Тестовое задание.

Обозначения.

Рассмотрим некоторое конечное дискретное вероятностное распределение случайного числа x

$$(x,p) = \{(x_1,p_1),\ldots,(x_m,p_m)\}, \quad \sum_{n=1}^{m} p_n = 1, \quad p_n \geq 0,$$

где $\{x_1,\ldots,x_m\}$ — множество всевозможных исходов, $\{p_1,\ldots,p_m\}$ — отвечающие этим исходам вероятности.

Числа

$$E_s(x) = \sum_{n=1}^{m} x_n^s p_n$$

будем называть s-ыми моментами x, а числа

$$E(x) = E_1(x), \quad D(x) = E_2(x) - E_1^2(x),$$

соответственно, математическим ожиданием x и дисперсией x.

Задание 1. Даны (x,p) и (y,q), отвечающие независимым случайным числам x и y, для которых известны лишь $E(x)$, $D(x)$, $E(y)$ и $D(y)$. Посчитать для случайного числа $z = x - 2y$ значения $E(z)$ и $D(z)$.

Задание 2. Даны (x,p) и (y,q), отвечающие независимым случайным числам x и y, для которых известны лишь $E(x)$, $D(x)$, $E(y)$ и $D(y)$. Для некоторого действительного $\alpha \in [0,1]$ строится смесь этих случайных распределений $(z,r) = (z_\alpha, r_\alpha)$. Процесс построения этой смеси выглядит следующим образом, каждый раз для определения значения z случайным образом выбирается равномерно распределенное на отрезке $[0,1]$ число σ, если данное число $\sigma \leq \alpha$, то выбирается событие из потока, отвечающего x, если же оказалось выполненным $\sigma > \alpha$, то выбирается событие из потока, отвечающего y. Для случайного числа z вам нужно найти $E(z)$ и $D(z)$.

Задание 3. Игра бинго. Предположим, что вы играете на этой карточке, той что 5×5 на рисунке 1.

Среднее поле считается открытым уже до начала игры. Последовательно из кучи, в которой 75 шаров с номерами 1-75, случайным образом выбирается

Рис. 1:

шар за шаром, вы отмечаете на своей карте выпавшие шары последовательно. Выбранные шары удаляются из кучи. Предположим, что карта считается выигравшей, если вы собрали квадрат 3×3 с центром в центральной позиции карточки. Предположим также, что стоимость карточки 1\$, а за то, что вы собрали выигрышный комплект на s-ом шаре ($s = 1, 2, \dots, 75$) вам выплачивается выигрыш W_s и игра заканчивается. Ваша задача стандартными средствами MS Excel посчитать вероятности получения выигрыша W_s. И придумать таблицу выигрышей, так чтобы средний выигрыш в игре был примерно равен $0.95\$ \pm 0.02\$$, а вероятность получения положительного выигрыша была примерно равна 20%. В вашей таблице должно быть не менее 7 различных положительных значений, но могут быть нулевые, например: $W_1 = \dots = W_{10} = 100\$$, $W_{11} = \dots = W_{13} = 10\$$, $W_{14} = \dots = W_{18} = 1\$$, $W_{19} = \dots = W_{75} = 0\$$. Значения в таблице должны также удовлетворять естественному ограничению $W_{s+1} \le W_s$ при $s = 1, \dots, 74$. Как факт, в руках у вас окажется конечное дискретное вероятностное распределение случайного числа W. В том же MS Excel посчитайте для него $E(W)$ и $D(W)$.

Задание 4. Предположим есть игра, стоимость которой равна 1. Призами являются $W_s \in \Omega = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 50, 100, 200, 500\}$, $W_1 = 0$. Вероятности p_s каждого события строго положительны и совокупность всех W_s дает множество Ω. Вам нужно найти такие вероятности, чтобы выполнялись $E(W) = 0.95 \pm 0.005$, $D(W) = 154.00 \pm 0.5$ и вероятность появления положительного выигрыша в игре $(1 - p_1)$ была бы равна 0.15; опишите ваш алгоритм поиска этих вероятностей. Далее средствами языка $C++$ необходимо реализовать мультипоточное моделирование данного игрового процесса, так чтобы данные, необходимые для построения гистограммы распределения и полученные от различных потоков, запущенных на различных ядрах процессора, время от времени сбрасывались в некий общий аккумулятор. Например, на каждом ядре расчитывается 10000 итераций, затем данные сбрасываются в общий аккумулятор, каждое ядро совершает 10000 таких циклов и останавливает свою работу. Когда все такие потоки завершены данные аккумулятора сбрасываются в файл вместе с итоговым количеством испытаний. Вас интересуют относительные погрешности расчета $E(W)$ и $D(W)$ по аккумулируемой выборке. В исходном коде нужно использовать класс `std::mt19937` для генератора случайных чисел и класс `std::mutex` для операций с аккумулятором.

Задание 5. Есть игра, которую легко представить на матрице 3×3. Итак, есть 9 ячеек, в которых прячутся 9 предметов: $AABBCCDDS$. Мы последовательно открываем ячейки и при получении, либо одной из пар AA, BB, CC или DD, либо открытия ячейки с S игра заканчивается. Стоимость игры равна 1, за пары игрок получает фиксированный приз AA — 10, BB — 20, CC — 30, DD — 40, а за нахождение S — случайным образом либо 50, либо 100, либо 200. Требуется определить вероятность нахождения игроком S. И найти такое распределение для призов S, чтобы средний выигрыш в игре был равен 55.