

Кафедра электродинамики

Отчет по лабораторной работе №1

**Экспериментальное определение элементов матрицы  
рассеяния шестиполюсников**

Выполнили студенты 430 группы  
Карусевич А.А, Понур К.А.

Нижний Новгород, 2019

# Введение

В данной работе изучаются с помощью матричного анализа волноводные узлы – шестиполосники. У них с помощью измерительной линии измеряются величины, позволяющие рассчитать коэффициенты матрицы рассеяния шестиполосников  $S_{km}$ .

На основе рассчитанной матрицы рассеяния  $S$  конкретного шестиполосников можно попытаться решить обратную задачу: сделать на основе полученных данных предположение о возможных конструктивных вариантах волноводных узлов, находящихся внутри шестиполосников.

## 1. Теоретические сведения

### 1.1. Матрица рассеяния шестиполосника

Рассмотрим трехплечий волноводный узел (шестиполосник), изображенный на рис. 1. В каждом плече выберем **плоскость отсчета** (сечение), в котором будем находить отношения амплитуд полей отраженной и падающей волн.

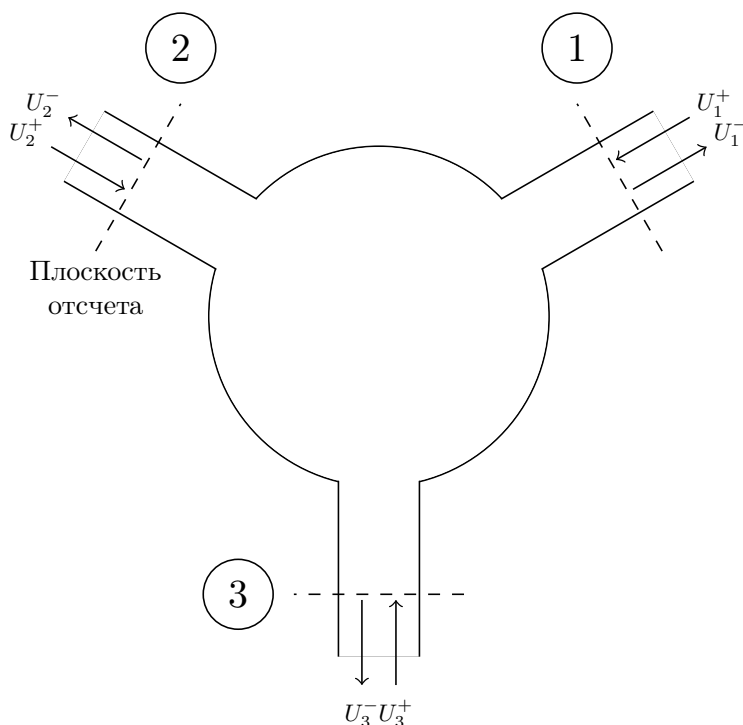


Рис. 1: Схема трехплечего узла (шестиполосника)

Обозначим комплексные амплитуды полей входящих (падающих) в узел волн через  $U_m^+$ , а амплитуды выходящих (отраженных) волн через  $U_k^-$ . Величины  $U_k^-$  зависят от амплитуд и фаз полей волн, входящих во все плечи узла, причем эти зависимости являются линейными в силу линейности уравнений Максвелла (предполагается, что нелинейных

элементов в узле нет). Связь между амплитудами полей в плечах узла записывается в виде:

$$\begin{aligned} U_1^- &= S_{11}U_1^+ + S_{12}U_2^+ + S_{13}U_3^+ \\ U_2^- &= S_{21}U_1^+ + S_{22}U_2^+ + S_{23}U_3^+ \\ U_3^- &= S_{31}U_1^+ + S_{32}U_2^+ + S_{33}U_3^+ \end{aligned} \quad (1)$$

где  $S_{km}$  — комплексные коэффициенты, характеризующие волноводный узел. Их физический смысл очевиден для случая, когда источник включен только в  $m$ -е плечо ( $U_m^+ \neq 0$ ), а все остальные плечи нагружены на согласованные нагрузки, и входящие в узел волны в них отсутствуют ( $U_i^+ = 0$ , если  $i \neq m$ ).

В этом случае диагональный элемент  $S_{mm}$  представляет собой отношение комплексной амплитуды волны, отраженной от  $n$ -го входа, к амплитуде волны, поступающей на этот вход:

$$S_{mm} = U_m^- / U_m^+ \quad (2)$$

т.е. является коэффициентом отражения волны в  $m$ -ом плече. Недиagonalный элемент  $S_{km}$  определяет вклад волны, падающей на  $m$ -ый вход, в волну, выходящую из  $k$ -го входа:

$$S_{km} = U_k^- / U_m^+ \quad (3)$$

т.е. является коэффициентом передачи волны из  $m$ -го плеча в  $k$ -ое плечо. Систему уравнений (1) удобно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \\ U_3^- \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ U_3^+ \end{pmatrix} \quad (4)$$

где

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

— матрица рассеяния, или  $S$ -матрица (от англ. scattering – рассеяние).

Из определения элементов матрицы рассеяния (2), (3) следует, что для пассивных узлов, не обладающих свойством усиления мощности, модули коэффициентов передачи и отражения не могут превышать единицы.

## 1.2. Отражение свойств шестиполюсника в матрице рассеяния

**Взаимный узел.** Волноводные узлы, в которых отсутствуют элементы с гиротропными свойствами (например, намагниченный феррит), являются взаимными устройствами. Их матрицы рассеяния симметричны относительно главной диагонали

$$S_{mk} = S_{km} \quad (5)$$

Верно и обратное утверждение: если волноводное устройство описывается симметричной матрицей рассеяния, то оно является взаимным.

**Волноводное устройство без потерь.** Покажем, что матрица рассеяния волноводного устройства без потерь является унитарной, т.е.

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S}^* = \hat{\mathbf{I}} \quad (6)$$

Здесь символы «Т» и «\*» обозначают операции транспонирования и комплексного сопряжения соответственно. Выражение (6) можно также записать в виде

$$\sum_{m=1}^N S_{lm}^T S_{mk}^* = \delta_{lk} \quad (7)$$

где  $N$  – число плеч волноводного узла,  $\delta_{lk}$  – индекс Кронекера.

Если в узле отсутствуют источники поля и, кроме того, потерь в узле нет (т.е. элементы узла являются реактивными), то согласно закону сохранения энергии суммарная мощность выходящих волн равна суммарной мощности падающих волн:

$$\sum_{m=1}^N |U_m^-|^2 = \sum_{m=1}^N |U_m^+|^2 \quad (8)$$

Правую часть выражения (8) перепишем следующим образом:

$$\sum_{m=1}^N |U_m^+|^2 = \sum_{m=1}^N (U_m^+)^* U_m^+ = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \delta_{mk} \delta_{ml} (U_k^+)^* U_l^+ \quad (9)$$

В свою очередь, левая часть равенства (8) с учетом (1) примет вид:

$$\sum_{m=1}^N |U_m^-|^2 = \sum_{m=1}^N (U_m^-)^* U_m^- = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N S_{mk}^* S_{ml} (U_k^+)^* U_l^+ \quad (10)$$

Тогда из (8) получим

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \sum_{m=1}^N [S_{ml} S_{mk}^* - \delta_{ml} \delta_{mk}] \right\} (U_k^+)^* U_l^+ = 0 \quad (11)$$

Поскольку  $U_k^+, U_l^+$  – произвольны, выражение в фигурной скобке равно нулю и, следовательно, с учетом

$$\sum_{m=1}^N \delta_{ml} \delta_{mk} = \delta_{lk} \quad (12)$$

справедливо соотношение

$$\sum_{m=1}^N S_{ml} S_{mk}^* = \delta_{lk} \quad (13)$$

Принимая во внимание, что  $S_{ml} = S_{lm}^T$ , приходим к выражению (7). Таким образом, доказано, что матрицы рассеяния устройств без потерь унитарны.

Для взаимных волноводных устройств матрица рассеяния является симметричной:  $\hat{\mathbf{S}}^T = \hat{\mathbf{S}}$ . В этом случае из (6) получаем, что для взаимных устройств без потерь

$$\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{S}}^* = \hat{\mathbf{I}} \quad (14)$$

Из формулировки унитарности, представленной в виде (9), следует, что

$$\sum_{m=1}^N S_{mk} S_{mk}^* = \sum_{m=1}^N |S_{mk}|^2 = 1 \quad (15)$$

т.е. сумма квадратов модулей всех матричных элементов любого столбца матрицы рассеяния узла без потерь равна единице.

Если узел взаимный, то и сумма квадратов модулей всех матричных элементов любой строки также равна единице. Кроме того, из (9) следует, что для любой пары столбцов сумма (по строкам) произведений каждого матричного элемента из одного столбца на комплексно сопряженный элемент из той же строки другого столбца равна нулю

$$\sum_{m=1}^N S_{ml} S_{mk}^* = 0, \quad k \neq l \quad (16)$$

Очевидно, что для взаимной системы аналогичное соотношение имеет место и для элементов любой пары строк матрицы рассеяния.

**Смещение плоскости отсчета.** Предположим, что известна матрица рассеяния при некотором положении плоскости отсчета  $z = 0$  в  $m$ -ом плече узла. При смещении этого сечения на расстояние  $l_m$  в направлении распространения падающей волны (по направлению к узлу) новое значение комплексной амплитуды будет

$$(U_m^+)' = U_m^+ e^{-ih_m l_m} \quad (17)$$

где  $h_m$  – постоянная распространения волны в  $m$ -ом плече. Соответственно амплитуда отраженной волны

$$(U_m^-)' = U_m^- e^{ih_m l_m} \quad (18)$$

Если перемещать плоскость отсчета в положительном направлении в первом плече на  $l_1$ , во втором на  $l_2$  и т.д., то волноводный узел будет характеризоваться новой матрицей

рассеяния  $\widehat{\mathbf{S}}'$ , которая связывает новые амплитуды  $(\mathbf{U}^-)' = \widehat{\mathbf{S}}' (\mathbf{U}^+)'$ . При этом отраженную волну в  $m$ -ом плече можно записать в виде

$$(U_m^-)' = S'_{m1}(U_1^+)' + S'_{m2}(U_2^+)' + \dots + S'_{mn}(U_n^+)'.$$
 (19)

Сравнивая (15) с (1) и учитывая (13), (14), а также произвольность амплитуд, имеем

$$\begin{aligned} S'_{mk} &= S_{mk} e^{i(h_m l_m + h_k l_k)} \\ S'_{mm} &= S_{mm} e^{i2h_m l_m} \end{aligned}$$
 (20)

Таким образом, изменение плоскости отсчета приводит лишь к изменению фазы коэффициентов матрицы рассеяния, не меняя их абсолютного значения. Поскольку выбор плоскостей отсчета произволен, преобразование (16) позволяет в некоторых случаях упростить матричные элементы, сделав их действительными числами.

Перечисленные выше свойства матриц рассеяния используются при расчетах волноводных устройств.

### 1.3. Определение коэффициента отражения от нагрузки

Напряжение в линии передачи (рис. П.1) с волновым сопротивлением  $Z_B$  и сопротивлением нагрузки  $Z_H$  представляет собой сумму падающей и отраженной волн

$$U = U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}$$
 (21)

На конце линии, где включено сопротивление нагрузки  $Z_H$  (рис. П.1), напряжение равно

$$U_H = U = U_{\text{пад,Н}} + U_{\text{отр,Н}} = U_{\text{пад,Н}}(1 + \Gamma),$$
 (22)

где комплексная величина

$$\Gamma = \left( \frac{U_{\text{пад}}}{U_{\text{отр}}} \right)_H = |\Gamma| e^{i\varphi_H}$$
 (23)

называется коэффициентом отражения.

Рис. 2: Распределение модуля напряжения вдоль линии: 1 – режим короткого замыкания ( $Z_H = 0$ ); 2 – произвольный импеданс на конце линии ( $Z_H \neq 0$ )

В формуле (П.3)

$$|\Gamma| = \left| \frac{U_{\text{пад,Н}}}{U_{\text{отр,Н}}} \right| = \left| \frac{U_{\text{пад}}}{U_{\text{отр}}} \right|,$$
 (24)

– модуль коэффициента отражения,  $\varphi_H$  – фаза коэффициента отражения в сечении нагрузки. Располагая начало координат ( $z = 0$ ) в плоскости нагрузки (рис. П.1), в произвольном сечении  $z$  линии имеем

$$U = U_{\text{пад},H}e^{-ihz} + U_{\text{отр},H}e^{ihz} == U_{\text{пад}}(1 + \Gamma e^{i2hz}) == U_{\text{пад}}(1 + |\Gamma|e^{i\psi}), \quad (25)$$

где

$$\psi = \varphi_H + 2hz \quad (26)$$

— фаза коэффициента отражения в сечении 2,  $h$  – постоянная распространения волны в линии.

Режим работы линии передачи удобно характеризовать коэффициентом стоячей волны  $K$  (КСВ), равным отношению максимального напряжения в линии к ее минимальному значению

$$K = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} \quad (27)$$

Иногда используется и обратная величина – коэффициент бегущей волны (КБВ). В максимуме стоячей волны напряжения в падающей и отраженной волнах синфазны:

$$|U|_{\max} = |U_{\text{пад}}| + |U_{\text{отр}}| = |U_{\text{пад}}|(1 + |\Gamma|), \quad (28)$$

в минимуме – противофазны:

$$|U|_{\min} = |U_{\text{пад}}| - |U_{\text{отр}}| = |U_{\text{пад}}|(1 - |\Gamma|), \quad (29)$$

Тогда

$$K = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}, \quad (30)$$

откуда получим

$$|\Gamma| = \frac{K - 1}{K + 1} \quad (31)$$

Нетрудно убедиться в том, что  $K$  изменяется от единицы до бесконечности, причем режиму согласования, когда  $Z_H = Z_B$ , соответствует значение  $K = 1$ , а режиму короткого замыкания (или холостого хода), а также любой реактивной нагрузке –  $K = \infty$ .

Измерение  $K$  может быть произведено путем перемещения вдоль измерительной линии (ИЛ) прибора, показания которого связаны с высокочастотным напряжением в данном сечении линии. В случае коаксиальных и волноводных систем ИЛ снабжены зондом штыревого типа, расположенным вдоль силовых линий электрического поля и перемещающимся вдоль продольной щели. Схема ИЛ изображена на рис. П.2.

Рис. 3: Схема измерительной линии ЗЗ-И

Основной волновод измерительной линии включен в тракт испытываемой волноводной системы. При перемещении вдоль щели основного волновода зонд ответвляет часть электромагнитной энергии. Для детектирования СВЧ сигнала зонда в ИЛ обычно применяют кристаллические детекторы (СВЧ диоды). При этом зависимость между током детектора  $I$  и приложенным высокочастотным напряжением  $|U|$  является нелинейной.

Из теории детектирования известно, что при малых значениях переменного напряжения детектор имеет характеристику  $I = f(|U|)$ , близкую к квадратичной. В этом случае ток детектора

$$I = \alpha |U|^2, \quad (32)$$

где  $\alpha$  — параметр, зависящий от свойств детектора.

В максимуме и в минимуме распределения поля в линии имеем

$$I_{\max} = \alpha |U|_{\min}^2, \quad I_{\min} = \alpha |U|_{\min}^2 \quad (33)$$

откуда

$$K = \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_{\min}}} \quad (34)$$

Опыт показывает, что для современных стандартных кристаллических детекторов выражение (П.10) оказывается справедливым при выпрямленных токах менее  $\sim 20$  мкА.

Величину фазы коэффициента отражения в сечении  $z$  ( $z < 0$ ) —  $\psi = \varphi_H + 2hz$  можно определить, зная положения точек  $z_{\min}$  минимального значения напряжения. Из (П.6) нетрудно видеть, что

$$\psi(z_{\min}) = (2n - 1)\pi = \varphi_H + 2hz_{\min} \quad (35)$$

и при  $n = 0$  имеем

$$\varphi_H = -2hz_{\min} - \pi \quad (36)$$

Таким образом, для определения фазы коэффициента отражения достаточно определить положение минимума напряжения в ИЛ<sup>1</sup> относительно плоскости присоединения нагрузки. Для этого необходимо найти т.н. **условный конец линии** — сечение волновода, соответствующее минимуму напряжения при коротком замыкании линии ( $z_{\min}^0$  на рис. П.1), и заменить в (П.13) величину  $Z_{\min}$  на  $(z_{\min} - z_{\min}^0)$ . Расстояние от условного конца линии  $z_{\min}^0$  до ближайшего минимума напряжения  $z_{\min}$  **со стороны генератора** при включенной нагрузке обозначим через  $\Delta z_{\min} \equiv z_{\min}^0 - z_{\min} = |z_{\min} - z_{\min}^0| = -(z_{\min} - z_{\min}^0)$

<sup>1</sup>При характеристике детектора, близкой к квадратичной, минимум тока детектора никогда не бывает четко выраженным, особенно при небольших  $K$ . Для повышения точности отсчета положений минимумов  $z_{\min}$  применяют метод «вилки», состоящий в определении двух положений зонда  $z_1$  и  $z_2$  при одинаковых показаниях индикатора и вычислении  $z_{\min}$  по формуле  $z_{\min} = (z_1 + z_2)/2$ .



Тогда, согласно (П.13),  $\varphi_H = 2h\Delta z_{\min} - \pi$  и фаза коэффициента отражения (с учетом выражения  $h = 2\pi/\lambda_B$ ) будет определяться формулой

$$\varphi_H = 4\pi \frac{\Delta z_{\min}}{\lambda_B} - \pi \quad (37)$$

## 2. Эксперимент

### 2.1. Используемое оборудование

Мы ознакомились с устройством и работой генератора Г4-225 и измерительной волновой линией 33-И. Включили и подготовили к работе генератор. Выбранное значение несущей частоты генератора – 8,5 ГГц. В ходе эксперимента мощность сигнала ослаблялась на  $-3 \dots -6$  дБ.

### 2.2. Фиксация условного конца линии. Длина волны в волноводе

Закоротили с помощью короткозамыкателя (КЗ) измерительную линию, на конце которой находилась скрутка волновода. Резонатор измерительной линии настроили на максимум показаний индикатора. Далее зонд измерительной линии установили в ближайший к концу линии узел стоячей волны. Координату узла  $z_{\min}^0 = 5.75$  см в дальнейшем принимаем за условный конец линии. Измерили длину волны в волноводе  $\lambda_B = 5.45$  см.

Зная размеры волновода ( $a \cdot b = 23 \cdot 10 \text{ мм}^2$ ), можем посчитать теоретическую длину волны в волноводе:

$$\lambda_B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}, \quad (38)$$

где  $\lambda_0 = \frac{c}{f}$  – длина волны в свободном пространстве. Для частоты  $f = 8.5$  ГГц  $\lambda_0 = 35$  мм

### 2.3. Проверка согласованных нагрузок

Присоединили к скрутке волновода на конце измерительной линии каждую из двух используемых при выполнении работы согласованных нагрузок. Определили коэффициенты отражения от них

$$\Gamma_{H_1} = 0.062, \quad \Gamma_{H_2} = 0.048 \quad (39)$$

Значения  $\Gamma_{H_{1,2}}$  определяют точность расчетов элементов матриц рассеяния шестиполосников по формулам (18), (23)-(25).

### 2.4. Измерение параметров шестиполосников и расчет $S_{km}$

Для каждого из предложенных шестиполосников осуществить 6 описанных выше экспериментов. По данным измерений заполнить таблицу.

Элементы матрицы рассеяния  $S_{km}$  рассчитываются по данным таблицы и формулам (18), (23)-(25). Вначале следует рассчитать диагональные элементы, а затем – недиагональные. Результаты записываются в виде  $S_{km} = |S_{km}| e^{i\varphi_{km}}$ .

#### 2.4.1 Измерение диагональных элементов

К плечу 1 (рис. 3а) через развязывающий аттенюатор (РА) и измерительную линию (ИЛ) подключается генератор электромагнитных колебаний ( $\Gamma$ ), а плечи 2 и 3 соединяются согласованными нагрузками (Н). При этом в плечах 2 и 3 отраженные от нагрузок волны отсутствуют, т.е.  $U_2^+ = U_3^+ = 0$ .

Первое уравнение системы (1) принимает вид  $U_1^- = S_{11}U_1^+$ , или

$$S_{11} = U_1^- / U_1^+ \quad (40)$$

где  $U_1^-$  и  $U_1^+$  – комплексные амплитуды отраженной и падающей волн на входе первого плеча шестиполосника. Отношение этих величин, равное коэффициенту отражения

$$\Gamma_{11} = S_{11} = |\Gamma_{11}| e^{i\varphi_{11}} \quad (41)$$

можно найти с помощью измерительной линии на основе обычной методики измерения коэффициента стоячей волны и определения положения минимума напряжения (см. Приложение). Присоединяя генератор по указанной на рис. 3а схеме поочередно к плечам 2 и 3, определяют элементы  $S_{22}$  и  $S_{33}$ .

Рис. 4: Схема измерения элементов  $S_{11}$  и  $S_{12}$ :  $\Gamma$  — генератор Г4-225, РА – развязывающий аттенюатор, ИЛ - измерительная волноводная линия 3З-И, СВ - скрутка волновода, Н – согласованная нагрузка, КЗ — короткозамыкатель.

#### 2.4.2 Измерение недиагональных элементов

Рассмотрим другой вариант, отличающийся от предыдущего тем, что плечо 2 короткозамкнуто (рис. 3 б). Теперь лишь  $U_3^+ = 0$ , и первые два уравнения системы (1) примут вид

$$\begin{aligned} U_1^- &= S_{11}U_1^+ + S_{12}U_2^+ \\ U_2^- &= S_{21}U_1^+ + S_{22}U_2^+ \end{aligned} \quad (42)$$

Учтем, что в силу граничных условий в точке короткого замыкания амплитуды  $U_2^+$  и  $U_2^-$  удовлетворяют уравнению

$$U_2^+ = -U_2^- \quad (43)$$

Подставляя (20) в (19), находим отношение амплитуд встречных волн в первом плече:

$$\Gamma_{12} = \frac{U_1^-}{U_1^+} = S_{11} - S_{12} \frac{U_2^-}{U_1^+} \quad (44)$$

$$\frac{U_2^-}{U_1^+} = \frac{S_{21}}{1 + S_{22}} \quad (45)$$

Подставляя выражение для  $U_2^-/U_1^+$  в первое уравнение (21), найдем коэффициент отражения  $\Gamma_{12}$  на входе первого плеча шестиполосника, включенного по схеме, изображенной на рис. 3б:

$$\Gamma_{12} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}} \quad (46)$$

Тогда для произведения недиагональных элементов матрицы рассеяния имеем

$$S_{12}S_{21} = (1 + S_{22})(S_{11} - \Gamma_{12}) \quad (47)$$

Поскольку диагональные элементы  $S_{mm}$  известны (из предыдущих экспериментов), а коэффициент отражения  $\Gamma_{12} = |\Gamma_{12}|e^{i\varphi_{12}}$  можно найти с помощью измерительной линии, то этот эксперимент дает возможность определить произведение  $S_{12}S_{21}$ . При такой методике измерения невозможно определить отдельно элементы  $S_{12}$  и  $S_{21}$ , однако, если шестиполосник не содержит невзаимных элементов, то, согласно (5),  $S_{12} = S_{21}$  и  $S_{12}S_{21} = S_{12}^2$ . Поэтому (возможно ошибка в знаке)

$$S_{12} = \sqrt{S_{12}S_{21}} = \left\{ [\operatorname{Re}(S_{12}S_{21})]^2 + [\operatorname{Im}(S_{12}S_{21})]^2 \right\}^{1/4} \exp \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(S_{12}S_{21})}{\operatorname{Re}(S_{12}S_{21})} \right] \quad (48)$$

Аналогично, закорачивая плечо 3 и присоединяя согласованную нагрузку к плечу 2, найдем

$$S_{13}S_{31} = S_{13}^2 = (1 + S_{33})(S_{11} - \Gamma_{13}) \quad (49)$$

где  $\Gamma_{13} = |\Gamma_{13}|e^{i\varphi_{13}}$  – коэффициент отражения на входе первого плеча в данной схеме включения шестиполосника.

Для определения произведения  $S_{23}S_{32} = S_{23}^2$  генератор следует присоединить к плечу 2, нагрузку – к плечу 1, а плечо 3 закоротить. Тогда

$$S_{23}^2 = (1 + S_{33})(S_{22} - \Gamma_{23}) \quad (50)$$

где  $\Gamma_{23} = |\Gamma_{23}|e^{i\varphi_{23}}$  коэффициент отражения на входе плеча 2.

Таким образом, шесть описанных выше экспериментов дают возможность полностью определить все параметры шестиполосника. Если шестиполосник содержит невзаимные элементы, для отыскания его параметров следует производить 9 независимых экспериментов, причем необходимо также иметь возможность измерения величины сигнала, прошедшего в данное плечо.

Таблица 1: Измерение характеристик шестиполосника №1

N	$S_{km}$	$N_{\text{входа}}$			$I_{\min}$	$I_{\max}$	K	$ \Gamma $	$z_{\min}$	$\Delta z$	$\varphi_n$	$S_{km}$
		1	2	3								
1	S11	Г	Н	Н	85	1	9.220	0.804	4.91	0.84	-1.205	$ \Gamma_{11} e^{i\varphi_n}$
2	S12	Г	КЗ	Н	85	1	9.220	0.804	4.955	0.795	-1.309	$(1 + S_{22})(S_{11} - \Gamma_{12})$
3	S13	Г	Н	КЗ	94	1	9.695	0.813	4.79	0.96	-0.928	$(1 + S_{33})(S_{11} - \Gamma_{13})$
4	S22	Н	Г	Н	54	9	2.449	0.420	4.97	0.78	-1.343	$ \Gamma_{22} e^{i\varphi_n}$
5	S23	Н	Г	КЗ	91	1	9.539	0.810	4.725	1.025	-0.778	$(1 + S_{33})(S_{22} - \Gamma_{23})$
6	S33	Н	Н	Г	50	8	2.500	0.429	4.81	0.94	-0.974	$ \Gamma_{33} e^{i\varphi_{33}}$

Таблица 2: Измерение характеристик шестиполосника №2

N	$S_{km}$	$N$			$I_{\min}$	$I_{\max}$	K	$ \Gamma $	$z_{\min}$	$\Delta z$	$\varphi_n$	$S_{km}$
		1	2	3								
1	S11	Г	Н	Н	80	1	8.944	0.799	4.6	1.15	-0.490	$ \Gamma_{11} e^{i\varphi_n}$
2	S12	Г	КЗ	Н	78	1	8.832	0.797	4.575	1.175	-0.432	$(1 + S_{22})(S_{11} - \Gamma_{12})$
3	S13	Г	Н	КЗ	78	1	8.832	0.797	4.6	1.15	-0.490	$(1 + S_{33})(S_{11} - \Gamma_{13})$
4	S22	Н	Г	Н	16	11	1.206	0.093	5.145	0.605	-1.747	$ \Gamma_{22} e^{i\varphi_n}$
5	S23	Н	Г	КЗ	48	1	6.928	0.748	5	0.75	-1.412	$(1 + S_{33})(S_{22} - \Gamma_{23})$
6	S33	Н	Н	Г	26	24	1.041	0.020	5.2	0.55	-1.873	$ \Gamma_{33} e^{i\varphi_{33}}$

Таблица 3: Измерение характеристик шестиполосника №3

N	$S_{km}$	$N$			$I_{\min}$	$I_{\max}$	K	$ \Gamma $	$z_{\min}$	$\Delta z$	$\varphi_n$	$S_{km}$
		1	2	3								
1	S11	Г	Н	Н	30	24	1.118	0.056	4.495	1.255	-0.248	$ \Gamma_{11} e^{i\varphi_n}$
2	S12	Г	КЗ	Н	29	24	1.099	0.047	4.415	1.335	-0.063	$(1 + S_{22})(S_{11} - \Gamma_{12})$
3	S13	Г	Н	КЗ	29	24	1.099	0.047	4.6	1.15	-0.490	$(1 + S_{33})(S_{11} - \Gamma_{13})$
4	S22	Н	Г	Н	30	23	1.142	0.066	4.85	0.9	-1.066	$ \Gamma_{22} e^{i\varphi_n}$
5	S23	Н	Г	КЗ	30	23	1.142	0.066	4.885	0.865	-1.147	$(1 + S_{33})(S_{22} - \Gamma_{23})$
6	S33	Н	Н	Г	88	1	9.38	0.807	4.545	1.205	-0.363	$ \Gamma_{33} e^{i\varphi_{33}}$

## 2.5. Экспериментальные матрицы рассеяния

$$\hat{\mathbf{S}}_1 = \begin{pmatrix} 0.804 \cdot e^{-1.205i} & 0.31 \cdot e^{-0.02i} & 0.54 \cdot e^{-1.48i} \\ 0.31 \cdot e^{-0.02i} & 0.402 \cdot e^{-1.309i} & 0.80 \cdot e^{-1.877i} \\ 0.54 \cdot e^{-1.48i} & 0.80 \cdot e^{-1.877i} & 0.429 \cdot e^{-0.974i} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Средствами **Python** было посчитано матричное произведение  $\hat{S}_1 \hat{S}_1^*$  (здесь и далее все элементы в матрицах округлялись до третьего знака после запятой):

$$\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0.52 + 0.06i & 0.53 + 0.25i \\ 0.52 - 0.06i & 0.91 & 0.5 + 0.1j \\ 0.53 - 0.25i & 0.5 - 0.1i & 1 \end{pmatrix} \neq \hat{\mathbf{I}} \quad (52)$$

Таким образом, шестиполюсник №1 нельзя считать взаимным. Проверим наличие потерь в нем:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 |S_{km}|^2 &= 1 \\ \sum_{m=1}^3 |S_{1m}|^2 &= 1 \\ \sum_{m=1}^3 |S_{2m}|^2 &= 0.92 \\ \sum_{m=1}^3 |S_{3m}|^2 &= 1 \end{aligned}$$

Из этих соотношений видно, что потери в первом шестиполюснике довольно малы.

$$\hat{\mathbf{S}}_2 = \begin{pmatrix} 0.799 \cdot e^{-0.49i} & 0.214 \cdot e^{-i} & 0.0446 \cdot e^{-0.25i} \\ 0.214 \cdot e^{-i} & 0.093 \cdot e^{-1.747i} & 0.81 \cdot e^{-2.263i} \\ 0.0446 \cdot e^{-0.25i} & 0.81 \cdot e^{-2.263i} & 0.02 \cdot e^{-1.873i} \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2^* = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 + 0.1i & 0.1 + 0.2i \\ 0.1 - 0.1i & 0.7 & 0.1 + 0.1i \\ 0.1 - 0.2i & 0.1i & 0.7 \end{pmatrix} \simeq \hat{\mathbf{I}} \quad (54)$$

Проверим наличие потерь:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^3 |S_{1m}|^2 &= 0.69 \\ \sum_{m=1}^3 |S_{2m}|^2 &= 0.71 \\ \sum_{m=1}^3 |S_{3m}|^2 &= 0.65\end{aligned}$$

Из этих соотношений видно, что потери в первом шестиполюснике довольно малы.

$$\hat{\mathbf{S}}_3 = \begin{pmatrix} 0.055 \cdot e^{-0.25i} & 0.113 \cdot e^{-0.54i} & 0.163 \cdot e^{-2.9i} \\ 0.113 \cdot e^{-0.54i} & 0.066 \cdot e^{-1i} & 0 \\ 0.163 \cdot e^{-2.9i} & 0 & 0.806 \cdot e^{-0.4i} \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_3 \cdot \hat{\mathbf{S}}_3^* = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.01 + 0.01i & -0.1 - 0.1i \\ 0.01 - 0.01i & 0.02 & -0.02 + 0.02i \\ -0.11 + 0.07i & -0.02 - 0.02i & 0.7 \end{pmatrix} \quad (56)$$

### 3. Контрольные вопросы

1. Физически элементы матрицы рассеяния, стоящий на диагонали, представляют собой отношение комплексной амплитуды волны, отраженной от выбранного входа, к амплитуде волны, падающей на этот вход. Недиagonalный элемент определяет вклад волны, падающей на вход  $m$ , в волну, выходящую из входа  $k$ , то есть является коэффициентом передачи волны из  $m$ -го плеча в  $k$ -ое плечо.
2. Изменение плоскости отсчета приводит к изменению фазы коэффициентов матрицы рассеяния, не меняя их абсолютного значения.
3. Матрица симметрична, если она квадратная и ее элементы симметричны относительно главной диагонали.
4. Матрица унитарная, если она квадратная и результат умножения ее на эрмитово сопряженную равен единичной матрице.
5. Диагональные элементы матрицы равны, если трехплечий волноводный узел обладает центральной симметрией, вследствие чего все его плечи равноправны по электрическим свойствам.

## 4. Вывод

Измерили коэффициенты матрицы рассеяния шестиполюсников и установили на основе полученных данных возможные конструктивные варианты волноводных узлов, находящихся внутри шестиполюсников.