Содержание

Квантовая механика

Билет 1

Билет 2

Билет 3

Билет 4

Билет 5

Билет 6

Билет 7

Вопрос 3

Найдите $\Psi(p)$ по данным $\Psi(x)$. Найдите связь ширины в x и p представлениях. Сначала найдите нормировочный множитель $\Psi(x) = \exp\{-u|x|\}$

$\Psi_0(x) = C\Psi(x)$ - нормировочная функция.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 C^2 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2u|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{2ux}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-2ux}dx = \frac{1}{u}$$

$$\frac{C^2}{u} = 1 \Longrightarrow C = \sqrt{u}$$

$$\Psi_0(x) = \sqrt{u}\exp\{-u|x|\}$$

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(x)e^{\frac{-ipx}{\hbar}}dx = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u|x|}e^{\frac{-ipx}{\hbar}}dx =$$
$$\sqrt{\frac{u}{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u|x|+\frac{ipx}{\hbar})}dx$$

Когда $x > 0$:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-(ux+\frac{-ipx}{\hbar})}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x(u+\frac{ip}{\hbar})}dx = -\frac{1}{u+\frac{ip}{\hbar}}e^{-x(u+\frac{ip}{\hbar})}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{\hbar}{\hbar u + ip}$$

Когда $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-(-ux+\frac{-ipx}{\hbar})}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x(-u+\frac{ip}{\hbar})}dx = -\frac{1}{-u+\frac{ip}{\hbar}}e^{-x(-u+\frac{ip}{\hbar})}\Big|_{-\infty}^{0} = -\frac{\hbar}{-\hbar u + ip}$$

$$\frac{\hbar}{\hbar u + ip} - \frac{\hbar}{-\hbar u + ip} = ... = \frac{2\hbar^2 u}{p^2 + \hbar^2 u^2}$$

$$\Psi(p) = \sqrt{\frac{u}{2\pi\hbar}} \cdot \frac{2\hbar^2 u}{p^2 + \hbar^2 u^2}$$

Ширина находится на уровне половины от максимума.

$$\Psi(p=0) = \sqrt{\frac{2}{u\pi\hbar}}$$

$$\Psi(p) = \sqrt{\frac{u}{2\pi\hbar}} \cdot \frac{2\hbar^2 u}{(1+\frac{p^2}{\hbar^2 u^2})\hbar^2 u^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar u}} \cdot \frac{2}{(1+\frac{p^2}{\hbar^2 u^2})} = \sqrt{\frac{2}{u\pi\hbar}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{p^2}{\hbar^2 u^2})} = \Psi(p=0) \cdot \frac{1}{(1+\frac{p^2}{\hbar^2 u^2})}$$

$$\Psi(p^*) = \frac{\Psi(p=0)}{2}$$

$$\frac{1}{(1+\frac{p^{*2}}{\hbar^2 u^2})} = \frac{1}{2} \Longrightarrow p^* = \pm\hbar u$$

$$\Delta p = 2\hbar u$$

Найдем Δx на уровне e^{-1}

$$\Psi(x^*) = \frac{\Psi(p=0)}{e} \Longrightarrow \exp\{-u|x^*|\} = \exp\{-1\} \Longrightarrow x^* = \pm\frac{1}{u}$$

$$\Delta x = \frac{2}{u}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = 4\hbar$$

Соотношение неопределенностей позволяет проверить правильность решения. Произведение должно быть равно $\hbar$ с точностью до числового множителя.

Билет 8

Вопрос 2

Напишите разложение единичного оператора по собственным векторам к.л. оператора.

Пусть есть некий оператор $\widehat{A}$.

$$\widehat{A}\left|\psi_n\right\rangle = a_n\left|\psi_n\right\rangle,$$

где $\left|\psi_n\right\rangle$ - собственный вектор оператора.

В абстрактных обозначениях: $\left|\psi_n\right\rangle = \left|n\right\rangle$. Тогда

$$\widehat{1} = \sum_n C_n\left|n\right\rangle$$

Умножим скалярно на $\left\langle\psi_m\right| = \left\langle m\right|$

$$\left\langle m\right|\widehat{1} = \sum_n \left\langle m\right| C_n\left|n\right\rangle$$

Но если $m \neq n$, то $\left|\psi_n\right\rangle$ и $\left|\psi_m\right\rangle$ ортогональны. Следовательно, сумма отлична от нуля только при $m = n$

$$\left\langle n\right|\widehat{1} = C_n, \left\langle m\right|\widehat{1} = \left\langle n\right|$$

$$\widehat{1} = \sum_n \left|n\right\rangle\left\langle n\right|$$

Вопрос 3

Найдите $\Psi(p)$ по данным $\Psi(x)$. Найдите связь ширины в x и p представлениях. $\Psi(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$.

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x)e^{\frac{-ipx}{\hbar}}dx$$

1) $Imz > 0, \lambda > 0$. Используя лемму Жордана:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}e^{\frac{-ipx}{\hbar}}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res[R(z)\exp\{i\lambda z\}],$$

где $R(z) = \frac{1}{z^2+a^2}, \lambda = -\frac{p}{\hbar}$

Найдем особые точки

$$R(z) = \frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)}$$

$$z_0 = \pm ia$$

Особе точки - полюса первого порядка. Внутри контура L_1 одна особая точка $z_0 = ia$. Для полюса первого порядка

$$resf(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

где $f(z) = R(z)\exp\{i\lambda z\}$, z_0-особая точка, $\varphi(z) = \frac{\exp\{i\lambda z\}}{z+ia}$, $\psi(z) = z-ia$, $\psi'(z) = 1$.

$$resf(ia) = \frac{e^{i\lambda ia}}{2ia}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = \frac{2\pi e^{\frac{ap}{\hbar}}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{\frac{ap}{\hbar}}, p < 0$$

1) $Imz < 0, \lambda < 0, p > 0.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[R(z)\exp\{i\lambda z\}],$$

Внутри контура L_2 одна особая точка $z_0 = -ia$

$resf(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \varphi(z) = \frac{\exp\{i\lambda z\}}{z-ia}, \psi(z) = z+ia, \psi'(z) = 1.$

$$resf(-ia) = \frac{e^{\lambda a}}{-2ia}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = \frac{-2\pi i e^{a\lambda}}{-2ia} = \frac{\pi}{a} e^{a\lambda} = \frac{\pi}{a} e^{\frac{-ap}{\hbar}}, p > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} e^{\frac{-ipx}{\hbar}} dx = \frac{\pi}{a} e^{\frac{-a|p|}{\hbar}}$$

$$\Psi(p) = \frac{\pi}{a\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{-a|p|}{\hbar}}$$

Эта функция еще не нормирована. При нормировке амплитуда не важна.

$$\Psi_0(p) = e^{\frac{-a|p|}{\hbar}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0|^2 dp = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-a|p|}{\hbar}} dp = 2C^2 \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-ap}{\hbar}} dp = \frac{C^2\hbar}{a}$$

Нормировка $\frac{C^2\hbar}{a} = 1 \Longrightarrow C = \sqrt{\frac{a}{\hbar}}$

$$\Psi_0(p) = \sqrt{\frac{a}{\hbar}} e^{\frac{-a|p|}{\hbar}}$$

Найдем Δp на уровне e^{-1}.

$$-\frac{a|p^*|}{\hbar} = -1 \Longrightarrow p^* = \pm\frac{\hbar}{a} \Longrightarrow \Delta p = \frac{2\hbar}{a}$$

Δx находится на уровне половины от максимума.

$$\Psi(x^*) = \frac{1}{2a^2}$$

$$\frac{1}{2a^2} = \frac{1}{x^{*2} + a^2} \Longrightarrow x^* = \pm a \Longrightarrow \Delta x = 2a$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = 4\hbar$$

Соотношение неопределенностей позволяет проверить правильность решения. Произведение должно быть равно $\hbar$ с точностью до числового множителя.

Билет 9

Вопрос 1

Разложите $\delta(x)$ по собственным функциям оператора импульса.

$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i\pi x}{\hbar}}$ - нормированная собственная функция оператора импульса. Разложим по собственным функциям оператора импульса:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(p) e^{\frac{i\pi x}{\hbar}} dp$$

$$C(p) = \langle \Psi^* | \delta(x) \rangle = \Psi^*(0)$$

$$\Psi^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i\pi x}{\hbar}} dp$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\pi x}{\hbar}}dp$$

Билет 10

Билет 11

Билет 12

Билет 13

Нахождения волновой функции по данным одного из представлений

$$\Psi(x) = \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4b^2} + iUx\right\}$$

В этом билете функция нормироваться не будет, так как автору стало лень, а на самом деле её и не просят. К тому же, на полу ширину нормировка не влияет.

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)\exp\left\{-\frac{ipx}{\hbar}\right\}\mathrm{d}x$$

Иначе говоря, $\Psi(p) = F[\Psi(x)]$.

По свойствам преобразования Фурье:

1. $\Psi_1(p-U\hbar) = F[\Psi_1(x)e^{iUx}]\ \Psi_1(x) = \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4b^2}\right\}$

2. $\Psi_2(p)\exp\left\{-\frac{ipx'}{\hbar}\right\} = F[\Psi_2(x-x')]$, где $\Psi_2(x) = \exp\left\{-\frac{(x)^2}{4b^2}\right\}$

Найдем преобразование Фурье $\Psi_2(x)$ по определению.

$$\Psi_2(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{4b^2} + \frac{-ipx}{\hbar}\right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{x}{2b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^2 + \left(\frac{ipb}{\hbar}\right)^2\right\} \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{x}{2b} + \frac{ipb}{\hbar}\right)^2\right\} \mathrm{d}x =$$

$$\frac{2b}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-y^2\}\, \mathrm{d}y = \frac{2b\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi b}} \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\}$$

Получим, что $\Psi_2(p) = \sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\}$.

$$\Psi_2(p) = F[\exp\left\{-\frac{x^2}{4b^2}\right\}]$$

Согласно свойству (2):

$$\sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\left\{-\frac{p^2b^2}{\hbar^2}\right\} \exp\left\{-\frac{px'}{\hbar}\right\} = F[\Psi_2(x-x')] = F\left[\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4b^2}\right\}\right] = F[\Psi_1(x)]$$

Согласно свойству (1):

$$\sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\left\{-\frac{(p-U\hbar)^2b^2}{\hbar^2}\right\} \exp\left\{-\frac{i(p-U\hbar)x'}{\hbar}\right\} =$$

$$F\left[\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4b^2}\right\} + iUx\right] = F[\Psi(x)]$$

Что и требовалось найти.

$$\Psi(p) = \sqrt{\frac{2}{\hbar}} b \exp\left\{-\frac{(p-U\hbar)^2b^2}{\hbar^2} - \frac{i(p-U\hbar)x'}{\hbar}\right\} \tag{1}$$

Теперь найдем Δp. Она в $\Psi(p)$ такая же, как в $\Psi_2(p)$. Ищем полуширину на уровне $\frac{1}{e}$. Тогда

$$\Delta p = \frac{2\hbar}{b}$$

Найдем Δxна уровне $\frac{1}{e}$, при этом отбрасывая фазу.

$$-\frac{(x-x')^2}{4b^2} = -1$$
$$x_1 = 2b + x'$$
$$x_2 = x' - 2b$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4b$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{4b \cdot 2\hbar}{b} = 8\hbar$$

Билет 14

Амплитуда вероятности. Принцип суперпозиции. Сложение амплитуд. Мысленный эксперимент с двумя щелями

Предположим, что есть два состояния квантовой системы Ψ_1 и Ψ_2. Тогда, по принципу суперпозиции существует состояние $\Psi_3 = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$,где c_1 и c_2– комплексно значные величины, называемые амплитудами вероятности. Ψ_3 принимает состояние №1 с вероятностью $|c_1^2|$ и состояние №2 с вероятностью $|c_2|^2$. То есть при сложении двух волновых функций мы не получаем чего-то третьего, а получаем либо состояние №1 с вероятностью $|c_1^2|$, либо №2 с вероятностью $|c_2^2|$.

Одним из наблюдаемых следствий является прохождение электрона через две близко расположенные щели. Если две щели открыты одновременно, то на экране наблюдается интерференционная картина. Это объясняется тем, что электрон находится в суперпозиции состояний.

$$\Psi(\vec{r},t) = [\Psi_1(\vec{r}) + \Psi_2(\vec{r})] \cdot \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \tag{2}$$

Плотность вероятности нахождения электрона вблизи точки $(\vec{r},t)$ равна:

$$|\Psi(\vec{r},t)|^2 = |\Psi_1(\vec{r}) + \Psi_2(\vec{r})|^2 = |\Psi_1(\vec{r},t)|^2 + |\Psi_2(\vec{r},t)|^2 + (\Psi_1^*\Psi_2 + \Psi_1\Psi_2^*) =$$
$$|\Psi_2(\vec{r},t)|^2 + |\Psi_1(\vec{r},t)|^2 + 2|\Psi_1| \cdot |\Psi_2| \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Последнее слагаемое – интерференционный член. Каждый электрон интерферирует сам с собой, так как он вошел частично в каждую волну и невозможно точно сказать через какую из щелей он проходит.

Билет 15

Пока что пуст

Билет 16

От каких переменных может зависеть волновая функция. Полный набор.

Волновая функция должна полным образом описывать систему, а изменение волновой функции от времени полностью описывает эволюцию квантовомеханической системы (Уравнение Шредингера).

Существует несколько вариантов представления волновых функций (координатный, импульсный, энергетический и т.д). Соответственно, они могут быть описаны через разные переменные.

Максимальная информация о системе (Полнота описания системы) определяет количество степеней свободы. Чтобы волновая функция полностью описывала систему, необходимо, чтобы количество ее переменных равнялось количеству степеней свободы.

Переменными волновой функции могут быть собственные значения какого-то оператора. Одновременно являться переменными волновой функции могут быть лишь те величины, операторы которых коммутируют между собой. Соответственно, переменные волновой функции могут быть взяты даже из различных операторов, но главное, чтобы выполнялось условие коммутации. Сколько переменных необходимо для полного описания волновой функции? Количество переменных должно равняться количеству степеней свободы.

Дальше идет отсебятина: уверенности нет, но скорее всего это так. говорите на свой страх и риск.

Пример: для описания квантово-механической системы, состоящей из одного свободного электрона, на самом деле недостаточно знать координат или импульсов этой частицы, так как она обладает как минимум еще и спином., что дает ему еще как минимум одну степень свободы. Получаем, что у электрона степеней свободы как минимум 4 (x,y,z, проекции координат или импульсов +спин).

Билет 17

Дайте определение сопряженного по Эрмиту оператора. Ответ сформулируйте в явной интегральной форме в x представлении, в обозначениях Дирака и обычных абстрактных векторных обозначениях.

Сопряженным по Эрмиту оператором называется оператор, который и транспонирован, и сопряжен

$$A^{+} = A^{*T}$$

Сопряженным по Эрмиту оператором называется такой оператор, что $(\phi, A\Psi) \underset{def}{=} (A^{+}\phi, \Psi)$

В интегральной форме:

$$\int \phi^*(x)K(x,x')\Psi(x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' \underset{def}{=} \int N^*(x,x')\phi(x')\,\mathrm{d}x'\,\Psi(x)\,\mathrm{d}x = *$$

Обозначим ядро оператора A^{+} как $N(x,x')$. Тогда $A^{+}\phi = \int N(x,x)'\phi(x')\,\mathrm{d}x'$

$$* = \int N^*(x',x)\phi^*(x)\,\mathrm{d}x\,\Psi(x')\,\mathrm{d}x'$$

Тогда $N^*(x',x) = K(x,x')$

В обозначениях Дирака:

$$|\Psi\rangle = \hat{A}\,|x\rangle$$

Тогда эрмитово сопряжение:

$$\langle\Psi| \underset{def}{=} \langle x|\,\hat{A}^{+}$$

В абстрактных векторных обозначениях:

$$|\Psi\rangle^T = |\Psi\rangle^* , \quad \text{но}(T*) = +$$

$$|\Psi\rangle^{T*} = |\Psi\rangle^{**}$$

Значит, что

$$|\Psi\rangle^+ \underset{def}{=} \langle\Psi|$$

Билет 18

Докажите, что если операторы коммутируют, то они имеют общие собственные функции.

$$\hat{M}\hat{F} - \hat{F}\hat{M} = 0$$

Пусть Ψ_n образуют полную систему собственных функций оператор $\hat{M}$, то есть $\hat{M}\Psi_n = M_n\Psi_n$.

Подействуем оператором $\hat{F}$

$$\hat{M}\hat{F} = \hat{F}\hat{M}$$

$$\hat{M}\hat{F}\Psi_n = \hat{F}\hat{M}\Psi_n = \hat{F}M_n\Psi_m = M_n\hat{F}\Psi_n$$

$$\hat{M}(\hat{F}\Psi_n) = M_n(\hat{F}\Psi_n), F\hat{\Psi}_n - \text{собственная функция оператора } \hat{M}$$

Следовательно $\hat{F}\Psi_n = \Psi_n$. $\hat{F}\Psi_n$ отличается от собственной функции только на константу, пусть $\text{const} = F_n$

Тогда $\hat{F}\Psi_n = F_n\Psi_n$.

Докажите, что оператор кинетической энергии эрмитов.

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \text{оператор кинетической энергии}$$

$$\hat{T}_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi^* \hat{T} \Psi \, \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{T}^+ \phi^* \Psi \, \mathrm{d}x - \text{определение эрмитовости}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi^* \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi\right) \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} U = \phi^* & V = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \mathrm{d}U = \frac{\partial \phi^*}{\partial x} & \mathrm{d}V = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi \, \mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$

$$\phi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) - \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \phi^*}{\partial x} \, \mathrm{d}x = *$$

В силу физических соображений первое слагаемое дает 0 (на бесконечности функция не может расти, а только спадать).

$$* = -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \phi^*}{\partial x} \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} U = \frac{\partial \phi^*}{\partial x} & V = \Psi \\ \mathrm{d}U = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} \, \mathrm{d}x & \mathrm{d}V = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \, \mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$

$$-\Psi \frac{\partial \phi^*}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} \Psi \, \mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Psi^* \Psi \, \mathrm{d}x$$

Следовательно, $\hat{T} = \hat{T}^+$. Значит оператор кинетической энергии эрмитов.

Билет 19

Оператор импульса. Связь с оператором сдвига.

Оператор сдвига:

$$\hat{T} f(x) = f(x+a)$$

Пусть сдвиг мал δa.

$$\hat{T_{\delta a}} f(x) = f(x + \delta a)$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$f(x+\delta a) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta a + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}^2 + \dots$$

Домножим на $-i\hbar$ и поделим на $-i\hbar$:

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$f(x+\delta a) = f(x) + \left(-\frac{\delta a}{i\hbar}\right) pf + \left(-\frac{\delta a}{i\hbar}\right)^2 p^2 f + \dots$$

Получаем:

$$\hat{T}f(x) = \exp\left(-\frac{\delta a}{i\hbar}p\right) f(x) - \text{связь оператора сдвига и импульса}$$

Билет 20

Какие значения может принимать некоторая физическая величина A и с какой вероятность?

Физическая величина в квантовой механике есть наблюдаемая величина. Каждой наблюдаемой величине соответствует свой оператор. Существует операторное уравнение на собственные функции и собственные числа наблюдаемой A .

$$\hat{A}\Psi = a\Psi$$

Решениями такого операторного уравнения являются пары a_n, Ψ_n.

Если решения такого операторного уравнения счётны, то такой случай является дискретным. В противном случае, когда собственные числа не являются счётными, то такой случай называется непрерывным.

По постулатам квантовой механики: при измерении наблюдаемой величины получаются только собственные значения оператора $\hat{A}$. Если система наблюдается в состоянии Ψ_n, то в результате её измерения получаем a_n с вероятностью 1.

Если система находится в суперпозиции состояния $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 + \cdots + C_k\Psi_k$, то при измерении системы вероятность получить a_1 есть $|c_1|^2$.

Билет 21

Вычислите оператор, сопряженный к произведению AB . Сформулируйте условие эрмитовости произведения, если A и B эрмитовы.

Оператор A^* называется сопряженным к оператору A если $(\phi, Ax) = (A^*\phi, x)$.

Вычислим оператор, сопряженный к произведению AB.

$$(\phi, ABx) = (A^*\phi, Bx)* = (B^*A^*\phi, x)$$

(*) к $A^*\phi$ относимся как к целому.

Тогда $(AB)^* = B^*A^*$.

Условие эрмитовости произведения, если A и B эрмитовы: произведение двух эрмитовых операторов является эрмитовым, если их коммутатор равен 0.

Докажите, что собственные функции эрмитового оператора, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.

$$A\left|\Psi_n\right\rangle = a_n\left|\Psi_n\right\rangle \tag{3}$$

Берем эрмитовое сопряжение:

$$\left\langle\Psi_n\right| A^+ = a_n^*\left\langle\Psi_n\right| \tag{4}$$

Заменим в (4) $n \to m$. Уравнение (3) скалярно умножим на $\langle\psi_m|$, (4) умножим на $|\Psi_n\rangle$ и вычтем.

Получаем:

$$\left\langle\Psi_m\right| A\left|\Psi_n\right\rangle - \left\langle\Psi_n\right| A^+\left|\Psi_m\right\rangle = (a_n - a_m^*)\left\langle\Psi_m|\Psi_n\right\rangle = 0 \tag{5}$$

n и m - разные, значит $a_n \neq a_m^*$. Следовательно $\langle \Psi_m | \Psi_n \rangle = 0$

$$\langle \Psi_m | \Psi_n \rangle = \int \Psi_m^*(x) \Psi_n(x) \, \mathrm{d}x = (\Psi_m, \Psi_n) = 0$$

Билет 22

Покажите, что если два оператора, A и B имеют общие собственные функции, то они коммутируют.

$$\hat{B} \cdot \Bigg| \hat{A}\Psi_n = a_n \Psi_n$$

$$\hat{A} \cdot \Bigg| \hat{b}\Psi_n = b_n \Psi_n$$

$$\begin{cases} \hat{B}\hat{A}\Psi_n = a_n \hat{B}\Psi_n \\ \hat{A}\hat{B}\Psi_n = b_n \hat{A}\Psi_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{B}\hat{A}\Psi_n = a_n b_n \Psi_n \\ \hat{A}\hat{B}\Psi_n = b_n a_n \Psi_n \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B})\Psi = \sum_n a_n (\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B})\Psi_n = 0$$

Следовательно $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют.