0(r, r_1) \tilde{e}(r_1) G_0(r_1, r_2) \tilde{e}(r_2) \times \\ & \times G_0(r_2, r_0) d^3 r_1 d^3 r_2 + (-k^2)^3 \int G_0(r, r_1) \tilde{e}(r_1) G_0(r_1, r_2) \times \\ & \times \tilde{e}(r_2) G_0(r_2, r_3) \tilde{e}(r_3) G_0(r_3, r_0) d^3 r_1 d^3 r_2 d^3 r_3 + \dots \end{aligned} \quad (48.3)$$

Заметим, что функция $G_0(r, r_0)$ симметрична, т. е. удовлетворяет равенству $G_0(r, r_0) = G_0(r_0, r)$. Покажем, что такому же равенству удовлетворяет и функция $G(r, r_0)$. Действительно, используя симметрию функции G_0 , можно записать интеграл во втором слагаемом (48.3) в виде

$$\begin{aligned} \int G_0(r, r_1) \tilde{e}(r_1) G_0(r_1, r_0) d^3 r_1 &= \int G_0(r_1, r_0) \tilde{e}(r_1) G_0(r, r_1) d^3 r_1 = \\ &= \int G_0(r_0, r_1) \tilde{e}(r_1) G_0(r_1, r) d^3 r_1. \end{aligned}$$

Такое же преобразование можно проделать и в следующем

слагаемом:

$$\begin{aligned} \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \tilde{e}(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tilde{e}(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) d^3 r_1 d^3 r_2 = \\ = \int G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) \tilde{e}(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \tilde{e}(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) d^3 r_1 d^3 r_2 = \\ = \int G_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1) \tilde{e}(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tilde{e}(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) d^3 r_1 d^3 r_2. \end{aligned}$$

Здесь мы изменили обозначения переменных интегрирования ($\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_3$). Ясно, что подобным же образом можно преобразовать любой член ряда (48.3), в силу чего и имеет место равенство

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}), \quad (48.4)$$

выражающее *теорему взаимности*: в произвольной линейной неоднородной среде поле не меняется, если точку расположения источника и точку наблюдения поменять местами.

Рассмотрим теперь среднюю функцию Грина. Усредняя (48.3), следует учесть, что для гауссова поля $\langle \tilde{e}(\mathbf{r}_1) \dots \tilde{e}(\mathbf{r}_{2n-1}) \rangle \equiv 0$, а для четных моментов справедлива формула (7.20):

$$\langle \tilde{e}(\mathbf{r}_1) \dots \tilde{e}(\mathbf{r}_{2n}) \rangle = \sum_{p, n} \psi_e(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \dots \psi_e(\mathbf{r}_\gamma, \mathbf{r}_\delta), \quad (48.5)$$

причем сумма в правой части распространена на все возможные разбиения множества точек $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}$ на пары $(\mathbf{r}_{\alpha_1}, \mathbf{r}_{\alpha_2})$ (порядок следования внутри каждой пары не имеет значения). Так, например, согласно (48.5)

$$\begin{aligned} \langle \tilde{e}(\mathbf{r}_1) \tilde{e}(\mathbf{r}_2) \tilde{e}(\mathbf{r}_3) \tilde{e}(\mathbf{r}_4) \rangle = & \psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_e(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + \\ & + \psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \psi_e(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + \psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) \psi_e(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3), \end{aligned} \quad (48.6)$$

а в формуле для $\langle \tilde{e}(\mathbf{r}_1) \dots \tilde{e}(\mathbf{r}_{2n}) \rangle$ будет $(2n-1)!!$ слагаемых. Усредняя (48.3) с учетом (48.5), получаем

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = & G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \\ & + k^4 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 + \\ & + k^6 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) G_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) G_0(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_0) \times \\ & \times [\psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_e(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + \psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \psi_e(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + \\ & + \psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) \psi_e(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)] d^3 r_1 \dots d^3 r_4 + \dots \end{aligned} \quad (48.7)$$

Чтобы наглядно представить себе структуру этого ряда, введем графическое изображение входящих в него элементов. Такого рода графики (диаграммы) были введены Р. Фейнманом в квантовой электродинамике и получили затем распространение в самых различных областях теоретической физики. Это объясняется их лаконичностью по сравнению с аналитической записью

и упрощением выкладок. Разумеется, оперирование этой «диаграммной техникой» требует известного навыка.

Сопоставим функции $G_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l)$ отрезок прямой линии, концам которой приписываются координаты \mathbf{r}_j и \mathbf{r}_l :

$$G_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l) \sim \frac{1}{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l}.$$

Множителю $k^4 \psi_e(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l)$ сопоставим пунктирную линию с двумя точками на концах:

$$k^4 \psi_e(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l) \sim \overline{\mathbf{r}_j} \cdots \overline{\mathbf{r}_l}.$$

Точки \mathbf{r}_j , \mathbf{r}_l , в которых сходятся линии, изображающие G_0 и ψ_e , будем называть *вершинами* диаграммы. Условимся, что по координатам всех *внутренних* вершин производится интегрирование. Число таких вершин в диаграмме будем называть *порядком* диаграммы.

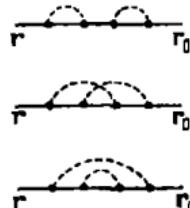
Приведенные правила соответствия позволяют сопоставить каждому члену ряда (48.7) диаграмму Фейнмана. Так, первый член в правой части (48.7) изображается диаграммой

$$\overline{\mathbf{r}} \quad \overline{\mathbf{r}_0},$$

а второму члену этой формулы соответствует график

$$\overline{\mathbf{r}} \quad \overline{\mathbf{r}_1} \quad \overline{\mathbf{r}_2} \quad \overline{\mathbf{r}_0}.$$

Заметим, что, поскольку по координатам \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 внутренних вершин производится интегрирование, аналитическое выражение, изображаемое диаграммой, не зависит от координат внутренних вершин. В связи с этим мы не будем в дальнейшем отмечать эти координаты на диаграммах. Третьему слагаемому в (48.7) соответствуют следующие три диаграммы:



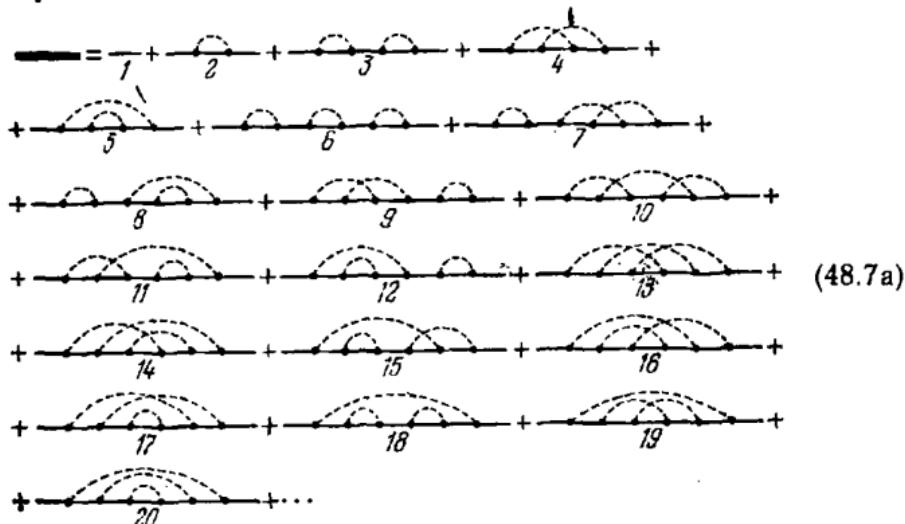
Неусредненный член порядка $2n$ ряда теории возмущений для G имеет вид

$$k^{4n} \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \dots G_0(\mathbf{r}_{2n}, \mathbf{r}_0) \tilde{e}(\mathbf{r}_1) \dots \tilde{e}(\mathbf{r}_{2n}) d^3 r_1 \dots d^3 r_{2n}.$$

Поэтому диаграммы порядка $2n$ содержат $2n+1$ линий функций Грина G_0 и $2n$ внутренних вершин r_1, \dots, r_{2n} . Так как при усреднении множитель $\langle \bar{e}(r_1) \dots \bar{e}(r_{2n}) \rangle$ распадается на сумму $(2n-1)!!$ слагаемых, в которых аргументы r_1, \dots, r_{2n} объединяются попарно всеми возможными способами, при усреднении возникает $(2n-1)!!$ диаграмм порядка $2n$, в которых $2n$ вершин соединяются между собой попарно пунктирными линиями всеми возможными способами. Наконец, введем графическое изображение для самой *средней* функции Грина в неоднородной среде:

$$\bar{G}(r, r_0) \sim \frac{1}{r - r_0}.$$

Тогда ряд (48.7) можно представить графически следующим образом:



Здесь, помимо написанных в (48.7) членов, представлены еще все 15 членов шестого порядка (диаграммы с шестью вершинами).

Соответствие между диаграммами Фейнмана и аналитическими выражениями является взаимно однозначным. Мы можем не только составить по аналитическому выражению соответствующую диаграмму, но и обратно — восстановить по диаграмме аналитическую форму записи. Например, диаграмме 19 из (48.7a) соответствует член ряда $\bar{G}^{(19)}$, равный

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(19)}(r, r_0) = & k^{12} \int G_0(r, r_1) G_0(r_1, r_2) G_0(r_2, r_3) G_0(r_3, r_4) \times \\ & \times G_0(r_4, r_5) G_0(r_5, r_6) G_0(r_6, r_7) \psi_e(r_1, r_4) \times \\ & \times \psi_e(r_2, r_4) \psi_e(r_3, r_5) d^3 r_1 \dots d^3 r_6. \end{aligned} \quad (48.8)$$

Некоторые из диаграмм, входящих в (48.7а), содержат в качестве фрагментов диаграммы более низкого порядка. Например, диаграмма 3 содержит в качестве фрагмента диаграмму 2, диаграмма 19 содержит диаграмму 4. Этим можно воспользоваться и для сокращения аналитических выражений. Например, можно записать слагаемое $\bar{G}^{(19)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ в виде

$$\bar{G}^{(19)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = k^4 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \bar{G}^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_6) G_0(\mathbf{r}_6, \mathbf{r}_0) \psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_6) d^3 r_1 d^3 r_6, \quad (48.9)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_6) = k^8 \int & G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) G_0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) G_0(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3) \times \\ & \times G_0(\mathbf{r}'_3, \mathbf{r}'_4) G_0(\mathbf{r}'_4, \mathbf{r}_6) \psi_e(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_3) \psi_e(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_4) d^3 r'_1 \dots d^3 r'_4. \end{aligned} \quad (48.10)$$

Легко убедиться, что подстановка (48.10) в (48.9) приводит после изменения обозначений переменных интегрирования к выражению (48.8).

Прежде чем развивать дальше технику преобразований диаграмм Фейнмана, остановимся на их физической интерпретации. Диаграмма 1 из (48.7а) описывает распространение волн из точки \mathbf{r}_0 в \mathbf{r} без рассеяния (как в однородной среде). Диаграмма 2 описывает следующий процесс: волна распространяется, как в однородной среде, из точки \mathbf{r}_0 в точку \mathbf{r}_1 . Здесь происходит первое рассеяние, после чего рассеянная волна распространяется в точку \mathbf{r}_1 , в которой происходит второе рассеяние. Двукратно рассеянная волна достигает точки наблюдения \mathbf{r} . Распространение описывается множителями $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \times \times G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0)$. Наличие в диаграмме 2 корреляционной функции $\psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ указывает на то, что оба рассеивателя (в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2) коррелированы, т. е. оба рассеяния фактически произошли на одной и той же неоднородности.

Рассмотрим теперь диаграммы второго порядка, т. е. диаграммы 3—5. Все они содержат одно и то же произведение функций Грина

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) G_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) G_0(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_0).$$

Это означает, что волна в точку \mathbf{r} пришла после рассеяния в точке \mathbf{r}_1 , в точку \mathbf{r}_1 — после рассеяния в точке \mathbf{r}_2 , и т. д., а первому рассеянию в точке \mathbf{r}_4 подвергалась первичная волна $G_0(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_0)$. Таким образом, все эти диаграммы описывают четырехкратное рассеяние. В чем же состоит различие между процессами, которые описываются этими *топологически различными* диаграммами? В диаграмме 3 линии корреляционных функций соединяют точку \mathbf{r}_1 с \mathbf{r}_3 и точку \mathbf{r}_3 с \mathbf{r}_4 . Это означает, что обе точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_4 принадлежат одной неоднородности, а обе точки \mathbf{r}_3 и \mathbf{r}_4 — другой.

Таким образом, процесс, описываемый диаграммой 3, заключается в том, что сначала происходит свободное распространение волны от источника к первой неоднородности, затем—двуократное рассеяние на ней, затем—свободное распространение двукратно рассеянной волны до второй неоднородности, после чего—двуократное рассеяние на второй неоднородности. Диаграмма 4 тоже описывает четырехкратное рассеяние на двух неоднородностях, но последовательность рассеяния здесь иная. Сначала

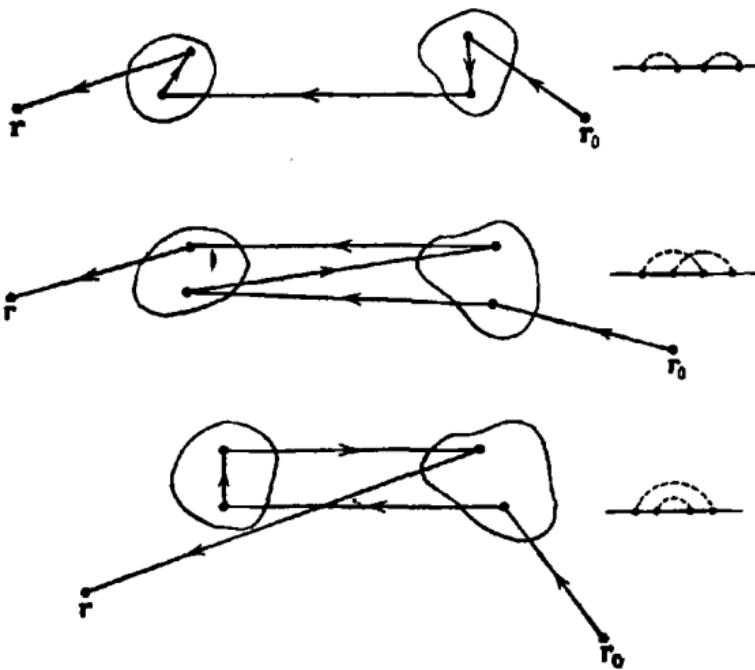


Рис. 67.

происходит рассеяние на первой неоднородности (в точке r_4), затем однократно рассеянная волна распространяется до второй неоднородности и рассеивается на ней (в точке r_3), затем двукратно рассеянная волна снова возвращается к первой неоднородности и рассеивается на ней (в точке r_4 , которая соединена пунктирной линией с точкой r_5), после чего трехкратно рассеянная волна снова рассеивается на второй неоднородности (в точке r_1) и достигает точки наблюдения. Схематически последовательность рассеяний на двух неоднородностях изображена на рис. 67.

Представление решения уравнения (48.1) в виде совокупности диаграмм (48.7а) полезно не только из-за наглядности, но и потому, что оно позволяет преобразовывать ряд теории возмущений, используя топологические признаки входящих в решение

диаграмм. При этом удается выразить сумму ряда (48.7) через сумму некоторой бесконечной *подпоследовательности* этого же ряда. Чтобы осуществить такое сведение, произведем сначала классификацию входящих в (48.7а) диаграмм.

Назовем входящую в \bar{G} диаграмму *слабо связной*, если ее можно разделить на две отдельные диаграммы, разорвав какую-либо одну линию G_0 . В формуле (48.7а) слабо связными являются диаграммы 3, 6—9 и 12. Остальные диаграммы назовем *сильно связными* (2, 4, 5, 10, 11, 13—20 в формуле (48.7а)). Диаграммы, получающиеся из слабо связной диаграммы путем разрыва линий G_0 , в свою очередь могут оказаться сильно или слабо связными. Если среди «вторичных» диаграмм есть слабо связные, то и их можно путем разрыва какой-либо одной сплошной линии разбить на более простые диаграммы. Продолжая этот процесс, мы придем в конечном счете к некоторому количеству сильно связных диаграмм. Назовем число сильно связных диаграмм, на которое может быть разбита слабо связная диаграмма, *показателем связности* исходной диаграммы. Возвращаясь к формуле (48.7а), можно сказать, что диаграммы 3, 7—9 и 12 имеют показатель связности 2, а диаграмма 6 — показатель связности 3. Сильно связным диаграммам можно присвоить показатель связности, равный 1.

Отберем из ряда (48.7а) все сильно связные диаграммы. Так как каждая из диаграмм начинается и оканчивается линией G_0 , то сумму всех сильно связных диаграмм можно представить в виде

$$\text{---} \circ \text{---}, \quad (48.11)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \circ \text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \\
 & + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \\
 & + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \\
 & + \text{---} + \text{---} + \dots
 \end{aligned} \quad (48.12)$$

В аналитической форме (48.11) имеет вид

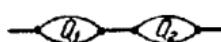
$$\bar{G}^{(\text{сильно сб})}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_0) d^3 r' d^3 r'', \quad (48.11a)$$

где

$$Q(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = k^4 G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \Psi_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') + k^6 \int G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \times \\ \times G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') \Psi_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) \Psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'') d^3 r_1 d^3 r_2 + \\ + k^8 \int G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') \Psi_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \times \\ \times \Psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 + \dots \quad (48.12a)$$

Функция Q носит название **ядра массового оператора** (это название заимствовано из квантовой теории поля).

Рассмотрим теперь сумму всех диаграмм с показателем связности, равным 2. Каждая из них имеет вид


(48.13)

где  и  — какие-либо диаграммы, принадлежащие правой части (48.12). Так как при построении ряда (48.7a) перебираются все возможные способы попарного объединения вершин, ясно, что сумма всех возможных членов вида (48.13) равна



где  — полная сумма (48.12).

Точно так же сумма всех диаграмм с показателем связности 3 имеет вид



и т. д. Таким образом, мы можем представить среднюю функцию Грина в виде диаграммного ряда

$$\begin{aligned} & - = + \text{---} \text{---} + \\ & + \text{---} \text{---} \text{---} + \\ & + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (48.14)$$

Соответствующая формула отличается от исходного ряда (48.7a) лишь перегруппировкой его членов.

Убедимся теперь в том, что ряд (48.14) является решением следующего уравнения:

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---}, \quad (48.15)$$

которое носит название *уравнения Дайсона*. В аналитической форме (48.15) имеет вид

$$\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \bar{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (48.15a)$$

Для того чтобы показать, что (48.14) есть решение уравнения (48.15), найдем это решение, пользуясь последовательными итерациями. Это можно делать как в аналитической форме, так и в графической, которой мы и воспользуемся. Подставляя выражение (48.15) для \bar{G} в правую часть (48.15), получаем

$$\begin{aligned} \text{---} &= \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \left(\text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} \right) = \\ &= \text{---} + \text{---} \circlearrowleft + \text{---} \circlearrowleft \text{---} \end{aligned}$$

Снова подставляя в правую часть этого уравнения правую часть (48.15), получим

$$\begin{aligned} \text{---} &= \text{---} + \text{---} \circlearrowleft + \\ &+ \text{---} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowleft \left(\text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} \right) = \\ &= \text{---} + \text{---} \circlearrowleft + \text{---} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowleft + \\ &+ \text{---} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowleft \text{---} \end{aligned}$$

Ясно, что, продолжая итерации, мы приедем к ряду (48.14). Как сказано, те же выкладки можно было бы проделать и в аналитической форме, если исходить из уравнения (48.15a). При этом мы приедем к разложению (48.14), записанному в аналитическом виде. Мы не будем приводить здесь указанные выкладки, но советуем читателю проделать их самостоятельно, что, несомненно, подкрепит его доверие к графическим преобразованиям диаграмм.

Уравнение (48.15a), если считать в нем функцию Q известной, представляет собой линейное интегральное уравнение относительно \bar{G} , которое во многих случаях может быть решено (см. следующий параграф). При этом получается явное выражение \bar{G} через Q , т. е. сумма ряда (48.7a) выражается через величину $\bar{G}^{(\text{сильно св})}$, являющуюся некоторой подпоследовательностью того же ряда.

В действительности функция Q точно не известна. В качестве этой функции можно использовать сумму нескольких первых членов ряда (48.12) или же выразить Q через некоторую новую функцию, подчиненную *нелинейному* интегральному уравнению. Последний путь, однако, слишком сложен, и его мы касаться не будем (см. монографию [2]).

Обратимся теперь к *корреляции* двух полей, создаваемых точечными источниками, расположенными в точках r' и r'' :

$$\langle G(r', r_0) G^*(r'', r_0') \rangle = \Gamma(r', r''; r_0, r_0'). \quad (48.16)$$

Для того чтобы найти Γ , следует перемножить два ряда вида (48.3) и после этого произвести усреднение — задача более громоздкая, чем рассмотренная выше. Ее можно несколько облегчить, если ввести диаграммные обозначения для входящих в (48.3) еще *не усредненных* величин. Будем изображать множитель $-k^2 \tilde{\epsilon}(r)$ в виде косого крестика, а функцию $G(r, r_0)$ — в виде волнистой линии; при усреднении этих величин мы должны получать введенные выше элементы:

$$G(r; r_0) \sim \overbrace{r' \quad r_0}^{\text{wavy line}}, \quad \langle \overbrace{\quad}^{\text{wavy line}} \rangle = \dots \quad (48.17)$$

$$-k^2 \tilde{\epsilon}(r) \sim \overbrace{r}^{\text{cross}}, \quad \langle \overbrace{\quad}^{\text{cross}} \rangle = \overbrace{r_1 \quad r_2}^{\text{cross}}$$

Разложение (48.3) изобразится при этом бесконечной суммой диаграмм следующего вида:

$$\overbrace{r' \quad r_0'}^{\text{wavy line}} = \dots + \overbrace{-\times}^{\text{cross}} + \overbrace{-\times-\times}^{\text{cross}} + \overbrace{-\times-\times-\times}^{\text{cross}} + \dots \quad (48.3a)$$

Если усреднить (48.3a), то диаграммы с нечетным числом крестиков исчезнут и, в соответствии с правилами усреднения, мы получим снова разложение (48.7a).

Запишем теперь аналогичное разложение для $G^*(r'', r_0')$. Оно отличается от (48.3a) заменой функции G_0 на G_0' , что мы будем отмечать, перечеркивая соответствующую линию:

$$\overbrace{r'' \quad r_0'}^{\text{wavy line}} = \dots + \overbrace{-\times-\times}^{\text{cross}} + \overbrace{-\times-\times-\times}^{\text{cross}} + \overbrace{-\times-\times-\times-\times}^{\text{cross}} + \dots \quad (48.18)$$

Мы должны перемножить теперь разложения (48.3a) и (48.18), после чего усреднить результат. При перемножении отдельных слагаемых из (48.3a) и (48.18) будем помещать сверху элементы, принадлежащие (48.3a), а снизу — принадлежащие (48.18). Например, усредненное произведение третьего члена из (48.3a) на

третий член из (48.18) примет вид

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle = \text{---} + \text{---} + \text{---} \quad (48.19)$$

Поясним этот результат. При усреднении произведения $\bar{e}(r_1)\bar{e}(r_2)\bar{e}(r_3)\bar{e}(r_4)$ возникают, согласно (48.5), три слагаемых, которым соответствуют в правой части (48.19) три диаграммы. В первой из них усредняется произведение множителей \bar{e} , принадлежащих $G(r', r_0)$ и $G^*(r'', r_0)$. Возникающая при этом диаграмма состоит из двух независимых кусков, не соединяемых какими-либо линиями (несвязная диаграмма). Очевидно, всякая несвязная диаграмма такого типа представляет собой один из членов произведения $\bar{G}(r', r_0)\bar{G}_0^*(r'', r_0)$, а сумма всех несвязных диаграмм равна этому произведению.

Если ввести для $\langle G(r', r'_0)G^*(r'', r''_0) \rangle$ графическое обозначение



то результат перемножения и усреднения рядов (48.3а) и (48.19) изобразится в виде

$$\begin{aligned} \text{---} &= \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \\ &+ \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \\ &+ \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (48.20)$$

Здесь приведены все диаграммы четвертого порядка 3—10 и только три из диаграмм шестого порядка.

Остановимся на физической интерпретации этих диаграмм. Диаграмме 1 в (48.20) соответствует распространение волны с учетом многократного рассеяния из точки r'_0 в r' и из точки r''_0 в r'' , причем на обоих путях распространения рассеяние происходит на разных неоднородностях (рис. 68).

Диаграмма 2 описывает процесс, при котором и первая, и вторая волны испытывают однократное рассеяние на одной и той же неоднородности и т. д. (см. еще два примера на рис. 68).

Произведем теперь классификацию диаграмм, входящих в (48.20). Все диаграммы, за исключением принадлежащих к I,

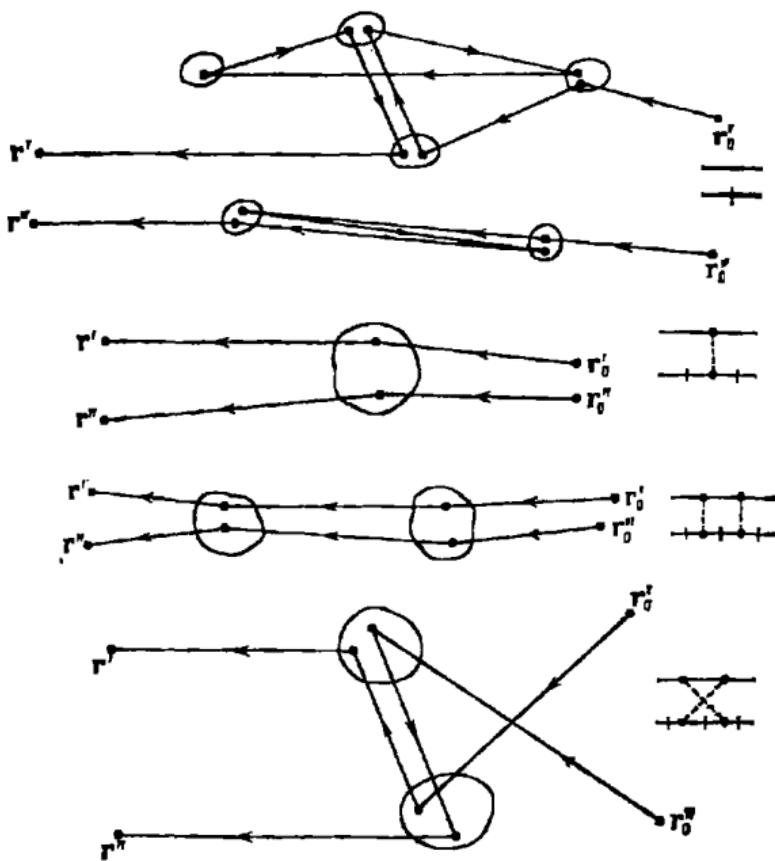
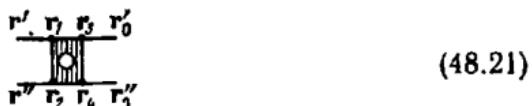


Рис. 68.

являются связными. Назовем диаграмму для корреляционной функции сильно связной, если посредством разрыва одной линии G_a и одной линии G_b ее нельзя разбить на две такие независимые части, каждая из которых содержит хотя бы две вершины. В (48.20) сильно связны диаграммы 2, 4, 7, 9 и 13. Все остальные диаграммы слабо связны, но их классификация несколько более сложна, чем для диаграмм, представляющих \bar{G} .

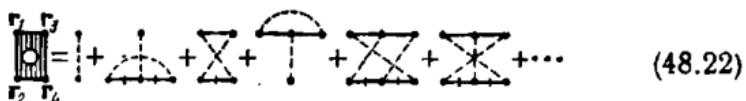
Каждая из сильно связных диаграмм оканчивается четырьмя линиями G_0 и G_0^* , т. е. имеет вид



или в аналитической форме

$$\Gamma(\text{сильно св}) (r', r''; r'_0, r''_0) = \int G_0(r', r_1) G_0(r_3, r'_0) G_0^*(r'', r_2) \times \\ \times G_0^*(r_4, r''_0) K(r_1, r_2; r_3, r_4) d^3 r_1 \dots d^3 r_4. \quad (48.21a)$$

Функцию K называют *ядром оператора интенсивности*. Диаграммное представление K имеет вид



В том случае, когда на верхнем или на нижнем уровне присутствует только одна вершина, в аналитическом выражении для K содержится множитель $\delta(r_1 - r_3)$ или $\delta(r_2 - r_4)$. В аналитической форме диаграммный ряд (48.22) записывается следующим образом:

$$K(r_1, r_2; r_3, r_4) = k^4 \Psi_e(r_1, r_2) \delta(r_1 - r_3) \delta(r_2 - r_4) + \\ + \int k^4 \Psi_e(r_1, r_5) \Psi_e(r_3, r_4) G_0^*(r_3, r_5) G_0^*(r_5, r_4) \delta(r_1 - r_3) d^3 r_5 + \\ + k^4 \Psi_e(r_1, r_4) \Psi_e(r_3, r_2) G_0(r_1, r_5) G_0^*(r_2, r_4) + \\ + \int k^4 \Psi_e(r_1, r_3) \Psi_e(r_5, r_2) G_0(r_1, r_5) G_0(r_5, r_2) \delta(r_3 - r_4) d^3 r_5 + \dots \quad (48.22a)$$

(здесь выписаны слагаемые только до четвертого порядка включительно).

Рассмотрим теперь возможные типы слабо связных диаграмм.

1. Слабо связная диаграмма может содержать всего один из сильно связных элементов, входящих в K , но быть слабо связной за счет того, что одна (или несколько) из внешних линий G_0 или G_0^* заменена на элементы, принадлежащие средней функции Грина \bar{G} или \bar{G}^* . В (48.20) к этому типу относятся диаграммы 3, 5, 8 и 10. Все они принадлежат к совокупности диаграмм вида



Например, диаграмма 3 в (48.20) получается, если в K выбирается элемент --- , в $\bar{G}^*(r_4, r'_0)$ — элемент $\text{---} \text{---}$, а в остальных

функциях \bar{G} , \bar{G}^* — элемент G_0 . Очевидно, сумма всех диаграмм этого типа равна (48.23).

2. Слабо связные диаграммы, содержащие *два* сильно связных элемента из K , в сумме равны



К этой совокупности диаграмм в (48.20) относятся диаграммы 6 и 12.

Аналогично, диаграммы, содержащие *m* сильно связных элементов из K , в сумме равны



Отсюда следует, что ряд (48.20) можно представить в виде

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram} + \dots + \dots, \quad (48.25)$$

аналогичном представлению (48.14) для \bar{G} .

Подобно тому, как из (48.14) следует уравнение Дайсона (48.15), из (48.25) легко получить так называемое *уравнение Бете—Солпитера*:

$$\begin{array}{c} r' \\ \hline \text{Diagram} \\ r'' \end{array} = \begin{array}{c} r'_0 \\ \hline \text{Diagram} \\ r''_0 \end{array} + \dots + \dots \quad (48.26)$$

Действительно, если решать уравнение (48.26) последовательными итерациями, мы получим ряд (48.25):

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \text{Diagram} + \text{Diagram} \left(\text{Diagram} + \text{Diagram} \right) = \\ &= \text{Diagram} + \text{Diagram} + \text{Diagram} = \dots \end{aligned}$$

В аналитической форме уравнение (48.26) имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma(r', r''; r'_0, r''_0) &= \bar{G}(r', r'_0) \bar{G}^*(r'', r''_0) + \\ &+ \int \bar{G}(r', r_1) \bar{G}^*(r'', r_2) K(r_1, r_2; r_3, r_4) \times \\ &\times \Gamma(r_3, r_4; r'_0, r''_0) d^3 r_1 \dots d^3 r_4. \quad (48.26a) \end{aligned}$$

Следующие два параграфа этой главы будут посвящены исследованию среднего поля и функции когерентности Γ . Относительно материала, изложенного в данном параграфе, следует сделать одно замечание общего характера.

Фактически мы нигде не использовали до сих пор конкретного вида функции $G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ и весь проведенный анализ опирался на разложение (48.3). Это разложение представляет собой решение следующего интегрального уравнения:

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') - k^2 \int G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \tilde{e}(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'') d^3 r''. \quad (48.27)$$

Вообще говоря, мы могли бы рассматривать это уравнение с произвольной функцией G_0 в качестве исходной и пришли бы в результате к тем же диаграммным рядам и тем же уравнениям (48.15) и (48.26). Кроме того, размерность пространства, в котором радиусом-вектором является \mathbf{r} , тоже не играет роли. Поэтому и \mathbf{r} можно рассматривать как вектор в n -мерном пространстве с произвольным n .

К уравнению вида (48.27) могут быть сведены весьма разнообразные физические задачи. Например, в задаче о параметрических колебаниях осциллятора со случайной частотой $\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \tilde{e}(t)}$, где $\tilde{e}(t)$ — случайный процесс, стохастическая функция Грина $G(t, t_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{G}(t, t_0) + \omega_0^2 [1 + \tilde{e}(t)] G(t, t_0) = \delta(t - t_0)$$

и начальными условиями $G(0, t_0) = 0$, $\dot{G}(0, t_0) = 0$. Этую же задачу можно сформулировать в виде интегрального уравнения вида (48.27):

$$G(t, t_0) = G_0(t, t_0) - \omega_0^2 \int_0^\infty G_0(t, t') \tilde{e}(t') G(t', t_0) dt',$$

где

$$G_0(t, t_0) = \frac{\theta(t - t_0)}{\omega_0} \sin [\omega_0(t - t_0)];$$

здесь θ — функция скачка.

В качестве другого примера, также сводящегося к интегральному уравнению вида (48.27), укажем задачу о рассеянии волн на поверхности со случайно распределенным импедансом [17]. Ряд других примеров можно найти в обзоре [18] и монографии [19].

Другими словами, развитый выше аппарат относится к весьма широкому кругу задач, описываемых линейными интегральными уравнениями со случайнym ядром гауссова типа.

Отметим также, что наряду с диаграммной техникой часто используется и теория возмущений в *операторной* форме (см. обзор [5]), которая также позволяет получать приближенные уравнения для статистических моментов решения уравнения (48.27).

§ 49. Среднее поле точечного источника в неограниченной случайно-неоднородной среде

Рассмотрим уравнение Дайсона (48.15а):

$$\bar{\bar{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \bar{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (49.1)$$

Если применить к нему оператор $(\Delta + k^2)$, то, в силу равенства

$$(\Delta + k^2) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (49.2)$$

мы получим уравнение

$$\Delta \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + k^2 \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - \int Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) d^3 r' = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (49.3)$$

Из сравнения (49.3) с (49.2) видно, что, в отличие от G_0 , функция \bar{G} удовлетворяет не дифференциальному, а интегро-дифференциальному уравнению. Уравнение вида (49.3) получается, например, из уравнений Максвелла в том случае, когда связь между электрической индукцией \mathbf{D} и напряженностью поля \mathbf{E} в изотропной среде имеет пространственно нелокальный характер:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \int \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 r',$$

где \mathbf{P} — поляризация, а χ — поляризуемость среды. Действительно, из уравнений Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\mathbf{D}$ мы получаем тогда для напряженности \mathbf{E} уравнение

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} + 4\pi k^2 \int \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 r' = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Сравнивая это уравнение с (49.3), мы видим, что величину

$$-\frac{Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{4\pi k^2} = \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

можно трактовать как поляризуемость среды с пространственной дисперсией. Найденный результат легко понять и с физической точки зрения, поскольку он выражает тот факт, что среднее поле в некоторой точке \mathbf{r} зависит и от окружающих эту точку неоднородностей.

Рассмотрим статистически однородную среду, т. е. предположим, что $\psi_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_e(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Если обратиться к разложению (48.12а) для $Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, то легко убедиться, что в этом случае ядро Q тоже зависит только от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, т. е. $Q = Q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

Наконец, поскольку функция Грина $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ тоже зависит лишь от разности своих аргументов, ясно, что и средняя функция Грина в неоднородной среде имеет вид $\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \bar{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. При этих условиях уравнение (49.1) можно разрешить относительно \bar{G} , воспользовавшись преобразованиями Фурье

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) &= \int g_0(\mathbf{x}) \exp[i\mathbf{x}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)] d^3x, \\ \bar{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) &= \int \bar{g}(\mathbf{x}) \exp[i\mathbf{x}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)] d^3x, \\ Q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \int q(\mathbf{x}) \exp[i\mathbf{x}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d^3x. \end{aligned} \quad (49.4)$$

Для $g_0(\mathbf{x})$ имеем выражение

$$g_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3 (k^2 - \mathbf{x}^2 + i\alpha)} . \quad (49.5)$$

В знаменатель этой дроби введена бесконечно малая мнимая добавка $i\alpha$, обеспечивающая при вычислении интегралов (49.4) присутствие только расходящихся волн. Величину $i\alpha$ можно, конечно, рассматривать как бесконечно малое поглощение ($k \rightarrow k + 1/2 i\alpha$).

В рассматриваемом случае уравнение (49.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \\ &= G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) Q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \bar{G}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) d^3r_1 d^3r_2, \end{aligned} \quad (49.6)$$

т. е. двукратный интеграл представляет собой теперь двойную свертку. Поэтому при преобразовании Фурье он дает произведение трансформант Фурье и уравнение (49.6) приводит к чисто алгебраическому уравнению

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) + (8\pi^3)^2 g_0(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \bar{g}(\mathbf{x}). \quad (49.7)$$

Разрешая это уравнение относительно \bar{g} , получаем с учетом (49.5)

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = \frac{g_0(\mathbf{x})}{1 - (8\pi^3)^2 g_0(\mathbf{x}) q(\mathbf{x})} = \frac{1}{8\pi^3 [k^2 - \mathbf{x}^2 - 8\pi^3 q(\mathbf{x}) + i\alpha]} . \quad (49.8)$$

Подставив (49.8) в (49.4) и выразив $q(\mathbf{x})$ при помощи обратного преобразования Фурье через $Q(\mathbf{r})$, мы получаем формулу

$$\bar{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{\exp[i\mathbf{x}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]}{k^2 - \mathbf{x}^2 - \int Q(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{x}\mathbf{r}') d^3r' + i\alpha} d^3x, \quad (49.9)$$

которая в явном виде выражает \bar{G} через Q .

Хотя формула (49.9) является *точной*, выражение для Q известно лишь в виде ряда, просуммировать который в общем случае не удается. Поэтому формула (49.9) полезна лишь в том

отношении, что она позволяет по тому или иному приближенному выражению для Q получить соответствующее приближение для \bar{G} .

Одно из простейших приближений, которое в дальнейшем будет рассмотрено подробнее,—так называемое *приближение Бурре*—заключается в том, что для Q берется *первый член ряда* (48.12а), т. е. полагается

$$Q \approx Q_1 = \frac{\kappa^4 G_0(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \psi_e(r_1 - r_2), \quad (49.10)$$

Соответствующее приближение \bar{G}_1 для \bar{G} мы будем изображать графически как

$$\bar{G}_1 = \text{---+---+---+---+...}$$

Если в (48.14) подставить вместо Q диаграмму (49.10), то получится следующее диаграммное представление \bar{G}_1 :

$$\text{---+---+---+---+...} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \quad (49.11)$$

Следовательно, подстановка (49.10) в (49.9) и последующее вычисление интеграла позволяет найти \bar{G}_1 , т. е. просуммировать ряд (49.11).

Если случайно-неоднородная среда не только статистически однородна, но и *статистически изотропна*, то, очевидно, $Q(r') = Q(r')$ и $\bar{G}(r - r_0) = \bar{G}(|r - r_0|)$. В этом случае формула (49.9) может быть еще более упрощена посредством перехода к сферическим координатам (как по r' , так и по x) и выполнения интегрирования по всем угловым переменным. В результате (49.9) преобразуется к виду

$$\bar{G}(R) = \frac{1}{4\pi^2 R^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}) \, d\mathbf{x}}{k^2 - \mathbf{x}^2 - \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{\infty} Q(r') \sin(xr') \, r' \, dr'}, \quad (49.12)$$

$$R = |r - r_0|.$$

Уравнение Дайсона (49.1) можно преобразовать к виду, в котором вместо функции Грина невозмущенной среды G_0 будет фигурировать уже частично просуммированная бесконечная подпоследовательность ряда для \bar{G} [3, 4]. Такое преобразование позволяет улучшить сходимость ряда для \bar{G} . Для его осуществления запишем сначала уравнение Дайсона в операторном виде.

Введем для этого линейные интегральные операторы \hat{M} , \hat{M}_0 и \hat{Q} с ядрами \bar{G} , G_0 и Q :

$$(\hat{M}f)(\mathbf{r}) = \int \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) d^3 r_0,$$

$$(\hat{M}_0 f)(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) d^3 r_0,$$

$$(\hat{Q}f)(\mathbf{r}) = \int Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

Запись $(\hat{M}f)(\mathbf{r})$ означает, что функция f преобразуется оператором \hat{M} в функцию $(\hat{M}f)$, значение которой берется в точке \mathbf{r} .

Если умножить (49.1) на $f(\mathbf{r}_0)$ и проинтегрировать по \mathbf{r}_0 , то полученное равенство можно записать в следующей операторной форме:

$$\hat{M}f = \hat{M}_0 f + \hat{M}_0 \hat{Q} \hat{M}f.$$

Так как это равенство справедливо при любой функции f , его можно записать и как уравнение для оператора \hat{M} :

$$\hat{M} = \hat{M}_0 + \hat{M}_0 \hat{Q} \hat{M} = \hat{M}_0 (\hat{I} + \hat{Q} \hat{M}). \quad (49.1a)$$

В предыдущем параграфе было показано, что функция $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ (еще не усредненная) симметрична: $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \bar{G}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')$. После усреднения это равенство, естественно, сохраняется:

$$\bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \bar{G}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}').$$

В операторном виде последнее равенство означает, что транспонированный оператор \hat{M}^τ совпадает с \hat{M} :

$$\hat{M}^\tau = \hat{M}. \quad (49.13)$$

Из симметрии функции G_0 вытекает такое же равенство и для оператора \hat{M}_0 :

$$\hat{M}_0^\tau = \hat{M}_0. \quad (49.14)$$

На диаграммном языке равенство (49.13) означает, что каждая диаграмма, входящая в ряд для \bar{G} , либо симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через центр диаграммы, либо, если она несимметрична, входит в \bar{G} в сумме с другой диаграммой, которая получается из исходной несимметричной диаграммы путем отражения относительно вертикальной оси. Например, в (48.7a) входят симметричные диаграммы 1—6, 10, 13 и 17—20 и пары несимметричных диаграмм (7, 9), (8, 12), (11, 15), (14, 16).

Из симметрии $\bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ следует, что и $Q(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = Q(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')$, так как диаграммы для Q имеют тот же тип симметрии, что и

диаграммы для \bar{G} . Следовательно,

$$\hat{Q}^* = \hat{Q}. \quad (49.15)$$

Известно, что при транспонировании произведения операторов порядок их следования меняется на обратный: $(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots)^* = \dots\hat{C}^*\hat{B}^*\hat{A}^*$. Применим операцию транспонирования к уравнению (49.1a). С учетом (49.13) — (49.15) получаем уравнение

$$\hat{M} = \hat{M}_0 + \hat{M}\hat{Q}\hat{M}_0 = (\hat{I} + \hat{M}\hat{Q})\hat{M}_0. \quad (49.16)$$

Предположим, что нам известно какое-либо приближенное решение \hat{M}_1 уравнения (49.16), соответствующее некоторому приближенному выражению \hat{Q}_1 , т. е. известно решение уравнения

$$\hat{M}_1 = (\hat{I} + \hat{M}_1\hat{Q}_1)\hat{M}_0. \quad (49.16)$$

Мы всегда можем получить такое решение, если подставим в (49.9) некоторое приближенное выражение Q_1 вместо неизвестного точного выражения Q (например, используем в качестве Q_1 приближение Бурре). Умножим операторное уравнение (49.1a) слева на оператор $(\hat{I} + \hat{M}_1\hat{Q}_1)$:

$$(\hat{I} + \hat{M}_1\hat{Q}_1)\hat{M} = (\hat{I} + \hat{M}_1\hat{Q}_1)\hat{M}_0(\hat{I} + \hat{Q}\hat{M}).$$

Учитывая в правой части последнего равенства формулу (49.16), получаем отсюда

$$(\hat{I} + \hat{M}_1\hat{Q}_1)\hat{M} = \hat{M}_1(\hat{I} + \hat{Q}\hat{M}).$$

Наконец, перенося член $\hat{M}_1\hat{Q}_1\hat{M}$ в правую часть этого равенства, запишем его в форме

$$\hat{M} = \hat{M}_1 + \hat{M}_1(\hat{Q} - \hat{Q}_1)\hat{M}. \quad (49.17)$$

Уравнение (49.17) аналогично уравнению Дайсона (49.1a), но вместо \hat{M}_0 в нем фигурирует оператор \hat{M}_1 , а вместо \hat{Q} — разность $(\hat{Q} - \hat{Q}_1)$. Ясно, что если норма оператора $\hat{Q} - \hat{Q}_1$ меньше нормы исходного оператора \hat{Q} , то итерационный ряд уравнения (49.17) будет сходиться быстрее, чем исходный.

Применив операторное равенство (49.17) к дельта-функции, получим соответствующее уравнение для ядер операторов \hat{M} , \hat{M}_1 , \hat{Q} и \hat{Q}_1 :

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \bar{G}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \int \bar{G}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)[Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - Q_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \times \\ \times \bar{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) d^3r_1 d^3r_2. \end{aligned} \quad (49.17a)$$

В случае статистически однородной среды уравнение (49.17a) можно решить при помощи преобразования Фурье. В спектраль-

ной форме, т. е. для трансформант Фурье, решение имеет вид, аналогичный (49.8):

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = \frac{\bar{g}_1(\mathbf{x})}{1 - (8\pi^3)^3 g_1(\mathbf{x}) [q(\mathbf{x}) - q_1(\mathbf{x})]}. \quad (49.18)$$

Описанную процедуру улучшения сходимости ряда для \bar{G} можно повторять. Например, мы можем задать приближенное выражение для $Q - Q_1 = Q_2$, и, используя формулу (49.18), найти соответствующее выражение для \bar{G}_2 .

Обратимся теперь к более подробному рассмотрению приближения Бурре для статистически изотропных флюктуаций ε .

Из формулы (49.12), в которой вместо $Q(r)$ использовано приближение (49.10), получаем

$$\bar{G}_1(R) = \frac{1}{4\pi^2 R i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{x}R} x dx}{k^2 - x^2 + \frac{k^4}{x} \int_0^{\infty} \Psi_{\varepsilon}(r) e^{ikr} \sin xr dr + i\delta}. \quad (49.19)$$

Для лучшего уяснения этого результата рассмотрим сначала частный пример, когда $\Psi_{\varepsilon}(r) = \sigma_{\varepsilon}^2 \exp(-ar)$, где $\alpha^{-1} = l_{\varepsilon}$ — радиус корреляции флюктуаций ε . При таком виде Ψ_{ε} интеграл, входящий в знаменатель подынтегрального выражения в (49.19), легко берется. Чтобы вычислить затем интеграл по x , будем считать x комплексным. Тогда контур интегрирования можно замкнуть бесконечной полуокружностью в верхней полуплоскости x и значение интеграла сведется к сумме вычетов в полюсах, лежащих в области $\text{Im } x > 0$.

В рассматриваемом примере корни знаменателя легко вычисляются; они равны

$$x_1^2 = k^2 - \frac{\alpha(\alpha - 2ik)}{2} \delta, \quad x_2^2 = (k + i\alpha)^2 + \frac{\alpha(\alpha - 2ik)}{2} \delta, \quad (49.20)$$

$$\delta = 1 - \sqrt{1 + \frac{4k^4\sigma_{\varepsilon}^2}{\alpha^2(\alpha - 2ik)^2}}.$$

Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим достаточно малые флюктуации, когда $|\delta| \ll 1$, что выполняется при условии

$$\left| \frac{4k^4\sigma_{\varepsilon}^2}{\alpha^2(\alpha - 2ik)^2} \right| = \frac{4k^4\sigma_{\varepsilon}^2}{\alpha^2(\alpha^2 + 4k^2)} \ll 1. \quad (49.21)$$

В этом случае

$$\delta \approx -2k^4\sigma_{\varepsilon}^2/\alpha^2 (\alpha - 2ik)^2, \quad |\delta| \ll 1$$

и

$$x_1^2 = k^2 \left[1 + \frac{k^2\sigma_{\varepsilon}^2}{\alpha^2 + 4k^2} + i \frac{[2k^2\sigma_{\varepsilon}^2]}{\alpha(\alpha^2 + 4k^2)} + \dots \right]. \quad (49.22)$$

Потребуем, чтобы, наряду с (49.21), выполнялись условия

$$\frac{k^2 \sigma_e^2}{\alpha^2 + 4k^2} \ll 1, \quad \frac{2k^3 \sigma_e^2}{\alpha (\alpha^2 + 4k^2)} \ll 1, \quad (49.23)$$

позволяющие приближенно извлечь квадратный корень из (49.22) и записать лежащий в верхней полуплоскости корень χ_1 в виде

$$\chi_1 = k \left[1 + \frac{k^2 \sigma_e^2}{2(\alpha^2 + 4k^2)} + i \frac{k^3 \sigma_e^2}{\alpha(\alpha^2 + 4k^2)} + \dots \right]. \quad (49.24)$$

Заметим, что три ограничения (49.21) и (49.23) можно объединить в одно:

$$\frac{k^2 \sigma_e^2}{\alpha^2 + 4k^2} \ll \min \left\{ 1, \frac{\alpha}{2k}, \frac{\alpha^2}{4k^2} \right\}.$$

Воспользовавшись очевидным неравенством

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4k^2} < \min \left\{ 1, \frac{\alpha}{2k}, \frac{\alpha^2}{4k^2} \right\},$$

мы несколько усилим последнее ограничение, заменив его на требование

$$\frac{k^2 \sigma_e^2}{\alpha^2 + 4k^2} \ll \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4k^2} < \min \left\{ 1, \frac{\alpha}{2k}, \frac{\alpha^2}{4k^2} \right\},$$

при котором все три неравенства (49.21) и (49.23) будут выполнены. Последнее же ограничение сводится, очевидно, к тому, что

$$\frac{k^2}{\alpha^2} \sigma_e^2 = k^2 I_e^2 \sigma_e^2 \ll 1. \quad (49.25)$$

Что касается второго корня χ_2 , то при $|\delta| \ll 1$ он равен

$$\chi_2 = k + i\alpha + \dots \quad (49.26)$$

Если теперь взять вычеты подынтегрального выражения в интеграле по χ (49.19) в полюсах χ_1 и χ_2 , то для $\bar{G}_1(R)$ получится выражение

$$\begin{aligned} \bar{G}_1(R) &= -\frac{1-(\delta/2)}{1-\delta} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\chi_1 R}}{R} + \frac{\delta}{8\pi(1-\delta)} \frac{e^{i\chi_2 R}}{R} \approx \\ &\approx -\frac{e^{i\chi_1 R}}{4\pi R} + \frac{\delta}{8\pi} \frac{e^{i\chi_2 R}}{R}. \end{aligned} \quad (49.27)$$

Проанализируем это выражение.

Функция \bar{G}_1 описывает две расходящиеся волны, причем амплитуда второй волны много меньше, чем первой. Сравним коэффициенты ослабления обеих волн, т. е. $\operatorname{Im} \chi_1$ и $\operatorname{Im} \chi_2$:

$$\frac{\operatorname{Im} \chi_1}{\operatorname{Im} \chi_2} = \frac{k^4 \sigma_e^2}{\alpha^2 (\alpha^2 + 4k^2)}.$$

В силу условия (49.21) это отношение мало, т. е.

$$\operatorname{Im} \kappa_1 \ll \operatorname{Im} \kappa_2.$$

Таким образом, вторая волна в (49.27) не только мала по амплитуде, но и затухает значительно быстрее основной волны (затухание второй волны происходит на длине порядка размера неоднородностей $\alpha^{-1} = l_s$). Поэтому с достаточной точностью можно считать, что

$$\bar{G}_1(R) \approx -\frac{\exp(i\kappa_1 R)}{4\pi R}. \quad (49.28)$$

Это выражение отличается от G_0 лишь заменой вещественного k на комплексное κ_1 (причем $\operatorname{Im} \kappa_1 > 0$), т. е. среднее поле экспоненциально затухает. Кроме того, и вещественная часть κ_1 отличается от k : $\operatorname{Re} \kappa_1 > k$.

Оба эти результата легко объяснить: наличие неоднородностей приводит к перекачке энергии волны из детерминированной компоненты поля в случайную, т. е. к ослаблению среднего поля. Кроме того, неоднородности увеличивают фазовый путь лучей, что эквивалентно увеличению вещественной части волнового числа.

Отметим, что в силу условия (49.25) относительные изменения волнового числа малы:

$$\left| \frac{\kappa_1 - k}{k} \right| \ll 1. \quad (49.29)$$

Это позволяет провести исследование приближения Бурре, описываемого формулой (49.19), в общем виде, без конкретизации корреляционной функции Φ_e .

Полюсы κ_n подынтегрального выражения в (49.19) являются корнями уравнения

$$k^2 - \kappa_n^2 + \frac{k^4}{\kappa_n} \int_0^\infty \Phi_e(r) e^{ikr} \sin \kappa_n r dr + io = 0. \quad (49.30)$$

При этом основной интерес представляет тот, лежащий в верхней полуплоскости κ , корень κ_1 уравнения (49.30), который имеет наименьшую мнимую часть, поскольку остальные корни дают малые и быстро затухающие вклады в \bar{G}_1 . Но в силу условия (49.29) роль интегрального члена в (49.30) мала, и если им пренебречь, то мы получим $\kappa_n = k + io$, а интересующий нас корень κ_1 будет близок к этому значению. Следовательно, уравнение (49.30) можно решать последовательными итерациями: в нулевом приближении $\kappa_1 = k$, а уравнение первого приближения получится, если в интегральный член (49.30) подставить

$\kappa_n = k$:

$$k^2 - \kappa_n^2 + k^2 \int_0^\infty \psi_e(r) e^{ikr} \sin kr dr = 0. \quad (49.31)$$

Решая это уравнение и считая интегральный член малым, получаем для эффективного волнового числа $k_{\text{эфф}} = \kappa$, выражение

$$\begin{aligned} k_{\text{эфф}} &= k_1 + ik_2 = k \left[1 + \frac{1}{2} k \int_0^\infty \sin kr e^{ikr} \psi_e(r) dr \right] = \\ &= k \left[1 + \frac{k}{4} \int_0^\infty \sin 2kr \psi_e(r) dr + i \frac{k}{2} \int_0^\infty \sin^2 kr \psi_e(r) dr \right]. \end{aligned} \quad (49.32)$$

Удобно выразить $k_{\text{эфф}}$ через спектральное разложение функции $\psi_e(r)$, которое для статистически изотропных флюктуаций определяется формулой (3.11):

$$\psi_e(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \Phi_e(\kappa') \sin(\kappa' r) \kappa' d\kappa'. \quad (49.33)$$

Подставим (49.33) в (49.32) и изменим порядок интегрирования по r и κ' . С учетом формул

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx &= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2, \\ \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx &= \frac{\pi}{2} \theta(a-b) = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } a > b, \\ 0 & \text{при } a < b \end{cases} \end{aligned}$$

получаем после выполнения интегрирования по r

$$\begin{aligned} k_{\text{эфф}} &= k \left[1 + \frac{\pi k}{4} \int_0^\infty \kappa \ln \left(\frac{2k+\kappa}{2k-\kappa} \right)^2 \Phi_e(\kappa) d\kappa + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\pi^2 k}{2} \int_0^{2k} \Phi_e(\kappa) \kappa d\kappa \right]. \end{aligned} \quad (49.34)$$

В рассматриваемом приближении усредненная функция Грина, согласно (49.19), равна

$$\bar{G}_1(R) \approx \frac{1}{4i\pi^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa R} \kappa d\kappa}{k_{\text{эфф}}^2 - \kappa^2} = -\frac{e^{ik_{\text{эфф}} R}}{4\pi R}. \quad (49.35)$$

Таким образом, мы пришли к тому, что при $R \gg l_e$ средняя функция Грина имеет тот же вид, что и в однородной среде,

но с заменой исходного волнового числа k на $k_{\text{эфф}}$. Величину $k_{\text{эфф}}/k$ можно трактовать как эффективный показатель преломления случайно-неоднородной среды. Согласно (49.34)

$$\begin{aligned} n_{\text{эфф}} &= n_1 + i n_2, \\ n_1 &= 1 + \frac{\pi k}{4} \int_0^{\infty} \ln \left(\frac{2k+x}{2k-x} \right)^2 \Phi_e(x) x dx, \\ n_2 &= \frac{\pi^2 k}{2} \int_0^{2k} \Phi_e(x) x dx. \end{aligned} \quad (49.36)$$

Из этих формул видно, что $n_1 > 1$ при любом виде спектральной плотности $\Phi_e(x)$ (так как $\ln \left(\frac{2k+x}{2k-x} \right)^2 > 0$), а n_2 всегда положительно. Объяснение этому уже было дано выше при обсуждении результатов расчета с корреляционной функцией $\Psi_e \sim \exp(-ar)$.

Согласно (49.34) коэффициент ослабления среднего поля по мощности равен

$$\gamma = 2 \operatorname{Im}(k_{\text{эфф}}) = \pi^2 k^4 \int_0^{2k} \Phi_e(x) x dx. \quad (49.37)$$

Легко убедиться в том, что эта величина совпадает с коэффициентом рассеяния σ_0 , вычисленным в борновском приближении для статистически изотропных флуктуаций e (см. (26.13)):

$$\sigma_0 = \frac{\pi k^4}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2k} \Phi_e \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta d\theta d\varphi = \pi^2 k^4 \int_0^{\pi} \Phi_e \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta d\theta.$$

Принимая здесь $2k \sin(\theta/2) = x$ за новую переменную интегрирования, мы получаем правую часть (49.37), т. е. $\gamma = \sigma_0$.

Если обратиться к случаю крупномасштабных неоднородностей, т. е. считать, что $k \gg \kappa_m$, то верхний предел интегрирования в (49.37) можно заменить на бесконечность и эта формула перейдет в полученную ранее в марковском приближении формулу (45.6). В выражении (49.36) для n_1 можно при $k \gg \kappa_m$ считать, что

$$\frac{1}{4} \ln \left(\frac{2k+x}{2k-x} \right)^2 \approx \frac{x}{2k},$$

и, следовательно,

$$n_1 \approx 1 + \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \Phi_e(x) x^2 dx.$$

По порядку величины в этом случае имеем

$$n_1 - 1 \sim \frac{x_m}{k} n_2 \ll \gamma,$$

т. е. изменение (по сравнению с волновым числом для однородной среды) действительной части волнового числа мало по сравнению с изменением его мнимой части.

Остановимся теперь на вопросе о границах применимости приближения Бурре. В качестве первого приближения мы рассмотрели ядро массового оператора Q в приближении (49.10). Возьмем теперь следующее приближение для Q , в которое включим следующую бесконечную подпоследовательность диаграмм из точного ряда для Q :

$$(49.38)$$

Таким образом, функция Q_2 отличается от Q_1 тем, что содержит вместо G_0 среднюю функцию Грина \bar{G}_1 , найденную в приближении Бурре:

$$Q_2(r) = k^4 \bar{G}_1(r) \psi_0(r).$$

И в этом случае полюсы функции Грина будут определяться уравнением, аналогичным (49.30), но под знаком интеграла вместо e^{ikr} будет фигурировать $e^{ik_{\text{эфф}} r}$:

$$x^2 = k^2 + \frac{k^4}{\pi} \int_0^\infty \psi_0(r) e^{ik_{\text{эфф}} r} \sin kr dr. \quad (49.39)$$

Мы уже знаем, что в первом приближении корень этого уравнения равен $x_1 = k_{\text{эфф}}$. Поэтому в правую часть (49.39) вместо k можно подставить найденное выше $k_{\text{эфф}}$:

$$x_1^2 = k^2 + \frac{k^4}{k_{\text{эфф}}} \int_0^\infty \psi_0(r) e^{ik_{\text{эфф}} r} \sin (k_{\text{эфф}} r) dr. \quad (49.40)$$

Нам следует теперь сравнить это выражение с

$$x_1^2 = k^2 + k^2 \int_0^\infty \Phi_0(r) e^{ikr} \sin kr dr. \quad (49.41)$$

Положим $k_{\text{эфф}} = k + \Delta k$, где согласно (49.29) $|\Delta k| \ll k$. Тогда $1/k_{\text{эфф}} \approx 1/k - \Delta k/k^2$. Подставим это значение $1/k_{\text{эфф}}$ в (49.40) и

после этого вычтем (49.41) из (49.40). Заменяя синус по формуле Эйлера на разность экспонент, получаем

$$\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_1^2 = \frac{k^3}{2i} \int_0^\infty \psi_e(r) (e^{2ik_{\text{эфф}} r} - e^{-2ikr}) dr - \\ - \frac{k^3 \Delta k}{2i} \int_0^\infty \psi_e(r) [e^{2ik_{\text{эфф}} r} - 1] dr.$$

Чтобы оценить эту разность, снова воспользуемся модельной корреляционной функцией $\psi_e(r) = \sigma^2 \exp(-ar)$. Интегралы при этом легко берутся и выражение $\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_1^2$ приводится к виду

$$\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_1^2 = \Delta k \left[\frac{k^3 \sigma^2}{(\alpha - 2ik)(\alpha - 2ik_{\text{эфф}})} - \frac{k^2 k_{\text{эфф}} \sigma^2}{\alpha(\alpha - 2ik)} \right].$$

Так как мы оцениваем разность $\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_1^2$ с точностью до величин первого порядка по Δk , можно положить в квадратных скобках $k_{\text{эфф}} \approx k$, и тогда

$$\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_1^2 \approx i \Delta k \frac{2k^4 \sigma^2}{\alpha(\alpha - 2ik)^3},$$

или, поскольку $\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_1^2 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1) \approx 2k(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$,

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \approx i \Delta k \frac{k^3 \sigma^2}{\alpha(\alpha - 2ik)^3}. \quad (49.42)$$

Для того чтобы найденный в приближении Бурре сдвиг Δk имел смысл, необходимо потребовать малости по модулю по сравнению с $|\Delta k|$ поправки следующего приближения $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, т. е.

$$\left| \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\Delta k} \right| = \frac{k^3 \sigma^2}{\alpha(\alpha^2 + 4k^2)} \ll 1. \quad (49.43)$$

Но это условие совпадает со вторым условием (49.23) и заведомо выполняется, если удовлетворено условие (49.25), при котором были выведены основные формулы в приближении Бурре. Таким образом, можно считать, что полученные выше в приближении Бурре формулы для \bar{G} справедливы при выполнении условия

$$(kl_e)^2 \sigma^2 \ll 1,$$

где l_e — радиус корреляции случайного поля \tilde{e} .

Следует отметить, что оценка (49.43) получена из сравнения приближения Бурре не с точным решением, которое неизвестно, а со следующим приближением (правда, включающим, как это видно из (49.38), бесконечное число диаграмм для Q). Поэтому это условие нельзя считать достаточным, но оно является необходимым.

Помимо приближения Бурре известен еще целый ряд других приближенных решений, а также ряд более сложных уравнений (в том числе и нелинейных) для средней функции Грина. Более подробно с ними можно ознакомиться по работам [2, 4—6], а дальнейшие литературные ссылки можно найти в обзоре [7]. С работами, посвященными применению теории многократного рассеяния к различным задачам распространения электромагнитного излучения в случайно-неоднородных средах, можно ознакомиться по обзору [8].

§ 50. Функция когерентности поля.

Оптическая теорема и уравнение переноса излучения

Выше было получено уравнение Бете—Солпитера (48.26а) для функции когерентности

$$\Gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}''; \mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0'') = \langle G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0') G^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_0'') \rangle$$

поля двух точечных источников; оно имеет вид

$$\Gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}''; \mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0'') = \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0') \bar{G}^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_0'') +$$

$$+ \int \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \bar{G}^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_2) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0'') \times d^3 r_1 \dots d^3 r_4. \quad (50.1)$$

Разумеется, от него нетрудно перейти и к уравнению для функции когерентности поля $u(\mathbf{r})$, создаваемого в неоднородной среде произвольным распределением объемных источников $j(\mathbf{r})$. Поле $u(\mathbf{r})$ выражается через $j(\mathbf{r})$ формулой

$$u(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) j(\mathbf{r}_0) d^3 r_0.$$

Отсюда следует, что среднее поле равно

$$\bar{u}(\mathbf{r}) = \int \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) j(\mathbf{r}_0) d^3 r_0. \quad (50.2)$$

а функция когерентности поля получается усреднением произведения $u(\mathbf{r}') u^*(\mathbf{r}'')$:

$$\Gamma_u(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \langle u(\mathbf{r}') u^*(\mathbf{r}'') \rangle =$$

$$= \int \langle G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0') G^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_0'') \rangle j(\mathbf{r}_0') j^*(\mathbf{r}_0'') d^3 r_0' d^3 r_0'' = \\ = \int \Gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}''; \mathbf{r}_0', \mathbf{r}_0'') j(\mathbf{r}_0') j^*(\mathbf{r}_0'') d^3 r_0' d^3 r_0''.$$

Поэтому, если умножить уравнение (50.1) на $j(\mathbf{r}_0') j^*(\mathbf{r}_0'')$ и проинтегрировать по \mathbf{r}_0' и \mathbf{r}_0'' , то результатом будет уравнение

$$\Gamma_u(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \bar{u}(\mathbf{r}') \bar{u}^*(\mathbf{r}'') + \int \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \bar{G}^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_2) \times \\ \times K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Gamma_u(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) d^3 r_1 \dots d^3 r_4, \quad (50.3)$$

определенную функцию когерентности поля, возбуждаемого произвольным детерминированным распределением источников $j(\mathbf{r})$.

В отличие от уравнения Дайсона, уравнение Бете—Солпитера (50.1) не удается разрешить относительно Γ .

В этом параграфе мы займемся исследованием связи между уравнением Бете—Солпитера и УПИ—феноменологическим уравнением переноса излучения (45.25). Выше, в § 45, такая связь была установлена в том частном случае, когда для описания распространения волн использовалось приближение параболического уравнения, а для УПИ—малоугловое приближение. Теперь задача ставится в общем случае, но для ее упрощения мы ограничимся статистически однородной случайной средой, а функцию когерентности $\Gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ будем рассматривать только в области, свободной от источников, т. е. там, где $j(\mathbf{r}) = 0$.

Преобразуем сначала (50.3) в интегро-дифференциальное уравнение. Для этого вспомним, что функция \bar{G} удовлетворяет уравнению (49.3), которое мы запишем в виде

$$\hat{D}(\mathbf{r}) \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (50.4)$$

где $\hat{D}(\mathbf{r})$ —оператор Дайсона:

$$\hat{D}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \mathbf{k}^2 - \hat{Q}_r, \quad (50.5)$$

а \hat{Q}_r —массовый оператор, т. е. интегральный оператор с ядром $Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$\hat{Q}_r f(\mathbf{r}) = \int Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

Если применить оператор $\hat{D}(\mathbf{r})$ к формуле (50.2), то в силу (50.4) получим

$$\hat{D}(\mathbf{r}) \bar{u}(\mathbf{r}) = j(\mathbf{r}),$$

а значит, в области, свободной от источников, справедливо уравнение

$$\hat{D}(\mathbf{r}) \bar{u}(\mathbf{r}) = 0. \quad (50.6)$$

Применим теперь оператор $\hat{D}(\mathbf{r}')$ к уравнению (50.3). С учетом (50.6) и (50.4) находим

$$\begin{aligned} \hat{D}(\mathbf{r}') \Gamma_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') &= \\ &= \int \bar{G}^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_3) K(\mathbf{r}', \mathbf{r}_3; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Gamma_a(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) d^3 r_3 d^3 r_3 d^3 r_4. \end{aligned} \quad (50.7)$$

Точно так же, если применить к (50.3) оператор $\hat{D}^*(\mathbf{r}'')$, то с учетом уравнений, комплексно сопряженных с (50.4) и (50.6),

получим

$$\hat{D}^*(\mathbf{r}'') \Gamma_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = - \int \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}''; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Gamma_a(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) d^3 r_1 d^3 r_3 d^3 r_4. \quad (50.8)$$

Вычтем уравнение (50.8) из (50.7). Если обозначить при этом через \mathbf{r}_0 переменные интегрирования \mathbf{r}_3 в (50.7) и \mathbf{r}_1 в (50.8), то эта разность запишется в виде

$$[\hat{D}(\mathbf{r}') - \hat{D}^*(\mathbf{r}'')] \Gamma_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \int [\bar{G}^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_0) K(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) - \bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) K(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}''; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)] \Gamma_a(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) d^3 r_0 d^3 r_3 d^3 r_4. \quad (50.9)$$

Но согласно определению (50.5)

$$[\hat{D}(\mathbf{r}') - \hat{D}^*(\mathbf{r}'')] \Gamma_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = [\Delta' - \Delta''] \Gamma_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') - \int d^3 r_0 [Q(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \Gamma_a(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'') - Q^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_0) \Gamma_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)]. \quad (50.10)$$

Введем теперь, как уже неоднократно делалось, новые переменные $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}''$. Тогда $\Delta' - \Delta'' = 2\nabla_R \nabla_r$. Функцию Γ_a , выраженную через переменные \mathbf{R} , \mathbf{r} , будем обозначать через $\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r})$:

$$\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \equiv \Gamma_a(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r}).$$

Перейдя к новым переменным и подставив (50.10) в (50.9) с учетом статистической однородности среды ($\bar{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \bar{G}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')$, $Q(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = Q(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')$), находим

$$\begin{aligned} & 2\nabla_R \nabla_r \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) - \\ & - \int d^3 r_0 \left[Q\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2} - \mathbf{r}_0\right) \Gamma\left(\frac{\mathbf{R}}{2} + \frac{\mathbf{r}_0}{2} - \frac{\mathbf{r}}{4}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) - \right. \\ & \left. - Q^*\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2} - \mathbf{r}_0\right) \Gamma\left(\frac{\mathbf{R}}{2} + \frac{\mathbf{r}_0}{2} + \frac{\mathbf{r}}{4}, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2} - \mathbf{r}_0\right) \right] = \\ & = \int \left[\bar{G}^*\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2} - \mathbf{r}_0\right) K\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{r}_0; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4\right) - \right. \\ & \left. - \bar{G}\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2} - \mathbf{r}_0\right) K\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4\right) \right] \Gamma\left(\frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2}, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4\right) \times \\ & \times d^3 r_0 d^3 r_3 d^3 r_4. \quad (50.11) \end{aligned}$$

Выполним в различных слагаемых (50.11) замены переменных интегрирования, принимая каждый раз за независимую переменную аргумент той из функций Q , Q^* , \bar{G}^* или \bar{G} , которая входит в данное слагаемое, и, кроме того, обозначая $\mathbf{R}' = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)$

и $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4$. Уравнение (50.11) принимает после этого вид

$$\begin{aligned} 2\nabla_R \nabla_r \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) - \int \left[Q(\mathbf{r}'') \Gamma\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}'}{2}, \mathbf{r} - \mathbf{r}''\right) - \right. \\ \left. - Q^*(\mathbf{r}'') \Gamma\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}'}{2}, \mathbf{r} + \mathbf{r}''\right) \right] d^3 r'' = \\ = \int \left[\bar{G}^*(\mathbf{r}'') K\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2} - \mathbf{r}''; \mathbf{R}' + \frac{\mathbf{r}'}{2}, \mathbf{R}' - \frac{\mathbf{r}'}{2}\right) - \right. \\ \left. - \bar{G}(\mathbf{r}'') K\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2} - \mathbf{r}'', \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}; \mathbf{R}' + \frac{\mathbf{r}'}{2}, \mathbf{R}' - \frac{\mathbf{r}'}{2}\right) \right] \times \\ \times \Gamma(\mathbf{R}', \mathbf{r}') d^3 R' d^3 r' d^3 r''. \quad (50.12) \end{aligned}$$

Отметим, что (50.12)—это *точное* следствие уравнения Бете—Солпитера.

Рассмотрим связь уравнения (50.12) с законом сохранения энергии, который во всякой области, свободной от источников, записывается в виде (см. (39.2))

$$\operatorname{div} \mathcal{S}(\mathbf{R}) = 0,$$

где

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2ik} [u^* \nabla_R u - u \nabla_R u^*].$$

Усредня эти выражения, получаем

$$\operatorname{div} \langle \mathcal{S}(\mathbf{R}) \rangle = 0, \quad (50.13)$$

$$\langle \mathcal{S}(\mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{2ik} \langle u^*(\mathbf{R}) \nabla_R u(\mathbf{R}) - u(\mathbf{R}) \nabla_R u^*(\mathbf{R}) \rangle.$$

Средняя плотность потока энергии $\langle \mathcal{S} \rangle$ может быть выражена через функцию $\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r})$. Действительно, дифференцируя по \mathbf{r} равенство

$$\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \langle u(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2) u^*(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2) \rangle,$$

находим

$$\nabla_r \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \langle u^*(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2) \nabla_R u(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2) - u(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2) \nabla_R u^*(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2) \rangle.$$

Полагая здесь $\mathbf{r} = 0$, получаем

$$[\nabla_r \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r})]_{\mathbf{r}=0} = \frac{1}{2} \langle u^*(\mathbf{R}) \nabla_R u(\mathbf{R}) - u(\mathbf{R}) \nabla_R u^*(\mathbf{R}) \rangle,$$

так что

$$\langle \mathcal{S}(\mathbf{R}) \rangle = (ik)^{-1} [\nabla_r \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r})]_{\mathbf{r}=0}. \quad (50.14)$$

Вернемся к уравнению (50.12). Если положить в нем $\mathbf{r} = 0$, то для величины $2\nabla_R \nabla_r \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r})$, используя (50.14) и (50.13), получим

$$2\nabla_R \nabla_r \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r})|_{\mathbf{r}=0} = 2\nabla_R (ik \langle \mathcal{S}(\mathbf{R}) \rangle) = 0.$$

Поэтому уравнение (50.12) принимает при $r=0$ вид

$$\begin{aligned} \int \left[Q(r'') \Gamma \left(R - \frac{r'}{2}, -r'' \right) - Q^*(r'') \Gamma \left(R - \frac{r'}{2}, r'' \right) \right] d^3 r'' = \\ = \int \left[\bar{G}^*(r'') K \left(R, R - r''; R' + \frac{r'}{2}, R' - \frac{r'}{2} \right) - \right. \\ \left. - \bar{G}(r'') K \left(R - r'', R; R' + \frac{r'}{2}, R' - \frac{r'}{2} \right) \right] \Gamma(R', r') d^3 r' d^3 R' d^3 r''. \end{aligned} \quad (50.15)$$

Обратим теперь внимание на следующее. Функция Γ в (50.15) зависит от выбора поля источников $j(r)$, тогда как функции Q , \bar{G} и K от выбора $j(r)$ не зависят. Поскольку соответствующим выбором источников можно произвольно изменить функцию Γ , не меняя функций Q , \bar{G} и K , уравнение (50.15) должно выполняться тождественно относительно Γ . Записав левую часть (50.15) в виде трехкратного интеграла:

$$\begin{aligned} \int \left[Q(r'') \delta \left(R - \frac{r''}{2} - R' \right) \delta(r'' + r') - \right. \\ \left. - Q^*(r'') \delta \left(R - \frac{r''}{2} - R' \right) \delta(r'' - r') \right] \Gamma(R', r') d^3 r' d^3 R' d^3 r'', \end{aligned}$$

подставив это выражение в (50.15) и приравняв коэффициенты при $\Gamma(R', r')$ в левой и правой частях, получаем

$$\begin{aligned} Q(-r') \delta \left(R - R' + \frac{r'}{2} \right) - Q^*(r') \delta \left(R - R' - \frac{r'}{2} \right) = \\ = \int \left[\bar{G}(r'') K \left(R - r'', R; R' + \frac{r'}{2}, R' - \frac{r'}{2} \right) - \right. \\ \left. - \bar{G}^*(r'') K \left(R, R - r''; R' + \frac{r'}{2}, R' - \frac{r'}{2} \right) \right] d^3 r''. \end{aligned} \quad (50.16)$$

Это равенство, связывающее среднюю функцию Грина с ядрами массового оператора и оператора интенсивности, носит название *оптической теоремы* [9].

Физический смысл оптической теоремы заключается в следующем. Ослабление среднего поля выражается через $\text{Im } k_{\text{эфф}}$, т. е. через $\text{Im } Q$, но вызывается оно не поглощением (среда прозрачна), а *рассеянием*, которое описывается оператором \hat{K} . Поэтому между этими величинами должна существовать определенная связь. Эта связь и выражается оптической теоремой. Заметим, что, когда для \bar{G} , Q и K используются какие-либо приближенные выражения, они должны удовлетворять соотношению (50.16), так как в противном случае может возникнуть противоречие с законом сохранения энергии.

Вернемся к уравнению (50.12). Нашей следующей задачей будет преобразование этого уравнения в УПИ.

Воспользуемся приближением (49.38) для Q :

$$Q(\mathbf{r}) = k^4 \Phi_e(\mathbf{r}) \bar{G}(\mathbf{r}), \quad (50.17)$$

где \bar{G} — средняя функция Грина в приближении Бурре. Для оператора интенсивности используем первый член разложения

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = k^4 \Phi_e(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4). \quad (50.18)$$

Такая аппроксимация ядра оператора интенсивности носит название «лестничного» приближения. Объясняется это название тем, что если в разложении (48.25) использовать лишь первый член ряда (48.22) для K , то диаграммное представление функции Γ будет иметь вид «лестницы»:

$$\bar{G}(\mathbf{r}) = \dots + \text{[step diagram]} + \text{[step diagram]} + \text{[step diagram]} + \dots + \dots$$

Подставив (50.17) и (50.18) в уравнение (50.12), получаем

$$2\nabla_R \nabla_r \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \\ = k^4 \int \left\{ \bar{G}(\mathbf{r}') [\psi_e(\mathbf{r}') - \psi_e(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \Gamma\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}'}{2}, \mathbf{r} - \mathbf{r}'\right) - \right. \\ \left. - \bar{G}^*(\mathbf{r}') [\psi_e(\mathbf{r}') - \psi_e(\mathbf{r} + \mathbf{r}')] \Gamma\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}'}{2}, \mathbf{r} + \mathbf{r}'\right) \right\} d^3 r'. \quad (50.19)$$

Прежде всего, отсюда видно, что при $\mathbf{r} = 0$ правая часть обращается в нуль, т. е. в рассматриваемом приближении закон сохранения энергии и оптическая теорема удовлетворяются (иными словами, приближения (50.17) и (50.18) согласованы между собой и не вызывают нарушения закона сохранения энергии). Кроме того, как видно из (50.19), в уравнение для Γ входят лишь разности $\Phi_e(\mathbf{r}') - \Phi_e(\mathbf{r} \pm \mathbf{r}')$, которые можно выразить через структурные функции $D_e(\mathbf{r})$. Это означает, что крупномасштабные неоднородности не влияют на функцию когерентности поля (напомним, что в приближении марковского случайного процесса дело обстояло точно так же, § 45).

Очевидно, необходимым условием применимости приближенного уравнения (50.19) должно быть полученное в предыдущем параграфе условие применимости приближения Бурре. Рассмотрим в этой связи характерные масштабы функции $\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ по обоим ее аргументам.

Как мы знаем из предыдущего параграфа, среднее поле экспоненциально убывает по мере удаления от источника, причем характерный масштаб убывания равен $(\text{Im } k_{e,\text{eff}})^{-1} \equiv d$. Так как ослабление среднего поля обусловлено рассеянием на неоднородностях, то ясно, что тот же масштаб d будет характерным продольным масштабом функции Γ по переменной \mathbf{R} . Характер-

ным поперечным масштабом Γ по R может являться диаметр пучка излучения или же характерное расстояние, на котором заметно меняются такие усредненные характеристики среды, как σ^2 или радиус корреляции l_s .

Что касается характерного масштаба r_k функции $\Gamma(R, r)$ по разностной переменной r , то он может быть порядка либо радиуса корреляции l_s неоднородностей среды, либо радиуса первой зоны Френеля (что имело место в области применимости МПВ), либо быть еще меньше (как при рассмотренных в гл. VII сильных флуктуациях поля). Во всяком случае, всегда можно считать, что r_k намного меньше, чем характерный масштаб d функции Γ по переменной R .

Такое соотношение между масштабами функции Γ можно использовать для того, чтобы еще несколько упростить уравнение (50.19). Действительно, разность $|\psi_e(r') - \psi_e(r \pm r')|$ при $r \approx r_s$ заметно отлична от нуля лишь при $r < (l_s + r) \sim (l_s + r_k)$ (рис. 69). Но, как мы предположили, величина $(l_s + r_k)$ мала по сравнению с характерным масштабом d функции $\Gamma(R, r)$ по переменной R . Это означает, что в (50.19) можно считать $\Gamma\left(R - \frac{r'}{2}, r \pm r'\right) \approx \Gamma(R, r \pm r')$. Тогда уравнение (50.19) принимает вид

$$2\nabla_R \nabla_r \Gamma(R, r) = k^4 \int \bar{G}(r') [\psi_e(r') - \psi_e(r - r')] \Gamma(R, r - r') dr' - \\ - k^4 \int \bar{G}^*(r') [\psi_e(r') - \psi_e(r + r')] \Gamma(R, r + r') dr'.$$

Сделаем во втором интеграле замену переменной интегрирования $r' \rightarrow -r'$. Так как $\bar{G}^*(-r') = \bar{G}^*(r')$ и $\psi_e(-r') = \psi_e(r')$, получим уравнение

$$2\nabla_R \nabla_r \Gamma(R, r) = k^4 \int [\bar{G}(r') - \bar{G}^*(r')] \times \\ \times [\psi_e(r') - \psi_e(r - r')] \Gamma(R, r - r') dr'. \quad (50.20)$$

В случае, если $\bar{u}(r) = 0$ (тогда $\Gamma(R, r)$ совпадает с корреляционной функцией поля), уравнение (50.20) эквивалентно уравнению переноса излучения. Убедимся в этом. Введем трансфор-

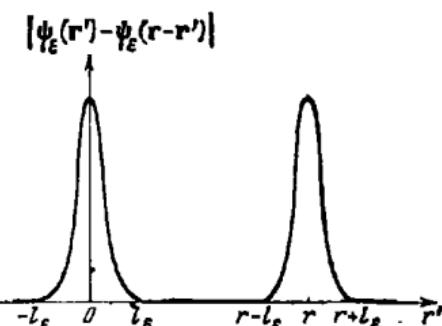


Рис. 69.

манту Фурье функции $\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ по разностной переменной¹⁾:

$$\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \int f(\mathbf{R}, \mathbf{u}) \exp(i\mathbf{u}\mathbf{r}) d^3u, \quad (50.21)$$

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{u}) = (8\pi^3)^{-1} \int \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{u}\mathbf{r}) d^3r. \quad (50.22)$$

Для облегчения перехода к трансформантам Фурье в уравнении (50.20) вычислим предварительно трехмерную спектральную плотность средней функции Грина \bar{G} , которую мы возьмем в приближении

$$\bar{G}(r) = -\frac{\exp(ik_{\text{эфф}} r)}{4\pi r}, \quad (50.23)$$

где $k_{\text{эфф}} = k_1 + ik_1$ и $k_1 \gg k_2$. Как нетрудно убедиться, спектральная плотность разности $\bar{G}(\mathbf{r}) - \bar{G}^*(\mathbf{r})$ равна

$$\begin{aligned} z(u) = z(u) &= \frac{1}{8\pi^3} \int [\bar{G}(\mathbf{r}') - \bar{G}^*(\mathbf{r}')] \exp(-i\mathbf{u}\mathbf{r}') d^3r' = \\ &= \frac{2k_1 k_2}{4\pi^3 i [(k_1^2 - k_2^2 - u^2)^2 + 4k_1^2 k_2^2]}. \end{aligned} \quad (50.24)$$

Покажем, что в силу неравенства $k_2 \ll k_1$ функцию (50.24) можно приближенно заменить на дельта-функцию. Максимум модуля функции $z(u)$ соответствует $u = u_0 = \sqrt{k_1^2 - k_2^2}$, причем в этой точке $z(u_0) = 1/8\pi^3 i k_1 k_2$. Вместе с тем при $u^2 = k_1^2 - k_2^2 \mp 2k_1 k_2$, т. е. при $u \approx u_0 \mp k_2$, получаем $z(u_0 \mp k_2) = 1/4 z(u_0)$. Таким образом, $z(u)$ падает в два раза при сдвиге аргумента от u_0 на малую величину $k_2 = \text{Im } k_{\text{эфф}} = 1/d$. Легко проверить, далее, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k_1 k_2}{x^2 + 4k_1^2 k_2^2} dx = 1.$$

Поэтому, если (как мы уже предположили) масштаб d велик по сравнению с масштабами функции $\Psi_e(\mathbf{r}')$ и $\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$ по \mathbf{r}' , то функцию

$$\frac{1}{\pi} \frac{2k_1 k_2}{(k_1^2 - k_2^2 - u^2)^2 + 4k_1^2 k_2^2},$$

сосредоточенную в узком интервале $\Delta u \sim 2k_2$, можно заменить на $\delta(k_1^2 - k_2^2 - u^2)$; тогда получим

$$z(u) \rightarrow \frac{1}{4\pi^3 i} \delta(k_1^2 - k_2^2 - u^2).$$

¹⁾ Если $\bar{u} \neq 0$, то предварительно следует вычесть из Γ произведение средних полей с тем, чтобы брать трансформанту Фурье от корреляционной функции (см. [10] и задачу 1).

Используя формулу $\delta(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}_0^2) = \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)}{2x_0}$ и учитывая, что $\delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = 0$ (поскольку $\mathbf{x} > 0$ и $x_0 > 0$), можно написать

$$z(\mathbf{x}) \approx \frac{\delta(\mathbf{x} - \sqrt{k_1^2 - k_2^2})}{8\pi^2 i \sqrt{k_1^2 - k_2^2}},$$

а если учесть малость k_2 , то

$$z(\mathbf{x}) \approx \frac{\delta(\mathbf{x} - k_1)}{8\pi^2 i k_1}. \quad (50.25)$$

Теперь легко выполнить преобразование Фурье уравнения (50.20). Подставив в него выражение

$$\bar{G}(\mathbf{r}') - \bar{G}^*(\mathbf{r}') = \int \frac{\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{k}_1)}{8\pi^2 i k_1} \exp(i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{r}') d^3 x'$$

и разложение (50.21), после несложных вычислений с учетом формулы

$$\int \psi_e(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{r}') d^3 r' = 8\pi^3 \Phi_e(\mathbf{x})$$

получаем

$$2i \nabla_R \int \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{x} f(\mathbf{R}, \mathbf{x}) d^3 x =$$

$$= -\frac{i\pi k^4}{k_1} \int d^3 x \exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}) f(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \int d^3 x' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{k}_1) \Phi_e(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \\ + \frac{i\pi k^4}{k_1} \int d^3 x' \exp(i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{r}) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{k}_1) \int d^3 x f(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \Phi_e(\mathbf{x}' - \mathbf{x}).$$

Меняя в последнем интеграле обозначения переменных интегрирования, $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$, и приравнивая коэффициенты при $\exp(i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r})$, получаем уравнение

$$\mathbf{x} \nabla_R f(\mathbf{R}, \mathbf{x}) = -\frac{\pi k^4}{2k_1} f(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \int d^3 x' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{k}_1) \Phi_e(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \\ + \frac{\pi k^4}{2k_1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{k}_1) \int d^3 x' f(\mathbf{R}, \mathbf{x}') \Phi_e(\mathbf{x}' - \mathbf{x}).$$

В первом члене в правой части этого уравнения введем по переменной интегрирования \mathbf{x}' сферические координаты, положив $\mathbf{x}' = \mathbf{x}' \mathbf{n}'$, где \mathbf{n}' — единичный вектор. Тогда $d^3 x' = \mathbf{x}'^2 d\mathbf{x}' d\Omega(\mathbf{n}')$ и уравнение принимает вид

$$\mathbf{x} \nabla_R f(\mathbf{R}, \mathbf{x}) = -\frac{\pi k^4}{2k_1} k_1^2 f(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \oint \Phi_e(k_1 \mathbf{n}' - \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{n}') + \\ + \frac{\pi k^4}{2k_1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{k}_1) \int d^3 x' f(\mathbf{R}, \mathbf{x}') \Phi_e(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (50.26)$$

Будем искать его решение в следующем виде:

$$f(R, n) = \delta(n - k_1) J(R, n) \frac{1}{k_1^2}, \quad (50.27)$$

где $n = kn$.

Подстановка (50.27) в (50.26) дает для $J(R, n)$ следующее уравнение:

$$kn \delta(n - k_1) \nabla_R J(R, n) = -\frac{\pi k^4 k_1}{2} \delta(n - k_1) J(R, n) \times \\ \times \oint \Phi_s(k_1 n' - kn) do(n') + \frac{\pi k^4}{2k_1} \delta(n - k_1) \int_0^\infty n'^2 dx' \oint do(n') \times \\ \times \delta(n' - k_1) J(R, n') \Phi_s(kn - n' n).$$

Так как имеет место равенство $\phi(n) \delta(n - k_1) = \phi(k_1) \delta(n - k_1)$, можно везде заменить n и n' на k_1 , после чего сравнение коэффициентов при дельта-функциях приводит к уравнению

$$n \nabla_R J(R, n) = -\oint \frac{\pi k^4}{2} \Phi_s(k_1(n - n')) do(n') J(R, n) + \\ + \oint \frac{\pi k^4}{2} \Phi_s(k_1(n - n')) J(R, n') do(n'), \quad (50.28)$$

где учтена четность функции Φ_s .

Это уравнение представляет собой не что иное, как УПИ (45.25), причем коэффициент ослабления равен

$$\alpha = \oint \frac{\pi k^4}{2} \Phi_s(k_1 n') do(n'), \quad (50.29)$$

а эффективное сечение рассеяния из единицы объема в единичный телесный угол имеет вид

$$\sigma(n, n') = \frac{\pi k^4}{2} \Phi_s(k_1(n - n')). \quad (50.30)$$

Действительно, с использованием этих обозначений уравнение (50.28) принимает стандартную форму УПИ [14]:

$$n \nabla_R J(R, n) = -\alpha J(R, n) + \oint \sigma(n, n') J(R, n') do(n'). \quad (50.31)$$

Из сопоставления (50.29) и (50.30) видно, что

$$\alpha = \oint \sigma(n, n') do(n'), \quad (50.32)$$

т. е. все ослабление поля обусловлено рассеянием. Сравнение формулы (50.30) с полученной в борновском приближении формулой (26.13) показывает, что значение σ , определяемое выражением (50.30), отличается от значения в борновском приближении заменой k на k_1 . Мы видели, что отличие k_1 от k обуслов-

лено влиянием многократного рассеяния. Однако в рассмотренном в § 49 приближении отличие k_1 от k мало, и, если $\Phi_s(x)$ — достаточно плавная функция, этим отличием можно пренебречь.

Принципиально важная сторона полученных результатов заключается в следующем. В феноменологической теории переноса излучения, яркость, или лучевая интенсивность, \mathcal{I} никак не связана с параметрами, описывающими волновое поле. Теперь мы получили возможность установить эту связь. Комбинируя формулы (50.21) и (50.27), находим, что

$$\Gamma(R, r) = \frac{1}{k_1^2} \int e^{ik_1 r n} \delta(x - k_1) \mathcal{I}(R, n) x^3 dx d\omega(n),$$

или, после интегрирования по x ,

$$\Gamma(R, r) = \oint \mathcal{I}(R, n) e^{ik_1 r n} d\omega(n). \quad (50.33)$$

Таким образом, лучевая интенсивность представляет собой угловой спектр функции когерентности. Положив в (50.33) $r = 0$, мы получаем формулу, связывающую среднюю интенсивность $\bar{\mathcal{I}} = \langle |u|^2 \rangle = \Gamma(R, 0)$ с лучевой интенсивностью:

$$\bar{\mathcal{I}}(R) = \oint \mathcal{I}(R, n) d\omega(n). \quad (50.34)$$

Далее, продифференцировав (50.33) по r , положим затем $r = 0$:

$$\nabla_r \Gamma(R, r) \Big|_{r=0} = ik_1 \oint n \mathcal{I}(R, n) d\omega(n).$$

Подставляя это выражение в (50.14) и пренебрегая разницей между k и k_1 , получаем среднюю плотность потока энергии:

$$\langle \mathcal{P}(R) \rangle = \oint n \mathcal{I}(R, n) d\omega(n), \quad (50.35)$$

Таким образом, через $\mathcal{I}(R, n)$ можно выразить все основные характеристики волнового поля: плотность энергии (интенсивность), плотность потока энергии и функцию когерентности¹⁾.

Разумеется, свести точное уравнение Бете—Солпитера к УПИ возможно отнюдь не всегда. В общем случае функция когерентности $\Gamma(R, r)$ разлагается в интеграл Фурье вида (50.21), в котором присутствуют плоские волны $\exp(i\mathbf{k}x)$ с произвольными значениями x . Лишь в том случае, когда в этом разложении $|x| = k$, справедлива формула (50.33).

Далее, при выводе УПИ мы использовали приближение Бурре для \bar{G} и ограничились только первым членом разложения опе-

¹⁾ Отметим, что в § 9 были приведены аналогичные формулы для случайного волнового поля в однородной среде.

ратора интенсивности («лестничное» приближение). Правда, более подробный анализ показывает, что второе из этих приближений справедливо тогда же, когда и первое (т. е. когда справедливо приближение Бурре), так что оба верны при необходимом условии

$$k^2 l_e^2 \sigma^2 \ll 1. \quad (50.36)$$

Наконец, при переходе от уравнения (50.19) к (50.20) было сделано предположение о малости характерного масштаба функции $\Gamma(R, r)$ по переменной r по сравнению с ее характерным масштабом по R . Оказывается, однако, что для выполнения этого предположения тоже необходимо условие (50.36).

Тем не менее возможны и такие ситуации, когда УПИ заведомо неприменимо. Так обстоит дело, например, в том случае, когда нас интересует *обратное* рассеяние. В УПИ производится *некогерентное* сложение рассеянных волн (сложение интенсивностей), что особенно наглядно проявляется при феноменологическом выводе этого уравнения (§ 45). Но при рассеянии назад рассеянная волна проходит точно через те же неоднородности, что и падающая, в силу чего существенны фазовые соотношения между этими волнами. В результате УПИ оказывается непригодным для описания рассеяния назад [12, 13]. Существенную роль при таком рассеянии играют «циклические» диаграммы (например, диаграммы 7 и 13 в формуле (48.20)).

Мы ограничились весьма упрощенной задачей о распространении *скалярного* волнового поля в *статистически однородной* случайной среде. Более общий случай *статистически неоднородной* среды рассмотрен в работе [10]. В работе [11] УПИ выведено для электромагнитного поля, причем с учетом пространственной и частотной дисперсии.

Остановимся еще на одной стороне вопроса, постановка которого даже не возникла в феноменологической теории переноса излучения [14]. Речь идет о *дифракционном* содержании УПИ. Как мы видели, УПИ эквивалентно уравнению (50.20) для функции когерентности $\Gamma(R, r)$, которое в свою очередь получено из волнового уравнения. Поэтому, если известно аналитическое выражение функции $\mathcal{D}(R, n)$, то при помощи формулы (50.33) можно восстановить функцию Γ , которая должна содержать информацию и о дифракционных эффектах (см. задачу 2). Здесь возникает вопрос о том, как следует формулировать граничные условия к УПИ, чтобы при обратном переходе к $\Gamma(R, r)$ получить описание дифракционных эффектов. Этот и ряд других вопросов о взаимосвязи теории когерентности с теорией переноса излучения анализируются в работах [15, 16].

Подведем некоторые итоги. Общая теория многократного рассеяния охватывает случаи не только крупных, но и мелких неоднородностей. В рамках этой теории получены приближенные

замкнутые уравнения для моментов поля, вывод которых фактически основан на частичном суммировании рядов теории возмущений. При этом в рамках общей теории многократного рассеяния удается вывести все уравнения, полученные различными приближенными методами, и, что еще важнее, указать границы применимости таких методов. Существенным достижением теории можно считать «статистико-волновое» обоснование УПИ и установление дифракционного содержания этого уравнения. Здесь получены и другие важные результаты. В частности, удается вывести УПИ с учетом трансформации когерентной составляющей поля в некогерентную (см. задачу I, где соответствующее уравнение выводится для скалярных волн, и работу [11] для электромагнитных волн). При вычислении когерентного поля одновременно решается и задача об определении эффективного показателя преломления случайной среды.

В рамках теории многократного рассеяния можно получить приближенные замкнутые уравнения не только в случае сплошной случайно-неоднородной среды, но и для моментов волнового поля, рассеянного на совокупности большого числа дискретных вкраплений (дифракция на телах, занимающих случайное положение и случайно ориентированных). Здесь также удается вывести УПИ (см. например, [20, 21]) и установить микроскопический смысл феноменологических параметров, входящих в это уравнение. Оказывается, что сечение рассеяния единичного объема в общем случае не совпадает с сечением рассеяния одной частицы, умноженным на концентрацию частиц: при больших концентрациях проявляются так называемые коллективные эффекты [22], вызванные падением на данную частицу не только прямых волн, но и волн, рассеянных другими частицами.

Что касается перспектив дальнейшего развития теории многократного рассеяния, то, во-первых, можно ожидать, что она приведет к решению задачи о распространении волн в среде с *не малыми* флуктуациями диэлектрической проницаемости (это имеет место, например, в плазме, если частота электромагнитной волны близка к плазменной частоте, или в жидкостях вблизи критической точки).

Кроме того, имеется широкий круг практически интересных задач, несомненно относящихся к теории многократного рассеяния, но усложненных многочисленными дополнительными факторами. Здесь можно упомянуть дифракцию частично когерентных полей в случайно-неоднородной среде, рассеяние волн на шероховатой поверхности, окруженной случайно-неоднородной средой, дифракцию волн в случайно-неоднородной среде при наличии дискретных вкраплений, тепловое излучение случайно-неоднородных сред и т. д. (см. обзор [23] и цитированную в нем литературу).

Задачи

1. Исходя из уравнения (50.19), получить УПИ для случая, когда среднее поле \bar{u} не равно нулю.

Решение. Введем обозначение $F(R, r) = \bar{u}(R+r/2)\bar{u}^*(R-r/2)$ и подставим в (50.19) $\Gamma(R, r) = \psi_a(R, r) + F(R, r)$, где $\psi_a(R, r) = \langle \bar{u}(R+r/2)\bar{u}^*(R-r/2) \rangle$. Из уравнения (50.6) легко получить, что

$$2\nabla_R \nabla_r F(R, r) = k^4 \int \psi_a(r') \left\{ \bar{G}(r') F\left(R - \frac{r'}{2}, r - r'\right) - \bar{G}^*(r') F\left(R + \frac{r'}{2}, r - r'\right) \right\} d^3 r'. \quad (1)$$

С учетом этого уравнения находим после подстановки в (50.19) $\Gamma = \psi_a + F$ следующее уравнение для ψ_a :

$$\begin{aligned} 2\nabla_R \nabla_r \psi_a(R, r) = & k^4 \int \left\{ \bar{G}(r') [\psi_a(r') - \psi_a(r-r')] \psi_a\left(R - \frac{r'}{2}, r - r'\right) - \right. \\ & \left. - \bar{G}^*(r') [\psi_a(r') - \psi_a(r+r')] \psi_a\left(R - \frac{r'}{2}, r + r'\right) \right\} d^3 r' - \\ & - k^4 \int \left\{ \bar{G}(r') \psi_a(r-r') F\left(R - \frac{r'}{2}, r - r'\right) - \right. \\ & \left. - \bar{G}^*(r') \psi_a(r+r') F\left(R - \frac{r'}{2}, r + r'\right) \right\} d^3 r'. \end{aligned} \quad (2)$$

Пренебрегая, как и при переходе от (50.19) к (50.20), величиной $r'/2$ в аргументах ψ_a и F , получаем уравнение, обобщающее (50.20):

$$\begin{aligned} 2\nabla_R \nabla_r \psi_a(R, r) = & k^4 \int [\bar{G}(r') - \bar{G}^*(r')] [\psi_a(r') - \psi_a(r-r')] \times \\ & \times \psi_a(R, r-r') d^3 r' - k^4 \int [\bar{G}(r') - \bar{G}^*(r')] \psi_a(r-r') F(R, r-r') d^3 r'. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем трансформанты Фурье

$$\begin{aligned} \psi_a(R, r) &= \int f(R, \kappa) \exp(i\kappa r) d^3 \kappa, \\ F(R, r) &= \int f_0(R, \kappa) \exp(i\kappa r) d^3 \kappa. \end{aligned} \quad (4)$$

Выполняя преобразование Фурье уравнения (3) и учитывая формулы (50.24), (50.25), получим

$$\begin{aligned} \kappa \nabla_R f(R, \kappa) = & -k_1 \frac{\pi k^4}{2} f(R, \kappa) \oint \Phi_a(k_1 n' - \kappa) d\Omega(n') + \\ & + \frac{\pi k^4}{2k_1} \delta(\kappa - k_1) \int d^3 \kappa' \Phi_a(\kappa - \kappa') [f(R, \kappa') + f_0(R, \kappa')]. \end{aligned} \quad (5)$$

Если искать решение этого уравнения в виде

$$f(R, \kappa) = \frac{\delta(\kappa - k_1)}{k_1^3} g(R, \eta), \quad \kappa = \kappa n,$$

то это приводит к следующему уравнению для J :

$$\pi \nabla_R J(R, n) = -\alpha J(R, n) + \oint \sigma(n, n') J(R, n') d\sigma(n') + \\ + \frac{\pi k^4}{2} \int \Phi_s(kn - \kappa') f_0(R, \kappa') d^3 \kappa' \quad (6)$$

(здесь использованы те же обозначения, что и в (50.29) и (50.30)).

Уравнение (6) отличается от стандартного УПИ (50.31) наличием дополнительного (последнего) слагаемого, описывающего трансформацию когерентной части поля в некогерентную. Формула (50.33) теперь справедлива не для Γ , а для функции корреляции:

$$\Phi_d(R, r) = \oint J(R, n) e^{ik_n r} d\sigma(n). \quad (7)$$

2. Плоская волна $u_0(r)$ падает на объем V , внутри которого $\tilde{e}(r) \neq 0$. Размер объема V мал по сравнению с длиной экстинкции d , так что рассеяние волны $u_0(r)$ на неоднородностях можно описывать в борновском приближении. Получить решение задачи о рассеянии, исходя из УПИ, выведенного в предыдущей задаче, и пренебрегая различием между k и k_1 .

Решение. Поскольку рассеивающий объем мал по сравнению с d , энергия рассеянного поля значительно меньше энергии падающей волны. Поэтому в УПИ (формула (6) предыдущей задачи) можно пренебречь членами, описывающими экстинкцию и рассеяние некогерентного поля, т. е. в правой части остается только последний член:

$$\pi \nabla_R J(R, n) = \frac{\pi k^4}{2} \int \Phi_s(kn - \kappa', R) f_0(R, \kappa') d^3 \kappa'. \quad (1)$$

Здесь специально выделена зависимость Φ_s от R , так как флуктуации в не являются статистически однородными. Так как размер рассеивающего объема мал по сравнению с d , можно считать, что $u(r) = u_0(r) = u_0 e^{ik_n r}$, где n_0 — единичный вектор вдоль направления распространения первичной волны, а u_0 — ее амплитуда. Тогда (обозначения те же, что и в предыдущей задаче)

$$F(R, r) = |u_0|^2 \exp(i k_n r), \\ f_0(R, \kappa) = \frac{|u_0|^2}{8 \pi^3} \int \exp(i k_n r - i \kappa r) d^3 r = |u_0|^2 \delta(k_n - \kappa). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем уравнение

$$\pi \nabla_R J(R, n) = \frac{\pi k^4 |u_0|^2}{2} \Phi_s(kn - k_n, R). \quad (3)$$

Функция Φ_s отлична от нуля только внутри рассеивающего объема V . Так как $\pi \nabla_R J(R, n) = \frac{d}{dr} J$, где $\frac{d}{dr}$ — производная по направлению единичного вектора n (рис. 70), то очевидно, что решение уравнения (3) имеет

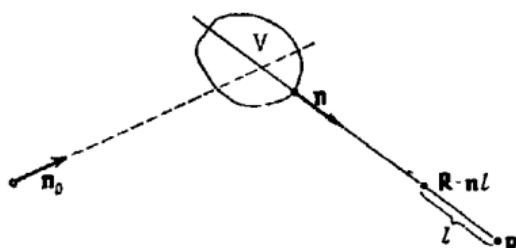


Рис. 70.

следующий вид:

$$\mathcal{I}(R, n) = \int_0^{\infty} \frac{\pi k^4 |u_0|^2}{2} \Phi_e(k(n-n_0), R-nl) dl. \quad (4)$$

Найдем теперь $\psi_n(R, r)$, воспользовавшись формулой (7) задачи 1:

$$\psi_n(R, r) = \oint e^{iknr} do(n) \int_0^{\infty} \frac{\pi k^4 |u_0|^2}{2} \Phi_e(k(n-n_0), R-nl) dl. \quad (5)$$

Введем новую переменную интегрирования $r' := nl$, представляющую собой радиус-вектор точки $R-nl$, приведенный из точки R . Тогда $dr' = l^2 dl$ и $do(n) = \frac{d^3r'}{l^2} = \frac{d^3r'}{r'^2}$. Формула (5) принимает вид

$$\psi_n(R, r) = \frac{\pi k^4 |u_0|^2}{2} \int_V \exp\left(-\frac{ikrr'}{r'}\right) \Phi_e(k(n-n_0), R-r') \frac{d^3r'}{r'^2}. \quad (6)$$

В гл. IV эта формула была получена в приближении однократного рассеяния, и, как ясно из проведенного там вывода, она полностью учитывает дифракционные эффекты. Таким образом, данная задача непосредственно подтверждает, что УПИ описывает дифракционное поведение поля.

Г л а в а IX

РАССЕЯНИЕ НА ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

§ 51. Рассеяние на малых неровностях. Метод возмущений

Поверхности реальных тел всегда в той или иной степени неровны, в силу чего отражение и преломление волн на этих поверхностях сопровождаются явлениями, которые отсутствуют в случае идеально гладких границ раздела. Разумеется, степень «гладкости» определяется в первую очередь соотношением между длиной волны и геометрическими параметрами неровностей. Одна и та же поверхность, «идеально» гладкая для радиоволн или звука, может быть шероховатой для света или ультразвука.

Неровности могут изменяться со временем (морское волнение, тепловые флуктуации формы поверхности), но могут быть и практически неизменными (рельеф суши или морского дна, поверхность бумаги, матового стекла, вообще твердого тела). Наконец, как и для объемных неоднородностей среды, сами задачи об отражении и преломлении волн на неровных поверхностях или о дифракции и рассеянии на них могут быть и детерминированными, и статистическими. Последние возникают, как обычно, в тех случаях, когда нас интересует не какой-то конкретный, «индивидуальный» вид неровной поверхности, а характеристики ансамбля таких поверхностей. Со статистическим ансамблем приходится иметь дело при наличии большого числа неровностей на облучаемом участке поверхности (*шероховатые* поверхности), но возможны, конечно, и такие ситуации, когда речь идет о малом количестве неровностей. Например, нас может интересовать рассеяние от некоторого единичного выступа на плоскости, ансамбль же состоит из реализаций с выступами разного вида, причем геометрические и (или) физические характеристики выступа случайны (подчинены определенным вероятностным распределениям).

Рассеяние волн на телах, имеющих случайную форму или занимающих случайное положение, мы отнесли в § 8 к задачам

типа 3). Обычная постановка задач этого типа состоит в том, чтобы найти статистические характеристики рассеянного поля по заданной статистике неровностей, но часто возникает необходимость и в решении обратной задачи — по статистике рассеянного поля определить свойства поверхности.

Характер рассеяния определяется многими факторами. Кроме размеров неровностей и длины волны падающего излучения, играют роль и размеры рассеивающей площади, и способ ее облучения, а также поляризация первичной волны, отражающие и преломляющие свойства вещества и т. д. В зависимости от соотношения между различными параметрами применяют те или иные приближенные методы расчета рассеянного поля. Мы рассмотрим только два наиболее простых и часто применяемых метода — *метод малых возмущений* и *метод Кирхгофа*. Сведения о более общих методах, учитывающих многократное рассеяние, можно найти в монографии [1] и в обзорной статье [2].

Пусть шероховатая поверхность задана уравнением $z = -\zeta(x, y) \equiv \zeta(\rho)$. Примем, что $\langle \zeta \rangle = 0$, т. е. ограничимся случаем в среднем плоской поверхности, уклонения от которой описываются случайным полем $\zeta(\rho)$. Если поверхность $z = \zeta(\rho)$ представляет собой границу двух сред, то на ней должны выполняться соответствующие «двусторонние» граничные условия. Например, если u_1 и u_2 — потенциалы акустической скорости в первой и второй средах, то для звуковых волн на границе должно выполняться равенство нормальных компонент скорости ($\frac{\partial u_1}{\partial N} = \frac{\partial u_2}{\partial N}$, N — нормаль к поверхности) и равенство давлений ($\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$, где ρ_1 и ρ_2 — плотности сред). В электромагнитной задаче на границе должны быть непрерывны тангенциальные компоненты напряженностей E_t и H_t . Рассеянные волны распространяются при этом в обеих средах.

Рассматривая для простоты скалярные волны, мы упростим постановку задачи еще в одном отношении: будем считать, что распространение волн возможно лишь в одной среде, т. е. поверхность $z = \zeta(\rho)$ либо «абсолютно мягкая» (на ней $u = 0$), либо «абсолютно жесткая» ($\frac{\partial u}{\partial N} = 0$). В обоих случаях происходит полное отражение. В электромагнитной задаче этому соответствует идеально проводящая поверхность ($E_t = 0$) и поверхность идеального магнетика ($H_t = 0$).

Итак, для абсолютно мягкой поверхности граничное условие имеет вид

$$u|_S = u(p, z)|_{z=\zeta(p)} = 0, \quad (51.1)$$

а для абсолютно жесткой —

$$\frac{\partial u}{\partial N}|_S = (N, \nabla u)|_{z=\zeta(p)} = 0, \quad (51.2)$$

причем единичный вектор внешней нормали \mathbf{N} имеет компоненты

$$(\mathbf{N}_\perp, N_z) = (\alpha \nabla_\perp \zeta, -\alpha), \quad \alpha = [1 + (\nabla_\perp \zeta)^2]^{-1/2}, \quad (51.3)$$

$\nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ — поперечный оператор дифференцирования.

Строгих методов решения волнового уравнения со случайными граничными условиями (51.1) или (51.2) не существует, и задачу удается решить лишь приближенно, при определенных ограничениях, налагаемых на размеры и форму неровностей. Мы рассмотрим ниже два случая таких ограничений, при которых и приложимы два упомянутых метода. А именно — мы рассмотрим поверхности, неровности которых в масштабе длины волны λ либо *малы* и *пологи*, либо *плавны*. В первом случае применим метод малых возмущений, а во втором — метод Кирхгофа.

Пологость неровностей означает, что наклоны поверхности в среднем невелики, т. е.

$$\langle (\nabla_\perp \zeta)^2 \rangle \sim \sigma_\zeta^2 / l_\zeta^2 \ll 1, \quad (51.4)$$

где $\sigma_\zeta^2 \equiv \langle \zeta^2 \rangle$ — средний квадрат уклонения от невозмущенной поверхности $z=0$, а l_ζ — характерный размер неровностей. Разумеется, это неравенство, справедливое для среднего квадрата, при расчетах используется еще до усреднения.

Малость неровностей означает, что моменты $\langle \zeta^n \rangle$ малы по сравнению с соответствующими степенями длины волны, $\langle \zeta^n \rangle \ll \lambda^n$, в частности,

$$\sigma_\zeta^2 \ll \lambda^2. \quad (51.5)$$

В результате для малых и пологих неровностей можно использовать разложение как граничного условия, так и искомого решения по степеням малых параметров $\zeta/\lambda \ll 1$ и $|\nabla_\perp \zeta| \sim \sigma_\zeta / l_\zeta \ll 1$, в чем и состоит метод малых возмущений.

В случае *плавных* неровностей величина уклонения ζ не ограничивается, а условие пологости заменяется требованием малой кривизны (плавности) неровностей: радиусы кривизны поверхности R_{kp} должны быть велики по сравнению с λ :

$$R_{kp} \gg \lambda, \quad \text{или} \quad kR_{kp} \gg 1. \quad (51.6)$$

Соответственно неоднородности должны обладать и при $\zeta \gg \lambda$ большой протяженностью в направлениях x и y (крупномасштабные неровности). При этих условиях применимо кирхгофово приближение: поле в окрестности каждой точки поверхности приближенно представляется суммой падающей волны и волны, отраженной от соприкасающейся плоскости в этой точке; при этом используются локальные значения «плоских» коэффициентов отра-

жения (в электромагнитной задаче — френелевских коэффициентов). Под падающей волной можно понимать не только первичную волну, но и волны, попадающие на данный участок поверхности в результате отражения от других ее участков. Простейшим является случай, когда многократные отражения отсутствуют.

Для плавных неровностей отношение σ_ζ/l_ζ может и не быть малым. В принципе метод Кирхгофа применим и в этом случае крутых неровностей ($\sigma_\zeta/l_\zeta \geq 1$). Ясно, однако, что с ростом крутизны неровностей многократные отражения будут все более существенными. Учесть их, пользуясь методом Кирхгофа, очень трудно. Для того же, чтобы ими можно было пренебречь, опять-таки требуется даже в случае крупномасштабных неровностей определенная их пологость. Она нужна еще и для того, чтобы можно было пренебречь затенениями одних элементов поверхности другими, хотя учет затенений осуществлять легче, чем учет многократных отражений. Таким образом, в отличие от метода возмущений, наклон неровностей $|\nabla_\perp \zeta|$ не является в методе Кирхгофа малым параметром. Пологость требуется лишь для упрощения задачи, т. е. в той мере, в какой это нужно для пренебрежения многократными отражениями и затенениями. Метод Кирхгофа мы рассмотрим в § 52, а сейчас обратимся к случаю малых неровностей.

Как сказано, в основе метода возмущений лежит разложение искомого поля u и граничных условий в ряды по степеням малых параметров $\zeta/\lambda \sim \sigma_\zeta/\lambda \ll 1$ и $|\nabla_\perp \zeta| \sim \sigma_\zeta/l_\zeta \ll 1$. Такой подход был впервые предложен еще Релеем для случая синусоидальных неровностей и был применен затем Л. И. Мандельштамом к статистической задаче о рассеянии света на неровностях, обусловленных тепловыми флуктуациями поверхности жидкости [3].

Пусть $U(r)$ — первичное монохроматическое поле, падающее на шероховатую поверхность (множитель $e^{-i\omega t}$ для краткости опускаем). Запишем решение уравнения Гельмгольца в виде ряда

$$u(r) = U(r) + \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(r), \quad (51.7)$$

где n -й член ряда имеет порядок $(\sigma_\zeta/\lambda)^n$ или $(\sigma_\zeta/l_\zeta)^n$. Этот ряд представляет собой разложение по кратности рассеяния.

В случае абсолютно мягкой поверхности граничное условие (51.1), разложенное по степеням ζ , принимает вид

$$u(p, z) \Big|_{z=\zeta(p)} = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 \frac{z^2}{2} + \dots \Big|_{z=\zeta(p)} = 0; \quad (51.8)$$

здесь и далее нижним индексом 0 отмечены значения поля и его производных по z при $z=0$. В данном случае $\nabla_\perp \zeta$ в граничное условие не входит, так что требование пологости (51.4) для

абсолютно мягкой поверхности является излишним и в разложении (51.7) используется только один малый параметр $\sigma_0/\lambda \ll 1$.

Подставив (51.7) в (51.8), получаем граничные условия (уже на плоскости $z=0$, которую иногда называют *подстилающей*) для последовательных приближений поля:

$$\begin{aligned} u_0^{(0)} + U_0 &= 0, \\ u_0^{(1)} + \left[\frac{\partial}{\partial z} (u^{(0)} + U) \right]_0 \xi &= 0, \\ u_0^{(2)} + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \right)_0 \xi + \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} (u^{(0)} + U) \right]_0 \frac{\xi^2}{2} &= 0, \end{aligned} \quad (51.9)$$

· · · · ·

Таким образом, нахождение n -кратно рассеянного поля $u^{(n)}(\mathbf{r})$ сводится к рассмотренной в § 9 задаче о волновом поле, имеющем заданное значение $u^{(n)}(\rho) = u_0^{(n)} \equiv u^{(n)}(\rho, 0)$ на плоскости $z=0$. Это заданное значение известно, коль скоро известны полученные одно за другим предшествующие приближения от $u^{(0)}$ до $u^{(n-1)}$. Случайный характер граничных значений $u_0^{(n)}$ обусловлен присутствием в (51.9) случайной функции $\xi(\rho)$.

Для фактического нахождения поля в n -м приближении можно воспользоваться либо формулой Грина (9.12), либо методом Релея (разложение по плоским волнам—формулы (9.14)–(9.16)); для плоской границы $z=0$ оба подхода эквивалентны. Проведем расчеты по формуле Грина (9.12), которая для полей нулевого и первого приближения дает следующие выражения (здесь $\mathbf{r} = \{\rho, z\}$, $R = \sqrt{\rho^2 + (\rho - \rho')^2}$):

$$\begin{aligned} u^{(0)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int U(\rho', 0) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) d^2\rho', \\ u^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial z} [u^{(0)} + U]_0 \xi(\rho') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) d^2\rho'. \end{aligned} \quad (51.10)$$

В рассматриваемом случае, когда на плоскости $z=0$ заданы сами поля, вычисление $u^{(n)}(\mathbf{r})$ имеет смысл как для ограниченного участка площади Σ этой плоскости, так и для всей бесконечной плоскости. Если берется конечная площадка, то в предположении, что ее размеры велики по сравнению с длиной волны, мы можем воспользоваться гипотезой Кирхгофа о том, что формулы (51.10), написанные для бесконечной плоскости, остаются в силе и на рассматриваемой площадке конечных размеров, и надо только ограничить область интегрирования в (51.10) пределами площадки. Пусть на шероховатую поверхность под углом θ_0 к оси z падает плоская волна

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= A \exp(ik\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}) = A \exp[ik(n_1^0 \rho + n_2^0 z)] = \\ &= A \exp[ik(n_1^0 \rho - z \cos \theta_0)], \end{aligned} \quad (51.11)$$

где $n_i = (n_1^i, n_2)$ — единичный вектор в направлении распространения падающей волны, причем $n_2^i = -\cos \theta_0$ (рис. 71). В случае бесконечной поверхности ясно и без расчета по первой из формул (51.10), что в нулевом приближении мы имеем зеркально отраженную волну

$$u^{(0)}(r) = -A \exp[ik(n_1^i r - n_2^i z)] = -A \exp[ik(n_1^i r + z \cos \theta_0)]. \quad (51.12)$$

Если площадка имеет конечные размеры, то по гипотезе Кирхгофа вблизи площадки поле $u^{(0)}$ тоже представляет собой зеркально отраженную волну (51.12), но на достаточных удалениях от площадки поле $u^{(0)}$ превращается в направленную сферическую волну, с максимумом интенсивности в направлении зеркального отражения.

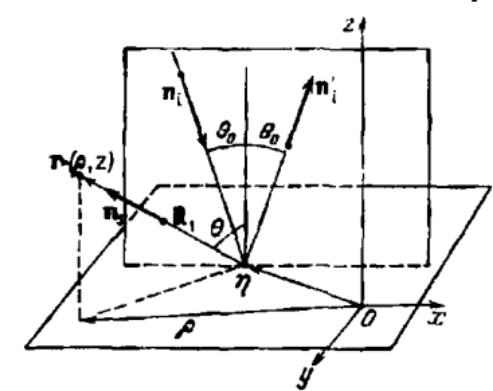


Рис. 71.

сияенного поля $u^{(1)}$. Из (51.11) и (51.12) следует, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} (u^{(0)} + U) \right]_0 = 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = 2ikn_2^i A \exp(ikn_1^i r),$$

и, стало быть, в соответствии с (51.10),

$$u^{(1)} = \frac{ikn_2^i A}{\pi} \int \exp(ikn_1^i r') \zeta(r') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) d^2 r' \approx -\frac{k^2 n_2^i A z}{\pi} \int \zeta(r') \exp(ikn_1^i r' + ikR) \frac{d^2 r'}{R^2}. \quad (51.13)$$

Второй вариант этой формулы относится к случаю $kz \gg 1$, когда точка наблюдения удалена от плоскости $z = 0$ по меньшей мере на несколько длин волн.

Среднее значение поля $u^{(1)}$ равно нулю, а расчет его средней интенсивности $\bar{I}_1 = \langle |u^{(1)}|^2 \rangle$ во многом сходен с вычислением \bar{I}_1 в случае рассеяния на объемных неоднородностях. В предположении о статистической однородности флуктуаций $\zeta(r)$ при помощи (51.13) находим

$$\bar{I}_1 = \frac{k^4 (n_2^i)^2 z^2}{\pi^2} |A|^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_\zeta(r' - r'') \exp[ikn_1^i (r' - r'')] \times ik(R' - R'') \times \frac{d^2 r' d^2 r''}{R'^2 R''^2}, \quad (51.14)$$

где $\psi_\zeta(\rho' - \rho'') = \langle \zeta(\rho') \zeta(\rho'') \rangle$ — функция корреляции неровностей, $R' = \sqrt{z^2 + (\rho - \rho')^2}$, $R'' = \sqrt{z^2 + (\rho - \rho'')^2}$. Введем новые переменные интегрирования $\xi = \rho' - \rho''$, $\eta = (\rho' + \rho'')/2$ и разложим R' и R'' в ряды Тейлора по разностной переменной ξ . Наличие под интегралом функции корреляции $\psi_\zeta(\xi) = \psi_\zeta(\rho' - \rho'')$, быстро спадающей до нуля при $\xi \gg l_\zeta$, позволяет ограничиться в этих разложениях первыми членами. А именно при $k l_\zeta^2/z^2 \ll 1$ ¹⁾ можно приближенно заменить R' и R'' в знаменателе подынтегрального выражения на $R_1 = |\mathbf{r} - \eta| = \sqrt{z^2 + (\rho - \eta)^2}$, а разность $R' - R''$ в показателе — на $-n_\perp^2 \xi$. Через $n_i = R_1/R_1$ обозначен единичный вектор в направлении от точки рассеяния η на плоскости $z=0$ к точке наблюдения $\mathbf{r} = (\rho, z)$, а через n_\perp^i — поперечная составляющая этого вектора: $n_s = (n_\perp^i, n_z^i) = \left(\frac{\rho - \eta}{R_1}, \frac{z}{R_1} \right)$.

Далее, распространив пределы интегрирования по ξ до бесконечности (это возможно, даже если площадка Σ конечна, но велика по сравнению с радиусом корреляции l_ζ), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\zeta(\xi) \exp[ik(n_\perp^i - n_\perp^s)\xi] d\xi = 4\pi^2 F_\zeta(\mathbf{q}_\perp),$$

где

$$F_\zeta(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\zeta(\rho) \exp(-ik\rho) d\rho \quad (51.15)$$

— преобразование Фурье функции корреляции, т. е. двумерный пространственный спектр неоднородностей; $\mathbf{q}_\perp = k(n_\perp^i - n_\perp^s)$ — поперечная компонента вектора рассеяния $\mathbf{q} = k(n_i - n_s)$ (рис. 72). В результате в (51.14) остается только интеграл по η :

$$T_1 = 4k^4 (n_s^i)^2 z^2 |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_\zeta(\mathbf{q}_\perp) \frac{d^2\eta}{R_1^4}, \quad (51.16)$$

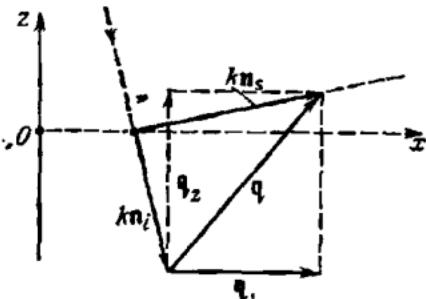


Рис. 72.

1) Заметим, что это неравенство слабее, чем условие $k l_\zeta^2/z \ll 1$, отвечающее удалению точки наблюдения во фраунгоферову зону отдельной неоднородности.

который распространяется на всю плоскость $z=0$ или только на ее часть Σ , если шероховатая поверхность имеет конечные размеры.

Согласно (51.16) каждый элемент поверхности $d^2\eta = d\Sigma$ с центром в точке η дает в суммарную интенсивность \bar{I}_1 вклад

$$\begin{aligned} d\bar{I}_1 &= 4k^4 (n_z^i)^2 |A|^2 \frac{z^2}{R_1^4} F_\zeta(\mathbf{q}_\perp) \frac{d\Sigma}{R_1^2} = \\ &= 4k^4 (n_z^i n_z^s)^2 F_\zeta(\mathbf{q}_\perp) |A|^2 \frac{d\Sigma}{R_1^4}, \end{aligned} \quad (51.17)$$

где $n_z^s = z/R_1 = \cos\theta$ — косинус угла между вектором $\mathbf{n}_s = \mathbf{R}_1/R_1$ и осью z (рис. 71). Формула (51.16) отражает, таким образом, избирательный характер рассеяния: в заданном направлении \mathbf{n}_s рассеивает только определенная «гармоника» неровностей, отвечающая вектору рассеяния $\mathbf{q}_\perp = k(n_\perp^s - n_\perp^i)$, что полностью аналогично селективности рассеяния на объемных неоднородностях (см. § 25). В частности, при нормальном падении первичной волны, когда $n_\perp^i = -1$, $\mathbf{n}_\perp^i = 0$ и $\mathbf{q}_\perp = kn_\perp^s$, длина волны «активной» гармоники неровностей $\Lambda_q = 2\pi/q_\perp$ равна $\lambda/n_\perp^s = \lambda/\sin\theta$. При рассеянии в направлении зеркального отражения, когда $\mathbf{n}_\perp^s = \mathbf{n}_\perp^i$ и $\mathbf{q}_\perp = 0$, Λ_q обращается в бесконечность. Наконец, при обратном рассеянии ($\mathbf{n}_\perp^s = -\mathbf{n}_\perp^i$, $\mathbf{q}_\perp = -2kn_\perp^i$)

$$\Lambda_q = \frac{2\pi}{2kn_\perp^i} = \frac{\lambda}{2\sin\theta_0}.$$

Величина

$$\sigma_u(\mathbf{q}_\perp) = 4k^4 (n_z^i n_z^s)^2 F_\zeta(\mathbf{q}_\perp), \quad (51.18)$$

т. е. коэффициент при $|A|^2 d\Sigma/R_1^4$ в формуле (51.17), представляет собой *сечение рассеяния* единичной площадки абсолютно мягкой поверхности в направлении \mathbf{n}^s . В отличие от объемного рассеяния, сечение (51.18) безразмерно. Формула (51.16), записанная в виде

$$\bar{I}_1 = |A|^2 \int \frac{\sigma_u(\mathbf{q}_\perp) d\Sigma}{R_1^4}, \quad (51.19)$$

явно выражает *некогерентность* волн, рассеянных отдельными элементами шероховатой поверхности, их *сложение по интенсивности*. В рассматриваемом случае абсолютно мягкой поверхности сечение (51.18), содержащее множитель $(n_z^i n_z^s)^2 = \cos^2\theta_0 \cos^2\theta$, обращается в нуль при скользящих углах падения и отражения, т. е. при $\theta, \theta_0 \rightarrow \pi/2$. Именно поэтому интеграл (51.19) сходится даже при интегрировании по всей плоскости $z=0$.

Если рассеивающая поверхность имеет конечную площадь Σ и в пределах этой площади величины $\sigma_u(\mathbf{q}_\perp)$ и R_1 практически

постоянны, то

$$\bar{I}_1 = \frac{|A|^2 \sigma_m(\mathbf{q}_\perp)}{R_1^2} \Sigma. \quad (51.20)$$

Условие постоянства $\sigma_m(\mathbf{q}_\perp)$ и R_1 в пределах площадки Σ с максимальным размером L записывается, как нетрудно установить, в виде

$$\begin{aligned} R_1 &\gg L, \text{ если } l_\zeta \ll \lambda \text{ (мелкомасштабные неровности),} \\ R_1 &\gg k l_\zeta L, \text{ если } l_\zeta \gg \lambda \text{ (крупномасштабные неровности).} \end{aligned} \quad (51.21)$$

Случай абсолютно жесткой поверхности отличается тем, что рассеянное поле уже в первом приближении зависит не только от ζ , но и от $\nabla_\perp \zeta$. Из (51.2) и (51.3) следует, что на границе должно быть

$$\left[(\nabla_\perp \zeta \nabla_\perp u) - \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=\zeta(0)} = 0.$$

Подставляя сюда разложение (51.8), находим

$$[\dots]_{z=\zeta(0)} = - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_0 \zeta + (\nabla_\perp \zeta \nabla_\perp u)_0 + \dots = 0.$$

Таким образом, для последовательных приближений поля, в отличие от (51.9), получаются граничные условия, содержащие $\nabla_\perp \zeta$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial z} \right)_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 &= 0, \\ \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \right)_0 - (\nabla_\perp \zeta \nabla_\perp (u^{(0)} + U))_0 + \left[\frac{\partial^2 (u^{(0)} + U)}{\partial z^2} \right]_0 \zeta &= 0, \end{aligned} \quad (51.22)$$

Для нахождения полей $u^{(n)}$ по заданным на плоскости $z=0$ значениям нормальной производной $\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial z} \right)_0$ можно воспользоваться формулой Грина (9.13):

$$u^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 \frac{e^{ikR}}{R} d^2 p', \quad (51.23)$$

$$u^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ (\nabla_\perp \zeta \nabla_\perp (u^{(0)} + U))_0 - \left[\frac{\partial^2 (u^{(0)} + U)}{\partial z^2} \right]_0 \zeta \right\} \frac{e^{ikR}}{R} d^2 p', \quad (51.24)$$

Пусть на шероховатую поверхность падает плоская волна (51.11). Ясно, что в непосредственной близости к площадке регулярно отраженная волна $u^{(0)}$, удовлетворяющая первому из граничных условий (51.22), подчиняется законам зеркального отражения и записывается в виде

$$u^{(0)} = A \exp[ik(n_\perp^t \rho - n_z^t z)].$$

Тогда выражение в фигурных скобках в (51.24) равно

$$\{\dots\} = f(\rho') = 2A [ik(n_{\perp}^i \nabla_{\perp}) \zeta + k^2 (n_z^i)^2 \zeta] \exp(ikn_{\perp}^i \rho').$$

Среднее значение этой величины равно нулю, а функция корреляции $\Psi_{\zeta}(\xi) = \langle f(\rho') f^*(\rho'') \rangle$ выражается через $\psi_{\zeta}(\xi)$ следующим образом:

$$\Psi_{\zeta}(\xi) = 4 |A|^2 \exp(ikn_{\perp}^i \xi) [ik(n_{\perp}^i \nabla_{\perp}) - k^2 (n_z^i)^2]^2 \psi_{\zeta}(\xi). \quad (51.25)$$

(дифференцирование ∇_{\perp} здесь производится по $\xi = \rho' - \rho''$).

Подсчитаем среднюю интенсивность рассеянного поля

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \Psi_{\zeta}(\rho' - \rho'') \frac{e^{ik(R' - R'')}}{R'R''} d^2\rho' d^2\rho''. \quad (51.26)$$

Как и ранее, целесообразно перейти к новым переменным интегрирования $\xi = \rho' - \rho''$ и $\eta = (\rho' + \rho'')/2$ и заменить приближенно $e^{ik(R' - R'')} / R'R''$ на $\exp(-ikn_{\perp}^i \xi) / R_1^2$. Используя (51.25), запишем выражение для \bar{I}_1 в виде

$$\bar{I}_1 = \frac{|A|^2}{\pi^2} \int \frac{d^2\eta}{R_1^2} \int \exp(-iq_{\perp} \xi) [ik(n_{\perp}^i \nabla_{\perp}) + k^2 (n_z^i)^2]^2 \psi_{\zeta}(\xi) d^2\xi.$$

Внутренний интеграл выражается через двумерную спектральную плотность неровностей $F_{\zeta}(q)$:

$$\int (\dots) d^2\xi = 4\pi^2 [-k(n_{\perp}^i \cdot q_{\perp}) + k^2 (n_z^i)^2]^2 F_{\zeta}(q_{\perp}).$$

Но $q_{\perp} = k(n_{\perp}^i - n_{\perp}^s)$, и поэтому

$$\begin{aligned} [-k(n_{\perp}^i \cdot q_{\perp}) + k^2 (n_z^i)^2]^2 &= k^4 [(n_z^i)^2 + (n_{\perp}^i)^2 - (n_{\perp}^i n_{\perp}^s)] = \\ &= k^4 [1 - (n_{\perp}^i n_{\perp}^s)]^2. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\bar{I}_1 = 4 |A|^2 k^4 \int \frac{[1 - (n_{\perp}^i n_{\perp}^s)]^2 F_{\zeta}(q)}{R_1^2} d^2\eta. \quad (51.27)$$

Это выражение можно представить в форме (51.19), если ввести сечение рассеяния единичной абсолютно жесткой площадки

$$\sigma_{*k}(q_{\perp}) = 4k^4 [1 - (n_{\perp}^i n_{\perp}^s)]^2 F_{\zeta}(q_{\perp}), \quad (51.28)$$

которое отличается от сечения рассеяния мягкой площадки (51.18) другим множителем при $F_{\zeta}(q_{\perp})$. Этот множитель $[1 - (n_{\perp}^i n_{\perp}^s)]^2$ (а тем самым и сечение σ_{*k}) не стремится к нулю при скользящих углах, падения и отражения, так что интеграл (51.27), взятый по всей плоскости $z=0$, расходится. Разумеется, интенсивность реального рассеянного поля не может обращаться в бесконечность. Расходимость связана лишь с примененным

методом расчета, а именно с использованием первого приближения. Расходимость интеграла в (51.27) в этом приближении влечет за собой появление бесконечностей и в последующих приближениях, но интенсивность суммарного поля $u = \sum_n u^{(n)}$ должна оставаться конечной.

Указанную расходимость можно устранить, применяя усовершенствованные формы теории возмущений, учитывающие затенения и многократное рассеяние уже в нулевом приближении. Не вдаваясь в подробности, отметим только, что при учете затенений и многократного рассеяния (о которых кратко будет сказано в § 53), в отличие от (51.28), сечение рассеяния $\sigma_{\text{ж}}$ обращается в нуль при скользящих углах падения и рассеяния, т. е. при $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ или $0 \rightarrow \pi/2$ (когда $n_z^i \rightarrow 0$ или $n_z^s \rightarrow 0$), а при умеренных значениях углов θ_0 и θ сечение совпадает с (51.28). Таким образом, расчет интенсивности рассеянного поля по формуле (51.27) правомерен лишь для площадок конечных размеров. Переход же к бесконечным пределам требует использования более точного выражения для $\sigma_{\text{ж}}(\mathbf{q})$.

Рассмотрим угловую зависимость сечения рассеяния σ для мягкой и жесткой границ на примере шероховатой поверхности с изотропной гауссовой функцией корреляции неровностей.

$$\Psi_{\zeta}(\rho) = \sigma_{\zeta}^2 e^{-\rho^2/2l_{\zeta}^2}, \quad \sigma_{\zeta}^2 = \langle \zeta^2 \rangle,$$

которой отвечает спектральная плотность

$$F_{\zeta}(\mathbf{q}) = \frac{\sigma_{\zeta}^2 l_{\zeta}^2}{2\pi} e^{-q^2/l_{\zeta}^2/2}. \quad (51.29)$$

Если положить $\mathbf{n}_i = (\sin \theta_0, 0; -\cos \theta_0)$, $\mathbf{n}_s = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, то по формулам (51.18) и (51.28) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ж}} &= \left. \frac{\cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta}{(1 - \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi)^2} \right\} \times \\ &\times \frac{2}{\pi} k^4 \sigma_{\zeta}^2 l_{\zeta}^2 \exp \left\{ -\frac{k^2 l_{\zeta}^2}{2} (\sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi) \right\}. \end{aligned}$$

При малых kl_{ζ} (мелкомасштабные неровности) угловая зависимость определяется предэкспоненциальными множителями; при этом рассеяние происходит в широкий сектор углов с раствором порядка 90° . Зависимость сечений $\sigma_{\text{ж}}$ и $\sigma_{\text{ж}}$ от угла θ (при фиксированных значениях угла падения θ_0 и азимутального угла φ) показана на рис. 73, а и 73, б. Пунктиром на рис. 73, б показан истинный ход индикатрисы $\sigma_{\text{ж}}(\theta)$ с учетом многократного рассеяния.

При $kL_\zeta \gg 1$ форма диаграммы рассеяния определяется в основном экспоненциальным множителем, одинаковым для $\sigma_{\text{н}}$ и $\sigma_{\text{ж}}$. Максимальное значение σ приходится в этом случае на направление зеркального отражения $\theta = \theta_0$, $\varphi = 0$, а убывание интен-

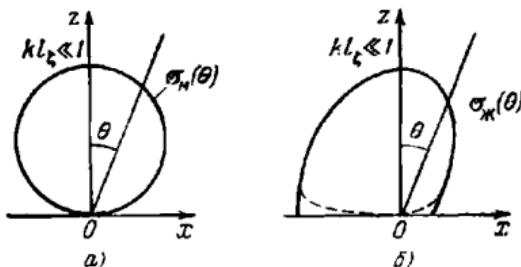


Рис. 73.

сивности в e раз происходит при угловом отклонении от максимума примерно на $\Delta\theta \sim 1/kL_\zeta$ (рис. 74).

Нетрудно подсчитать, что при $kL_\zeta \gg 1$ и для углов падения, не слишком близких к скользящему ($\cos \theta_0 \gg 1/kL_\zeta$), отношение полной интенсивности поля, рассеянного единичной площадкой,

$$I_n = |A|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sigma \sin \theta d\theta,$$

к полной интенсивности падающего на эту площадку излучения $I_0 = |A|^2 \cos \theta_0$ приближенно равно

$$\frac{I_n}{I_0} \approx 4k^2 \sigma_\zeta^2 \left(\cos^2 \theta_0 + \frac{2}{(kL_\zeta)^2 \cos^2 \theta_0} \right).$$

Отсюда видно, что с ростом высоты неровностей σ_ζ условие $I_n \ll I_0$, позволяющее ограничиться первым приближением теории возмущений, рано или поздно нарушается.

На практике чаще приходится встречаться не с рассмотренной постановкой задачи о рассеянии на шероховатых поверхностях (плоская первичная волна, в среднем плоская рассеивающая площадка), а со случаем, когда облучение большой (практически бесконечной) шероховатой поверхности производится волновым пучком — коллимированным или расходящимся. Именно так обстоит дело в радиолокации и гидролокации, а также в лабораторных экспериментах по рассеянию света. Путем незначительного видоизменения расчетов нетрудно обобщить вы-

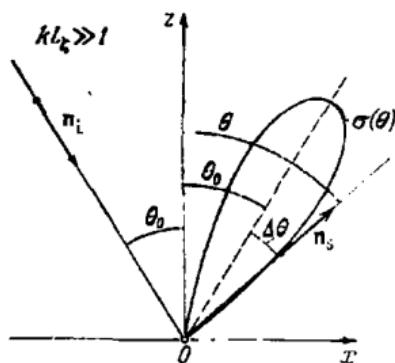


Рис. 74.

ражение (51.19) и на этот случай, учитывая также и возможное искривление подстилающей поверхности.

Пусть на шероховатую поверхность падает квазиплоская волна $U = Ae^{ik\Phi}$, амплитуда которой A и локальный волновой вектор $k_i = k \nabla \Phi$ практически постоянны в масштабе радиуса корреляции неровностей l_ζ . Пусть уравнение поверхности задано в параметрической форме:

$$\mathbf{r}(\alpha, \beta) = \bar{\mathbf{r}}(\alpha, \beta) + \zeta(\alpha, \beta) \mathbf{N}_0(\alpha, \beta), \quad (51.30)$$

где $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(\alpha, \beta)$ — уравнение невозмущенной (подстилающей) поверхности Σ_0 , а $\zeta(\alpha, \beta) \mathbf{N}_0(\alpha, \beta)$ — случайные смещения по нормали к Σ_0 (рис. 75). Если радиус кривизны подстилающей поверхности велик по сравнению с длиной волны λ и с радиусом корреляции l_ζ , то малый элемент поверхности $d\Sigma$, на который падает квазиплоская волна $Ae^{ik\Phi}$, рассеивает так же, как и элемент плоской поверхности, касательной к Σ_0 . Обозначим через \mathbf{n}_i градиент эйконала падающей волны в точке рассеяния P , лежащей на Σ_0 ($\mathbf{n}_i = \mathbf{k}_i/k = \nabla \Phi$), а через

\mathbf{n}_s — единичный вектор в направлении от P на точку наблюдения Q (рис. 75). Если под \mathbf{n}_i^t и \mathbf{n}_s^t понимать компоненты векторов \mathbf{n}_i и \mathbf{n}_s , касательные к Σ_0 , а под R_1 — расстояние между P и Q , то средняя интенсивность рассеянного поля запишется в виде

$$\bar{I}_1 = \int \frac{|A|^2 \sigma(q_\perp)}{R_1^2} d\Sigma_0, \quad (51.31)$$

где сечение $\sigma(q_\perp)$ определяется спектром неровностей F_ζ в окрестности точки рассеяния P . Пределы интегрирования определяются размерами либо рассеивающей площадки, либо облучаемой области, т. е. области, где амплитуда первичной волны заметно отличается от нуля. Формула (51.31), как и выражение (51.19), применима при условии $R_1 \gg V k l_\zeta$. При $k l_\zeta \gg 1$ это условие слабее условия $R_1 \gg k l_\zeta^2$, означающего удаление точки наблюдения во фраунгоферову зону отдельной неровности. В случае же $k l_\zeta \ll 1$ формулы (51.19) и (51.31) справедливы уже при удалении на расстояния $R_1 \sim \lambda$ от шероховатой поверхности.

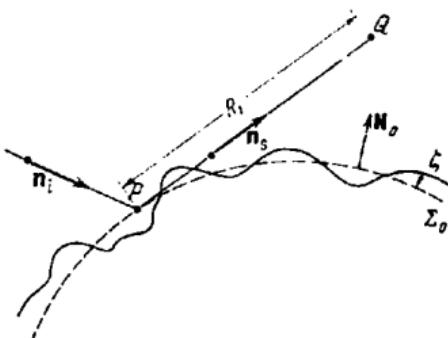


Рис. 75.

§ 52. Рассеяние на крупномасштабных неровностях. Метод Кирхгофа

В акустике, оптике и радиофизике часто интересен случай не малых, а больших неровностей, когда зеркальное отражение практически отсутствует. Примером может служить рассеяние дециметровых и сантиметровых радиоволн на поверхности взволнованного моря или отражение звуковых волн от морского дна. Эта задача была впервые достаточно полно исследована М. А. Исааковичем [4], который применил для ее решения метод Кирхгофа. Мы будем следовать в основном оригинальной работе [4], а также работе [5], где сняты некоторые ограничения, принятые в ряде предшествующих публикаций.

Для интересующего нас теперь случая больших неровностей воспользуемся формулой Грина (9.13). Пусть на поверхность падает локально плоская скалярная волна

$$U = A(r) e^{ik\varphi(r)}, \quad (52.1)$$

которую мы описываем в приближении геометрической оптики. Это может быть, в частности, плоская или сферическая волна (направленная или ненаправленная). Мы будем предполагать, что ни для падающей волны, ни для рассеянной нет затенений каких-либо элементов поверхности. Очевидно, сколь бы плавной поверхность ни была, это условие исключает слишком малые углы скольжения как для падающей волны, так и для направления наблюдения.

Как известно, при падении плоской волны $U(r)$ на плоскую границу раздела отраженное поле $u(r)$ и его нормальная производная du/dN связаны на этой границе с U и $\partial U / \partial N$ точными соотношениями

$$u(r) = \mathcal{R}U(r), \quad \frac{\partial u}{\partial N} = -\mathcal{R}\frac{\partial U}{\partial N}, \quad (52.2)$$

где \mathcal{R} — коэффициент отражения, зависящий от угла падения. В соответствии с принципом Кирхгофа мы принимаем, что граничные условия (52.2) приближенно справедливы для локально плоской волны (52.1), падающей на локально плоскую поверхность Σ , т. е. на поверхность с плавными неровностями. Разумеется, под \mathcal{R} следует понимать в этом случае локальный коэффициент отражения.

Подставляя (52.2) в формулу Грина (9.11), для вторичного (рассеянного) поля $u_{\text{втор}} \equiv u(r)$ получаем

$$u(r) = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{R} \frac{\partial}{\partial N} \left[U(r') \frac{e^{ikR}}{R} \right] d\Sigma, \quad (52.3)$$

где $R = |r - r'|$ — расстояние от точки наблюдения $r = (\rho, z)$ до точки $r' = (\rho', z')$, лежащей на неровной поверхности $z' =$

$= \zeta(\rho')$. Преобразуем это выражение к виду, удобному для статистического усреднения. Для простоты рассмотрим случай, когда подстилающей поверхностью является плоскость $z' = \zeta = 0$.

Прежде всего, перейдем в (52.3) к интегрированию по подстилающей плоскости $z' = 0$: если $\alpha = 1/\sqrt{1 + (\nabla_{\perp}\zeta)^2}$, то $d\Sigma = d\Sigma_0/\alpha = d^2\rho'/\alpha$. Вводя нормальный к поверхности Σ вектор $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}/\alpha$ с компонентами $(-\nabla_{\perp}\zeta, 1)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial N} \left(U \frac{e^{ikR}}{R} \right) d\Sigma = (\mathbf{N} \nabla') \left(\frac{U e^{ikR}}{R} \right) \frac{d^2\rho'}{\alpha} = (\mathbf{N}_1 \nabla') \left(A \frac{e^{ik(R+\Phi)}}{R} \right) d^2\rho' \quad (52.4)$$

(оператор дифференцирования ∇' действует на координаты точки $\mathbf{r}' = (\rho', z')$).

Далее, пусть точка наблюдения \mathbf{r} удалена от Σ на расстояние, которое превышает и длину волн λ , и высоту неровностей: $kz \gg 1$, $z \gg \sigma_{\zeta}$. Тогда можно дифференцировать в (52.4) только быстро осциллирующую экспоненциальную функцию $e^{ik(R+\Phi)}$, преубрегая производными от медленных функций $A(\mathbf{r})$ и $1/R$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}_1 \nabla') \left(A \frac{e^{ik(R+\Phi)}}{R} \right) &\approx ik \frac{A}{R} e^{ik(R+\Phi)} (\mathbf{N}_1 \nabla') (R + \Phi) = \\ &= -i \frac{A}{R} e^{ik(R+\Phi)} (\mathbf{N}_1 \mathbf{q}) = -i \frac{A}{R} e^{ik(R+\Phi)} [-(\mathbf{q}_{\perp} \nabla_{\perp}\zeta) + q_z], \end{aligned} \quad (52.5)$$

где

$$\mathbf{q} = -k\nabla'(R + \Phi) = k(\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_i) \quad (52.6)$$

— вектор рассеяния. Величина $\mathbf{n}_i = \nabla'\Phi$ представляет собой нормаль к фазовому фронту падающей волны, а единичный вектор

$$\mathbf{n}_s = -\nabla'R \cdot \nabla R = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

указывает направление из точки \mathbf{r}' на точку наблюдения \mathbf{r} .

Учитывая, что для пологих неровностей $\nabla_{\perp}\zeta \ll 1$ и рассеяние на таких неровностях происходит в направлениях, близких к направлению зеркального отражения (в этом направлении $\mathbf{n}_i^2 = \mathbf{n}_1^2$ и $\mathbf{q}_{\perp} = 0$), заменим скалярное произведение $(\mathbf{N}_1 \mathbf{q}) = -(\mathbf{q}_{\perp} \nabla_{\perp}\zeta) + q_z$ просто на q_z . В результате имеем

$$u = -\frac{i}{4\pi} \int \mathcal{R} q_z \frac{A}{R} e^{ik(R+\Phi)} d^2\rho'. \quad (52.7)$$

Все величины под интегралом относятся к точке неровной поверхности $\mathbf{r}' = \{\rho', \zeta(\rho')\}$. Чтобы выделить в явном виде зависимость от возмущения $\zeta(\rho')$, разложим подынтегральные функции в ряды Тейлора по ζ , причем в медленных функциях \mathcal{R} ,

q_z , A и $1/R$ ограничимся нулевым приближением, а в показателе экспоненты учтем еще и линейный по $\zeta(\rho')$ член:

$$\Re q_z \frac{A}{R} \approx \Re q_z \frac{A}{R} \Big|_{\zeta=0}, \quad (52.8)$$

$$\exp \{ik(R+\varphi)\} \approx \exp \{ik(R+\varphi)\}_{\zeta=0} - iq_z \zeta(\rho') \cdot$$

Локальный коэффициент отражения $\Re|_{\zeta=0}$ отвечает здесь направлению зеркального отражения, в котором $n_1^s = n_1^t$, $q_{\perp} = 0$, и является уже детерминированной величиной. Для френелевых коэффициентов отражения, меняющихся (если исключить случай полного отражения) в функции угла падения медленно, это приближение вполне оправдано, поскольку в данном направлении n_s рассеивают только такие участки поверхности Σ (дающие «блики»), которые наклонены под одним и тем же определенным углом (рис. 76).

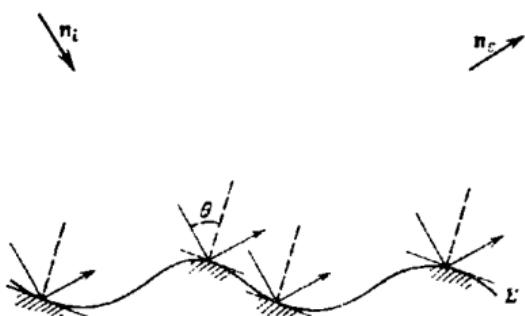


Рис. 76.

амплитудных функциях и квадратичными — в показателе экспоненты, мы совершаём относительную ошибку, не превышающую $k\sigma_z^2/D$, где D — либо радиус кривизны фазового фронта падающей волны, т. е., по существу, расстояние до источника, либо расстояние до точки наблюдения R . Требуя, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{k\sigma_z^2}{D} \ll 1, \quad (52.9)$$

означающее, что источник и точка наблюдения должны находиться в зоне Фраунгофера по отношению к масштабу неровностей σ_z , после подстановки (52.8) в (52.7) находим

$$u = -\frac{i}{4\pi} \int \Re q_z \frac{A}{R} e^{ik(R+\varphi)} - iq_z \zeta d^2 \rho', \quad (52.10)$$

где значения величин q_z , A , R , φ , ζ взяты на плоскости $z=0$.

Более аккуратный расчет, при котором член $(q_{\perp} \nabla_{\perp} \zeta)$ в формуле (52.5) не отбрасывается, а преобразуется путем интегрирования по частям [4], приводит к выражению

$$u = -\frac{i}{4\pi} \int \Re \frac{q_z^2}{q_z} \frac{A}{R} e^{ik(R+\varphi)} - iq_z \zeta d^2 \rho', \quad (52.11)$$

которое отличается от (52.10) заменой q_z на q^2/q_z . В выражениях (52.10) и (52.11) все величины являются функциями точки $\mathbf{r}' = \{\rho', 0\}$ подстилающей плоскости $z=0$, а не точки $\mathbf{r}' = \{\rho', \zeta(\rho')\}$ неровной поверхности Σ , как в (52.7).

Наличие возмущения $\zeta(\rho')$ в показателе экспоненты придает некоторое сходство рассматриваемой задаче с задачей о прохождении волны через фазовый экран [6], но следует помнить, что при рассеянии на щероховатости случайный набег фазы $-q_z \zeta$ зависит (через q_z) от направлений первичной и отраженной волн.

Переходя к статистической части задачи, мы сразу обратимся к случаю *не малых* $q_z \zeta$. Нелинейная зависимость поля u от ζ означает, что для нахождения моментов $u(\mathbf{r})$ необходимо знать уже не моменты случайногополя $\zeta(\rho')$ того же порядка, а его функции распределения.

Согласно (52.11) среднее значение \bar{u} равно

$$\bar{u}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4\pi} \int \mathcal{R} \frac{q^2}{q_z} \frac{A}{R} e^{ik(R+\Phi)} \langle e^{-iq_z \zeta} \rangle d^3 \rho'.$$

Величина

$$\langle e^{iq_z \zeta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq_z \zeta} w_{1\zeta}(\zeta) d\zeta \equiv f_{1\zeta}(q_z),$$

где $w_{1\zeta}(\zeta)$ — плотность вероятностей отклонений, представляет собой характеристическую функцию поля $\zeta(\rho)$. Если это поле однородно, то $f_{1\zeta}(q_z)$ зависит от ρ' лишь неявно — через локальное значение z -компоненты вектора рассеяния $q_z(\rho')$. Таким образом,

$$\bar{u}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4\pi} \int \mathcal{R} \frac{q^2}{q_z} \frac{A}{R} e^{ik(R+\Phi)} f_{1\zeta}^*(q_z) d^3 \rho'. \quad (52.12)$$

Поскольку \bar{u} определяется характеристической функцией ζ , формула (52.12) легко распространяется на случай, когда неровность поверхности представляет суперпозицию *независимых* возмущений $\zeta = \sum_v \zeta_v$. Функция $f_{1\zeta}(q_z)$ равна тогда произведению соответствующих характеристических функций.

Применив для вычисления (52.12) метод стационарной фазы [5], можно показать, что

$$u(\mathbf{r}) = \mathcal{R}_c f_{1\zeta}^*(q_{zc}) u^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (52.13)$$

где нижний индекс «с» означает, что \mathcal{R} и q_z берутся в стационарной точке ρ_c , отвечающей зеркальному лучу, приходящему в точку наблюдения \mathbf{r} (рис. 77). Через $u^{(0)}(\mathbf{r})$ обозначено значение интеграла (52.11) при $\zeta = 0$, т. е. поле волны, отраженной от подстилающей плоскости $z=0$ по законам геометрической оптики.

Например, для плоской звуковой волны (52.11), падающей на абсолютно мягкую поверхность (для нее $\mathcal{R} = -1$), $u^{(0)}$ дается выражением (52.12), а для сферической первичной волны это поле

зеркального (относительно плоскости $z=0$) точечного источника.

Из (52.13) видно, что неровной поверхности можно приписать эффективный коэффициент отражения для среднего поля

$$\mathcal{R}_{\text{эфф}} = \mathcal{R}_e f_{1\zeta}^*(q_{zc}). \quad (52.14)$$

Для идеально отражающей поверхности, очевидно,

$$|\mathcal{R}_{\text{эфф}}| = |f_{1\zeta}(q_{zc})|.$$

В случае малых неровностей ($q_z \sigma_\zeta \ll 1$) приближенно

$f_{1\zeta} \approx 1 + iq_z \bar{\zeta} = 1$, поскольку $\bar{\zeta} = 0$. Это означает, что в первом приближении по ζ неровности не влияют на среднее поле. С ростом $q_z \sigma_\zeta$ среднее поле быстро убывает, так как $f_{1\zeta}(q_z)$ уменьшается.

Найдем теперь среднюю интенсивность флюктуационного поля

$$\bar{I}_1 = \langle |\bar{u}|^2 \rangle = \langle |u|^2 \rangle - |\bar{u}|^2. \quad (52.15)$$

Согласно (52.11)

$$\begin{aligned} \langle |u|^2 \rangle &= \frac{1}{16\pi^2} \int \left(\frac{\mathcal{R} A q^2}{R q_z} \right)' \left(\frac{\mathcal{R}^* A^* q^2}{R q_z} \right)'' e^{ik(R' + \Phi' - R'' - \Phi'')} \times \\ &\quad \times \langle \exp[iq_z \zeta(\rho') - iq_z \zeta(\rho'')] \rangle d^2 \rho' d^2 \rho'', \end{aligned} \quad (52.16)$$

где одним и двумя штрихами отмечены величины, относящиеся к точкам ρ' и ρ'' подстилающей плоскости $z=0$. Выражение

$$\begin{aligned} \langle e^{iq_z \zeta' + iq_z \zeta''} \rangle &= \int e^{iq_z \zeta' + iq_z \zeta''} w_{2\zeta}(\zeta', \zeta'') d^2 \zeta' d^2 \zeta'' = \\ &= f_{2\zeta}(q_z', q_z''; \rho', \rho'') \end{aligned} \quad (52.17)$$

— это двумерная характеристическая функция поля ζ , зависящая от ρ' и ρ'' как от параметров.

Пользуясь формулами (52.12) и (52.16), для интенсивности рассеянной волны находим

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{1}{16\pi^2} \int \left(\frac{\mathcal{R} A q^2}{R q_z} \right)' \left(\frac{\mathcal{R}^* A^* q^2}{R q_z} \right)'' e^{ik(R' + \Phi' - R'' - \Phi'')} \times \\ &\quad \times \mathcal{P}(q_z', q_z''; \rho', \rho'') d^2 \rho' d^2 \rho''. \end{aligned} \quad (52.18)$$

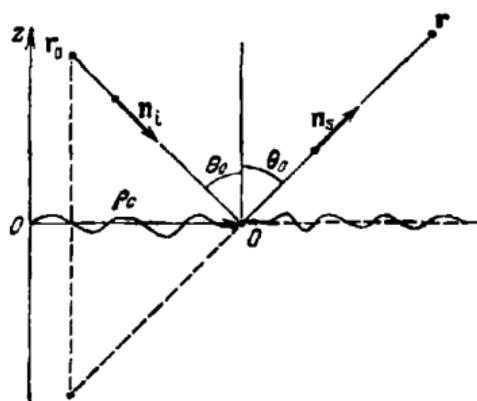


Рис. 77.

Через \mathcal{P} здесь обозначена разность двумерной характеристической функции (52.17) и произведения одномерных характеристических функций:

$$\mathcal{P}(q_z', q_z''; \rho', \rho'') = f_{z\zeta}^*(q_z', -q_z''; \rho', \rho'') - f_z^*(q_z') f_{z\zeta}(q_z''). \quad (52.19)$$

Эта разность обращается в нуль при большом (по сравнению с радиусом корреляции неровностей l_ζ) разнесении точек ρ' и ρ'' , поскольку при $|\rho' - \rho''| \gg l_\zeta$ значения $\zeta(\rho')$ и $\zeta(\rho'')$ становятся некоррелированными, а двумерная характеристическая функция $f_{z\zeta}$ распадается на произведение одномерных характеристических функций. Ниже мы убедимся на одном из примеров, что область, где \mathcal{P} заметно отличается от нуля, в действительности даже меньше, чем круг $|\rho' - \rho''| \leq l_\zeta$.

Воспользуемся указанным свойством функции \mathcal{P} для приближенного вычисления интеграла (52.18). Перейдем от ρ' и ρ'' к переменным $\xi = \rho' - \rho''$ и $\eta = (\rho' + \rho'')/2$. Разность $k(R' + \varphi') - k(R'' + \varphi'')$ в показателе экспоненты разложим в ряд Тейлора по ξ , сохранив в нем только линейный член:

$$k(R' + \varphi') - k(R'' + \varphi'')|_{\xi=0} \approx k(\nabla_{\perp} R + \nabla_{\perp} \varphi)\xi = -q_{\perp}\xi. \quad (52.20)$$

В предэкспоненциальном же множителе положим $\xi = 0$ (т. е. $\rho' = \rho'' = \eta$) и, кроме того, заменим q_z' и q_z'' в аргументах \mathcal{P} значением q_z в «центре тяжести» $\eta = (\rho' + \rho'')/2$, т. е. положим $q_z' \approx q_z'' \approx q_z(\eta)$. Тогда

$$\left(\frac{\partial A q^2}{R q_z} \right)' \left(\frac{\partial^* A^* q^2}{R q_z} \right)^* \mathcal{P}(q_z', q_z''; \rho', \rho'') \approx \frac{|A|^2 q^4}{q_z^2 R_1^2} \mathcal{P}(\xi, \eta),$$

где $R_1 = \sqrt{z^2 + (\rho - \eta)^2}$, $\mathcal{P}(\xi, \eta) \equiv \mathcal{P}(q_z(\eta), q_z(\eta); \rho', \rho'')$.

Распространив, далее, пределы интегрирования по ξ в (52.18) до бесконечности, получаем формулу некогерентного рассеяния (сложения интенсивностей)

$$\bar{I}_1 = \int \frac{|A|^2}{R_1^2} \sigma d^2\eta, \quad (52.21)$$

в которой величина

$$\sigma = \frac{|A|^2 q^4}{16\pi^2 q_z^2} \int \exp(-iq_{\perp}\xi) \mathcal{P}(\xi, \eta) d^2\xi \quad (52.22)$$

имеет смысл сечения рассеяния единичной площадки.

Область применимости выражения (52.21) определяется теми приближениями, которые были сделаны при его выводе. Наиболее жестким оказывается условие

$$R \gg \sqrt{k l_p^3}, \quad (52.23)$$

при выполнении которого можно отбросить кубичный член в разложении (52.20) (квадратичный член и вообще слагаемые четных степеней в этом разложении отсутствуют). Здесь R — расстояние от точки η на плоскости $z=0$ до точки наблюдения или до источника, а l_p — характерный масштаб изменения \mathcal{P} по переменной ξ . В случае малых неровностей, когда

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\xi, \eta) \approx & \left\langle \left[1 - iq_z(\xi' - \xi'') - \frac{q_z^2}{2} (\xi' - \xi'')^2 \right] \right\rangle - \\ & - \left\langle \left[1 - iq_z\xi' - \frac{q_z^2}{2} \xi'^2 \right] \right\rangle \left\langle \left[1 + iq_z\xi'' - \frac{q_z^2}{2} \xi''^2 \right] \right\rangle \approx q_z^2 \psi_\xi(\xi), \end{aligned} \quad (52.24)$$

характерный масштаб l_p совпадает, очевидно, с радиусом корреляции неровностей l_ξ . В противоположном предельном случае $q_z \sigma_\xi \gg 1$ масштаб l_p по порядку величины равен $l_\xi / q_z \sigma_\xi$. В этом можно убедиться, скажем, на примере двумерного нормального распределения

$$w_{\xi\xi}(\xi', \xi'') = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2 \sqrt{1 - K_\xi^2(\xi)}} \exp \left\{ -\frac{\xi'^2 + \xi''^2 - 2K_\xi(\xi)\xi'\xi''}{2\sigma_\xi^2(1 - K_\xi^2(\xi))} \right\}, \quad (52.25)$$

для которого

$$\mathcal{P}(\xi, \eta) = e^{-q_z^2 \sigma_\xi^2} [e^{q_z^2 \sigma_\xi^2 K_\xi(\xi)} - 1]. \quad (52.26)$$

Оценка $l_p \sim l_\xi / q_z \sigma_\xi$ выводится отсюда так же, как и аналогичная оценка $l_s \sim l_s / \sigma_s$ в случае фазового экрана (см. § 10), причем роль фазового набега $\sigma_s = \sqrt{\langle S^2 \rangle}$ в данном случае играет «фазовая высота» неровностей $q_z \sigma_z$ [6].

В обоих предельных случаях $q_z \sigma_\xi \ll 1$ и $q_z \sigma_\xi \gg 1$ величина $\sqrt{k l_p^2}$ значительно меньше, чем расстояние $k l_\xi^2$, начиная с которого точка наблюдения находится в фраунгоферовой зоне отдельной неровности. Таким образом, формула некогерентного рассеяния (52.21) становится справедливой еще до удаления точки наблюдения и источника во фраунгоферову зону отдельной неровности [5].

Сечение рассеяния σ существенно при расчете энергетических характеристик поля как при рассеянии на площадке конечных размеров, так и в случае неограниченной неровной поверхности. Вычислить интеграл (52.22) точно удается лишь в немногих случаях, обычно он оценивается приближенно. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. В случае малых неровностей ($q_z \sigma_\xi \ll 1$), когда, в соответствии с (52.24), $\mathcal{P} \approx q_z^2 \psi_\xi(\xi)$, сечение σ выражается через трансформанту Фурье корреляционной функции $\psi_\xi(\xi)$, т. е.

пропорционально спектральной плотности (51.15):

$$\sigma = \frac{|\mathcal{R}|^2}{4} q^4 F_\zeta(q_\perp). \quad (52.27)$$

Для абсолютно жесткой и абсолютно мягкой поверхностей ($|\mathcal{R}| = 1$) это выражение эквивалентно результатам теории возмущений (см. задачу 1), поскольку в направлениях, близких к направлению зеркального отражения, $q \approx |q_z| = 2k|n_z|$.

2. При вычислении интеграла (52.22) в противоположном случае неровностей, больших по сравнению с длиной звуковой волны ($q_z \sigma \gg 1$), можно использовать то обстоятельство, что основной вклад в (52.22) вносит область малых ξ , а второе слагаемое в выражении (52.19) при $q_z \sigma \gg 1$ пренебрежимо мало по сравнению с первым, и, следовательно,

$$\mathcal{P}(\xi, \eta) \approx f_{2\zeta}^*(q_z, -q_z, \rho', \rho'') = \langle e^{-i q_z (\xi' - \xi'')} \rangle. \quad (52.28)$$

Вычислим в качестве примера сечение рассеяния σ для неровностей, распределенных по нормальному закону (52.25) и изотропных в плоскости $z=0$. Изотропность поля ζ означает, что коэффициент корреляции зависит только от модуля вектора ξ : $K_\zeta = K_\zeta(\xi)$. Разлагая K_ζ в формуле (52.26) в ряд Тейлора и пренебрегая единицей по сравнению с экспонентой в квадратных скобках, получаем для \mathcal{P} приближенное выражение

$$\mathcal{P} \approx \exp \left\{ \frac{q_z^2 \sigma_\zeta^2}{2} K_\zeta(0) \xi^2 \right\}. \quad (52.29)$$

Подстановка (52.29) в (52.22) дает после интегрирования

$$\sigma = \frac{|\mathcal{R}|^2 q^4}{q_z^4} \frac{1}{8 \log^2[-K_\zeta(0)]} \exp \left\{ -\frac{q_\perp^2}{2 q_z^2 \sigma_\zeta^2 [-K_\zeta(0)]} \right\}. \quad (52.30)$$

Этой формулой можно пользоваться в случае неровностей, обладающих единственным пространственным масштабом (радиусом корреляции) $l_\zeta \sim [-K_\zeta(0)]^{-1/2}$. Если же коэффициент корреляции убывает не монотонно, а имеет осциллирующий характер (как, например, в случае морского волнения), то, наряду с окрестностью точки $\xi=0$, надо учитывать вклад и других точек, в которых \mathcal{P} имеет локальные максимумы (пример такого расчета приведен в [4]).

3. Для высоких неровностей ($q_z \sigma \gg 1$), обладающих единственным радиусом корреляции, сечение рассеяния можно рассчитать и без предположения о нормальном распределении [7, 8]. Полагая, как и ранее, что основной вклад в интеграл (52.22) вносит окрестность точки $\xi=0$, разложим разность $\xi' - \xi''$ в формуле (52.28) в ряд Тейлора по $\xi = \rho' - \rho''$:

$$\xi' - \xi'' = \zeta(\rho') - \zeta(\rho'') = \zeta(\eta + \xi/2) - \zeta(\eta - \xi/2) \approx \xi \nabla_\perp \zeta(\eta).$$

Тогда $\mathcal{P} \approx \langle \exp \{-iq_z \xi \nabla_{\perp} \zeta\} \rangle$ и

$$\sigma = \frac{|\mathcal{R}|^2 q_z^4}{16\pi^2 q_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iq_z \xi) \langle \exp(-iq_z \xi v) \rangle d^3 \xi, \quad (52.31)$$

где вектор $v = \nabla_{\perp} \zeta$ характеризует случайные наклоны неровной поверхности. Но $\langle \exp(iav) \rangle = f_v(a)$ — это характеристическая функция v , связанная с функцией распределения наклонов $w_v(v)$ преобразованием Фурье:

$$f_v(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iav) w_v(v) d^3 v,$$

так что обратное преобразование дает

$$w_v(v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_v(a) \exp(-iav) d^3 a. \quad (52.32)$$

Если ввести в (52.31) новую переменную интегрирования $a = q_z \xi$, то, в соответствии с (52.32), сечение σ можно выразить через $w_v(q_z/q_z)$:

$$\sigma = \frac{|\mathcal{R}|^2 q_z^4}{4q_z^2} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iq_z a/q_z) f_v(a) d^3 a = \frac{|\mathcal{R}|^2 q_z^4}{4q_z^2} w_v\left(\frac{q_z}{q_z}\right). \quad (52.33)$$

Таким образом, сечение σ пропорционально вероятности такого наклона, при котором происходит зеркальное отражение. Сечение максимально при $q_z = 0$, поскольку $w_v(v)$ имеет максимум при

$v = \nabla_{\perp} \zeta = 0$ (наиболее вероятная ориентация элементов неровной поверхности — параллельная плоскости $z=0$), а увеличение q_z приводит к уменьшению σ , в соответствии с тем, что большие наклоны менее вероятны.

Если неровности распределены по нормальному закону и изотропны в плоскости $z=0$, то формула (52.33), как легко убедиться, переходит в (52.30). Отметим еще, что формулы (52.30)

и (52.33) соответствуют вычислению сечения рассеяния (52.22) в приближении геометрической оптики. Это ясно уже из того, что обе формулы не содержат длины волны, поскольку отношения q_z/q_z и q/q_z не зависят от λ .

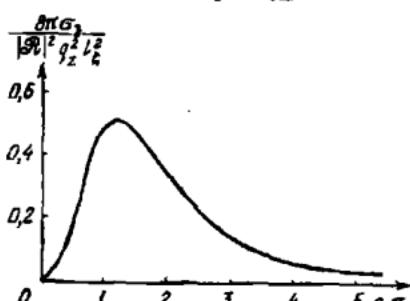


Рис. 78.

4. Для изотропного поля ζ , распределенного по нормальному закону с гауссовым коэффициентом корреляции $K_\zeta(r) = e^{-r^2/2\sigma_\zeta^2}$, в работе [9] было получено точное выражение для сечения σ в направлении зеркального отражения ($q_\perp = 0$):

$$\sigma_z = \frac{|\mathcal{R}|^2 q_z^2 / \zeta}{8\pi} e^{-q_z^2 \sigma_\zeta^2} [\text{Ei}(q_z^2 \sigma_\zeta^2) - C - 2 \ln q_z \sigma_\zeta]. \quad (52.34)$$

Здесь $C = 0,577$ — постоянная Эйлера, а $\text{Ei}(z)$ — интегральная экспонента (σ_z при $q_\perp \neq 0$ выражается в виде бесконечного ряда). График нормированного сечения $8\pi\sigma_z/|\mathcal{R}|^2 q_z^2 \zeta^2$ в зависимости от $q_z \sigma_\zeta$ показан на рис. 78. Сначала σ_z растет, как σ_ζ^2 , в соответствии с первым приближением метода малых возмущений. При $q_z \sigma_\zeta \approx 1$ сечение достигает максимума, а при больших $q_z \sigma_\zeta$ убывает по закону $1/\sigma_\zeta^2$. Разумеется, полное (пронтегрированное по всем углам) сечение рассеяния продолжает расти при $q_z \sigma_\zeta \rightarrow \infty$, но при этом происходит пространственное перераспределение рассеянного излучения, сопровождающееся уширением индикатрисы рассеяния и уменьшением σ_z .

§ 53. Дополнительные замечания. Другие подходы

В большинстве работ по рассеянию на шероховатых поверхностях используются, как уже было сказано, метод возмущений и метод Кирхгофа. Приведем некоторые результаты, полученные этими методами, и укажем также на другие подходы к проблеме, основываясь в первую очередь на монографии [1], в которой подробно освещены затрагиваемые здесь вопросы, а также на обзоре [2].

1. Рассеяние электромагнитных волн отличается от скалярного случая только учетом поляризации. Для первичной волны, заданной в приближении геометрической оптики, вывод динамических соотношений в принципе не отличается от скалярной задачи, но выкладки становятся более громоздкими, поскольку вместо (9.13) следует пользоваться векторным вариантом формулы Грина. Кроме того, при расчетах по методу Кирхгофа необходимо учитывать различие локальных френелевских коэффициентов отражения для двух ортогональных поляризаций поля падающей волны.

Наиболее простые формулы получаются при рассеянии на идеально проводящей поверхности. В частности, выражение для электрического вектора рассеянной волны при применении метода Кирхгофа можно получить из формулы (52.11), положив в ней $\mathcal{R} = 1$ и заменив скаляр q^2 вектором $\mathbf{e}_0 q^2 - 2\mathbf{q}(\mathbf{e}_0 \mathbf{q})$, где \mathbf{e}_0 — единичный вектор поляризации первичной волны. С этой заменой можно

вывести затем формулы для средних значений напряженностей и для билинейных характеристик рассеянного электромагнитного поля (средней интенсивности, среднего вектора Пойнтинга, элементов поляризационной матрицы). На расстояниях $R \gg \sqrt{k l_p}$ от неровной поверхности для билинейных характеристик оказываются справедливыми формулы некогерентного рассеяния типа (52.21), разумеется, с заменой интенсивности $I_0 = |A|^2$ более сложным выражением, зависящим от ϵ_0 . Существенно, однако, что в подынтегральные выражения для билинейных величин будет входить сечение (52.22), вычисленное при скалярной постановке задачи, так что результаты скалярной теории можно непосредственно использовать и в теории рассеяния электромагнитных волн. Например, дисперсия $\bar{I}_1 = \langle |\vec{E}|^2 \rangle$ поля электромагнитной волны, рассеянной на неровной поверхности, определяется формулой (52.21), если понимать под σ величину $\sigma = \gamma \sigma_{\text{ск}}$, где $\sigma_{\text{ск}}$ дается выражением (52.22), а $\gamma = 1 - |\epsilon_0|^2/q^2$ — поляризационный множитель.

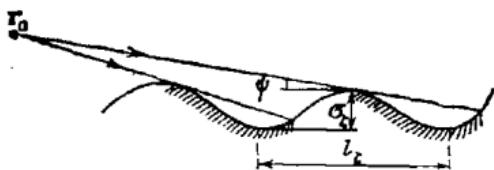


Рис. 79.

2. Учет затенений в методе Кирхгофа. Мы уже указывали на то, что с увеличением высоты неровностей и с уменьшением

угла скольжения рано или поздно начинается затенение отдельных элементов поверхности: часть шероховатой поверхности оказывается неосвещенной (рис. 79), а часть освещенных участков не будет видна из точки наблюдения. Нетрудно оценить диапазон углов скольжения ψ , в котором еще можно не учитывать эффект затенения: очевидно, если l_z — размер неровностей, а σ_z — их среднеквадратичная высота, то затенениями можно пренебречь при условии $\psi \gg \sigma_z/l_z$.

Вследствие затенений отдельных элементов поверхности происходит уменьшение сечения рассеяния σ по сравнению со значением, даваемым выражением (52.22). Величина фактора ослабления определяется отношением площади освещенной части поверхности к полной поверхности, причем освещенные участки можно выделить, исходя из простых геометрических соображений: на освещенных участках падающий луч пересекает неровную поверхность один раз, тогда как затененным участкам отвечает трех-, пяти- и т. д. кратное пересечение. Таким образом, дело сводится к нахождению вероятности того, что луч пересечет заданную случайную поверхность только один раз. Несмотря на простоту постановки задачи, ее решение оказывается довольно сложным. Результаты исследований этого вопроса (и ряда других аспектов проблемы) суммированы в книге [1].

3. Рассеяние при наложении мелкомасштабных и крупномасштабных неровностей (комбинированный подход). Реальные поверхности часто содержат как мелкие ($kl_t \ll 1$), так и крупные ($kl_t \gg 1$) неровности. Такие поверхности можно рассматривать как крупномасштабные образования, на которые наложена мелкая рябь («шероховатый рельеф»). В то время как у крупных неровностей диаграмма рассеяния сравнительно узкая, мелкие неровности рассеивают практически во все стороны и их влияние в направлении зеркального луча пренебрежимо мало. Но под малыми углами скольжения рассеяние обусловлено именно мелкомасштабной компонентой. Она же определяет форму спектра рассеянного поля в направлениях, не совпадающих с зеркально отраженным лучом. Эти и некоторые другие соображения позволяют качественно объяснить ряд экспериментальных данных, в частности, особенности рассеяния на взволнованной морской поверхности. Однако теоретический анализ рассеяния волн на поверхности типа «шероховатый рельеф» наталкивается на определенные трудности: исследование здесь не может быть проведено ни методом возмущений (поскольку высота крупных неровностей не мала), ни методом Кирхгофа (поскольку имеется мелкомасштабная компонента).

Б. Ф. Курьянов [10] предложил комбинированный метод расчета, в котором в качестве цулевого приближения взято кирхгофово решение типа (52.11), отвечающее плавным крупномасштабным неровностям, а влияние мелкой ряби учтено в первом порядке теории возмущений, причем оба типа неровностей считаются статистически независимыми. Этот метод был развит в дальнейшем в работах [11, 12]. Несколько иной подход применен в [13, 14], где использована формула сложения интенсивностей полей, рассеянных мелкомасштабными неровностями.

Возможности комбинированного подхода ограничены двумя условиями: во-первых, результаты расчета не должны зависеть от способа разбиения отклонения $\zeta(x)$ на независимые части $\mu(x)$ и $\eta(x)$, и, во-вторых, должны выполняться условия применимости метода возмущений для расчета рассеяния на мелкомасштабной компоненте. Оказывается, что эти требования удовлетворяются не для всех видов волнения [1].

4. Учет многократного рассеяния. Как в методе Кирхгофа, так и в методе малых возмущений (если ограничиваться первым приближением) рассматриваются только однократно рассеянные (или однократно отраженные) поля. Это допустимо, пока неровности достаточно пологи и сравнительно невысоки. С ростом высоты неровностей σ_t и (или) с увеличением их наклона sl_t необходимо учитывать многократное рассеяние волн.

Учет многократного рассеяния удобно осуществить на основе интегрального уравнения для функции Грина [1]. Если линеа-

ризователь интегральное уравнение по возмущению ζ , то из него можно вывести уравнение Дайсона для средней функции Грина $\langle G \rangle$ и уравнение Бете—Солпитера для функции когерентности $\langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle$. Оба уравнения можно далее решить приближенно, первое — в приближении Бурре, а второе — в лестничном приближении. Как и в случае объемного рассеяния, эти способы решения указанных уравнений эквивалентны приближенному (частичному) суммированию бесконечного ряда теории возмущений.

Описанный подход оказался весьма эффективным при решении ряда задач, в частности при рассмотрении волноводов с шероховатыми стенками. Здесь удается вычислить коэффициенты затухания нормальных волн, коэффициенты трансформации из одной моды в другую и вывести уравнение переноса излучения в волноводе, учитывающее взаимную трансформацию волн [1]. Кроме того, при учете многократного рассеяния можно обосновать и уточнить так называемые «нелокальные» граничные условия для среднего поля, которые были ранее выведены иным способом [1].

5. Крутые неровности. Несмотря на значительные успехи теории рассеяния волн на плавных шероховатых поверхностях, трудной задачей остается случай рассеяния на плавных, но *крутых* неровностях, к которому нельзя подойти при помощи существующих приближенных методов. Вполне естественны поэтом попытки *модельного* описания подобных неровностей — либо в виде хаотически разбросанных по плоскости полусфер, полуцилиндров и т. д. (типичная модель такого рода описана, например, в [15]), либо в виде плоских площадок со случайнym распределением наклонов. Вторая модель широко используется, в частности, в оптических расчетах отражения света как при помощи метода геометрической оптики [16, 17], так и с поправками на дифракцию, которая учитывается введением индикаторов рассеяния элементарных площадок [18].

Модельному описанию присущи, по крайней мере, два недостатка. Во-первых, область применимости результатов, полученных при помощи конкретных моделей, сильно ограничена. Во-вторых, погрешности результатов, возникающие из-за упрощающих предположений при расчетах, с трудом поддаются оценке. Тем не менее к модельному описанию крутых неровностей прибегают довольно часто — просто в силу отсутствия более общих методов. Более того, иногда прибегают к моделированию не формы поверхности, а самого закона рассеяния, т. е. функции $\sigma(\theta, \phi)$. Наиболее известной моделью такого рода является закон Ламберта, согласно которому $\sigma(\theta) = \text{const} \cdot \cos \theta$. Этот простой закон, однако, принадлежит к числу наименее обоснованных — как теоретической, так и с экспериментальной точки зрения.

Задачи

1. Показать, что в случае крупномасштабных неровностей ($kl_\zeta \gg 1$) сечения рассеяния, вычисленные по методу возмущений для абсолютно мягкой и абсолютно жесткой поверхности, практически одинаковы.

Решение. При $kl_\zeta \gg 1$ спектр $F_\zeta(q_\perp)$ заметно отличается от нуля только в узком интервале $|q_\perp| \leqslant 1/l_\zeta$, т. е. в окрестности направления зеркального отражения, для которого $q_\perp = k(n_\perp^i - n_\perp^r) = 0$. В этом интервале $n_\perp^i \approx n_\perp^r$, и поэтому множители $(n_z^i n_z^r)^2$ в (51.18) и $(1 - n_\perp^i n_\perp^r)^2$ в (51.28) приближенно совпадают и равны $(n_z^i)^4 = \cos^4 \theta_0$. В результате

$$\sigma_{jk} \approx \sigma_{ii} \approx 4k^4 (n_z^i)^4 F_\zeta(q_\perp) = 4(k \cos \theta_0)^4 F_\zeta(q_\perp).$$

2. Оценить поперечный радиус корреляции поля, рассеянного на поверхности с мелкомасштабными неровностями ($kl_\zeta \ll 1$), в двух случаях: 1) точка наблюдения удалена от неровной поверхности на расстояние R_1 , большее диаметра освещенной площадки, и 2) диаметр освещенной площадки L определяется шириной диаграммы направленности облучателя $\gamma = \lambda/d$ (d — поперечник антенны).

Решение. В первом случае, в соответствии с теоремой Ван-Циттерта — Церникса, поперечный радиус корреляции l_\perp определяется величиной угла $\Delta\theta \sim L/R_1$, под которым видна рассеивающая площадка с расстояния R_1 : $l_\perp \sim \lambda/\Delta\theta \sim \lambda R_1/L$. В частности, если $\Delta\theta \sim 1$, то $l_\perp \sim \lambda$.

Во втором случае $L \sim \gamma R_0 \sim \lambda R_0/d$, где R_0 — расстояние между облучателем и центром освещенного пятна на поверхности. Поперечный радиус корреляции на расстоянии R_1 от центра освещенного пятна равен поэтому $l_\perp \sim \lambda R_1/L \sim dR_1/R_0$. При рассеянии назад, когда $R_1 \sim R_0$, радиус корреляции совпадает с диаметром антенны, $l_\perp \sim d$, как и в случае рассеяния на объемных неоднородностях (см. задачу 3 к гл. IV).

3. Оценить поперечный (по отношению к зеркальному лучу) радиус корреляции рассеянного поля в случае крупномасштабных неровностей поверхности.

Решение. Оценки радиуса корреляции проще всего получить, используя результаты, найденные для фазового экрана [6]. Если плоская волна падает нормально на бесконечную поверхность с радиусом корреляции неровностей $l_\zeta \gg \lambda$ и среднеквадратичным отклонением σ_ζ , то отраженная волна оказывается промодулированной по фазе с дисперсией $\sigma_\zeta^2 = (2k\sigma_\zeta)^2$. В соответствии с п. 2 в § 10 имеем при этом $l_a \approx l_\zeta$ при $2k\sigma_\zeta \ll 1$ (малые неровности) и $l_a \approx l_\zeta/2k\sigma_\zeta$ при $2k\sigma_\zeta \gg 1$ (высокие неровности).

Если шероховатая поверхность облучается не плоской волной, то приведенные оценки справедливы только на малых расстояниях от плоскости $z=0$. На больших же расстояниях l_a будет увеличиваться (или уменьшаться) в соответствии с изменением сечения лучевых трубок, отвечающих зеркально отраженным (от плоскости $z=0$) лучам. Например, если на шероховатую поверхность падает сферическая волна, то

$$l_a \approx \frac{R_1}{R_0} l_\zeta \text{ при } 2k\sigma_\zeta \ll 1, \quad l_a \approx \frac{R_1}{R_0} \frac{l_\zeta}{2k\sigma_\zeta} \text{ при } 2k\sigma_\zeta \gg 1,$$

где R_1 — расстояние от точки зеркального отражения до точки наблюдения, а R_0 — от точки зеркального отражения до источника.

ЛИТЕРАТУРА

К главе I

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1967.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. ч. I.—М.: Наука, 1965, ч. II, 1967.
3. Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений.—ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 6.
4. Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве.—ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 115.
5. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флюктуирующими параметрами.—М.: Наука, 1975.
6. Furutsu K. On Statistical Theory of Electromagnetic Waves in a Fluctuating Medium.—J. Res. NBS, 1963, v. 67, p. 303.
7. Новиков Е. А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности.—ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 1919.
8. Donsker M. D. On Function Space Integrals.—Proc. of a Conference on the Theory and Applications of Analysis in Function Space—Cambridge. M. I. T. Press, 1964, p. 17—30.
9. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Фейзуллин З. И. Флуктуации сигнала от источника, движущегося в многомасштабной случайно-неоднородной среде.—Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, с. 1758.

К главе II

1. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике.—М.: Изд. МГУ, 1971.
2. Ахманов С. А. Взаимодействие случайных волн в нелинейных средах.—Изв. вузов: Радиофизика, 1974, т. 17, с. 541.
3. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы.—М.: Атомиздат, 1971.
4. Кадомцев Б. Б., Канторович В. М. Теория турбулентности в гидродинамике и плазме.—Изв. вузов: Радиофизика, 1974, т. 17, с. 511.
5. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана.—М.: Мир, 1969.
6. Мандель Л., Вольф Э. Когерентные свойства оптических полей.—УФН, 1965, т. 87, с. 491, ч. I; т. 88, с. 347, ч. II; т. 88, с. 619, ч. III.
7. Глаубер Р. Дж. Оптическая когерентность и статистика фотонов.—В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика.—М.: Мир, 1966, с. 91.
8. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики.—М.: Мир, 1970.
9. Нерина Я. Когерентность света.—М.: Мир, 1974.
10. Лоудон Р. Квантовая теория света.—М.: Мир, 1976.
11. Рыжков Ю. А. Тепловое излучение в хаотически неоднородной прозрачной среде.—ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 218.

12. Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. Статистические проблемы в теории дифракции.—УФН, 1975, т. 115, с. 239.
13. Нейл Э. О. Введение в статистическую оптику.—М.: Мир, 1966.
14. Строук Дж. Введение в когерентную оптику и голографию.—М.: Мир, 1967.
15. Шестов Н. С. Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех.—М.: Сов. радио, 1967.
16. Зверев В. А., Орлов Е. Ф. Оптические анализаторы.—М: Сов. радио, 1971.
17. Ван-дер-Люйт А. Когерентная оптическая обработка информации.—ТИИЭР, 1974, т. 62, с. 5.
18. Кловский Д. Л., Соффер В. А. Обработка пространственно-временных сигналов.—М.: Связь, 1976.
19. Передача информации по каналам, содержащим статистически неоднородные среды./Под ред. В. И. Сифорова, А. В. Просина.—М.: Наука, 1976.
20. Бакут П. А., Устинов Н. Д., Троицкий И. Н., Свиридов К. Н. Методы обработки световых полей при наблюдении объектов через турбулентную среду: обзор.—Зарубежная радиоэлектроника, 1976, вып. 7, с. 15, ч. I, вып. 9, с. 3, ч. II; 1977, вып. 1, с. 3, ч. III; вып. 3, с. 55, ч. IV.
21. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.—М.: Наука, 1970.
22. Beran M. J., Parrent G. B. Theory of Partial Coherence.—N. Y., 1964.
23. Денисов Н. Г. О дифракции волн на хаотическом экране.—Изв. вузов: Радиофизика, 1961, т. 4, с. 630.
24. Booker H. G., Ratcliffe J. A., Schinn D. H. Diffraction from an Irregular Screen with Application to Ionospheric Problems.—Phil. Trans. Roy. Soc., 1950, v. A 242, p. 579.
25. Hewish A. The Diffraction of Radio Waves in Passing through a Phase-Changing Ionosphere.—Proc. Roy. Soc., 1951, v. A 209, p. 81.
26. Fejer J. A. The Diffraction of Waves Passing through an Irregular Refracting Medium.—Proc. Roy. Soc., 1953, v. A 220, p. 455.
27. Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде.—УФН, 1970, т. 102, с. 3.
28. Ерхимов Л. М., Максименко О. И. Исследование неоднородностей ионосферы при помощи ИКЗ.—В сб.: Дрейфы и неоднородности в ионосфере.—М.: Наука, 1973, с. 41.
29. Briggs B. H. Ionospheric Irregularities and Radio Scintillations.—Contemp. Phys., 1975, v. 16, p. 469.
30. Дьяков Ю. Е. Некоторые статистические характеристики огибающей и фазы нестационарного гауссового процесса.—Радиотехника и электроника, 1963, т. 8, с. 1812.
31. Всехсвятская И. С. Статистические характеристики сигналов, отраженных от ионосферы.—М.: Наука, 1975.
32. Альбер Я. И., Ерхимов Л. М., Рыжов В. А., Урлдов В. П. О статистических свойствах флюктуаций интенсивности волны за хаотическим экраном.—Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, с. 1371.
33. Salpeter E. E. Interplanetary Scintillations.—Astrophys. J., 1967, v. 147, p. 433.
34. Шишов В. И. Дифракция волн на сильно преломляющем фазовом экране.—Изв. вузов: Радиофизика, 1971, т. 14, с. 85.
35. Якушкин И. Г. Флюктуации интенсивности поля плоской волны за хаотическим фазовым экраном.—Изв. вузов: Радиофизика, 1974, т. 17, с. 1350.
36. Франсон М., Сланский С. Когерентность в оптике.—М.: Наука, 1967.
37. Загрев В. А. Радиооптика.—М.: Сов. радио, 1975.
38. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн.—М.: Сов. радио, 1970.

39. Курьянов Б. Ф. Пространственная корреляция полей, излученных случайными источниками на плоскости.—Акустич. ж., 1964, т. 9, с. 441.
40. Долин Л. С. О лучевом описании слабо неоднородных волновых полей.—Изв. вузов: Радиофизика, 1964, т. 7, с. 559.
41. Чандraseкар С. Перенос лучистой энергии.—М.: ИЛ, 1953.
42. Железняков В. В. Радиоизлучение Солнца и планет.—М.: Наука, 1964.
43. Горелик Г. С. Колебания и волны.—2-е изд.—М.: Физматгиз, 1959.
44. Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Статистические явления при дифракции волн.: Лекции на IV Всес. школе по дифракции и распространению волн.—Рязань: Изд. Рязанского радиотехнического института, 1976.
45. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики.—М.: Наука, 1975.

К главе III

1. Рытов С. М. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения.—М.: Изд. АН СССР, 1953.
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны.—М.: Сов. радио, 1957.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.—М.: Гостехиздат, 1957.
4. Рытов С. М. О тепловых флуктуациях в распределенных системах.—ДАН СССР, 1956, т. 110, с. 371.
5. Рытов С. М. Корреляционная теория тепловых флуктуаций в изотропной среде.—ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 166.
6. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике.—М.: Наука, 1967.
7. Лифшиц Е. М. Теория молекулярных сил притяжения между твердыми телами.—ЖЭТФ, 1955, т. 29, с. 94.
8. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных тел.—М.: Госатомиздат, 1961.
9. Гричберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.—М.: Изд. АН СССР, 1948.
10. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволни над земной поверхностью.—М.: Изд. АН СССР, 1961.
11. Дзялошинский И. Е., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Ван-дер-Ваальсовы силы в жидких пленках.—ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 229; Общая теория Ван-дер-Ваальсовых сил.—УФН, 1961, т. 73, с. 381.
12. Абrikosov A. A., Gor'kov L. P., Dzjalošinskij I. E. Metody kvantovoj teorii polja v statisticheskoj fizike.—M.: Fizmatgiz, 1962.
13. Леонтьевич М. А. Обобщение формул Крамерса—Кронига на среды с пространственной дисперсией.—ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 907.
14. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме.—В сб.: Вопросы теории плазмы.—М.: Госатомиздат, 1963, вып. 3.
15. Левин М. Л., Рытов С. М. «Кирхгофовская» форма флуктуационно-диссипативной теоремы для распределенных систем.—ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 1382.
16. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.—2-е изд.—М.: Наука, 1967.

К главе IV

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1967.
2. Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде.—УФН, 1970, т. 102, с. 3.

3. Горелик Г. С. К теории рассеяния радиоволны на блуждающих неоднородностях.—Радиотехника и электроника, 1956, т. 1, с. 695.
4. Горелик Г. С. О влиянии корреляции рассеянителей на статистические свойства рассеянного излучения.—Радиотехника и электроника, 1957, т. 2, с. 1227.
5. Родак М. И., Францесон А. В. О применении теории турбулентности к рассеянию радиоволны на блуждающих неоднородностях.—Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, с. 398.
6. Родак М. И. О рассеянии немонохроматического излучения на блуждающих неоднородностях.—Радиотехника и электроника, 1960, т. 5, с. 1370.
7. Денисов Н. Г. Дифракция электромагнитных волн в гиротропном слое, содержащем статистические неоднородности.—Изв. вузов: Радиофизика, 1960, т. 3, с. 393.
8. Рытов С. М. Корреляционная теория рассеяния света.—ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 514, 679.
9. Вихренко В. С. Теория деполяризованного молекулярного рассеяния света.—УФН, 1974, т. 113, с. 627.
10. Некогерентное рассеяние радиоволны: Сб. переводных статей./Под ред. В. А. Рудакова.—М.: Мир, 1965.
11. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В. и др. Коллективные колебания в плазме.—М.: Атомиздат, 1964.
12. Ван-дер-Хюст. Рассеяние света малыми частицами.—М.: ИЛ, 1961.
13. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.—М.: Наука, 1970.
14. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.—2-е изд.—М.: Наука, 1967.
15. Денисов Н. Г. О рассеянии волн в условиях полного отражения.—Изв. вузов: Радиофизика, 1961, т. 7, с. 378.
16. Горышник Л. Л., Кравцов Ю. А. Корреляционная теория рассеяния радиоволны в полярной ионосфере.—Геомагнетизм и аэрономия, 1969, т. 9, с. 38.
17. Миддал А. Б., Крайнов В. П. Приближенные методы квантовой механики.—М.: Наука, 1966.

К главе V

1. Красильников В. А. О распространении звука в турбулентной атмосфере.—ДАН СССР, 1945, т. 47, с. 486.
2. Bergman P. G. Propagation of Radiation in a Medium with Random Inhomogeneities.—Phys. Rev., 1946, v. 70, p. 486.
3. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1967.
4. Чернов Л. А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями.—М.: Наука, 1975.
5. Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде.—УФН, 1970, т. 102, с. 3.
6. Рытов С. М. О переходе к геометрическому приближению в электродинамике сплошных сред.—ДАН СССР, 1938, т. 18, с. 283.
7. Кравцов Ю. А. Сильные флуктуации амплитуды световой волны и вероятность образования каустик.—ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 798.
8. Кравцов Ю. А. О двух новых асимптотических методах в теории распространения волн в неоднородных средах.—Акустич. ж., 1968, т. 14, с. 1.
9. Кляцкин В. И., Татарский В. И. О диффузии лучей в среде со случайными неоднородностями.—Изв. вузов: Радиофизика, 1971, т. 14, с. 706.
10. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами.—М.: Наука, 1975.
11. Денисов Н. Г. Рассеяние волн в плоскослоистой среде.—Изв. вузов: Радиофизика, 1958, т. 1, с. 34.

12. Голынский С. М., Гусев В. Д. Статистика лучей в неоднородной изотропной среде.—Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, с. 630.
13. Голынский С. М., Гусев В. Д. Траектории лучей в рефрагирующей рассеивающей среде.—Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, с. 1303.
14. Денисов И. Г., Ерухимов Л. М. Статистические свойства флуктуаций фазы при полном отражении волн от ионосферного слоя.—Геомагнетизм и аэрономия, 1966, т. 6, с. 695.
15. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Эффект усиления обратного рассеяния на телах, помещенных в среду со случайными неоднородностями.—Изв. вузов: Радиофизика, 1973, т. 16, с. 1064.

К главе VI

1. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности.—М.: Изд. АН СССР, 1961.
2. Осташев В. Е., Татарский В. И. Ряд по кратности обратного рассеяния в задачах о распространении волн в неоднородных средах.—Изв. вузов: Радиофизика, 1978, т. 21, с. 714.
3. Рытов С. М. Дифракция света на ультразвуковых волнах.—Изв. АН СССР: Сер. физ., 1937, вып. 2, с. 223.
4. Обухов А. М. О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света.—Изв. АН СССР: Сер. геофиз., 1953, вып. 2, с. 155.
5. Горелик Г. С. Колебания и волны. 2-е изд.—М.: Физматгиз, 1959.
6. Татарский В. И. Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере.—М.: Изд. АН СССР, 1959.
7. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.—М.: Наука, 1965.
8. Гуревич А. С., Кон А. Н., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1976.
9. Татарский В. И. Второе приближение в задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями.—Изв. вузов: Радиофизика, 1962, т. 5, с. 490.
10. Писарева В. В. О границах применимости метода плавных возмущений в задаче о распространении излучения через среду с неоднородностями.—Акустич. ж., 1960, т. 6, с. 87.
11. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1967.

К главе VII

1. Кляцкин В. И., Татарский В. И. К статистической теории распространения волн в случайных слоистых средах.—Изв. вузов: Радиофизика, 1977, т. 20, с. 1040.
2. Кляцкин В. И. О пределах применимости приближения марковского случайного процесса в задачах, связанных с распространением света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления.—ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 952.
3. Татарский В. И. Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса: Препринт ОФАГ, 1970.
4. Долин Л. С. О рассеянии светового пучка в слое мутной среды.—Изв. вузов: Радиофизика, 1964, т. 7, с. 380.
5. Brettmeyer H., Random Volume Scattering,—J. Res. NBS, 1964, v. 68, p. 967.
6. Кляцкин В. И., Татарский В. И. К теории распространения световых пучков в среде со случайными неоднородностями.—Изв. вузов: Радиофизика, 1970, т. 13, с. 1061.

7. Долин Л. С. Уравнения для корреляционных функций волнового пучка в хаотически неоднородной среде.—Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, с. 840.
8. Дагкесманская И. М., Шишов В. И. Сильные флуктуации интенсивности при распространении волн в статистически однородных и изогропных средах.—Изв. вузов: Радиофизика, 1970, т. 13, с. 16.
9. Brown W. R., Fourth Moment of a Wave Propagating in a Random Medium.—J. Opt. Soc. Am., 1972, v. 62, p. 966.
10. Елепов Б. С., Михайлов Г. А. Методы Монте-Карло для оценки корреляционной функции сильных флуктуаций света в турбулентной среде.—ЖВМ и МФ, 1976, т. 16, с. 1264.
11. Гурвич А. С., Елепов Б. С., Покасов В. В., Сабельфельд К. К., Татарский В. И. Пространственная структура сильных флуктуаций интенсивности света в турбулентной среде.—Изв. вузов: Радиофизика, 1979, т. 22, вып. 2.
12. Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1976.
13. Gochelashvily K. S., Shishov V. I., Multiple Scattering of Light in a Turbulent Medium.—Opt. Acta, 1971, v. 18, p. 767.
14. Гочелашивили К. С., Шишов В. И. Насыщенные флуктуации интенсивности лазерного излучения в турбулентной среде.—ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 1237.
15. Якушкин И. Г. Асимптотическое вычисление флуктуаций интенсивности поля в турбулентной среде при больших длинах трассы.—Изв. вузов: Радиофизика, 1975, т. 18, с. 1660.
16. Заворотный В. У., Кляцкин В. И., Татарский В. И. Сильные флуктуации интенсивности электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах.—ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 481.
17. Кляцкин В. И., Татарский В. И. О приближении параболического уравнения в задачах распространения волн в среде со случайными неоднородностями.—ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 624.
18. Фрайдин Е. С. Метод функции Грина в теории квантовых полей и квантовой статистике.—Труды ФИАН, 1965, т. 29, с. 7.
19. Fradkin E. S. Application of Functional Methods in a Quantum Field Theory and Quantum Statistics. II.—Nucl. Phys., 1966, v. 76, p. 588.
20. Фейнман Р., Хаббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.—М.: Мир, 1968.
21. Кляцкин В. И., Татарский В. И. Новый метод последовательных приближений в задаче о распространении волн в случайных средах.—Изв. вузов: Радиофизика, 1971, т. 14, с. 1400.
22. Татарский В. И. Распространение света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления в приближении марковского случайного процесса.—ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 2106.
23. Гурвич А. С., Калистратова М. А., Мартвель Ф. Э. Исследование сильных флуктуаций интенсивности света в турбулентной среде при малом волновом параметре.—Изв. вузов: Радиофизика, 1977, т. 20, с. 1020.

К главе VIII

1. Барабаненков Ю. Н. Многократное рассеяние волн на ансамбле частиц и теория переноса излучения.—УФН, 1975, т. 117, с. 49.
2. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1967, гл. 5.
3. Алексеев В. Н., Комиссаров В. М. Флуктуации звукового поля в случайно-неоднородной среде.—Труды Акустического института, 1968, вып. 4, с. 27.
4. Налбандян О. Г., Татарский В. И. Сопоставление диаграммных и аналитических методов приближенного решения линейных стохастических уравнений.—Изв. вузов: Радиофизика, 1977, т. 20, с. 549.

5. Апресян Л. А. Методы статистической теории возмущений.— Изв. вузов: Радиофизика, 1974, т. 17, с. 165.
6. Татарский В. И. Некоторые методы решения стохастических дифференциальных уравнений.— Изв. вузов: Радиофизика, 1974, т. 17, с. 570.
7. Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде.— УФН, 1970, т. 102, с. 3.
8. Рыжов Ю. А., Гамойкин В. В. Излучение и распространение электромагнитных волн в хаотически неоднородных средах.— Изв. вузов: Радиофизика, 1970, т. 13, с. 356.
9. Барабаненков Ю. Н., Финкельберг В. М. Оптическая теорема в теории многократного рассеяния волн.— Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, с. 719.
10. Барабаненков Ю. Н., Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Применение теории многократного рассеяния волн к выводу уравнения переноса излучения для статистически неоднородной среды.— Изв. вузов: Радиофизика, 1972, т. 15, с. 1852.
11. Апресян Л. А. Уравнение переноса излучения с учетом продольных волн.— Изв. вузов: Радиофизика, 1973, т. 16, с. 461.
12. Барабаненков Ю. Н., О волновых поправках к уравнению переноса для направления рассеяния «назад».— Изв. вузов: Радиофизика, 1973, т. 16, с. 88.
13. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Эффект усиления обратного рассеяния на телах, помещенных в среду со случайными неоднородностями.— Изв. вузов: Радиофизика, 1973, т. 16, с. 1964.
14. Чандрасекир С. Перенос лучистой энергии.— М.: ИЛ, 1953.
15. Овчинников Г. И., Татарский В. И. К вопросу о соотношении теории когерентности и уравнения переноса излучения.— Изв. вузов: Радиофизика, 1972, т. 15, с. 1419.
16. Апресян Л. А. О применении уравнения переноса излучения для описания свободного электромагнитного поля.— Изв. вузов: Радиофизика, 1975, т. 18, с. 1870.
17. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.— М.: Наука, 1972.
18. Кляцкин В. И., Татарский В. И. Приближение диффузационного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики.— УФН, 1973, т. 110, с. 499.
19. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флюктуирующими параметрами.— М.: Наука, 1975.
20. Финкельберг В. М. Распространение волн в случайной среде. Метод корреляционных групп.— ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 401.
21. Барабаненков Ю. Н., Финкельберг В. М. Уравнение переноса излучения для коррелированных рассеивателей.— ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 978.
22. Розенберг Г. В. Вектор-параметр Стокса (матричные методы учета поляризации излучения в приближении лучевой оптики).— УФН, 1955, т. 56, с. 77.
23. Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. Статистические проблемы в теории дифракции.— УФН, 1975, т. 115, с. 239.

К главе IX

1. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.— М.: Наука, 1972.
2. Шмелев А. Б. Рассеяние волн статистически неровными поверхностями.— УФН, 1972, т. 106, с. 459.
3. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов.— Изд. АН СССР, 1948, т. I, с. 246.

4. Исаакович М. А. Рассеяние волн от статистически шероховатой поверхности.— ЖЭТФ, 1952, т. 23, с. 305. Труды Акустического института, 1969, вып. 5, с. 152—251.
5. Кравцов Ю. А., Фукс И. М., Шмелев А. Б. Последовательное применение метода Кирхгофа к задаче о рассеянии звуковой волны на поверхности со случайными неровностями.— Изв. вузов: Радиофизика, 1971, т. 14, с. 854.
6. Тамойкин В. В., Фрайман А. А. О статистических свойствах поля, рассеянного шероховатой поверхностью.— Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, с. 56.
7. Часевский Е. В. Энергетические характеристики поля, рассеянного шероховатой площадкой.— Изв. вузов: Радиофизика, 1965, т. 8, с. 1128.
8. Barrich D. E. Relationship between Slope Probability Density Function and the Physical Optic Integral in Rough Surface Scattering.— Proc. IEEE, 1968, v. 56, p. 1728.
9. Часевский Е. В. Рассеяние волн площадкой с нормальным распределением случайных отклонений.— Изв. вузов: Радиофизика, 1966, т. 9, с. 400.
10. Курьянов Б. Ф. Рассеяние звука на шероховатой поверхности с двумя типами неровностей.— Акустич. ж., 1962, т. 8, с. 325.
11. Калмыков А. И., Островский И. Е., Розенберг Л. Д., Фукс И. М. О влиянии структуры морской поверхности на пространственные характеристики рассеянного ею радиоизлучения.— Изв. вузов: Радиофизика, 1965, т. 8, с. 1117.
12. Фукс И. М. К теории рассеяния волн взволнованной поверхностью моря.— Изв. вузов: Радиофизика, 1966, т. 9, с. 876.
13. Семенов Б. И. Приближенный расчет рассеяния электромагнитных волн поверхностью типа шероховатого рельефа.— Радиотехника и электроника, 1966, т. 11, с. 1351.
14. Семенов Б. И. Расчет рассеяния электромагнитных волн поверхностью типа шероховатого рельефа для произвольных углов наблюдения.— Радиотехника и электроника, 1970, т. 15, с. 595.
15. Burke J. E., Twersky Y. Scattering and Reflection by Elliptically Striated Surfaces.— J. Acoust. Soc. Am., 1966, v. 40, p. 883.
16. Rense W. A. Polarisation Studies of Light Diffusely Reflected from Ground and Etched Glass Surfaces.— J. Opt. Soc. Am., 1950, v. 40, p. 55.
17. Гершун А. А., Попов О. И. К вопросу о рассеянии света матовыми стеклами.— Светотехника, 1955, вып. 1, с. 3.
18. Полянский В. К., Рвачев В. П. Рассеяние света при отражении от статистически распределенных микроплощадок. Дифракционное рассмотрение.— Опт. и спектр., 1967, т. 22, с. 279.