

实验报告

切变模量

李佩哲 PB21051049

2022 年 4 月 11 日

1 实验目的

测量金属丝的扭转模量与切变模量.

2 原理

根据剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma$$

有

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\phi}{dl}$$

于是横截面上距轴线距离 ρ 处切应力恢复力矩为

$$\tau_\rho 2\pi\rho d\rho = 2\pi G\rho^3 \frac{d\phi}{dl} d\rho$$

从而总恢复力矩为

$$M = \frac{\pi}{2} G R^4 \frac{\phi}{L}$$

故

$$G = \frac{2ML}{\pi R^4 \phi}$$

让金属丝与摆进行转动, 根据简谐运动的规律, 有

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

其中 I_0 为摆的转动惯量. 为了便于测量与计算, 在圆盘上放置一质量为 m 的金属环, 则扭摆的周期变为

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}}$$

结合之前的式子, 最终可得

$$D = \frac{2\pi^2 m (r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{T_1^2 - T_0^2}$$

$$G = \frac{4\pi L m (r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{R^4 (T_1^2 - T_0^2)}$$

根据这个式子, 扭转模量 D 与切变模量 G 可求.

3 实验仪器

扭摆、金属环、秒表等.

4 测量记录

原始数据见附件.

整理如下

数据	值
L/m	0.4420
m/kg	0.5645
$d_{\text{内}}/\text{m}$	0.08402
$d_{\text{外}}/\text{m}$	0.10378

表 1: 次要误差数据

序号	零误差/mm	d/m
1	0.000	0.000781
2	0.000	0.000779
3	0.000	0.000779
4	0.000	0.000776
5	0.000	0.000776
6	0.000	0.000776
7	0.000	0.000775
8	0.000	0.000778
9	0.000	0.000779

表 2: 金属丝直径

序号	$t_0(\pi, 50T)/\text{s}$	$t_1(\pi, 80T)/\text{s}$
1	301.29	112.66
2	301.25	112.73
3	301.32	112.81
4	301.36	112.79
5	301.32	112.80
6	301.31	112.89

表 3: 总时间

5 分析与讨论

5.0.1 数据处理

由表1可知, $L = 0.4420 \text{ m}$, $m = 0.5645 \text{ kg}$, $r_{\text{内}} = 0.04201 \text{ m}$, $r_{\text{外}} = 0.05189 \text{ m}$.

由表2可知, 金属丝半径 $R \approx 0.00038883 \text{ m}$.

由表3可知, $T_1 \approx 3.7664 \text{ s}$, $T_0 \approx 2.2556 \text{ s}$.

所以 $D = \frac{2\pi^2 m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{T_1^2 - T_0^2} = 5.4594 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$, $G = \frac{4\pi L m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)} \approx 67.204 \text{ GPa}$.

5.0.2 误差分析

由 $D = \frac{2\pi^2 m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{T_1^2 - T_0^2}$ 知, 相对不确定度

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta D}{D} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2r_{\text{内}}\Delta r_{\text{内}}}{r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2}\right)^2 + \left(\frac{2r_{\text{外}}\Delta r_{\text{外}}}{r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2}\right)^2 + \left(\frac{2T_1\Delta t}{n_1(T_1^2 - T_0^2)}\right)^2 + \left(\frac{2T_0\Delta t}{n_0(T_1^2 - T_0^2)}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{0.1461}{564.5}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.04201 \times 2.124 \times 10^{-5}}{0.04201^2 + 0.05189^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.05189 \times 2.124 \times 10^{-5}}{0.04201^2 + 0.05189^2}\right)^2} \\
 &\quad + \left[\frac{2 \times 3.7664 \times 0.074968}{80(3.7664^2 - 2.2556^2)}\right]^2 + \left[\frac{2 \times 2.2556 \times 0.035621}{50(3.7664^2 - 2.2556^2)}\right]^2 = 0.109472\%
 \end{aligned}$$

由 $G = \frac{4\pi Lm(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)}$ 知, 相对不确定度

$$\begin{aligned}\frac{\Delta G}{G} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2r_{\text{内}}\Delta r_{\text{内}}}{r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2}\right)^2 + \left(\frac{2r_{\text{外}}\Delta r_{\text{外}}}{r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2}\right)^2 + \left(\frac{4\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{2T_1\Delta t}{n_1(T_1^2 - T_0^2)}\right)^2 + \left(\frac{2T_0\Delta t}{n_0(T_1^2 - T_0^2)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0.001021}{0.4420}\right)^2 + \left(\frac{0.1461}{564.5}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.04201 \times 2.124 \times 10^{-5}}{0.04201^2 + 0.05189^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 0.05189 \times 2.124 \times 10^{-5}}{0.04201^2 + 0.05189^2}\right)^2} \\ &\quad + \left(\frac{4 \times 4.246 \times 10^{-6}}{0.0003883}\right)^2 + \left[\frac{2 \times 3.7664 \times 0.074968}{80(3.7664^2 - 2.2556^2)}\right]^2 + \left[\frac{2 \times 2.2556 \times 0.035621}{50(3.7664^2 - 2.2556^2)}\right]^2} = 4.38129\%\end{aligned}$$

故 $\Delta D = 0.109472\% D = 5.977 \times 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$, $\Delta G = 4.38129\% G = 2.944 \text{ GPa}$

综上, $D = 5.4594 \pm 0.005977 \text{ N}\cdot\text{mm}$, $G = 67.204 \pm 2.944 \text{ GPa}$

6 思考

为了提高实验精度, 本实验对主要误差的来源的物理量进行了多次测量, 并在设计实验时结合已知数据进行适当的估算。

在具体测量时应注意控制变量, 保持金属丝伸直、圆盘转动水平等等。