

省选模拟赛 题解

dwjshift

2018 年 3 月 30 日

1 table

1.1 解法一

当 $p = 1$ 时，按照题意模拟一遍即可。时间复杂度 $O(nm + q)$ 。
期望得分 10 分。

1.2 解法二

显然 $f_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - bf_{i,j-1}}{a}$ ，因此在第 p 行上方的数可以倒着推回去得到。
时间复杂度 $O(nm + q)$ 。

结合解法一可以得到 20 分。

1.3 解法三

在解法二的基础上求出 a 的乘法逆元，可以获得 40 分。

1.4 解法四

考虑第 p 行的每个数对下方的行的贡献。可以视为，有一个初始位于 (p, i) 且值为 $f_{p,i}$ 的数，每次向下走一步并乘 a 或向右下走一步并乘 b ，再把所处方格加上这个数。因此，对于 $x > p$ ，有

$$f_{x,y} = \sum_{i=0}^{x-p} f_{p,y-i} a^{x-p-i} b^i \binom{x-p}{i}$$

预处理出逆元后可以在 $O(n)$ 的时间内回答一次在第 p 行下方的询问。结合前面的做法可以得到 60 分。

1.5 解法五

类似解法四的思路，考虑第 p 行对上方的行的贡献。可以视为，有一个初始位于 (p, i) 且值为 $f_{p,i}$ 的数，每次向上走一步并除 a 或向右走一步并乘 $-\frac{b}{a}$ （离开第 p 行后才能向右走），再把所处方格加上这个数。因此，对于 $x < p$ ，有

$$f_{x,y} = \sum_{i=1}^y \frac{f_{p,i} (-b)^{y-i} \binom{y-i+p-x-1}{p-x-1}}{a^{p-x+y-i}}$$

同样可以在 $O(n)$ 的时间内回答一次在第 p 行上方的询问。结合前面的做法可以获得满分，总时间复杂度为 $O(nq + m)$ 。注意预处理逆元要使用线性的做法。

2 program

2.1 解法一

对每次询问按照题意用链表模拟一遍即可。设 k 表示串中最大的数字，时间复杂度为 $O(nkq)$ ，期望得分 20 分。

2.2 解法二

当询问左端点都为 1 时，所有询问的答案可以用 $O(nk)$ 的复杂度一并求出来。结合前面的做法，期望得分 30 分。

2.3 解法三

对询问右端点都为 n 的数据，考虑从右往左依次加入每个字符。假设当前加入的是第 i 个字符，我们已经求出了 $[i+1, n]$ 的答案以及其运行结束后程序剩下的序列。如果 i 是“<”那么直接结束；如果 i 是数字的话， i 的答案就是 $i+1$ 的答案再加上这个数字的一次输出；如果 i 是“>”，那么再分两种情况讨论一下：若 $[i+1, n]$ 是把指针右移出序列而结束的话，直接继承 $i+1$ 的答案即可；否则就相当于在 $[i+1, n]$ 运行剩下的序列前面接上一个“>”再接着跑。

时间复杂度 $O(nk + q)$ 。结合前面的做法，期望得分 50 分。

2.4 解法四

注意到指针的移动是连续的，如果我们在程序开头加入足够多的“>”，那么任意一个区间的运行过程一定都是整个程序运行过程的一个子段。因此只要能求出这个子段的开始和结束时间，再直接用前缀和减一下就能得到答案了。

设 f_i 表示指针第一次从 $i-1$ 移到 i 的时间， g_i 表示指针第一次从 i 移到 $i-1$ 的时间。先用链表模拟一遍整个程序，顺带记录下 f_i, g_i 。那么 $[l, r]$ 对应的子段的开始时间就是 f_l ，结束时间就是 $\min(f_{r+1}, g_l)$ 。

时间复杂度 $O(nk + q)$ ，期望得分 100 分。

3 path

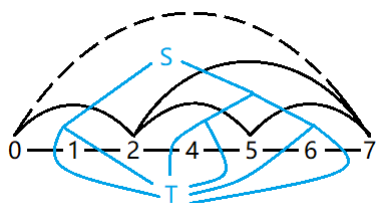
3.1 解法一

暴力枚举经过了哪些颜色，之后路径其实就已经确定了，判一下即可。

时间复杂度 $O(2^k(n+m))$ ，其中 k 为不同的颜色个数。期望得分 40 分。

3.2 解法二

可以发现给定的图是一个平面图，并且其对偶图主要部分形成了一棵树。平面图上的一个环对应对偶图上的一个割。因此我们可以额外加入一条从结点 0 到结点 n 的边，把这条边下方的区域视为源点 S ，外侧的区域视为汇点 T ，那么图中的最短路就转化为了最小环，即对应 S 与 T 之间的最小割。做的时候可以先把无用的点和边删去，那么原图的最底层一定就是一条链了。例如，样例二的图大概长这样：



考虑对颜色的限制怎么放到对偶图上。假设对偶图上 x 和父亲之间的边对应的是原图的边 (u, v) ，如果 x 被划分到 T 割的话，也就意味着跳过了 $u+1..v-1$ 这些结点。如果对偶图上另一个区域 y 对应的边也跳过了某个与 $u+1..v-1$ 的其中一个结点同色的结点，那么 y 也必须同时划分到 T 割。具体建图时可以给每种颜色添加一个辅助点，然后从 x 向 $u+1..v-1$ 的颜色的辅助点连容量为正无穷的双向边。不过这样边数会变成平方级别的，实际上 x 在 T 割时其子树肯定都在 T 割，因此只需要向未被更底层的边覆盖的结点连就可以了。

时间复杂度 $O(\maxflow(O(n), O(m)))$ ，期望得分 100 分。