КАРМАННЫЙ СПРАВОЧНИК

Сборник формул по математике

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

«Астрель»

Карманный справочник

Сборник формул по математике

АСТ • АСТРЕЛЬ
Москва 2003

УДК 51(03)
ББК 22.1я2
С23

Серия основана в 2003 году
Оформление обложки — дизайн-группа
«Дикобраз»

Сборник формул по математике. — М.:
С23 ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2003. — 159, [1] с.: ил. — (Карманный справочник).
ISBN 5-17-017211-7 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 5-271-05976-6 (ООО «Издательство Астрель»)

В справочнике приведены все необходимые формулы школьного курса математики и высшей математики, изучаемой на первых курсах вузов.

УДК 51(03)
ББК 22.1я2

Подписано в печать 20.06.03. Формат 84x108/64.
Усл. печ. л. 5,0. Печать офсетная.
Доп. тираж 15000 экз. Заказ № 1234.

ISBN 5-17-017211-7 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 5-271-05976-6 (ООО «Издательство Астрель»)

СОДЕРЖАНИЕ

Некоторые математические обозначения

Знак	*Значение*	*Пример*
$=$	равно	$a = b$
$\neq$	не равно	$a \neq b$
$\approx$	приблизительно равно	$a \approx b$
$>$, $<$	больше, меньше	$7 > 4$, $2 < 5$
$\geqslant$	больше или равно	$a \geqslant b$
$\leqslant$	меньше или равно	$a \leqslant b$
$\lvert\ \rvert$	абсолютная величина	$\lvert a\rvert$
$\sqrt[n]{\ }$	корень n-й степени	$\sqrt[3]{27} = 3$
$!$	факториал	$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$\log_a b$	логарифм числа b по основанию a	$\log_2 16 = 4$
Σ	сумма	
$\triangle$	треугольник	$\triangle ABC$
$\angle$	угол	$\angle ABC$
$\smile$	дуга	$\overset{\smile}{AB}$
$\parallel$	параллельно	$a \parallel b$

Знак	*Значение*	*Пример*
$\perp$	перпендикулярно	$a \perp b$
$\sim$	подобно	$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$
$^\circ$ $'$ $''$	градус минута секунда	$20^\circ 10' 37''$
sin	синус	$\sin 90^\circ = 1$
cos	косинус	$\cos \pi = -1$
tg	тангенс	$\mathrm{tg}\, 60^\circ = \sqrt{3}$
ctg	котангенс	$\mathrm{ctg}\, 45^\circ = 1$
arcsin	арксинус	$\arcsin 1 = 90^\circ$
arccos	арккосинус	$\arccos(-1) = \pi$
arctg	арктангенс	$\mathrm{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ$
arcctg	арккотанкенс	$\mathrm{arcctg}\, 1 = 45^\circ$

• Правила действий с рациональными числами (дробями)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Признаки делимости

Признак делимости на 2. Число, делящееся на 2, называется четным, не делящееся — нечетным. Число делится на 2, если его последняя цифра четная или нуль. В остальных случаях не делится.

Признак делимости на 4. Число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4 В остальных случаях не делится.

Признак делимости на 8. Число делится на 8, если три последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 8. В остальных случаях не делится.

Признаки делимости на 3 и на 9. На 3 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 3; на 9 — только те, у которых сумма цифр делится на 9.

Признак делимости на 6. Число делится на 6, если оно делится одновременно на 2 и на 3. В остальных случаях не делится.

Признак делимости на 5. На 5 делятся числа, последняя цифра которых 0 или 5. Другие не делятся.

Признак делимости на 25. На 25 делятся числа, две последние цифры которых нули или образуют число, делящееся на 25 (т.е. числа, оканчивающиеся на 00, 25, 50 или 75). Другие числа не делятся.

Признаки делимости на 10, 100 и 1000. На 10 делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на 100 — только те числа, у которых две последние цифры нули, на 1000 — только те, у которых три последние цифры нули.

Признак делимости на 11. На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо отличается от нее на число, делящееся на 11.

Пропорции

- Два равных отношения образуют пропорцию

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

- Основное свойство пропорции

$$ad=bc$$

- Нахождение членов пропорции

$$a=\frac{bc}{d};\ b=\frac{ad}{c};\ c=\frac{ad}{b};\ d=\frac{bc}{a}$$

- Пропорции, равносильные пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

- Производная пропорция — следствие данной пропорции

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

в виде

$$\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd},$$

где m, n, p, q — произвольные числа, причем p и q не равны нулю одновременно.

Средние величины

- Среднее арифметическое
  - двух величин: $\frac{a+b}{2}$
  - n величин: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$

- Среднее геометрическое (среднее пропорциональное)
  - двух величин: $\sqrt{ab}$
  - n величин: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$

- Среднее квадратичное
  - двух величин: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
  - n величин: $\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}$

- Среднее гармоническое
  - двух величин: $\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}$
  - n величин: $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$

Золотое сечение

Величина a делится на части x и $a - x$ так, чтобы

$$x = \sqrt{a(a - x)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a \approx 0{,}618a$$

Некоторые конечные числовые ряды

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + (2n - 2) + 2n = n(n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n - 1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n - 1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

АЛГЕБРА

Формулы сокращенного умножения

- Квадрат суммы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Квадрат разности

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Куб суммы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Куб разности

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

- Сумма кубов

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

- Разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Свойства степени

$a^0 = 1$ $\qquad\qquad$ $a^m \cdot a^n = a^{m + n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\qquad$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ $\qquad$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ $\qquad$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Свойства квадратного (арифметического) корня

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$ $\qquad$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt{a^m} = (\sqrt{|a|})^m$

Уравнения и системы уравнений

- Решение уравнения первой степени $ax = b$

$$x = \frac{b}{a} \ (a \neq 0)$$

- Решение системы двух уравнений первой степени $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b} \\ y = \dfrac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} \end{cases} \quad (ab_1 - a_1b \neq 0) \qquad (1)$$

- Запись решения (1) через определители

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

- Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

• приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

• квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом $ax^2 + 2kx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

- Теорема Виета

• для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

• для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

• для приведенного кубического уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q$$
$$x_1x_2x_3 = -r$$

• **Разложение на множители квадратного трехчлена**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

• **Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена**

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

• **Решение биквадратного уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$**

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

• **Формула действительного корня неполного кубического уравнения $y^3 + py + q = 0$**

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Неравенства

• Свойства неравенств

- Если $a > b$, то $b < a$.
- Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

- Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
- Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.
- Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$.
- Если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

- Абсолютная величина числа (модуль)
  - Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$.
  - Если $a < 0$, то $|a| = -a$.
- Некоторые важные неравенства

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

$$|a - b| \geqslant ||a| - |b||$$

$$a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$$

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \ (a > 0)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \ (ab > 0)$$

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \ (a > 0,\ b > 0)$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$ (неравенство Коши)

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leqslant \sqrt{ab} \ (a > 0,\ b > 0)$$

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

- Решение неравенства первой степени $ax > b$
  - Если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$.
  - Если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$.
- Решение системы неравенств первой степени

$$\begin{cases} x > a; \\ x > b. \end{cases}$$

  - Если $a > b$, то $x > a$.
  - Если $a < b$, то $x > b$.
- Решение системы неравенств первой степени

$$\begin{cases} x < a; \\ x < b. \end{cases}$$

  - Если $a > b$, то $x < b$.
  - Если $a < b$, то $x < a$.
- Решение системы иеравенств первой степени

$$\begin{cases} x > a; \\ x < b. \end{cases}$$

  - Если $a > b$, то система не имеет решения.
  - Если $a < b$, то $a < x < b$.
- Решение системы неравенств первой степени

$$\begin{cases} x < a; \\ x > b. \end{cases}$$

- Если $a > b$, то $b < x < a$.
- Если $a < b$, то система не имеет решения.

- Решение неравенства второй степени $ax^2 + bx + c > 0$.
  - Если $a > 0$, то $x < x_1$ и $x > x_2$.
  - Если $a < 0$, то $x_1 < x < x_2$.

Здесь x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — действительные корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Если действительных корней нет, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ справедливо для всех x при $a > 0$; и не имеет решений при $a < 0$.

Прогрессии

- Арифметическая прогрессия
  - Формула n-го члена

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

  - Сумма n первых членов

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n$$

  - Свойства

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_{k+1} + a_{n-k}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Если $d > 0$, то прогрессия возрастающая; если $d < 0$, то прогрессия убывающая.

- Геометрическая прогрессия
  - Формула n-го члена

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

  - Сумма n первых членов

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

  - Свойства

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_{k+1} \cdot b_{n-k}$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$$

Если $q > 1$, то прогрессия возрастающая;
если $0 < |q| < 1$, то прогрессия убывающая;
если $q < -1$, то прогрессия знакопеременная.

  - Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($0 < |q| < 1$)

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Логарифмы

- **Определение логарифма.** Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

- Свойства логарифма

$$b^{\log_b a} = a \qquad \log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a a^m = m$$

- Логарифм произведения

$$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$$

- Логарифм частного

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

- Логарифм степени

$$\log_c a^k = k\log_c a$$

- Логарифм корня

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log_c a$$

- Переход к новому основанию

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

- Формулы, следующие из свойств логарифмов

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$$

$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$$

$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$$

Сравнение логарифмов

Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$ — знак неравенства меняется.

Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ — знак неравенства не меняется.

Если $1 < a < b$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.

Если $0 < a < b < 1$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x$.

Если $1 < a < b$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.

Если $0 < a < b < 1$ и $0 < x < 1$, то $\log_a x < \log_b x$.

Теория соединений. Бином Ньютона

- Определение факториала

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

- Основное свойство факториала

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

- Формула Стирлинга (факториалы больших чисел)

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right)$$

$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}$$

- Размещения из n по m элементов — соединения, отличающиеся самими элементами или их порядком

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

- Перестановки — соединения, отличающиеся только порядком элементов

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$P_n = A_n^n$$

- Сочетания из n по m элементов — соединения, отличающиеся только самими элементами

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}$$

- Свойства сочетаний

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

- Бином Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots$$

$$\ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$$

$$C_n^1 = n; \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}; \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- Треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

НАЧАЛА АНАЛИЗА

Понятие предела и его свойства см. на с. 97.

Определение производной и ее свойства см. на с. 98.

Сводку производных элементарных функций см. на с. 99, 100.

- Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Формула Лагранжа

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

где $c \in (a; b)$.

- Функция $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на заданном промежутке, если для любых x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Первообразные некоторых функций

$f(x)$	$F(x)$
0	C
k	$kx + C$

Продолжение табл.

$f(x)$	$F(x)$
x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$x^{-\frac{1}{2}}$	$2\sqrt{x} + C$
a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$

- **Формула Ньютона—Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Определенный интеграл и его свойства см. на с. 127—132

ГРАФИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Линейная функция $y = kx + b$

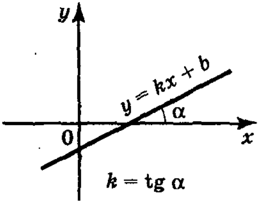


Рис. 1

Дробно-линейная функция

$$y = \frac{k}{x} \ (k \neq 0, \ x \neq 0)$$

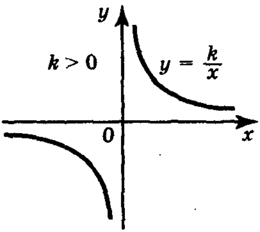


Рис. 2

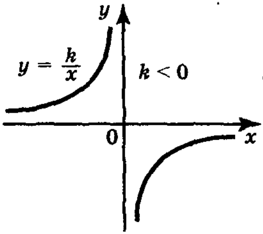


Рис. 3

Степенная функция $y = x^n$

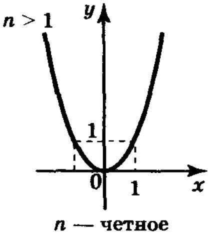


Рис. 4

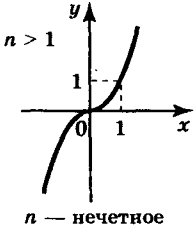


Рис. 5

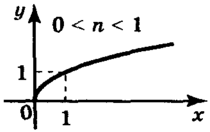


Рис. 6

Показательная функция
$y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

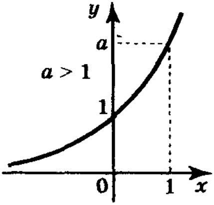


Рис. 7

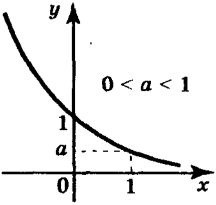


Рис. 8

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$

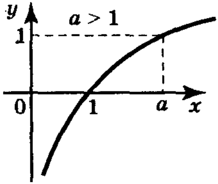


Рис. 9

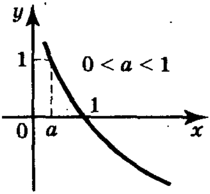


Рис. 10

Тригонометрические функции

$y = \sin x$

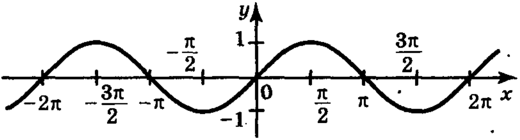


Рис. 11

$y = \cos x$

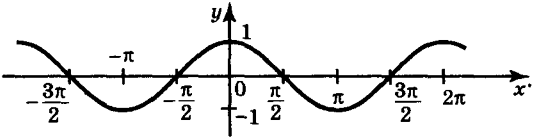


Рис. 12

$y = \text{tg}\, x$

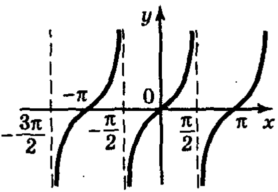


Рис. 13

$y = \text{ctg}\, x$

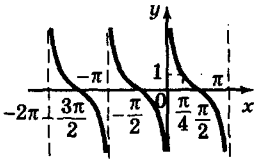


Рис. 14

Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin x$

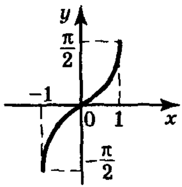


Рис. 15

$y = \arccos x$

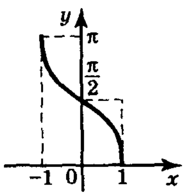


Рис. 16

$y = \text{arctg}\, x$

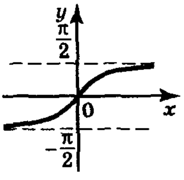


Рис. 17

$y = \text{arcctg}\, x$

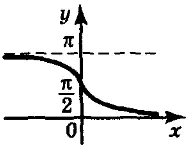


Рис. 18

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Градусная и радианная мера углов

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана}$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ радиана} \approx 0{,}000291 \text{ радиана}$$

$$1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ радиана} \approx 0{,}000005 \text{ радиана}$$

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$

225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Тригонометрические функции

Синус угла α — ордината точки единичной окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\sin\alpha = y$ (рис. 19).

Косинус угла α — абсцисса точки окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\cos\alpha = x$ (рис. 19).

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

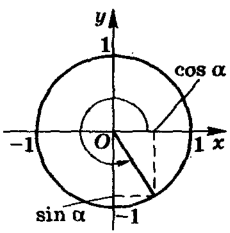


Рис. 19

Знаки значений тригонометрических функций

Четверть	sin α	cos α	tg α	ctg α	sec α	cosec α
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞
$\sec\alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	-1	∞	1
$\mathrm{cosec}\,\alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	∞	-1	∞

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

$\sec\alpha = \frac{c}{b}$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$

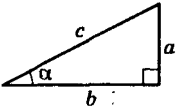


Рис. 20

Тригонометрические тождества

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

Выражение одних тригономет

	sin	cos	tg	
$\sin x$		$= \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$= \dfrac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	
$\cos x$	$= \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$		$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	
$\operatorname{tg} x$	$= \dfrac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$= \dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		
$\operatorname{ctg} x$	$= \dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$= \dfrac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$= \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$	
$\sec x$	$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$= \dfrac{1}{\cos x}$	$= \pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$	
$\operatorname{cosec} x$	$= \dfrac{1}{\sin x}$	$= \dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$= \dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}$	

рических функций через другие

	ctg	sec	cosec
	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	$=\dfrac{1}{\mathrm{cosec}\, x}$
	$=\dfrac{\mathrm{ctg}\, x}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sec x}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{\mathrm{cosec}^2 x-1}}{\mathrm{cosec}\, x}$
	$=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\, x}$	$=\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\mathrm{cosec}^2 x-1}}$
		$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$=\pm\sqrt{\mathrm{cosec}^2 x-1}$
	$=\dfrac{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}}{\mathrm{ctg}\, x}$		$=\dfrac{\mathrm{cosec}\, x}{\pm\sqrt{\mathrm{cosec}^2 x-1}}$
	$=\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}$	$=\dfrac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	

Формулы сложения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$$

Формулы приведения тригонометрических функций

$$\sin(\pm\alpha + \pi n) = \pm(-1)^n\sin\alpha$$

$$\cos(\pm\alpha + \pi n) = (-1)^n\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pm\alpha + \pi n) = \pm\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pm\alpha + \pi n) = \pm\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sin\left(\pm\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n\cos\alpha$$

$$\cos\left(\pm\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \mp(-1)^n\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Тригонометрические функции кратных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^3\alpha - 1}$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha}$$

Тригонометрические функции половинного угла

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Сумма тригонометрических функций

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg}2\alpha$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Понижение степени тригонометрических функций

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha - 3\cos \alpha)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3)$$

Произведение тригонометрических функций

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

Формула дополнительного угла

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(x - \alpha),$$

где $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Соотношения между обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x =$$

$$= \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x =$$

$$= \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x =$$

$$= \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ГЕОМЕТРИЯ

Треугольники

- Стандартные обозначения, используемые в сборнике формул (рис. 21)

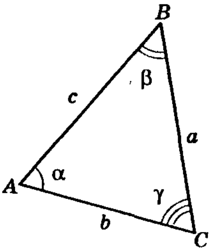


Рис. 21

A, B, C — вершины;
α, β, γ — углы;
a, b, c — стороны, противолежащие углам α, β, γ (вершинам A, B, C) соответственно;
h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные на стороны a, b, c соответственно;
m_a, m_b, m_c — медианы;
l_a, l_b, l_c — биссектрисы;
R — радиус описанной окружности;
r — радиус вписанной окружности.

- Формулы вычисления площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left(p = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

$$S = rp \qquad S = \frac{abc}{4R}$$

- **Формулы для вычисления медианы, биссектрисы, высоты через стороны треугольника**

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$l_a^2 = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}$$

$$h_a^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

- **Отношения высот и сторон треугольника**

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

- **Теорема косинусов**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- **Теорема синусов**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- **Теорема тангенсов (формулы Региомонтана)**

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

- Теорема Пифагора (рис. 22)

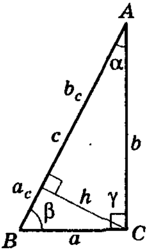


Рис. 22

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\angle C = 90°)$$

$$R = \frac{c}{2} = m_c$$

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{b_c}{h} = \frac{h}{a_c}$$

- Площадь прямоугольного треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}hc \ (\angle C = 90°)$$

- **Равносторонний треугольник (рис. 23)**

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = 2r$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

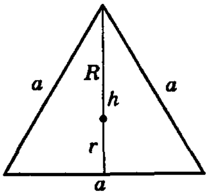


Рис. 23

- **Решение треугольников**
  - Прямоугольный треугольник (рис. 22)

$$a = c\sin\alpha \qquad b = c\cos\alpha$$

$$a = b\operatorname{tg}\alpha \qquad b = a\operatorname{ctg}\alpha$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{b}{\cos\alpha}$$

  - Произвольный треугольник (рис. 21)

$$a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad b = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$a = c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \qquad c = b\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Четырехугольники

- Параллелограмм (рис. 24)

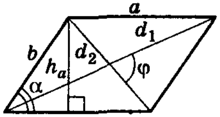


Рис. 24

$$S = ah_a = bh_b$$
$$S = ab\sin\alpha$$
$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$
$$P = 2(a + b)$$
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

- Прямоугольник (рис. 25)

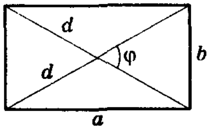


Рис. 25

$$S = ab = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$$
$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$P = 2(a + b)$$

- Ромб (рис. 26)

$$S = ah = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2$$

$$d_1 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$d_2 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$$

$$r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}a\sin\alpha$$

$$P = 4a$$

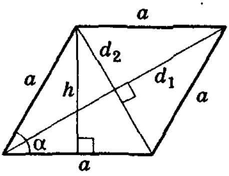


Рис. 26

- Квадрат (рис. 27)

$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$$
$$P = 4a$$
$$d = a\sqrt{2}$$
$$R = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$r = \frac{1}{2}a$$

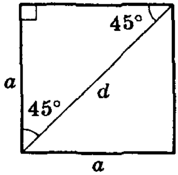


Рис. 27

- Трапеция (рис. 28)

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

$$MN = \frac{1}{2}(a+b)$$

(средняя линия)

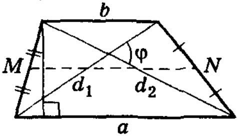


Рис. 28

• Произвольный выпуклый четырехугольник (рис. 29)

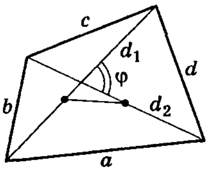


Рис. 29

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°,$$

где α, β, γ, δ — внутренние углы четырехугольника.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2,$$

где m — отрезок, соединяющий середины диагоналей.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

Правильные n-угольники

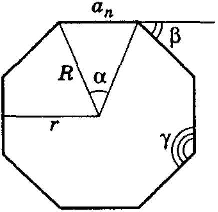


Рис. 30

• Центральный угол

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

• Внешний угол

$$\beta = \frac{360^\circ}{n}$$

- Внутренний угол

$$\gamma = 180^\circ - \beta$$

- Сторона

$$a_n = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

- Радиусы описанной и вписанной окружностей

$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

- Площадь

$$S = \frac{1}{2}na_nr = nr^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}nR^2\sin\alpha = \frac{1}{4}na_n^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

Окружность и круг

- Длина окружности

$$C = 2\pi r = \pi d$$

- Длина дуги, равной n°

$$L = \frac{\pi r}{180^\circ}n^\circ$$

- Площадь круга

$$S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \frac{Cd}{4}$$

- Свойства хорд, секущих и касательной (рис. 31)

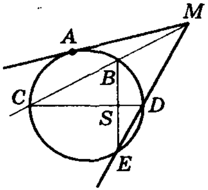


Рис. 31

$$BS \cdot ES = CS \cdot DS$$
$$MB \cdot MC = MD \cdot ME$$
$$MA^2 = MB \cdot MC = MD \cdot ME$$

- Сегмент и сектор (рис. 32)

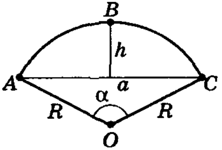


Рис. 32

$$a = 2R \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$h = \frac{a}{2}\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}$$

- Площадь сектора: $S_{OABC} = \frac{1}{2} R^2\alpha$

- Площадь сегмента: $S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OAC}$

- Площадь кругового кольца (рис. 33)

$$S = \pi(R^2 - r^2) =$$
$$= \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\bar{r}k,$$

где R, r — внешний и внутренний радиусы, D, d — внешний и внутренний диаметры, $\bar{r}$ — средний радиус, k — ширина кольца.

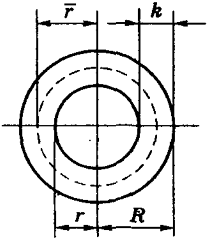


Рис. 33

Многогранники

- Стандартные обозначения, используемые в сборнике формул:

V — объем;

$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности;

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания;

$P_{\text{осн}}$ — периметр основания:

$P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения;

l — длина ребра;

h — высота.

- Призма (рис. 34)

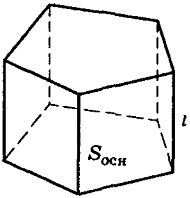


Рис. 34

$$S_{бок} = P_{\perp} l$$
$$S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок}$$
$$V = S_{осн} \cdot h$$

- прямая призма

$$S_{бок} = P_{осн}\ (l = h)$$
$$V = S_{осн} \cdot l$$

- Параллелепипед (рис. 35)

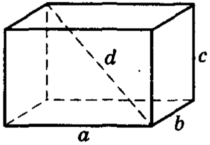


Рис. 35

$$S_{полн} = 2(ab + bc + ac)$$
$$V = abc$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

- Куб (рис. 36)

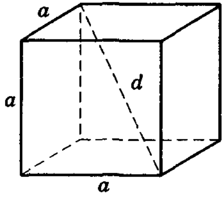


Рис. 36

$$S_{полн} = 6a^2$$
$$V = a^3$$
$$d^2 = 3a^2$$

- Пирамида (рис. 37)

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

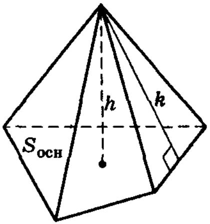


Рис. 37

- Правильный тетраэдр (основание — равносторонний треугольник)

$$S_{\text{полн}} = a^2\sqrt{3}.$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

- Радиус описанной сферы

$$R = \frac{3}{4} h$$

- Радиус вписанной сферы

$$r = \frac{1}{4} h$$

- Правильная пирамида

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot k,$$

где $P_{\text{осн}}$ — периметр основания, k — апофема.

• Усеченная пирамида (рис. 38)

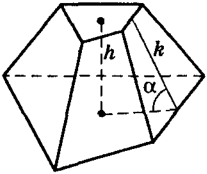


Рис. 38

$$V = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2),$$

где S_1 и S_2 — площади оснований.

$$S_{бок} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\alpha},$$

где α — двугранный угол при ребре нижнего основания.

• Формула Эйлера

$$N - L + F = 2,$$

где N — число вершин, L — число ребер, F — число граней выпуклого многогранника.

Правильные многогранники

• Стандартные обозначения, используемые в сборнике формул:

a — ребро многогранника;
V — объем;
S — площадь боковой поверхности;
R — радиус описанной сферы;
r — радиус вписанной сферы;
H — высота.

- Тетраэдр (рис. 39)

$$S = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

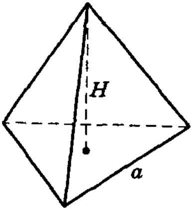


Рис. 39

- Куб (рис. 40)

$$S = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{a}{2}$$

$$H = a$$

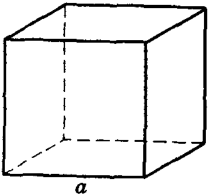


Рис. 40

- Октаэдр (рис. 41)

$$S = 2a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

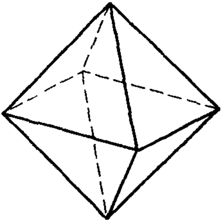


Рис. 41

- Додекаэдр (рис. 42)

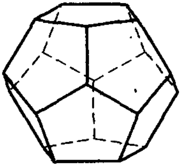


Рис. 42

$$S = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

$$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$$

$$r = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$$

- Икосаэдр (рис. 43)

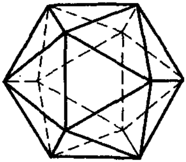


Рис. 43

$$S = 5a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$$

$$R = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$$

Тела вращения

- Цилиндр (рис. 44)

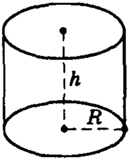


Рис. 44

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$$

$$V = \pi R^2 h$$

- Конус (рис. 45)

$$S_{бок} = \pi Rl$$
$$S_{полн} = \pi R(R + l)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

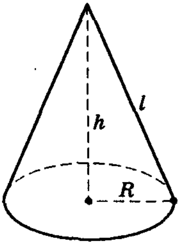


Рис. 45

- Усеченный конус (рис. 46)

$$S_{бок} = \pi l(R + r)$$
$$S_{полн} = S_{бок} + \pi(R^2 + r^2)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

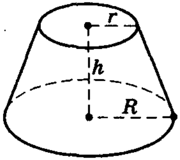


Рис. 46

- Шар (рис. 47)

$$S_{сферы} = 4\pi R^2 = \pi d^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi d^3}{6}$$

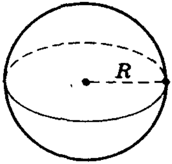


Рис. 47

- Шаровой сектор (рис. 48)

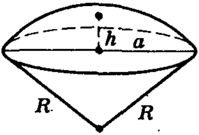


Рис. 48

$$S = \pi R(2h + a)$$

$$V = \frac{2\pi R^2 h}{3}$$

- Шаровой сегмент (рис. 49)

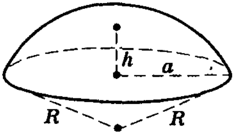


Рис. 49

$$a^2 = h(2R - h)$$

$$S_{бок} = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$$

$$S_{полн} = \pi(2Rh + a^2) =$$

$$= \pi(h^2 + 2a^2)$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$$

- Шаровой пояс (слой) (рис. 50)

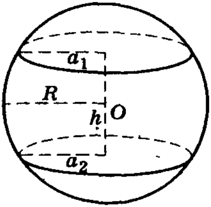


Рис. 50

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\left(a_1^2 + a_2^2\right)h$$

Векторы

- Координаты вектора с началом в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

- Координаты суммы векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

- Свойства сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$
$$\vec{a} + 0 = \vec{a}$$
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

- Координаты произведения вектора на число

$$\lambda \cdot \vec{a}(x, y, z) = \vec{c}(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

- Свойства умножения

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$$
$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$
$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$
$$0 \cdot \vec{a} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

- Скалярное произведение векторов

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \text{ и } \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

- Свойства скалярного произведения

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geqslant 0$$
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$
$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$
$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$$

- Длина вектора $\vec{a}(x, y, z)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Косинус угла между векторами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Координаты точки

- Параллельный перенос системы координат

$$x' = x - a,$$
$$y' = y - b,$$

где $O'(a, b)$ — новое начало, (x, y) — старые координаты точки, (x', y') — новые координаты.

- Поворот системы координат (начало неподвижно)

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

где (x, y) — старые координаты точки, (x', y') — новые координаты, α — угол поворота.

- Полярные координаты точки с прямоугольными координатами x и y

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

- Прямоугольные координаты точки с полярными координатами ρ и φ

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

- Расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Расстояние между точками (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) в полярной системе координат

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

- Координаты точки, делящей отрезок с концами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в данном отношении l

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, \quad y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}$$

- Координаты середины отрезка с концами (x_1, y_2) и (x_2, y_2)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Площадь треугольника

- Площадь треугольника с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3)

$$S = \pm \frac{1}{2}\Big((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\Big)$$

Уравнение прямой

- Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

- Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b,$$

где $k = \operatorname{tg} \varphi$ (угловой коэффициент) — наклон прямой к оси Ox, b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

- Тангенс угла между прямыми с угловыми коэффициентами k и k'

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k' - k}{1 + k'k}$$

- Тангенс угла между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

- Условие параллельности прямых

$$k' = k$$

- Условие перпендикулярности прямых

$$k' = -\frac{1}{k}$$

• Уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_1, y_1)

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

где k — угловой коэффициент прямой.

• Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

• Три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежат на одной прямой, если

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

• Уравнение прямой, отсекающей отрезки a и b на осях координат

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

• Расстояние от точки (x_1, y_1) до прямой $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Уравнение окружности

- Уравнение окружности с центром (x_0, y_0) и радиусом R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

- Параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t,$$

где t — параметр.

Эллипс

- Каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Фокусы эллипса — точки $F(c, 0)$ и $F'(-c, 0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$.

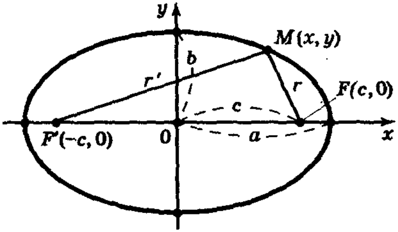


Рис. 51

- Фокальные радиусы точки (x, y) эллипса

$$r = a - \varepsilon x; \; r' = a + \varepsilon x,$$

где $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ — эксцентриситет эллипса.

- Фокальный параметр эллипса

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

- Параметрические уравнения эллипса с полуосями a и b

$$x = a\cos t,$$
$$y = b\sin t$$

- Касательная к эллипсу в точке $M(x_0, y_0)$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- Площадь

$$S = \pi ab$$

Гипербола

- Каноническое уравнение гиперболы с полуосями a и b

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

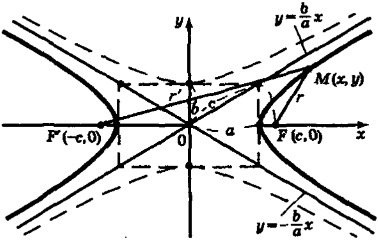


Рис. 52

- Фокусы гиперболы — точки $F(c,\ 0)$ и $F'(-c,\ 0)$, где $c^2 = a^2 + b^2$.

- Фокальные радиусы точки $(x,\ y)$ гиперболы

$$r = \pm\,(\varepsilon x - a),\ r' = \pm\,(\varepsilon x + a),$$

где $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ — эксцентриситет гиперболы.

- Асимптоты гиперболы

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

- Фокальный параметр

$$p = \frac{b^2}{a}$$

- Касательная в точке $M(x_0,\ y_0)$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- Сопряженные гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

- Уравнение равнобочной гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2$$

- График обратной пропорциональности

$$xy = c \qquad (c \neq 0)$$

— равнобочная гипербола с асимптотами $x = 0$ и $y = 0$.

Парабола

- Каноническое уравнение параболы с параметром p

$$y^2 = 2px$$

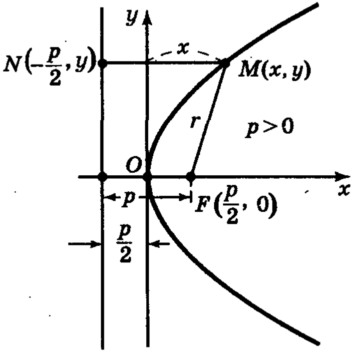


Рис. 53

- Фокус параболы — точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

- Уравнение директрисы

$$x = -\frac{p}{2}$$

- Фокальный радиус точки (x, y) параболы

$$r = x + \frac{p}{2}$$

- Эксцентриситет параболы

$$\varepsilon = 1$$

- Касательная к параболе в точке $M(x_0, y_0)$

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

- График квадратного трехчлена

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

— вертикальная парабола с вершиной $O'\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{B^2 - 4AC}{4A}\right)$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Координаты точки

- Декартовы прямоугольные координаты точки $M\ (x,\ y,\ z)$ пространства $Oxyz$ есть

$$x = r_x,\ y = r_y,\ z = r_z,$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор точки M.

- Длина вектора $\mathbf{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- Направление вектора $\mathbf{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}$.

- Расстояние между двумя точками $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

• Расстояние от точки $M(x, y, z)$ до начала координат

$$d = \left|\overrightarrow{MO}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• Координаты точки, делящей отрезок с концами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) в заданном отношении l

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}, \quad y = \frac{y_1 + ly_2}{1 + l}, \quad z = \frac{z_1 + lz_2}{1 + l}$$

Уравнение плоскости

• Уравнение плоскости с нормальным вектором $N = \{A, B, C\} \neq 0$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$N \cdot (r - r_0) = 0, \qquad (1)$$

где r — радиус-вектор текущей точки плоскости $M(x, y, z)$ и r_0 — радиус-вектор точки M_0.

• В координатах уравнение (1) имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

• Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

• Уравнение плоскости, отсекающей отрезки a, b, и c на осях координат

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

• Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Уравнение прямой

• Векторное уравнение прямой линии в пространстве

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{s}t, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$ — текущий радиус-вектор прямой, $\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ — радиус-вектор фиксированной точки прямой, $\boldsymbol{s} = \{m, n, p\} \neq 0$ — направляющий вектор прямой, t — параметр $(-\infty < t < +\infty)$.

• В координатной форме уравнение (1) имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

• Прямая как пересечение плоскостей

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

Направляющий вектор этой прямой есть $s = N \times$ $\times N'$, где $N = \{A, B, C\}$, $N' = \{A', B', C'\}$.

- Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) параллельно направляющему вектору $\{l, m, n\}$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

- Уравнение прямой, проходящей через точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

- Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно плоскости $Ax + By +$ $+ Cz + D = 0$

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

- Косинус угла между прямыми $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} =$ $= \frac{z - z_1}{n_1}$ и $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}}$$

- Условие параллельности прямых

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

- Условие перпендикулярности прямых

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Прямая и плоскость

- Синус угла между прямой $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(l^2 + m^2 + n^2)}}$$

- Условие параллельности прямой и плоскости

$$Al + Bm + Cn = 0$$

- Условие перпендикулярности прямой и плоскости

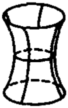
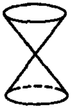
$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$$

Уравнение сферы

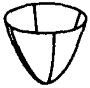
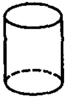
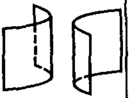
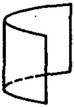
Уравнение сферы радиуса R с центром (x_0, y_0, z_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

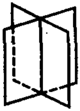
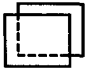
Поверхности второго порядка

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Двухполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	

Продолжение табл.

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Эллиптический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	
Гиперболический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$	
Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$	

Продолжение табл.

Название поверхности	***Каноническое уравнение***	***Схематическое изображение***
Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	
Пара параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	
Пара совпадающих плоскостей	$x^2 = 0$	
Мнимый конус второго порядка с действительной вершиной (0; 0; 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	
Пара мнимых плоскостей (пересекающихся по действительной прямой)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	

Окончание табл.

Название поверхности	*Каноническое уравнение*	*Схематическое изображение*
Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	
Пара мнимых параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

- Вид комплексного числа

$$z = x + iy$$

где x, y — действительные числа, i — мнимая единица, $i^2 = -1$.

- $\text{Re}\, z = x$ — действительная часть комплексного числа.
- $\text{Im}\, z = y$ — мнимая часть комплексного числа.
- Равенство комплексных чисел

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \text{Re}\, z_1 = \text{Re}\, z_2 \text{ и } \text{Im}\, z_1 = \text{Im}\, z_2$$

- Геометрическое изображение комплексных чисел. Точка $M(x,\ y)$ изображает число $x + yi$ (рис. 54).
- Модуль комплексного числа

$$|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Аргумент комплексного числа

$$\text{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots),$$

где $\arg z = \varphi = \angle NOM = \text{arctg}\, \frac{y}{x}$ — главное значение аргумента.

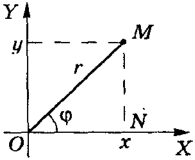


Рис. 54

- Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

- Комплексно-сопряженные числа

$$z = x + iy \quad \text{и} \quad \bar{z} = x - iy$$

- Действия с комплексными числами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

В частности,

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),\ \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),\ |z|^2 = z\bar{z}$$

- Теоремы о модуле и аргументе

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|,\ \mathrm{Arg}\, z_1z_2 = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2\ (z_2 \neq 0)$$

$$|z^n| = |z|^n,\ \mathrm{Arg}\, z^n = n\, \mathrm{Arg}\, z\ (n \text{ — целое})$$

- Корень из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$

- Показательная форма записи комплексных чисел

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$ и $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$.

- Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

- Произведение и частное комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (z_2 \neq 0)$$

АЛГЕБРА

Матрицы

- Сложение матриц

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

- Умножение матрицы на число

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Умножение матриц

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \dots \; a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \; a_{m2} \; \dots \; a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \; b_{12} \; \dots \; b_{1k} \\ b_{21} \; b_{22} \; \dots \; b_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1} \; b_{n2} \; b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} \; c_{12} \; \dots \; c_{1k} \\ c_{21} \; c_{22} \; \dots \; c_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{m1} \; c_{m2} \; c_{mk} \end{pmatrix} = C,$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum\limits_{\upsilon=1}^{n} a_{i\upsilon}b_{\upsilon j}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, k)$.

- Единичная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 \; 0 \dots 0 \\ 0 \; 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \; 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

- Обратная матрица (A^{-1})

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{m1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{m2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1m}}{d} & \frac{A_{2m}}{d} & \dots & \frac{A_{mn}}{d} \end{pmatrix}.$$

где d — определитель матрицы A; A_{ij} — алгебраическое дополнение ее элемента a_{ij}.

• Транспонирование матрицы — преобразование, при котором ее строки становятся столбцами, а столбцы — строками с теми же самыми номерами. A' — матрица, транспонированная по отношению к матрице A.

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ если}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определители

- Определитель второго порядка

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

- Формулы Крамера для системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D},$$

где $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$

- Решения однородной системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{cases}$$

— числа

$$x = D_1t, \; y = -D_2t, \; z = D_3t \; (-\infty < t < +\infty),$$

где $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

- Определитель третьего порядка

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1,$$

где $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

— алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя.

- Формулы Крамера для системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

— числа

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D},$$

где $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

- Формулы Крамера для системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \; x_2 = \frac{D_2}{D}, \; \ldots, \; x_n = \frac{D_n}{D}$$

где D — определитель системы, $D_1, \ldots, D_n$ — определители, получающиеся из D заменой j-го столбца ($j = 1, 2 \ldots n$) столбцом из свободных членов ($b_1, b_2, \ldots, b_n$).

Элементы векторной алгебры

- Сумма векторов $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$

$$a + b = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$$

- Свойства сложения

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

- Умножение вектора $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ на число λ

$$\lambda \boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

- Длина вектора $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{ab} = ab \cos \varphi,$$

где $\varphi = \angle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

- Если $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

- Угол между векторами $\{a_x, a_y, a_z,\}$ и $\{b_x, b_y, b_z\}$

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

- Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны, если $\boldsymbol{ab} = 0$.
- Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$ и $c = ab \sin \varphi$ ($\varphi = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$), причем $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — правая тройка.

- Если $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы (орты), направленные по соответствующим осям координат.

- Свойства векторного произведения

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a} \times (\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

$$(\lambda\boldsymbol{a}) \times (\mu\boldsymbol{b}) = \lambda\mu(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}$$

- Смешанное произведение

$$\boldsymbol{abc} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

представляет собой объем (со знаком) параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

- Если $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\boldsymbol{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, то

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

- Свойства смешанного произведения

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -(\mathbf{bac}) = -(\mathbf{acb}) = -(\mathbf{cba})$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{cd} = \mathbf{acd} + \mathbf{bcd}$$
$$(\lambda \mathbf{a})\mathbf{bc} = \lambda(\mathbf{abc})$$
$$\mathbf{aab} = 0$$

- Площадь параллелограмма, построенного на $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Определение и свойства пределов

- Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого x из δ-окрестности a ($|x - a| < \delta$) выполняется $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- Обозначение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

- Свойства пределов

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x) - h(x)) =$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) - \lim_{x \to a} h(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) =$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad (\lim_{x \to a} g(x) \neq 0)$$

- Замечательные пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2{,}71828...$$

- Связь между десятичными и натуральными логарифмами

$$\lg x = M \ln x,$$

где $M = \lg e = 0{,}43429...$.

Производная и дифференциал

- Приращение функции $y = f(x)$, соответствующее приращению Δx аргумента x:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- Определение производной

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Геометрически $y' = f'(x)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x.

- **Правила дифференцирования**

$$c' = 0$$

$$(cu)' = cu'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y'_x = y'_z\, z'_x\,,$$

где $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$, т.е $y = f(\varphi(x))$.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}\,,$$

где x'_y — производная обратной функции.

- **Производные элементарных функций**

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \ \ x' = 1$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$$
$$(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$$
$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$
$$(\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

- Свойства дифференциала

$$d(af(x)) = adf(x)$$
$$d(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)) = df_1(x) + df_2(x) - df_3(x)$$
$$df(x) = f'(x)\,dx$$
$$da = 0$$
$$d(ax + b) = \Delta(ax + b) = a\,\Delta x$$
$$dx^n = nx^{n-1}\Delta x$$

- **Дифференциал второго порядка функции $y = f(x)$, где x — независимая переменная ($d^2x = 0$)**

$$d^2y = y''dx^2$$

- **Производные высших порядков некоторых функций**

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n}$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

$$(\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\frac{1}{x^n}$$

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}$$

$$(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$$

$$(a^{kx})^{(n)} = (k \ln a)^n a^{kx}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

- **Правило Лопиталя для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$**

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

если предел справа существует.

- Формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

где $f^{(n)}(x)$ существует в иекоторой полной окрестности точки x_0.

- Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ — такое число, что $x_0 < \xi < x$.

- Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}x^{n-2} + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где ξ — такое число, что $0 < \xi < x$.

Дифференциальное исчисление функций двух переменных

- Частные производные функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

- Частные дифференциалы

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx, \ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

- Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ от независимых переменных x и y

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

где $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

- Малое приращение дифференцируемой функции

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

• Производиая функции $u = f(x, y)$ по направлению l, заданному единичиым вектором $\{\cos\alpha, \cos\beta\}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$$

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

• Частные производиые функции $u = f(x, y, z\ldots)$ по переменным $x, y, z,\ldots$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z\ldots) - f(x, y, z\ldots)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(x, y+\Delta y, z\ldots) - f(x, y, z\ldots)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(x, y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z\ldots)}{\Delta z}$$ и т.д.

• Полный дифференциал функции $u = f(x, y, x\ldots)$ от независимых переменных $x, y, z\ldots$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots$$

• Касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

где X, Y, Z — текущие координаты; x, y, z — координаты точки касания; p, q — соответствующие значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

- Касательная плоскость к поверхности $F(x, y, z) = 0$

$$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'(Z - z) = 0$$

- Нормаль к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M(x, y, z)$

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z}$$

- Градиент скалярного поля $u = f(x, y)$ есть вектор

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

- Модуль градиента

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Неопределенный интеграл

- Определение иеопределенного интеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F'(x)\,d = f(x)$, C — констаита.

- Если $dy = f(x)dx$, то $y = \int f(x)dx$.
- Основные свойства неопределенного интеграла

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k \neq 0)$$

$$\int (f(x) + g(x) - h(x))dx =$$

$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$$

- Осиовные методы интегрирования
  - Метод разложения

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx,$$

где $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

- **Метод подстановки**. Если $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- **Метод интегрироваиия по частям**

$$\int udv = uv - \int vdu$$

- **Интегралы некоторых функций**

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Таблица неопределенных интегралов[1]

- **Функции, содержащие $a + bx$ в целой степени**

1) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C.$

2) $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C, \quad n \neq -1.$

3) $\int \frac{x\,dx}{1+bx} = \frac{1}{b^2}(a + bx - a\ln|a+bx|) + C.$

4) $\int \frac{x^2\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + \right.$
$\left. + a^2\ln|a+bx|\right) + C.$

5) $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C.$

6) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C.$

7) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx| + \frac{a}{a+bx}\right) + C.$

[1] Таблица неопределенных интегралов дана по книге М. Я. Выгодского «Справочник по высшей математике»

8) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(a + bx - 2a\ln|a+bx| - \right.$
$\left.- \frac{a^2}{a+bx}\right) + C.$

9) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C.$

10) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = -b\left(\frac{1}{a^2(a+bx)} + \frac{1}{a^2bx} - \frac{2}{a^3} \times \right.$
$\left.\times \ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|\right) + C.$

11) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left(-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right) + C.$

12) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^3} = -\frac{1}{a^3}\left(\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + \frac{2bx}{a+bx} - \right.$
$\left.- \frac{b^2x^2}{2(a+bx)^2}\right) + C.$

- **Функции, содержащие $a^2 + x^2$, $a^2 - x^2$, $a + bx^2$**

1) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

2) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

3) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

или

4) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$

5) $\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C$ при $a > 0$ и $b > 0$.

Если a и b отрицательны, то знак $-$ выносится за интеграл, а если a и b разных знаков, то пользуются № 6.

6) $\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\left|\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}\right| + C.$

7) $\int \frac{x\,dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \ln\left|x^2 + \frac{a}{b}\right| + C.$

8) $\int \frac{x^2\,dx}{a + bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a + bx^2},$

далее см. № 5 или № 6.

9) $\int \frac{dx}{x(a + bx^2)} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x^2}{a + bx^2}\right| + C.$

10) $\int \frac{dx}{x^2(a + bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a + bx^2},$

далее см. № 5 или № 6.

11) $\int \frac{dx}{(a + bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a + bx^2)} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a + bx^2},$

далее см. № 5 или № 6.

- **Функции, содержащие $\sqrt{a+bx}$**

1) $\int \sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C.$

2) $\int x\sqrt{a+bx}\, dx = -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C.$

3) $\int x^2\sqrt{a+bx}\, dx =$

$$= \frac{2(8a^2-12abx+3b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C.$$

4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C.$

5) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx} + C.$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| + C$

при $a > 0$.

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C$

при $a < 0$.

8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{-\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$

далее см. № 6 или № 7.

9) $\int \frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x} = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}},$

далее см. № 6 или № 7.

- **Функции, содержащие $\sqrt{x^2+a^2}$**

1) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$

2) $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$

3) $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3} + C.$

4) $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$

7) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C.$

8) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$

9) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln\left|x + \right.$
$\left. + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C.$

11) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$

12) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\times$
$\times\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C.$

13) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2+a^2} -$
$- a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C.$

14) $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} +$
$+ \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$

- **Функции, содержащие $\sqrt{a^2-x^2}$**

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$

4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

5) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$

6) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

7) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

8) $\int \sqrt{(a^2 - x^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2} +$

$+ \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

9) $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{3} + C.$

10) $\int x\sqrt{(a^2 - x^2)^3}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^5}}{5} + C.$

11) $\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} +$

$+ \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

12) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

13) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C.$

14) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C.$

15) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} +$

$+\frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C.$

16) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} -$

$-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C.$

17) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

- **Функции, содержащие $\sqrt{x^2-a^2}$**

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.$

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C.$

4) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x +$

$+ \sqrt{x^2-a^2}| + C.$

5) $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} +$

$+ \frac{3a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C.$

6) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3} + C.$

7) $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5} + C.$

8) $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} -$

$- \frac{a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C.$

9) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x +$

$+ \sqrt{x^2-a^2}| + C.$

10) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln|x +$

$+ \sqrt{x^2-a^2}| + C.$

11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C.$

12) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C.$

13) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x} + C.$

14) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C.$

15) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C.$

16) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln \left|x + \right.$

$\left. + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

- **Функции, содержащие $\sqrt{2ax-x^2}$, $\sqrt{2ax+x^2}$**

Функция, содержащая $\sqrt{2ax-x^2}$, интегрируется подстановкой $t = x - a$. Тогда $\sqrt{2ax-x^2}$ получит вид $\sqrt{a^2-t^2}$, и интеграл находят в группе для функций, содержащих $\sqrt{a^2-x^2}$. Если его в таблице нет, то стараются привести его к виду, имеющемуся в таблице.

То же можно сказать и о функции, содержащей выражение $\sqrt{2ax+x^2}$. В этом случае подстановка $t = x + a$ приводит радикал к виду $\sqrt{t^2-a^2}$.

- **Функции, содержащие $a + bx + cx^2$ $(c > 0)$**

1) $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, \text{ если } b^2 < 4ac. \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left|\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C, \text{ если } b^2 > 4ac. \end{cases}$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln|2cx + b +$
$+ 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}| + C.$

3) $\int \sqrt{a+bx+cx^2}\, dx = \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2} -$
$- \frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}} \ln|2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}| + C.$

4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c} -$
$- \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \ln|2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}| + C.$

- **Функции, содержащие $a + bx - cx^2$ $(c > 0)$**

1) $\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b} \right| + C.$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$

3) $\int \sqrt{a+bx+cx^2}\, dx = \frac{2cx-b}{4c} \sqrt{a+bx-cx^2} +$

$$+ \frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} =$

$$= -\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c} + \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

- **Другие алгебраические функции**

1) $\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\, dx =$

$$= \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b) \ln \left| \sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} \right| + C.$$

2) $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\, dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} +$

$$+ (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C.$$

3) $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)}\; -$

$-\,(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C.$

4) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$

- **Показательные и тригонометрические функции**

1) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

2) $\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C.$

3) $\int \mathrm{e}^{ax}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} + C.$

4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

7) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$

8) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C =$

$= \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$

9) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C =$
$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

10) $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C.$

11) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

12) $\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C.$

13) $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C.$

14) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

15) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

16) $\int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} +$
$+ \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx.$

Эта формула применяется несколько раз, пока не приведет к интегралу $\int \sin x\, dx$ или $\int \sin^2 x\, dx$ (в зависимости от того, четное или нечетное n), см. № 4 и № 14.

17) $\int \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} +$
$+ \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$

(см. замечание к предыдущему интегралу и № 5 и № 15).

18) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} +$

$+ \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$

Применяется несколько раз, пока не приведет к интегралу $\int dx$, если n — четное, или к интегралу $\int \frac{dx}{\sin x}$, если n — нечетное (см. № 9).

19) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} +$

$+ \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

(см. замечание к предыдущему интегралу и № 8).

20) $\int \sin x \cos^n x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$

21) $\int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$

22) $\int \cos^m x \sin^n x \, dx =$

$= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{m+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x \, dx$

Применятся несколько раз, пока степень косинуса не будет равна нулю (если m — четное) или единице (если m — нечетное). В первом случае см. № 16, во втором — № 21. Этой формулой следует пользоваться, когда $m < n$. Если $m > n$, то лучше пользоваться № 23.

23) $\int \cos^m x \sin^n x \, dx =$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x \, dx$$

(см. замечание к предыдущему интегралу и № 17 и № 20).

24) $\int \sin mx \sin nx \, dx =$

$$= -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C, \ (m \neq n).$$

25) $\int \cos mx \sin nx \, dx =$

$$= \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C, \ (m \neq n).$$

26) $\int \sin mx \cos nx \, dx =$

$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C, \ (m \neq n).$$

27) $\int \frac{dx}{a + b\cos x} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C, \text{ если } a > b.$$

28) $\int \frac{dx}{a + b\cos x} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}}\right| + C, \text{ если } a < b.$$

$$29)\ \int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ \operatorname{arctg} \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C,$$

если $a > b$.

$$30)\ \int \frac{dx}{a+b\sin x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| + C,$$

если $a < b$.

$$31)\ \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b\operatorname{tg} x}{a}\right) + C.$$

$$32)\ \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2} + C.$$

$$33)\ \int e^{ax}\sin nx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$$

$$34)\ \int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2} + C.$$

$$35)\ \int e^{ax}\cos nx\,dx = \frac{e^{ax}(n\sin nx + a\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$$

$$36)\ \int x\,e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C.$$

37) $\int x^n e^{ax}\,dx = \dfrac{x^n e^{ax}}{a} - \dfrac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx.$

Формула применяется несколько раз, пока степень x не станет равной единице; тогда см. № 36.

38) $\int x a^{mx}\,dx = \dfrac{x a^{mx}}{m \ln|x|} - \dfrac{a^{mx}}{m \ln^2 a} + C.$

39) $\int x^n a^{mx}\,dx = \dfrac{a^{mx}x^n}{n \ln a} - \dfrac{n}{m \ln a}\int a^{mx} x^{n-1}\,dx.$

Формула применяется до тех пор, пока степень x не станет равной единице; тогда см. № 38.

40) $\int e^{ax}\cos^n x\,dx =$

$= \dfrac{e^{ax}\cos^{n-1} x(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} +$

$+ \dfrac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} x\,dx.$

Формула применяется до тех пор, пока косинус не исчезнет (в случае четного n) или пока его степень не станет равной единице (в случае нечетного n). В последнем случае см. № 32.

41) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

42) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

43) $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln|\operatorname{ch} x| + C.$

44) $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C.$

45) $\int \operatorname{sch} x\,dx = 2\operatorname{arctg} e^x + C.$

46) $\int \operatorname{csch} x\, dx = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$

47) $\int \operatorname{sch}^2 x\, dx = \operatorname{th} x + C.$

48) $\int \operatorname{csch}^2 x\, dx = -\operatorname{cth} x + C.$

49) $\int \operatorname{sch} x \operatorname{th} x\, dx = \operatorname{sch} x + C.$

50) $\int \operatorname{csch} x \operatorname{cth} x\, dx = -\operatorname{csch} x + C.$

51) $\int \operatorname{sh}^2 x\, dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + C.$

52) $\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh}^2 2x + C.$

- **Логарифмические функции**

Даются функции, содержащие только натуральный логарифм. Если требуется найти интеграл от функции, содержащей логарифм при другом основании, то предварительно переводят его в натуральный по формуле $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, а затем пользуются таблицей.

1) $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C.$

2) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| + C.$

3) $\int x^n \ln x\, dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + C.$

4) $\int \ln^n x\, dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x\, dx.$

Формула применяется до тех пор, пока не получится интеграл $\int \ln x\, dx$, который берется по формуле № 1.

5) $\int x^m \ln^n x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x -$

$- \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x\, dx.$

Формула применяется до тех пор, пока не приведет к интегралу № 3.

Определенный интеграл

• Определенный интеграл как предел интегральной суммы

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i,$$

где $\bar{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

• Формула Ньютона—Лейбница: если $f(x)$ непрерывна и $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

- **Основные свойства определенного интеграла**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$$

• Теорема о среднем. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c),$$

где $a < c < b$.

• Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

• Формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

• Формула трапеций

$$\int_a^b y dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ и $x_n = b$, $y = f(x)$, $y_i = f(x_0 +$ $+ ih)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

- Формула Симпсона

$$\int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}\left(y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b)\right),$$

где $h = \frac{1}{2}(b - a)$.

- Несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), осью Ox и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$ ($a < b$)

$$S = \int_a^b y\,dx$$

- Площадь сектора, ограниченного непрерывной линией $\rho = f(\varphi)$ (ρ и φ — полярные координаты) и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$)

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi$$

• Длина дуги гладкой кривой $y = f(x)$ в прямоугольных координатах x и y от точки $x = a$ до точки $x = b$ $(a < b)$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

• Длина дуги гладкой кривой $\rho = f(\varphi)$ в полярных координатах ρ и φ от точки $\varphi = \alpha$ до точки $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi$$

• Длина дуги гладкой кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, заданной параметрически $(t_0 < T)$

$$t = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

• Объем тела с известным поперечным сечением $S(x)$

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

- Объем тела вращения

  - вокруг оси Ox: $V_x = \pi\int\limits_a^b y^2dx$ $(a < b)$.
  - вокруг оси Oy: $V_y = \pi\int\limits_c^d x^2dy$ $(c < d)$.

- Работа переменной силы $F = F(x)$ на участке $[a, b]$

$$A = \int\limits_a^b F(x)dx$$

Кратные интегралы

- Двойной интеграл от функции $f(x, y)$, распространенный на область S

$$\iint\limits_S f(x, y)dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

где $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, d — наибольший диаметр ячеек ΔS_i.

Если $f(x, y) \geqslant 0$, то двойной интеграл геометрически представляет собой объем прямого цилиндроида, построенного на основании S и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

• Если область интегрирования S стандартна относительно оси Oy и $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — непрерывные функции, то двойной интеграл в прямоугольных декартовых координатах от непрерывной функции $f(x, y)$ выражается формулой

$$\iint\limits_S f(x, y)dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$$

• Двойной интеграл в полярных координатах φ и r

$$\iint\limits_S f(x, y)dS = \iint\limits_S f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r d\varphi\, dr,$$

где

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

• Если область интегрирования S определяется неравенствами $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi)$, то

$$\iint\limits_S f(x, y)dS = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$$

• Если $\rho = \rho(x, y)$ — поверхностная плотность пластинки S, то масса пластинки

$$m = \iint\limits_S \rho(x, y)dS = \iint\limits_S \rho\, dx\, dy$$

- Площадь пластинки

$$S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_S dx\,dy$$

- Статические моменты пластинки S относительно координатных осей Ox и Oy

$$S_x = \iint\limits_S \rho y\,dS,\ S_y = \iint\limits_S \rho x\,dS,$$

где $\rho = \rho(x, y)$ — поверхностная плотность пластинки S.

- Координаты центра масс пластинки S определяются формулами

$$x_0 = \frac{S_y}{m},\ y_0 = \frac{S_x}{m},$$

где m — масса пластинки.

- Моменты инерции пластинки S относительно координатных осей Ox и Oy

$$I_x = \iint\limits_S \rho y^2\,dS,\quad I_y = \iint\limits_S \rho x^2\,dS,$$

где $\rho = \rho(x, y)$ — поверхностная плотность пластинки.

- Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, распространенный на область V

$$\iiint_V f(x, y, z)dV = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i,$$

где $(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$; d — наибольший диаметр ячеек ΔV_i.

Если $f(x, y, z)$ есть плотность в точке (x, y, z), то тройной интеграл представляет собой массу, заполняющую объем V.

- Объем тела

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dx\, dy\, dz$$

- Если область интегрирования V определяется неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$, где $y_i(x)$, $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ — непрерывные функции, то тройной интеграл в прямоугольных координатах от непрерывной функции $f(x, y, z)$ выражается формулой

$$\iiint_V f(x, y, z)dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz$$

Криволинейные интегралы

- Криволинейный интеграл первого рода от непрерывной функции $f(x,\ y)$, взятый по кусочно-гладкой кривой K: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in [\alpha,\ \beta])$

$$\int\limits_K f(x,\ y)ds =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),\ y(f))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,|dt|$$

- Если кривая K задана уравнением $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int\limits_K f(x,\ y)ds = \int\limits_a^b f(x,\ y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$$

- Криволинейный интеграл второго рода от пары непрерывных функций $X(x,\ y)$, $Y(x,\ y)$, взятый по кусочно-гладкому пути K: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in [\alpha,\ \beta])$

$$\int\limits_K X(x,\ y)dx + Y(x,\ y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (X(x(t),\ y(t))x'(t) + Y(x(t),\ y(t))y')dt$$

Физически криволинейный интеграл второго рода представляет собой работу переменной силы $F = \{X(x, y), Y(x, y)\}$ вдоль пути K.

- **Если путь K задан уравнением $y = y(x)$ ($x \in [\alpha, \beta]$), то**

$$\int_K X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_a^b (X(x, y(x)) + Y(x, y(x))y'(x))dx.$$

- **Если выполнено условие**

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = dU(x, y),$$

то криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования K и

$$\int_K X(x, y)dx + Y(x, y)dy = U(x, y)\Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1),$$

где (x_1, y_1) — начальная точка пути, (x_2, y_2) — конечная точка пути. Физически этот интеграл представляет собой работу силы, имеющей потенциал $U(x, y)$.

РЯДЫ

Числовые ряды

- Определение ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} u_n.$$

- Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

- Признак Даламбера. Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n > 0)$ существует

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

  - Если $l < 1$, то ряд сходится.
  - Если $l > 1$, то ряд расходится и $u_n \not\to 0$.

- Признак Лейбница. Если $v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$ и $v_n \to 0$ при $n \to \infty$, то знакочередующийся ряд

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$$

сходится.

- Радиус сходимости степенного ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

определяется по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если последняя имеет смысл.

Степенные ряды

- Ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \ldots .$$

- Ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

- Разложение в степенные ряды основных функций

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \; (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (|x| < +\infty)$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ln x = 2\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right)(x > 0)$$

$$\operatorname{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad (|x| \leqslant 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad (|x| < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (|x| < +\infty)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{1\cdot 2\ldots n}x^n + \ldots \quad (|x| < 1)$$

- **Ряды в комплексной области:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + iv_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + i\sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

- **Абсолютная сходимость рядов с комплексными членами. Если ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n + iv_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$$

сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + iv_n)$ **также сходится (абсолютно).**

- **Формулы Эйлера**

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,\quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Ряды Фурье

- **Тригонометрический ряд Фурье непрерывной функции** $f(x)$ **с периодом** 2π

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \ (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

• Тригонометрический ряд Фурье кусочно-гладкой функции $f(x)$ периода $2l$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

• В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда Фурье кусочно-гладкой функции $f(x)$ периода $2l$ равна

$$S(x) = \frac{1}{2}\,(f(x-0) + f(x+0))$$

• Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ четная, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ нечетная, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения первого порядка

• Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$X(x)\,Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0$$

имеет общий интеграл

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \int \frac{Y(y)}{Y_1(y)}\,dy = C.$$

Особые решения, не входящие в интеграл, определяются из уравнений $X_1(x) = 0$ и $Y(y) = 0$.

• Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0,$$

где $P(x, y)$ и $Q\ (x, y)$ — однородные непрерывные функции одинаковой степени, решается с помощью подстановки

$$y = ux$$

(u — новая функция).

• Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$$

решается с помощью подстановки $y = uv$, где u — ненулевое решение однородиого уравнеиия $a(x)y' + b(x)y = 0$, а v — новая функция.

• Уравнение Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,\ n \neq 1)$$

с помощью подстановки $z = y^{-n+1}$ сводится к линейному делением на y^n.

Дифференциальные уравнения второго порядка

• Интегрируемые случаи дифференциального уравнения второго порядка:

- если

$$y'' = f(x),$$

то общее решение

$$y = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

- если

$$y'' = f(y),$$

то общий интеграл

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = \pm (x + C_2);$$

- если

$$y'' = f(y'),$$

то общий интеграл уравнения может быть найден из соотношения

$$\int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1,$$

где $y' = p$.

- Случаи понижения порядка для дифференциального уравнения второго порядка:

если

$$y'' = f(x, y'),$$

то, полагая $y' = p(x)$, получаем

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p);$$

если

$$y'' = f(y, y'),$$

то, полагая $y' = p(y)$, будем иметь

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

- Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения.

- Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

$$y = \bar{y} + z,$$

где $\bar{y}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, z — частное решение данного неоднородного уравнения.

Общий вид решений однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ (p и q постоянны) в зависимости от корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$

Характер корней k_1 и k_2 характеристического уравнения	***Вид общего решения***
Корни k_1 и k_2 действительные и различные	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Продолжение табл.

Характер корней k_1 и k_2 характеристического уравнения	*Вид общего решения*
Корни равные: $k_1 = k_2$	$y = (C_1 + C_2x)e^{k_1x}$
Корни комплексные: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x +$ $+ C_2\sin\beta x)$

Характер частного решения z неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ (p и q постоянны) в зависимости от правой части $f(x)$

Правая часть $f(x)$	*Случаи*	*Частное решение*[1)]
$f(x) = ae^{mx}$ (a, m постоянны)	1) $m^2 + pm + q \neq 0$, 2) $m^2 + pm + q = 0$. а) $p^2 - 4q > 0$, б) $p^2 - 4q = 0$	$z = Ae^{mx}$, $z = Axe^{mx}$, $z = Ax^2e^{mx}$
$f(x) =$ $= M\cos\omega x +$ $+ N\sin\omega x$ (M, N, ω постоянны; $\omega \neq 0$)	1) $p^2 + (q - \omega^2)^2 \neq 0$, 2) $p = 0$, $q = \omega^2$	$z = A\cos\omega x +$ $+ B\sin\omega x$, $z = x(A\cos\omega x +$ $+ B\sin\omega x)$

Продолжение табл.

Правая часть $f(x)$	*Случаи*	*Частное решение*[1]
$f(x) =$ $= ax^2 + bx + c$ (a, b, c постоянны)	1) $q \neq 0$, 2) $q = 0$, $p \neq 0$	$z = Ax^2 + Bx +$ $+ C$, $z = x(Ax^2 + Bx +$ $+ C)$

[1] A, B, C — постоянные неопределенные коэффициенты.

- **Уравнения математической физики**
  - Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  - Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  - Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- Сумма двух событий A и B

$$A + B = A \cup B$$

— событие, которое имеет место тогда и только тогда, когда осуществляется хотя бы одно из событий A и B.

- Произведение двух событий A и B

$$AB = A \cap B$$

— событие, которое имеет место тогда и только тогда, когда происходит как событие A, так и событие B.

- Вероятность события A

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (0 \leqslant P(A) \leqslant 1)$$

— отношение числа m благоприятных для события A равновозможных элементарных исходов к числу n всех единственно возможных и равновозможных элементарных исходов.

- Вероятность противоположного события

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

- Теорема сложения для двух несовместных событий A и B

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

В общем случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- Теорема умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A)P_A(B),$$

где $P_A(B)$ — соответствующая условная вероятность события B.

Если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

- Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A),$$

где $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа гипотез:

$$A = \sum_{i=1}^{n} H_iA, \; H_iH_j = 0 \text{ при } i \neq 1, \; \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

- Формула Бейеса

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P_{H_j}(A)}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, где $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа гипотез.

Основные формулы комбинаторики см. на с. 28, 29.

• Бином Ньютона

$$(q + p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1}p + C_n^2 q^{n-2}p^2 + \ldots + p^n$$

• Биномиальный закон распределения. В условиях схемы Бернулли вероятность появления события A при n испытаниях точно m раз ($0 \leqslant$ $\leqslant n$) равна

$$P_n(m) = C_n^m \; p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

где $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q = 1 - p$ при однократном испытании.

• Локальная формула Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-t^2/2}$$

где $0 \leqslant p \leqslant 1$, $q = 1 - p$, $t = (npq)^{-1/2} \cdot (m - np)$.

• Интегральная формула Лапласа

$$P\,(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi_0\,(t_{m_2}) - \Phi_0\,(t_{m_1}),$$

где

$$t_m = (npq)^{-1/2}\,(m - np), \;\; \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt.$$

- Формула Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu},$$

где $\mu = np$, причем вероятность p мала.

- Математическое ожидание дискретной случайной величины

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

где $p_i = P(X = x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, есть

$$M\,(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i.$$

- Основные свойства математического ожидания

$$M(C) = C$$
$$M(CX) = CM(X)$$
$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$
$$M(XY) = M(X)\ M(Y)$$
$$M(X - Y) = M(X) - M(Y)$$

где события X и Y независимы.

- Дисперсия дискретной случайной величины X

$$D = M\{[X - M(X)]^2\} = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

• Основные свойства дисперсии

$$D(C) = 0$$
$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$
$$D(CX) = C^2 D(X),$$

где события X и Y независимы.

• Для биномиального закона распределений числа появлений X события A при n испытаниях имеем:

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \; (m = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

где $p = P(A)$, $q = P(\overline{A})$;

$$M(X) = np;$$
$$D(X) = npq.$$

• Функция распределения для непрерывной случайной величины X

$$\Phi(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

$(-\infty < x < +\infty)$, где $\varphi(x)$ — плотность вероятности.

• Математическое ожидание для непрерывной случайной величины X

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx$$

• **Дисперсия для непрерывной случайной величины X**

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \varphi(x)\, dx.$$

• **Закон Гаусса**

$$\varphi(x) = ac^{-b(x - x_0)^2}$$

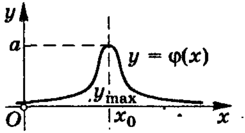


Рис. 55

• **Для нормального закона распределения случайной величины X плотность вероятности имеет вид**

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x - x_0)^2/(2\sigma^2)},$$

где $x_0 = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

При этом

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \Phi_0\left(\frac{b - x_0}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a - x_0}{\sigma}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ — стандартный интеграл вероятностей.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

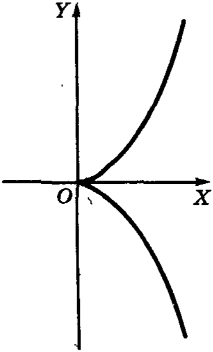


Рис. 56

- **Циссоида Диокла.** Уравнение в прямоугольной системе (O — начало координат, OX — ось абсцисс)

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

- В полярной системе (O — полюс, OX — полярная ось)

$$\rho = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

- Рациональное параметрическое представление ($u = \operatorname{tg}\varphi$)

$$x = \frac{2a}{1+u^2},\ y = \frac{2a}{u(1+u^2)}$$

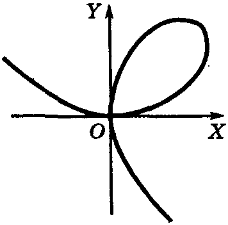


Рис. 57

- **Декартов лист.** Уравнение в прямоугольной системе (O — начало координат, OX — ось абсцисс)

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

- В полярной системе (O — полюс, OX — полярная ось)

$$\rho = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

- Рациональное параметрическое представление ($u = \operatorname{tg}\varphi$)

$$x = \frac{3au}{1+u^3}, \quad y = \frac{3au^2}{1+u^3}$$

- **Лемниската Бернулли.** Уравнение в прямоугольной системе

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$$

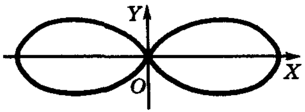


Рис. 58

- В полярной системе (O — полюс, OX — полярная ось)

$$\rho^2 = 2c^2\cos 2\varphi,$$

где угол φ изменяется в промежутках $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

- Рациональное параметрическое представление

$$x = c\sqrt{2}\,\frac{u+u^3}{1+u^4}, \quad y = c\sqrt{2}\,\frac{u-u^3}{1+u^4} \quad (-\infty < u < +\infty)$$

- **Архимедова спираль.** Прямая UV, исходя из начального положения $X'X$, равномерно вращается около неподвижной точки O, а точка M, исходя из начального положения O, равномерно движется вдоль UV. Все такие точки M образуют архимедову спираль.

- Полярное уравнение (O — полюс; направление полярной оси OX совпадает с направлением движения точки M, когда она проходит через точку O; a — шаг спирали)

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

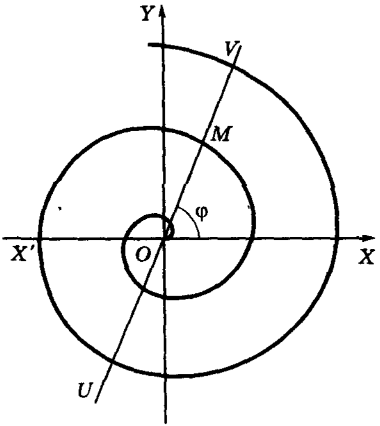


Рис. 59

- **Логарифмическая спираль.** Прямая UV равномерно вращается около неподвижной точки O (полюс), а точка M движется вдоль UV, удаляясь от OM со скоростью, пропорциональной расстоянию OM. Линия, описываемая точкой M, называется логарифмической спиралью.

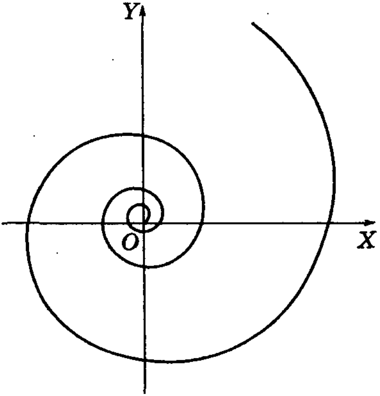


Рис. 60

- Полярное уравнение (полюс совпадает с полюсом спирали; полярная ось проведена через произвольно взятую точку M_0 спирали)

$$\rho = \rho_0 q^{\frac{\varphi}{2\pi}},$$

где $\rho_0 = OM_0$ — полярный радиус точки M_0, а q — коэффициет роста.

Учебное издание

Сборник формул по математике

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *А. А. Лаврентьев*
Технический редактор *А. Л. Шелудченко*
Художественный редактор *Т. Н. Войткевич*
Оформление — *дизайн-группа «Дикобраз»*
Корректор *И. Н. Мокина*

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2, 953005 — литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение
77.99.02.953.Д.008286.12.02 от 09.12.2002 г.

ООО «Издательство Астрель».
143900, Московская обл., г. Балашиха, проспект Ленина, 81

ООО "Издательство АСТ"
667000, Республика Тыва,
г. Кызыл, ул. Кочетова, д. 28

Наши электронные адреса: www.ast.ru. E-mail: astpub@aha.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Чебоксарская типография № 1».
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15.

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
129085, Москва, Звездный бульвар, дом 21, 7 этаж
Отдел реализации учебной литературы
«Издательской группы АСТ»
Справки по телефону: (095) 215-53-10, факс 232-17-04

- В справочнике приведены все необходимые формулы как школьного курса математики, так и высшей математики, изучаемой на первых курсах высших учебных заведений.

- Структура данного справочника позволит учащимся за очень короткое время найти нужную формулу и воспользоваться ею.

- Книга адресована учащимся средних и высших учебных заведений и абитуриентам.

ISBN 5-17-017211-7

9785170172115