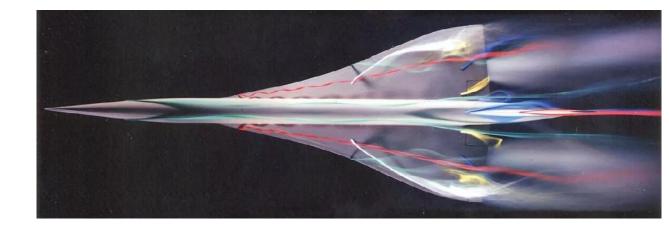
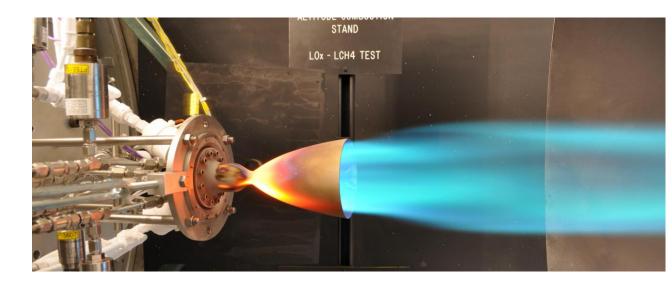
Актуальность темы

- применение в аэрокосмической отрасли
- необходимость точного моделирования
- дороговизна практических экспериментов





Цель и задачи работы

Цель – разработка численного метода на базе сеточно-характеристического подхода для моделирования двумерных стационарных сверхзвуковых течений в расширяющемся канале

Задачи:

- вывести характеристическую форму уравнений Эйлера
- реализовать сеточно-характеристический метод
- протестировать реализацию метода при различных входных данных, сравнить результаты с аналитическими значениями

Постановка задачи

Исходная система уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u^2 + p}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2 + p}{\partial y} = 0$$

$$p = \frac{\rho RT}{M_{\Sigma}}$$
 и $h = c_p T$

Исходная система в матричном виде

$$A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y} = C$$

$$A = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & u \\ u & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & -a^2 u \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \rho & 0 & v \\ v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & v & -a^2 v \end{bmatrix}$$

$$C = [0\ 0\ 0\ 0]^T$$
 и $U = (u, v, p, \rho)^T$

Вывод уравнений

Характеристики – особые кривые в пространстве переменных (x, y), вдоль которых исходные уравнения в частных производных вырождаются и могут быть сведены к обыкновенным дифференциальным.

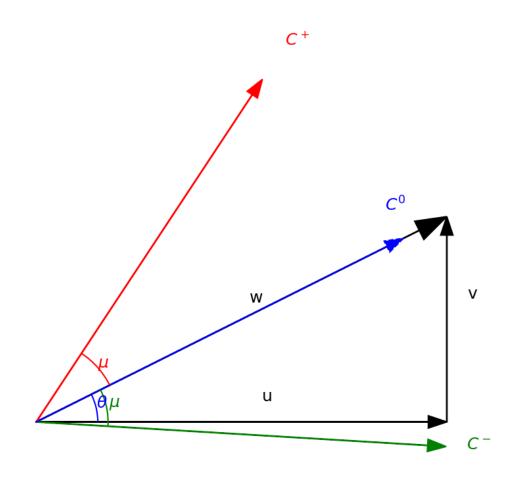
$$\left(B - A * \frac{dy}{dx}\right) \frac{\partial U}{\partial y} = C - A \frac{dU}{dx}$$

$$\det \left| B - A * \frac{dy}{dx} \right| = 0$$

$$\frac{dy}{dx}=\, an(heta)$$
 , $dp-a^2d
ho=0$ и $d\left(h+rac{w^2}{2}
ight)=0$ вдоль ${\sf C}^0$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu)$$
, $d\theta - \frac{\cot \mu}{\rho w^2} dp = 0$ вдоль С

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu), d\theta + \frac{\cot \mu}{\rho w^2} dp = 0$$
 вдоль С+



Численный метод

Конечно-разностная схема для внутренней точки:

$$y_3 - y_1 = tan(\theta_3 + \mu_3) \Delta x,$$

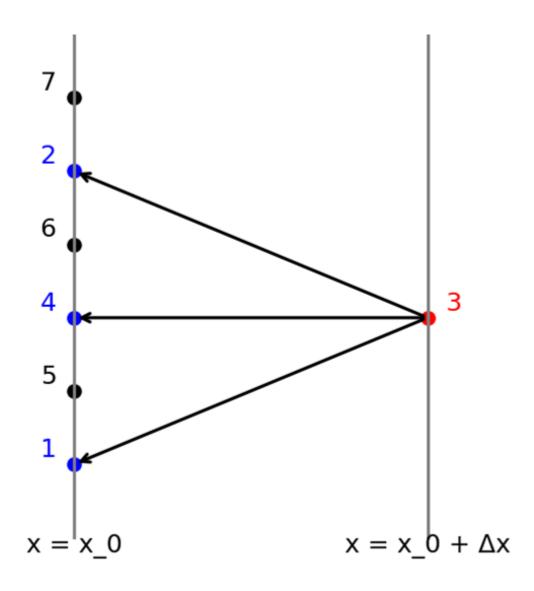
$$heta_3- heta_1+(rac{1\cot\mu_1}{2}+rac{1\cot\mu_3}{
ho_3w_3^2})(p_3-p_1)=0$$
 для \mathcal{C}^+ $y_3-y_2=tan(heta_3-\mu_3)\,\Delta x,$

$$heta_3 - heta_2 - (rac{1}{2} rac{\cot \mu_2}{
ho_2 w_2^2} + rac{1}{2} rac{\cot \mu_3}{
ho_3 w_3^2})(p_3 - p_2) = 0$$
 для \mathcal{C}^-

$$y_3 - y_4 = tan(\theta_3) \, \Delta x,$$

$$(p_3 - p_4) - (\frac{1}{2}a_4^2 + \frac{1}{2}a_3^2)(\rho_3 - \rho_4) = 0$$

$$h_3 - h_4 + \frac{1}{2}(w_3^2 - w_4^2) = 0$$
 для \mathcal{C}^0



Численный метод

Конечно-разностная схема для граничной точки на стенке:

Граничное условие $\theta_3 = \theta_{wall}$

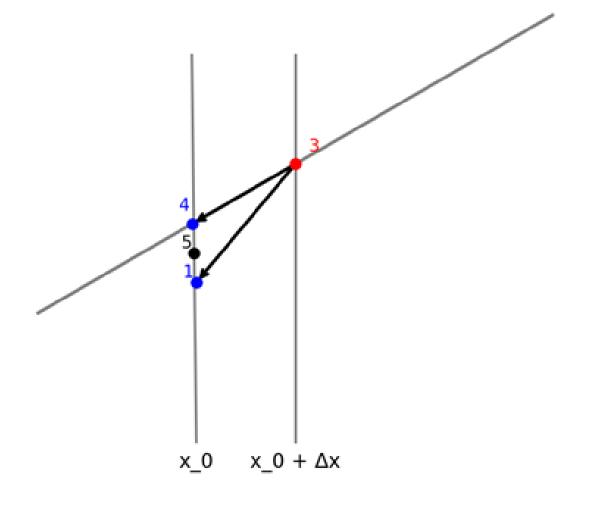
$$y_3 - y_1 = tan(\theta_3 + \mu_3) \Delta x,$$

$$heta_3 - heta_1 + (rac{1}{2} rac{\cot \mu_1}{
ho_1 w_1^2} + rac{1}{2} rac{\cot \mu_3}{
ho_3 w_3^2})(p_3 - p_1) = 0$$
 для \mathcal{C}^+

$$y_3 - y_4 = tan(\theta_3) \Delta x$$
,

$$(p_3 - p_4) - (\frac{1}{2}a_4^2 + \frac{1}{2}a_3^2)(\rho_3 - \rho_4) = 0$$

$$h_3 - h_4 + \frac{1}{2}(w_3^2 - w_4^2) = 0$$
 для \mathcal{C}^0



Численный метод

Для каждой точки текущего слоя в Строим первом приближении будем Интерполяцией характеристики на предыдущий считать, что по точкам на предыдущем слое слой и находим по уравнениям направлений определяем значения вектора Bektop $U_i^0 = (u, v, p, \rho)^T$ pabeh характеристик координаты точек, куда опустились характеристики $U = (u, v, p, \rho)^T$ в полученных точках BEKTOPY $U_i = (u, v, p, \rho)^T$ B точке предыдущего слоя $|U_i^{(n+1)}-U_j^n|>\varepsilon$ Из соотношений совместности Переход к следующей точке слоя находим значения вектора $|U_i^{(n+1)} - U_j^n| < \varepsilon$ $U_i^n = (u, v, p, \rho)^T$ в текущей точке

Стек технологий

- язык программирования Python
- библиотеки NumPy и SciPy для выполнения научных задач
- библиотеки Matplotlib и Seaborn для построения графиков
- среда разработки Jupyter







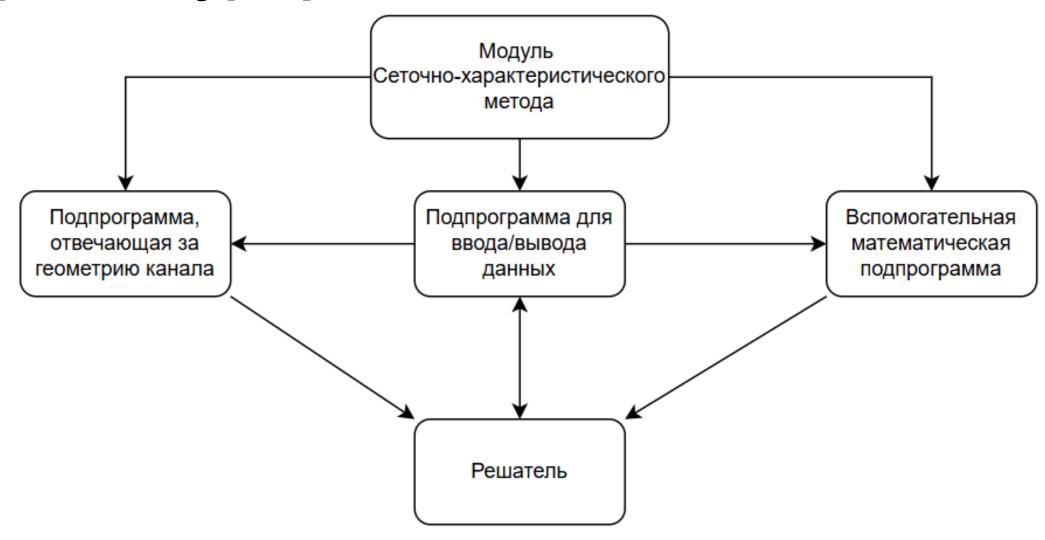








Архитектура решения



Тестирование. «Течение от источника»

При тестировании будем считать, что
$$r_*=1$$
м, $p_*=101325\Pi$ а, $\rho_*=\frac{1\kappa\Gamma}{{
m M}^3}$, $\kappa=1.4$, $x_0=1.1$ м

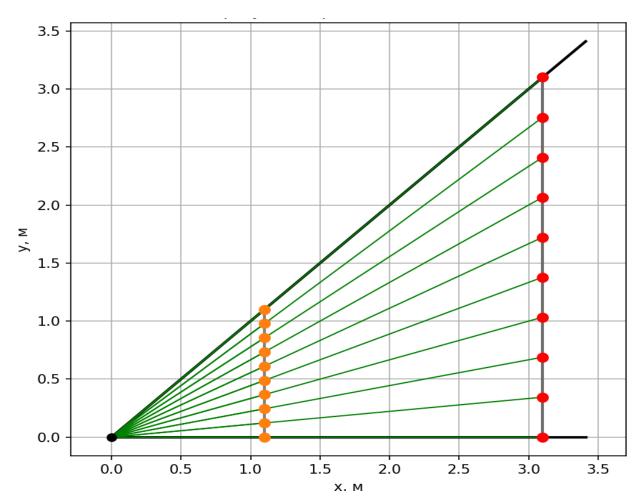
$$\rho wr = \rho_* a_* r_*$$

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_*}{\rho_*} + \frac{a_*^2}{2}$$

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \frac{p_*}{\rho_*^{\kappa}}$$

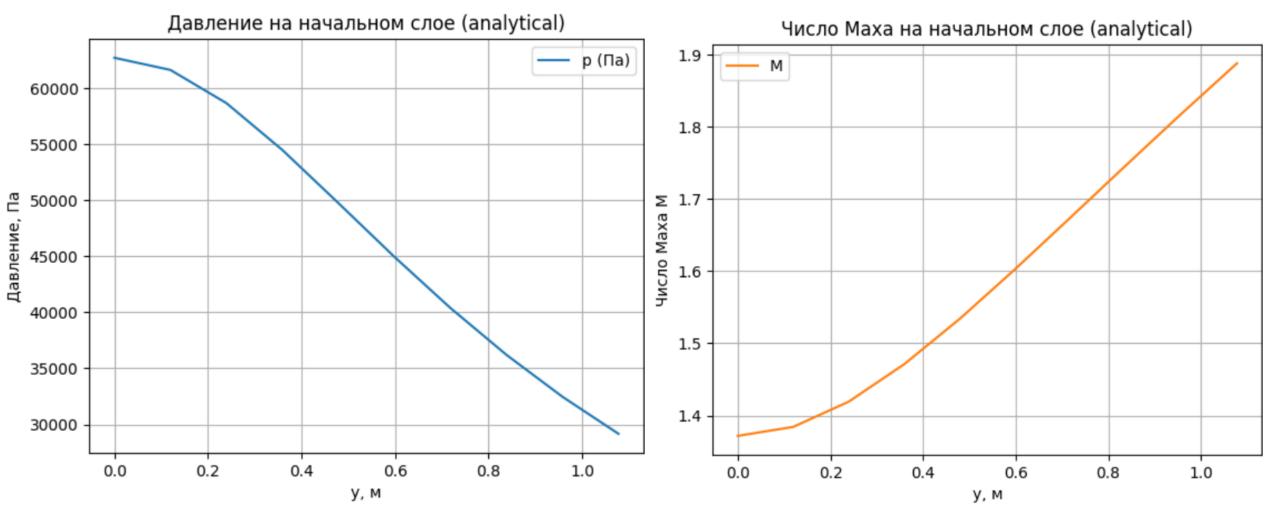
$$a^2 = \kappa \frac{p}{\rho}, \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{\kappa + 1}{2} - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{w^2}{a_*^2}$$

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left(\frac{a}{a_*}\right)^{\frac{2}{\kappa - 1}}$$

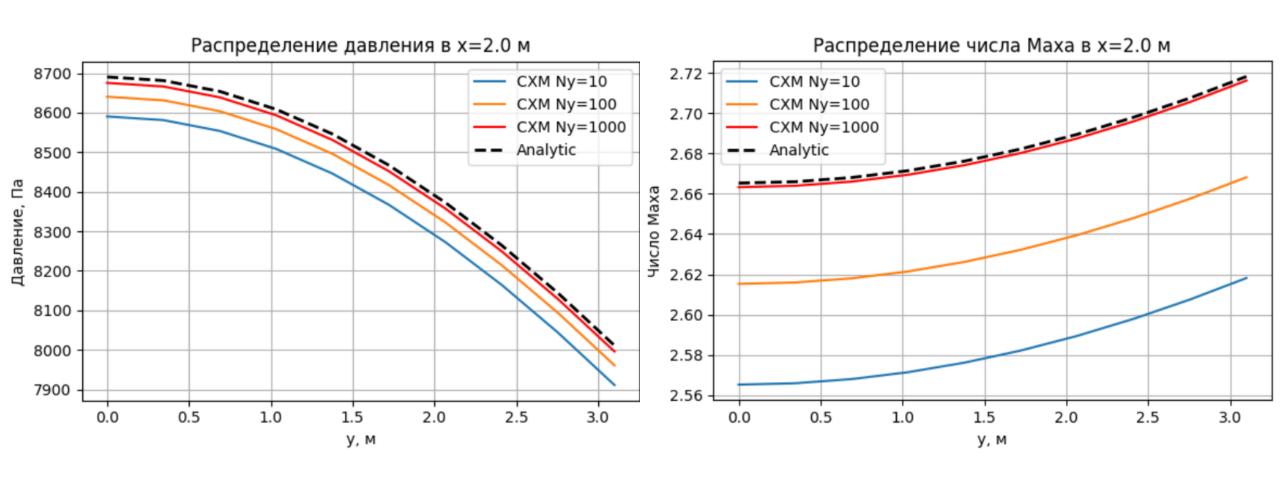


$$rac{r}{r_*} = rac{1}{\left(rac{\kappa+1}{2} - rac{\kappa-1}{2}rac{w^2}{a_*^2}
ight)^{rac{1}{\kappa-1}}rac{w}{a_*}}$$
 - нелинейное уравнение относительно скорости w

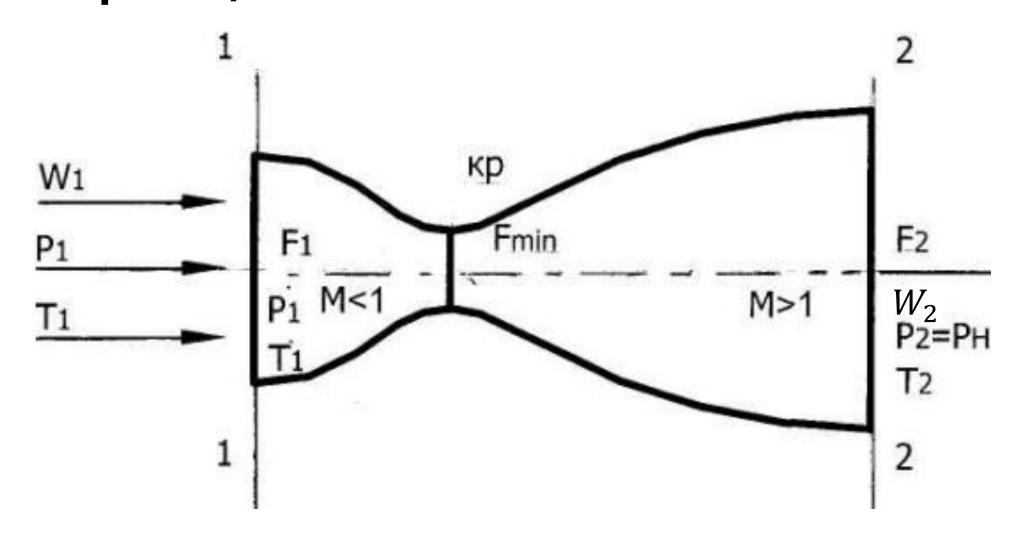
Тестирование. «Течение от источника»



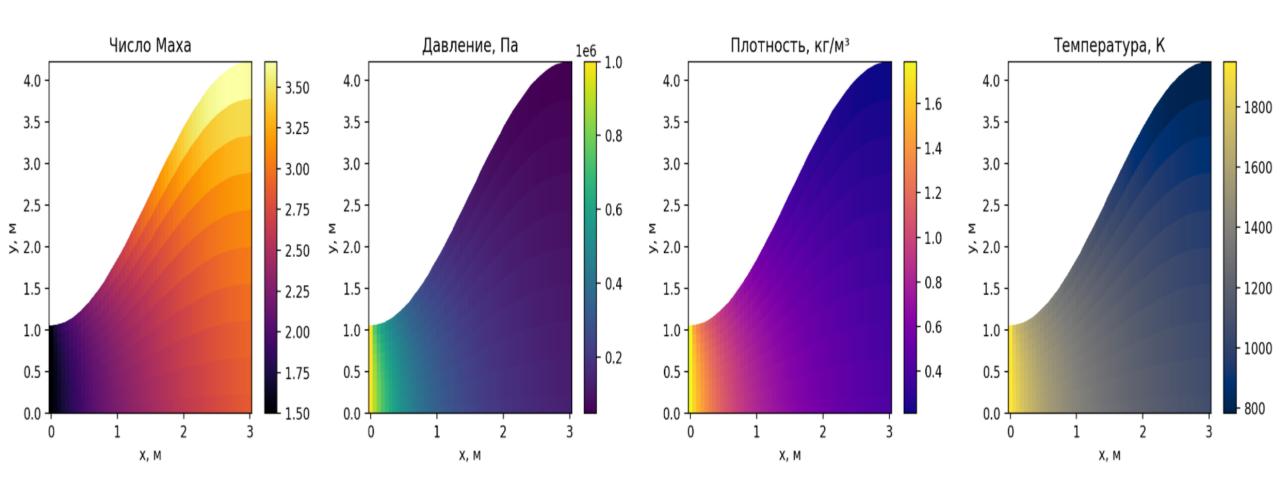
Тестирование. «Течение от источника»



Моделирование сверхзвукового течения в расширяющейся части сопла



Результат моделирования



Результат работы

- вывод характеристической формы уравнений Эйлера
- реализация сеточно-характеристического метода
- тестирование реализации метода при различных входных данных, сравнение полученных результатов с аналитическими значениями
- перспективы развития: использование параллельных вычислений, учет смесей газов и химических реакций

QR-код репозитория

