

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

НАПРАВЛЕНИЕ «РАДИОФИЗИКА»

Отчет по практике

Численное моделирование морской поверхности

Руководитель практики Караев В. Ю.

Выполнил студент 4-го курса бакалавриата Понур К.А.

Нижний Новгород, 26 апреля 2019 г.

Содержание

1	Практическая часть	2
1.1	Реальное и модельное поля уклонов и высот волнения	2
1.1.1	Метод «отбеливания» спектра	5
2	Двумерная модель поверхностного волнения	7
3	Заключение	8

1. Практическая часть

1.1. Реальное и модельное поля уклонов и высот волнения

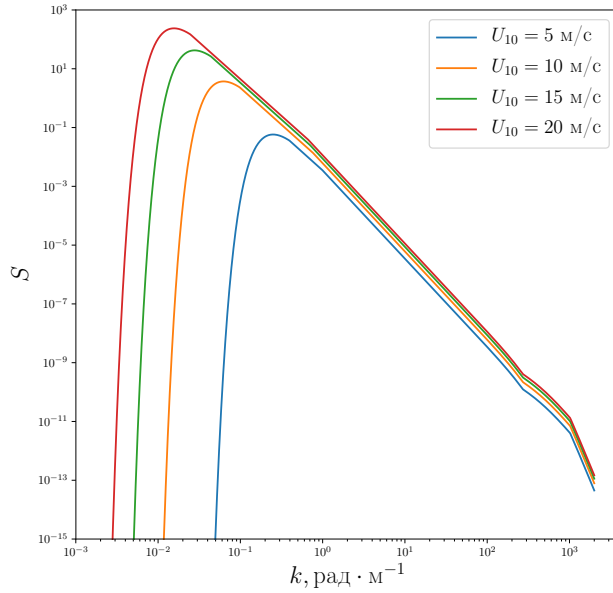


Рис. 1: Спектр высот $S(k)$ при фиксированном значении $\tilde{x} = 20170$ и меняющейся скорости ветра

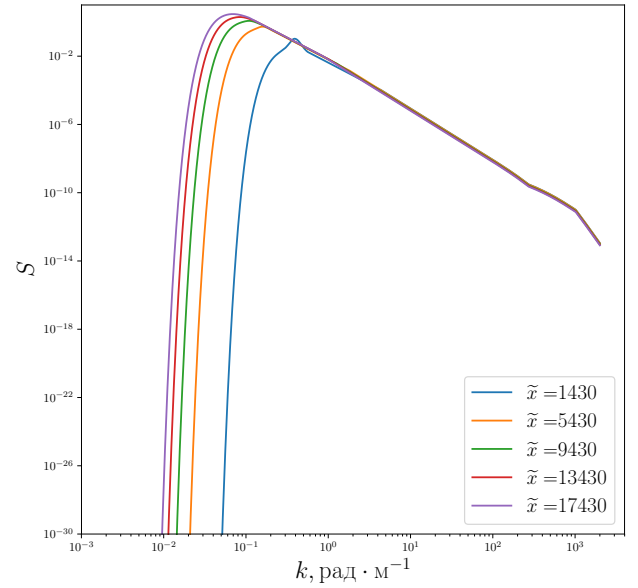


Рис. 2: Спектр высот $S(k)$ при фиксированном значении скорости ветра $U = 10$ м/с и меняющемся разгоне

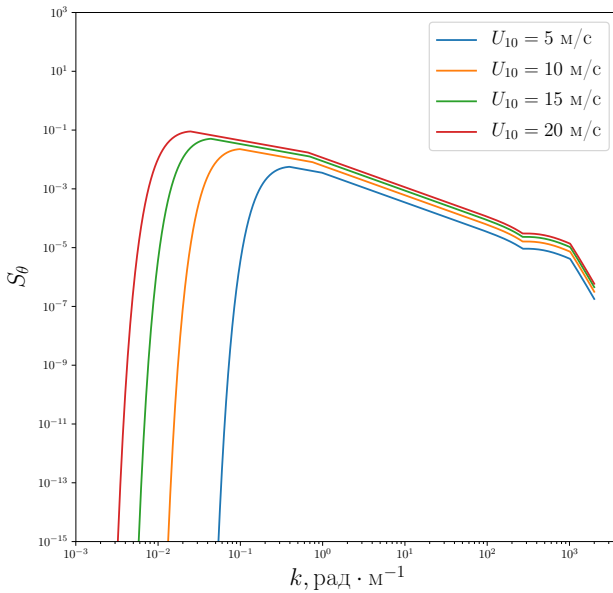


Рис. 3: Спектр наклонов $S_\theta(k)$ при фиксированном значении $\tilde{x} = 20170$ и меняющейся скорости ветра

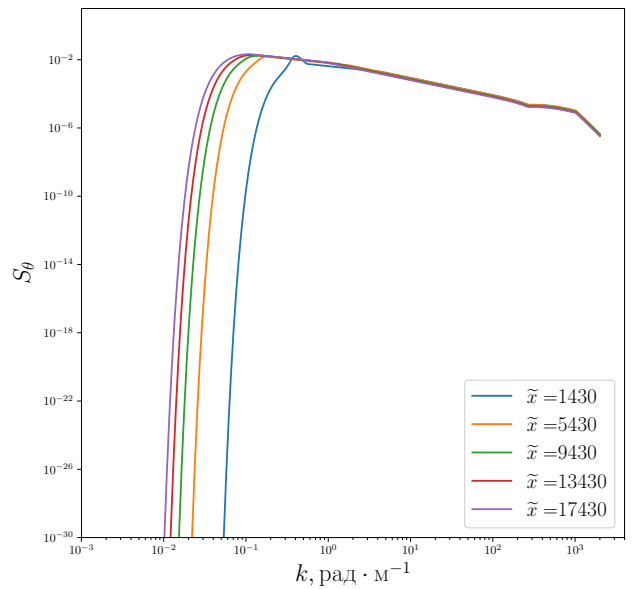


Рис. 4: Спектр наклонов $S_\theta(k)$ при фиксированном значении скорости ветра $U = 10$ м/с и меняющемся разгоне

Обратимся сначала к задаче моделирования случайного одномерного поля уклонов взволнованной поверхности.

Пусть реальное случайное поле уклонов имеет корреляционную функцию $M = \langle \zeta(r)\zeta(r+\rho) \rangle$, связанную с энергетическим спектром уклонов S соотношением, следующим из (10), (11) при $\varphi(\vartheta) = \delta(\vartheta)$:

$$M(\rho) = \int_0^\infty S(k) \cos(k\rho) dk, \quad (1)$$

Представим модельное поле уклонов в виде суммы N синусоид с детерминированными амплитудами a_i и случайными фазами φ_i :

$$\zeta(r) = \sum_{i=1}^N a_i \sin(k_i r + \varphi_i), \quad (2)$$

где фаза φ_i равномерно распределена в интервале $[0, 2\pi]$. Соответствующая этому полю корреляционная функция имеет вид

$$\widetilde{M}(\rho) = \sum_{i=1}^N b_i \cos(k_i \rho), \quad (3)$$

где $b_i = \frac{a_i^2}{2}$.

Энергетический спектр модельного поля уклонов представляет собой набор дельта-функций, отличных от нуля в узлах k_i . Огибающей спектра является кривая, проходящая через точки с абсциссами k_i и ординатами b_i . Вопросам определения величин b_i и k_i посвящены следующие разделы работы.

Естественным способом размещения k_i будет являться следующий метод: необходимая область разбивается на N участков одинаковой ширины Δk , а узлы располагаются в точках $k_i = i\Delta k, i = 1, 2 \dots N$, т.е. эквидистантно. Амплитуды спектральных составляющих определяются следующим соотношением:

$$b_i = \int_{(i-1)\Delta k}^{i\Delta k} S(k) dk \quad (4)$$

При этом, из (1) можно заметить, что сумма всех b_i равна дисперсии реального поля

$$M(0) = \sigma^2 = \int_0^\infty S(k) dk \quad (5)$$

Однако, при таком способе моделирования корреляционная функция $\widetilde{M}(\rho)$ является периодической. Для иллюстрации на рис.() приведены примеры расчёта этой функции для скорости ветра $U = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $N = 256$. Конечно, период этой функции может быть удлинён, но это достигается путём увеличения гармоник. Как видно из рис. 6 даже при неразумно большом числе гармоник период корреляционной функции недостаточно большой, что ставит под сомнение применимость такого метода моделирования.

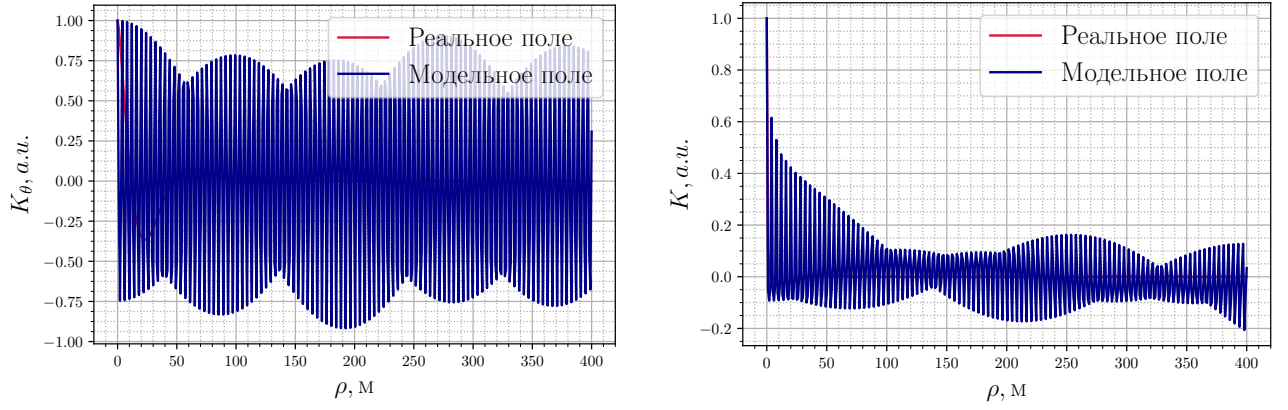


Рис. 5: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов. $U = 10 \frac{M}{c}$, $N = 256$

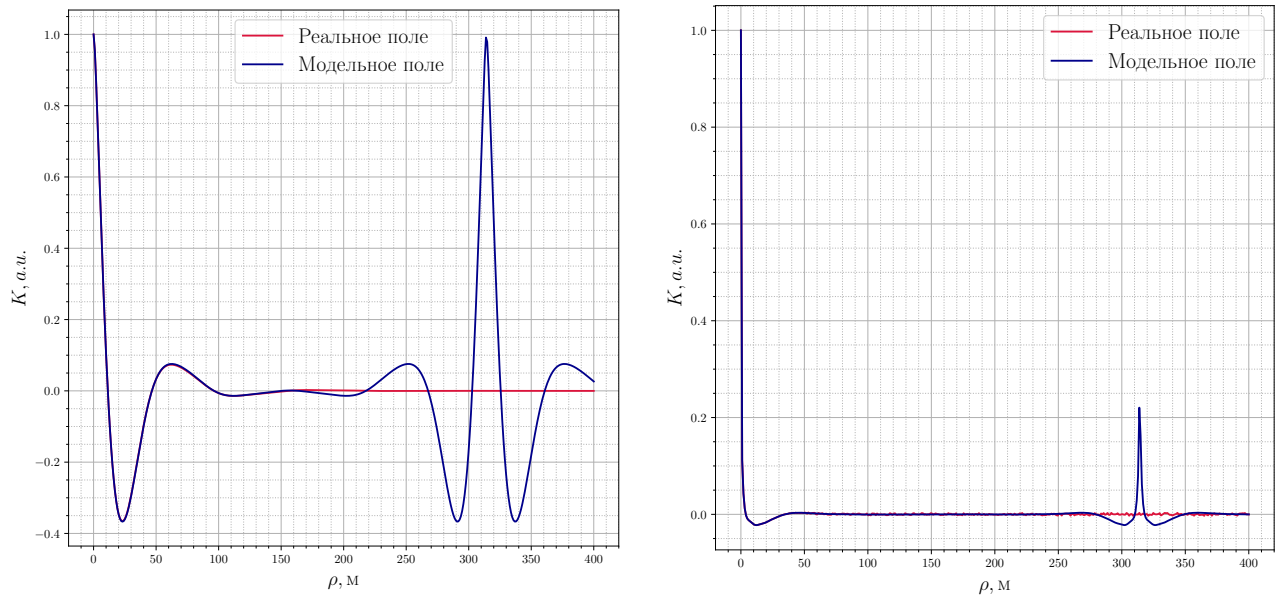


Рис. 6: Корреляционные функции высот и уклонов при эквидистантном расположении узлов. $U = 10 \frac{M}{c}$, $N = 10^5$

Чтобы функция $\widetilde{M}(\rho)$ не была периодической, необходимо лишь неэквидистантно расположить узлы k_i на оси частот. Например, можно использовать различные детерминированные способы расположения узлов на оси частот.

Поскольку спектр частот (см. рис. 1) удобно представим в логарифмическом масштабе, то можно располагать узлы эквидистантно в логарифмическом масштабе. Очевидно, что такой способ значительно лучше, чем первый способ. Функция корреляции высот довольно быстро сходится к функции реального поля. С функцией корреляции наклонов проблем возникает больше, поскольку она быстро принимает шумовой характер.

Очевидно, что способов выбора узлов по детерминированному закону существует бесконечно много, но наилучшими следует считать те способы, которые обеспечивают наи-

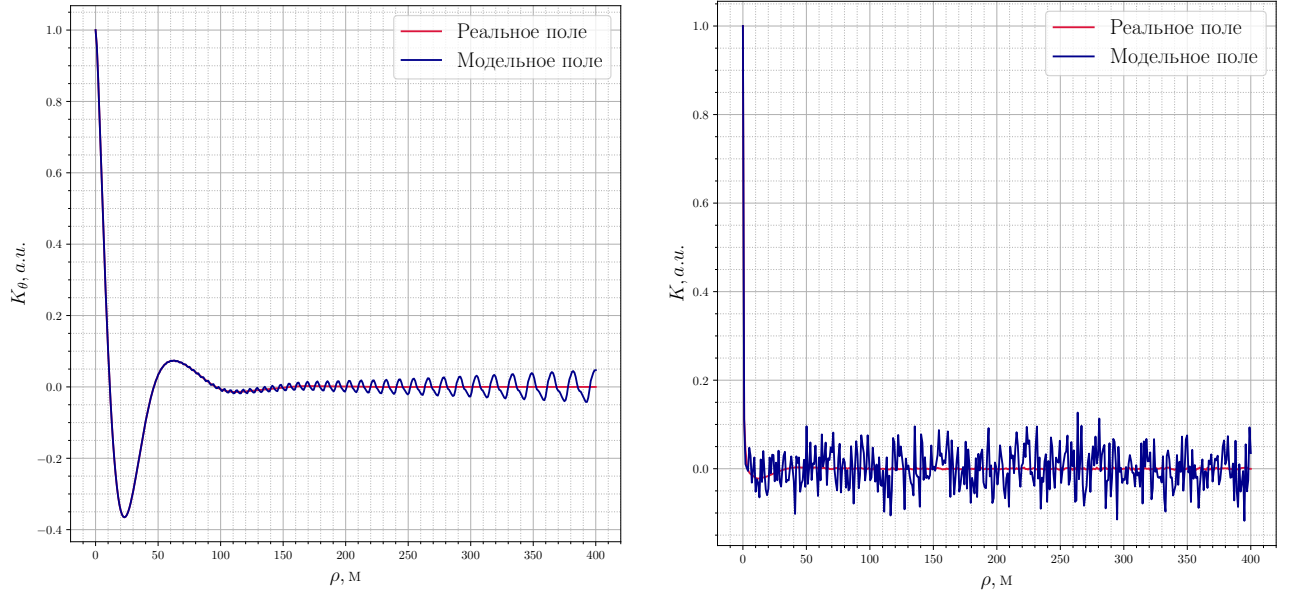


Рис. 7: Корреляционные функции высот и уклонов при логарифмическом расположении узлов. $U = 10 \frac{M}{c}$, $N = 256$

меньший уровень «шума» на «хвосте» корреляционной функции $\widetilde{M}(\rho)$.

1.1.1 Метод «отбеливания» спектра

Допустим что величины k_i не находятся в дробно-рациональных отношениях друг к другу. В этом случае можно полагать, что сложение гармонических составляющих с частотами k_i и амплитудами b_i при больших ρ происходит «некогерентным» образом. При этом мощность «шума» функции $\widetilde{M}(\rho)$ определяется выражением $\sigma^2 = \sum_{i=1}^N \frac{b_i^2}{2}$. В области малых ρ , напротив, гармоники суммируются «когерентно» и соответствующая «мощность» равна $\widetilde{M}^2(0) = \left(\sum_{i=1}^N b_i \right)^2$. Образует величину $Q = \sigma^2 / \widetilde{M}(0)$, которая характеризует относительную мощность шумов. Минимум этой величины находится путём решения системы уравнений $\frac{\partial Q}{\partial b_i} = 0$, для $i = 1, 2, \dots, N$. Результатом её решения является $b_1 = b_2 = \dots = b_N$. Спектр модельного поля при этом имеет близкий к белому вид, а выравнивание амплитуд спектральных компонент реального поля $S(k)$ сводится к разбиению области определения спектра $[0, k_m]$ на участки Δk_i , интегралы по которым от функции $S(k)$ имеют одно и то же значения $b_i = b_0 = \sigma^2 / N$.

Заметим теперь, что, рассуждая о способах разбиения интервала частот $[0, k_m]$ на участки Δk_i , мы оставляли нерешенным вопрос о выборе собственно узлов спектра k_i внутри этих участков. Обычно узел k_i ставится у правой границы ячейки Δk_i . При этом, однако, оказывается, что модельная корреляционная функция плохо согласуется с реальной корреляционной функцией в области малых ρ . Для достижения такого согласия

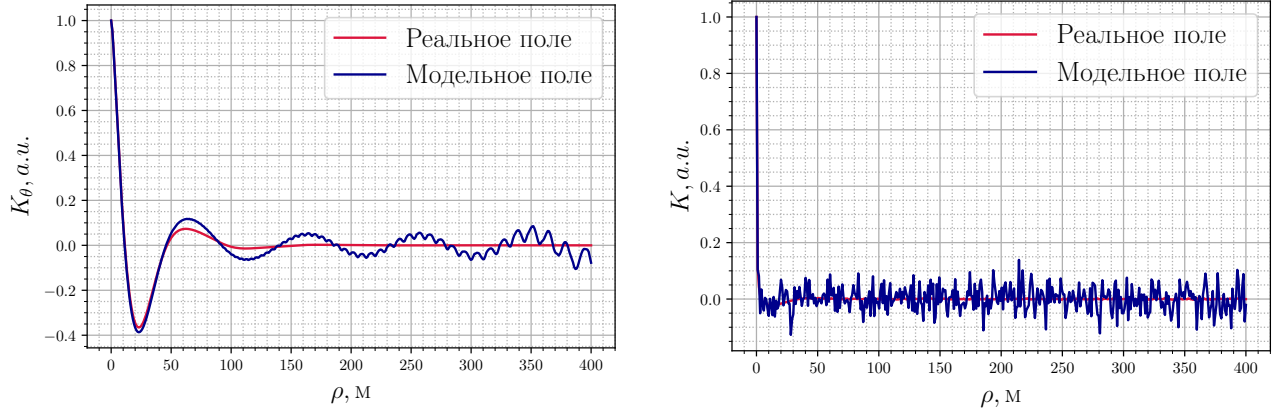


Рис. 8: Корреляционные функции высот и уклонов при расположении узлов по методу «отбеливания» спектра. $U = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $N = 256$

следует потребовать сопряжения всех производных (от первого до N -го порядка) функций $\widetilde{M}(\rho)$ и $M(q)$ при $\rho = 0$. Это условие эквивалентно требованию сопряжения моментов спектров модельного и реального полей, которое записывается в виде

$$\sum_{i=1}^N b_i k_i^{2p} = \int_0^{\infty} k^{2p} S \, dk, \quad (6)$$

для $p = 1, 2, \dots, N$.

Полученная система N уравнений для N неизвестных k_i не имеет общего решения и потому может анализироваться лишь численно, что тоже связано со значительными сложностями.

Наиболее простое решение вопроса о выборе узлов заключается в том, чтобы потребовать выполнения облегченного, по сравнению с предыдущим, условия сопряжения вторых моментов модельного и реального спектров высот:

$$b_i k_i^2 = \int_{\Delta k_i} k^2 S(k) \, dk. \quad (7)$$

Из него непосредственно следует правило нахождения узлов k_i . В частности, получаем

$$k_i = \sqrt{\frac{1}{b_0} \int_{\Delta k_i} k^2 S \, dk}. \quad (8)$$

Такой способ выбора узлом, как нетрудно убедиться, обеспечивает сопряжения корреляционных функций реального и модельного полей по второй производной в нуле, или, иначе говоря, равенство дисперсий кривизн этих полей.

Стоит сказать, что весь этот раздел был написан для поля высот $S(k)$. Но те же рассуждения можно провести и для поля наклонов $S_\theta(k)$, которое связано с полем высот соотношением $S_\theta = k^2 S(k)$. Таким образом, положив

$$S(k) \longrightarrow k^2 S(k) \quad (9)$$

мы можем получить уравнения для моделирования поля наклонов.

2. Двумерная модель поверхностного волнения

□

3. Заключение

На рисунках 9-12 представлены смоделированные поля высот для разных скоростей ветра¹.

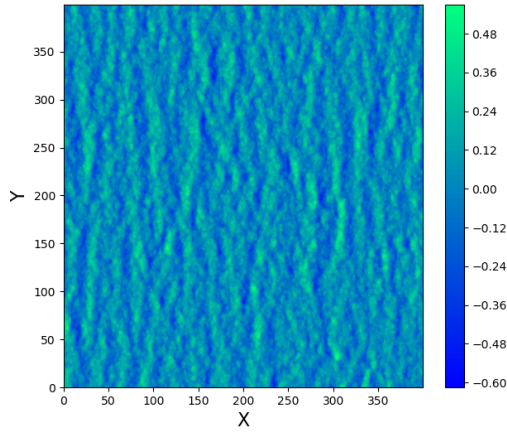


Рис. 9: Моделирование высот морского волнения. $N = 256$, $U_{10} = 5$

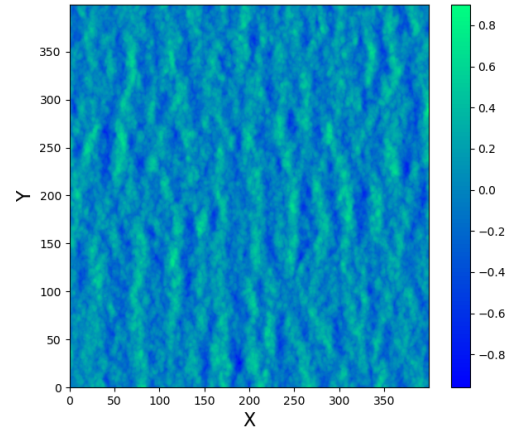


Рис. 10: Моделирование высот морского волнения. $N = 256$, $U_{10} = 6$

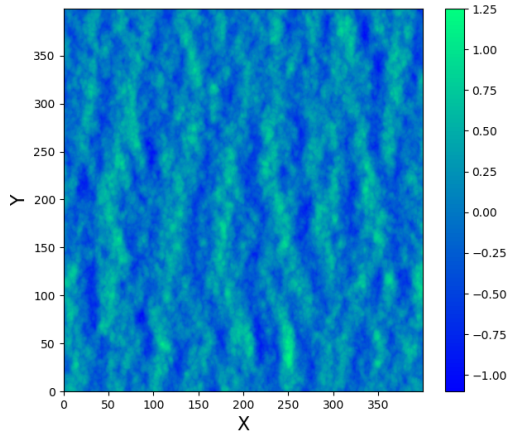


Рис. 11: Моделирование высот морского волнения. $N = 256$, $U_{10} = 7$

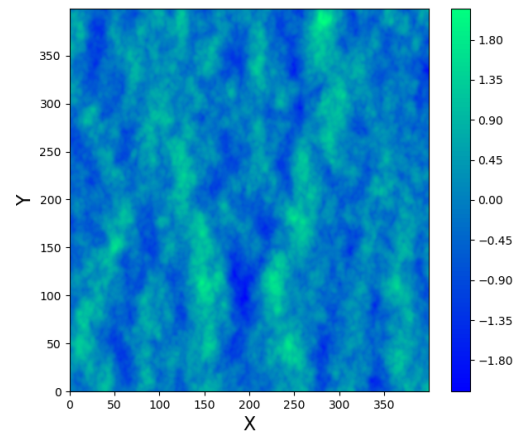


Рис. 12: Моделирование высот морского волнения. $N = 256$, $U_{10} = 10$

¹Модель написала на языке Python с использованием библиотек NumPy и SciPy, отчёт по практике и презентация к ней оформлены в издательской системе L^AT_EX с использованием пакета Beamer. Актуальную версию программы можно найти на Github'e:



Список литературы

- [1] *С.М. Рытов*, Введение в статистическую радиофизику // Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва : Наука, 1976. - Ч. 1. Случайные процессы §§14-18, 38-42
- [2] *В.Ю.Караев, М.Б. Каневский, Г.Н. Баландина*, Численное моделирование поверхностного волнения и дистанционное зондирование // Препринт №552 ИПФ РАН, 2002, С.1-10.
- [3] *В.Л. Вебер*, О моделировании случайного профиля морской поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 4. С. 346.
- [4] *В.Ю.Караев, Г.Н. Баландина* Модифицированный спектр волнения и дистанционное зондирование // Исследование Земли из космоса, 2000, N5, С.1-12.