Содержание

Квантовая механика

Билет 1

Понятие состояния

Квантовая система в силу своей малости не подчиняется законам классич. физики. В классике состояние системы – это набор параметров, которые полностью описывают эволюцию системы.

Однако, в квантовой физике будущее не детерминировано, так как координаты и импульсы не могут быть определены в каждый момент времени одновременно. Если квантово-механическая система в настоящий момент времени определена наиболее полновозможным образом, то поведение системы в следующий момент времени принципиально неоднозначно. Состояние квантово-механической системы - это набор параметров, которые дают наиболее полную информацию о квантово-механической системе.

В нотации Дирака вектор состояния будет $|\Psi >$ (абстрактный вектор, не привязанный к системе координат).

Волновая функция и её физический смысл

Волновая функция Ψ - это комплексная функция, которая описывает состояние квантово-механической системы, и является коэффициентом разложения квантового состояния по базису. Если базис координатный, то это функция $\Psi(x,t)$, аргументами которой являются координаты (м.б. обобщенные), так называемое «x-представление». Аналогично есть импульсное $\Psi(p,t)$ p-представление.

Физ.смысл имеет $|\Psi|^2$ – плотность вероятности.

Как вычислить распределение вероятности какой либо физической величин

$|\Psi(x,t)|^2$ есть плотность вероятности нахождения частицы в координате x (в одномерном пространстве), $|\Psi(p,t)|^2$ плотность вероятности нахождения импульса частицы в р. Каждой наблюдаемой (физической) величине в квантовой физике соответствует свое представление волновой функции.

Задача (отнормировать волновую функцию и нарисовать плотность вероятностей)

Дана ненормированная волновая функция $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \frac{1 + e^{i\pi/4}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Отнормируйте и нарисуйте график плотности вероятности величины x.

Решение. Множитель без «x» может быть отброшен (так как домножение на комплексную константу не изменяет ненормированную волновую функцию).

Тогда задача сводится к нормировке следующей функции:

$$\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \qquad \psi_0 = c\psi(x)$$

Предположим, что наша функция есть произведение нормированной ψ_0 на произвольную константу c, найдем ее из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{atan} \frac{x}{a} \bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{a}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{a}$$

Тогда $c^2 = \frac{1}{\pi/a} = \frac{a}{\pi} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$.

Мы нашли нормированную функцию:

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \qquad |\psi_0|^2 = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$$

Вид функции $|\psi_0|^2$ легко понять, если учесть, что 1) она всегда положительна 2) имеет максимум там, где корень имеет минимум (т.е. в точке $x = 0$, тогда максимум равен $\frac{1}{\pi a}$).

Билет 2

Уравнение Шредингера. Вывод перехода к классике с появлением уравнения Гамильтона-Якоби

Нестационарное уравнение Шредингера $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$. Будем искать его решение в виде $\psi = Ae^{i\Theta}$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial A}{\partial t}e^{i\Theta} - \hbar A\frac{\partial\Theta}{\partial t}e^{i\Theta}$$

Учтем, что

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(r) = \frac{(-i\hbar\nabla)^2}{2m} + U(r) = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + U(r)$$

и

$$\begin{aligned}\Delta\psi = \nabla^2\left[A\cdot e^{i\Theta}\right] = \nabla\left[\nabla A\cdot e^{i\Theta} + iA\nabla\Theta\cdot e^{i\Theta}\right] = \nabla\left[\nabla A\cdot e^{i\Theta}\right] + \nabla\left[iA\nabla\Theta\cdot e^{i\Theta}\right] = \\ = \left[\Delta A\cdot e^{i\Theta} + i\nabla A\nabla\Theta\cdot e^{i\Theta}\right] + i\left[\nabla A\nabla\Theta + A\Delta\Theta + iA\nabla\Theta\nabla\Theta\right]e^{i\Theta} = \\ = \left[\Delta A + i\nabla A\nabla\Theta + i\nabla A\nabla\Theta + iA\Delta\Theta - A(\nabla\Theta)^2\right]e^{i\Theta} = \\ = \left[\Delta A + 2i\nabla A\nabla\Theta + iA\Delta\Theta - A(\nabla\Theta)^2\right]e^{i\Theta}\end{aligned}$$

Тогда нестационарное уравнение Шредингера принимает вид:

$$i\hbar\frac{\partial A}{\partial t} - \hbar A\frac{\partial\Theta}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\Delta A + 2i\nabla A\nabla\Theta + iA\Delta\Theta - A(\nabla\Theta)^2 + A\cdot U(r)\right]$$

Разделим в нем реальные и мнимые части:

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}(2i\nabla A\nabla\Theta + iA\Delta\Theta) \\ -\hbar A\frac{\partial\Theta}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\Delta A - A(\nabla\Theta)^2\right) + A\cdot U(r)\end{aligned}$$

Работаем в приближении $\Delta A \ll (\nabla\Theta)^2$:

$$-\hbar A\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(A(\nabla\Theta)^2\right) + A\cdot U(r) \quad \Big| : A$$

$$-\hbar\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\Theta)^2 + U(r)$$

Воспользуемся соотношениями де-Бройля $S = \hbar\Theta$, $\nabla S = \vec{p}$:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad \nabla\Theta = \nabla S\frac{1}{\hbar} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$$

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{p^2}{\hbar^2} + U(\vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) = H$$

Окончательно получаем уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

Билет 3

Билет 4

Билет 5

Билет 6

Билет 7

Нахождения волновой функции по данным одного из представлений

Найдите $\Psi(p)$ по данным $\Psi(x)$. Найдите связь ширины в x и p представлениях. Сначала найдите нормировочный множитель $\Psi(x) = \exp\{-u|x|\}$

$\Psi_0(x) = C\Psi(x)$ - нормировочная функция.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 C^2 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2u|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{2ux}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-2ux}dx = \frac{1}{u}$$

$$\frac{C^2}{u} = 1 \Longrightarrow C = \sqrt{u}$$

$$\Psi_0(x) = \sqrt{u}\exp\{-u|x|\}$$

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(x) e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u|x|} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx =$$
$$\sqrt{\frac{u}{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u|x|+\frac{ipx}{\hbar})} dx$$

Когда $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ux+\frac{-ipx}{\hbar})} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x(u+\frac{ip}{\hbar})} dx = -\frac{1}{u+\frac{ip}{\hbar}} e^{-x(u+\frac{ip}{\hbar})}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\hbar}{\hbar u + ip}$$

Когда $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-(-ux+\frac{-ipx}{\hbar})} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x(-u+\frac{ip}{\hbar})} dx = -\frac{1}{-u+\frac{ip}{\hbar}} e^{-x(-u+\frac{ip}{\hbar})}\Big|_{-\infty}^{0} = -\frac{\hbar}{-\hbar u + ip}$$

$$\frac{\hbar}{\hbar u + ip} - \frac{\hbar}{-\hbar u + ip} = ... = \frac{2\hbar^2 u}{p^2 + \hbar^2 u^2}$$

$$\Psi(p) = \sqrt{\frac{u}{2\pi\hbar}} \cdot \frac{2\hbar^2 u}{p^2 + \hbar^2 u^2}$$

Ширина находится на уровне половины от максимума.

$$\Psi(p = 0) = \sqrt{\frac{2}{u\pi\hbar}}$$

$$\Psi(p) = \sqrt{\frac{u}{2\pi\hbar}} \cdot \frac{2\hbar^2 u}{(1 + \frac{p^2}{\hbar^2 u^2})\hbar^2 u^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar u}} \cdot \frac{2}{(1 + \frac{p^2}{\hbar^2 u^2})} = \sqrt{\frac{2}{u\pi\hbar}} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{p^2}{\hbar^2 u^2})} = \Psi(p = 0) \cdot \frac{1}{(1 + \frac{p^2}{\hbar^2 u^2})}$$

$$\Psi(p^*) = \frac{\Psi(p = 0)}{2}$$
$$\frac{1}{(1 + \frac{p^{*2}}{\hbar^2 u^2})} = \frac{1}{2} \Longrightarrow p^* = \pm\hbar u$$
$$\Delta p = 2\hbar u$$

Найдем Δx на уровне e^{-1}

$$\Psi(x^*) = \frac{\Psi(p=0)}{e} \Longrightarrow \exp\{-u|x^*|\} = \exp\{-1\} \Longrightarrow x^* = \pm\frac{1}{u}$$

$$\Delta x = \frac{2}{u}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = 4\hbar$$

Соотношение неопределенностей позволяет проверить правильность решения. Произведение должно быть равно $\hbar$ с точностью до числового множителя.

Билет 8

Напишите разложение единичного оператора по собственным векторам к.л. оператора.

Пусть есть некий оператор $\widehat{A}$.

$$\widehat{A}\left|\psi_n\right\rangle = a_n \left|\psi_n\right\rangle,$$

где $\left|\psi_n\right\rangle$ - собственный вектор оператора.

В абстрактных обозначениях: $\left|\psi_n\right\rangle = \left|n\right\rangle$. Тогда

$$\widehat{1} = \sum_n C_n \left|n\right\rangle$$

Умножим скалярно на $\left\langle\psi_m\right| = \left\langle m\right|$

$$\left\langle m\right| \widehat{1} = \sum_n \left\langle m\right| C_n \left|n\right\rangle$$

Но если $m \neq n$, то $\left|\psi_n\right\rangle$ и $\left|\psi_m\right\rangle$ ортогональны. Следовательно, сумма отлична от нуля только при $m = n$

$$\left\langle n\right| \widehat{1} = C_n, \left\langle m\right| \widehat{1} = \left\langle n\right|$$

$$\widehat{1} = \sum_n \left|n\right\rangle \left\langle n\right|$$

Нахождения волновой функции по данным одного из представлений

Найдите $\Psi(p)$ по данным $\Psi(x)$. Найдите связь ширины в x и p представлениях. $\Psi(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$.

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx$$

1) $Imz > 0, \lambda > 0$. Используя лемму Жордана:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[R(z)\exp\{i\lambda z\}],$$

где $R(z) = \frac{1}{z^2+a^2}, \lambda = -\frac{p}{\hbar}$

Найдем особые точки

$$R(z) = \frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)}$$

$$z_0 = \pm ia$$

Особе точки - полюса первого порядка. Внутри контура L_1 одна особая точка $z_0 = ia$. Для полюса первого порядка

$$resf(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

где $f(z) = R(z)\exp\{i\lambda z\}$, z_0-особая точка, $\varphi(z) = \frac{\exp\{i\lambda z\}}{z+ia}, \psi(z) = z - ia, \psi'(z) = 1$.

$$resf(ia) = \frac{e^{i\lambda ia}}{2ia}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = \frac{2\pi e^{\frac{ap}{\hbar}}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{\frac{ap}{\hbar}}, p < 0$$

1) $Imz < 0, \lambda < 0, p > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[R(z)\exp\{i\lambda z\}],$$

Внутри контура L_2 одна особая точка $z_0 = -ia$

$resf(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \varphi(z) = \frac{\exp\{i\lambda z\}}{z-ia}, \psi(z) = z + ia, \psi'(z) = 1.$

$$resf(-ia) = \frac{e^{\lambda a}}{-2ia}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = \frac{-2\pi i e^{a\lambda}}{-2ia} = \frac{\pi}{a} e^{a\lambda} = \frac{\pi}{a} e^{\frac{-ap}{\hbar}}, p > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = \frac{\pi}{a} e^{\frac{-a|p|}{\hbar}}$$

$$\Psi(p) = \frac{\pi}{a\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{-a|p|}{\hbar}}$$

Эта функция еще не нормирована. При нормировке амплитуда не важна.

$$\Psi_0(p) = e^{\frac{-a|p|}{\hbar}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0|^2 dp = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-a|p|}{\hbar}} dp = 2C^2 \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-ap}{\hbar}} dp = \frac{C^2\hbar}{a}$$

Нормировка $\frac{C^2\hbar}{a} = 1 \Longrightarrow C = \sqrt{\frac{a}{\hbar}}$

$$\Psi_0(p) = \sqrt{\frac{a}{\hbar}} e^{\frac{-a|p|}{\hbar}}$$

Найдем Δp на уровне e^{-1}.

$$-\frac{a|p^*|}{\hbar} = -1 \Longrightarrow p^* = \pm\frac{\hbar}{a} \Longrightarrow \Delta p = \frac{2\hbar}{a}$$

Δx находится на уровне половины от максимума.

$$\Psi(x^*) = \frac{1}{2a^2}$$

$$\frac{1}{2a^2} = \frac{1}{x^{*2}+a^2} \Longrightarrow x^* = \pm a \Longrightarrow \Delta x = 2a$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = 4\hbar$$

Соотношение неопределенностей позволяет проверить правильность решения. Произведение должно быть равно $\hbar$ с точностью до числового множителя.

Билет 9

Разложите $\delta(x)$ по собственным функциям оператора импульса.

$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i\pi x}{\hbar}}$ - нормированная собственная функция оператора импульса. Разложим по собственным функциям оператора импульса:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(p) e^{\frac{i\pi x}{\hbar}} dp$$

$$C(p) = \langle \Psi^* | \delta(x) \rangle = \Psi^*(0)$$

$$\Psi^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i\pi x}{\hbar}} dp$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\pi x}{\hbar}} dp$$

Билет 10

Преобразование Фурье как разложение по собственным функциям оператора импульса.

$-i\hbar \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} = p_x \Psi(x)$ - операторное уравнение по собственным функциям импульса.

$-i\hbar\nabla$ - оператор импульса.

$$-i\hbar d\Psi(x) = p_x \Psi(x) dx$$

$$-i\hbar \ln(\Psi(x)) = p_x x + C$$

$$\Psi(x) = \widetilde{C} e^{\frac{p_x x}{-i\hbar}}$$

Т.к. $\Psi(x)$ и $\widetilde{C}\Psi(x)$описывают одно и то же состояние квантовой системы, отбросим константу.

$\Psi(x) = e^{\frac{p_x x}{-i\hbar}} = e^{\frac{ip_x x}{\hbar}}$ - волна Де Бройля, собственная функция оператора импульса. Фурье-образ:

$$\Psi(x) = \int \Psi(p) e^{\frac{ip_x x}{\hbar}} dx$$

учетом нормировки в одномерном случае:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Psi(p) e^{\frac{ip_x x}{\hbar}} dx$$

Докажите, что нормировка сохраняется при замене представления, если использовать нормированные собственные функции

Билет 11

Билет 12

Нахождения волновой функции по данным одного из представлений

$$\Psi(x) = \exp\{-U|x - x'| + ivx\}$$

$\Psi_0(x)$– нормированная функция Ψ. $\Psi_0(x) = c\Psi(x)$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

$$c^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)^* \cdot \Psi(x) \, \mathrm{d}x =$$

$$\frac{c^2}{2U} \exp\{2U(x - x')\} \Bigg|_{-\infty}^{x'} - \frac{c^2}{2U} \exp\{-2U(x - x')\} \Bigg|_{x'}^{\infty}$$

Проводя очевидные действия находим нормировочную постоянную $c = \sqrt{U}$

Тогда $\Psi_0(x) = \sqrt{U} \exp\{-U|x - x'| + ivx\}$.

$$\Psi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi_0(x)\cdot\exp\Big\{-\frac{px}{\hbar}\Big\}\,\mathrm{d}x=$$

$$\sqrt{\frac{U}{2\pi\hbar}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{-U|x-x'|\}\exp\{-ivx\}\exp\bigg\{-\frac{ipx}{\hbar}\bigg\}\,\mathrm{d}x$$

Обозначим $\widetilde{\Psi}(x)=\sqrt{U}\exp\{-u|x-x'|\}$, тогда $\Psi_0(x)=\widetilde{\Psi(x)}\cdot\exp\{ivx\}$

Преобразуем $\widetilde{\Psi}(x)\longrightarrow\widetilde{\Psi}(p)$

$$\widetilde{\Psi}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Psi}(x)\exp\bigg\{-\frac{ipx}{\hbar}\bigg\}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{U}{2\pi\hbar}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{-U|x-x'|\}\exp\bigg\{-\frac{ipx}{\hbar}\bigg\}\,\mathrm{d}x=$$

$$\sqrt{\frac{U}{2\pi\hbar}}\left(\int\limits_{-\infty}^{x'}\exp\{+U(x-x')\}\exp\bigg\{-\frac{ipx}{\hbar}\bigg\}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{x'}^{\infty}\exp\{-U(x-x')\}\exp\bigg\{-\frac{ipx}{\hbar}\bigg\}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\sqrt{\frac{U}{2\pi\hbar}}\exp\bigg\{-\frac{ipx'}{\hbar}\bigg\}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}e^{Uy}e^{-\frac{ipy}{\hbar}}\mathrm{d}y+\int\limits_{0}^{\infty}e^{-Uy}e^{-\frac{ipy}{\hbar}}\mathrm{d}y\right)=$$

$$\sqrt{\frac{U}{2\pi\hbar}}\exp\bigg\{-\frac{ipx'}{\hbar}\bigg\}\left(\frac{1}{U-\frac{ip}{\hbar}}+\frac{1}{U+\frac{ip}{\hbar}}\right)=$$

$$\frac{2}{U\Big(1+\frac{p^2}{U^2\hbar^2}\Big)}\sqrt{\frac{U}{2\pi\hbar}}\exp\bigg\{-\frac{ipx'}{\hbar}\bigg\}=\sqrt{2}U\pi\hbar\frac{1}{1+\frac{p^2}{U^2\hbar^2}}\exp\bigg\{-\frac{ipx'}{\hbar}\bigg\}=\widetilde{\Psi}(x).$$

Напомним, что $\Psi_0(x)=\widetilde{\Psi}(x)e^{ivx}$. Согласно замечанию 2:

$$\Psi(p)=\widetilde{\Psi}(p-\hbar v)$$

И окончательный ответ:

$$\Psi(p)=\sqrt{\frac{2}{U\pi\hbar}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(p-\hbar v)^2}{U^2\hbar^2}}\exp\bigg\{-\frac{i(p-\hbar v)x'}{\hbar}\bigg\}$$

Билет 13

Нахождения волновой функции по данным одного из представлений

$$\Psi(x) = \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4b^2} + iUx\right\}$$

В этом билете функция нормироваться не будет, так как автору стало лень, а на самом деле её и не просят. К тому же, на полу ширину нормировка не влияет.

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp\left\{-\frac{ipx}{\hbar}\right\} \mathrm{d}x$$

Иначе говоря, $\Psi(p) = F[\Psi(x)]$.

По свойствам преобразования Фурье:

1. $\Psi_1(p - U\hbar) = F[\Psi_1(x)e^{iUx}]$ $\Psi_1(x) = \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4b^2}\right\}$
2. $\Psi_2(p)\exp\left\{-\frac{ipx'}{\hbar}\right\} = F[\Psi_2(x - x')]$, где $\Psi_2(x) = \exp\left\{-\frac{(x)^2}{4b^2}\right\}$

Найдем преобразование Фурье $\Psi_2(x)$ по определению.

$$\Psi_2(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{4b^2} + \frac{-ipx}{\hbar}\right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{x}{2b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^2 + \left(\frac{ipb}{\hbar}\right)^2\right\} \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{x}{2b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^2\right\} \mathrm{d}x =$$

$$\frac{2b}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-y^2\right\} \mathrm{d}y = \frac{2b\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi b}} \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\}$$

Получим, что $\Psi_2(p) = \sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\Big\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\Big\}$.

$$\Psi_2(p) = F[\exp\Big\{-\frac{x^2}{4b^2}\Big\}]$$

Согласно свойству (2):

$$\sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\Big\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\Big\} \exp\Big\{-\frac{px'}{\hbar}\Big\} = F[\Psi_2(x-x')] = F\Big[\exp\Big\{-\frac{(x-x')^2}{4b^2}\Big\}\Big] = F[\Psi_1(x)]$$

Согласно свойству (1):

$$\sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\Big\{-\frac{(p-U\hbar)^2b^2}{\hbar^2}\Big\} \exp\Big\{-\frac{i(p-U\hbar)x'}{\hbar}\Big\} = \\ F\Big[\exp\Big\{-\frac{(x-x')^2}{4b^2}\Big\} + iUx\Big] = F[\Psi(x)]$$

Что и требовалось найти.

$$\Psi(p) = \sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\Big\{-\frac{(p-U\hbar)^2b^2}{\hbar^2} - \frac{i(p-U\hbar)x'}{\hbar}\Big\} \tag{1}$$

Теперь найдем Δp. Она в $\Psi(p)$ такая же, как в $\Psi_2(p)$. Ищем полуширину на уровне $\frac{1}{e}$. Тогда

$$\Delta p = \frac{2\hbar}{b}$$

Найдем Δxна уровне $\frac{1}{e}$, при этом отбрасывая фазу.

$$-\frac{(x-x')^2}{4b^2} = -1$$

$$x_1 = 2b + x'$$

$$x_2 = x' - 2b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4b$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{4b \cdot 2\hbar}{b} = 8\hbar$$

Билет 14

Амплитуда вероятности. Принцип суперпозиции. Сложение амплитуд. Мысленный эксперимент с двумя щелями

Предположим, что есть два состояния квантовой системы Ψ_1 и Ψ_2. Тогда, по принципу суперпозиции существует состояние $\Psi_3 = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$,где c_1 и c_2– комплексно значные величины, называемые амплитудами вероятности. Ψ_3 принимает состояние №1 с вероятностью $|c_1^2|$ и состояние №2 с вероятностью $|c_2|^2$. То есть при сложении двух волновых функций мы не получаем чего-то третьего, а получаем либо состояние №1 с вероятностью $|c_1^2|$, либо №2 с вероятностью $|c_2^2|$.

Одним из наблюдаемых следствий является прохождение электрона через две близко расположенные щели. Если две щели открыты одновременно, то на экране наблюдается интерференционная картина. Это объясняется тем, что электрон находится в суперпозиции состояний.

$$\Psi(\vec{r}, t) = [\Psi_1(\vec{r}) + \Psi_2(\vec{r})] \cdot \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \tag{2}$$

Плотность вероятности нахождения электрона вблизи точки $(\vec{r}, t)$ равна:

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = |\Psi_1(\vec{r}) + \Psi_2(\vec{r})|^2 = |\Psi_1(\vec{r}, t)|^2 + |\Psi_2(\vec{r}, t)|^2 + (\Psi_1^*\Psi_2 + \Psi_1\Psi_2^*) =$$
$$|\Psi_2(\vec{r}, t)|^2 + |\Psi_1(\vec{r}, t)|^2 + 2|\Psi_1| \cdot |\Psi_2| \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Последнее слагаемое – интерференционный член. Каждый электрон интерферирует сам с собой, так как он вошел частично в каждую волну и невозможно точно сказать через какую из щелей он проходит.

Билет 15

Пока что пуст

Билет 16

От каких переменных может зависеть волновая функция. Полный набор.

Волновая функция должна полным образом описывать систему, а изменение волновой функции от времени полностью описывает эволюцию квантово-механической системы (Уравнение Шредингера).

Существует несколько вариантов представления волновых функций (координатный, импульсный, энергетический и т.д). Соответственно, они могут быть описаны через разные переменные.

Максимальная информация о системе (Полнота описания системы) определяет количество степеней свободы. Чтобы волновая функция полностью описывала систему, необходимо, чтобы количество ее переменных равнялось количеству степеней свободы.

Переменными волновой функции могут быть собственные значения какого-то оператора. Одновременно являться переменными волновой функции могут быть лишь те величины, операторы которых коммутируют между собой. Соответственно, переменные волновой функции могут быть взяты даже из различных операторов, но главное, чтобы выполнялось условие коммутации. Сколько переменных необходимо для полного описания волновой функции? Количество переменных должно равняться количеству степеней свободы.

Дальше идет отсебятина: уверенности нет, но скорее всего это так. говорите на свой страх и риск.

Пример: для описания квантово-механической системы, состоящей из одного свободного электрона, на самом деле недостаточно знать координат или импульсов этой частицы, так как она обладает как минимум еще и спином., что дает ему еще как минимум одну степень свободы. Получаем, что у электрона степеней свободы как минимум 4 (x,y,z, проекции координат или импульсов +спин).

Билет 17

Дайте определение сопряженного по Эрмиту оператора. Ответ сформулируйте в явной интегральной форме в x представлении, в обозначениях Дирака и обычных абстрактных векторных обозначениях.

Сопряженным по Эрмиту оператором называется оператор, который и транспонирован, и сопряжен

$$A^{+} = A^{*T}$$

Сопряженным по Эрмиту оператором называется такой оператор, что $(\phi, A\Psi) \underset{def}{=} (A^{+}\phi, \Psi)$

В интегральной форме:

$$\int \phi^{*}(x)K(x,x')\Psi(x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' \underset{def}{=} \int N^{*}(x,x')\phi(x')\,\mathrm{d}x'\,\Psi(x)\,\mathrm{d}x = *$$

Обозначим ядро оператора A^{+} как $N(x,x')$. Тогда $A^{+}\phi = \int N(x,x)'\phi(x')\,\mathrm{d}x'$

$$* = \int N^{*}(x',x)\phi^{*}(x)\,\mathrm{d}x\,\Psi(x')\,\mathrm{d}x'$$

Тогда $N^{*}(x',x) = K(x,x')$

В обозначениях Дирака:

$$|\Psi\rangle = \hat{A}\,|x\rangle$$

Тогда эрмитово сопряжение:

$$\langle\Psi| \underset{def}{=} \langle x|\,\hat{A}^{+}$$

В абстрактных векторных обозначениях:

$$|\Psi\rangle^{T} = |\Psi\rangle^{*}, \quad \text{но}(T*) = +$$

$$|\Psi\rangle^{T*} = |\Psi\rangle^{**}$$

Значит, что

$$|\Psi\rangle^{+} \underset{def}{=} \langle\Psi|$$

Билет 18

Докажите, что если операторы коммутируют, то они имеют общие собственные функции.

$$\hat{M}\hat{F} - \hat{F}\hat{M} = 0$$

Пусть Ψ_n образуют полную систему собственных функций оператор $\hat{M}$, то есть $\hat{M}\Psi_n = M_n\Psi_n$.

Подействуем оператором $\hat{F}$

$$\hat{M}\hat{F} = \hat{F}\hat{M}$$

$$\hat{M}\hat{F}\Psi_n = \hat{F}\hat{M}\Psi_n = \hat{F}M_n\Psi_m = M_n\hat{F}\Psi_n$$

$$\hat{M}(\hat{F}\Psi_n) = M_n(\hat{F}\Psi_n), F\hat{\Psi}_n - \text{собственная функция оператора } \hat{M}$$

Следовательно $\hat{F}\Psi_n = \Psi_n$. $\hat{F}\Psi_n$ отличается от собственной функции только на константу, пусть $\mathrm{const} = F_n$

Тогда $\hat{F}\Psi_n = F_n\Psi_n$.

Докажите, что оператор кинетической энергии эрмитов.

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \text{оператор кинетической энергии}$$

$$\hat{T}_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi^*\hat{T}\Psi \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{T}^{+}\phi^*\Psi \,\mathrm{d}x - \text{определение эрмитовости}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi^*\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi\right)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} U=\phi^* & V=\frac{\partial\Psi}{\partial x} \\ \mathrm{d}U=\frac{\partial\phi^*}{\partial x} & \mathrm{d}V=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi\,\mathrm{d}x\end{bmatrix} =$$

$$\phi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) - \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\phi^*}{\partial x}\,\mathrm{d}x = *$$

В силу физических соображений первое слагаемое дает 0 (на бесконечности функция не может расти, а только спадать).

$$* = -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\phi^*}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} U=\frac{\partial\phi^*}{\partial x} & V=\Psi \\ \mathrm{d}U=\frac{\partial^2\phi^*}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}V=\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\end{bmatrix} =$$

$$-\Psi\frac{\partial\phi^*}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\phi^*}{\partial x^2}\Psi\,\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi^*\Psi\,\mathrm{d}x$$

Следовательно, $\hat{T} = \hat{T}^+$. Значит оператор кинетической энергии эрмитов.

Билет 19

Оператор импульса. Связь с оператором сдвига.

Оператор сдвига:

$$\hat{T}f(x) = f(x+a)$$

Пусть сдвиг мал δa.

$$\hat{T_{\delta a}}f(x) = f(x+\delta a)$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$f(x+\delta a) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta a + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}^2 + \dots$$

Домножим на $-i\hbar$ и поделим на $-i\hbar$:

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$f(x + \delta a) = f(x) + \left(-\frac{\delta a}{i\hbar}\right) pf + \left(-\frac{\delta a}{i\hbar}\right)^2 p^2 f + \dots$$

Получаем:

$$\hat{T} f(x) = \exp\left(-\frac{\delta a}{i\hbar} p\right) f(x) - \text{связь оператора сдвига и импульса}$$

Билет 20

Какие значения может принимать некоторая физическая величина A и с какой вероятность?

Физическая величина в квантовой механике есть наблюдаемая величина. Каждой наблюдаемой величине соответствует свой оператор. Существует операторное уравнение на собственные функции и собственные числа наблюдаемой A .

$$\hat{A}\Psi = a\Psi$$

Решениями такого операторного уравнения являются пары a_n, Ψ_n.

Если решения такого операторного уравнения счётны, то такой случай является дискретным. В противном случае, когда собственные числа не являются счётными, то такой случай называется непрерывным.

По постулатам квантовой механики: при измерении наблюдаемой величины получаются только собственные значения оператора $\hat{A}$. Если система наблюдается в состоянии Ψ_n, то в результате её измерения получаем a_n с вероятностью 1.

Если система находится в суперпозиции состояния $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \dots + C_k\Psi_k$, то при измерении системы вероятность получить a_1 есть $|c_1|^2$.

Билет 21

Вычислите оператор, сопряженный к произведению AB . Сформулируйте условие эрмитовости произведения, если A и B эрмитовы.

Оператор A^* называется сопряженным к оператору A если $(\phi, Ax) = (A^*\phi, x)$.

Вычислим оператор, сопряженный к произведению AB.

$$(\phi, ABx) = (A^*\phi, Bx)* = (B^*A^*\phi, x)$$

(*) к $A^*\phi$ относимся как к целому.

Тогда $(AB)^* = B^*A^*$.

Условие эрмитовости произведения, если A и B эрмитовы: произведение двух эрмитовых операторов является эрмитовым, если их коммутатор равен 0.

Докажите, что собственные функции эрмитового оператора, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.

$$A\left|\Psi_n\right\rangle = a_n \left|\Psi_n\right\rangle \tag{3}$$

Берем эрмитовое сопряжение:

$$\left\langle\Psi_n\right| A^+ = a_n^* \left\langle\Psi_n\right| \tag{4}$$

Заменим в (4) $n \to m$. Уравнение (3) скалярно умножим на $\langle\psi_m|$, (4) умножим на $|\Psi_n\rangle$ и вычтем.

Получаем:

$$\left\langle\Psi_m\right| A \left|\Psi_n\right\rangle - \left\langle\Psi_n\right| A^+ \left|\Psi_m\right\rangle = (a_n - a_m^*) \left\langle\Psi_m|\Psi_n\right\rangle = 0 \tag{5}$$

n и m - разные, значит $a_n \neq a_m^*$. Следовательно $\langle\Psi_m|\Psi_n\rangle = 0$

$$\langle\Psi_m|\Psi_n\rangle = \int \Psi_m^*(x)\Psi_n(x)\,\mathrm{d}x = (\Psi_m, \Psi_n) = 0$$

Билет 22

Покажите, что если два оператора, A и B имеют общие собственные функции, то они коммутируют.

$$\hat{B}\cdot \Bigg| \hat{A}\Psi_n = a_n\Psi_n$$

$$\hat{A}\cdot \Bigg| \hat{b}\Psi_n = b_n\Psi_n$$

$$\begin{cases} \hat{B}\hat{A}\Psi_n = a_n\hat{B}\Psi_n \\ \hat{A}\hat{B}\Psi_n = b_n\hat{A}\Psi_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{B}\hat{A}\Psi_n = a_n b_n\Psi_n \\ \hat{A}\hat{B}\Psi_n = b_n a_n\Psi_n \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B})\Psi = \sum_n a_n(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B})\Psi_n = 0$$

Следовательно $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют.

Замечание 1

При нормировке функции Ψ важна лишь ее форма, а не амплитуда, так как существует лишь один вариант сделать единичную площадь у фигуры заданной формы. Поэтому, при определении нормы амплитуда изначальной функции Ψ не важна, а важна лишь форма, следовательно, амплитуда может быть произвольной и выбираться с точки зрения упрощения решения задачи.

Замечание 2

$$\Psi_1 = \Psi(x)e^{i\alpha x}$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \mathrm{d}x$$

$$\Psi_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{i\alpha x} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \mathrm{d}x = \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) e^{-\frac{ix}{\hbar}(p-\hbar\alpha)} = \Psi(p-\hbar\alpha) \tag{7}$$