Я. И. БЕЛОПОЛЬСКАЯ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

СПбГАСУ
1832

Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Я. И. БЕЛОПОЛЬСКАЯ

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2014

УДК 519.2

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор В. Б. Смирнова (СПбГАСУ); д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией Б. П. Харламов (ИПМАШ РАН).

Белопольская, Я. И.

Стохастическая оптимизация портфельных инвестиций: учеб. пособие / Я. И. Белопольская; СПбГАСУ. – СПб., 2014. – 88 с.

ISBN 978-5-9227-0544-8

Рассматриваются дискретные и непрерывные стохастические модели финансового рынка и связанные с ними структуры. Предполагается, что читатель знаком с теорией вероятностей и с начальным курсом теории стохастических уравнений и стохастической оптимизации.

Предназначено для студентов специальности «Прикладная математика».

Ил. 1. Табл. 1. Библиогр.: 4 назв.

Рекомендовано Редакционно-издательским советом СПбГАСУ в качестве учебного пособия.

ISBN 978-5-9227-0544-8

Введение

Портфельные инвестиции – основной источник средств для финансирования акций, выпускаемых предприятиями, крупными корпорациями и частными банками. Рост объема таких инвестиций свидетельствует об увеличении количества частных инвесторов. Посредниками при портфельных инвестициях в основном выступают инвестиционные банки – посреднические организации на рынке ценных бумаг, занимающиеся финансированием долгосрочных вложений.

Под портфельными инвестициями понимается формирование портфеля путем приобретения ценных бумаг и других активов. Портфель – совокупность собранных воедино различных инвестиционных ценностей, служащих инструментом для достижения конкретной инвестиционной цели вкладчика. В портфель могут входить ценные бумаги одного типа (акции) или различные инвестиционные ценности (акции, облигации, сберегательные и депозитные сертификаты, залоговые свидетельства, страховые полисы и др.).

Финансовые рынки в современных условиях (особенно зарождающиеся рынки, к числу которых относится и российский фондовый рынок) характеризуются нестационарными, стохастическими и кризисными явлениями различной природы. В таких условиях традиционная портфельная теория, созданная Марковицем, Шарпом, Тобином и Миллером, и классические методы финансовой математики, представляющие собой основанный на статистических методах механизм оптимизации формируемого инвестиционного портфеля по задаваемым критериям соотношения уровня его ожидаемой доходности и риска, характеризуемого дисперсией доходности, оказываются неадекватными и неспособными объяснить как поведение финансовых временных рядов, так и несоответствие практических рекомендаций финансовых аналитиков по размещению капитала в рисковые активы теоретическим предсказаниям, полученным в предположении о постоянных инвестиционных возможностях, т. е. постоянных процентных ставках, ожидаемых доходностях активов, волатильностях и корреляциях доходностей.

Кроме того, инвестирование неотделимо от потребления: инвесторы, как правило, извлекают полезность из промежуточного потребления в различные моменты времени, а не только из конечного капитала в конце инвестиционного периода. Однако инвестиционная стратегия требует динамической реструктуризации портфеля с учетом стохастической эволюции инвестиционной среды, что также не может быть учтено в рамках классической теории. Поэтому возникает необходимость развития методов моделирования оптимального размещения капитала в рисковые активы в условиях стохастического изменения их доходности с учетом стохастических параметров инвестиционной среды.

В предлагаемом пособии описаны простейшие модели дискретных и непрерывных финансовых рынков и методы построения оптимальных инвестиционных портфелей.

1. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

1.1. Одношаговые и многошаговые дискретные модели

Одношаговая модель финансового рынка будет считаться заданной, если заданы следующие ее элементы:

1. Начальный момент времени $t = 0$ и конечный (финальный) момент времени $t = 1$. Это единственные моменты времени, в которые происходит торговля или потребление.

2. Конечное выборочное пространство Ω, содержащее $K > 0$ элементов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$. Здесь каждая точка $\omega \in \Omega$ соответствует некоторому возможному состоянию рынка, которое неизвестно в момент $t = 0$, но становится известным инвесторам в момент $t = 1$.

3. Вероятностная мера P на Ω такая, что $P(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

4. Банковский счет $B = \{B_t;\ t = 0,1\}$, представляющий собой случайный процесс с двумя состояниями: $B_0 = 1$ и B_1, где B_1 – случайная величина. Динамика банковского счета отлична от динамики любого другого актива, поскольку предполагается, что в момент $t = 1$ цена $B_1(\omega)$ строго положительна для всех $\omega \in \Omega$. Обычно предполагается, что $B_1 \geq 1$, и в этом случае B_1 – это величина счета, на который в момент $t = 0$ был положен вклад в размере 1 р. При этом величина $r = B_1 - 1 \geq 0$ может интерпретироваться как процентная ставка. Для многих приложений естественно считать, что B_1 и r неслучайны.

5. Ценовой процесс $S = \{S_t : t = 0,1\}$, где $S_t = (S_1(t), \ldots, S_d(t))$ и $S_n(t)$ – цена актива с номером n в момент t, $d < \infty$. Во многих приложениях роль рисковых активов играют акции. В момент $t = 0$ цены представляют собой положительные скалярные величины, которые известны инвесторам, тогда как в момент $t = 1$ цены представляют собой неотрицательные случайные величины, значения которых становятся известными лишь в момент $t = 1$.

Построив описание рынка, на следующем шаге следует определить еще ряд важных объектов.

Торговая стратегия $h=(h_0,h_1,\ldots,h_d)$ (или портфель) описывает портфель инвестора, который изменяется при переходе от $t=0$ к $t=1$. В частности, h_0 – это число денежных единиц на банковском счете инвестора, и для $n\geq 1$ h_n – это число единиц актива с номером n (например, число акций некоторой компании). Вообще говоря, h_n могут принимать как положительные, так и отрицательные значения (отрицательные значения соответствуют заимствованию средств или короткой продаже). Бывают ситуации, когда на портфель накладываются дополнительные ограничения для того, чтобы портфель был допустимым (например, $h_n\geq 0$, что означает запрет коротких продаж рисковых активов).

Капиталом портфеля $V=\{V_t;\,t=0,1\}$ называют случайный процесс, описывающий стоимость портфеля в каждый момент t. Иначе говоря,

$$V_t=h_0B_0+\sum_{n=1}^{d}h_nS_n(t),\quad t=0,1.$$

Заметим, что капитал портфеля зависит от выбора торговой стратегии h и что V_1 – случайная величина.

Доход G – это случайная величина, описывающая общую прибыль (или потери) в результате используемой торговой стратегии при переходе от момента $t=0$ к моменту $t=1$. Поскольку величина $h_n(S_n(1)-S_n(0))$ представляет собой чистую прибыль за счет инвестиций в n-й актив (или в банковский счет), то доход задается выражением

$$G=h_0r+\sum_{n=1}^{d}h_n\Delta S_n,$$

где $\Delta S_n=S_n(1)-S_n(0)$. Простые вычисления показывают, что

$$V_1=V_0+G. \tag{1.1}$$

Таким образом, из уравнения (1.1) следует, что любое изменение капитала портфеля происходит за счет потери или прибыли от инвестиций, а не за счет дополнительных прибылей от внешних источников.

Поскольку нужно сравнивать цены различных активов, удобно нормализовать все цены так, чтобы величину банковского счета считать постоянной. При этом говорят, что банковский счет играет роль дисконта (numeraire). Нормализованный ценовой процесс обозначается $S_t^*=(S_1^*(t),\ldots,S_d^*(t))$, где

$$S_n^*(t)=\frac{S_n(t)}{B(t)},\quad n=1,\ldots,d,\quad t=0,1.$$

При этом дисконтированный капитал портфеля и дисконтированный доход задаются соотношениями

$$V_t^*=h_0+\sum_{n=1}^{d}h_nS_n^*(t),\quad t=0,1$$

и

$$G^*=\sum_{n=1}^{d}h_n\Delta S_n^*,$$

где $\Delta S_n^*=S_n^*(1)-S_n^*(0)$,

$$V_t^*=\frac{V_t}{B_t},\quad t=0,1, \tag{1.2}$$

$$V_t^*=V_0^*+G^*. \tag{1.3}$$

1.2. Арбитраж

Для того чтобы одношаговая модель была разумной с экономической точки зрения, она должна удовлетворять некоторым критериям. Например, модель будет бессмысленной, если в рамках модели возможно существование так называемой доминирующей стратегии.

Торговая стратегия h, приводящая к капиталу V_1, называется доминирующей, если существует другая торговая стратегия $\widetilde{h}$, такая, что $V_0 = \widetilde{V}_0$ и $V_1(\omega) > \widetilde{V}_1(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Иначе говоря, хотя обе стратегии имеют одинаковый начальный капитал, но доминирующая стратегия всегда оказывается более выгодной. Если h – портфель (торговая стратегия), начальный капитал которого $V_0 = 0$, и $V_1(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$, то портфель h будет доминирующим, поскольку соответствующая торговая стратегия совпадает со стратегией, стартующей с нулевого капитала и не содержащей никаких инвестиций.

Доминирующий портфель существует тогда и только тогда, когда существует портфель h такой, что $V_0 = 0$ и $V_1(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Предположение о существовании доминирующего портфеля неразумно с экономической точки зрения: инвестор, имеющий на старте нулевой капитал, не должен иметь гарантированной возможности закончить торги с положительным капиталом.

Существование доминирующего портфеля неудовлетворительно и с другой точки зрения: оно приводит к нелогичным ценам.

Как будет показано ниже, часто полезно интерпретировать $V_1(\omega)$ как выплаты по контракту или платежному обязательству в момент $t = 1$ в состоянии ω. При этом естественно интерпретировать V_0 как цену этого платежного обязательства в момент $t = 0$. Однако, если торговая стратегия h доминирует над $\widetilde{h}$, то платежные обязательства V и $\widetilde{V}$ имеют одинаковую цену, хотя выплаты по первому из них выше, чем выплаты по второму в каждом состоянии ω. Это противоречит тому, что происходит в реальном мире.

Цены платежных обязательств являются согласованными, если существует линейная ценовая мера, т. е. неотрицательный вектор $\pi = (\pi(\omega_1), \ldots, \pi(\omega_K))$ такой, что для любого портфеля h справедливо равенство

$$V_0^* = \sum_{\omega} \pi(\omega) V_1^*(\omega) = \sum_{\omega} \pi(\omega) \frac{V_1(\omega)}{B_1(\omega)}.$$

В этом случае нелогичные цены, порождаемые доминирующей стратегией, отсутствуют, так как каждому платежному обязательству соответствует его собственная цена, и цена платежного обязательства тем выше, чем выше выплаты по нему.

Если такая мера π существует, то, по определению, справедливо равенство

$$h_0 + \sum_{n=1}^{d} h_n S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega)[h_0 + \sum_{n=1}^{d} h_n S_n^*(1)(\omega)]. \tag{1.4}$$

Выбирая $h_1 = \ldots = h_d = 0$, можно показать, что справедливо равенство $\pi(\omega_1) + \ldots + \pi(\omega_d) = 1$, из которого следует, что π можно рассматривать как вероятностную меру на выборочном пространстве Ω. Выбирая для любого $i \in \{1, \ldots, d\}$ торговую стратегию с $h_n = 0$ для всех $n \neq i$, можно показать, что отсюда следует соотношение

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega} \pi(\omega) S_n^*(1)(\omega). \tag{1.5}$$

Наоборот, рассмотрим вероятностную меру π на Ω, удовлетворяющую (1.5). Тогда справедливо равенство (1.4), и мы приходим к следующему выводу:

вектор π соответствует линейной ценовой мере в том и только в том случае, если он порождает вероятностную меру на Ω, удовлетворяющую (1.5).

Поскольку линейная ценовая мера представляет собой вероятностную меру, то соотношение (1.5) означает, что начальная цена актива представляет собой ожидаемую (относительно меры π) величину дисконтированной финальной стоимости актива.

1.3. Риск-нейтральные меры

Вероятностная мера Q на $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ называется риск-нейтральной мерой, если выполнены следующие условия:

а) $Q(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$;

б) $E^Q[\Delta S_n^*] = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$

Здесь $E^Q[X]$ обозначает математическое ожидание случайной величины X по мере Q. Заметим, что

$$E^Q[\Delta S_n^*] = E^Q[S_n^*(1) - S_n^*(0)] = E^Q[S_n^*(1)] - S_n^*(0),$$

так что $E^Q[\Delta S_n^*] = 0$ эквивалентно соотношению

$$E^Q[S_n^*(1)] = S_n^*(0), \quad n = 1,2,\dots,d. \tag{1.6}$$

Полученное выражение совпадает с (1.5) и показывает, что по мере Q ожидаемое значение дисконтированной цены любого рискового актива равно его начальной цене. Таким образом, риск-нейтральная вероятностная мера Q совпадает с линейной ценовой мерой, имеющей строго положительную массу в каждой точке. Сформулируем теперь очень важный результат:

рынок является безарбитражным тогда и только тогда, когда существует риск-нейтральная вероятностная мера *Q*.

Перед тем, как приступить к доказательству этого результата, рассмотрим ряд примеров, позволяющих приобрести некоторую интуицию.

Пример 1.1. Пусть $K = 2$, $d = 1$, $S_0 = 5$, $r = \frac{1}{9}$, $S_1(\omega_1) = \frac{20}{3}$ и $S_1(\omega_2) = \frac{40}{9}$. Тогда $B_1 = 1 + r = \frac{10}{9}$, $S_1^*(\omega_1) = 6$ и $S_1^*(\omega_2) = 4$. Для любой торговой стратегии h мы имеем

$$V_0 = V_0^* = h_0 + 5h_1,$$

$$V_1 = \left(\frac{10}{9}\right)h_0 + h_1 S_1, \quad V_1^* = h_0 + h_1 S_1^*,$$

$$G = \left(\frac{1}{9}\right)h_0 + h_1(S_1 - 5), \quad G^* = h_1(S_1^* - 5).$$

Таким образом, в состоянии ω_1

$$V_1 = \left(\frac{10}{9}\right)h_0 + \left(\frac{10}{3}\right)h_1, \quad V_1^* = h_0 + 6h_1,$$

$$G = \left(\frac{1}{9}\right)h_0 + \left(\frac{5}{3}\right)h_1, \quad G^* = h_1,$$

тогда как в состоянии ω_2

$$V_1 = \left(\frac{10}{9}\right)h_0 + \left(\frac{40}{9}\right)h_1, \quad V_1^* = h_0 + 4h_1,$$

$$G = \left(\frac{1}{9}\right)h_0 + \left(\frac{5}{9}\right)h_1, \quad G^* = -h_1.$$

Нетрудно проверить, что уравнения (1.2) и (1.3) справедливы при обоих значениях $\omega \in \Omega$.

Теперь мы хотим найти числа $Q(\omega_1)$ и $Q(\omega_2)$ так, чтобы выполнялось уравнение (1.5), т. е.

$$5 = 6Q(\omega_1) + 4Q(\omega_2).$$

Поскольку Q должна быть вероятностной мерой, то мы получаем соотношение

$$1 = Q(\omega_1) + Q(\omega_2).$$

Нетрудно видеть, что $Q(\omega_1) = Q(\omega_2) = \frac{1}{2}$ удовлетворяет обоим уравнениям.

Пример 1.2. Изменим в условиях примера 1.1 число K элементов вероятностного пространства, положив $K = 3$, и пусть

$$S_1(\omega_3) = \frac{30}{9}, \quad S_1^*(\omega_3) = 3.$$

Повторяя рассуждения, проведенные при рассмотрении примера 1.1, получим следующие уравнения:

$$5 = 6Q(\omega_1) + 4Q(\omega_2) + 3Q(\omega_3),$$

$$1 = Q(\omega_1) + Q(\omega_2) + Q(\omega_3).$$

Заметим, что мы получили систему двух уравнений с тремя неизвестными, так что решение этой системы можно представить в виде

$$Q(\omega_2) = 2 - 3Q(\omega_1), \quad Q(\omega_2) = -1 + 2Q(\omega_1).$$

Наконец, мы должны потребовать, чтобы $Q(\omega_i) > 0$ для всех $\omega_i \in \Omega$. Используя два предыдущих уравнения, получим три неравенства для $Q(\omega_1)$, включая неравенство $Q(\omega_1) > 0$. При этом $Q(\omega_2) > 0$ тогда и только тогда, когда $Q(\omega_1) < \frac{2}{3}$. Аналогично $Q(\omega_3) > 0$ тогда и только тогда, когда $Q(\omega_1) > \frac{1}{2}$. Таким образом, решение будет строго положительной вероятностной мерой тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2} < Q(\omega_1) < \frac{2}{3}$. Другими словами, $Q = (\lambda, \quad 2 - 3\lambda, \quad -1 + 2\lambda)$ – это риск-нейтральная вероятностная мера для каждого значения скаляра l, удовлетворяющего оценкам $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{2}{3}$, и при этом рынок будет безарбитражным.

Пример 1.3. Пусть модель содержит два рисковых актива и цена задается соотношениями

n	$S_n(0)$	$S^*_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	60/9	60/9	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

Отсюда следует, что дисконтированная цена имеет вид

n	$S_n(0)$	$S^*_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

Рассмотрим уравнения

$$5 = 6Q(\omega_1) + 6Q(\omega_2) + 4Q(\omega_3),$$

$$10 = 12Q(\omega_1) + 8Q(\omega_2) + 8Q(\omega_3),$$

$$1 = Q(\omega_1) + Q(\omega_2) + Q(\omega_3).$$

Существует единственное решение этой системы уравнений, имеющее вид

$$Q(\omega_1) = Q(\omega_3) = \frac{1}{2}, \quad Q(\omega_2) = 0.$$

Оно представляет собой линейную ценовую меру, однако не удовлетворяет условию строгой положительности. Таким образом, должен существовать арбитражный портфель. Мы построим этот портфель в следующей главе.

2. ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

2.1. Оптимальные портфели и динамическое программирование. Одношаговая модель

Рассмотрим задачу о построении оптимального портфеля (построении оптимальной торговой стратегии) за один шаг с точки зрения некоторого критерия качества.

В качестве критерия качества выберем так называемую ожидаемую полезность. В частности, пусть $u : R \times \Omega \to R$ – выпуклая, дифференцируемая и строго возрастающая функция при каждом $\omega \in \Omega$. Если V – капитал портфеля в момент $t = 1$ и ω – состояние, то $u(V, \omega)$ задает полезность капитала V. Таким образом, мерой качества будет служить ожидаемая полезность финального капитала, т. е.

$$Eu(V_1) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) u(V_1(\omega), \omega).$$

Заметим, что функция полезности может явно зависеть как от финального капитала V, так и от состояния ω. Однако в приложениях часто достаточно считать, что u зависит лишь от финального капитала, и в этом случае она оказывается выпуклой строго возрастающей функцией одной переменной.

Пусть $H = R^{d+1}$ обозначает множество всех допустимых портфелей, т. е. линейное пространство векторов вида $h = (h_0, h_1, \dots, h_d)$. Пусть v – заданная скалярная величина, представляющая начальный капитал. Сформулируем задачу построения оптимального портфеля:

$$\text{максимизировать } E[u(V_1)] \quad \text{по всем} \quad h \in H$$

$$\text{при условии, что } V_0 = v. \tag{2.1}$$

Поскольку $V_1 = B_1 V_1^*$ и $V_1^* = V_0^* + G^*$, то (2.1) можно переписать в следующем виде:

$$\text{максимизировать } E[u(B_1(v + h_1 \Delta S_1^* + \dots + h_d \Delta S_d^*))]. \tag{2.2}$$

Заметим, что если существует арбитражная возможность, то решения задачи (2.1) не существует. Иначе говоря, если $\widetilde{h}$ – решение этой задачи и портфель h – арбитражный, то для портфеля $\widehat{h} = \widetilde{h} + h$ получаем

$$v + \sum_{n=1}^{d} H_n \Delta S_n^* = v + \sum_{n=1}^{d} \widetilde{h}_n \Delta S_n^* + \sum_{n=1}^{d} h_n \Delta S_n^* \ge v + \sum_{n=1}^{d} \widetilde{h}_n \Delta S_n^*,$$

где неравенство вытекает из арбитражности портфеля h. На самом деле существует хотя бы одна точка $\omega \in \Omega$, для которой выполняется строгое неравенство. Поскольку u – строго возрастающая функция и $P(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$, то отсюда вытекает, что целевая функция в (2.2) для портфеля $\widehat{h}$ строго больше, чем для портфеля $\widetilde{h}$. Но это противоречит тому, что портфель $\widetilde{h}$ представляет собой оптимальное решение (2.2). Таким образом, мы приходим к следующему утверждению:

если существует решение задачи оптимизации портфеля (2.1) или (2.2), то рынок должен быть безарбитражным.

Другими словами, это утверждение можно перефразировать следующим образом: если существует оптимальное решение задачи (2.1) или (2.2), то существует риск-нейтральная вероятностная мера. При этом существует явная связь между оптимальным решением и риск-нейтральной вероятностной мерой. Чтобы найти эту связь, перепишем целевую функцию из (2.2) в виде

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) u(B_1(\omega)[v + h_1 \Delta S_1^*(\omega) + \dots + h_d \Delta S_d^*(\omega)], \omega)$$

и воспользуемся необходимым условием экстремума для целевой функции, из которого следует, что

$$0 = \frac{\partial E[u(B_1(v + h_1 \Delta S_1^* + \dots + h_d \Delta S_d^*))]}{\partial h_n} =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) u'(B_1(\omega)[v + h_1 \Delta S_1^*(\omega) + \dots + h_d \Delta S_d^*(\omega)], \omega) B_1(\omega) \Delta S_n^* =$$

$$= E[B_1 u'(V_1) \Delta S_d^*], \quad n = 1, \dots, d, \tag{2.3}$$

где u' обозначает частную производную функции u по первому аргументу. Таким образом, если (h,V) – решение (2.2), то (h,V) удовлетворяет системе d уравнений

$$0 = E^{Q}[\Delta S_n^*] = \sum_{\omega\in\Omega} Q(\omega)\Delta S_n^*(\omega), \quad n = 1,\ldots,d. \tag{2.4}$$

Сопоставляя (2.4) и (2.3), заметим, что, положив

$Q(\omega) = P(\omega)B_1(\omega)u'(V(\omega),\omega),$

получим меру, удовлетворяющую (2.4). При этом $Q(\omega) > 0$, поскольку u – строго возрастающая функция. Однако сумма $Q_1 + \ldots + Q_d$ не обязательно равна 1, так что Q будет вероятностной мерой только после соответствующей нормировки. При этом справедливо следующее утверждение:

если (h,v) – решение задачи оптимизации портфеля (2.1) или (2.2), то мера Q вида

$$Q(\omega) = \frac{P(\omega)B_1(\omega)u'(V_1(\omega),\omega)}{E[B_1 u'(V_1)]}, \quad \omega\in\Omega \tag{2.5}$$

является риск-нейтральной мерой.

В случае, когда $B_1 = 1 + r$ – константа, мы можем получить из (2.5) соотношение

$$L(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \frac{u'(V_1(\omega),\omega)}{E[u'(V_1)]}.$$

Другими словами, если процентная ставка r не случайна, плотность в пространстве состояний пропорциональна маргинальной полезности финального капитала.

Можно ли сформулировать обратное утверждение? А именно: верно ли, что из существования мартингальной меры Q следует, что задача (2.2) об оптимальном портфеле имеет решение? Вообще говоря, это не так, поскольку могут существовать такие u и v, для которых оптимальное решение h не существует. С другой стороны, всегда можно найти такие u и v, чтобы решение задачи (2.2) существовало.

Говорят, что модель разумна, если существует такая выпуклая, дифференцируемая и строго возрастающая при каждом $\omega\in\Omega$ функöèÿ $u: R\times\Omega \to R$ и такой начальный капитал v, что соответствующая задача оптимизации (2.2) имеет оптимальное решение h.

Можно сформулировать следующий принцип построения разумной модели рынка: модель рынка является разумной тогда и только тогда, когда существует риск-нейтральная мера Q.

Как следует из (2.5), для того чтобы проверить справедливость этого принципа, достаточно предположить существование риск-нейтральной вероятностной меры, разумно подобрать u и v и затем доказать разрешимость задачи (2.2). Выберем u так, чтобы выполнялось равенство

$$u(V,\omega) = V\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)B_1(\omega)}, \tag{2.6}$$

и пусть величина v произвольна. Тогда для любого $h = (h_1,\ldots,h_d)$ получим

$$E[u(B_1(v + h_1\Delta S_1^* + \ldots + h_d\Delta S_d^*),\omega)] =$$

$$= \sum P(\omega)B_1(\omega)(v + h_1\Delta S_1^* + \ldots + h_d\Delta S_d^*)\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)B_1(\omega)} =$$

$$= \sum Q(\omega)(v + h_1\Delta S_1^* + \ldots + h_d\Delta S_d^*) =$$

$$= v + h_1 E^{Q}[\Delta S_1^*] + \ldots + h_d E^{Q}[\Delta S_d^*] = v,$$

так что каждому вектору h соответствует одно и то же значение целевой функции. Эквивалентно каждый портфель с начальным капиталом v порождает одну и ту же целевую функцию в (2.2), что означает, что все такие стратегии оптимальны. Таким образом, этот разумный выбор функции полезности приводит к разумной модели рынка.

Задача построения оптимального портфеля (2.2) представляет собой стандартную задачу теории оптимизации, и, следовательно, ее можно решать, применяя стандартную технику теории оптимизации.

Один из способов решения этой задачи состоит в решении системы уравнений с d неизвестными, соответствующей необходимым условиям экстремума. К сожалению, как видно из приведенного ниже примера, при этом мы сталкиваемся с необходимостью решать системы нелинейных уравнений, что представляет собой трудную задачу.

Пример 2.1. Пусть $d = 2$, $K = 3$, $r = \dfrac{1}{9}$ и дисконтированный ценовой процесс имеет вид

n	$S_n(0)$	$S^*_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	6	6	8	4
2	10	13	9	8

Заметим, что существует единственная риск-нейтральная вероятностная мера, поскольку $Q = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ представляет собой единственное решение следующей системы уравнений:

$$6 = 6Q(\omega_1) + 8Q(\omega_3) + 4Q(\omega_3),$$

$$10 = 13Q(\omega_1) + 9Q(\omega_3) + 8Q(\omega_3),$$

$$1 = Q(\omega_1) + Q(\omega_3) + Q(\omega_3).$$

Для экспоненциальной функции полезности вида $u(V) = -\exp\{-V\}$ функция $u'(V) = \exp\{-V\}$. Следовательно, необходимые условия (2.4) имеют вид

$$0 = P(\omega_1)\exp\{-(10/9)(v + 0h_1 + 3h_2)\}(10/9)(0) +$$

$$+ P(\omega_2)\exp\{-(10/9)(v + 2h_1 - h_2)\}(10/9)(2) +$$

$$+ P(\omega_3)\exp\{-(10/9)(v - 2h_1 - 2h_2)\}(10/9)(-2),$$

$$0 = P(\omega_1)\exp\{-(10/9)(v + 0h_1 + 3h_2)\}(10/9)(3) +$$

$$+ P(\omega_2)\exp\{-(10/9)(v + 2h_1 - h_2)\}(10/9)(-1) +$$

$$+ P(\omega_3)\exp\{-(10/9)(v - 2h_1 - 2h_2)\}(10/9)(-2).$$

Отсюда могут быть найдены значения h_1 и h_2, однако это не так уж легко.

2.2. Риск-нейтральный подход

Как было показано при рассмотрении примера 2.1, решение задачи оптимизации (2.1) может приводить к серьезным вычислительным проблемам. Опишем альтернативный подход, основанный на использовании мартингальной меры, который оказывается гораздо эффективней. Идея этого подхода основана на простом наблюдении, состоящем в том, что целевую функцию $h \to E[u(V_1)]$ в (2.1) можно рассматривать как композицию двух функций

$$E[u(B_1(v + \sum h_n \Delta S^*_n))] = E[u(V_1)\,|_{V_1 = B_1(v + \sum h_n \Delta S^*_n)}].$$

При этом первая функция $h \mapsto V_1$ отображает торговые стратегии в множество случайных величин, задающих капитал портфеля в момент $t = 1$. Вторая функция $V_1 \mapsto E[u(V_1)]$ отображает эти случайные величины в числа на вещественной прямой. Вычислительный алгоритм, соответствующий этой структуре, состоит из двух шагов. Во-первых, нужно найти оптимальную случайную величину V_1, т. е. величину, максимизирующую $E[u(V_1)]$ по подмножеству допустимых случайных величин. Затем нужно вычислить торговую стратегию h, порождающую эту величину V_1, т. е. найти торговую стратегию, реплицирующую платежное обязательство V_1. Второй шаг оказывается простым. Он в точности совпадает с процедурой вычисления реплицирующего портфеля для достижимого платежного обязательства. Если на первом шаге было правильно выбрано множество случайных величин, которому принадлежит капитал портфеля, то портфель, реплицирующий V_1, соответствует портфелю, имеющему при $t = 0$ цену v, соответствующую начальной стоимости портфеля.

Шаг 1 требует большего искусства и связан с теорией оптимизации. Он будет успешен, если нам удастся правильно и разумно определить подмножество допустимых случайных величин. Если рынок полный, то это подмножество имеет вид

$$U_v = \{V \in R^K : E^Q[VB^{-1}] = v\}. \quad (2.7)$$

В этом можно убедиться, заметив, что для произвольного портфеля h такого, что $V_0 = v$, из риск-нейтральности следует, что $E^Q[u\left(\frac{V_1}{B_1}\right)] = v$. При этом для произвольного платежного обязательства $W \in U_v$ в силу риск-нейтральности существует портфель h такой, что $V_0 = v$ и $V_1 = W$. В контексте задачи оптимизации портфеля подмножество U_v называется множеством достижимых значений капитала.

На первом шаге в рамках этого подхода мы должны решить вспомогательную задачу максимизации

$$\text{найти} \quad \max E[u(W)] \quad \text{по} \quad \text{всем} \quad W \in U_v. \quad (2.8)$$

Если рынок полный, то эту задачу можно решить с помощью метода множителей Лагранжа. В силу (2.7) эта задача эквивалентна следующей задаче:

$$\text{найти} \quad \text{максимум} \quad E[u(W) - \lambda E^Q[WB_1^{-1}], \quad (2.9)$$

где множитель Лагранжа λ выбран так, чтобы решение (2.9) удовлетворяло условию

$$E^Q[WB_1^{-1}] = v. \quad (2.10)$$

Обозначим $L = QP^{-1}$, тогда целевую функцию в (2.9) можно переписать в виде

$$E[u(W) - \lambda E[WB_1^{-1}]] = E[u(W) - \lambda WB_1^{-1}] =$$

$$= \sum_{\omega} P(\omega)[u(W(\omega)) - \lambda L(\omega) W(\omega) B_1^{-1}(\omega)].$$

Если W – точка максимума этого выражения, то должны быть выполнены необходимые условия экстремума, в силу которых справедливо равенство

$$u'(W(\omega)) = \lambda L(\omega) B_1^{-1}(\omega) \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad \omega \in \Omega. \quad (2.11)$$

Заметим, что это уравнение в точности совпадает с уравнением (2.6). Действительно, поскольку $W = V_1$, то можно показать, что $\lambda = E[B_1^{-1} u'(W)]$, где W – точка экстремума. Для того чтобы вычислить W, нужно решить предыдущее уравнение (2.11) относительно $W(\omega)$, откуда

$$W(\omega) = g'(\lambda L(\omega) B_1^{-1}(\omega)), \quad (2.12)$$

где g' – функция, обратная u'.

Таким образом (2.12) задает точку экстремума для (2.8), если λ выбрано соответствующим образом. Определим λ как величину, для которой справедливо (2.11), если в качестве W выбрано выражение (2.12), т. е.

$$E^Q[g'(\lambda L B_1^{-1}) B_1^{-1}] = v. \quad (2.13)$$

Обратная функция g' – это убывающая функция, и область ее значений содержит $(0, \infty)$, так что, как правило, λ существует для $v > 0$.

Пример 2.2. Пусть $u(V) = -\exp(-V)$, так что $u'(V) = \exp(-V)$. При этом $u'(V) = v$ тогда и только тогда, когда $V = -\ln v$, так что $I(v) = -\ln v$. Следовательно, оптимальное решение задачи (2.9) имеет вид

$$W = -\ln\left(\frac{\lambda L}{B_1}\right) = -\ln\lambda - \ln\left(\frac{L}{B_1}\right),$$

и (2.13) приводит к соотношению

$$v = -E^Q[B_1^{-1}\ln\left(\frac{\lambda L}{B_1}\right) = -\ln\lambda E^Q[B_1^{-1}] - E^Q[\frac{\ln\left(\frac{L}{B_1}\right)}{B_1}].$$

При этом

$$\lambda = \exp\{\frac{-v - E^Q[B_1^{-1}\ln\left(\frac{L}{B_1}\right)]}{E^Q[B_1^{-1}]}\},$$

так что

$$W = \frac{v + E^Q[B_1^{-1}\ln\left(\frac{L}{B_1}\right)]}{E^Q[B_1^{-1}]} - \ln\left(\frac{L}{B_1}\right).$$

Подставляя полученное выражение в $\exp(-W)$, получим

$$u(W) = \exp\{\frac{v + \ln\left(\frac{L}{B_1}\right)E^Q[B_1^{-1}] - E^Q[B_1^{-1}\ln\left(\frac{L}{B_1}\right)]}{E^Q[B_1^{-1}]}\} = -\lambda\frac{L}{B_1},$$

так что оптимальное значение целевой функции в (2.8) имеет вид

$$Eu(W) = -\lambda E\left[\frac{L}{B_1}\right] = -\lambda E^Q[B_1^{-1}].$$

Положим в примерах 2.1 и 2.2 $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $P(\omega_2) = P(\omega_3) = \frac{1}{4}$, так что плотность L имеет вид $L(\omega_1) = \frac{2}{3}$, $L(\omega_2) = L(\omega_3) = \frac{4}{3}$.

Вычислим при $r = \frac{1}{9}$ и $B_1 = \frac{10}{9}$ среднее:

$$E^Q[\ln(LB_1^{-1})] = \left(\frac{1}{3}\right)[\ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}\right) + 2\ln\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{10}\right)] = -0{,}04873.$$

При этом оптимальный достижимый капитал имеет вид

$$W = v(1+r) + E^Q[\ln(LB_1^{-1})] - \ln(LB_1^{-1}) =$$

$$= \begin{cases} v\left(\frac{10}{9}\right) + 0{,}46209, & \text{если} \quad \omega = \omega_1, \\ v\left(\frac{10}{9}\right) - 0{,}23105, & \text{если} \quad \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Заметим, что, как и требовалось, $E^Q[WB_1^{-1}] = v$. При этом $\lambda = \exp\{-\frac{10}{9}v + 0{,}04873\}$, так что оптимальное значение целевой функции имеет вид

$$Eu(W) = -\lambda E^Q[B_1^{-1}] = \frac{9}{10}\lambda.$$

2.3. Инвестиции с потреблением

Процесс потребления опишем как пару $c = (c_0, c_1)$, где c_0 – неотрицательное число, а c_1 – неотрицательная случайная величина. Инвестиционный план с потреблением зададим как пару (c, h), где c – процесс потребления, а h – торговая стратегия. Инвестиционный план с потреблением называется допустимым, если $c_0 + V_0 = v$ – деньги, имеющиеся в наличии в момент $t = 0$, и $c_1 = V_1$. Мы всегда предполагаем, что $v \geq 0$.

Величина c_t интерпретируется как сумма, выделяемая инвестором на потребление в момент t. Поскольку c_0 соответствует потреблению в момент $t = 0$ и $V_0 = h_0 + \sum h_n S_n(0)$ – капитал, инвестируемый в момент $t = 0$, то капитал v, доступный в момент $t = 0$, должен быть не меньше $c_0 + V_0$. Поскольку $V_1 = h_0 B_1 + \sum h_n S_n(1)$ – сумма денег, доступных в момент $t = 1$, то должна иметь место оценка $c_1 \leq V_1$.

Естественно, возникает вопрос, как проверить, будет ли заданный план (c, h) допустимым при заданном начальном фонде v. Конечно, можно вычислить V_t и затем проверить, выполняются ли соотношения $c_0 + V_0 = v$ и $c_1 = V_1$. Заметим, что если (c, h) допустим, то c_1 – это достижимое платежное обязательство и

$$E^Q[c_1 B_1^{-1}] = E^Q[V_1 B_1^{-1}] = V_0$$

для любой риск-нейтральной меры Q, и в этом случае

$$E^Q[c_0 + c_1 B_1^{-1}] = v. \qquad (2.14)$$

Более трудным оказывается следующий вопрос. Пусть заданы начальный капитал $v \geq 0$ и некоторый процесс потребления c, как узнать, существует ли торговая стратегия h такая, что пара (c, h) допустима? Конечно, если c_1 – достижимое платежное обязательство, то существует некоторая торговая стратегия h такая, что $c_1 = V_1 = h_0 B_1 + \sum h_n S_n$. Если, кроме того, выполняется (2.14) для некоторой меры Q, то $c_0 + V_0 = v$, и в этом случае пара (c, h) допустима. Заметим, что $E^Q[c_0 + c_1 B_1^{-1}]$ является константой для всех риск-нейтральных вероятностных мер тогда и только тогда, когда c_1 достижимо.

Итак, пусть фиксированы начальный капитал $v \geq 0$ и процесс потребления c. Тогда существует торговая стратегия h такая, что план инвестиций с потреблением (c, h) допустим тогда и только тогда, когда

$$c_0 + E^Q[c_1 B_1^{-1}] = v \tag{2.15}$$

для любой риск-нейтральной вероятностной меры Q.

Пример 2.1 (Продолжение примера на с. 18). Рассматриваемая модель полна, и $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Для того чтобы процесс потребления (c_0, c_1) был частью допустимого плана инвестиций с потреблением, нужно, чтобы $v \geq c_0 \geq 0$ и $c_1 \geq 0$. Кроме того в силу (2.15) мы получим:

$$v - c_0 = \frac{9}{10} E^Q c_1 = \frac{3}{10}[c_1(\omega_1) + c_1(\omega_2) + c_1(\omega_3)].$$

Предположим, что инвестор имеет начальный капитал v и хотел бы выбрать допустимый план инвестиций с потреблением так, чтобы максимизировать математическое ожидание полезности потребления в оба момента $t = 0$ и $t = 1$. Мы предполагаем, что функция полезности выпуклая, дифференцируемая и строго возрастающая. Математическая формулировка этой задачи такова:

$$\text{максимизировать } u(c_0) + E[u(c_1)]$$

$$\text{при условиях } c_0 + h_0 B_0 + \sum\nolimits_{n=1}^{N} h_n S_n(0) = v,$$

$$c_1 - h_0 B_0 - \sum_{n=1}^{N} h_n S_n(1) = 0, \tag{2.16}$$

$$c_0 \geq 0, \quad c_1 \geq 0, \quad h \in R^{N+1}.$$

Так же, как и задачу об оптимальном портфеле, рассматриваемую сейчас задачу можно решать либо стандартными методами теории оптимизации, либо с помощью риск-нейтрального подхода.

Для того чтобы проиллюстрировать риск-нейтральный подход, вернемся к примеру 2.1 на с. 18.

Пример 2.1 (продолжение). Предположим, что $u(c) = \ln(c)$. Поскольку $\ln(c) \to -\infty$ при $c \to 0$, то можно отказаться от ограничений, связанных с неотрицательностью в (2.16). При этом задача оптимизации приобретает вид

$$\text{максимизировать } \ln(c_0) + \frac{1}{2}\ln(c_1(\omega_1)) + \frac{1}{4}\ln(c_1(\omega_2)) + \frac{1}{4}\ln(c_1(\omega_3))$$

$$\begin{aligned} &\text{при ограничениях } c_0 = v - h_0 - 6h_1 - 10h_2, \\ &c_1(\omega_1) = \frac{10}{9}h_0 + \frac{60}{9}h_1 + \frac{130}{9}h_2, \\ &c_1(\omega_2) = \frac{10}{9}h_0 + \frac{80}{9}h_1 + \frac{90}{9}h_2, \\ &c_1(\omega_3) = \frac{10}{9}h_0 + \frac{40}{9}h_1 + \frac{80}{9}h_2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

В результате приходим к следующей задаче:
максимизировать

$$\ln(c_0 + v - h_0 - 6h_1 - 10h_2) + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{10}{9}h_0 + \frac{60}{9}h_1 + \frac{130}{9}h_2\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{10}{9}h_0 + \frac{80}{9}h_1 + \frac{90}{9}h_2\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{10}{9}h_0 + \frac{40}{9}h_1 + \frac{80}{9}h_2\right)\right).$$

Вычисляя частные производные по h_0, h_1, h_2 и приравнивая полученные выражения нулю, получим необходимые условия максимума в виде

$$\frac{-1}{c_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{c_1(\omega_1)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{10}{9}\frac{1}{c_1(\omega_2)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{10}{9}\frac{1}{c_1(\omega_3)} = 0,$$

$$\frac{-6}{c_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{60}{9}\cdot\frac{1}{c_1(\omega_1)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{80}{9}\frac{1}{c_1(\omega_2)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{40}{9}\frac{1}{c_1(\omega_3)} = 0,$$

$$\frac{10}{c_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{130}{9}\cdot\frac{1}{c_1(\omega_1)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{90}{9}\frac{1}{c_1(\omega_2)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{80}{9}\frac{1}{c_1(\omega_3)} = 0.$$

Воспользовавшись соотношениями (2.17), получим три уравнения с тремя неизвестными h_0, h_1, h_2, решая которые, найдем оптимальный портфель, а затем и оптимальный процесс потребления из соотношений (2.17).

2.4. Многошаговая модель

Рассмотрим многошаговое обобщение задачи потребления-инвестирования. Начнем с исследования базовой задачи построения оптимального портфеля, цель которой заключается в максимизации математического ожидания капитала самофинансируемого портфеля в момент T.

Пусть далее определена функция полезности $u: R\times\Omega \to R$, представляющая собой полезность капитала v в момент T, когда $\omega\in\Omega$

описывает состояние рынка. Предполагается, что $v \to u(v,\omega)$ – дифференцируемая, выпуклая и строго возрастающая функция для каждого $\omega\in\Omega$. Обычно u не зависит от ω.

Пусть задан исходный капитал v. Инвестор может выбрать какую-нибудь самофинансируемую стратегию, согласованную с этим начальным капиталом. Мерой качества такой стратегии может быть математическое ожидание конечного капитала

$$E[u(V_T)] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)u(V_T(\omega),\omega).$$

Поэтому инвестор заинтересован в решении следующей задачи построения оптимального портфеля:

максимизировать $E[u(V_T)]$ при ограничениях

$$V_0 = v, \quad h\in H, \tag{2.18}$$

где H – множество самофинансируемых портфелей. Принимая во внимание, что торговые стратегии должны быть предсказуемы, мы видим, что задача (2.18) включает три типа ограничений. Поскольку $V_T = B_T V_T^*$ и $V_T^* = V_0^* + G_T^*$, то задача (2.18) эквивалентна задаче

максимизировать $E[u(B_T\{v + G_T^*\})]$

$$\text{при условии } h\in H_p, \tag{2.19}$$

где H_p – множество предсказуемых процессов со значениями в R^d. Так, если $\hat{h}_1,\dots,\hat{h}_d$ – решение (2.19), то несложно выбрать $\hat{h}_0$ так, чтобы $\hat{h} = (\hat{h}_0,\hat{h}_1,\dots,\hat{h}_d)$ была самофинансируемой стратегией, $V_0 = v$ и $\hat{h}$ определяла оптимальное решение (2.18).

Задачу (2.19) можно решить несколькими методами. Один из них – использование стандартного анализа и теории оптимизации с учетом предсказуемости ограничений.

Пример 2.3. Пусть $T = 2$, $K = 4$, $d = 1$, процентная ставка r постоянна, $0 \le r < 0{,}125$ и фильтрация порождена рисковым активом. Пусть ценовой процесс и вероятностная мера имеют вид

ω	$S_0(\omega)$	$S^*_1(\omega)$	$S^*_2(\omega)$	$P(\omega)$
ω_1	5	8	9	1/4
ω_2	5	8	6	1/4
ω_3	5	4	6	1/4
ω_4	5	4	3	1/4

В этом примере пространство Ω состоит из четырех точек: $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$.

В момент $t = 0$ вся информация, которую можно наблюдать, состоит в том, что $S_0 = 5$ и инвестор ничего не знает о реальном состоянии, так что $F_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Однако в момент $t = 1$ инвестор уже наблюдает два состояния: $S_1 = 8$ или $S_1 = 4$. Если $S_1 = 8$, то реальное состояние должно быть либо ω_1, либо ω_2, если же $S_1 = 4$, то реальное состояние должно быть либо ω_3, либо ω_4. Таким образом, в момент $t = 1$ возникает разбиение $\{\omega_1, \omega_2\} \cup \{\omega_3, \omega_4\}$ пространства Ω, и соответствующая алгебра F_1 имеет вид

$$F_1 = \{\varnothing, \Omega\ \{\omega_1, \omega_2\} \cup \{\omega_3, \omega_4\}\}.$$

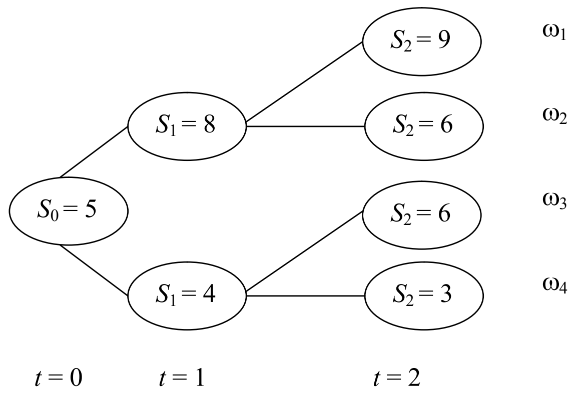
В момент $t = 2$ инвестор наблюдает S_2 и определяет реальное состояние ω (при этом отличить ω_2 от ω_3 можно, наблюдая S_1). Таким образом, на этом этапе возникает разбиение пространства Ω вида $\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4$ и соответствующая алгебра F_2 состоит из всех подмножеств Ω. Возникший при этом поток информации может быть изображен в виде дерева (рисунок).

Заметим при этом, что случайный процесс адаптирован к этой фильтрации.

Перейдем к описанию эволюции капитала рассматриваемого портфеля. Напомним, что

$$V(t) = \begin{cases} h_0(1)B(0) + \sum_{n=1}^{d} h_n(1)S_n(0), & t = 0, \\ h_0(t)B(t) + \sum_{n=1}^{d} h_n(t)S_n(t), & t \ge 1, \end{cases}$$

где $V(0)$ – начальный капитал и для всех $t \ge 1$ $V(t)$ обозначает капитал портфеля, оцененный до того, как какая-либо трансакция осуществляется в этот момент, и d – число различных рисковых активов. Заметим, что капитал портфеля – адаптированый случайный процесс.



Информационный поток и цены рискового актива для примера 2.3

Обозначим $\Delta S_n(t) \equiv S_n(t) - S_{n-1}(t)$. Тогда величина $h_n(t)\Delta S_n(t)$ обозначает доход или убыток, полученный за один шаг в результате обладания рисковым активом S_n, а $\sum_{\tau=1}^{t} h_n(\tau)\Delta S_n(\tau)$ – это доход или убыток, полученный за t шагов. Наконец, пусть

$$G(t) = \sum_{\tau=1}^{t} h_0(\tau)\Delta B_0(\tau) + \sum_{n=1}^{d}\sum_{\tau=1}^{t} h_n(\tau)\Delta S_n(\tau)$$

обозначает полный доход или убыток портфеля за d шагов.

Положим в рассматриваемом примере $d = 1$ и $B(t) = (1 + r)^t$, где $r \ge 0$ – константа. Тогда начальный капитал портфеля $V_0 = h_0(1) + 5h_1(1)$, а значения V_1 и V_2 задаются соотношениями

$$V_1 = \begin{cases} (1+r)h_0(1) + 8h_1(1), & \omega = \omega_1, \omega_2, \\ (1+r)h_0(1) + 4h_1(1), & \omega = \omega_3, \omega_4, \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{cases} (1+r)^2 h_0(2) + 9h_1(2), \omega = \omega_1, \\ (1+r)^2 h_0(2) + h_1(2), \omega = \omega_2, \omega_3, \\ (1+r)^2 h_0(2) + 3h_1(2), \omega = \omega_4. \end{cases}$$

При этом доход портфеля

$$G_1 = \begin{cases} rh_0(1) + 3h_1(1), & \omega = \omega_1, \omega_2, \\ (1+r)h_0(1) + 4h_1(1), & \omega = \omega_3, \omega_4, \end{cases}$$

$$G_2 = \begin{cases} rh_0(1) + 3h_1(1) + r(1+r)h_0(2) + h_1(2), & \omega = \omega_1, \\ rh_0(1) + 3h_1(1) + r(1+r)h_0(2) - 2h_1(2), & \omega = \omega_2, \\ rh_0(1) - h_1(1) + r(1+r)h_0(2) + 2h_1(2), & \omega = \omega_3, \\ rh_0(1) - h_1(1) + r(1+r)h_0(2) - h_1(2), & \omega = \omega_4. \end{cases}$$

Напомним, что для того чтобы портфель h был самофинансируемым в моменты $t = 1, \ldots, T-1$, должно выполняться соотношение

$$V_t = h_0(t)S_0(t) + \sum_{n=1}^{d} h_n(t+1)S_n(t). \qquad (2.20)$$

Используя (2.20) и полученные выше выражения для V_1, приходим к равенствам

$V_1 = (1+r)h_0(1) + 8h_1(1) = (1+r)h_0(2) + 8h_0(2)$

в состояниях ω_1 и ω_2, а в состояниях ω_3 и ω_4 – к равенствам

$V_1 = (1+r)h_0(1) + 4h_1(1) = (1+r)h_0(2) + 4h_0(2)$.

Если ввести в рассмотрение доход G_t, то $V_t = V_0 + G_t$, и, вычисляя это выражение при $t = t_1$ и $t = t_2$, получим $V_1 = V_2 - (G_2 - G_1)$. При этом для ω_1 получаем:

$V_2 = (1+r)^2 h_0(2) + 9h_1(2) = (1+r)h_0(2) + 8h_1(2)$,

что совпадает с уравнением самофинансируемости (2.20). Аналогично получаем выражение для случая ω_2. Для ω_3

$V_2 = (1+r)^2 h_0(2) + 6h_1(2) - [r(1+r)h_0(2) + 2h_1(2)] = (1+r)h_0(2) + 4h_1(2)$

и аналогично для ω_4.

Вычислим теперь мартингальную меру, воспользовавшись тем, что дисконтированная цена $S_n^*(t) = S_n(t)B^{-1}(t)$ n-го рискового актива должна быть мартингалом, т. е. $E^Q[S_n^*(t+\tau) \mid F_t] = S_n^*(t), \quad t, \tau \ge 0$, или

$$E^Q[B(t)\frac{S_n(t+\tau)}{B(t+\tau)} \mid F_t] = S_n(t). \qquad (2.21)$$

Используя соотношение (2.21) при разных t и τ, получим следующую систему уравнений:

$t = 0, \quad \tau = 0: \quad 5(1+r) = 8[Q(\omega_1) + Q(\omega_2)] + 4[Q(\omega_3) + Q(\omega_4)]$,

$t = 0, \quad \tau = 2: \quad 5(1+r)^2 = 9Q(\omega_1) + 6Q(\omega_2) + 6Q(\omega_3) + 3Q(\omega_4)$,

$$t = 1, \quad \tau = 1: \quad 8(1+r) = \frac{9Q(\omega_1) + 6Q(\omega_2)}{Q(\omega_1) + Q(\omega_2)},$$

$$t = 1, \quad \tau = 1: \quad 4(1+r) = \frac{6Q(\omega_3) + 3Q(\omega_4)}{Q(\omega_3) + Q(\omega_4)}.$$

Рассмотрим, наконец, систему, состоящую из каких-нибудь трех из приведенных выше уравнений и уравнения

$Q(\omega_1) + Q(\omega_2) + Q(\omega_3) + Q(\omega_4) = 1$.

Решая полученную систему, найдем мартингальную меру Q, для которой

$$Q(\omega_1) = \frac{(1+5r)}{4}\frac{(2+8r)}{3}, \quad Q(\omega_2) = \frac{(1+5r)}{4}\frac{(1-8r)}{3},$$

$$Q(\omega_3) = \frac{(3-5r)}{4}\frac{(1+4r)}{3}, \quad Q(\omega_4) = \frac{(3-5r)}{4}\frac{(2-4r)}{3}.$$

Заметим, что все полученные значения Q положительны, если $0 \le r \le 1/8$, так что в этом примере будем предполагать, что это условие выполнено.

Рассматривая узел, соответствующий $t = 0$, из которого выходят две ветви, соответствующие $\{\omega_1, \omega_2\}$ и $\{\omega_3, \omega_4\}$, мы видим, что условная вероятностная мера может быть получена с помощью решения уравнения $5 = p8/(1+r) + (1-p)4/(1+r)$. Таким образом, условная вероятность p, ассоциированная с ветвью $\{\omega_1, \omega_2\}$, равна $(1+5r)/4$, а условная вероятность, ассоциированная с ветвью $\{\omega_1, \omega_2\}$, равна $(3+5r)/4$. Аналогично можно проанализировать узел $(1, \{\omega_1, \omega_2\})$ и $(1, \{\omega_3, \omega_4\})$, что позволит найти условные вероятности, ассоциированные с ветвями, приводящими в узлы $(2, \omega_1), (2, \omega_2), (2, \omega_3), (2, \omega_4)$, в виде $(2+8r)/6$, $(1-8r)/6$, $(1+8r)/6$ и $(2-8r)/6$ соответственно.

Заметим, что все эти вероятности строго положительны, если $0 \le r < 1/8$, что уже было отмечено выше, поскольку, если это условие нарушается, то возникает арбитраж. При этом, перемножая условные вероятности вдоль всех ветвей, ведущих в четыре состояния $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, составляющие Ω, получим то же самое выражение для Q, что и выше.

Предположим, что функция полезности имеет вид $u(v) = 1 - \exp(-v)$. Из условий предсказуемости следует, что стратегия h_1 торговли рисковым активом зависит от трех величин: позиции h^5, которую занимает инвестор после начального момента $t = 0$, когда цена $S_0 = 5$; позиции h^8, которую занимает инвестор после момента $t = 1$, когда $S_1 = 8$; позиции h^4, которую занимает инвестор после момента $t = 1$, когда цена $S_1 = 4$.

Рассмотрим теперь задачу оптимизации

$$\text{максимизировать } E[u(V(T))] \tag{2.22}$$

$$\text{при условии } V(0) = v \quad \text{и} \quad h \in H,$$

где H – множество самофинансируемых портфелей.

Напомним, что поскольку $V(T) = B(T)V^*(T)$ и

$$V^*(T) = v + \sum_{\tau=1}^{T} h(\tau)\Delta^* S(\tau) = v + G^*(T),$$

то эту задачу можно свести к задаче максимизации функции $Eu(B(T)(v + G^*(T)))$. Пусть $u(V) = 1 - \exp\{-V\}$. Вычислив $\Delta^* S(\tau)$ при $\tau = 1,2$, запишем целевую функцию в виде

$$E[u(B_2\{v + G_2^*\})] = 1 - E[\exp\{-(1+r)^2[v + h_1(1)\Delta S_1^* + h_1(2)\Delta S_2^*]\}] =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\exp\left\{-(1+r)^2\left[v + h^5\frac{3-5r}{1+r} + h^8\frac{1-8r}{(1+r)^2}\right]\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-(1+r)^2\left[v + h^5\frac{3-5r}{1+r} + h^8\frac{-2-8r}{(1+r)^2}\right]\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-(1+r)^2\left[v + h^5\frac{-1-5r}{1+r} + h^4\frac{2-4r}{(1+r)^2}\right]\right\} +$$

$$+ \exp\left\{-(1+r)^2\left[v + h^5\frac{-1-5r}{1+r} + h^4\frac{-1-4r}{(1+r)^2}\right]\right\}.$$

Приравнивая нулю каждую из частных производных по переменным h^5, h^4, h^8, получим следующие уравнения:

$$\exp\left\{-(1+r)^2\left[v + h^5\frac{3-5r}{1+r} + h^8\frac{1-8r}{(1+r)^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2+8r}{1-8r}\exp\{-(1+r)^2\left[v + h^5\frac{3-5r}{1+r} + h^8\frac{-2-8r}{(1+r)^2}\right], \tag{2.23}$$

$$\exp\{-(1+r)^2\left[v+h^5\frac{-1-5r}{1+r}+h^8\frac{2-4r}{(1+r)^2}\right]=$$

$$=\frac{(3-5r)(1+4r)}{(1+5r)(1-8r)}\exp\{-(1+r)^2\left[v+h^5\frac{3-5r}{1+r}+h^8\frac{-2-8r}{(1+r)^2}\right],\quad(2.24)$$

$$\exp\{-(1+r)^2\left[v+h^5\frac{-1-5r}{1+r}+h^8\frac{-1-4r}{(1+r)^2}\right]=$$

$$=\frac{(3-5r)(2-4r)}{(1+5r)(1-8r)}\exp\{-(1+r)^2\left[v+h^5\frac{3-5r}{1+r}+h^8\frac{-2-8r}{(1+r)^2}\right].\quad(2.25)$$

Вычисляя логарифмы левых и правых частей этих уравнений, придем к линейной системе уравнений, решение которой имеет вид

$$h^5=\frac{3\ln(3-5r)+(2-4r)\ln(2-4r)+(1+4r)\ln(1+4r)}{12(1+r)}-$$

$$-\frac{3\ln(1+5r)+(2+8r)\ln(2+8r)+(1-8r)\ln(1-8r)}{12(1+r)},$$

$$h^8=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+8r}{1-8r}\right),\quad h^4=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2-4r}{1+4r}\right).$$

Остается лишь вычислить h_0 – стратегию торговли банковским счетом. Очевидно, что

$$h_0(1)=v-5h^5.$$

В состояниях ω_1 и ω_2 капитал портфеля

$$V_1=(v-5h^5)(1+r)+8h^5,$$

так что, полагая эту величину равной $h_0(2)(1+r)+8h^8$, мы получим

$$h_0(2)=(v-5h^5)+8(h^5-h^8)(1+r).$$

Аналогично можно вычислить

$$h_0(2)=(v-5h^5)+8(h^5-h^4)(1+r)$$

в состояниях ω_3 и ω_4.

Так же, как в одношаговой модели, если существует арбитражная возможность, то решения задачи построения оптимального портфеля (2.18) или (2.19) не существует. Другими словами, если (2.18) или (2.19) имеет решение, то не существует арбитражной возможности. В этом случае должна существовать риск-нейтральная вероятностная мера.

Если (h,V) – решение задачи построения оптимального портфеля (2.18) или (2.19), тогда риск-нейтральная вероятностная мера определяется соотношением

$$Q(\omega)=\frac{P(\omega)B_Tu'(V_T(\omega),\omega)}{E[B_Tu'(V_T)]},\quad \omega\in\Omega,\quad(2.26)$$

где u' обозначает частную производную по первому аргументу.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим в некоторый момент t произвольный актив n и произвольное событие A из P_{t-1}-разбиения, соответствующего F_{t-1}. Событию A поставим в соответствие скалярную величину $h_n(t)I_A$ – позицию по активу n, которая будет занята после момента $t-1$, в который происходит событие A. Необходимое условие первого порядка для этой скалярной величины имеет вид

$$\sum_{\omega\in A}P(\omega)u'(B_T(\omega)\{v+G_T^*(\omega)\},\omega)B_T(\omega)\Delta S_n^*(t,\omega)=0.$$

Это верно для любого $A\in P_{t-1}$, так что

$$E[u'(B_T\{v+G_T^*\})B_T\Delta S_n^*(t)\mid F_{t-1}]=0.$$

Таким образом, $E_Q[\Delta S_n^*(t)\mid F_{t-1}]=0$, если мера Q определена соотношением (2.26), поскольку $V_T=B_T\{v+G_T^*\}$.

Пример 2.3 (продолжение). Три уравнения (2.23)–(2.25) приобретают вид

$$u'(V_2(\omega_1)) = \frac{2+8r}{1-8r}u'(V_2(\omega_2)),$$

$$u'(V_2(\omega_3)) = \frac{(3-5r)(1+4r)}{(1-8r)(1+5r)}u'(V_2(\omega_2)),$$

$$u'(V_2(\omega_4)) = \frac{(3-5r)(2-4r)}{(1-8r)(1+5r)}u'(V_2(\omega_2)).$$

Следовательно, из (2.26) вытекает

$$Q(\omega_1) = \frac{(1+5r)(2+8r)}{12}, \quad Q(\omega_2) = \frac{(1+5r)(1-8r)}{12},$$

$$Q(\omega_3) = \frac{(3-5r)(1+4r)}{12}, \quad Q(\omega_4) = \frac{(3-5r)(2-4r)}{12},$$

что совпадает с полученным выше результатом.

Очевидно, что проиллюстрированный в примере 2.3 подход к вычислению оптимальной стратегии может быть неэффективен для больших задач. Если нужно рассмотреть d уравнений с d неизвестными в каждом узле информационного дерева, то возникающая при этом система уравнений может быть слишком трудна для решения. Существует альтернативный подход, называемый динамическим программированием, который уменьшает вычислительные трудности. Идея динамического программирования состоит в том, что оптимальное решение, принятое сейчас, должно согласовываться с оптимальной стратегией в будущем. Другими словами, если мы знаем оптимальную стратегию, начинающуюся в момент $t + 1$, тогда определение оптимальной стратегии, начинающейся в момент t, сводится к одной или более одношаговым задачам. Следовательно, многошаговая задача может быть решена в виде последовательности решений одношаговых задач.

Для того чтобы реализовать эту процедуру построения оптимального портфеля, необходимо построить процесс $U_t(y)$, $t = 0, 1, \ldots, T$, где $U_t(v)$ равняется максимуму (среди всех самофинансируемых стратегий) ожидаемой полезности в момент T, при условии, что в момент t капитал равен v, а информация к этому моменту определена потоком F_t. Следовательно, $U_t(v)$ – это измеримая случайная величина.

Величина $U_t(y)$ при $t = T$ совпадает с функцией полезности $U_T(y) = u(y, \omega)$.

При этом для $t < T$ величина $U_t(y)$ удовлетворяет важному функциональному уравнению динамического программирования

$$U_t(y) = \max E[U_{t+1}(B_{t+1}\{v / B_t + h \cdot \Delta S^*_{t+1}\}) \mid F_t], \quad h \in F_t. \quad (2.27)$$

Здесь величина h – решение для периода t, является d-мерной F_t-измеримой случайной величиной. Величина h^*, максимизирующая выражение (2.27), является вектором оптимальных позиций в рисковых ценных бумагах, занимаемых инвестором до момента t при заданном F_t. При этом $h \cdot \Delta S^*_{t+1}$ – это скалярное произведение, т. е. $h \cdot \Delta S^*_{t+1} = h_1 \Delta S^*_1(t+1) + \ldots + h_d \Delta S^*_d(t+1)$.

Эта величина равняется дисконтированной прибыли, полученной на интервале от момента t до момента $t + 1$. Заметим, что аргумент функции $U_t(y)$ в (2.27) равняется капиталу в момент $t + 1$ при условии, что в момент t капитал равен v и h определяет позиции в рискованных ценных бумагах, а h_0 – позицию в банковском счете. Уравнение динамического программирования (2.27) можно использовать для вычисления оптимального решения задач (2.19) и (2.20), вычисляя оптимальное значение функции $U_t(v)$ рекурсивным образом. Сначала вычисляется $U_{T-1}(y)$, затем $U_{T-2}(y)$ и т. д. На всем пути находятся максимизирующие значения h, определяющие компоненты оптимальной стратегии. Когда этот процесс завершится, $U_0(y)$ будет равняться оптимальному значению целевой функции в (2.19) или (2.20) при условии $y = v$. Таким образом, метод динамического программирования имеет то преимущество, что мы получаем решение для всех возможных значений исходного капитала $y = v$, а не только для одного фиксированного.

Пример 2.3 (продолжение). Пусть $t = 1$ и $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_2$. Тогда правая часть в соотношении (2.27) имеет вид

$$\max_h E[1 - \exp\{-(1+r)^2 y/(1+r) + h\Delta S_2^*\} \mid S_1 = 8] =$$

$$= \max_h E[1 - \exp\{-(1+r)y - (1-8r)h\} - \frac{1}{2}\exp\{-(1+r)y + (2+8r)h\}].$$

В этом примере h – скаляр. Вычисляя производную по h и приравнивая результат к нулю, получим следующее выражение для максимизирующего значения h:

$$h = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+8r}{1-8r}\right).$$

Подставляя полученное выражение в правую часть (2.27), придем к соотношению

$$U_1(y) = 1 - \frac{1}{2}\exp\{-(1+r)y\}\left\{\left(\frac{2+8r}{1-8r}\right)^{(1-8r)/3} + \left(\frac{2+8r}{1-8r}\right)^{-(2+8r)/3}\right\} =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}(2+8r)^{-(2+8r)/3}(1-8r)^{(1-8r)/3}\exp\{-(1+r)y\}$$

для ω_1 и ω_2.

Аналогично при $t = 1$ и $\omega = \omega_3$ или $\omega = \omega_4$ уравнение (2.27) приобретает вид

$$\max_h E[1 - \exp\{-(1+r)^2 y/(1+r) + h\Delta S_2^*\} \mid S_1 = 4] =$$

$$= \max_h E[1 - \exp\{-(1+r)y - (2-4r)h\} - \frac{1}{2}\exp\{-(1+r)y + (1+4r)h\}],$$

так что в точке $h = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{2-4r}{1+4r}\right]$ достигается максимум функции и

$$U_1(y) = 1 - \frac{1}{2}\exp\{-(1+r)y\}\left\{\left(\frac{2-4r}{1+4r}\right)^{(1+4r)/3} + \left(\frac{2-4r}{1+4r}\right)^{-(2-4r)/3}\right\} =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}(2-4r)^{-(2-4r)/3}(1+4r)^{(1+4r)/3}\exp\{-(1+r)y\}$$

для $\omega = \omega_3$ и $\omega = \omega_4$.

Мы теперь готовы осуществить итерационную процедуру и вычислить $U_0(y)$. Обозначим:

$$f(r,\omega) = \begin{cases} \frac{3}{2}(2+8r)^{-(2+8r)/3}(1-8r)^{(1-8r)/3}, \omega = \omega_1, \omega_2, \\ \frac{3}{2}(2-4r)^{-(2-4r)/3}(1+4r)^{(1+4r)/3}, \omega = \omega_3, \omega_4, \end{cases}$$

так что $U_1(y)$ можно записать в виде

$$U_1(y) = 1 - f(r,\omega)\exp\{-(1+r)y\}.$$

Уравнение (2.27) приобретает вид

$$U_0(y) = \max_h E[1 - f(r,y)\exp\{-(1+r)[(1+r)\{y + h\Delta S_1^*\}]\}] =$$

$$= \max_h (1 - \frac{1}{2}f(r,y)\exp\{-(1+r)^2 y - (1+r)(3-5r)h\} -$$

$$- \frac{1}{2}f(r,y)\exp\{-(1+r)^2 y - (1+r)(1+5r)h\}).$$

Приравнивая нулю производные по h, немедленно получим выражение для точки максимума

$$h = \frac{3\ln(3-5r) + (2-4r)\ln(2-4r) + (1+4r)\ln(1+4r)}{12(1+r)} -$$

$$- \frac{3\ln(1+5r) + (2+8r)\ln(2+8r) + (1-8r)\ln(1-8r)}{12(1+r)}.$$

Подставляя полученное выражение в (2.27), мы получим выражение для $U_0(y)$.

Таким образом, метод динамического программирования можно применять для решения задачи построения оптимального портфеля. Он позволяет получить решения во многих случаях, когда традиционный подход не работает. С другой стороны, во многих практических ситуациях вычислительные трудности оказываются весьма значительными. К счастью, вычислительный подход, основанный на риск-нейтральной идеологии, может преодолеть их.

2.5. Оптимальные портфели и мартингальные методы

Риск-нейтральный вычислительный подход к решению многошаговых задач построения оптимального портфеля мало отличается от соответствующего подхода к решению одношаговых задач. Решая задачу (2.1) или (2.2), на первом шаге мы должны определить множество всех достижимых капиталов

$W_v = \{W \in R^K : W = V_T$ для некоторой самофинансируемой стратегии с начальным капиталом $V_0 = v\}$.

Если рассматривать модель полного рынка, то это множество выглядит так:

$$W_v = \{W \in R^K : E_Q[W / B_T] = v\}. \tag{2.28}$$

Если рассматривать модель неполного рынка, тогда описать это множество сложнее. Второй шаг – это решение подзадачи

$$\text{максимизировать}\, E[u(W)] \quad \text{при} \quad \text{условии} \quad W \in W_v. \tag{2.29}$$

Если рассматривается модель полного рынка, тогда эта задача может быть решена с помощью множителей Лагранжа. В результате, получив оптимальное решение W, на третьем шаге следует найти стратегию h, которая генерирует W. Мы будем предполагать, что рынок полный, и потому будем решать задачу (2.29). Ввиду (2.28) для решения задачи (2.29) введем множитель Лагранжа λ и сведем ее к задаче

$$\text{максимизировать} \; E[u(W)] - \lambda E^Q[W / B_T]. \tag{2.30}$$

Это – безусловная задача оптимизации относительно переменной $W \in R^K$. Введем плотность $L = Q / P$, тогда целевая функция (2.30) может быть переписана в виде

$$E[u(W) - \lambda LW / B_T] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)[u(W(\omega)) - \lambda L(\omega) W(\omega) / B_T(\omega)].$$

Если W максимизирует это выражение, то должно быть выполнено необходимое условие существования максимума, что приводит к уравнению

$$u'(W(\omega)) = \lambda L(\omega) / B_T(\omega) \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad \omega \in \Omega.$$

(Сейчас предполагается, что функция полезности $u : R \to R$ зависит только от капитала и не зависит от $\omega \in \Omega$.) Решая это уравнение, получим

$$W(\omega) = g(\lambda L(\omega) / B_T(\omega)) \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad \omega \in \Omega, \tag{2.31}$$

где g – обратная функция к u'.

Вычислим далее правильное значение λ. Это значение должно быть таким, чтобы, выбрав W вида (2.31), мы получили соотношение $v = E^Q[W / B_T]$. Другими словами, λ выбирается так, чтобы выполнялось равенство

$$E^Q[g(\lambda L / B_T) / B_T] = v. \tag{2.32}$$

Обратная функция g убывает и принимает значения из интервала $(0, \infty)$, таким образом, решение λ уравнения (2.32) будет существовать для любого $v > 0$. Отсюда вытекает, что решение подзадачи (2.29) не отличается от решения одношаговой задачи, исключая то, что мы дисконтируем с помощью B_T, а не B_1. Продолжим рассмотрение примеров.

Пример 2.4 (экспоненциальная полезность). Рассмотрим функцию полезности вида $u(y) = a - bc \exp\{-yc\}$, где a, b, c – скалярные параметры, причем $b > 0, c > 0$. Это приводит к следующему выражению для оптимального достижимого капитала:

$$W = \frac{v + cE[(L / B_T) \ln(L / B_T)]}{E[L / B_T]} - c \ln(L / B_T)$$

и оптимальной целевой функции

$$E[u(W)] = a - bcE[L/B_T]\exp\left\{\frac{-vc - E[(L/B_T)\ln(L/B_T)]}{E[L/B_T]} - \right.$$

$$\left. - c\ln(L/B_T)\right\}.$$

Примеры 2.3 и 2.4 (продолжение). Риск-нейтральные вероятности и вектор пространства состояний системы в рассматриваемых примерах легко вычислить. Представим результаты вычислений в следующей таблице:

ω	$Q(\omega)$	$L(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$
ω_1	$(1 + 5r)(2 + 8r)/12$	$(1 + 5r)(2 + 8r)/3$
ω_2	$(1 + 5r)(1 - 8r)/12$	$(1 + 5r)(1 - 8r)/3$
ω_3	$(3 - 5r)(1 + 4r)/12$	$(3 - 5r)(1 + 4r)/3$
ω_4	$(3 - 5r)(2 - 4r)/12$	$(3 - 5r)(2 - 4r)/3$

Вычислим вначале $E[L/B_2] = E^Q[(1+r)^{-2}] = (1+r)^{-2}$,

$$E[(L/B_2)\ln(L/B_2)] = (1+r)^{-2}]E^Q[\ln L] - 2(1+r)^{-2}\ln(1+r)$$

и

$$E^Q[\ln L] = \frac{1}{12}(-12\ln(3) + 3(1+5r)\ln(1+5r) + 3(3-5r)\ln(3-5r) +$$

$$+ (1+5r)(2+8r)\ln(2+8r)(1+5r)(1-8r)\ln(1-8r) +$$

$$+ (3-5r)(1+4r)\ln(1+4r) + (3-5r)(2-4r)\ln(2-4r)).$$

При этом оптимальный капитал

$$W(\omega) = v((1+r)^2 + E^Q[\ln(L)] + \ln(3) +$$

$$+\begin{cases} -\ln(1+5r) - \ln(1-8r), \omega = \omega_1, \\ -\ln(1-5r) - \ln(1+1r), \omega = \omega_2, \\ -\ln(3-5r) - \ln(1+4r), \omega = \omega_{3,} \\ -\ln(3-5r) - \ln(2-4r), \omega = \omega_4. \end{cases}$$

Решая систему

$$(1+r)^2 h_0(2) + 9h_1(2) = W(\omega_1),$$

$$(1+r)^2 h_0(2) + 6h_1(2) = W(\omega_2),$$

мы получим

$$h_1(2) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+8r}{1-8r}\right)$$

и

$$h_0(2) = v + \frac{E^Q[\ln L] + \ln(3)}{(1+r)^2} + \frac{2\ln(2+8r) - \ln(1+5r) - 3\ln(1-8r)}{(1+r)^2}$$

в состояниях ω_1 и ω_2. Аналогично, решая систему

$$(1+r)^2 h_0(2) + 6h_1(2) = W(\omega_3),$$

$$(1+r)^2 h_0(2) + 3h_1(2) = W(\omega_4),$$

мы получим

$$h_1(2) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2-4r}{1+4r}\right),$$

$$h_0(2) = v + \frac{E^Q[\ln L] + \ln(3)}{(1+r)^2} + \frac{2\ln(1+4r) - \ln(3-5r) - 2\ln(2-4r)}{(1+r)^2}$$

в состояниях ω_3 и ω_4. Далее мы должны решить систему

$$(1+r)h_0(1) + 8h_1(1) = V_1(\omega_1) = (1+r)h_0(2,\omega_1) + 8h_1(2,\omega_1),$$

$$(1+r)h_0(1) + 4h_1(1) = V_1(\omega_3) = (1+r)h_0(2,\omega_3) + 4h_1(2,\omega_3),$$

что позволит найти $h_0(1)$ и $h_1(1)$. Наконец, получим выражение для оптимальной целевой функции

$$E[u(W)] = 1 - (1-r)^{-2}\exp\{-v(1+r)^2 - E^Q[\ln(L)] + 2\ln(1+r)\}.$$

В заключение приведем еще один важный пример.

Биномиальная модель

Биномиальная модель представляет собой одну из важнейших моделей описания поведения цен рисковых активов.

На каждом шаге в такой модели существуют две возможности: цена актива увеличится пропорционально величине u (up), $u > 1$ или уменьшится пропорционально величине d (down), $0 < d < 1$. Вероятность движения вверх равна p, а вероятность движения вниз $q = 1 - p$, и события, происходящие в различные моменты времени, независимы. Таким образом, биномиальная модель связана со случайным процессом, представляющим собой, например, число выпадений герба при бросании монеты или вообще число успехов μ_n в некоторой серии n испытаний, при условии, что результатом каждого испытания может стать успех или неудача. Такой процесс называется процессом Бернулли.

Напомним, что случайный процесс $\{X_t; t = 1, 2, \ldots\}$ называется процессом Бернулли с параметром p, если случайные переменные $X_1, X_2, \ldots$ независимы и $P(X_t = 1) = 1 - P(X_t = 0) = p$ для всех t. Соответствующее вероятностное пространство Ω состоит из всех последовательностей вида

$$\omega = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \ldots),$$

где каждая точка $\omega \in \Omega$ представляет собой (очевидным образом) регистрацию соответствующего события.

Строго говоря, вектор ω может иметь неограниченное число компонент, и соответственно вероятностное пространство Ω содержит бесконечное число точек. Однако рассматриваемая здесь модель рынка описывает лишь конечное число шагов, так что достаточно рассмотреть лишь модель, соответствующую ограниченному числу бросаний монеты. Итак, каждое состояние ω будет иметь T компонент, каждая из которых принимает значения 0 или 1. Существует 2^T векторов такого типа, и рассматриваемое выборочное пространство будет содержать все эти векторы. Таким образом, каждая компонента $X_t(\omega)$ принимает значение 0 или 1. Далее, F_t – это алгебра, соответствующая наблюдениям за первыми t бросками монеты, т. е. P_t будет

обозначать разбиение, состоящее из 2^t ячеек, каждая из которых соответствует некоторой последовательности исходов в бросках монеты. При этом вероятностная мера P задается соотношением $P(\omega) = p^n (1 - p)^{T-n}$, где ω – произвольное состояние, соответствующее n успехам (гербам) и $T - n$ неудачам (решкам) в серии из T бросков.

Процесс $\{\mu_t; t = 1, 2, \ldots\}$ определяется в терминах процесса $X_t(\omega)$ соотношением

$$\mu_t(\omega) = X_1(\omega) + \ldots + X_t(\omega).$$

Поскольку $EX_t = p$ и дисперсия $D(X_t) = p(1 - p)$, то для любого t

$$E[\mu_t] = tp,$$

$$D(\mu_t) = tp(1 - p).$$

Далее нетрудно показать, что

$$P(\mu_t = n) = C_n^t p^n (1 - p)^{t-n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.33}$$

для всех $t = 1, 2, \ldots$.

Распределение (2.33) называется биномиальным распределением, а $C_n^t = \dfrac{t!}{n!(t-n)!}$ называется биномиальным коэффициентом.

Опишем теперь биномиальную модель финансового рынка. Эта модель характеризуется набором из четырех параметров: p, d, u и S_0, где $0 < p < 1$, $0 < d < 1 < u$ и $S_0 > 0$. Цена актива в момент t задается соотношением

$$S_t = S_0 u^{\mu_t} d^{t-\mu_t}, \quad t = 1, 2, \ldots, T.$$

Следовательно, на каждом шаге существуют лишь две возможности: либо с вероятностью p при броске монетки выпадает u и цена увеличивается пропорционально коэффициенту u, либо с вероятностью $1 - p$ выпадает d и цена уменьшается пропорционально d. При этом в силу (2.33) распределение цены задается выражением

$$P(S_t = S_0 u^n d^{t-n}) = C_n^t p^n (1 - p)^{t-n}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{2.34}$$

Процесс возврата средств в биномиальной модели может быть описан следующим образом: на первом шаге мы имеем

$$\Delta R_1(t) = u^{X_t} d^{1-X_t} - 1, \quad t = 1, 2, \dots, T. \tag{2.35}$$

Другими словами, либо $\Delta R_1 = u - 1$ с вероятностью p, либо $\Delta R_1 = d - 1$ с вероятностью $1 - p$. В частности, величина ΔR_1 не зависит от текущей цены актива, что весьма желательно, если мы моделируем цены таких активов, как акции.

Построим теперь мартингальную меру. Пусть процентная ставка постоянна, так что $\Delta R_0 = r$ и, в силу (2.35) и свойства

$$E^Q\left[\frac{\Delta R_1(t+1) - \Delta R_0(t+1)}{1 + \Delta R_0(t+1)} \mid F_t\right] = 0,$$

должно выполняться соотношение

$$q\left[\frac{u-1-r}{1+r}\right] + (1-q)\left[\frac{d-1-r}{1+r}\right] = 0,$$

где q – условная вероятность (относительно алгебры F_t при любом t) того, что при следующем движении цена поднимется. Отсюда

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} \tag{2.36}$$

для всех F_t и t. Поскольку $q < 1$, то соответствующая мера Q будет существовать лишь тогда и только тогда, когда $u > 1 + r$. В этом случае мартингальная мера Q имеет вид

$$Q(\omega) = q^n (1-q)^{T-n},$$

где $\omega \in \Omega$ – некоторое состояние, соответствующее n подъемам и $T - n$ снижениям цены. При этом вероятностное распределение процесса S_t относительно риск-нейтральной меры Q для всех t имеет вид

$$Q(S_t = S_0 u^n d^{t-n}) = C_t^n q^n (1-q)^{t-n}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{2.37}$$

Построим оптимальный портфель на рынке, на котором присутствует один тип рисковых активов, причем структура цены этого актива определяется биномиальной моделью с параметрами p, u, d. Пусть $u(v) = \ln(v)$. Заметим, что

$$L(\omega) = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \left(\frac{d}{p}\right)^n \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-\mu_T},$$

где q имеет вид (2.36). Используя далее соотношение (2.11), которое превращается в рассматриваемом случае в соотношение

$$W = vB_T / L,$$

мы получим

$$W = v(1+r)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\mu_T} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-\mu_T}.$$

Это оптимальный достижимый капитал. Более того, поскольку $E[\mu_T] = pT$, то оптимальная целевая функция имеет вид

$$E[u(W)] = \ln(v) + \ln(1+r)^T - E[\ln(L)] =$$

$$= \ln(v) + T\ln(1+r) - E\left[\ln\left(\frac{q}{p}\right)^{\mu_T}\right] - E\left[\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-\mu_T}\right] =$$

$$= \ln(v) + T\ln(1+r) - pT\ln\left(\frac{q}{p}\right) - (1-p)T\ln\left(\frac{1-q}{1-p}\right).$$

Теперь для произвольного $n < T$ предположим, что $\mu_{T-1} = n$, и рассмотрим оптимальные позиции по банковскому счету и рисковому активу, которые должны быть получены при переходе к моменту $T - 1$. Их можно получить, решая систему

$$(1+r)^T h_0(T) + S_{T-1} u h_1(T) = v(1+r)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{n+1} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{T-n-1},$$

$$(1+r)^T h_0(T) + S_{T-1} d h_1(T) = v(1+r)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{n} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{T-n},$$

откуда следует, что

$$h_1(T) = \frac{v(1+r)^T \left(\frac{p}{q}\right)^n \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{T-n-1} (p-q)}{S_{T-1}(u-d)q(1-q)}$$

и

$$h_0(T) = \frac{v\left(\frac{p}{q}\right)^n \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{T-n-1} [u(1-p)q - d(1-q)p]}{(u-d)q(1-q)}.$$

Поскольку $V_{T-1} = (1+r)^T h_0(T) + S_{T-1}h_1(T)$, то после некоторых алгебраических преобразований получаем, что

$$V_{T-1} = v(1+r)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{n+1} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{T-n-1}.$$

Теперь рассмотрим часть денег, которая инвестируется в момент $T-1$ в рисковый актив:

$$\frac{S_{T-1}h_1(T)}{V_{T-1}} = \frac{(1+r)(p-q)}{(u-d)q(1-q)}. \tag{2.38}$$

Заметим, что это выражение не зависит ни от *n*, ни от *T*. Более того, заметим, что V_{T-1} имеет тот же вид, что и $V_T = W$, так что по индукции мы можем заключить, что оптимальный портфель имеет очень простой вид: в каждый момент времени и в каждом состоянии нужно просто инвестировать часть капитала, определяемую формулой (2.38), в рисковый актив.

2.6. Динамическое программирование

Пусть процесс потребления $c = \{c_t,\ t = 0, 1, \ldots, T\}$ – неотрицательный, согласованный с σ-алгеброй F_t процесс c_t, представляющий капитал, потребляемый инвестором в момент *t*. Стратегия потребления-инвестирования состоит из пары (c, h), где *c* – процесс потребле-

ния и *h* – торговая стратегия. Полезность соответствует потреблению на каждом шаге. Естественно, чем выше потребление, тем выше полезность. Инвестор стремится выбрать план потребления-инвестирования, который максимизирует ожидаемую полезность за *T* шагов. В частности, инвестор стоит перед выбором между потреблением и инвестированием, особенно в первое время.

При заданном начальном капитале инвестора *v* план (c, h) потребления-инвестирования будет называться самофинансируемым, если за период $[0, T]$ добавления или изъятия денег из портфеля не было, кроме тех, которые были потрачены на потребление. Как правило,

$$V_t = h_0(t)B_t + \sum_{n=1}^{N} h_n(t)S_n(t), \quad t \geq 1 \tag{2.39}$$

представляет собой капитал портфеля до трансакции в момент *t*. Мы будем полагать, что V_t соответствует капиталу портфеля до момента потребления *t* для $t \geq 1$. Утверждение, что (c, h) – самофинансируемый портфель, означает, что

$$V_t = c_t + h_0(t+1)B_t + \sum_{n=1}^{N} h_n(t+1)S_n(t), \quad t = 0, \ldots, T-1. \tag{2.40}$$

Для данного начального капитала *v* самофинансируемый план потребления-инвестирования (c, h) допустим, если $c_T \leq V_T$. Поскольку *c* – неотрицательный процесс, то $V_T \geq 0$.

Задача потребления-инвестирования, решаемая инвестором, состоит в следующем:

$$\text{максимизировать } E\left[\sum_{t=0}^{T} \alpha_t u(c_t)\right] \tag{2.41}$$

при заданном начальном капитале v и допустимой паре (c, h).

Здесь $u: R \to [-\infty, \infty]$ – возрастающая функция полезности и α – скалярный параметр, $0 < \alpha \le 1$. Поскольку процесс потребления должен быть неотрицателен, без потери общности мы будем полагать, что $u(V) = -\infty$ для всех $V < 0$ и, конечно, $U(V) > -\infty$ для $V > 0$.

Для решения поставленной задачи с помощью динамического программирования мы будем вычислять значения функции $u_t(V)$, двигаясь в обратном направлении по времени. Это позволяет найти максимум ожидаемой полезности потребления за время T при заданном капитале V, потреблении c_t в момент t и заданной информации F_t.

Значение u_T определяется просто. Так как функция полезности – это возрастающая функция, инвестор захочет воспользоваться полностью капиталом, который доступен на последнем шаге. Таким образом, $u_T = u$.

Начиная с момента $T-1$ при заданном капитале V, инвестор сталкивается с задачей, которая по существу эквивалентна серии одношаговых задач, рассмотренных выше,

$$\text{максимизировать } u(c_{T-1}) + E[\alpha u_T(V) \mid F_{T-1}] \tag{2.42}$$

при условии $v = c_{T-1} + h_0(T)B_{T-1} + \sum_{n=1}^{N} h_n(T)S_n(T-1)$,

$$V = h_0(T)B_T + \sum_{n=1}^{N} h_n(T)S_n(T-1),$$

$$h_n(T) \in F_{T-1} \quad \text{для} \quad n = 0, 1, \ldots, N; \quad c_{T-1} \in F_{T-1}.$$

Используя первое условие, чтобы найти $h_0(T)$, и затем подставляя результат во второе условие, получаем

$$V = (v - c_{T-1})B_T / B_{T-1} + \sum_{n=1}^{N} h_n(T)[S_n(T) - B_T S_n(T-1)/B_{T-1}] =$$

$$= (v - c_{T-1})B_T / B_{T-1} + B_T \sum_{n=1}^{N} h_n(T)\Delta S_n^*(T).$$

Таким образом, (2.42) можно переписать в виде

$$\max\{u(c_{T-1}) + \alpha E[u_T((v - c_{T-1})B_T / B_{T-1} +$$

$$+ B_T \sum_{n=1}^{N} h_n(T)\Delta S_n^*(T)) \mid F_{T-1}]\}$$

при условии $h_n(T) \in F_{T-1}$ для $n = 0, 1, \ldots, N$; $c_{T-1} \in F_{T-1}$.

Положим теперь $u_{T-1}(v)$ равным оптимальному значению целевой функции.

Вообще говоря, вычислив значение целевой функции $u_t(v)$, можно вычислить $u_{t-1}(v)$, используя принцип динамического программирования

$$u_{t-1}(v) = \max\Big\{u(c_{T-1}) +$$

$$+ \alpha E\left[u_t\left((v - c_{t-1})B_t / B_{t-1} + B_t \sum_{n=1}^{N} h_n(t)\Delta S_n^*(t)\right) \mid F_{t-1}\right]\Big\}, \tag{2.43}$$

где максимум берется по всем $h_n(t) \in F_{t-1}$ для $n = 1, \ldots, d$ и $c_{t-1} \in F_{t-1}$. Значение функции $u_0(v)$ при этом будет совпадать с оптимальным значением для исходной задачи (2.42) или (2.43) и максимаьные значения c_{t-1} и $h_n(t)$ будут являться частью оптимального плана инвестиций – потребления. Последняя компонента h_0 будет затем вычислена из условий самофинансируемости.

3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЫНКИ

В этой главе мы перейдем к непрерывным моделям финансовых рынков и рассмотрим две простейших модели: модель Блэка – Шоулса (BS-модель) и модель Блэка – Шоулса – Мертона (BSM-модель). В рамках этих моделей будет рассмотрена задача оптимизации инвестиционного портфеля.

3.1. Модели BS и BSM и хеджирующие портфели

Для описания математической модели финансового рынка в непрерывном времени нам понадобятся стандартные непрерывные случайные процессы: винеровский и пуассоновский процесс, – пуассоновская мера, а также случайные процессы, построенные по этим базовым процессам с помощью стохастических уравнений.

Введем необходимые обозначения.

Пусть (Ω, F, P) – основное вероятностное пространство, $w(t) \in R^d$ – стандартный винеровский процесс, а $\nu_k(dt, dz)$ – независимые пуассоновские меры, заданные на борелевской алгебре B_0 пространства $[0,T] \times R^d$ с компенсаторами $E\nu_k(dt,dz) = \Pi_k(dz)dt$, $k = 1, 2$. Пусть F_t – поток σ-алгебр, порожденный винеровским процессом $w(t)$ и пуассоновской мерой $\nu([0,t), dz)$.

Предположим, что $\Pi_1(dz)$ – σ-конечная мера, заданная на борелевской σ-алгебре B пространства R^d, а Π_2 – конечная мера.

Меру ν можно построить следующим образом: пусть $\xi(t) \in R^d$ – однородный процесс с независимыми приращениями, характеристическая функция которого имеет вид

$$Ee^{i(\lambda,\xi(t))} = \exp\{t[\int_{\|z\|\le 1}(e^{i(\lambda,z)} - i(\lambda,z) - 1)\frac{dz}{\|z\|^{d+1}} +$$

$$+\int_{\|z\|\ge 1}(e^{i(\lambda,z)} - 1)\frac{dz}{\|z\|^{d+1}}]\}. \qquad (3.1)$$

Процесс $\xi(t)$ с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода. Если обозначить $\nu(G)$ через число разрывов процесса $\xi(t)$, для которых точка $(t, \xi(t+0) - \xi(t-0))$ принадлежит G, то $\nu(G)$ будет иметь распределение Пуассона с параметром $\pi(G)$.

Обозначим через $S(F_t)$ пространство измеримых случайных функций *f*, таких, что $f(t,z) \in R^d$ и F_t-измерима при каждом *t*. Пусть далее $S_\nu(F_t)$ обозначает совокупность функций из $S(F_t)$, для которых

$$\int_{t_0}^T \int_{R^d} E\|f(t,z)\| \frac{dzdt}{\|z\|^{d+1}} < \infty,$$

и $S_\mu(F_t)$ обозначает совокупность функций из $S(F_t)$, для которых

$$\int_{t_0}^T \int_{R^d} E\|f(t,z)\|^2 \frac{dzdt}{\|z\|^{d+1}} < \infty.$$

Ниже используются также обозначения S, S_ν, S_μ для краткости, если это не приводит к недоразумениям.

Интегралы по мерам $\nu(dt,dz)$ и $\mu(dt,dz) = \nu(dt,dz) - \Pi(dz)dt$ вида

$$\int_{t_0}^T \int_{R^d} f(t,z)\mu(dt,dz), \quad \int_{t_0}^T \int_{R^d} \hat{f}(t,z)\nu(dt,dz)$$

корректно определены, если функции $f \in S_\mu$ и $\hat{f} \in S_\nu$ соответственно.

Рассмотрим рынок, на котором присутствует безрисковый актив и *d* рисковых активов, динамика цен которых описывается следующими уравнениями:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, \quad S_0(0) = 1, \qquad (3.2)$$

$$dS_i(t) = S_i(t)[a_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dw_j(t) + \int_{R^d} f_i(t,z)\mu(dt,dz)], \qquad (3.3)$$

$$S_i(0) = s_i, \ i = 1, \ldots, d.$$

Портфель $h(t) = (h_0(t), \ldots h_d(t)) \in R^{d+1}$ – это прогрессивно измеримый случайный процесс, удовлетворяющий оценкам

$$\int_0^T | h_0(t) | \, dt < \infty, \quad \int_0^T | h(t) \cdot S(t) |^2 \, dt < \infty \quad P\text{-п. в.}, \tag{3.4}$$

где $h \cdot S = \sum_{k=0}^d h_k S_k = h^+ S$. При этом, как и в дискретном случае, $h_i(t)$ интерпретируется как число единиц актива типа i, содержащееся в рассматриваемом портфеле.

Неотрицательный прогрессивно F_t-измеримый случайный процесс $c(t)$, подчиняющийся оценке $\int_0^T c(t) dt < \infty \quad P$-п. в., называется процессом потребления.

Портфель (h, c), состоящий из портфельных инвестиций h и потребления c, называется самофинансируемым, если его капитал $V(t)$ имеет вид $V(t) = h(t) \cdot S(t) - c(t)$ и его дифференциал задается соотношением

$$dV(t) = h(t) \cdot dS(t) - c(t) dt. \tag{3.5}$$

Пусть h – самофинансируемый портфель и $V(t)$ – его капитал. Тогда R^{d+1}-значный процесс

$$u(t) = (u_0(t), \ldots, u_d(t)), \quad \text{где} \quad u_k = \frac{h_k(t) S_k(t)}{V(t)}, \quad k = 0, \ldots, d, \tag{3.6}$$

называется самофинансируемым относительным портфелем.

Рассмотрим самофинансируемый портфель с потреблением (h, c), капитал $V(t)$ которого имеет вид

$$V(t) = x + \sum_{k=0}^d \int_0^t h_k(\tau) dS_k(\tau) - c(t),$$

где цены $S_k(t)$ удовлетворяют системе стохастических уравнений (3.2), (3.3). Тогда

$$\int_0^t h_0(\tau) dS_0(\tau) = \int_0^t h_0(\tau) S_0(\tau) r(\tau) d\tau,$$

$$\int_0^t h_i(\tau) dS_i(\tau) = \int_0^t h_i(\tau) S_i(\tau) a_i(\tau) d\tau + \int_0^t h_i(\tau) S_i(\tau) \sum_{k=1}^d \sigma_{ik} dw_k(\tau) +$$

$$+ \int_0^t h_i(\tau) S_i(\tau) f_i(\tau, z) \tilde{\mu}(dz, d\tau), \quad i = 1, \ldots, d.$$

Таким образом, уравнение (3.5) приобретает вид

$$dV = V(t)[h_0(t) r S_0(t) dt + \sum_{i=1}^d h_i S_i [a_i(t) dt + \sum_{k=1}^d \sigma_{ik} dw_k(t)]] +$$

$$+ V(t) \sum_{i=1}^d h_i f_i(\tau, z) \tilde{\mu}(dz, dt) - c(t) dt. \tag{3.7}$$

Процесс $u_k(t)$ вида (3.6) описывает часть капитала, инвестированную в k-й актив. При этом часть капитала, инвестированная в банковский счет,

$$u_0(t) = 1 - (h(t), 1) = 1 - \sum_{k=1}^d u_k(t), \quad 1 = (1, \ldots, 1)^+. \tag{3.8}$$

В терминах относительного портфеля стохастическое уравнение, которому удовлетворяет капитал $V(t)$, имеет вид

$$dV(t) = V(t)[u_0(t) S_0(t) r(t) dt + \sum_{k=1}^d u_k(t) S_k(t) [a_k(t) + \sum_{j=1}^d \sigma_{kj} dw_j(t) +$$

$$+ \int_{R^d} f_k(t, z) \mu(dt, dz)]] - c(t) dt = (1 - (u(t), 1)) V(t) r(t) dt +$$

$$+ V(t) \sum_{k=1}^d u_k(t) [a_k(t) + \sum_{j=1}^d \sigma_{kj} dw_j + \int_{R^d} f_k(t, z) \mu(dt, dz)] - c(t) dt,$$

т. е.

$$dV = [r(t)V(t) - c(t)]dt + V(t)u(t)[a(t) - r1]dt +$$

$$+ V(t)u(t)[Adw(t) + \int_{R^d} f(t,z)\mu(dz,dt)], \quad V(0) = v. \qquad (3.9)$$

Полученное уравнение представляет собой линейное неоднородное уравнение, и для существования его решения нам нужно лишь предположить, что $\int_0^T \| u(t) \|^2 \, dt < \infty$ P-п. в.

Построение реплицирующего портфеля

Рассмотрим рынок, на котором определены цены рисковых активов $(S_1(t),\ldots,S_d(t))$ и одного безрискового актива $S_0(t)$, и пусть динамика этих цен задается следующими уравнениями:

$$dS_0(t) = S_0(t)r(t)dt, \quad S_0(0) = s_0, \qquad (3.10)$$

$$dS_k(t) = S_k[a_k(t)dt + \sigma_k(t)\,dw(t) + \int_{R^d} \hat{f}_k(t,z)\mu(dz,dt)] +$$

$$+ S_k \int_{R^d} f_k(t,z)\nu(dz,dt)], \quad S_k(0) = s_k. \qquad (3.11)$$

Самофинансируемый портфель с потреблением (h,c) называется допустимым для начального капитала v, если капитал $V(t)$ этого портфеля подчиняется оценке

$$V(t) \geq 0 \quad P\text{-п. в.} \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad t \in [0,T]. \qquad (3.12)$$

Обозначим через $U(v)$ множество допустимых портфелей.

Рассмотрим простое платежное обязательство Y с контрактной функцией $\Phi(x)$ и построим портфель, реплицирующий это платежное обязательство.

Введем предварительно дополнительные обозначения

$$\gamma(t) = \exp(-\int_0^t r(\tau)d\tau), \qquad (3.13)$$

$$\theta(t) = \sigma^{-1}(t)[a(t) - r(t)1], \qquad (3.14)$$

$$\rho(t) = \exp\{\int_0^T \theta(s)\cdot dw(s) + \int_0^T \int_{R^d} q(s,z)\cdot \hat{f}(s,z))\mu(dz,ds) -$$

$$- \int_0^T \frac{1}{2} \| \theta(s,z) \|^2 \, ds + \int_0^T \int_{R^d} [e^{q(s,z)\cdot \hat{f}(s,z)} -$$

$$-1 - q(s,z)\cdot \hat{f}(s,z))]\Pi(dz)ds\}. \qquad (3.15)$$

$$H(t) = \gamma(t)\rho(t), \qquad (3.16)$$

$$dH = -H(t)[r(t)dt + \theta(t)\,dw(t) +$$

$$+ \int_{R^d} q(t,z)\hat{f}(t,z)\mu(dt,dz)], \quad H(0) = 1. \qquad (3.17)$$

Пусть X – F_T-измеримая случайная величина; $c(t)$ – интенсивность потребления и

$$v = E\Big[H(T)X + \int_0^T H(s)c(s)ds\Big] < \infty.$$

Рассмотрим вначале случай, когда $\hat{f}(t,z) = f(t,z) \equiv 0$. В этом случае справедливо следующее далее утверждение.

Теорема 3.1. Полнота рынка. *Пусть на рынке, динамика которого имеет вид*

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, \quad S_0(0) = 1, \qquad (3.18)$$

$$dS_i(t) = S_i(t)[a_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dw_j(t)], \qquad (3.19)$$

$$S_i(0) = s_i, \; i = 1, \ldots, d,$$

самофинансируемый портфель с потреблением (h,c) допустим для данного начального капитала $v \geq 0$, т. е. $(h,c) \in U(x)$. Тогда капитал этого портфеля удовлетворяет оценке

$$E\left(h(t)V(t)+\int_0^t h(\theta)c(\theta)d\theta\right)\le v \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad t\in[0,T]. \qquad (3.20)$$

Пусть $X\ge 0$ *–* F_T*-измеримая случайная величина и c – процесс потребления, удовлетворяющий соотношению*

$$v=E\left(h(T)V(T)+\int_0^T h(\theta)c(\theta)d\theta\right)<\infty. \qquad (3.21)$$

Тогда существует портфель $u(t)$ *такой, что* $(u,c)\in U(x)$ *и справедливо соотношение* $V(T)=X$.

Таким образом, при описанных выше условиях существует самофинансируемый портфель (u,c), хеджирующий платежное обязательство X, т. е. такой, что $V(T) = X$. Для того чтобы построить такой портфель, воспользуемся формулой Ито и вычислим $H(t)V(t)$:

$$H(t)V(t)+\int_0^t H(s)c(s)ds=H(0)V(0)+\int_0^t H(s)dV(s)+$$

$$+\int_0^t V(s)dh(s)+\langle V,h\rangle_t+\int_0^t h(s)c(s)ds=$$

$$=v+\int_0^t h(s)V(s)[r(s)+u(s)\cdot[a(s)-r1]-r(s)-$$

$$-u(s)\sigma(s)\theta(s)]ds+\int_0^t h(s)V(s)[u(s)^+\sigma(s)-\theta(s)]dw(s). \qquad (3.22)$$

Отсюда с учетом (3.14) нетрудно показать, что

$$V(t)=\frac{1}{h(t)}E\left[\int_0^T h(s)c(s)ds+h(T)B\mid F_t\right]$$

и $V(T)=B$.

Обозначим:

$$M(t)=V(t)h(t)+\int_0^t h(s)c(s)ds=E\left[\int_0^T h(s)c(s)ds+h(T)B\mid F_t\right]$$

и заметим, что $M(t)$ является F_t-мартингалом и $M(0)=v$.

Следовательно, существует представление вида

$$M(t)=v+\int_0^t \Psi(\theta)\cdot dw(\theta),$$

где $\Psi(\theta)\in R^d$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^T \|\Psi(\theta)\|^2\, d\theta<\infty.$$

При этом

$$V(t)H(t)+\int_0^t H(s)c(\theta)d\theta=v+\int_0^t \Psi(\theta)\cdot dw(\theta). \qquad (3.23)$$

Сравнивая (3.23) с (3.22), получим $Vh[\sigma^+u-\theta]=\Psi$ P-п. в., откуда

$$u(t)=\begin{cases}(\sigma^{-1}(t))^+[\dfrac{\Psi(t)}{h(t)V(t)}+\theta(t)], & \text{если} \quad V(t)>0,\\ 0 \quad \text{в} \quad \text{противном} \quad \text{случае}.\end{cases} \qquad (3.24)$$

Отметим, что уже начиная с работы Мертона стало понятно, что этот подход не дает нужного результата, если рассматриваемая модель динамики базовых активов содержит скачки. При этом рынок оказывается неполным и существует много возможностей построить соответствующую мартингальную меру. В работе Мертона рассмотрена модель, в рамках которой динамика цены $S(t)$ рискового актива P имела вид

$$S(t)=S(0)\exp[\mu t+\sigma w(t)+\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k], \qquad (3.25)$$

где $w(t)\in R^1$ – P-винеровский процесс; $N(t)$ – P-пуассоновский процесс с интенсивностью λ и $Y_k: N(m,\delta^2)$ – независимые одинаково распределенные гауссовские случайные величины, не зависящие от $w(t)$ и $N(t)$. По аналогии с диффузионным случаем рассмотрим мартингальную динамику вида

$$S(t) = S(0)\exp[\mu^Q t + \sigma w^Q(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k], \tag{3.26}$$

где $w^Q(t)$ – Q-винеровский процесс, а $N(t)$ и Y_k те же, что и выше, выбирая μ^Q так, чтобы процесс $\widehat{S}(t) = S(t)e^{-rt}$ был мартингалом относительно Q, т. е.

$$\mu^Q = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda E[e^{Y_k} - 1] = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda[\exp(m + \frac{1}{2}\delta^2) - 1]. \tag{3.27}$$

Здесь $Q \sim P$ – эквивалентная мартингальная мера, полученная с помощью сдвига винеровского процесса, без изменения скачкообразной составляющей.

Безарбитражную цену европейского колл-опциона при этом можно представить в виде

$$\widehat{C}^Q(t,S) = e^{-rt}C^Q(t,S) = E^Q[e^{-rT}(S(T)-K)^+ \mid F_t] =$$
$$= E^Q[\widehat{C}^Q(T,S(T)) \mid F_t],$$

причем $\widehat{C}^Q(t,S(t))$ является Q-мартингалом и

$$\widehat{C}^Q(T,S(T)) - \widehat{C}^Q(0,S(0)) =$$

$$= \int_0^T \frac{\partial C^Q}{\partial S}(\theta,\widehat{S}(\theta_-))\widehat{S}(\theta_-))\sigma dw^Q(\theta) +$$

$$+ \int_0^T \int_{R^d} [C^Q(\theta,S(\theta_-)+z) - C^Q(\theta,S(\theta_-))\mu(dz,d\theta), \tag{3.28}$$

где $\mu(dz,d\theta)$ – мартингальная мера, не изменяющаяся при переходе от P к Q. Хеджирующий портфель, предложенный Мертоном, представлял собой самофинансируемый портфель вида

$$\varphi(t) = \frac{\partial C^Q}{\partial S}(\theta,\widehat{S}(\theta_-)), \quad \varphi^0(t) = \varphi(t)S(t) - \int_0^t \varphi(\theta)dS(\theta). \tag{3.29}$$

Отсюда следует, что можно хеджировать лишь риск, связанный с первым слагаемым в правой части (3.28). Таким образом, дисконтированная ошибка хеджирования

$$\widehat{C}^Q(T,S(T)) - \widehat{C}^Q(0,S(0)) - \int_0^T \frac{\partial C^Q}{\partial S}(\theta,\widehat{S}(\theta_-))d\widehat{S}(\theta) =$$

$$= \int_0^T \int_{R^d} [C^Q(\theta,S(\theta_-)+z) - C^Q(\theta,S(\theta_-)) -$$

$$-(1+z)\frac{\partial C^Q}{\partial S}(\theta,\widehat{S}(\theta_-))]\mu(dz,d\theta), \tag{3.30}$$

так что хедж страхует от риска, связанного со скачками, лишь в среднем.

3.2. Оптимизация портфельных инвестиций

В заключение этой главы рассмотрим задачу о построении оптимального портфеля с заданным начальным капиталом. Задача оптимизации инвестиционной стратегии на рынке финансовых инструментов является одной из основных задач финансовой математики. В частности, важным является вопрос о том, как максимизировать выигрыш при наличии потребления. Эту задачу часто называют задачей Мертона, поскольку она была решена в работах Мертона для логарифмической и степенной функций полезности модели Б-Ш. При этом было показано, что в этой модели оптимально инвестировать постоянную часть u^* капитала в рисковый актив и выбрать интенсивность потребления пропорциональной текущей стоимости портфеля. Это означает, что оптимально для инвестора, чтобы соотношение между депозитом и рисковым активом соответствовало линии Мертона с наклоном $\dfrac{u^*}{1-u^*}$.

Для данного начального капитала x задача оптимизации портфеля с потреблением состоит в нахождении оптимальной стратегии инвестиции-потребления. Инвестор должен определить, какую долю активов какого вида он хочет сохранить в портфеле и какую часть капитала он готов потратить на потребление на интервале $[0,T]$.

Введем функционал $J(x,\pi,c)$, который позволит нам оценить качество инвестиционной стратегии, так называемый функционал выигрыша. Хорошие стратегии будут соответствовать большим значениям этого функционала. Таким образом, для данного стартового капитала x построим допустимый относительный самофинансируемый портфель с потреблением (u,c), который максимизирует ожидаемую полезность относительно потребления и (или) конечного капитала, т. е. обеспечит максимум функционала

$$J(x;u,c) = E[\int_0^T U_1(t,c(t))dt + U_2(V(T))]. \qquad (3.31)$$

Здесь $V(t)$ – капитал портфеля (u,c) с начальной величиной $V(0)=v$, а U_1, U_2 – функции полезности.

Напомним, что в теории оптимизации функцией полезности называется строго выпуклая, непрерывно диференцируемая функция $U:(0,\infty)\to R$, удовлетворяющая соотношениям

$$U'(0) = \lim_{x\to 0} U'(x) = +\infty, \quad U'(\infty) = \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0.$$

Непрерывная функция $U:[0,T]\times(0,\infty)\to R$ такая, что для всех $t\in[0,T]$ функция $U(t,\cdot)$ является функцией полезности, также будет называться функцией полезности.

Примеры функций полезности:

$$U(x) = \ln(x), \quad U(x) = \sqrt{x}, \quad U(x) = x^{\alpha} \quad \text{для всех} \quad 0<\alpha<1,$$

$$U(t,x) = e^{-\gamma t}U(x), \quad \gamma > 0.$$

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$\text{найти} \quad \max_{(u,c)\in U^1(v)} J(v;u,c), \qquad (3.32)$$

где

$$U^1(v) = \{(u,c)\in U(v) | E[\int_0^T U_1(t,c(t))dt + U_2(V^u(T))] < \infty\}. \qquad (3.33)$$

Решение этой задачи возможно, например, с помощью следующих двух подходов:

1) мартингального метода, основанного на методе множителей Лагранжа;

2) метода, основанного на стохастической теории управления.

Мартингальный подход

Рассмотрим вначале портфель без потребления, т. е. предположим, что $c\equiv 0$, $U_1\equiv 0$. Пусть самофинансируемый портфель $(u,0)$ допустим для данного начального значения капитала $x>0$. Как следует из теоремы 3.1, капитал $V^u(t)$ этого портфеля удовлетворяет оценке $E[\beta(T)V^u(T)]\le v$ для $T\ge 0$. По определению платежное обязательство X – это F_T-измеримая случайная величина, например $X = v[\beta(T)]^{-1}$. При этом в силу теоремы 3.1 существует такой портфель $(u,0)\in U(v)$, что $X = V^u(T)$ P-п. в.

Определим далее множество

$$B(v) = \{X\ge 0 : X - F_T\text{-измерима}, \quad E[\beta(T)X]\le v, \quad E[U_2(X)^-] < \infty\}.$$

Будем предполагать, что функции полезности $U_1:[0,T]\times(0,\infty)\to R$ и $U_2:(0,\infty)\to R$ дифференцируемы по v и их производные непрерывны в нуле и на бесконечности, причем

$$U_1'(0) = [U_2]_v'(t,0) = \infty, \quad U_1'(\infty) = [U_2]_v'(t,\infty).$$

Обозначим через $U(v)$ множество допустимых самофинансируемых портфелей с потреблением, т. е. таких пар (π,c), для которых при стартовом капитале $x\ge 0$ соответствующий капитал $V^{\pi}(t)\ge 0$ P-п. в. для всех $t\in[0,T]$.

Очевидно, $B(v)$ представляет собой множество всех значений финального капитала, удовлетворяющих оценке $E[U_2(X)] < \infty$, которые могут быть достигнуты за счет торговли ценными бумагами, обладающих тем же самым начальным капиталом $y \in (0, v]$ и подчиняющихся оценке $E[U_2(X)) < \infty$. Таким образом, для определения оптимального финального капитала $V^h(T)$ и выбора инвестиционного портфеля h в задаче

$$\max_{(u,0)\in U(v)} E[U_2(V^h(T))] \tag{3.34}$$

достаточно найти максимум по всем случайным величинам $B \in B(v)$, т. е. достаточно решить задачу

$$\max_{B\in B(v)} EU_2(B). \tag{3.35}$$

Заметим, что в задаче (3.35) исчезло время, поэтому ее называют статической оптимизационной задачей. Для того чтобы решить задачу о построении оптимального портфеля, нужно найти оптимальное значение B^* в (3.35) и затем найти портфель $(u^*,0) \in U(v)$ такой, что $V^{u^*}(T) = B^*$ P-п.в.

Лагранжев метод решения задачи оптимизации

Пусть функция $f: R^d \to R^1$ строго выпукла, функция $g: R^d \to R^k$ вогнута и $f, g \in C^1$. Тогда $\widehat{x}$ решает оптимизационную задачу

$$\max_{x\in R^n} f(x) \quad \text{при} \quad \text{условии} \quad g(x) = 0$$

тогда и только тогда, когда существует вектор $\widehat{\lambda} \in R^k$ такой, что пара $(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \in R^{d+k}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, d,$$

$$g_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Другими словами, $(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) \in R^{d+k}$ является нулем производной функции Лагранжа

$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda \cdot g(x).$

В интересующей нас оптимизационной задаче (3.35)

$L(B, y) = E[U_2(B) - y(h(T)B - v)]$ при $y > 0$.

Формально дифференцируя по B и y и меняя местами операторы дифференцирования и взятия математического ожидания, получим уравнения

$L_B(B, y) = E[U_2'(B) - yh(T)] = 0, \quad L_y(B, y) = v - E[h(T)\,B] = 0.$

Случайную величину B найдем из первого уравнения. Поскольку, по предположению, отображение U_2' является отображением на все R_+ и U_2' – строго убывающая функция, то ее можно обратить на R_+ и получить соотношение

$$B = (U_2')^{-1}(yh(T)). \tag{3.36}$$

Подставляя полученную величину во второе уравнение, получим

$v - E[h(T)(U_2')^{-1}(yh(T))] = 0.$

Обозначим $\chi(y) = E[h(T)(U_2')^{-1}(yh(T))]$. Наконец, если удастся найти единственное решение последнего уравнения, то оно и будет кандидатом на роль оптимального капитала в силу уравнения (3.36). Таким образом, обозначив $Y(u) = \chi^{-1}(u)$, $I_2 = [U_2']^{-1}$, получим, что $B^* = I_2(Y(v)h(T)) > 0$ является кандидатом на роль оптимального капитала. При этом остается лишь проверить, что B^* действительно задает оптимальный капитал.

Введем функцию Лагранжа $L(B,c,y)$ для общей оптимизационной задачи (3.32) с помощью соотношения

$$L(B,c,y) =$$
$$= E[\int_0^T U_1(t,c(t))dt + U_2(B) - y[\int_0^T h(s)c(s)ds + h(t)B - v]]. \quad (3.37)$$

Формальное дифференцирование $L(B,c,y)$ по аргументам (B,c,y) приведет к соотношениям, определяющим значения аргументов, при которых может достигаться экстремум,

$$0 = L_B(B,c,y) = E[U_2'(B) - yh(T)], \quad (3.38)$$

$$0 = L_y(B,c,y) = E[-h(T)B = v + \int_0^T h(s)c(s)ds] \quad (3.39)$$

и

$$0 = L_c(B,c,y) = E[\int_0^T [U_1]_c(s,c(s))ds - y]\int_0^T h(s)ds]. \quad (3.40)$$

Здесь и далее нижние буквенные индексы обозначают дифференцирование по соответствующему аргументу, т. е. $L_y(B,c,y) = \dfrac{\partial L(B,c,y)}{\partial y}$.

Введем вспомогательные функции

$$I_1(t,y) = [U_1]_y^{-1}(t,y), \quad (3.41)$$

$$I_2(y) = [U_2']^{-1}(y) \quad (3.42)$$

и

$$\chi(y) = E[\int_0^T h(t)I_1(t,yh(t))dt + h(T)I_2(yh(T)). \quad (3.43)$$

Из соотношений (3.38)–(3.40) вытекает, что

$B = [U_2']^{-1}(yh(T)),$

$[U_1]_c(t,c(t)) = yh(t),$

$c(t) = [U_1]_c^{-1}(yh(T)),$

$$0 = v - \{E[H(T)[U_2']^{-1}(yh(T)) + \int_0^T h(s)[U_1]_c^{-1}(yh(s))ds]\} =$$

$$= v - \chi(y), \quad (3.44)$$

где $\chi(y)$ задано соотношением (3.43).

Ниже нам понадобятся некоторые свойства функции $\chi(y)$.

Лемма 3.2. *Пусть* $\chi(y) < \infty$ *для всех* $y > 0$. *Тогда* χ *непрерывна на* $(0,\infty)$, *строго убывает и удовлетворяет соотношениям*

$$\chi(0) = \lim_{y\to 0}\chi(y) = \infty, \quad \chi(\infty) = \lim_{y\to\infty}\chi(y) = 0. \quad (3.45)$$

Доказательство. Непрерывность χ следует из непрерывности функций β, I_1, I_2 и теоремы о мажорируемой сходимости. Заметим, что обе функции I_1, I_2 строго убывают на $(0,\infty)$. Поскольку $\beta(t) > 0$ для всех *t*, то отсюда вытекает, что $\chi(y)$ также строго убывает по *y*.

Из соотношений

$$\lim_{y\to 0} I_1(t,y) = \lim_{y\to 0} I_2(y) = \infty,$$

$$\lim_{y\to\infty} I_1(t,y) = \lim_{y\to\infty} I_2(y) = 0$$

и монотонности функций I_1, I_2 в силу теоремы о мажорируемой сходимости мы получаем соотношения (3.37).

Замечание. Из леммы 3.2 вытекает существование $Y(v) = \chi^{-1}(v)$ на $(0,\infty)$ и равенств

$$Y(0) = \lim_{v\to 0} Y(v) = \infty, \quad Y(\infty) = \lim_{v\to\infty} Y(v) = 0.$$

Ниже нам понадобится также еще ряд свойств функций полезности.

Лемма 3.3. *Пусть* U – *функция полезности и* $I = (U')^{-1}$. *Тогда*

$U(I(y)) \ge U(v) + y\,[I(y) - v], \quad 0 < v, y < \infty.$

Доказательство. Если U выпукла, то

$$U(I(y)) \ge U(v) + U'(I(y))[I(y) - v] = U(v) + y[I(y) - v]$$

для $0 < v,\ y < \infty$.

Теорема 3.4. Задача об оптимальном портфеле. *Пусть* $v > 0$ *и* $\chi(y) < \infty$ *для всех* $y > 0$. *Положим* $Y(v) = \chi^{-1}(v)$. *Тогда для*

$$B^* = I_2(Y(v)h(T)), \quad c^*(t) = I_1(t, Y(v)h(t))$$

существует самофинансируемый портфель $u^*(t),\ t \in [0,T]$ *такой, что*

$$(u^*, c) \in U(v), \quad V^{v,u^*,c^*}(T) = B^* \quad P\text{-п. в.}$$

и (u^*, c^*) *– решение задачи* (3.34). *Здесь* $V^{v,u^*,c^*}(t)$ *– капитал портфеля* (u^*, c^*), *имеющего начальный капитал* v.

Доказательство. Из определения B^* и c^* следует, что

$$E\left(\int_0^T h(t)c^*(t)dt + h(T)B^*\right) = v.$$

Заметим, что при этом $Y(v)h(t) > 0$ и благодаря тому, что $I_1, I_2 > 0$, величины B^* и c^* положительны. Существование портфеля $(u^*, c) \in U(v)$, соответствующего паре $(c^*(t), B^*)$, вытекает из теоремы 3.1.

Покажем теперь, что единственный портфель u^* обладает свойством $(u^*, c^*) \in U'$. Из леммы 3.3 вытекают неравенства

$$U_1(t, c^*(t)) \ge U_1(t,1) + Y(v)h(t)[c^*(t) - 1],$$

$$U_2(B^*) \ge U_2(1) + Y(v)h(T)(B^* - 1),$$

и, следовательно, с учетом неравенства $a^- \le b^- \le |b|$, вытекающего из оценки $a \ge b$ и положительности $Y(v)h(t)\,c^*$, получим, что

$$E\left(\int_0^T U_1(t, c^*(t))^- dt + U_2(B^*)^-\right) \le$$

$$\le E\left(\int_0^T |U_1(t,1)| + Y(v)h(t)[c^*(t) + 1]dt + |U_2(1)| + Y(v)h(T)[B^* - 1]\right) =$$

$$= |U_2(1)| + \int_0^T |U_1(t,1)|\, dt + Y(v)\left(v + E[h(T)] + \int_0^T E[h(t)]dt\right) < \infty.$$

Наконец, покажем, что портфель с потреблением $(u^*, c^*) \in U'$ оптимален. Для этого выберем произвольную пару $(u, c) \in U'$, которой соответствует капитал $V^{v,u,c}$. Из неравенств

$$U_1(t, c^*(t)) \ge U_1(t, c(t)) + Y(v)h(t)[c^*(t) - 1],$$

$$U_2(B^*) \ge U_2(V^{v,u,c}(T)) + Y(v)h(T)[B^* - V^{v,u,c}(T)]$$

нетрудно вывести, что

$$E\left(\int_0^T U_1(t, c^*(t))dt + U_2(B^*)\right) \ge J(v,u,c) + Y(v)\left(E\left(\int_0^T h(t)c^*(t)dt + h(T)B^*\right) - \right.$$

$$\left. - E\left(\int_0^T h(t)c(t)dt + h(T)V^{v,u,c}(T)\right)\right) =$$

$$= J(v,u,c) + Y(v)\left(v - E\left(\int_0^T h(t)c(t)dt + h(T)V^{v,u,c}(T)\right)\right) \ge J(v,u,c),$$

поскольку в силу теоремы 4.1

$$Y(v)\left(v - E\left(\int_0^T h(t)c(t)dt + h(T)V^{v,u,c}(T)\right)\right) \ge 0.$$

Пример

Пусть $U_1(t,v) = U_2(v) = \ln v$ – логарифмические функции полезности. Тогда $I_1(t,y) = I_2(y) = \dfrac{1}{y}$,

$$\chi(y) = E\left(\int_0^T \frac{h(t)}{y\beta(t)}dt + \frac{h(T)}{yh(T)}\right) = \frac{T+1}{y}$$

и $Y(v) = \chi^{-1}(v) = \dfrac{T+1}{v}$. Из теоремы 3.4 следует, что

$$c^*(t) = I_1(t, Y(v)h(t)) = \frac{1}{H(t)}\frac{v}{T+1},$$

$$B^* = I_2(Y(v)h(T)) = \frac{1}{h(T)}\frac{v}{T+1}.$$

В этом специальном примере удается получить явное выражение для портфеля. Заметим, что в силу теоремы 3.1

$$h(t)V^{v,u^*,c^*}(t) = E\left(\int_0^T h(s)c^*(s)ds + h(T)B^* \mid F_t\right) = \frac{v(T-t+1)}{T+1}. \quad (3.46)$$

Отсюда следует, что

$$v = \frac{v(T-t+1)}{T+1} + \frac{vt}{T+1} = h(t)V^{v,u^*,c^*}(t) + E\left[\int_0^T h(s)c^*(s)ds\right]. \quad (3.47)$$

Применяя формулу Ито, вычислим произведение $h(t)V^{v,u^*,c^*}(t)$ в правой части последнего равенства и получим

$$v = v + \int_0^t h(s)V^{v,u^*,c^*}(s)[u^*(s)^+\sigma(s) - \theta^+(s)]dw(s),$$

откуда вытекает, что вектор $f(s) = u^*(s)^+\sigma(s) - \theta^+(s) = 0$ P-п.в. для всех $s \in [0,T]$. Поскольку величина $H(t)V^{v,u^*,c^*}(t)$ положительна, то

$$u^*(t) = [\sigma^+(t)]^{-1}\theta(t) \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T].$$

В частном случае при $d = 1$ и постоянных кэффициентах мы получим, что величина

$$u^* = \frac{a-r}{\sigma}$$

равна премии за риск для инвестиций в рисковые активы.

Портфели, содержащие опционы

Рассмотрим более сложный рынок, на котором присутствуют безрисковый актив, акции и опционы на эти акции. При этом мы будем рассматривать портфели, содержащие безрисковый актив и опционы.

Как и выше, пусть $S_0(t), S_1(t), \dots, S_d(t)$ – цены базовых активов, а f^i – цены опционов

$$f^{(i)}(t, S_1(t), \dots, S_d(t)), \quad i = 1, \dots, d, \quad f \in C^{1,2}. \quad (3.48)$$

Пусть $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$ – допустимая торговая стратегия в терминах безрискового актива и опционов, т. е. определены интегралы

$$\int_0^t \varphi_i(s)dS_0(s), \quad \int_0^t \varphi_i(s)df^{(i)}(s, S_1(s), \dots, S_d(s)),$$

и $\varphi(t)$ являются F_t-измеримыми процессами. Соответствующий капитал имеет вид

$$V(t) = \varphi_0(t)S_0(t) + \sum_{i=1}^d \varphi_i(t)f^{(i)}(t, S_1(t), \dots, S_d(t)).$$

Пусть U – заданная функция полезности. Для того чтобы определить оптимальный терминальный капитал B^* (имея стартовый капитал v), в терминах $S_0(t), f^{(1)}(t), \dots, f^{(d)}(t)$, рассмотрим вначале реплицирующий портфель $\varphi(t) = (\varphi_0(t), \dots, \varphi_d(t))$ в терминах $S_0(t)$, $S_i(t), i = 1, \dots, d$. Однако, поскольку акции не должны содержаться в рассматриваемых портфелях, нам нужно будет реплицировать позиции по акциям с помощью безрискового актива и опционов. Это приведет нас к требуемому портфелю, содержащему безрисковый актив и опционы, реплицирующему терминальный оптимальный капитал $V(T)$. Сформулируем описанный выше результат в виде теоремы.

Теорема 3.5. *Обозначим через* $K(t)$ *матрицу вида*

$$K_{ij}(t) = f_{s_j}^{(i)}(t, S_1(t), \dots, S_d(t)).$$

Тогда задача оптимизации

$$\max_{\pi} E[U(S(T))] \quad (3.49)$$

допускает следующее явное решение:

оптимальный капитал B^* *совпадает с оптимальным капиталом задачи* (3.32).

Если $u(t)$ –оптимальная портфельная стратегия портфеля, содержащего акции в задаче (3.32), *то оптимальный портфель* $\varphi(t)=\varphi_0(t),\ldots,\varphi_d(t))$, *содержащий опционы, имеет вид*

$$\overline{\varphi}(t)=[K']^{-1}\overline{u}(t), \tag{3.50}$$

$$\varphi_0(t)=\frac{V(t)-\sum_{i=1}^{d}\varphi_i(t)f^{(i)}(t,S_1(t),\ldots,S_d(t))}{S_0(t)}, \tag{3.51}$$

$$\overline{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_d(t)),\ \overline{u}(t)=(u_1(t),\ldots,u_d(t)).$$

Оптимизационная задача. Стохастическое оптимальное управление

Возвратимся к изучению задачи (3.32) и перепишем функционал J в виде

$$J(t,v;\varphi)=E_{t,v}[\int_t^T U_1(s,\varphi_2(s))ds+U_2(V^v(T))],$$

где $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)=(u,c)$. При этом мы будем предполагать, что капитал $V^{(u,c)}(t)$ портфеля описывается стохастическим уравнением вида

$$dV^v(t)=\mu(t,V^v(t),\varphi(t))dt+\sigma(t,V^v(t),\varphi(t))\,dw(t), \tag{3.52}$$

где

$$\mu(t,v,\varphi)=(r+\varphi_1[a-r1])v-\varphi_2;\quad \sigma(t,v,\varphi)=v\varphi_1^+\sigma. \tag{3.53}$$

Пусть $\Phi(t,v)=\sup\limits_{\varphi\in U(t,v)}J(t,v;\varphi)$. Нас будет интересовать уравнение, которому удовлетворяет функция $\Phi(t,v)$.

Напомним, что если $V(t)$ удовлетворяет уравнению (3.52) и рассматривается оптимизационная задача вида

$$\Phi(t,v)=\sup\nolimits_{\varphi\in U(t,v)}J(t,v;\varphi),$$

где

$$J(t,v;\varphi)=E_{t,v}[\int_t^T L(s,V(s),\varphi(s))ds+\Psi(T,V(T))],$$

то уравнение для $\Phi(t,v)$ выводится из принципа Беллмана, который может быть записан в виде следующего соотношения:

$$\Phi(t,v)=\sup_{\varphi\in U(t,v)}E[\int_t^\theta L(s,V(s),\varphi(s))ds+\Phi(\theta,V(\theta))],$$

$$\Phi(T,v)=U_2(v).$$

Применяя к $\Phi(t,V(t))$ формулу Ито, мы получим следующее соотношение:

$$V(t,v)=\sup_{u\in U(t,v)}E_{t,x}[\int_t^\theta L(s,V(s),\varphi(s))ds+\Phi(t,v)+$$

$$+\int_0^\theta[\Phi_t(s,V(s))+\Phi_v(s,V(s))\mu(s,V(s),\varphi(s))+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\theta\sigma(s,V(s),\varphi(s))\cdot\sigma(s,V(s),\varphi(s))\Phi_{vv}(s,V(s))]ds].$$

Таким образом,

$$0=\sup_{\varphi\in U(t,v)}E_{t,v}[\lim_{\theta\to t}\frac{1}{\theta-t}\int_t^\theta[L(s,V(s),\varphi(s))+$$

$$+\Phi_t(s,V(s))+\Phi_v(s,V(s))\mu(s,V(s),\varphi(s))+$$

$$+\frac{1}{2}\sigma(s,V(s),\varphi(s))\cdot\sigma(s,V(s),\varphi(s))\Phi_{vv}(s,V(s))]ds=$$

$$=\sup\nolimits_{u\in U(t,v)}E_{t,v}[L(t,V(t),\varphi(t))+\Phi_t(t,V(t))+\mu(t,V(t),\varphi(t))\Phi_v(t,V(t))+$$

$$+\frac{1}{2}\sigma(t,V(t),\varphi(t))\cdot\sigma(t,V(t),\varphi(t))\Phi_{vv}(t,V(t))],$$

и мы приходим к следующему уравнению, называемому HJB- уравнением:

$$\sup_{\varphi\in U(t,v)} (L(t,v,\varphi)+\Phi_t(t,v)+\frac{1}{2}F(t,v,\varphi)\Phi_{vv}(t,v)+$$

$$+\mu(t,v,\varphi)\Phi_v(t,v))=0, \tag{3.54}$$

где $F(t,v,\varphi)=\sigma(t,v,\varphi)\cdot\sigma(t,v,\varphi)$, и краевому условию

$$\Phi(T,v)=U_2(v). \tag{3.55}$$

Возвращаясь к рассматриваемой задаче, в которой μ, σ имеют вид (3.53) и $\Psi(t,v)=U_2(v)$, получим, что $\Phi(t,x)$ подчиняется следующему уравнению:

$$\sup_{\varphi\in[\alpha_1,\alpha_2]^d,\varphi_2\in[0,\infty)} \{\frac{1}{2}\varphi_1^+\sigma^+\sigma\varphi_1 v^2\Phi_{vv}(t,v)+$$

$$+[[r+\varphi_1\cdot[a-r1]]v-\varphi_2]\Phi_v(t,v)+U_1(t,v)+\Phi_t(t,v)\}=0, \tag{3.56}$$

$$\Phi(T,v)=U_2(v). \tag{3.57}$$

Приведем решение рассматриваемой задачи оптимизации для ряда конкретных функций полезности, в частности, для функций полезности U_1 и U_2 вида

$$U_1(t,c)=\frac{1}{\gamma}e^{-\beta t}c^\gamma,\quad U_2(v)=\frac{1}{\gamma}v^\gamma, \tag{3.58}$$

где $\beta>0,\gamma\in(0,1)$.

Рассмотрим формальную задачу максимизации в уравнении HJB (3.56) и приравняем нулю производные по φ_1 и φ_2 от выражения, стоящего в левой части этого уравнения. Это приведет нас к соотношениям

$$\varphi_1(t)=-K^{-1}(a-r1)\frac{\Phi_v(t,v)}{v\Phi_{vv}(t,v)}, \tag{3.59}$$

$$\varphi_2(t)=(e^{\beta t}\Phi_v(t,v))^{\frac{1}{\gamma-1}}, \tag{3.60}$$

где $K=\sigma^+\sigma$.

Подставив полученные выражения (3.59), (3.60) в (3.56), получим следующее уравнение относительно функции $\Phi(t,v)$:

$$-\frac{1}{2}[a-r1]^+(\sigma^+)^{-1}\sigma^{-1}[a-r1]\frac{\Phi_v(t,v)}{\Phi_{vv}(t,v)}+rv\Phi_v(t,v)+$$

$$+\Phi_v^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t,v)e^{\frac{\beta t}{\gamma-1}}\frac{1-\gamma}{\gamma}+\Phi_t(t,v)=0. \tag{3.61}$$

Решение уравнения (3.61), удовлетворяющее краевому условию $\Phi(T,v)=\frac{1}{\gamma}v^\gamma$, будем искать в виде

$$\Phi(t,v)=f(t)\frac{1}{\gamma}v^\gamma,\quad f(T)=1. \tag{3.62}$$

Подставляя (3.62) в (3.61), получим

$$[-\frac{1}{2}([a-r1]^+(\sigma\sigma^+)^{-1}[a-r1]\frac{1}{\gamma-1}+r]f(t)+$$

$$+\frac{1-\gamma}{\gamma}e^{\frac{\beta t}{\gamma-1}}f(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+f'(t)=0. \tag{3.63}$$

Введем обозначения

$$k_1 = -\frac{1}{2}K^{-1}[a - r1]\cdot[a - r1]\frac{1}{\gamma - 1} + r,$$

$$k_2 = \frac{1-\gamma}{\gamma}e^{\frac{\beta t}{\gamma - 1}}.$$

Тогда

$$f'(t) = -k_1(t)f(t) - k_2(t)f^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}, \quad f(T) = 1. \tag{3.64}$$

Подстановка

$$g(t) = f(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3.65}$$

приводит к уравнению

$$g'(t) = -\frac{k_1(t)}{1-\gamma}g(t) - \frac{k_2(t)}{1-\gamma}, \quad g(T) = 1, \tag{3.66}$$

решение которого имеет вид

$$g(t) = e^{\frac{k_1}{1-\gamma}(T-t)} + \frac{1-\gamma}{\gamma(k_1 - \beta)}(e^{\frac{k_1-\beta}{1-\gamma}T} - e^{\frac{k_1-\beta}{1-\gamma}t})e^{\frac{k_1}{1-\gamma}(T-t)}. \tag{3.67}$$

Еще одно следствие того факта, что уравнение (3.61) имеет решение вида (3.62), состоит в том, что соответствующий профиль задан соотношениями

$$u(t) = v_1(t, V(t)) = \frac{1}{1-\gamma}K(a - r1) = u^*(t), \tag{3.68}$$

$$c(t) = v_2(t, V(t) = (e^{\beta t}f(t))^{\frac{1}{\gamma-1}}V(t). \tag{3.69}$$

В результате мы доказали следующее утверждение (теорема 3.6).

Теорема 3.6. *Оптимизационная задача*

$$\text{найти} \quad \max_{(\pi,c)\in U(v)} E\left[\int_0^T e^{-\beta t}\frac{1}{\gamma}c(t)^\gamma\,dt + \frac{1}{\gamma}V(T)^\gamma\right] \tag{3.70}$$

имеет решение (u^*, c^*) *вида*

$$u^*(t) = \frac{1}{\gamma - 1}K^{-1}(a - r1), \tag{3.71}$$

$$c^*(t) = (e^{\beta t}f(t))^{\frac{1}{\gamma-1}}V(t), \tag{3.72}$$

где функция $f(t)$ *задана соотношениями* (3.64)–(3.67).

4. ОПТИМИЗАЦИЯ НА РЫНКАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ДЕФОЛТ

Рассмотрим финансовые рынки, где присутствуют подверженные дефолту активы, которыми можно торговать и после объявления дефолта. Поскольку есть возможность случайного дефолта, то рассматриваемый рынок является неполным. Мы ограничимся здесь рассмотрением редуцированной модели и будем трактовать эту задачу как задачу оптимизации ожидаемого дохода от рассматриваемого платежного обязательства в случае логарифмической, степенной и экспоненциальной функции полезности на таком неполном рынке. Эта задача будет трактоваться как задача оптимального управления при наличии полной или частичной информации о рынке. При этом для логарифмической функции полезности ответ удается получить в терминах стохастических дифференциальных уравнений.

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, G, Q) с заданной на нем фильтрацией G_t, и пусть $G_t = F_t \vee H_t$, где фильтрация F_t порождена винеровским процессом, а H_t – пуассоновским процессом, в терминах которого будет описываться дефолт. Мы предполагаем также, что Q – риск-нейтральная мера, эквивалентная объективной вероятностной мере P, заданной на (Ω, G).

Процесс $H_t = I_{\{\tau \le t\}}$, описывающий дефолт, – это неубывающий непрерывный справа процесс, совершающий скачок в случайный момент времени τ, и пусть $H_{t-} = \lim_{s\uparrow t} H_s$.

Мы будем говорить, что процесс H_t – пуассоновский, если он является процессом с независимыми приращениями, $H_0 = 0$, число скачков на интервале длины t имеет пуассоновское распределение со средним λt, т. е.

$$P\{H_{t+s} - H_s = n\} = \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \ge 0.$$

Здесь λ – интенсивность пуассоновского процесса, и величина λt называется его компенсатором. Нам понадобится также компенсированный пуассоновский процесс

$$M_t = H_t - \int_0^t (1 - H_s)\lambda ds,$$

который будем называть мартингальным дефолтом.

Стохастический дифференциал мартингального дефолта имеет вид

$$dM_t = dH_t - \lambda(1 - H_t)dt.$$

Рассмотрим бескупонную корпоративную облигацию с моментом погашения T_1 и предположим, что ее цена после дефолта равна нулю. Будем считать, что в случае дефолта инвестор получает часть $1-\zeta$ в качестве возмещения стоимости этой облигации в момент перед дефолтом, $0 \le \zeta < 1$. В предположении, что процентная ставка r и интенсивность дефолта λ относительно мартингальной меры Q постоянны, цена корпоративной облигации задается соотношением

$$p(t, T_1) = I_{\{\tau > t\}}\mathrm{e}^{-(r+\delta)(T_1 - t)} + I_{\{\tau \le t\}}(1-\zeta)\mathrm{e}^{-(r+\delta)(T_1-\tau)}\mathrm{e}^{r(t-\tau)}. \qquad (4.1)$$

Заметим, что $p(t, T_1)$ соответствует фиктивной ценной бумаге, поскольку она не является реально торгуемой ценной бумагой.

Воспользовавшись формулой Ито, нетрудно проверить, что Q-динамика корпоративной облигации задается стохастическим уравнением

$$dp(t, T_1) = rp(t, T_1)dt - \zeta \mathrm{e}^{-(r+\delta)(T_1 - t)}dM_t^Q. \qquad (4.2)$$

Предположим, что инвестор может положить деньги в банк под постоянную процентную ставку, что соответствует наличию безрискового актива $B(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$dB(t) = rB(t)dt. \qquad (4.3)$$

Предположим также, что на рынке присутствует рисковый актив, динамика цены $S(t)$ которого задается стохастическим уравнением

$$dS(t) = S(t)[rdt + \sigma dw^Q(t)], \qquad (4.4)$$

где σ – постоянная волатильность. Ниже нам понадобится также иметь выражение для цены корпоративной облигации относительно объективной меры *P*, поскольку для инвестора естественно оптимизировать портфель относительно *P*.

При этом нам понадобится следующая форма теоремы Гирсанова (лемма 4.1).

Лемма 4.1. Вероятностная мера *P* эквивалентна относительно вероятностной меры *P* на *G* тогда и только тогда, когда существуют прогрессивно измеримый вещественный процесс β и предсказуемый положительный процесс κ такие, что процесс $L(t) = L_1(t)L_2(t)$, где

$$L_1(t) = \exp\left\{\int_0^t \beta(s)dw^Q(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \beta^2(s)ds\right\};$$

$$L_2(t) = \exp\left\{\int_0^t \ln(\kappa(u))dH(u) - \lambda^Q \int_0^{t\wedge\tau}[\kappa(u)-1]du\right\},\ \forall t \in [0,T],$$

$E^P[L(T)] = 1$. При этом $\dfrac{dP}{dQ} = L(T)$ и процесс $w^P(t) = w^Q(t) - \int_0^t \beta(s)ds$ является *G*-согласованным *P*-винеровским процессом, а процесс $M^P(t) = H(t) - \lambda^Q \int_0^t \kappa(u)[1 - H(u)]du$ является *G*-согласованным *P*-мартингалом.

Лемма 4.2. Относительно объективной меры *P* динамика цены $p(t,T_1)$ корпоративной облигации задается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) вида

$$dp(t,T_1) = p(t,T_1)[(1-H(t))[r+\delta-\delta\kappa]dt + H(t)rdt -$$

$$-(1-H(t-))\zeta dM^P(t)] =$$

$$= p(t-,T_1)[rdt + (1-H(t))\delta(1-\kappa)dt - (1-H(t-))\zeta dM^P(t)], \quad (4.5)$$

где

$$\begin{cases} p(t,T_1) = e^{-(r+\delta)(T_1-t)}, & \text{если} \quad \tau > t, \\ p(t,T_1) = (1-\zeta)e^{-(r+\delta)(T_1-\tau)}e^{r(t-\tau)}, & \text{если} \quad \tau = t. \end{cases}$$

Заметим, что в рассматриваемой модели разность кредитных спрэдов относительно мер *P* и *Q* можно представить в виде

$$\delta - \delta\kappa = \lambda^Q\zeta - \lambda^Q\zeta\kappa = \lambda^Q\zeta - \lambda^P\zeta = [\frac{\lambda^Q}{\lambda^P} - 1]\lambda^P\zeta,$$

где $\delta^P = \lambda^P\zeta$ – это кредитный спрэд относительно объективной меры *P*. Таким образом, если $\lambda^Q = \lambda^P$, то второе слагаемое в уравнении (4.5) исчезает, если до момента *t* дефолт не наступил. В этом случае инвестор не требует компенсации за риск дефолта.

Однако в ситуации, когда риск, неотъемлемо связанный с реальным дефолтом, нельзя устранить с помощью диверсификации, нужно явно учитывать второе слагаемое. Благодаря простой параметризации риска кредитного дефолта мы можем представить разность кредитных спрэдов в терминах премии за риск дефолта

$$\delta - \delta\Delta = \left(\frac{h^Q}{h^P} - 1\right)h^P\zeta = \left(\frac{1}{\Delta} - 1\right)\delta^P, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{h^Q}{h^P}.$$

Таким образом, компенсация за риск дефолта становится равной $\dfrac{1}{\Delta} - 1$. Поскольку неприятие инвестором риска дефолта подразумевает, что $\dfrac{1}{\Delta} > 1$, то игнорирование второго слагаемого приведет к недооценке ожидаемой доходности облигации, подверженной дефолту, при этом $\dfrac{1}{\Delta}$ называется премией за риск дефолта.

В силу леммы 4.1 динамику цен акций по мере *P* можно выразить следующим образом:

$$dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma dw^P(t)], \quad S(0) = s. \quad (4.6)$$

Цена акций растет со средней скоростью μ и имеет мгновенную волатильность σ по объективной мере *P*. Заметим, что снос в уравнении, описывающем динамику цены акции, изменяется, в отличие от волатильности, которая при замене риск-нейтральной вероятностной меры на объективную не изменяется. Динамика сберегательного счета имеет одно и то же представление как по мере P, так и по мере Q, поскольку она не является стохастической.

Динамика цены каждой рисковой ценной бумаги по мере P задана уравнениями (4.3), (4.5) и (4.6).

Оптимизация портфеля при функции полезности CRRA

Для того чтобы найти оптимальное распределение капитала между банковским счетом, рисковыми активами и корпоративными облигациями, воспользуемся методами теории стохастического управления. Пусть инвестор намерен максимизировать условное математическое ожидание конечного капитала на промежутке $[0, T]$ для $T < T_1$, где T_1 – момент погашения корпоративной облигации.

Пусть $h_S(t)$ – число рисковых активов, по которым инвестор в момент t занимает длинную позицию ($h_S(t) \geq 0$) или короткую позицию ($h_S(t) \leq 0$). Аналогично пусть $h_P(t)$ и $h_B(t)$ – число единиц корпоративной облигации и депозитных вкладов соответственно, которые инвестор покупает или продает в момент t. Капитал портфеля $h(t) = (h_S(t), h_P(t), h_B(t))$ в момент t имеет вид

$$V^h(t) = h_S(t)S(t) + h_P(t)P(t,T_1) + h_B(t)B(t).$$

Обозначим через $u(t) = (u_S(t), u_P(t), u_B(t))$ соответствующий относительный портфель. При этом $V^h(t) \equiv V^u(t)$. Пусть динамика цены $S(t)$ рискового актива относительно объективной меры P задается СДУ (4.6). Мы будем считать, что портфель $V^u(t)$ – самофинансируемый и, следовательно, подчиняется уравнению

$$\begin{cases} dV^u(t) = V^u(t-)[u_S(t)\mu + u_P(t)[\widetilde{H}(t)\delta(1-\kappa) + r] + \\ + (1 - u_S(t) - u_P(t))r]dt + V^u(t-)[u_S(t)\sigma dw^P(t) - u_P(t)\zeta dM^P(t)], \\ dH(t) = \lambda^P(1 - H(t))dt + dM^P(t) \end{cases} \qquad (4.7)$$

и начальным условиям $V^u(0) = v$, $H(0) = 0$. Здесь $\lambda^P = \lambda^Q\kappa$; $\delta = \lambda^Q\zeta$.

Пусть U – функция полезности типа CRRA, т. е.

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \quad \text{где} \quad 0 < \gamma < 1, \quad x \geq 0.$$

Рассмотрим следующую задачу оптимизации: найти

$$J(t,v,z) = \sup_{(u_S,u_P)\in\Pi_t(G)} E^P\left[\frac{V^{u,\gamma}(T)}{\gamma} | V^u(t) = v, H(t) = z\right]$$

для всех $(t,v,z) \in (0,T)\times(0,\infty)\times\{0,1\}$ и всех допустимых стратегий u. Зададим следующие процессы:

$$u_S^*(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)}, \quad t \in [0,T],$$

$$u_P^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta}\left(1 - \frac{1}{M(t) + N(T)}\right), & 0 \leq t < \tau \wedge T, \\ 0, \quad t \in [\tau \wedge T, T] \end{cases}$$

и

$$u_B^*(t) = \begin{cases} 1 - u_S^*(t) - u_P^*(t), & 0 \leq t < t \wedge \tau, \\ 0, \quad t \in [\tau \wedge T, T], \end{cases}$$

$$M(t) = \kappa^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{-\left(\frac{\lambda^P}{1-\gamma}[1 - \frac{\gamma}{\kappa}](T-t)\right)},$$

$$N(t) = \lambda^P\left(\exp[\frac{\lambda^P}{1-\gamma}(\frac{\gamma}{\kappa} - 1)(T-t)] - \exp[\frac{\gamma^2 r}{\gamma - 1}(T-t)]\right)\frac{1-\gamma}{\lambda^P(\gamma-\kappa) + \gamma^2\kappa r}.$$

Теорема 4.3. *Процесс* $u^*(t) = (u_B^*(t),\ u_S^*(t),\ u_P^*(t))$ *задает оптимальную стратегию.*

Найдем оптимальное значение $J(t,v,z)$.

Теорема 4.4. *Пусть функция полезности* U – *это CRRA, т. е.* $U(x)=\dfrac{x^{\gamma}}{\gamma}$. *Тогда оптимальная величина* $J(t,v,z)$ *имеет вид*

$$J(t,v,z)=\begin{cases}(f(t))^{1-\gamma}\left(\dfrac{v^{\gamma}}{\gamma}\right), & \text{если} \quad z=0,\\ e^{\left(\frac{1}{2}\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}+\gamma r\right)(T-t)}\left(\dfrac{v^{\gamma}}{\gamma}\right), & \text{если} \quad z=1,\end{cases} \tag{4.8}$$

где

$$f(t)=\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}+\frac{\gamma r}{1-\gamma}\right)(T-t)}\left(\mathrm{e}^{\left(-\frac{\lambda^P}{1-\gamma}+\frac{\lambda^P\gamma}{\kappa(1-\gamma)}\right)(T-t)}+\right.$$

$$\left.+\left(\mathrm{e}^{\left(-\frac{\lambda^P}{1-\gamma}-\frac{\lambda^P\gamma}{\kappa(1-\gamma)}\right)(T-t)}-\mathrm{e}^{-\frac{\gamma^2 r}{1-\gamma}(T-t)}\right)\lambda^P\left(\frac{1}{\kappa}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{1-\gamma}{\lambda^P(\gamma-\kappa)+\gamma^2\kappa r}\right).$$

Заметим, что $J_v(t,v,z)>0$ и $J_{vv}(t,v,z)<0$, т. е. $J(t,v,z)$ выпуклая функция аргумента *v* (начального капитала).

Оптимальные стратегии

Проанализируем полученные выше выражения для оптимальных стратегий по различным активам.

Оптимальный портфель по рисковым активам это постоянный портфель, независимо от того наступил уже дефолт или нет. Это происходит потому, что рисковые акции не коррелируют с дефолтом корпоративной облигации и, следовательно, нет необходимости хеджировать этот риск. Представим оптимальную стратегию u_S^* в виде

$$u_S^*(t)=\left(\frac{J_v}{vJ_{vv}}\right)\left(\frac{\mu-r}{\sigma^2}\right)=\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)\left(\frac{\mu-r}{\sigma^2}\right). \tag{4.9}$$

Оптимальная стратегия по акциям представляет собой произведение относительной толерантности к риску $-\dfrac{J_v}{vJ_{vv}}$ (величины, обратной к неприятию риска) и рыночной цены риска (коэффициента Шарпа) $\dfrac{\mu-r}{\sigma}$. Заметим, что оптимальная стратегия u_S^* не зависит от *T* и линейно зависит от *r*.

Из теоремы 4.2 следует, что снос и волатильность корпоративной облигации скачком изменяются при дефолте. Другими словами, стохастический процесс, являющийся единственным источником риска для корпоративной облигации, влияет и на снос, и на волатильность цены этой облигации. Изменения, возникающие при дефолте, можно интерпретировать как изменение множества инвестиционных возможностей для инвестора. Как правило, предполагается, что инвестор знает, объявлен дефолт или нет. Таким образом, оптимальные инвестиции в корпоративные облигации следует анализировать раздельно до дефолта и после него.

Оптимальная стратегия по корпоративной облигации до дефолта представляет собой возрастающую функцию премии за риск дефолта. В результате инвестор покупает тем больше корпоративных облигаций, чем выше цена дефолта. При этом чем выше процентная ставка, тем меньше инвестиции в корпоративные облигации при одинаковых остальных параметрах.

Напомним, что если дефолт задан в терминах пуассоновского процесса, то преддефолтная цена корпоративной облигации $p(t,T_1)=e^{-(r+\delta)(T_1-t)}$, где $T<T_1$. Если *t* приближается к *T*, то как временной горизонт для инвестиций $T-t$, так и длина интервала до момента погашения T_1-t стремятся к нулю. Это приводит к повышению цены корпоративной облигации при отсутствии дефолта. Другими словами, корпоративная облигациия тем дешевле, чем больше временной горизонт для инвестиций. Поскольку премия за риск дефолта равна $\dfrac{\lambda^Q}{\lambda^P}$, то единственный риск, с которым сталкивается ин-

вестор, покупающий корпоративную облигацию, – это риск дефолта. При этом инвестор, естественно, будет вкладывать больше в инвестиции с бóльшим горизонтом, поскольку при заданной вероятности дефолта цена корпоративной облигации возрастает и достигает своего номинала по мере приближения к моменту погашения при условии, что не было дефолта. Следуя правилу «покупай дешево, продавай дорого», инвестор должен вкладывать в корпоративную облигацию больше тогда, когда ее цена невысока, т. е. когда до даты погашения далеко.

Оптимальная стратегия для депозита задается соотношением $u_B^*(t) = 1 - u_P^*(t) - u_S^*(t)$ для всех $t \in [0, \tau \wedge t)$. После дефолта цена корпоративной облигации падает до нуля и инвестор получает лишь возмещение. Поскольку корпоративной облигации после дефолта не существует, то достаточно найти оптимальное значение величины $u_B^*(t)$ из соотношения $u_B^*(t) + u_S^*(t) = 1$ для всех $t \in [\tau \wedge t, T]$.

Отметим в заключение, что полученные выше выражения для оптимальной портфельной стратегии позволяют также изучить влияние различных параметров на динамику портфельной стратегии.

Рекомендуемая литература

1. *Бьорк Т.* Теория арбитража в непрерывном времени / Т. Бьорк. – М. : МЦНМО, 2010.

2. *Халл Джон К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты / Джон К. Халл. – М.; СПб.; Киев : Издательский дом Вильямс, 2008.

3. *Krylov N. V.* Controlled diffusion processes / N. V. Krylov. – Berlin : Springer, 2008.

4. *Pardoux E.* Markov Processes and Applications Algorithms. Networks, Genome and Finance / E. Pardoux. – Paris : J. Wiley and Sons, Ltd, 2008.

Оглавление

Введение ... 3
1. Дискретные модели финансовых рынков ... 5
1.1. Одношаговые и многошаговые дискретные модели ... 5
1.2. Арбитраж ... 7
1.3. Риск-нейтральные меры ... 9
2. Дискретная задача оптимизации ... 14
2.1. Оптимальные портфели и динамическое программирование. Одношаговая модель ... 14
2.2. Риск-нейтральный подход ... 19
2.3. Инвестиции с потреблением ... 23
2.4. Многошаговая модель ... 26
2.5. Оптимальные портфели и мартингальные методы ... 40
2.6. Динамическое программирование ... 48
3. Непрерывные финансовые рынки ... 52
3.1. Модели BS и BSM и хеджирующие портфели ... 52
3.2. Оптимизация портфельных инвестиций ... 61
4. Оптимизация на рынках, допускающих дефолт ... 78
Рекомендуемая литература ... 87

Учебное издание

Белопольская Яна Исаевна

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ
ПОРТФЕЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Учебное пособие

Редактор А. В. Афанасьева
Корректор К. И. Бойкова
Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 26.12.14. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.
Усл. печ. л. 5,1. Тираж 40 экз. Заказ 151 . «С» 106.
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.
Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 5.