Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Радиофизический факультет
Кафедра Общей физики

Направление «Радиофизика»

Отчет по практике

# Численное моделирование морской поверхности

Руководитель практики Караев В. Ю.
Выполнил студент 4-го курса бакалавриата Понур К.А.

Нижний Новгород, 23 апреля 2019 г.

# Содержание

# 1. Введение

В настоящее время, существующая измерительная аппаратура не всегда позволяет получить достаточно полное представление о состоянии приповерхностного слоя океана, поэтому постоянно разрабатываются новые радиолокационные системы. Вместе с тем, для решения таких задач, как проверка качества диагностики состояния поверхности океана существующими радиолокаторами, тестирование и разработка алгоритмов восстановления океанографической информации, а также оценка возможностей новых радиолокаторов, вполне естественным является применение более экономных по времени и средствам методов, в частности численного моделирования. Однако, при моделировании одномерной морской поверхности, как правило, используется сумма большого числа гармоник, что приводит к значительным затратам машинного времени.

В связи с этим возникает необходимость в минимизации числа гармоник в спектре моделируемой морской поверхности при сохранении необходимой точности при решении различных задач оптики морской поверхности. Здесь возникает ряд нетривиальных вопросов об оптимальном разбиении частотной плоскости на участки и выборе оптимального положения дискретных спектральных компонент в пределах этих участков. Поиску ответов на эти вопросы и посвящена данная работа.

$$\frac{\partial U}{\partial t}\left(1+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U}t\right)=-V(U)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi},$$

# 2. Теоретическая часть

## 2.1. Спектральное разложение случайных функций

$$\zeta(t)=\int\limits_{\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}C(\omega)\,, \tag{1}$$

где $\mathrm{d}C(\omega)$ - конечное или бесконечно малое приращение функции $C(\omega)$ на интервале $(\omega,\omega+\mathrm{d}\omega)$:

$$\mathrm{d}C(\omega)=C(\omega+\mathrm{d}\omega)-C(\omega). \tag{2}$$

Интеграл Фурье-Стилтьеса (1) охватывает случаи и непрерывного, и дискретного, и смешанного спектров. В чисто дискретном случае можно записать его в форму обобщенного ряда Фурье:

$$\zeta(t)=\sum_n c_n e^{i\omega_n t}, \tag{3}$$

а при непрерывном спектре можно формально ввести плотность комплексной амплитуды $\mathrm{d}C(\omega)$:

$$\mathrm{d}C(\omega)=c(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,, \tag{4}$$

так что (1) примет вид обычного интеграла Фурье:

$$\zeta(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} c(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{5}$$

Если $\zeta$– случайная функция, то существование интеграла (1) надо понимать в смысле вероятностной сходимости. Случайные функции, представимые в виде (1), называются гармонизуемыми.

В пределах корреляционной теории, ограничивающейся моментами не выше второго порядка, естественно и целесообразно понимать существование интеграла (1) в среднем квадратичном. Необходимым и достаточным условием гармонизуемости случайной функции $\zeta(t)$ является тогда при любых $t$ и $t'$ двукратного интеграла Фурье-Стилтьеса

$$B(t,t')=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t-\omega' t')}\,\mathrm{d}^2\Gamma\left(\omega,\omega'\right) \tag{6}$$

представляющего момент второго порядка $B(t,t')=\langle\zeta(t)\zeta^*(t')\rangle$ функции $\zeta(t)$. Иначе говоря, если интеграл (6) существует, то это означает, что существует случайная комплексная функция $C(\omega)$ такая, что интеграл (1) сходится в среднем квадратичном к $\xi$, причем двумерное приращение функции $\Gamma(\omega,\omega')$ есть

$$\mathrm{d}^2\Gamma=\langle \mathrm{d}C(\omega)\,\mathrm{d}C^*(\omega')\rangle. \tag{7}$$

В частности, при $t'=t$ имеем

$$\langle|\zeta(t)|^2\rangle=B(t,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t}\,\mathrm{d}^2\Gamma\left(\omega,\omega'\right). \tag{8}$$

Пусть $\zeta(t)$ в широком смысле стационарна. Тогда требование постоянства среднего значения $\langle\zeta(t)\rangle=\mathrm{const}$ означает, согласно (1), что при всех $\omega\neq 0$ должно быть

$$\langle \mathrm{d}C\left(\omega\right)\rangle=0 \tag{9}$$

и тогда

$$\langle\zeta\rangle=\langle \mathrm{d}C\left(0\right)\rangle. \tag{10}$$

Далее мы будем предполагать, что у рассматриваемых стационарных функций $\zeta(t)$ среднее значение $\langle\zeta\rangle=0$ и, следовательно, смешанный момент совпадает с функцией корреляции $\psi$.

Условие стационарности функции корреляции может быть выполнено, как это видно из (6), только в том случае, если

$$\mathrm{d}^2\Gamma(\omega,\omega')=\langle \mathrm{d}C(\omega)\,\mathrm{d}C^*(\omega')\rangle=0 \text{ при } \omega\neq\omega', \tag{11}$$

т.е. «масса» распределена только на биссектрисе $\omega = \omega'$. Тогда приращение $\mathrm{d}^2\Gamma(\omega,\omega')$ всегда вещественно и неотрицательно. Если воспользоваться дельта-функцией, то сказанное можно записать в виде

$$\mathrm{d}^2\Gamma(\omega,\omega') = \langle \mathrm{d}C(\omega)\,\mathrm{d}C^*(\omega')\rangle = \delta(\omega-\omega')\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}G(\omega)\,, \tag{12}$$

причем вещественное приращение $\mathrm{d}G(\omega)$ неотрицательно.

Подставив (12) в (6), получаем:

$$\iint\limits_{\infty} e^{i(\omega t-\omega' t')}\langle \mathrm{d}C\omega\,\mathrm{d}C^*(\omega')\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}G(\omega)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t-\omega' t')}\delta(\omega-\omega')\,\mathrm{d}\omega' = \tag{13}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}\,\mathrm{d}G(\omega) = \psi(t-t') \tag{14}$$

## 2.2. Небольшое введение в корреляционную теорию

Докажем стационарность этого процесса в выбранной нами точке $(x_0, y_0)$

$$\langle\zeta(x_0,y_0,t)\rangle = \langle A\rangle\cdot\langle\cos\Big(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t+\theta\Big)\rangle = \tag{15}$$

$$\langle A\rangle\Big(\cos\Big(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t\Big)\langle\cos\theta\rangle - \sin\Big(\vec{k}\,\vec{r}-\omega t\Big)\langle\sin\theta\rangle\Big) \tag{16}$$

Независимость от $\langle\zeta(t)\rangle$ от $t$, т.е. равенство $\langle\zeta(t)=0\rangle$, можно обеспечить при $\langle A\rangle = 0$ или при $\langle\cos\theta\rangle = \langle\sin\theta\rangle = 0$. Первый случай нам не подходит, потому рассмотрим второй. Это равенство будет иметь место, если плотность вероятности фазы $w_\theta(\theta)$ ортогональна в интервале $(0,2\pi)$ к $\cos\theta$ и $\sin\theta$, т.е. представима рядом Фурье, но в данной работе будет использоваться частный случай распределения $w_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$.

*спустя ещё несколько строк рассуждений* Таким образом , что случайная функция $\zeta$ является стационарной по Хинчкину, то есть её среднее значение постоянно $\zeta(t) = \langle\zeta\rangle = \mathrm{const}$, а момент второго порядка зависит только от $\tau = t_2 - t_1$ и конечен при $\tau = 0$.

Пространственно-временная корреляционная [1] функция возвышений по определяется выражением:

$$M_\zeta(\vec{r_1},\vec{r_2},t_1,t_2) = \langle\zeta(\vec{r_1},t_1)\zeta(\vec{r_2},t_2)\rangle \tag{17}$$

В соответствии с (**??**):

$$M_\zeta(\vec{r_1},\vec{r_2},t_1,t_2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\infty}\iint\limits_{\infty}\langle\mathrm{d}\dot\zeta(\vec{k}_1)\,\mathrm{d}\dot\zeta(\vec{k}_2)\rangle\exp\Big\{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega_1 t_1+\vec{k}_2\vec{r}-\omega_1 t_2)\Big\}+$$
$$+\langle\mathrm{d}\dot\zeta(\vec{k}_1)\,\mathrm{d}\dot\zeta^*(\vec{k}_2)\rangle\exp\Big\{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega_1 t_1-\vec{k}_2\vec{r}+\omega_1 t_2)\Big\}$$

[1] Нужно разобраться с названиями, но судя по всему так далее называется смешанный момент

Поскольку двумерная плотность вероятности стационарного процесса зависит от $t_1$ и $t_2$ через разность $\tau = t_2 - t_1$, то смешанный момент второго порядка будет зависеть только от $\tau^2$. Аналогично можно сказать и про $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$)2

Итак, для статически однородного и стационарного поля выполняется соотношение:

$$M_\zeta(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) = M_\zeta(\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tau = t_2 - t_1) \tag{18}$$

Чтобы это соотношение было справедливым в нашей задаче, необходимо потребовать выполнение условий

$$\frac{1}{2}\langle \mathrm{d}\dot{\zeta}(\vec{k}_1)\,\mathrm{d}\dot{\zeta}(\vec{k}_2)\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\langle \mathrm{d}\dot{\zeta}(\vec{k}_1)\,\mathrm{d}\dot{\zeta}^*(\vec{k}_2)\rangle = \tilde{S}(\vec{k}_1)\delta(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\,\mathrm{d}\vec{k}_1\,\mathrm{d}\vec{k_2}\,. \tag{19}$$

где $\tilde{S}(\vec{k})$ – волновой спектр морской поверхности, $\delta(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$ – дельта-функция. Подставляя эти условия в (17), получим:

$$M_\zeta(\rho, \tau) = \iint\limits_{\infty} S(\vec{k}) \cos\Big(\vec{k}\,\vec{\rho} - \omega_k \tau\Big)\,\mathrm{d}k\,. \tag{20}$$

Винеровский энергетический спектр определяется преобразованием Винера-Хинчкина функцией корреляции, описываемой (20)

$$\Phi_\zeta(\vec{k}, \omega) = \iiint\limits_{\infty} M_\zeta(\vec{\rho}, \tau) e^{-i\left(\vec{k}\,\vec{\rho} + \omega t\right)}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\tau = 4\pi^3\Big[\tilde{S}(\vec{k})\delta(\omega + \omega_k) + \tilde{S}(-\vec{k})\delta(\omega - \omega_k)\Big]. \tag{21}$$

Из (21) следуют, как частные случаи, выражения для пространственного,

$$\Phi_\zeta(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\infty} \Phi_\zeta(\vec{k}, \omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi^2\Big[\tilde{S}(\vec{k}) + \tilde{S}(-\vec{k})\Big], \tag{22}$$

и временного спектров Винера.

Разобрать фундаментально всю теорию до этого момента.

## 2.3. Реальное и модельное поля уклонов волнения

Обратимся сначала к задаче моделирования случайного одномерного поля уклонов взволнованной поверхности.

Пусть реальное случайное поле уклонов имеет корреляционную функцию $M = \langle \zeta(r)\zeta(r+\rho)\rangle$, связанную с энергетическим спектром уклонов $S$ соотношением, следующим из (10), (11) при $\varphi(\vartheta) = \delta(\vartheta)$:

$$M(\rho) = \int\limits_0^\infty S(k)\cos(k\rho)\,\mathrm{d}k\,, \tag{23}$$

[2] доказать

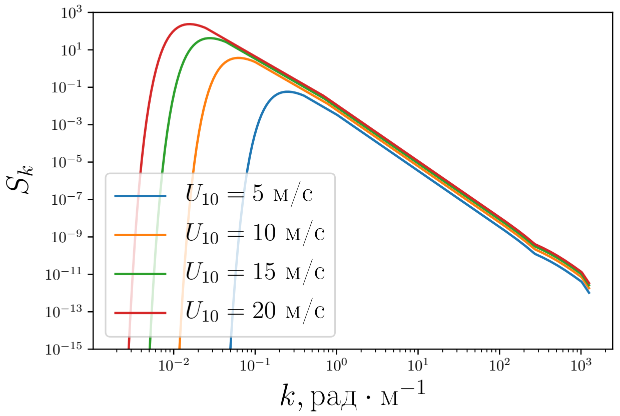


Рис. 1: Спектр высот $S(k)$ при фиксированном значении $\tilde{x} = 20170$ и меняющейся скорости ветра

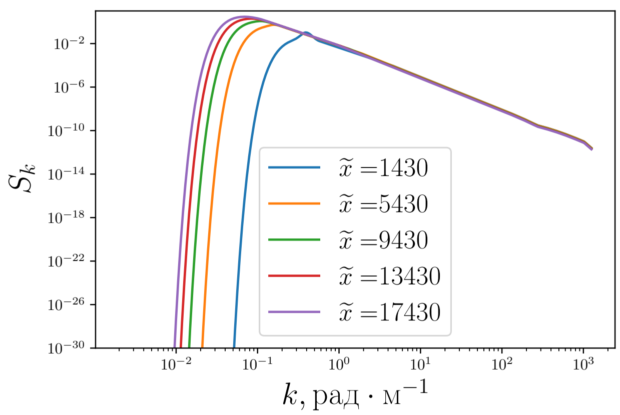


Рис. 2: Спектр высот $S(k)$ при фиксированном значении скорости ветра $U = 10$ м/с и меняющемся разгоне

Представим модельное поле уклонов в виде суммы N синусоид с детерминированными амплитудами $a_i$ и случайными фазами $\varphi_i$:

$$\zeta(r) = \sum_{i=1}^{N} a_i \sin(k_i r + \varphi_i), \tag{24}$$

где фаза $\varphi_i$ равномерно распределена в интервале $[0, 2\pi]$. Соответствующая этому полю корреляционная функция имеет вид

$$\widetilde{M}(\rho) = \sum_{i=1}^{N} b_i \cos(k_i \rho), \tag{25}$$

где $b_i = \frac{a_i^2}{2}$.

Энергетический спектр модельного поля уклонов представляет собой набор дельта-функций, отличных от нуля в узлах $k_i$. Огибающей спектра является кривая, проходящая через точки с абсциссами $k_i$ и ординатами $b_i$. Вопросам определения величин $b_i$ и $k_i$ посвящены следующие разделы работы.

Естественным способом размещения $k_i$ будет являться следующий метод: необходимая область разбивается на $N$ участков одинаковой ширины $\Delta k$, а узлы располагаются в точках $k_i = i\Delta k, i = 1, 2 \dots N$, т.е. эквидистантно. Амплитуды спектральных составляющих определяются следующим соотношением:

$$b_i = \int\limits_{(i-1)\Delta k}^{i\Delta k} S(k)\,\mathrm{d}k \tag{26}$$

При этом, из (23) можно заметить, что сумма всех $b_i$ равна дисперсии реального поля

$$M(0) = \sigma^2 = \int\limits_{0}^{\infty} S(k)\,\mathrm{d}k \tag{27}$$

Однако, при таком способе моделирования корреляционная функция $\widetilde{M}(\rho)$ является периодической. Для иллюстрации на рис.() приведены примеры расчёта этой функции для скорости ветра $U = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $N = 256$. Конечно, период этой функции может быть удлинён, но это достигается путём увеличения гармоник. Как видно из рис. 4 даже при не разумно большом числе гармоник период корреляционной функции недостаточно большой, что ставит под сомнение применимость такого метода моделирования.

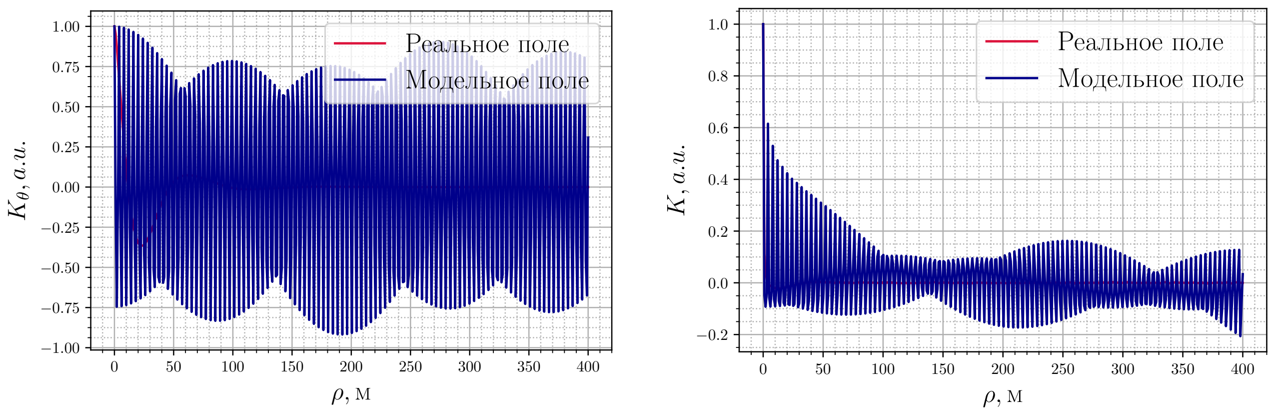


Рис. 3: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов. $U = 10\frac{м}{c}$, $N = 256$

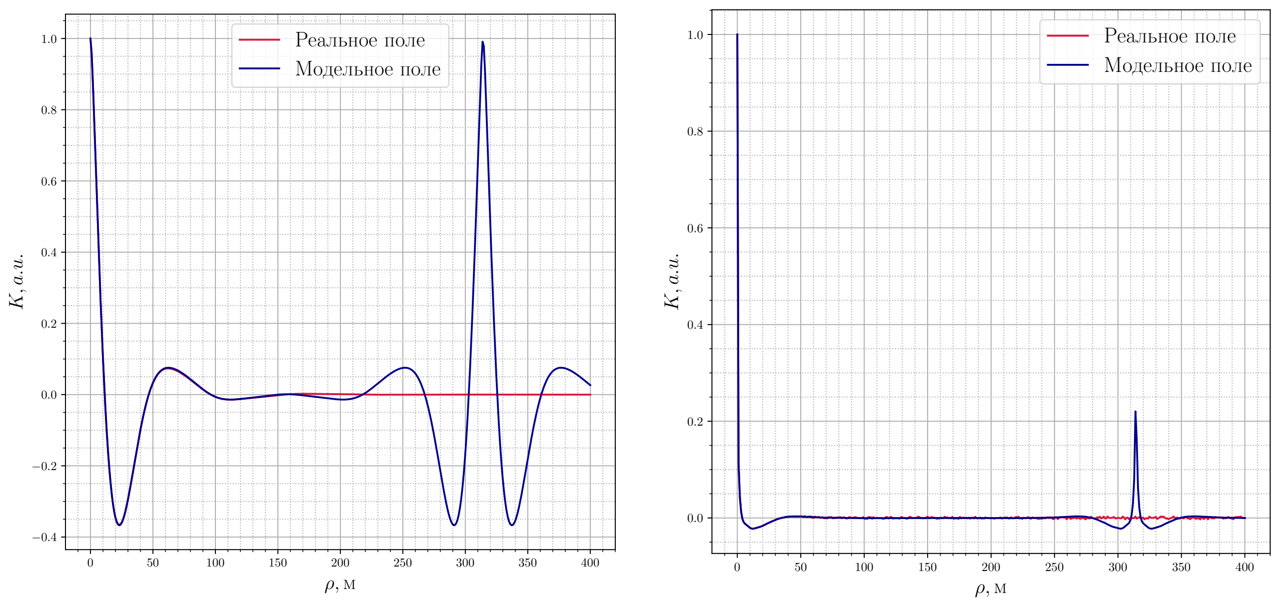


Рис. 4: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов. $U = 10\frac{м}{c}$, $N = 10^5$

Чтобы функция $\widetilde{M}(\rho)$ не была периодической, необходимо лишь неэквидистантно расположить узлы $k_i$ на оси частот. Например, можно использовать различные детерминированные способы расположения узлов на оси частот.

Поскольку спектр частот (см. рис. 1) удобно представим в логарифмическом масштабе, то можно располагать узлы эквидистантно в логарифмическом масштабе. Очевидно, что такой способ значительно лучше, чем первый способ. Функция корреляции высот довольно быстро сходится к функции реального поля. С функцией корреляции наклонов проблем возникает больше, поскольку она быстро принимает шумовой характер.

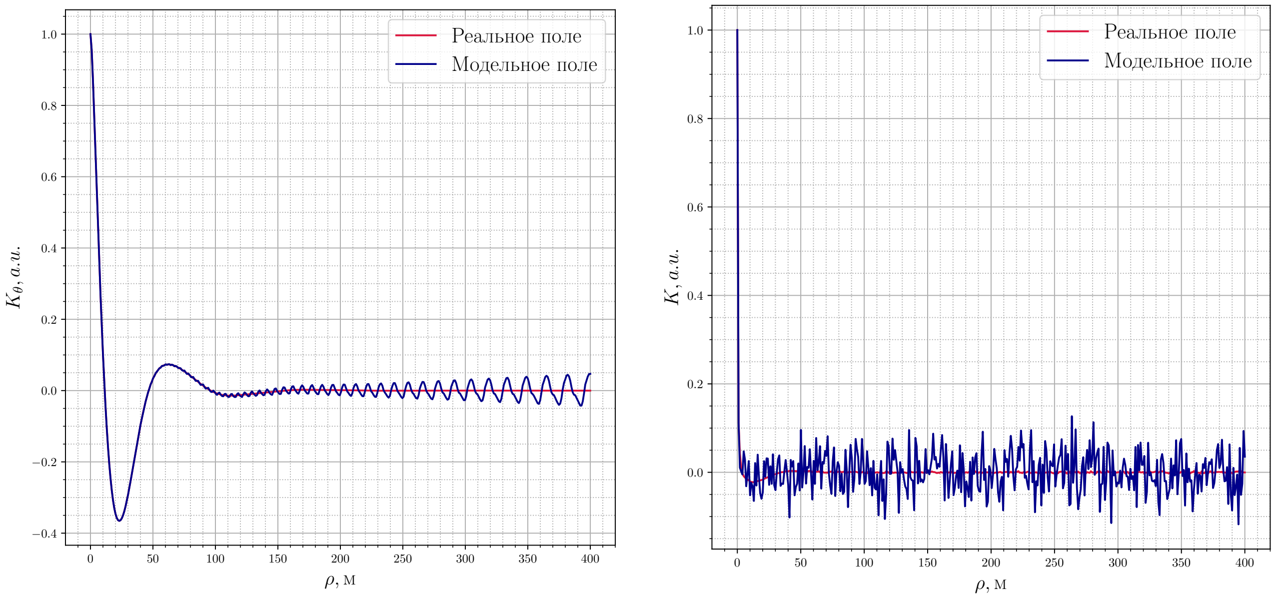


Рис. 5: Корреляционные функции высот и уклонов при логарифмическом расположении узлов. $U = 10\frac{м}{c}$, $N = 256$

Очевидно, что способов выбора узлов по детерминированному закону существует бесконечно много, но наилучшими следует считать те способы, которые обеспечивают наименьший уровень «шума» на «хвосте» корреляционной функции $\widetilde{M}(\rho)$.

Допустим что величины $k_i$ не находятся в дробно-рациональных отношениях друг к другу. В этом случае можно полагать, что сложение гармонических составляющих с частотами $k_i$ и амплитудами $b_i$ при больших $\rho$ происходит «некогерентным» образом. При этом мощность «шума» функции $\tilde{M}_q(\rho)$ определяется выражением $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{b_i^2}{2}$. В области малых $\rho$, напротив, гармоники суммируются «когерентно» и соответствующая «мощность» равна $\tilde{M}_q^2(0) = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} b_i\right)^2$. Образуем величину $Q = \sigma^2/\tilde{M}_q(0)$, которая характеризует относительную мощность шумов. Минимум этой величины находится путём решения системы уравнений $\frac{\partial Q}{\partial b_i} = 0$, для $i = 1, 2, \ldots, N$. Результатом её решения является $b_1 = b_2 = \cdots = d_N$. Спектр модельного поля при этом имеет близкий к белому вид, а выравнивание амплитуд спектральных компонент реального поля $S_q$ сводится к разбиению области определения спектра $[0, k_m]$ на участки $\Delta k_i$, интегралы по которым от функции $S_q(k)$ имеют одно и то же значения $b_i = b_0 = \sigma_q^2/N$.

Заметим теперь, что, рассуждая о способах разбиения интервала частот $[0, k_m]$ на участки $\Delta k_i$, мы оставляли нерешенным вопрос о выборе собственно узлов спектра $k_i$ внутри этих участков. Обычно узел $k_i$ ставится у правой границы ячейки $\Delta k_i$. При этом, однако, оказывается, что модельная корреляционная функция плохо согласуется с реальной корреляционной функцией в области малых $\rho$. Для достижения такого согласия следует потребовать сопряжения всех производных (от первого до $N$-го порядка) функция $\tilde{M}_q(\rho)$ и $M_q(q)$ при $\rho = 0$. Это условие эквивалентно требованию сопряжения моментов спектров модельного и реального полей уклонов, которое записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{N} b_i k_i^{2p} = \int\limits_0^\infty k^{2p} S \, \mathrm{d}k \,, \tag{28}$$

для $p = 1, 2, \ldots, N$.

Полученная система N уравнений для N неизвестных $k_i$ не имеет общего решения и потому может анализироваться лишь численно, что тоже связано со значительными сложностями.

Оставим пока эту задачу за рамками данной работы.

Наиболее простое решение вопроса о выборе узлов заключается в том, чтобы потребовать выполнения облегченного, по сравнению с предыдущим, условия сопряжения вторых моментов модельного и реального спектров уклонов:

$$b_i k_i^2 = \int\limits_{\Delta k_i} k^2 S(k) \, \mathrm{d}k \,. \tag{29}$$

Из него непосредственно следует правило нахождения узлов $k_i$. В частности, получаем

$$k_i = \sqrt{\frac{1}{b_0} \int\limits_{\Delta k_i} k^2 S \, \mathrm{d}k} \,. \tag{30}$$

Такой способ выбора узлом, как нетрудно убедиться, обеспечивает сопряжения корреляционных функция реального и модельного полей по второй производной в нуле, или, иначе говоря, равенство дисперсий кривизн этих полей.

# Список литературы

[1] *С.М. Рытов*, Введение в статистическую радиофизику // Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва : Наука, 1976. - Ч. 1. Случайные процессы §§14-18, 38-42

[2] *В.Ю.Караев, М.Б. Каневский, Г.Н. Баландина*, Численное моделирование поверхностного волнения и дистанционное зондирование // Препринт №552 ИПФ РАН, 2002, С.1-10.

[3] *В.Л. Вебер*, О моделировании случайного профиля морской поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 4. С. 346.

[4] *В.Ю.Караев, Г.Н. Баландина* Модифицированный спектр волнения и дистанционное зондирование // Исследование Земли из космоса, 2000, N5, C.1-12.

**Примечание.** Модель написала на языке Python с использованием библиотек NumPy и SciPy, отчёт по практике и презентация к ней оформлены в издательской системе LaTeX с использованием пакета Beamer. Актуальную версию программы можно найти на Github'е: