

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В первой части предметом исследования и моделирования были случайные величины. Случайная величина характерна тем, что она в результате эксперимента принимает одно, заранее неизвестное значение. Однако такой элементарный подход в ряде практических задач является явно недостаточным. На практике часто приходится иметь дело со случайными величинами, непрерывно изменяющимися в процессе эксперимента. Примерами в этом случае могут служить: воздействие случайной "шумовой" помехи на вход системы или изменение показателей канала связи с течением времени. Для описания таких ситуаций существуют случайные процессы. *Случайный процесс* - это функция времени, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид и неизвестно заранее - какой именно. Конкретный вид, принимаемый случайным процессом в результате эксперимента, называется реализацией случайного процесса. Если произвести серию экспериментов над случайным процессом, то мы получим "семейство" реализаций этого случайного процесса.

Рассмотрим некоторый случайный процесс $X(t)$ на определенном отрезке времени. Важно отметить, что если зафиксировать момент времени, то значение случайного процесса в этот момент времени - это случайная величина. Если рассмотреть значения случайного процесса в различные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m , то мы получим совокупность случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$. Очевидно, что если интервалы (по времени) взятия отсчетов случайного процесса очень малы и их достаточно много (в пределе их количество стремится к бесконечности), то совокупность случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$ достаточно точно определяет характер поведения случайного процесса. При описании случайных величин мы пользовались понятиями функции распределения вероятности и плотности распределения вероятности случайной величины. Так как теперь у нас совокупность случайных величин (которые имеют между собой статистическую связь), то рассмотренных ранее сведений недостаточно. Если мы возьмем значения случайного процесса в различные моменты времени t_1 и t_2 , то будем располагать двумя случайными величинами $X(t_1)$ и $X(t_2)$. В этом случае для исчерпывающего описания используется двумерная функция распределения вероятности:

$$F[x(t_1), x(t_2), t_1, t_2] = P[X(t_1) \leq x(t_1), X(t_2) \leq x(t_2)], \quad (1)$$

где $P[\dots]$ - вероятность события, указанного в скобках. Аналогично запишется двумерная плотность распределения вероятности:

$$f[x(t_1), x(t_2), t_1, t_2] = \frac{\partial^2 F[x(t_1), x(t_2), t_1, t_2]}{\partial x(t_1) \partial x(t_2)}. \quad (2)$$

Приведенные формулы (1) и (2) представляют исчерпывающее описание двух случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

Однако эти характеристики не являются достаточными для описания случайного процесса. Более полной характеристикой была бы трехмерная функция распределения вероятности:

$$F[x(t_1), x(t_2), x(t_3), t_1, t_2, t_3] = P[X(t_1) \leq x(t_1), X(t_2) \leq x(t_2), X(t_3) \leq x(t_3)].$$

Очевидно, теоретически можно неограниченно увеличивать число аргументов в функции и плотности распределения вероятности и получать при этом все более подробную информацию о характере случайного процесса. Однако такое описание для большинства ситуаций оказывается очень громоздким и неудобным. Важно, что если значения случайного процесса в различные моменты времени независимы, то совместная плотность распределения вероятности равна произведению одномерных плотностей распределения вероятности. Например, для выражения (2) имеем:

$$f[x(t_1), x(t_2)] = f[x(t_1)]f[x(t_2)].$$

Практически в большинстве ситуаций достаточную информацию о процессе дает корреляционная функция случайного процесса

$$R_x(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - M[x(t_1)])(X(t_2) - M[x(t_2)])]$$

где $M[\dots]$ - обозначение математического ожидания.

На практике часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются *стационарными*. Каждый стационарный процесс можно рассматривать как продолжающийся во

времени неопределенно долго. Исследуя стационарный процесс на любом временном участке, мы должны получить одни и те же его характеристики.

В общем случае $X(t)$ считается стационарным процессом, если все его вероятностные характеристики не зависят от времени (точнее, не меняются при любом сдвиге аргументов, от которых они зависят, по оси t). Как следствие этого математическое ожидание случайного процесса, его дисперсия и корреляционная функция не зависят от времени.

1. ЦИФРОВАЯ МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Моделирование любого временного процесса, в том числе и случайного, представляет набор N значений (чисел) реализации этого процесса. Эти значения берутся из временного отрезка непрерывной функции $X(t)$ через фиксированный интервал времени (или шаг дискретизации) T :

$$X(0T), X(1T), X(2T), \dots, X([N-1]T).$$

Построением таких моделей в виде набора N случайных чисел мы займемся далее. Вместо обозначения $X(nT)$ будем использовать Xn или $X(n)$.

В цифровых системах наиболее распространена одна из разновидностей случайного процесса - дискретный белый гауссовский шум. Это последовательность случайных чисел X_n , каждое число при этом имеет гауссовскую плотность распределения вероятности с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D . При этом различные случайные числа статистически независимы, т.е. $f(x_n, x_m) = f(x_n)f(x_m)$ при различных n и m . Таким образом, для моделирования реализации из N дискретных отсчетов дискретного белого гауссовского шума необходимо N раз обратиться к датчику, выдающему независимые случайные числа, распределенные по гауссовскому закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D (для программной реализации такой модели достаточно сведений по предыдущей теме).

Большое практическое значение имеет модель гауссовского шума при условии, что значения соседних элементов статистически зависимы. Такая модель описывает и изменение стоимости акций на бирже, и значения помехи на входе системы связи. Для характеристики статистической связи значений случайного процесса в различные моменты времени (непрерывного или дискретного)

используется *функция корреляции*. В дальнейшем рассмотрим модели случайных процессов с различными функциями корреляции. Напомним, что функция корреляции для дискретного во времени стационарного процесса определяется следующим образом:

$$R(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x(n-m) - M\{X\}][x(n) - M\{X\}] f[x(n), x(n-m)] dx(n) dx(n-m),$$

где $M\{X\}$ - математическое ожидание случайного дискретного во времени процесса $X(n)$.

Наибольшее распространение в природе и технике получили так называемые *гауссовские случайные процессы* - многомерная плотность распределения вероятности которых описывается гауссовским законом. Далее рассмотрим математические модели гауссовских случайных процессов с различными функциями корреляции.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С РАЗЛИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ КОРРЕЛЯЦИИ

1) с корреляционной функцией вида

$$R(m) = D \exp(-am).$$

Здесь D - дисперсия процесса, а a - определяет корреляцию (статистическую зависимость) соседних чисел (считаем $a > 0$).

Для моделирования гауссовского случайного процесса с экспоненциальной функцией корреляции используется следующий алгоритм:

$$x(n) = k_1 e(n) + k_2 x(n-1),$$

$$k_1 = \sqrt{D(1 - k_2^2)}, \quad k_2 = \exp(-a).$$

где $e(n)$ - значения дискретного белого гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Параметрами модели в данном случае являются дисперсия выходного моделируемого процесса D и параметр a , который определяет статистическую связь соседних случайных отсчетов.

Как правило, на практике исходным параметром является нормированный коэффициент корреляции

$$\rho(1) = \frac{R(1)}{D} = \exp(-a) \quad (3)$$

который определяет нормированную корреляцию соседних отсчетов случайного процесса и практически задается из интервала от 0.9 до 0.9999. Когда этот коэффициент равен 1, то все значения случайного процесса становятся одинаковыми, а когда этот коэффициент стремится к 0, то получается рассмотренная ранее модель - дискретный белый гауссовский шум.

`random.normalvariate(mu, sigma)` — нормальное распределение. `mu` — среднее значение, `sigma` — стандартное отклонение.

На листинге 1 приведена программа моделирования реализации случайного процесса с экспоненциальной функцией корреляции. Изображение 1 демонстрирует вывод на экран случайного процесса.

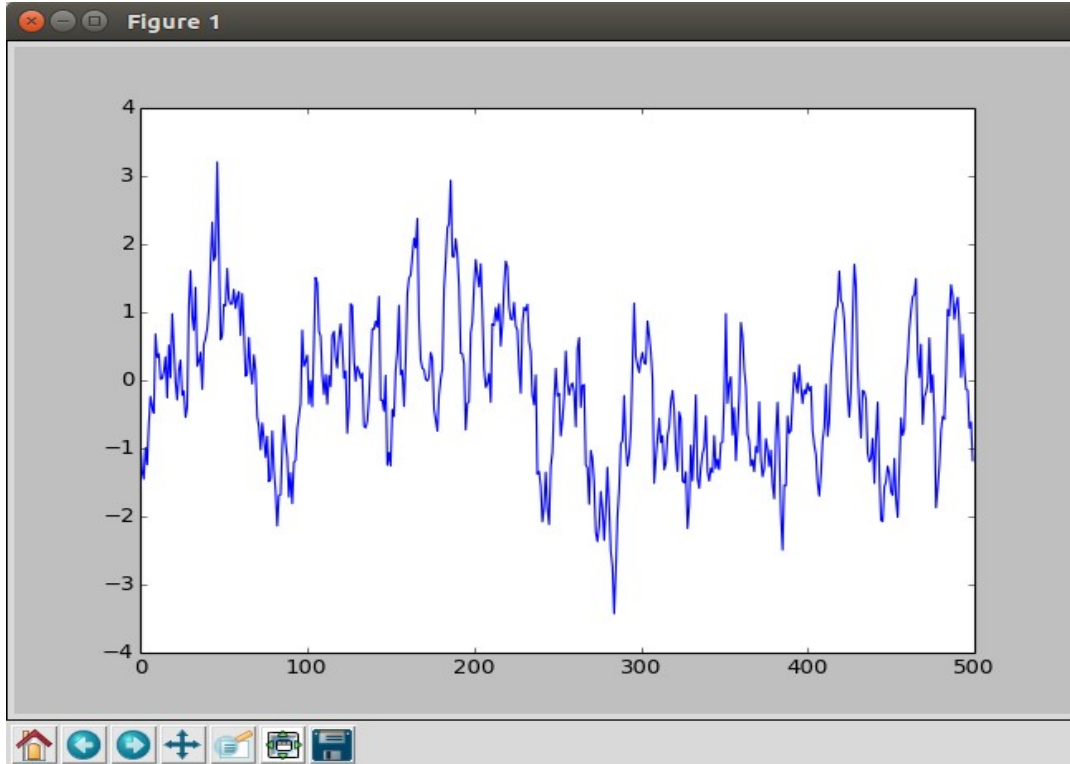
Листинг 1.

```
import math
import pylab
import random

from matplotlib import mlab

x=[]
nomi=[]
N=500 # Число отсчетов
D=1
a = 0.15
k2 = math.exp( - a )
k1 = math.sqrt( D*( 1 - k2* k2 ) )
sigma=math.sqrt(D)
x.append(random.normalvariate(0,sigma))
nomi.append(0)
for i in range(1,N):
    e=random.normalvariate(0,1)
    x.append(k1* e + k2* x[i-1])
    nomi.append(i)
```

```
pylab.plot(nomi,x)
pylab.show()
```



Изображение 1

2) с корреляционной функцией вида

$$R(m) = D \exp(-a^2 m^2).$$

Здесь, как и раньше, D - дисперсия процесса, а a - определяет корреляцию (статистическую зависимость) соседних чисел.

Последовательность этапов моделирования следующая:

1. Необходимо получить реализацию дискретного белого шума длительностью N (где N достаточно большое - порядка 1000 и более отсчетов) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для получения данной реализации необходимо N раз обратиться к датчику, выдающему независимые случайные числа, распределенные по гауссовскому закону. Эту реализацию в дальнейшем будем обозначать $e(n)$.

2. Далее выполняем следующее преобразование:

$$x(n) = \sum_{k=-P}^P C(k) e(n-k),$$

где $C(k) = (\sqrt{2Da}/\sqrt{\pi}) \exp(-a^2 k^2).$

Здесь неопределенным остается предел суммирования P , и для его определения может служить рекомендация:

$$P = \text{целая часть от деления } 2 \text{ на } a$$

($a < 1$ - иначе моделирование не имело бы смысла). После этого в получившейся реализации необходимо отбросить первые и последние P отсчетов и оставить только $N-2P$ отсчетов. Дело в том, что стационарным фрагментом моделируемого случайного процесса (с постоянной дисперсией) является именно центральная часть. Таким образом, длительность реализации равна $N=N-2P$.

3) с корреляционной функцией вида

$$R(m) = D \sin(am)/(am).$$

Здесь, как и раньше, D - дисперсия процесса, а a - определяет корреляцию (статистическую зависимость) соседних чисел.

Последовательность этапов моделирования следующая:

1. Необходимо получить реализацию дискретного белого шума длительностью N (где N достаточно большое - порядка 1000 и более отсчетов) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для получения данной реализации необходимо N раз обратиться к датчику, выдающему независимые случайные числа, распределенные по гауссовскому закону. Эту реализацию в дальнейшем будем обозначать $e(n)$.

2.2. Далее выполняем следующее преобразование:

$$x(n) = \sum_{k=-P}^P C(k) e(n-k),$$

где $C(k) = (\sqrt{D}/\sqrt{\pi a}) \sin(ak)/k.$

Здесь неизвестным остается предел суммирования P , для его определения может служить знакомая рекомендация:

$$P = \text{целая часть от деления } 2 \text{ на } a \ (a < 1).$$

3. В получившейся реализации необходимо отбросить первые и последние P отсчетов.

Таким образом, длительность реализации стационарного процесса с требуемой функцией корреляции равна $N = N - 2P$.

4) с треугольной корреляционной функцией.

В рассматриваемом случае функция корреляции описывается формулой:

$$R(m) = D \left(1 - \frac{|m|}{M} \right).$$

где $-M \leq m \leq M$, M определяет протяженность корреляционной функции, D - дисперсия случайного процесса. При других m $R(m) = 0$.

Алгоритм моделирования реализации гауссовского случайного процесса с рассматриваемой корреляционной функцией заключается в следующем:

1. Необходимо получить реализацию дискретного белого гауссовского шума длительностью N (где N достаточно большое - порядка 1000 и более отсчетов) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для получения данной реализации необходимо N раз обратиться к датчику, выдающему независимые случайные числа, распределенные по гауссовскому закону. Эту реализацию в дальнейшем будем обозначать $e(n)$.

2. Выполнить преобразование исходной последовательности $e(n)$ следующим образом:

$$x(n) = \sqrt{\frac{D}{M}} \sum_{k=0}^{M-1} e(n-k)$$

3. После этого необходимо отбросить первые $M-1$ отсчеты случайного процесса $x(n)$. Оставшиеся $N-M+1$ представляют реализацию стационарного случайного процесса с требуемыми корреляционными свойствами.

3. ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПО РЕАЛИЗАЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА.

В результате моделирования (по любому алгоритму) мы получили реализацию из N отчетов. Для того, чтобы убедиться в правильности использованного алгоритма воспользуемся оценкой корреляционной функции по следующей формуле (в которой учитывается нулевое математическое ожидание):

$$\tilde{R}(m) = 1/(N-m) \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m), \text{ при } m \geq 0 \quad (4)$$

Для отрицательных m можно воспользоваться симметричностью корреляционной функции.

На следующем фрагменте (листинг 2) приведена программа моделирования реализации дискретного гауссовского шума с функцией корреляции вида $R(m) = D \sin(am)/(am)$. В программе, используя соотношение (4), по получившейся реализации производится оценка корреляционной функции. На изображении 2 показана оценка корреляционной функции.

Листинг 2.

```
import math
import pylab
import random

from matplotlib import mlab

N=10000 # длина фрагмента начального случайного процесса

e=[]
x=[]
nomer_m=[]
corr_f=[]
c=[]
D=1
a=0.03
sigma=math.sqrt(D)
pi=math.pi
for i in range(0,N):
    e.append(random.normalvariate(0,1))

P=(int)(2/a)

# вычисление коэффициентов для необходимой корреляционной функции
```

```

for k in range(0, P+1):
    if (k!= 0):
        c.append(sigma/math.sqrt(pi*a) *math.sin(a*k)/k)
    else:
        c.append(sigma/math.sqrt(pi*a)* a)

```

формирование случайного процесса с заданными свойствами

```

for n in range(0, N):
    x.append(0.0)
    for k in range (-P,P+1):
        if(k < 0):
            aa = c[-k]
        else:
            aa = c[k]
        nk=(int)(n-k)
        if((nk>= 0) and (nk < N )):
            x[n] = aa * e[nk] + x[n]

```

убираем из процесса участки нестационарности

```

for n in range (0, N - 2*P):
    x[n] = x[n + P]

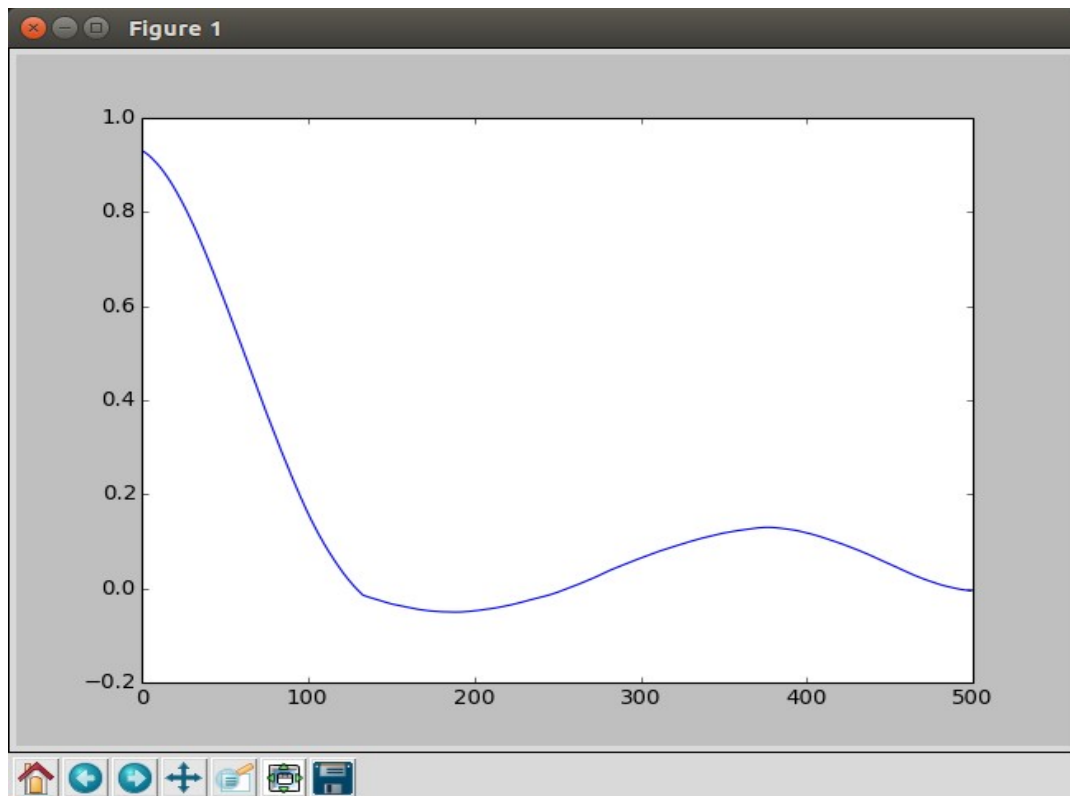
```

вычисление оценки корреляционной функции

```

N_realiz = N - 2*P
for m in range (0,500):
    corr_f.append(0)
    nomer_m.append(m)
    for n in range (0, N_realiz -m):
        corr_f[m]=corr_f[m]+1/(N_realiz-m)*x[n] *x[n+m]
pylab.plot(nomer_m,corr_f)
pylab.show()

```



Изображение 2

На следующем фрагменте (листинг 3) приведена программа моделирования реализации дискретного гауссовского шума с функцией корреляции вида

$R(m) = D \exp(-a^2 m^2)$. В программе, используя соотношение (4), по получившейся реализации производится оценка корреляционной функции. На изображении 3 показана оценка корреляционной функции.

Листинг 3.

```
import math
import pylab
import random

from matplotlib import mlab

N=10000 # длина фрагмента начального случайного процесса

e=[]
x=[]
nomer_m=[]
corr_f=[]
c=[]
D=1
```

```

a=0.03

sigma=math.sqrt(D)

pi=math.pi

const=math.sqrt(2*D*a)/(math.sqrt(pi)*math.sqrt(pi))

for i in range(0,N):
    e.append(random.normalvariate(0,1))

P=(int)(2/a)

# вычисление коэффициентов для необходимой корреляционной функции
for k in range(0, P+1):
    c.append(const*math.exp(-2*a*a*k*k))

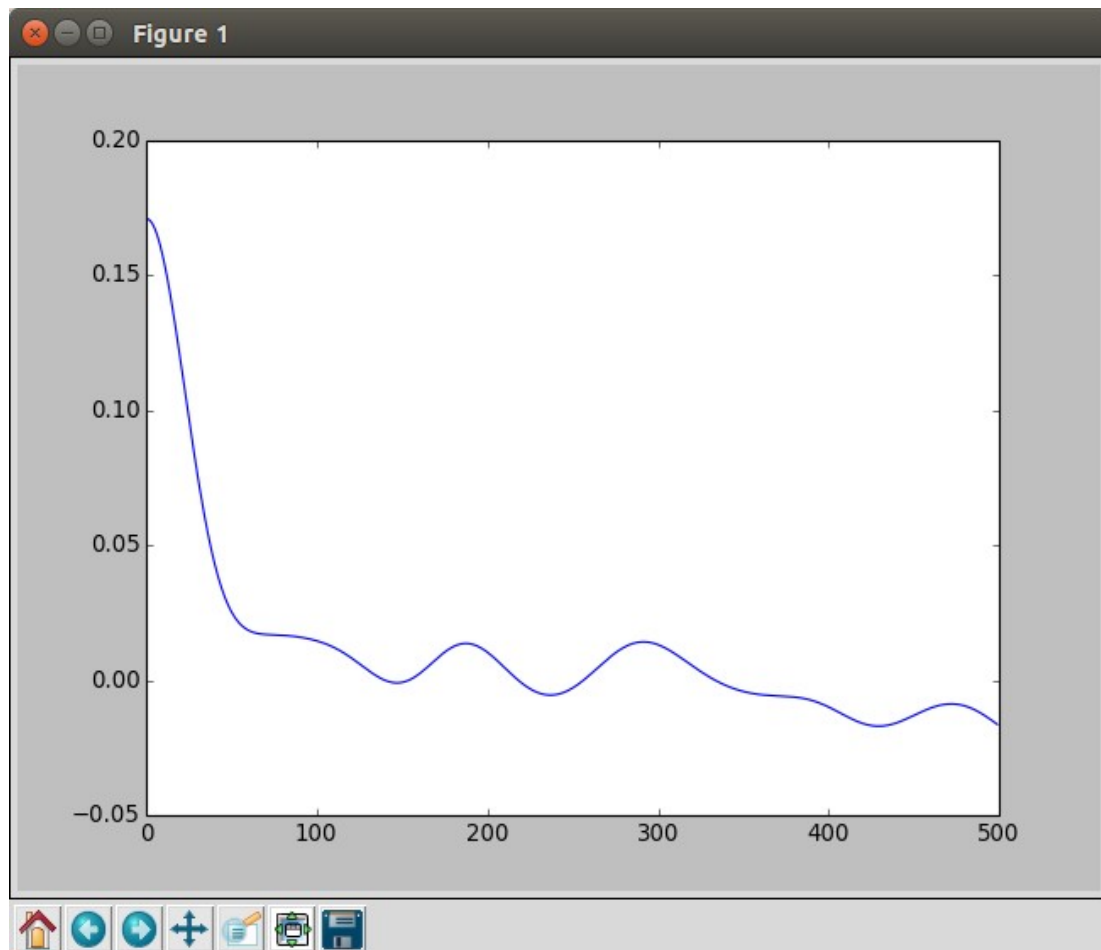
# формирование случайного процесса с заданными свойствами
for n in range(0, N):
    x.append(0.0)
    for k in range (-P,P+1):
        if(k < 0):
            aa = c[-k]
        else:
            aa = c[k]
        nk=(int)(n-k)
        if((nk>= 0) and (nk < N )):
            x[n] = aa * e[nk] + x[n]

# убираем из процесса участки нестационарности
for n in range (0, N - 2*P):
    x[n] = x[n + P]

# вычисление оценки корреляционной функции
N_realiz = N - 2*P
for m in range (0,500):
    corr_f.append(0)
    nomer_m.append(m)

```

```
for n in range (0, N_realiz -m):  
    corr_f[m]=corr_f[m]+1/(N_realiz-m)*x[n] *x[n+m]  
pylab.plot(nomer_m,corr_f)  
pylab.show()
```



Изображение 3

