Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Курсовая работа

«...»

Выполнил:
студент 311 группы
Сомов А. А.

Научный руководитель:
Давидсон М. Р.

Москва
2021

1 Обзор данных

Мы имеем портфель из следующих производных финансовых инструментов:

- RI - маржируемый опцион колл на фьючерсный контракт на индекс РТС
- Si - маржируемый опцион колл на фьючерсный контракт на курс доллар США - российский рубль
- GZ - маржируемый опцион колл на фьючерсный контракт на обыкновенные акции ПАО «Газпром»
- SR - Маржируемый опцион колл на фьючерсный контракт на обыкновенные акции ПАО Сбербанк

Дополнительная информация по рассматриваемым опционам представлена на *рис.1*:

Инструмент	страйк	дата экспирации	полный код контракта на ММВБ
RI	115000	17.06.2021	RTS-6.21M170621CA115000
Si	66000	17.06.2021	Si-6.21M170621CA66000
GZ	18500	16.06.2021	GAZR-6.21M160621CA18500
SR	24500	16.06.2021	SBRF-6.21M160621CA24500

рис.1

На *рис.2* представлены графики цен на указанные инструменты в период с 19.08.2020 по 22.01.2021.
На *рис.3* графики цен на базовые активы соответствующих опционов за тот же период.
На *рис.4* для наглядности приведены графики цен всех опционов и их базовых активов

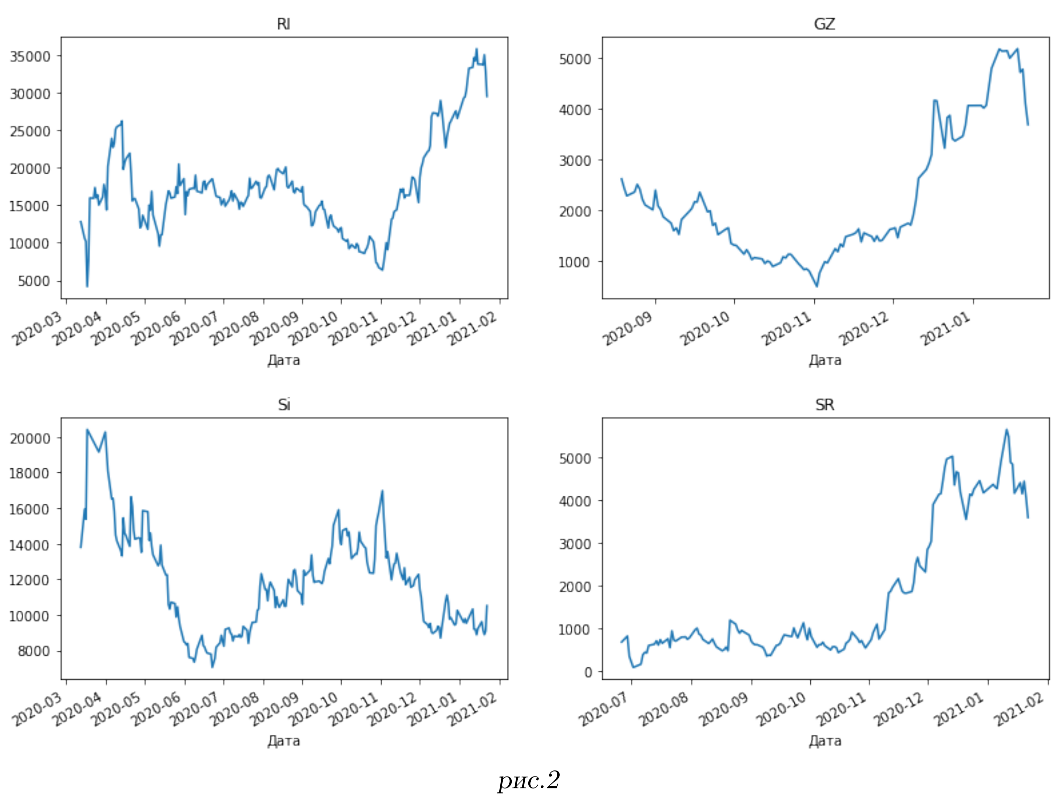

рис.2

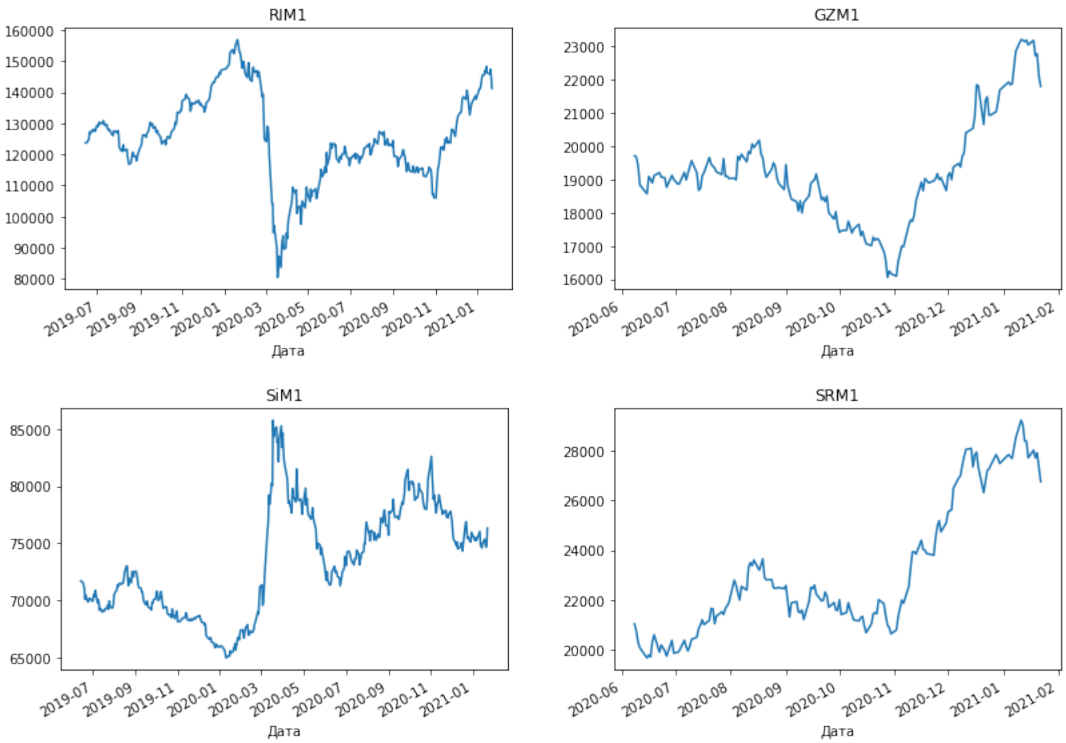
RIM1
GZM1
SiM1
SRM1
Дата
Дата
Дата
Дата

рис.3

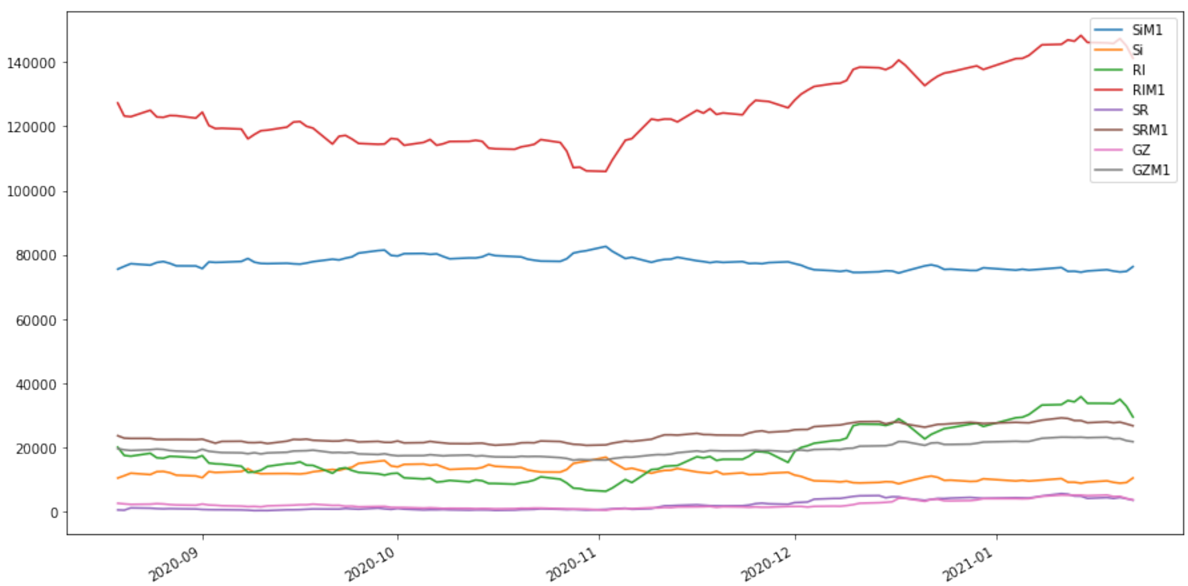
SiM1
Si
RI
RIM1
SR
SRM1
GZ
GZM1
Дата

рис.4

2 Постановка задачи

Рассмотрим промежуток времени H. В момент $t = 0$ мы имеем начальный капитал W_0. Мы можем вкладывать его в моменты времени $t = 1, \dots, H-1$ в инструменты $x_i,\ i = \{1, 2, 3, 4\}$, где

- x_1- соответствует RI
- x_2 - Si
- x_3 - GZ
- x_4 - SR

В момент времени $t = H$ наш капитал должен удовлетворять требованиям L, то есть $W_H \geq L$.
Введём бинарное дерево D с множеством вершин $N,\ |N| = k$. Будем обозначать его вершины $n_i,\ n_i \in N,\ i = 1, \dots, k$. Обозначим $S,\ S \subset N$ множество листовых вершин дерева D, а $T,\ T \subset N$ - множество его внутренних вершин. Каждая вершина соответствует какому-то моменту времени t таким образом, что корень дерева n_0 соответствует моменту $t = 0,\ n_1$ и n_2 соответствуют $t = 1$ и так далее с учётом того, что дерево D бинарное.

Например, для $k = 15$ имеем *(рис.5)*

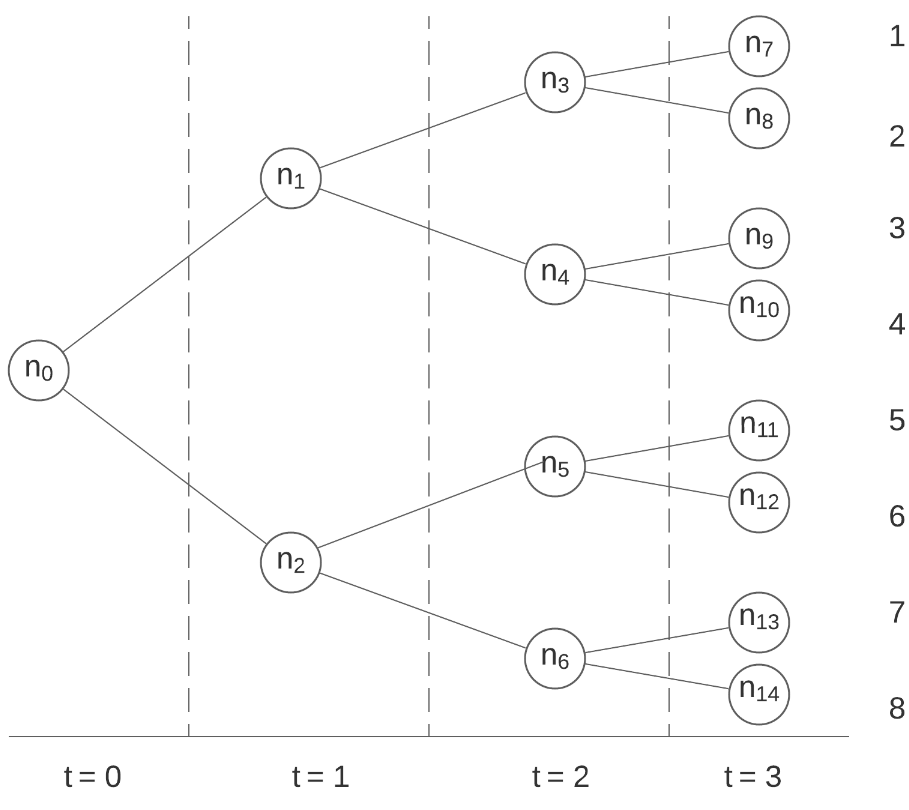

рис.5

Обсудим структуру дерева D и допущения, которые мы делаем в рамках модели.

- На момент $t = 0$, то есть в вершине n_0 мы уже имеем какое-то количество каждого инструмента в портфеле. Нас интересует задача его ребалансировки.
- Издержки на покупку/продажу линейно зависят от размера транзакции либо фиксированы
- Мы пытаемся оптимизировать математическое ожидание функции полезности капитала в момент времени H
- Мы не занимаем дополнительный капитал и инвестируем весь имеющийся капитал в инструменты из портфеля

Введём ещё несколько необходимых обозначений.

- $a(n)$ - родитель вершины n
- $x_i^n \geq 0$ - количество инструмента x_i в вершине n (после покупки или продажи)
- $z_i^n \geq 0$ - размер покупки инструмента x_i в вершине n
- $y_i^n \geq 0$ - размер продажи инструмента x_i в вершине n
- $W^s \geq 0$ - размер капитала в листовой вершине $s \in S$
- π^s - вероятность попасть в листовую вершину $s \in S$ из корневой вершины n_0. Эта вероятность рассчитывается по всем путям из в n_0 в s
- L^n - обязательства, которым должен удовлетворять капитал в вершине n, то есть $W^n \geq L^n$
- c - стоимость транзакции (покупки или продажи какого-либо инструмента) в процентах
- $h_i^{n_0}$ - начальное количество инструмента x_i в корневой вершине n_0
- P_i^n - цена инструмента x_i в вершине n
- $u(W)$ - функция полезности

Теперь мы можем поставить задачу оптимизации:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{s \in S} \pi^s u(W^s) \\
&x_i^{n_0} = h_i^{n_0} + z_i^{n_0} - y_i^{n_0} \quad \forall i \\
&x_i^n = x_i^{a(n)} + z_i^n - y_i^n \quad \forall i,\ \forall n \in T \\
&(1-c)\sum_{i=1}^{k} P_i^n y_i^n - (1+c)\sum_{i=1}^{k} P_i^n z_i^n = L^n, \quad \forall n \in T \cup \{n_0\} \\
&W^s = \sum_{i=1}^{k} P_i^s x_i^{a(s)} - L^s, \quad \forall s \in S \\
&x_i^n,\ y_i^n,\ z_i^n,\ W_i^s \geq 0 \quad \forall i
\end{aligned}
$$