

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

НАПРАВЛЕНИЕ «РАДИОФИЗИКА»

Отчет по практике

## **Численное моделирование морской поверхности**

Руководитель практики Караев В. Ю.

Выполнил студент 4-го курса бакалавриата Понур К.А.

Нижний Новгород, 26 апреля 2019 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Практическая часть</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Двумерная модель поверхностного волнения</b>	<b>2</b>
2.1	Реальное и модельное поля уклонов и высот волнения . . . . .	3
2.1.1	Метод «отбеливания» спектра . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Заключение</b>	<b>9</b>
<b>A</b>	<b>Приложение</b>	<b>10</b>
A.1	Модель спектра волнения . . . . .	10
A.2	Модель углового распределения . . . . .	10

# 1. Практическая часть

## 2. Двумерная модель поверхностного волнения

Будем моделировать двумерную поверхность по спектру волнения, предложенному в [2]. Основные формулы приведены в приложении [A].

Для моделирования случайной поверхности  $\zeta(\vec{r}, t)$  используется её представление в виде суперпозиции плоских волн с различными частотами и случайными фазами  $\psi_{nm}$ , бегущих под разными азимутальными углами  $\varphi_m$  [5]:

$$\zeta(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_n \cdot \Phi_{nm}(\omega_n, \varphi_m) \cos(\omega_n t + \vec{k}_n \vec{r} + \psi_{nm}),$$

где  $\psi_{nm}$ - случайная фаза, равномерно распределенная в интервале от 0 до  $2\pi$ . Амплитуда  $n$ -й гармоники  $A_n$  вычисляется по спектру моделируемой поверхности  $S(k)$ :

$$A_n(k_n) = \sqrt{2S(k) \cdot \Delta k_n}.$$

Коэффициенты  $\Phi_{nm}$  задают азимутальное распределение и вычисляются следующим образом:

$$\Phi_{nm}(k_n, \varphi_m) = \sqrt{\Phi_k(k_n, \varphi_m) \cdot \Delta\varphi},$$

где  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{M}$  - шаг по азимутальному углу.

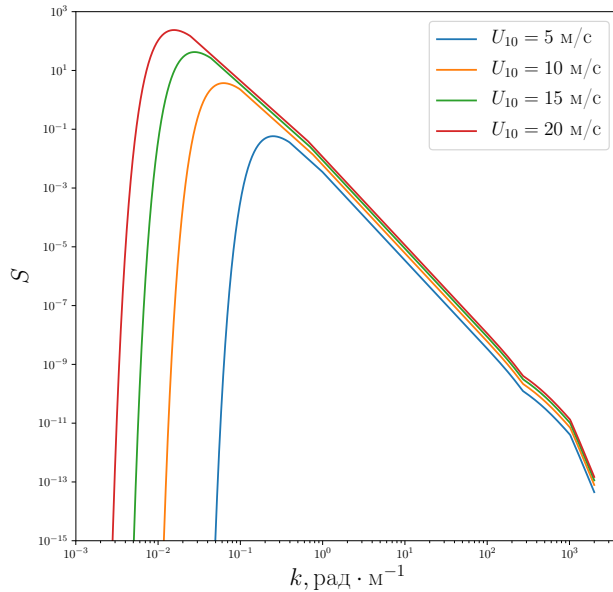


Рис. 1: Спектр высот  $S(k)$  при фиксированном значении  $\tilde{x} = 20170$  и меняющейся скорости ветра

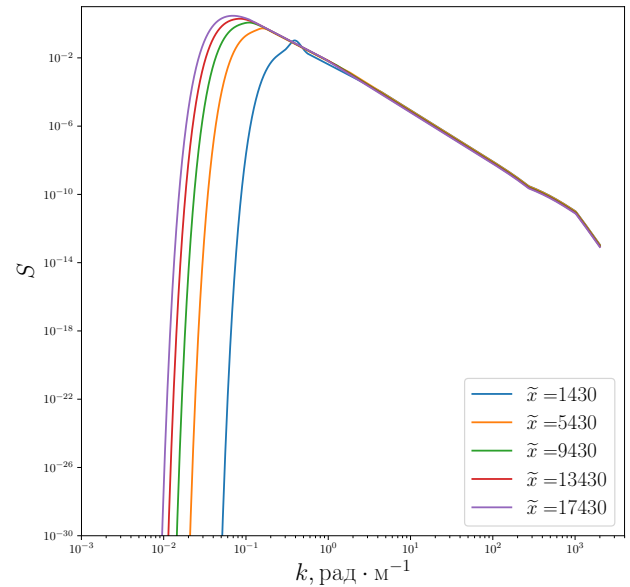


Рис. 2: Спектр высот  $S(k)$  при фиксированном значении скорости ветра  $U = 10$  м/с и меняющемся разгоне

Графики  $S_k(k)$  и  $\Phi_k(k)$  для наглядности изображены на рис.(1)-(2) и 3 соответственно. Стоит заметить, что число гармоник  $N$ , используемых для моделирования, прямо пропорционально зависит от скорости ветра. Критерием выбора оптимального числа гармоник

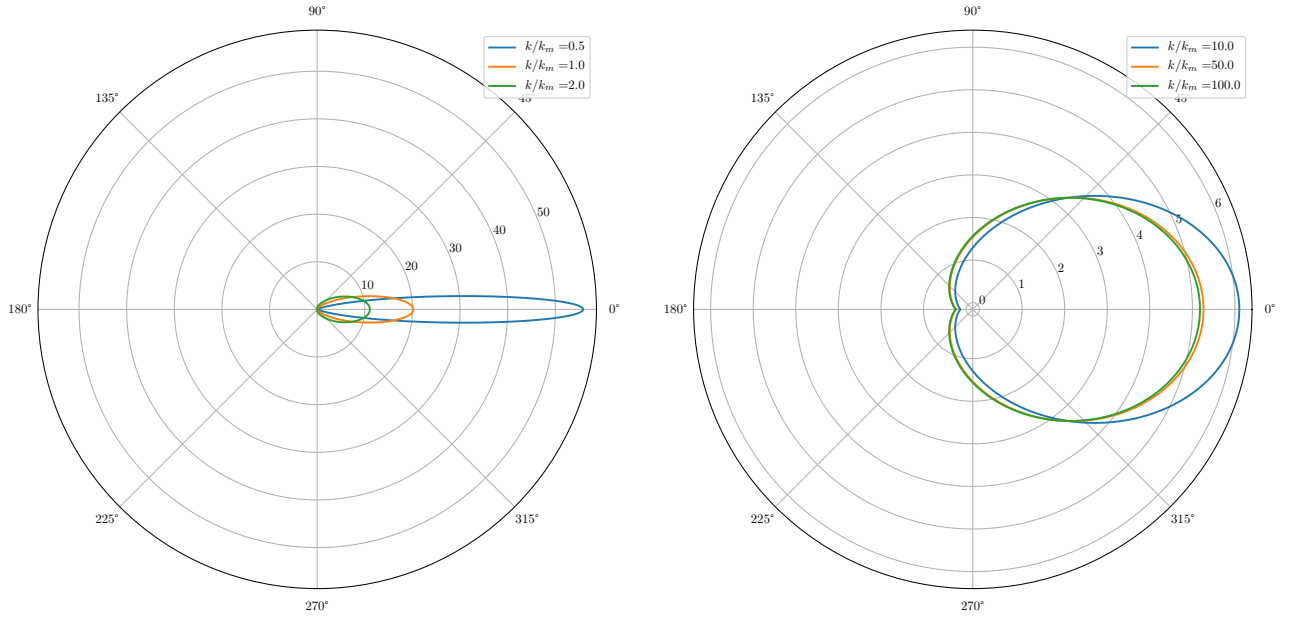


Рис. 3: Угловое распределение  $\Phi_k(\varphi)$  в полярных координатах для разных соотношений  $k/k_m$

стала близость корреляционных функций высот  $M$  и наклонов  $M_\theta$  реального и модельного полей:

$$\begin{aligned}
 M(\rho) &= \int S(k) \cos(k\rho) dk \\
 \widetilde{M}(\rho) &= \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{2} \cos(k_n \rho) \\
 M_\theta &= \int k^2 S(k) \cos(k\rho) dk \\
 \widetilde{M}_\theta(\rho) &= \sum_{n=1}^N \frac{A_n^2}{2} k_n^2 \cos(k_n \rho)
 \end{aligned}$$

Вообще говоря, вместе с  $[A]$  этого достаточно, чтобы смоделировать поверхностное волнение, но без оптимизации выбора  $k_n$  и  $\varphi_m$  счёт достаточно качественной поверхности будет длиться до тепловой смерти Вселенной слишком долго. В данной работе вопрос выбора  $\varphi_m$  не рассматривается и при моделировании используется равномерный шаг, а вот вопросом выбора  $k_n$  мы и зададимся в следующем разделе.

## 2.1. Реальное и модельное поля уклонов и высот волнения

Обратимся сначала к задаче моделирования случайного одномерного поля уклонов взволнованной поверхности.

Пусть реальное случайное поле уклонов имеет корреляционную функцию  $M = \langle \zeta(r) \zeta(r + \rho) \rangle$ , связанную с энергетическим спектром уклонов  $S$  соотношением, следующим из (10),

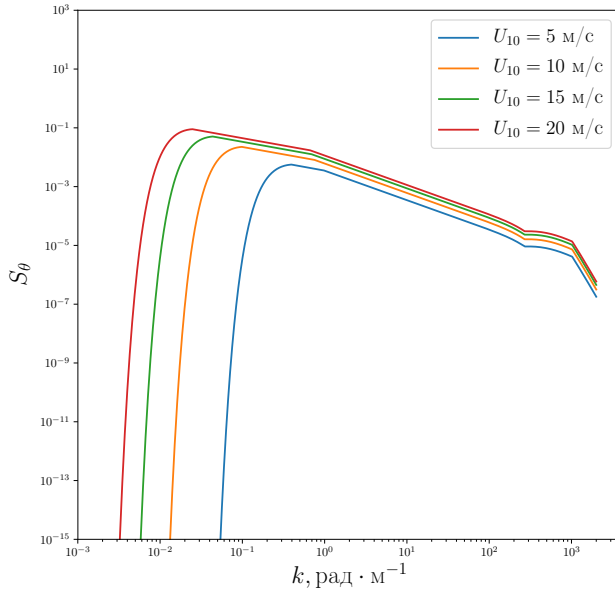


Рис. 4: Спектр наклонов  $S_\theta(k)$  при фиксированном значении  $\tilde{x} = 20170$  и меняющейся скорости ветра

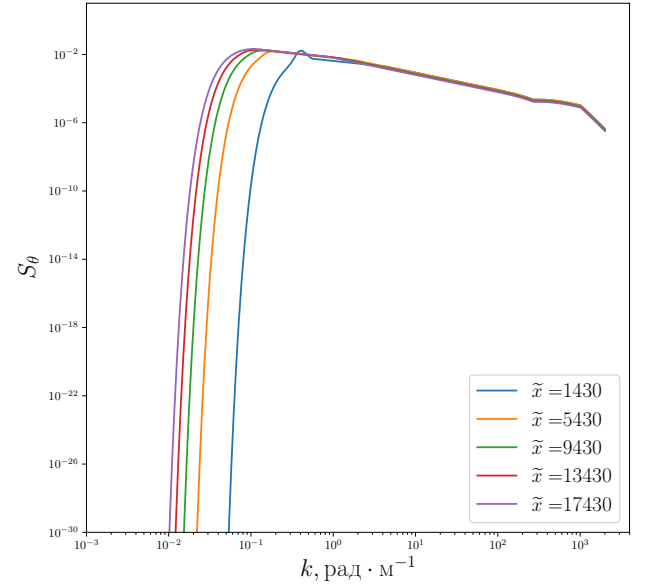


Рис. 5: Спектр наклонов  $S_\theta(k)$  при фиксированном значении скорости ветра  $U = 10$  м/с и меняющемся разгоне

(11) при  $\varphi(\vartheta) = \delta(\vartheta)$ :

$$M(\rho) = \int_0^\infty S(k) \cos(k\rho) dk, \quad (1)$$

Представим модельное поле уклонов в виде суммы  $N$  синусоид с детерминированными амплитудами  $a_i$  и случайными фазами  $\varphi_i$ :

$$\zeta(r) = \sum_{i=1}^N a_i \sin(k_i r + \varphi_i),$$

где фаза  $\varphi_i$  равномерно распределена в интервале  $[0, 2\pi]$ . Соответствующая этому полю корреляционная функция имеет вид

$$\widetilde{M}(\rho) = \sum_{i=1}^N b_i \cos(k_i \rho),$$

где  $b_i = \frac{a_i^2}{2}$ .

Энергетический спектр модельного поля уклонов представляет собой набор дельта-функций, отличных от нуля в узлах  $k_i$ . Огибающей спектра является кривая, проходящая через точки с абсциссами  $k_i$  и ординатами  $b_i$ . Вопросам определения величин  $b_i$  и  $k_i$  посвящены следующие разделы работы.

Естественным способом размещения  $k_i$  будет являться следующий метод: необходимая область разбивается на  $N$  участков одинаковой ширины  $\Delta k$ , а узлы располагаются в точках  $k_i = i\Delta k, i = 1, 2 \dots N$ , т.е. эквидистантно. Амплитуды спектральных составляющих

определяются следующим соотношением:

$$b_i = \int_{(i-1)\Delta k}^{i\Delta k} S(k) dk$$

При этом, из (1) можно заметить, что сумма всех  $b_i$  равна дисперсии реального поля

$$M(0) = \sigma^2 = \int_0^\infty S(k) dk$$

Однако, при таком способе моделирования корреляционная функция  $\widetilde{M}(\rho)$  является периодической. Для иллюстрации на рис.(6) приведены примеры расчёта этой функции для скорости ветра  $U = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  и  $N = 256$ . Конечно, период этой функции может быть удлинён, но это достигается путём увеличения гармоник. Как видно из рис. 7 даже при неразумно большом числе гармоник период корреляционной функции недостаточно большой, что ставит под сомнение применимость такого метода моделирования.

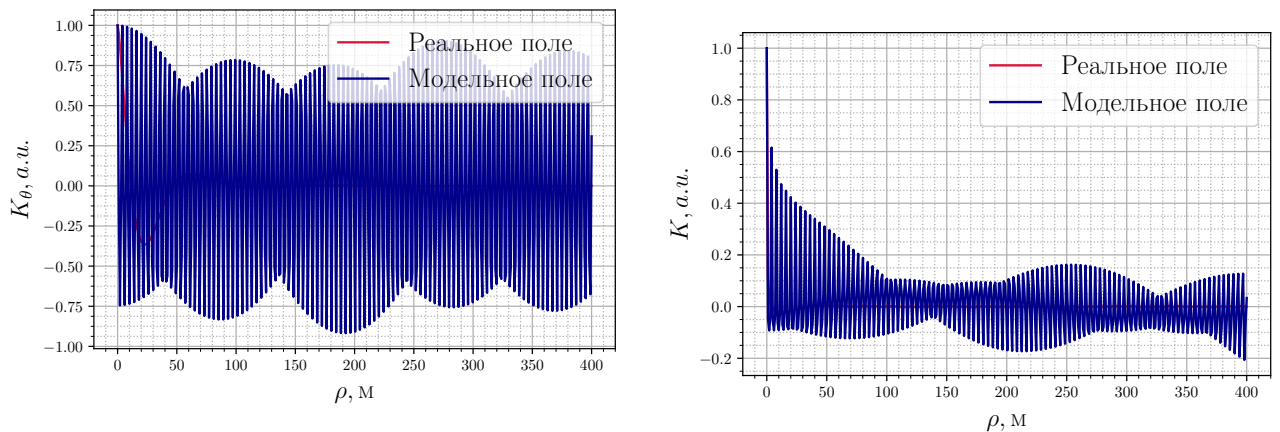


Рис. 6: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов.  $U = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $N = 256$

Чтобы функция  $\widetilde{M}(\rho)$  не была периодической, необходимо лишь неэквидистантно расположить узлы  $k_i$  на оси частот. Например, можно использовать различные детерминированные способы расположения узлов на оси частот.

Поскольку спектр частот (см. рис. 1) удобно представим в логарифмическом масштабе, то можно располагать узлы эквидистантно в логарифмическом масштабе. Очевидно, что такой способ значительно лучше, чем первый способ. Функция корреляции высот довольно быстро сходится к функции реального поля. С функцией корреляции наклонов проблем возникает больше, поскольку она быстро принимает шумовой характер.

Очевидно, что способов выбора узлов по детерминированному закону существует бесконечно много, но наилучшими следует считать те способы, которые обеспечивают наименьший уровень «шума» на «хвосте» корреляционной функции  $\widetilde{M}(\rho)$ .

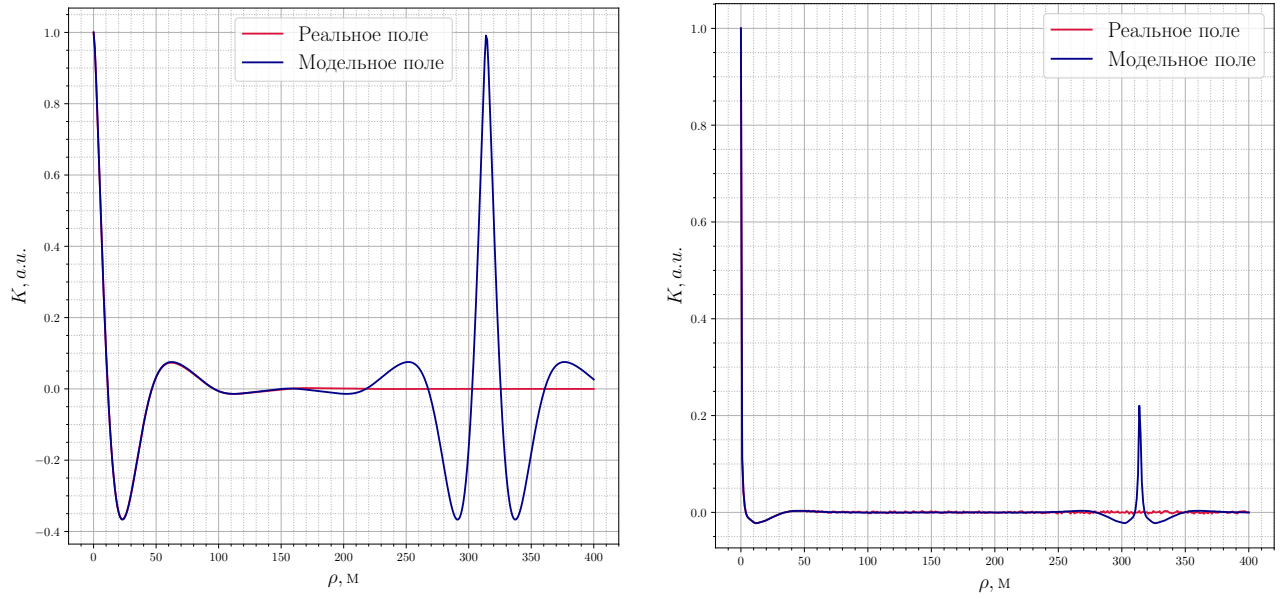


Рис. 7: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов.  $U = 10 \frac{M}{c}$ ,  $N = 10^5$

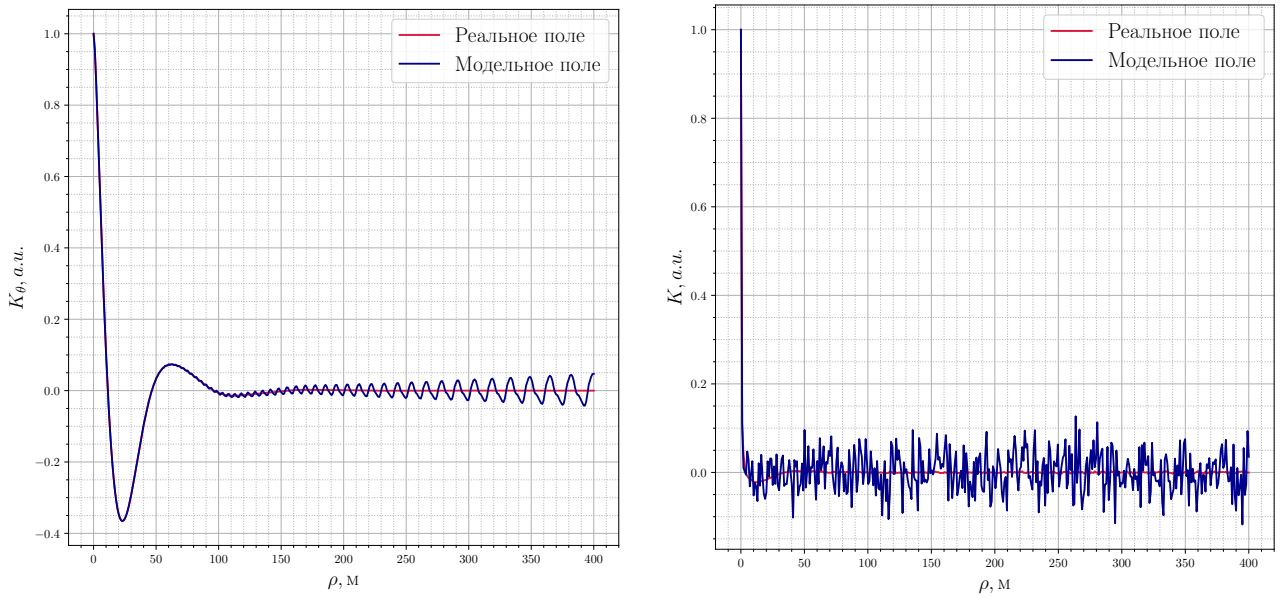


Рис. 8: Корреляционные функции высот и уклонов при логарифмическом расположении узлов.  $U = 10 \frac{M}{c}$ ,  $N = 256$

### 2.1.1 Метод «отбеливания» спектра

Допустим что величины  $k_i$  не находятся в дробно-рациональных отношениях друг к другу. В этом случае можно полагать, что сложение гармонических составляющих с частотами  $k_i$  и амплитудами  $b_i$  при больших  $\rho$  происходит «некогерентным» образом. При этом мощность «шума» функции  $\widetilde{M}(\rho)$  определяется выражением  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \frac{b_i^2}{2}$ . В области малых  $\rho$ , напротив, гармоники суммируются «когерентно» и соответствующая «мощность»

равна  $\widetilde{M}^2(0) = \left( \sum_{i=1}^N b_i \right)^2$ . Образуем величину

$$Q = \sigma^2 / \widetilde{M}(0) \quad (2)$$

, которая характеризует относительную мощность шумов. Минимум этой величины находится путём решения системы уравнений  $\frac{\partial Q}{\partial b_i} = 0$ , для  $i = 1, 2, \dots, N$ . Результатом её решения является  $b_1 = b_2 = \dots = d_N$ . Спектр модельного поля при этом имеет близкий к белому вид, а выравнивание амплитуд спектральных компонент реального поля  $S(k)$  сводится к разбиению области определения спектра  $[0, k_m]$  на участки  $\Delta k_i$ , интегралы по которым от функции  $S(k)$  имеют одно и то же значения  $b_i = b_0 = \sigma^2 / N$ .

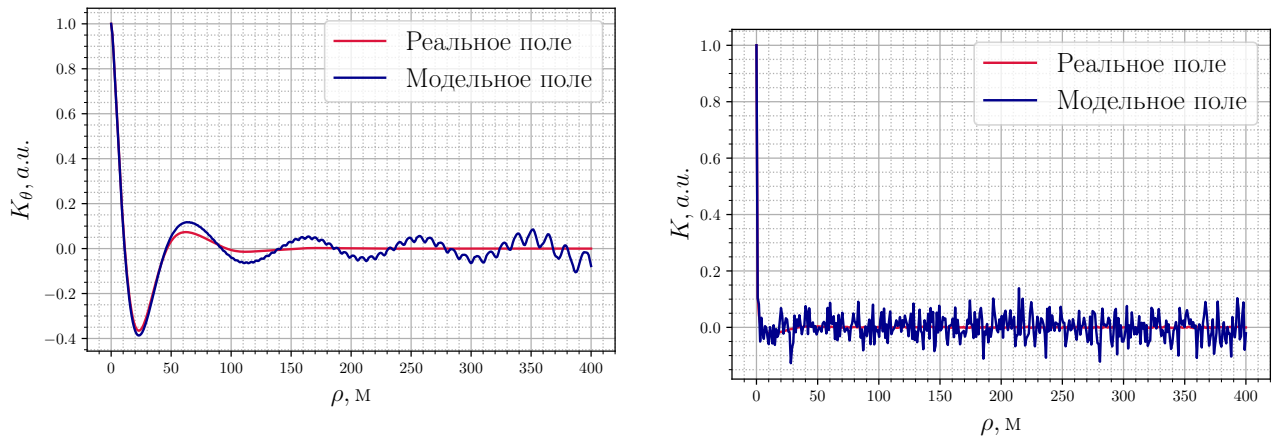


Рис. 9: Корреляционные функции высот и уклонов при расположении узлов по методу «отбеливания» спектра для уклонов.  $U = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $N = 256$

Заметим теперь, что, рассуждая о способах разбиения интервала частот  $[0, k_m]$  на участки  $\Delta k_i$ , мы оставляли нерешенным вопрос о выборе собственно узлов спектра  $k_i$  внутри этих участков. Обычно узел  $k_i$  ставится у правой границы ячейки  $\Delta k_i$ . При этом, однако, оказывается, что модельная корреляционная функция плохо согласуется с реальной корреляционной функцией в области малых  $\rho$ . Для достижения такого согласия следует потребовать сопряжения всех производных (от первого до  $N$ -го порядка) функций  $\widetilde{M}(\rho)$  и  $M(q)$  при  $\rho = 0$ . Это условие эквивалентно требованию сопряжения моментов спектров модельного и реального полей, которое записывается в виде

$$\sum_{i=1}^N b_i k_i^{2p} = \int_0^\infty k^{2p} S dk,$$

для  $p = 1, 2, \dots, N$ .

Полученная система  $N$  уравнений для  $N$  неизвестных  $k_i$  не имеет общего решения и потому может анализироваться лишь численно, что тоже связано со значительными сложностями.



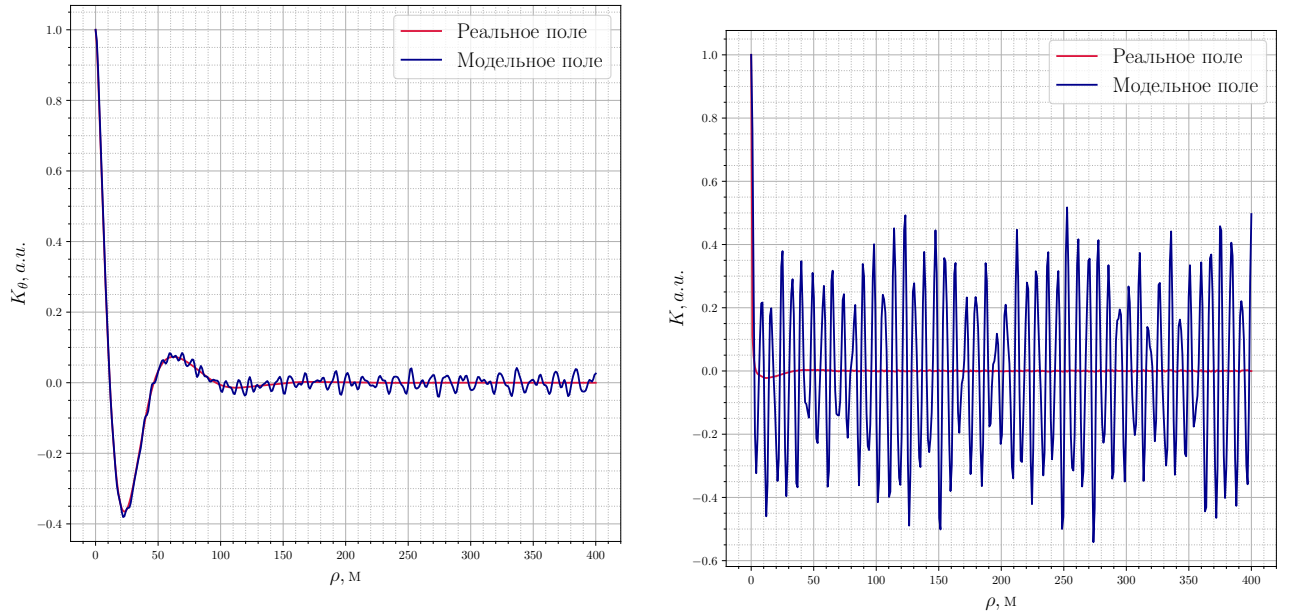


Рис. 10: Корреляционные функции высот и уклонов при расположении узлов по методу «отбеливания» спектра для высот.  $U = 10 \frac{M}{c}$ ,  $N = 256$

Наиболее простое решение вопроса о выборе узлов заключается в том, чтобы потребовать выполнения облегченного, по сравнению с предыдущим, условия сопряжения вторых моментов модельного и реального спектров высот:

$$b_i k_i^2 = \int_{\Delta k_i} k^2 S(k) dk.$$

Из него непосредственно следует правило нахождения узлов  $k_i$ . В частности, получаем

$$k_i = \sqrt{\frac{1}{b_0} \int_{\Delta k_i} k^2 S dk}.$$

Такой способ выбора узлом, как нетрудно убедиться, обеспечивает сопряжения корреляционных функций реального и модельного полей по второй производной в нуле, или, иначе говоря, равенство дисперсий кривизн этих полей.

Стоит сказать, что весь этот раздел был написан для поля высот  $S(k)$ . Но те же рассуждения можно провести и для поля наклонов  $S_\theta(k)$ , которое связано с полем высот соотношением  $S_\theta = k^2 S(k)$ . Таким образом, положив

$$S(k) \longrightarrow k^2 S(k)$$

мы можем получить уравнения для моделирования поля наклонов.

На рис. 9 и 10 построены графики зависимости корреляционных функций высот и уклонов для метода «отбеливания» спектра, примененного соответственно для наклонов и высот. Нетрудно заметить, что этот метод лучше предыдущих работает для одной выбранной функции, но с другой вызывает проблемы. Это особенно заметно на рис. 10: поле высот  $\widetilde{M}$  хорошо сходится к реальному полю  $M$ , но  $\widetilde{M}_\theta$  очень далека от реальной.

### 3. Заключение

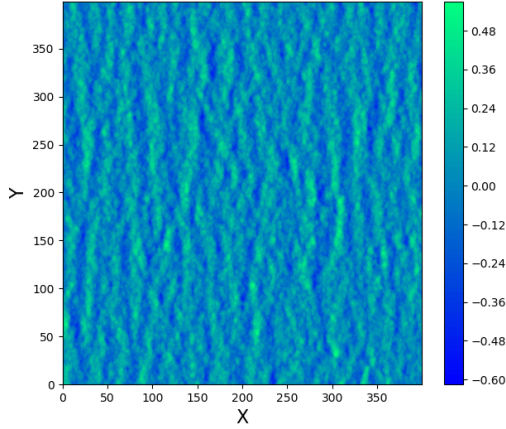


Рис. 11: Моделирование высот морского волнения.  $N = 256$ ,  $U_{10} = 5$

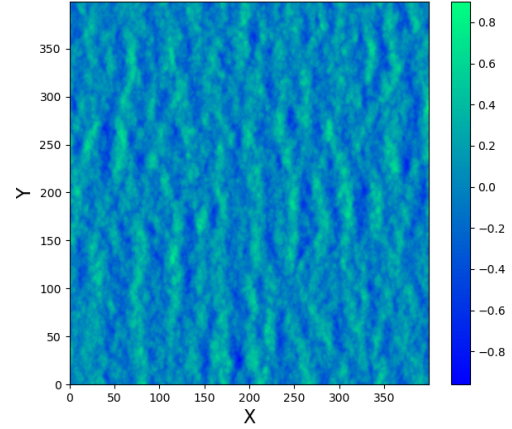


Рис. 12: Моделирование высот морского волнения.  $N = 256$ ,  $U_{10} = 6$

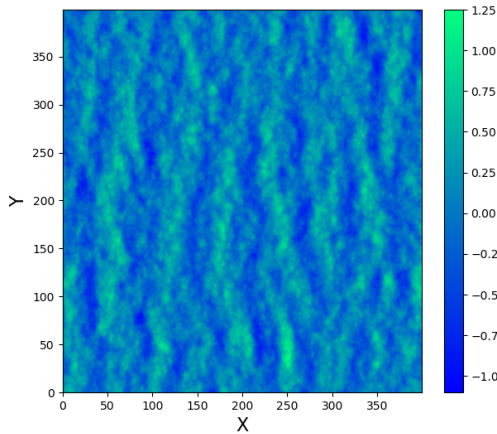


Рис. 13: Моделирование высот морского волнения.  $N = 256$ ,  $U_{10} = 7$

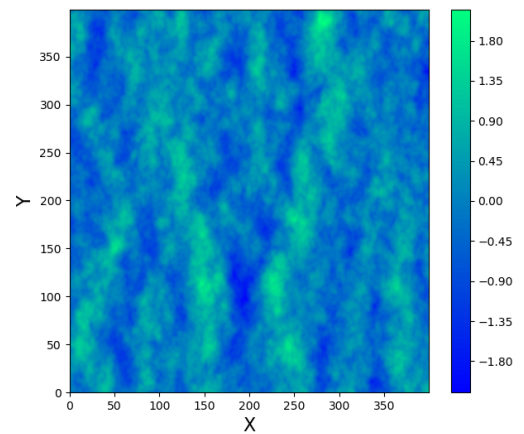


Рис. 14: Моделирование высот морского волнения.  $N = 256$ ,  $U_{10} = 10$

На рисунках 11-14 представлены смоделированные поля высот для разных скоростей ветра<sup>1</sup>. В дальнейшем планируется усовершенствовать выбор азимутальных координат  $\varphi$ , а также выбором некой новой величины  $Q$  (см.(2)) добиться сопряжения метода «отбеливания» спектра для наклонов и высот.

<sup>1</sup>Модель написала на языке Python с использованием библиотек NumPy и SciPy, отчёт по практике и презентация к ней оформлены в издательской системе L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X с использованием пакета Beamer. Актуальную версию программы можно найти на Github'e:



## А. Приложение

### А.1. Модель спектра волнения

Для моделирования волнения используется следующая модель спектра волнения, предложенного в [4]:

$$\begin{cases} S(\omega) = S_J(\omega), & 0 < \omega \leq 1.2\omega_m \\ S(\omega) = \frac{\alpha_2}{\omega^4}, & 1.2\omega_m < \omega \leq \alpha_m\omega_m \\ S(\omega) = \frac{\alpha_3}{\omega^5}, & \alpha_m\omega_m < \omega \leq \omega_g k \\ S(\omega) = \frac{\alpha_4}{\omega^{2.7}}, & \omega_g k < \omega \leq \omega_h \\ S(\omega) = \frac{\alpha_5}{\omega^5}, & \omega_h < \omega, \end{cases} \quad (3)$$

где коэффициенты  $\alpha_i$  задаются следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_2 = S_J(1.2\omega_m) \cdot (1.2\omega_m)^4 \\ \alpha_3 = \alpha_2 \cdot \alpha_m\omega_m \\ \alpha_4 = \frac{\alpha_3}{\omega_{gk}^{2.3}} \\ \alpha_5 = \alpha_4 \cdot \omega_h^{2.3} \\ \alpha_m = f(U_{10}), \end{cases} \quad (4)$$

$U_{10}$ — скорость ветра на высоте 10 метров над уровнем моря, а  $S_J(\omega)$ — спектр JONSWAP:

$$S_J(\omega) \sim \frac{g^2}{\omega^5} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^4\right\} \cdot \gamma^{\exp\{-\omega^2\}} \quad (5)$$

Стоит отметить, что в конечном счете формулы (3),(4),(5) в модели использовались в  $k$ —представлении, т.е. был выполнен переход  $S(\omega) \rightarrow S(k)$

### А.2. Модель углового распределения

Угловое распределение  $\Phi_\omega$  в данной работе описывается следующей формулой:

$$\Phi_k(k, \varphi) = A \cdot \cosh^{-1} 2B(k)\varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

где  $\varphi = \varphi_m = \varphi_w$ ,  $\varphi_w$ — генеральное направление распространения волнения,  $\varphi_m$ — текущий азимутальный угол,  $A$ — нормировочный коэффициент.

Дисперсионное уравнение в данной работе имеет вид:

$$\omega(k) = \sqrt{gk + a \cdot k^3},$$

## Список литературы

- [1] *С.М. Рытов*, Введение в статистическую радиофизику // Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва : Наука, 1976. - Ч. 1. Случайные процессы §§14-18, 38-42
- [2] *В.Ю.Караев, М.Б. Каневский, Г.Н. Баландина*, Численное моделирование поверхностного волнения и дистанционное зондирование // Препринт №552 ИПФ РАН, 2002, С.1-10.
- [3] *В.Л. Вебер*, О моделировании случайного профиля морской поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 4. С. 346.
- [4] *В.Ю.Караев, Г.Н. Баландина* Модифицированный спектр волнения и дистанционное зондирование // Исследование Земли из космоса, 2000, N5, С.1-12.
- [5] *М.С. Лонге-Хиггинс* Статистический анализ случайной движущейся поверхности // в кн.: Ветровые волны, М.: Иностранная наука, 1962, С.112-230