Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Курсовая работа

Численное моделирование морской поверхности

Выполнил студент 430 группы
Понур К.А.
Научный руководитель:
Караев В. Ю.

Нижний Новгород, 2019

Содержание

1. Введение

В настоящее время, существующая измерительная аппаратура не всегда позволяет получить достаточно полное представление о состоянии приповерхностного слоя океана, поэтому постоянно разрабатываются новые радиолокационные системы. Вместе с тем, для решения таких задач, как проверка качества диагностики состояния поверхности океана существующими радиолокаторами, тестирование и разработка алгоритмов восстановления океанографической информации, а также оценка возможностей новых радиолокаторов, вполне естественным является применение более экономных по времени и средствам методов, в частности численного моделирования. Однако, при моделировании одномерной морской поверхности, как правило, используется сумма большого числа гармоник, что приводит к значительным затратам машинного времени.

В связи с этим возникает необходимость в минимизации числа гармоник в спектре моделируемой морской поверхности при сохранении необходимой точности при решении различных задач оптики морской поверхности. Здесь возникает ряд нетривиальных вопросов об оптимальном разбиении частотной плоскости на участки и выборе оптимального положения дискретных спектральных компонент в пределах этих участков. Поиску ответов на эти вопросы и посвящена данная работа.

2. Небольшое введение в корреляционную теорию

Рассмотрим ряд общих понятий, описывающих возвышения и уклоны взволнованной морской поверхности в рамках теории случайных пространственно-временных полей. Представим возвышения поверхности в виде суммы гармонических бегущих волн с независимыми (случайными) фазами:

$$\zeta(\vec{r},t) = \mathrm{Re} \iint\limits_{\infty} \mathrm{d}\dot{\zeta}(k) \exp\Big\{ i(\vec{k}\,\vec{r} - \omega_k t) \Big\}, \tag{1}$$

где $\mathrm{d}\dot{\zeta}$ – комплексная амплитуда гармоники с волновым числом $\vec{k}$ и временной частотой ω_k, связанной с $\vec{k}$ дисперсионным соотношением $\omega_k = \sqrt{gk}$, $\vec{k} = \vec{x_0}k_x + \vec{y_0}k_y$, $\rho = \vec{x_0}x + \vec{x_0}y$, x_0, y_0 – орты декартовой системы координат, $k = |k|$ – пространственная частота, t – время, $g = 9.81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – ускорение свободного падения.

Пространственно-временная корреляционная [1] функция возвышений по определяется выражением:

$$M_\zeta(\vec{r_1}, \vec{r_2}, t_1, t_2) = \langle \zeta(\vec{r_1}, t_1)\zeta(\vec{r_2}, t_2) \rangle \tag{2}$$

[1]Нужно разобраться с названиями, но судя по всему так далее называется смешанный момент

В соответствии с (1):

$$M_\zeta(\vec{r_1},\vec{r_2},t_1,t_2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re} \iint\limits_\infty \iint\limits_\infty \langle \mathrm{d}\dot\zeta(\vec{k}_1)\,\mathrm{d}\dot\zeta(\vec{k}_2)\rangle \exp\Big\{ i(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t_1 + \vec{k}_2\vec{r} - \omega_1 t_2)\Big\} +$$
$$+\langle \mathrm{d}\dot\zeta(\vec{k}_1)\,\mathrm{d}\dot\zeta^*(\vec{k}_2)\rangle \exp\Big\{ i(\vec{k}_1\vec{r} - \omega_1 t_1 - \vec{k}_2\vec{r} + \omega_1 t_2)\Big\}$$

Поскольку двумерная плотность вероятности стационарного процесса зависит от t_1 и t_2 через разность $\tau = t_2 - t_1$, то смешанный момент второго порядка будет зависеть только от τ[2]. Аналогично можно сказать и про $\vec{r}_1$ и $\vec{r})2$

Итак, для статически однородного и стационарного поля выполняется соотношение:

$$M_\zeta(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t_1,t_2) = M_\zeta(\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tau = t_2 - t_1) \tag{3}$$

Чтобы это соотношение было справедливым в нашей задаче, необходимо потребовать выполнение условий

$$\frac{1}{2}\langle \mathrm{d}\dot\zeta(\vec{k}_1)\,\mathrm{d}\dot\zeta(\vec{k}_2)\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\langle \mathrm{d}\dot\zeta(\vec{k}_1)\,\mathrm{d}\dot\zeta^*(\vec{k}_2)\rangle = \tilde{S}(\vec{k}_1)\delta(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\,\mathrm{d}\vec{k}_1\,\mathrm{d}\vec{k_2}\,. \tag{4}$$

где $\tilde{S}(\vec{k})$ – волновой спектр морской поверхности, $\delta(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$ – дельта-функция. Подставляя эти условия в (2), получим:

$$M_\zeta(\rho,\tau) = \iint\limits_\infty S(\vec{k})\cos\Big(\vec{k}\vec{\rho} - \omega_k\tau\Big)\,\mathrm{d}k\,. \tag{5}$$

Винеровский энергетический спектр определяется преобразованием Винера-Хинчкина функцией корреляции, описываемой (5)

$$\Phi_\zeta(\vec{k},\omega) = \iiint\limits_\infty M_\zeta(\vec{\rho},\tau)e^{-i(\vec{k}\vec{\rho}+\omega t)}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\tau = 4\pi^3\Big[\tilde{S}(\vec{k})\delta(\omega+\omega_k) + \tilde{S}(-\vec{k})\delta(\omega-\omega_k)\Big]. \tag{6}$$

Из (6) следуют, как частные случаи, выражения для пространственного,

$$\Phi_\zeta(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\infty \Phi_\zeta(\vec{k},\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi^2\Big[\tilde{S}(\vec{k}) + \tilde{S}(-\vec{k})\Big], \tag{7}$$

и временного спектров Винера.

Разобрать фундаментально всю теорию до этого момента.

3. Реальное и модельное поля уклонов волнения

Обратимся сначала к задаче моделирования случайного одномерного поля уклонов взволнованной поверхности.

[2] доказать

Представим модельное поле уклонов в виде суммы N синусоид с детерминированными амплитудами a_i и случайными фазами φ_i:

$$\Sigma(r) = \sum_{i=1}^{N} a_i \sin(k_i r + \varphi_i), \tag{8}$$

где $b_i = \frac{a_i^2}{2}$.

Допустим что величины k_i не находятся в дробно-рациональных отношениях друг к другу. В этом случае можно полагать, что сложение гармонических составляющих с частотами k_i и амплитудами b_i при больших ρ происходит «некогерентным» образом. При этом мощность «шума» функции $\tilde{M}_q(\rho)$ определяется выражением $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{b_i^2}{2}$. В области малых ρ, напротив, гармоники суммируются «когерентно» и соответствующая «мощность» равна $\tilde{M}_q^2(0) = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} b_i\right)^2$. Образуем величину $Q = \sigma^2/\tilde{M}_q(0)$, которая характеризует относительную мощность шумов. Минимум этой величины находится путём решения системы уравнений $\frac{\partial Q}{\partial b_i} = 0$, для $i = 1, 2, \ldots, N$. Результатом её решения является $b_1 = b_2 = \cdots = d_N$. Спектр модельного поля при этом имеет близкий к белому вид, а выравнивание амплитуд спектральных компонент реального поля S_q сводится к разбиению области определения спектра $[0, k_m]$ на участки Δk_i, интегралы по которым от функции $S_q(k)$ имеют одно и то же значения $b_i = b_0 = \sigma_q^2/N$.

Заметим теперь, что, рассуждая о способах разбиения интервала частот $[0, k_m]$ на участки Δk_i, мы оставляли нерешенным вопрос о выборе собственно узлов спектра k_i внутри этих участков. Обычно узел k_i ставится у правой границы ячейки Δk_i. При этом, однако, оказывается, что модельная корреляционная функция плохо согласуется с реальной корреляционной функцией в области малых ρ. Для достижения такого согласия следует потребовать сопряжения всех производных (от первого до N-о порядка) функция $\tilde{M}_q(\rho)$ и $M_q(q)$ при $\rho = 0$. Это условие эквивалентно требованию сопряжения моментов спектров модельного и реального полей уклонов, которое записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{N} b_i k_i^{2p} = \int\limits_0^{\infty} k^{2p} S_q(k) k \, \mathrm{d}k \,, \tag{9}$$

для $p = 1, 2, \ldots, N$.

Полученная система N уравнений для N неизвестных k_i не имеет общего решения и потому может анализироваться лишь численно, что тоже связано со значительными сложностями.

Оставим пока эту задачу за рамками данной работы.

Наиболее простое решение вопроса о выборе узлов заключается в том, чтобы потребовать выполнения облегченного, по сравнению с предыдущим, условия сопряжения вторых моментов модельного и реального спектров уклонов:

$$b_i k_i^2 = \int\limits_{\Delta k_i} k^2 S_q(k) k \, \mathrm{d}k \,. \tag{10}$$

Из него непосредственно следует правило нахождения узлов k_i. В частности, получаем

$$k_i = \sqrt{\frac{1}{b_0} \int\limits_{\Delta k_i} k^2 S_q(k) k \, \mathrm{d}k} \,. \tag{11}$$

Такой способ выбора узлом, как нетрудно убедиться, обеспечивает сопряжения корреляционных функция реального и модельного полей по второй производной в нуле, или, иначе говоря, равенство дисперсий кривизн этих полей, что весьма важно при решении многих задач оптики морской поверхности:

4. Корреляционные функции высот и уклонов

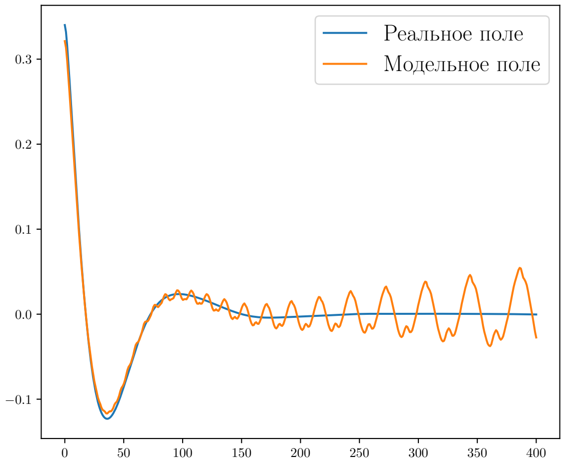

Рис. 1: Корреляционная функция высот при расположении узлов, равномерно распределенных в логарифмическом масштабе. $N = 100,\ U_{10} = 10$.

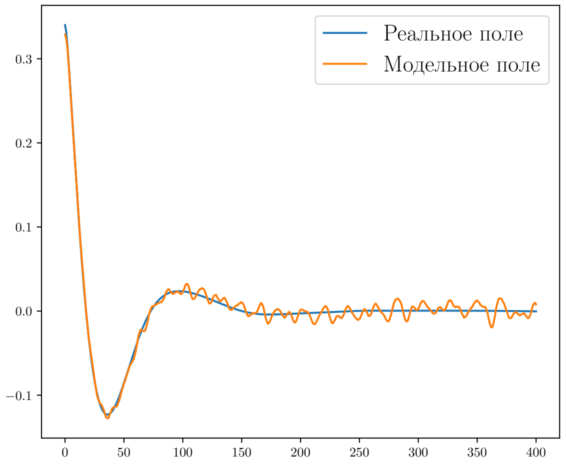

Рис. 2: Корреляционная функция высот при расположении узлов по методу «отбеливания спектра». $N = 100,\ U_{10} = 10$.

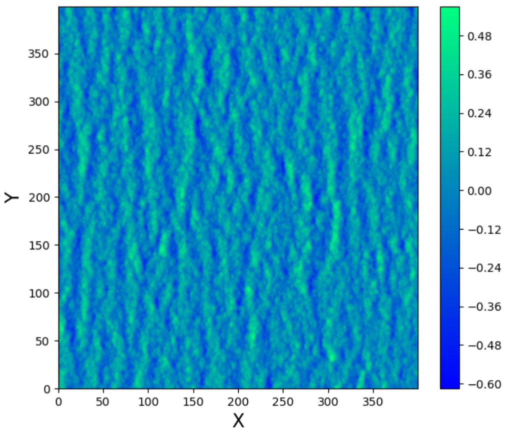

Рис. 3: Моделирование высот морского волнения. $N = 1000,\ U_{10} = 5$

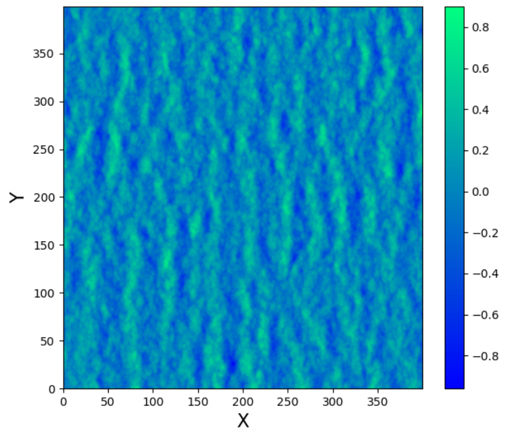

Рис. 4: Моделирование высот морского волнения. $N = 1000,\ U_{10} = 6$

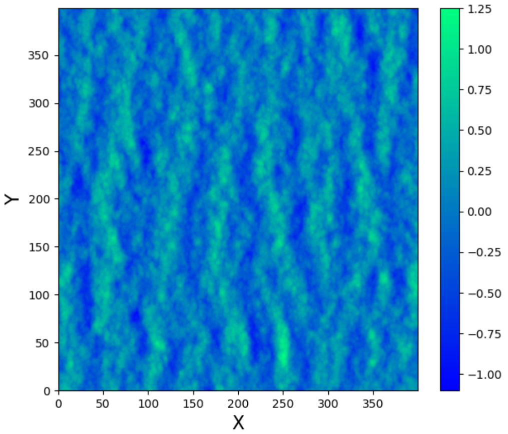

Рис. 5: Моделирование высот морского волнения. $N = 1000,\ U_{10} = 7$

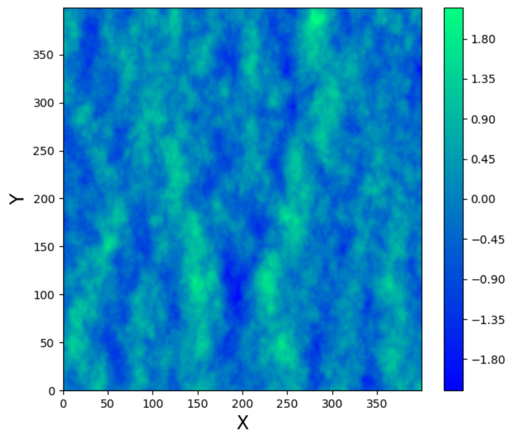

Рис. 6: Моделирование высот морского волнения. $N = 1000,\ U_{10} = 10$

5. Заключение

6. Моделирование волнения

6.1. Модель спектра волнения

Для моделирования волнения используется следующая модель спектра волнения, предложенного в [3]:

$$\begin{cases} S(\omega) = S_J(\omega), & 0 < \omega \leq 1.2\,\omega_m \\ S(\omega) = \frac{\alpha_2}{\omega^4}, & 1.2\,\omega_m < \omega \leq \alpha_m\omega_m \\ S(\omega) = \frac{\alpha_3}{\omega^5}, & \alpha_m\omega_m < \omega \leq \omega_g k \\ S(\omega) = \frac{\alpha_4}{\omega^{2.7}}, & \omega_{gk} < \omega \leq \omega_h \\ S(\omega) = \frac{\alpha_5}{\omega^5}, & \omega_h < \omega, \end{cases} \tag{12}$$

где коэффициенты α_i задаются следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_2 = S_J(1.2\omega_m) \cdot (1.2\omega_m)^4 \\ \alpha_3 = a_2 \cdot \alpha_m\omega_m \\ \alpha_4 = \frac{\alpha_3}{\omega_{gk}^{2.3}} \\ \alpha_5 = \alpha_4 \cdot \omega_h^{2.3} \\ \alpha_m = f(U_{10}), \end{cases} \tag{13}$$

U_{10}– скорость ветра на высоте 10 метров над уровнем моря, а $S_J(\omega)$– спектр JONSWAP:

$$S_J(\omega) \sim \frac{g^2}{\omega^5} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^4\right\} \cdot \gamma^{\exp\{-\omega^2\}} \tag{14}$$

Стоит отметить, что в конечном счете формулы (12),(13),(14) в модели использовались в $k-$представлении, т.е. был выполнен переход $S(\omega) \to S(k)$

6.2. Модель углового распределения

Угловое распределение Φ_ω в данной работе описывается следующей формулой:

$$\Phi_k(k, \varphi) = A \cdot \cosh^{-1} 2B(k)\varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \tag{15}$$

где $\varphi = \varphi_m = \varphi_w$, φ_w– генеральное направление распространения волнения, φ_m– текущий азимутальный угол, A– нормировочный коэффициент.

Дисперсионное уравнение в данной работе имеет вид:

$$\omega(k) = \sqrt{gk + a \cdot k^3}, \tag{16}$$

Значения и физический смысл всех коэффициентов можно найти в [1], а также в исходном коде программы (github.com/KirillPonur/water)

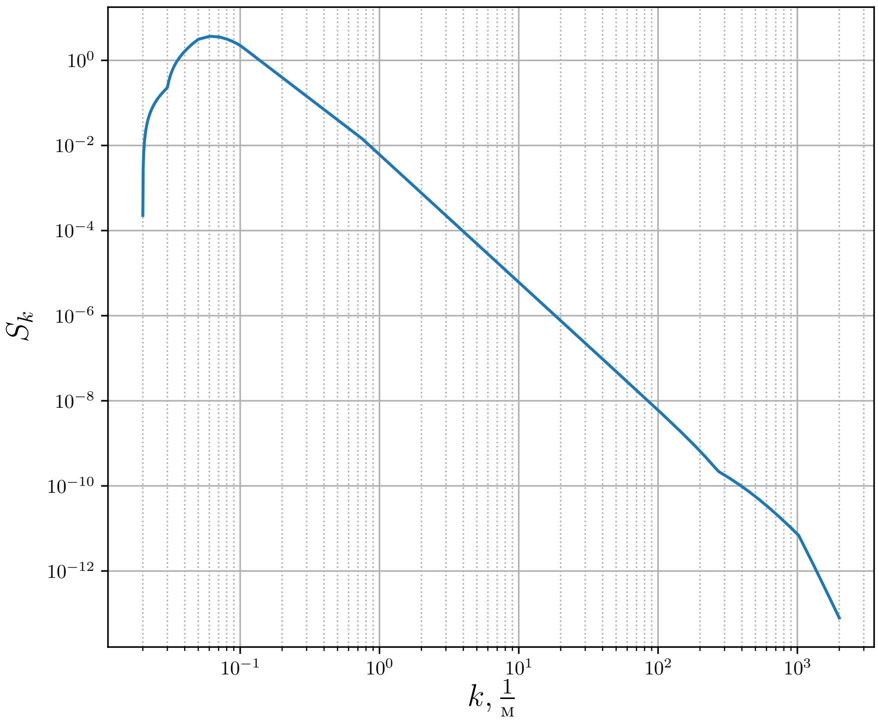

Рис. 7: Используемая модель спектра волнения в k-представлении. Параметры: $\tilde{x} = 20170, U_{10} = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$

Список литературы

[1] *В.Ю.Караев, М.Б. Каневский, Г.Н. Баландина*, Численное моделирование поверхностного волнения и дистанционное зондирование // Препринт №552 ИПФ РАН, 2002, С.1-10.

[2] *В.Л. Вебер*, О моделировании случайного профиля морской поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 4. С. 346.

[3] *В.Ю.Караев, Г.Н. Баландина* Модифицированный спектр волнения и дистанционное зондирование // Исследование Земли из космоса, 2000, N5, С.1-12.

Примечание. Модель написала на языке Python с использованием библиотек NumPy и SciPy, курсовая и презентация к ней оформлены в издательской системе LaTeX с использованием пакета Beamer. Актуальную версию программы можно найти на Github'е: (github.com/KirillPonur/water)

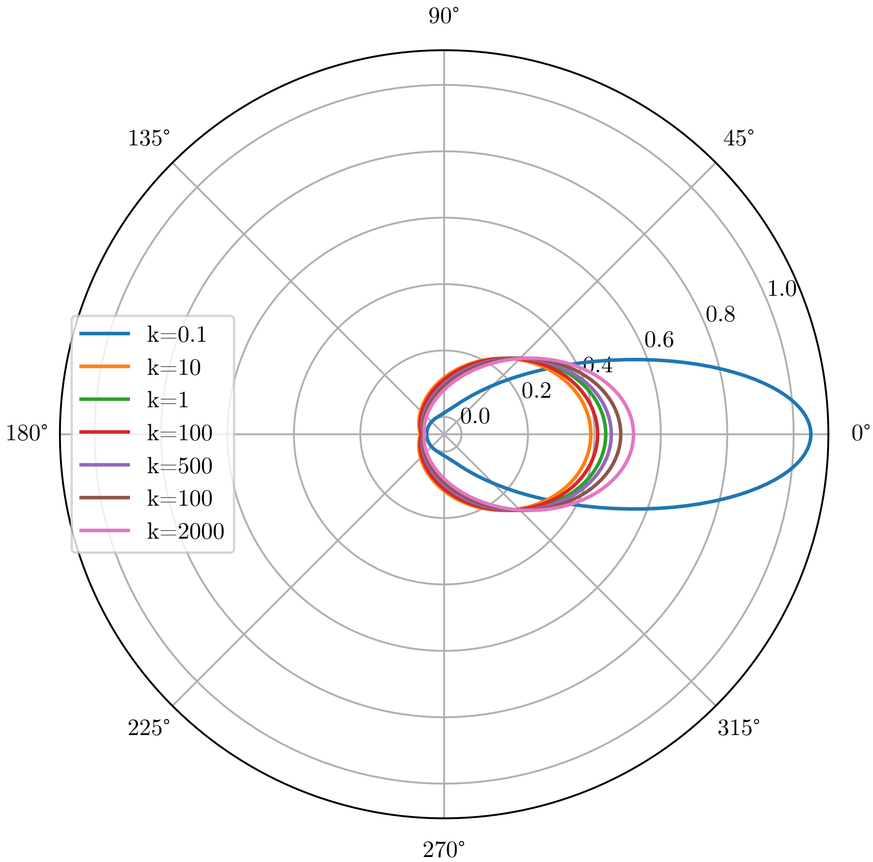

Рис. 8: Используемая модель углового распределения для различных значений k. Параметры: $\tilde{x} = 20170, U_{10} = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$