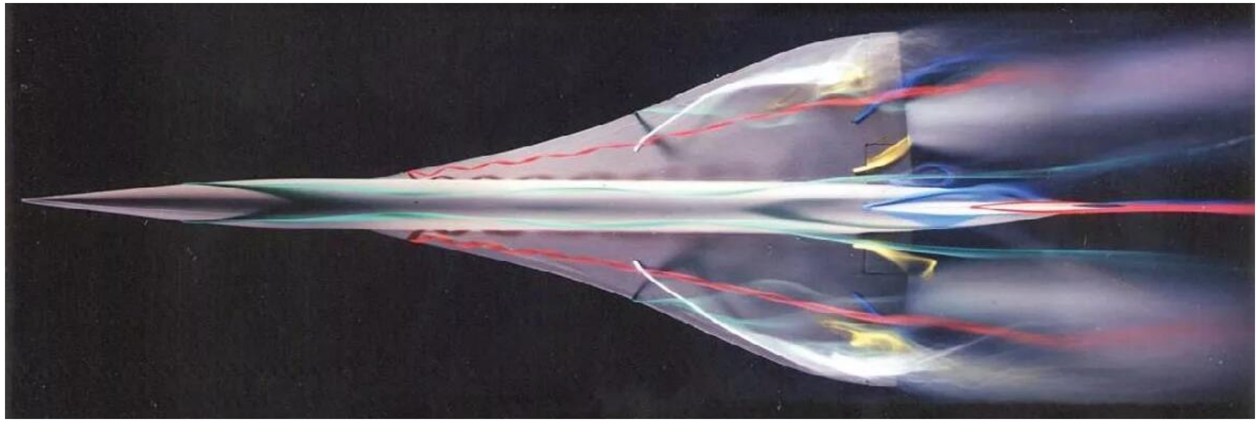
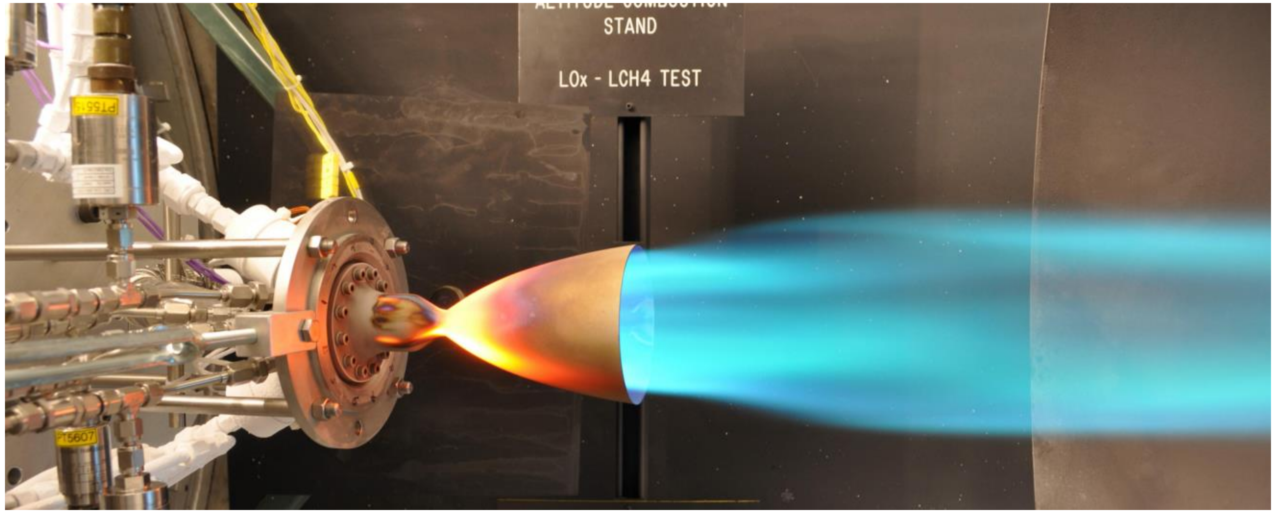
Актуальность темы

- применение в аэрокосмической отрасли
- необходимость точного моделирования
- дороговизна практических экспериментов





Цель и задачи работы

Цель – разработка численного метода на базе сеточно-характеристического подхода для моделирования двумерных стационарных сверхзвуковых течений в расширяющемся канале

Задачи:

- вывести характеристическую форму уравнений Эйлера
- реализовать сеточно-характеристический метод
- протестировать реализацию метода при различных входных данных, сравнить результаты с аналитическими значениями

Постановка задачи

Исходная система уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u^2 + p}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2 + p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\left(h+\frac{w^2}{2}\right)\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\left(h+\frac{w^2}{2}\right)\rho v}{\partial y} = 0$$,где $w^2 = u^2 + v^2$

$$p = \frac{\rho R T}{M_\Sigma}$$ и $h = c_p T$

Исходная система в матричном виде

$$A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y} = C$$

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & u \\ u & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & -a^2 u \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \rho & 0 & v \\ v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & v & -a^2 v \end{bmatrix}$$

$C = [0\ 0\ 0\ 0\ ]^T$ и $U = (u, v, p, \rho)^T$

Вывод уравнений

Характеристики – особые кривые в пространстве переменных (x, y), вдоль которых исходные уравнения в частных производных вырождаются и могут быть сведены к обыкновенным дифференциальным.

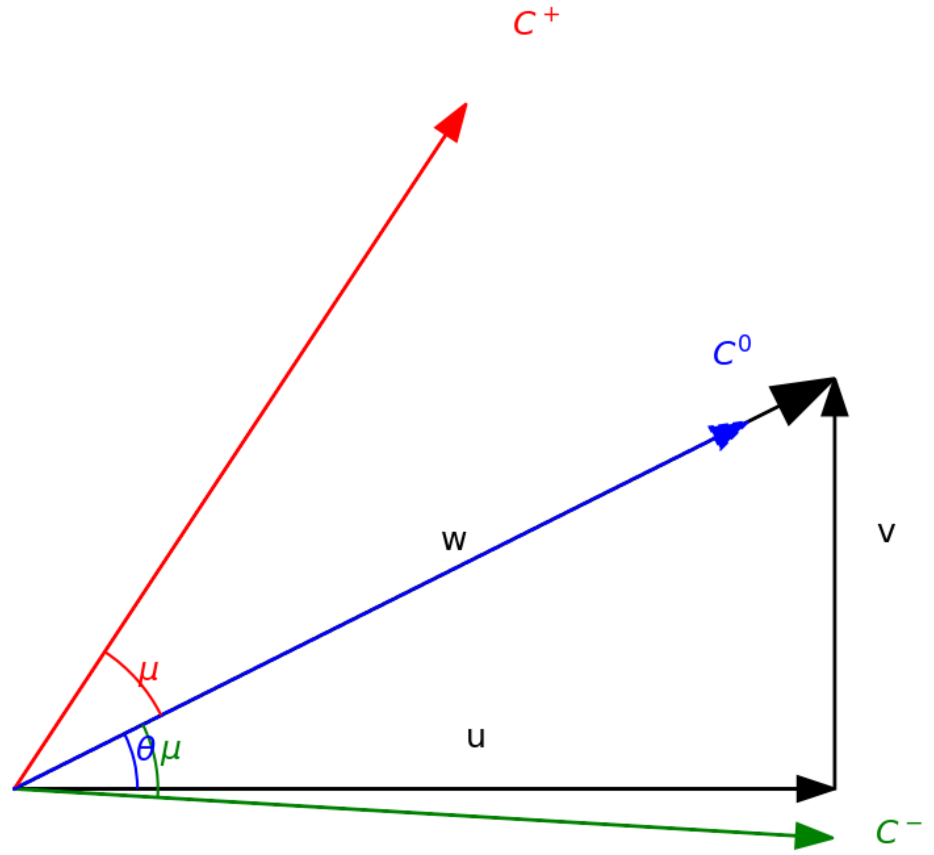
$$\left(B - A * \frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial U}{\partial y} = C - A\frac{dU}{dx}$$

$$\det\left|B - A * \frac{dy}{dx}\right| = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta)\ , dp - a^2 d\rho = 0 \text{ и } d\left(h + \frac{w^2}{2}\right) = 0 \text{ вдоль } \mathrm{C}^0$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu), \mathrm{d}\theta - \frac{\cot\mu}{\rho w^2}\,\mathrm{dp} = 0 \quad \text{вдоль } \mathrm{C}^-$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu), \mathrm{d}\theta + \frac{\cot\mu}{\rho w^2}\,\mathrm{dp} = 0 \quad \text{вдоль } \mathrm{C}^+$$



Численный метод

Конечно-разностная схема для внутренней точки:

$$y_3 - y_1 = tan(\theta_3 + \mu_3)\,\Delta x,$$

$$\theta_3 - \theta_1 + (\frac{1}{2}\frac{\cot\mu_1}{\rho_1 w_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\cot\mu_3}{\rho_3 w_3^2})(p_3 - p_1) = 0 \text{ для } C^+$$

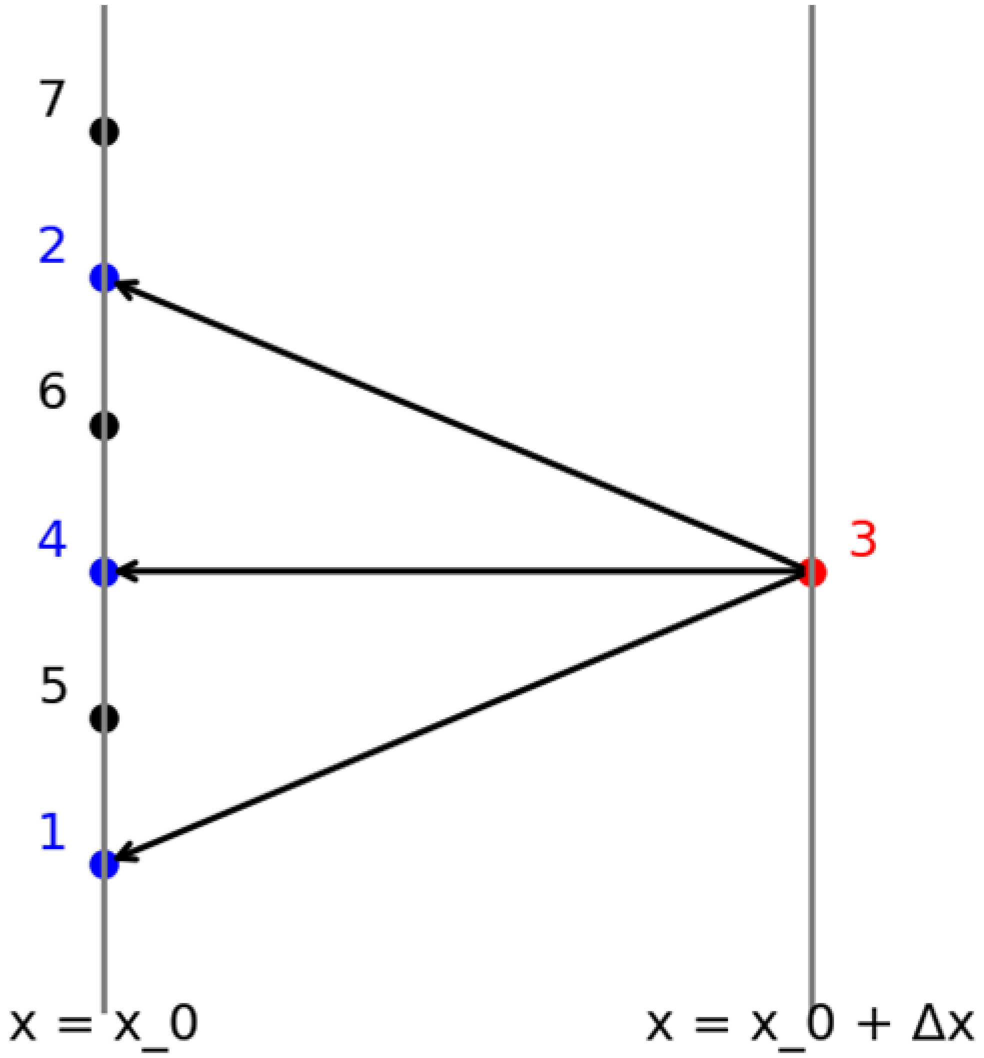
$$y_3 - y_2 = tan(\theta_3 - \mu_3)\,\Delta x,$$

$$\theta_3 - \theta_2 - (\frac{1}{2}\frac{\cot\mu_2}{\rho_2 w_2^2} + \frac{1}{2}\frac{\cot\mu_3}{\rho_3 w_3^2})(p_3 - p_2) = 0 \text{ для } C^-$$

$$y_3 - y_4 = tan(\theta_3)\,\Delta x,$$

$$(p_3 - p_4) - (\frac{1}{2}a_4^2 + \frac{1}{2}a_3^2)(\rho_3 - \rho_4) = 0$$

$$h_3 - h_4 + \frac{1}{2}(w_3^2 - w_4^2) = 0 \text{ для } C^0$$



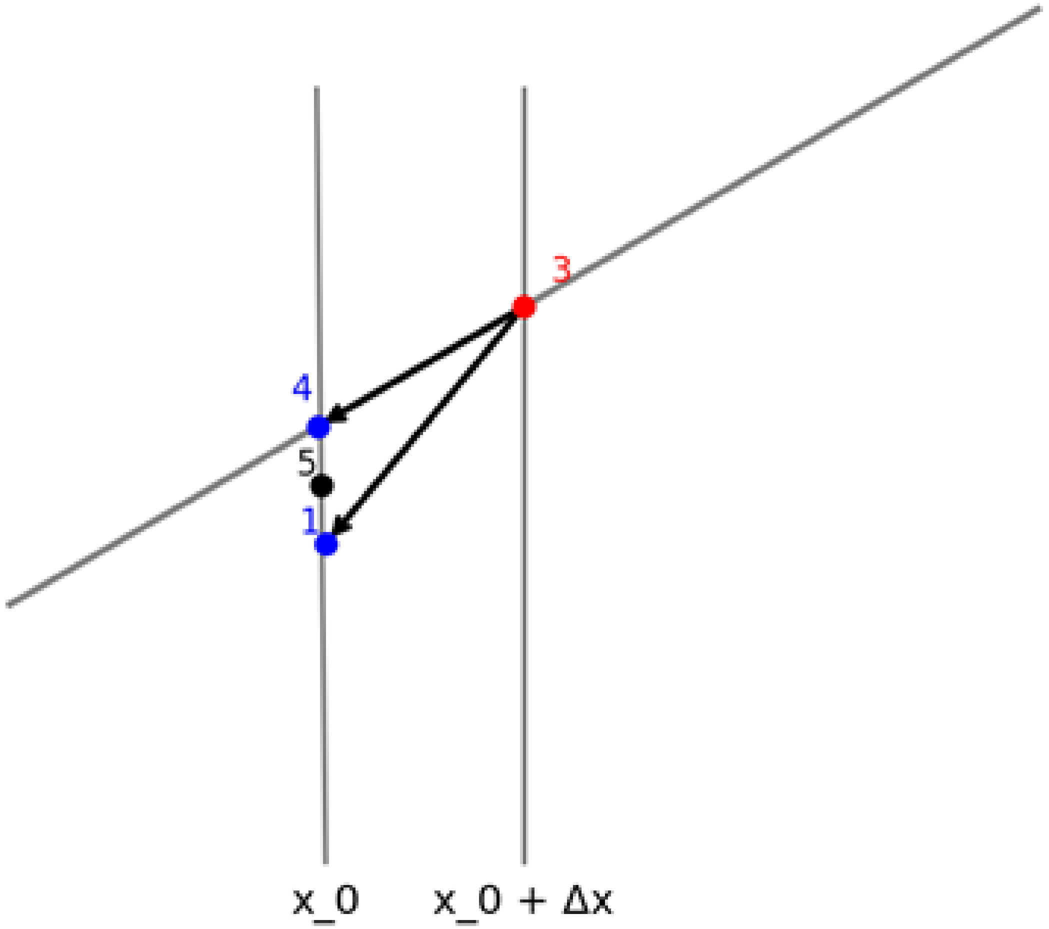
Численный метод

Конечно-разностная схема для граничной точки на стенке:

Граничное условие $\theta_3 = \theta_{wall}$

$$y_3 - y_1 = tan(\theta_3 + \mu_3)\,\Delta x,$$

$$\theta_3 - \theta_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{\cot\mu_1}{\rho_1 w_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\cot\mu_3}{\rho_3 w_3^2}\right)(p_3 - p_1) = 0 \text{ для } C^+$$

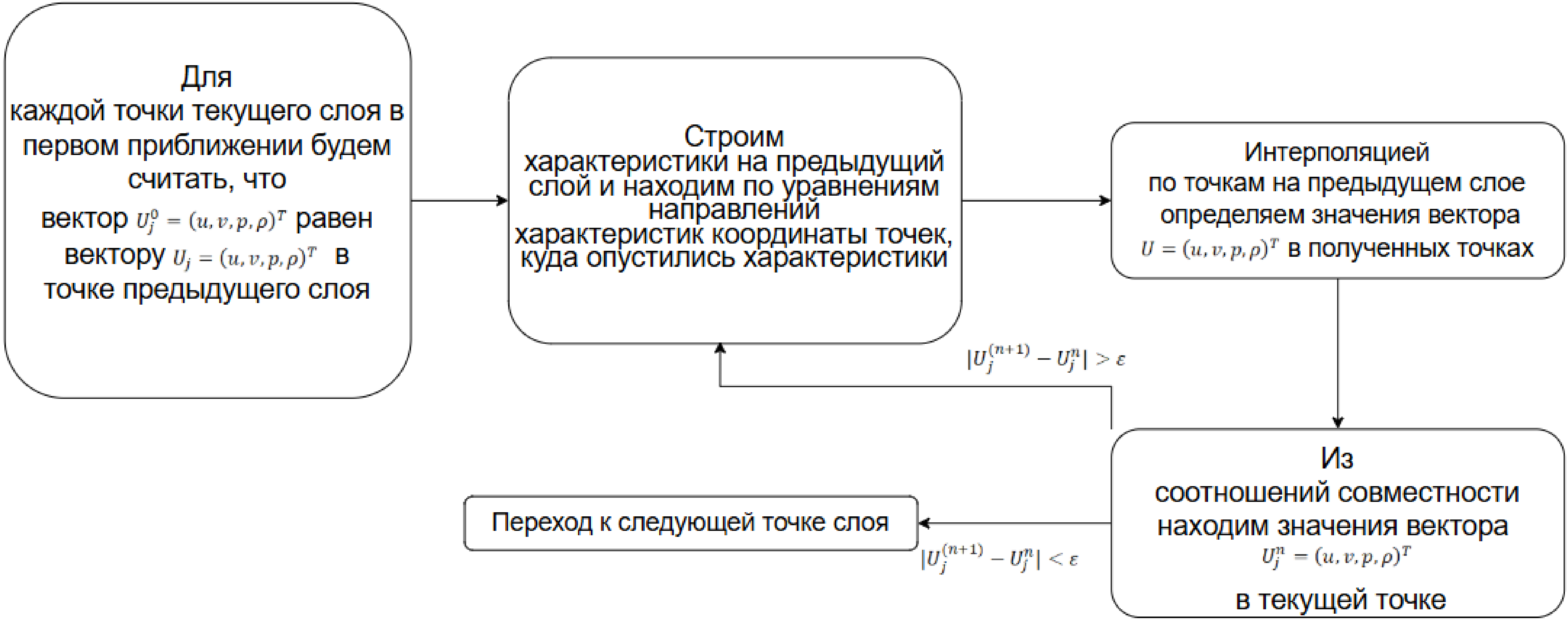


$$y_3 - y_4 = tan(\theta_3)\,\Delta x,$$

$$(p_3 - p_4) - \left(\frac{1}{2}a_4^2 + \frac{1}{2}a_3^2\right)(\rho_3 - \rho_4) = 0$$

$$h_3 - h_4 + \frac{1}{2}(w_3^2 - w_4^2) = 0 \text{ для } C^0$$

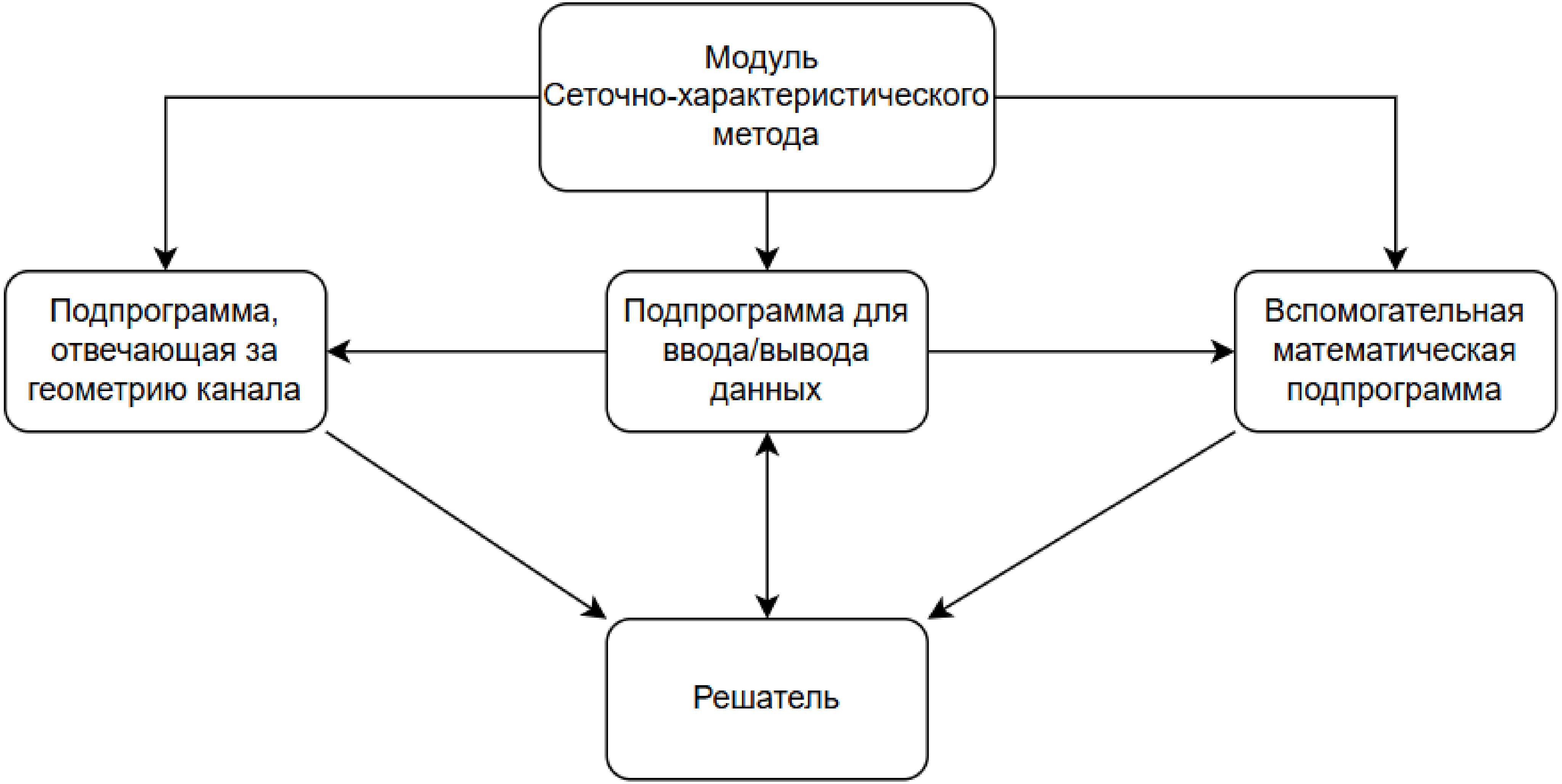
Численный метод



Стек технологий

- язык программирования Python
- библиотеки NumPy и SciPy для выполнения научных задач
- библиотеки Matplotlib и Seaborn для построения графиков
- среда разработки Jupyter

Архитектура решения



Тестирование. «Течение от источника»

При тестировании будем считать, что $r_* = 1\text{м}$,
$p_* = 101325\text{Па}, \rho_* = \dfrac{1\text{кг}}{\text{м}^3}, \kappa = 1.4,\ x_0 = 1.1\text{м}$

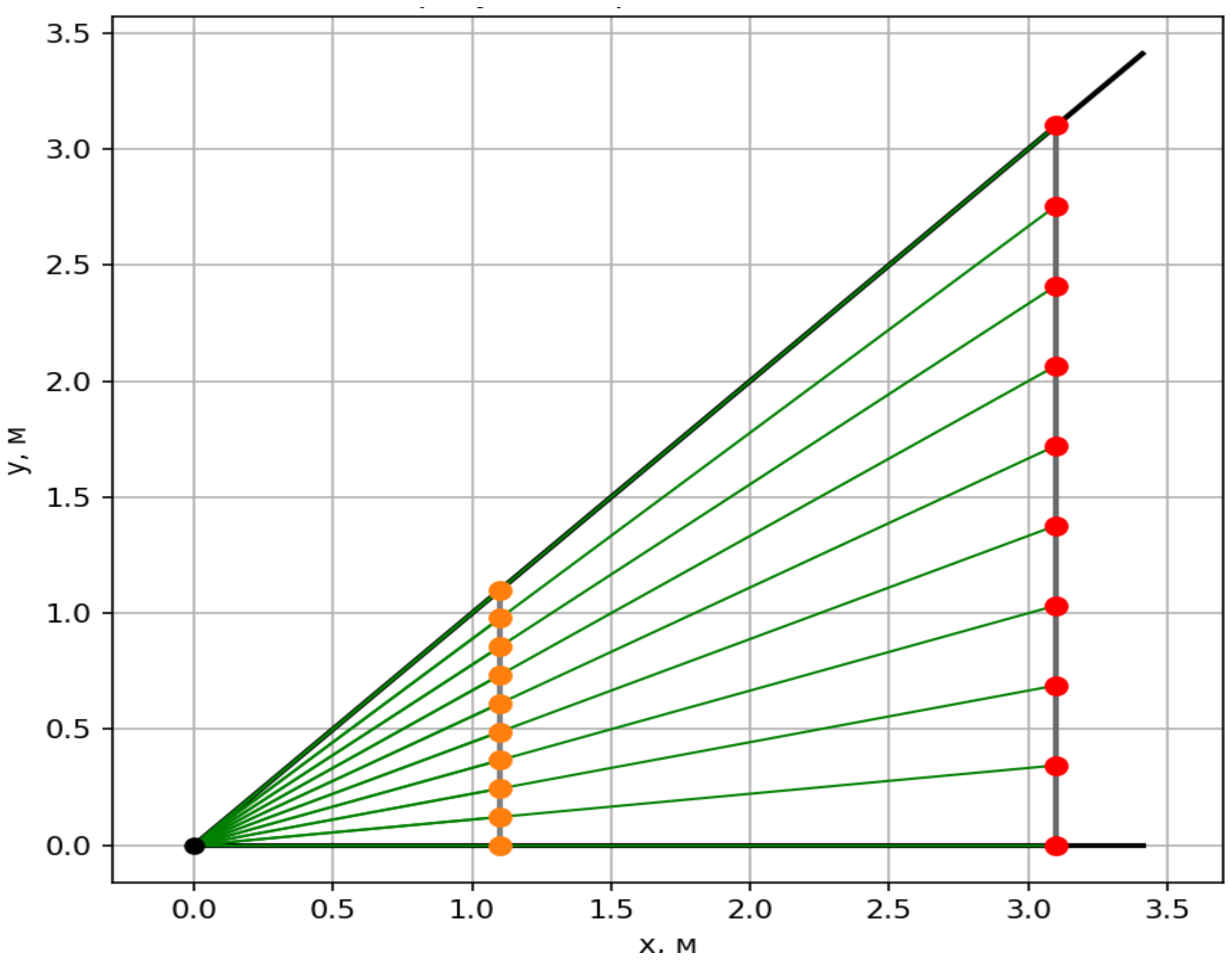
$$\rho w r = \rho_* a_* r_*$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_*}{\rho_*} + \frac{a_*^2}{2}$$

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_*}{\rho_*^\kappa}$$

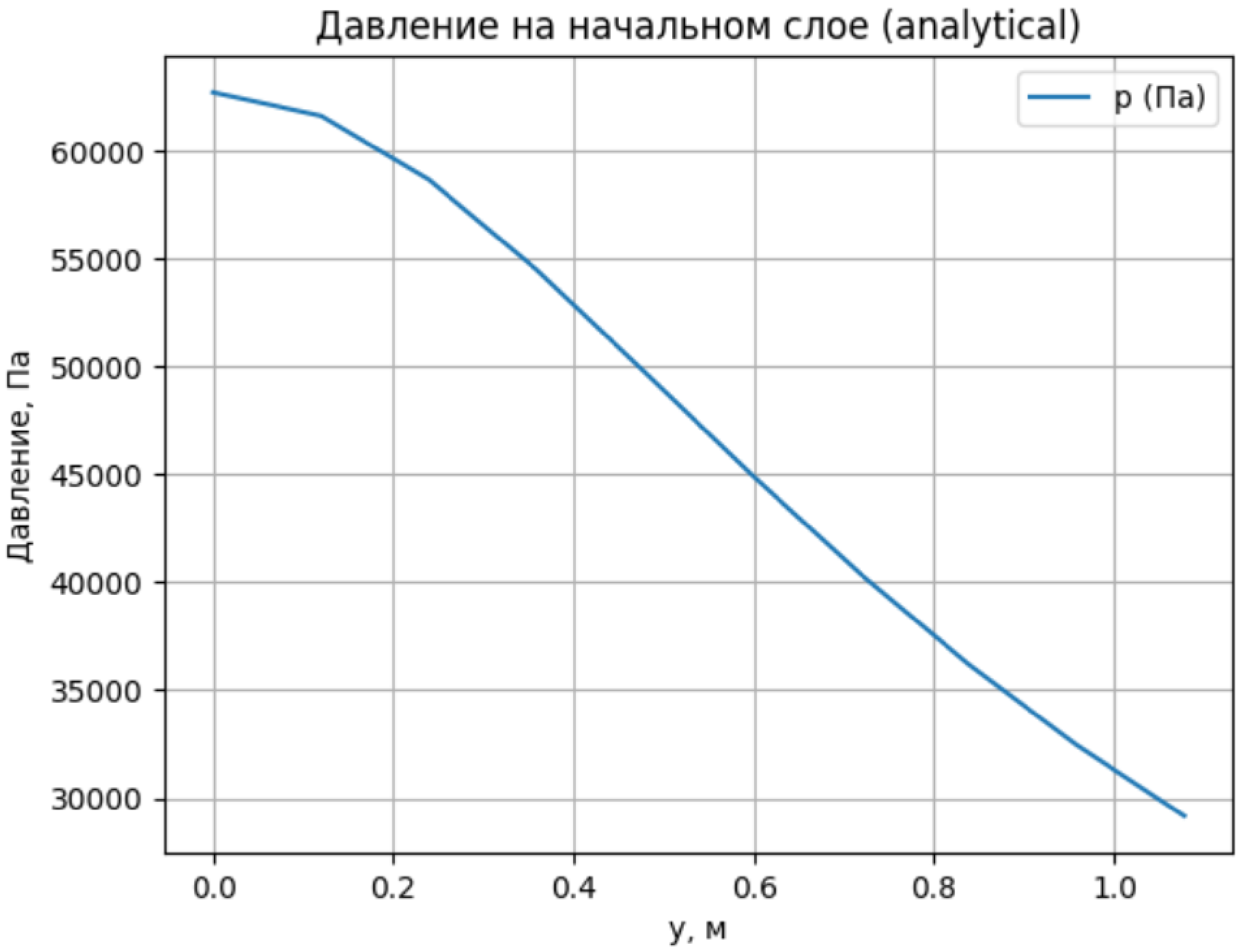
$$a^2 = \kappa\frac{p}{\rho}, \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{\kappa+1}{2} - \frac{\kappa-1}{2}\frac{w^2}{a_*^2}$$

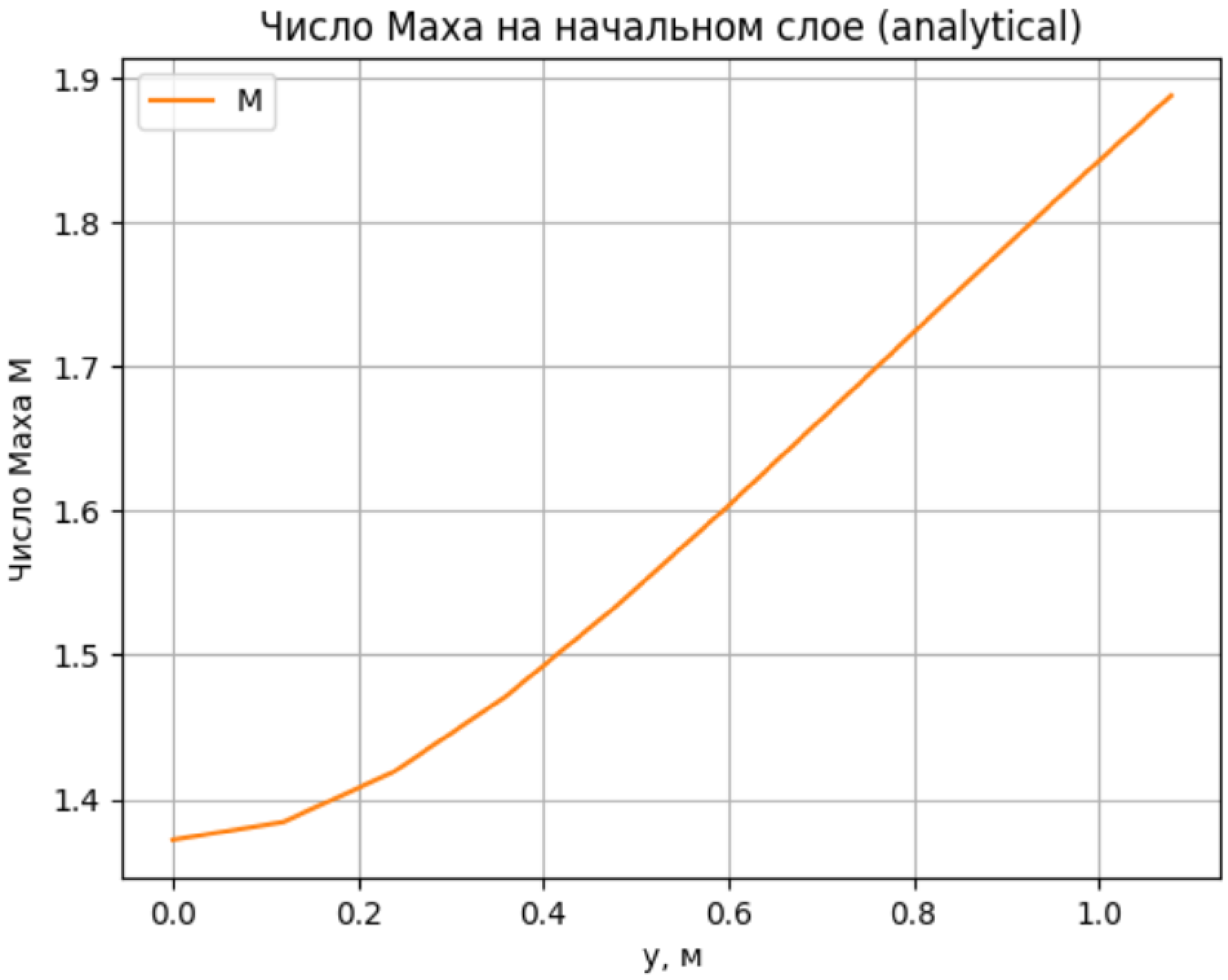
$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left(\frac{a}{a_*}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}}$$



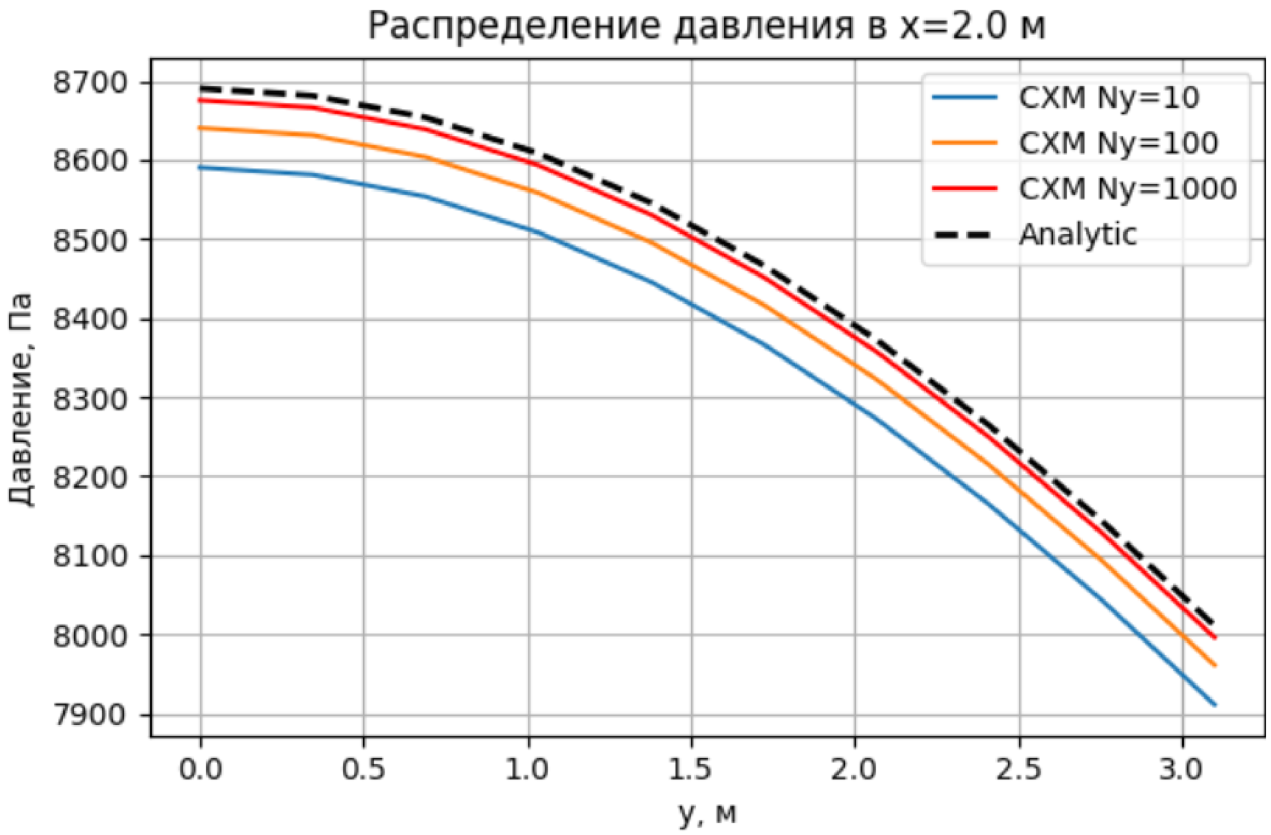
$\dfrac{r}{r_*} = \dfrac{1}{\left(\frac{\kappa+1}{2} - \frac{\kappa-1}{2}\frac{w^2}{a_*^2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\frac{w}{a_*}}$ – нелинейное уравнение относительно скорости w

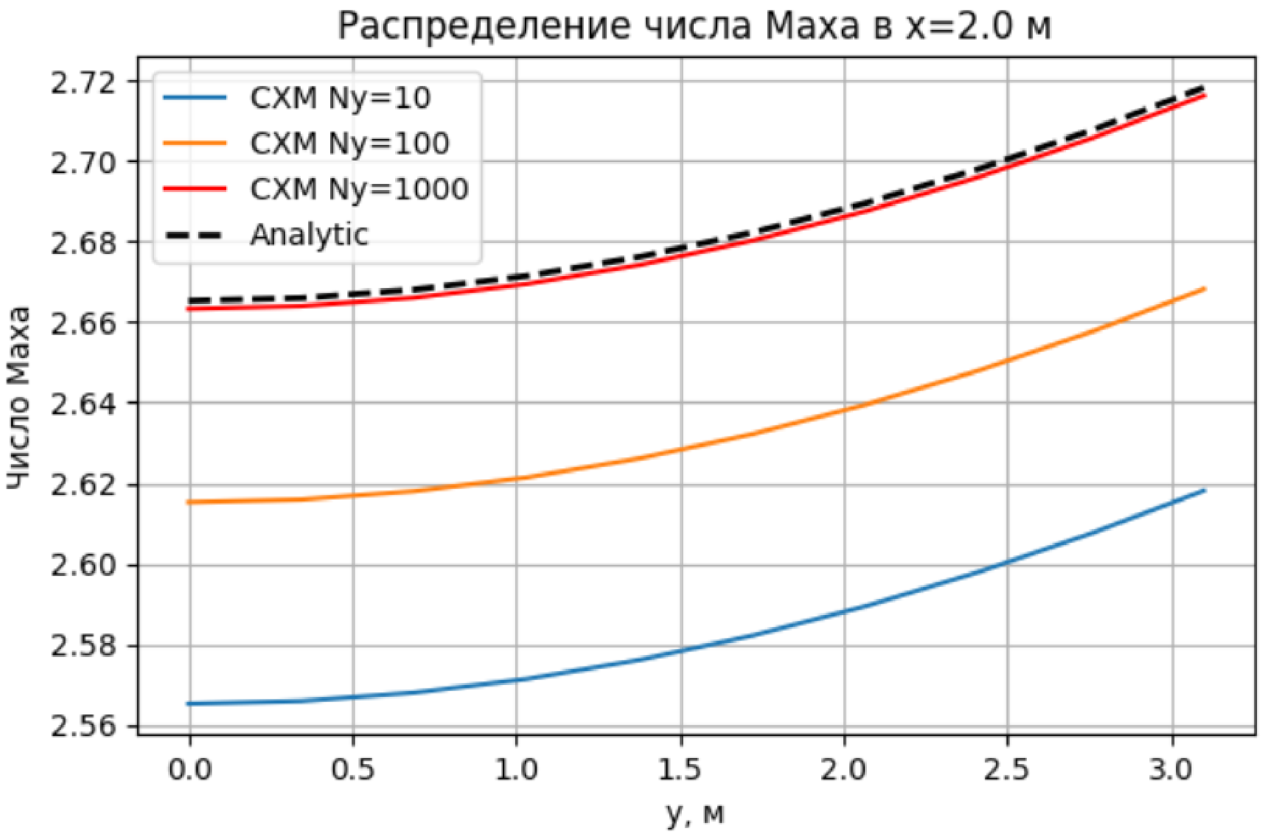
Тестирование. «Течение от источника»



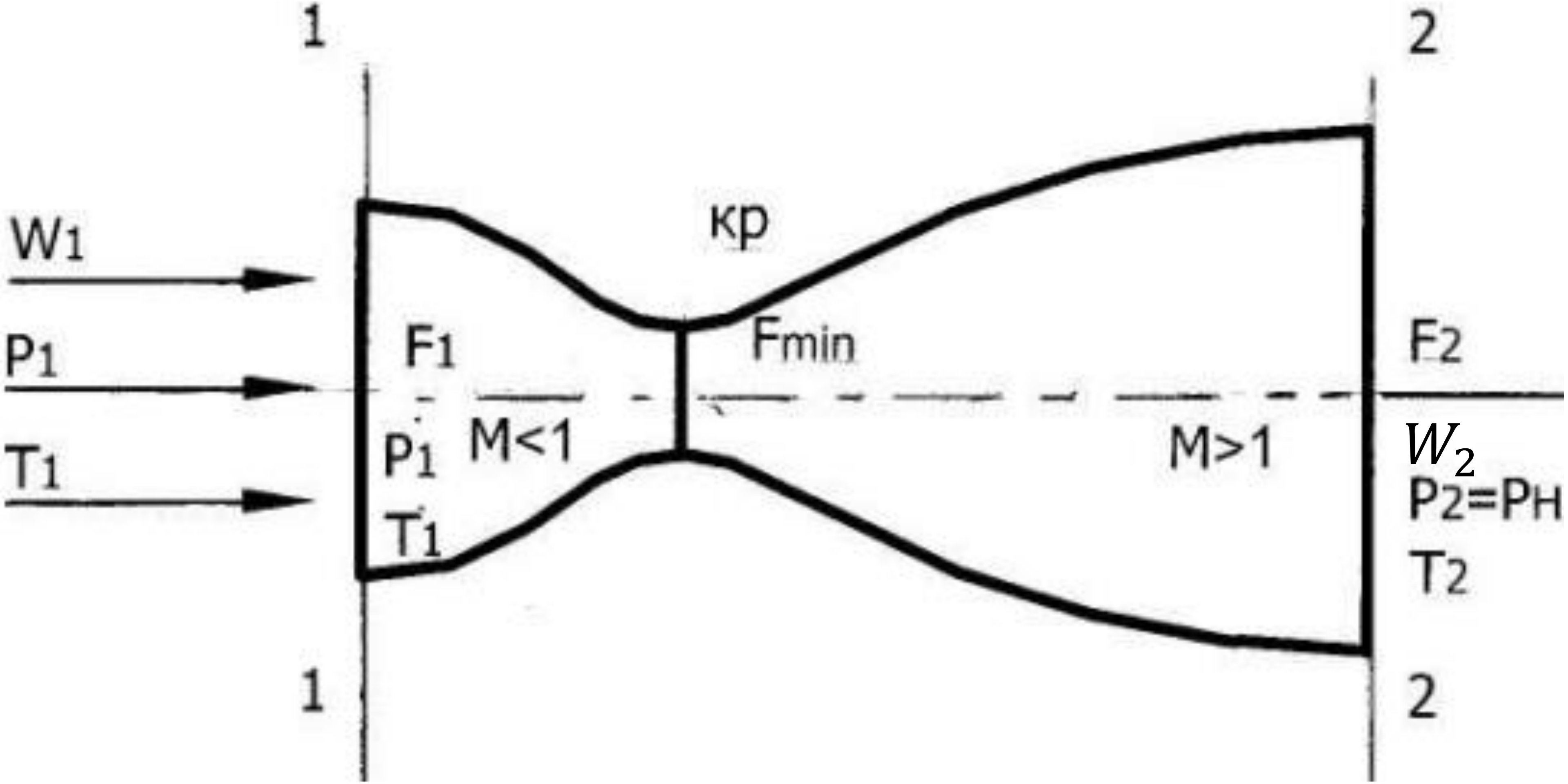


Тестирование. «Течение от источника»

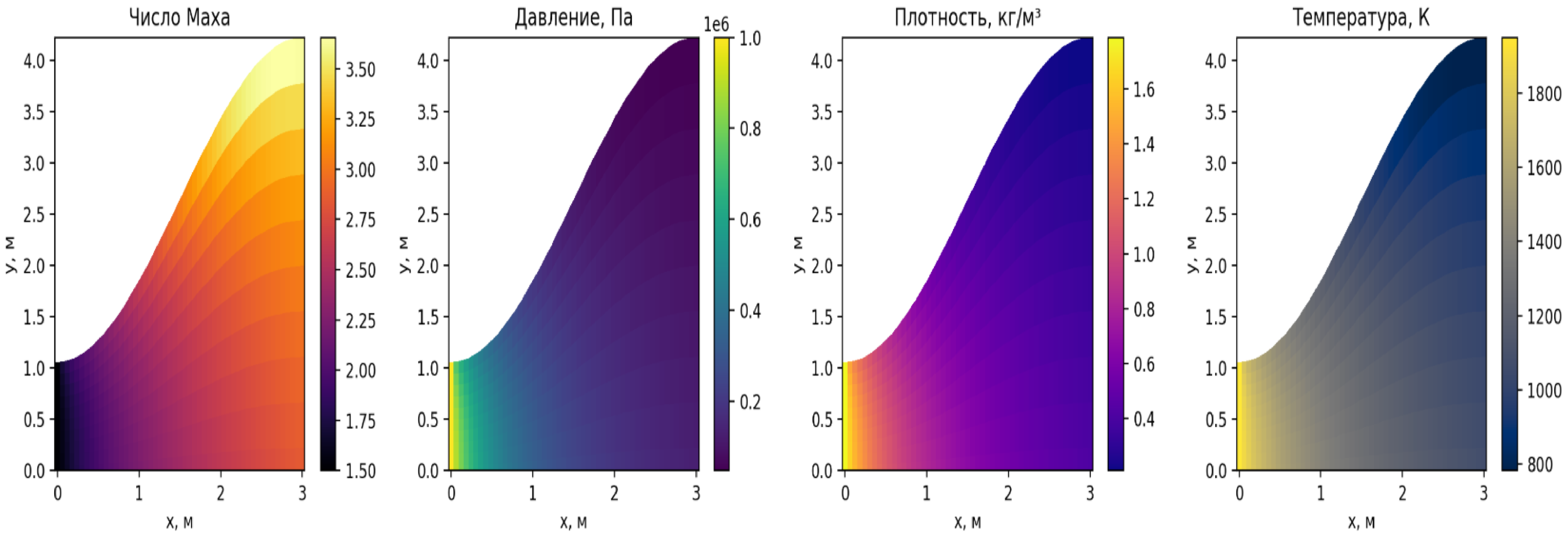




Моделирование сверхзвукового течения в расширяющейся части сопла



Результат моделирования



Результат работы

- вывод характеристической формы уравнений Эйлера
- реализация сеточно-характеристического метода
- тестирование реализации метода при различных входных данных, сравнение полученных результатов с аналитическими значениями
- перспективы развития: использование параллельных вычислений, учет смесей газов и химических реакций

QR-код репозитория