

# 中国科学技术大学

# 电磁学 B 论文



## 莫比乌斯带周围电场的计算和模拟

作者姓名： 李佩哲 PB21051049 杨庆东 PB21051052

学科专业： 910 生命科学与医学部 209 工程科学学院

导师姓名： 卢荣德 教授 孙霞 教授

完成时间： 二〇二二年十二月十二日



# University of Science and Technology of China Electromagnetics B Thesis



## **Calculation and Simulation of Electric Field around Mobius Strip**

Author: Li Peizhe, Yang Qingdong

Speciality: 910 Department of Life Sciences and Medicine

209 College of Engineering Science

Supervisors: Prof. Lu Rongde, Prof. Sun Xia

Finished time: December 12, 2022



## 摘 要

莫比乌斯带的性质十分奇特。为了学以致用，探究莫比乌斯带周围电场的分布情况，本实验通过 **Matlab** 模拟的方法对莫比乌斯带周围电场强度、电势高低进行了计算，并进行了可视化。

通过观察结果图像，课题组发现，靠近莫比乌斯带面的地方，电场强度矢量基本垂直于该面切平面，与法向量平行。此外， $y$  坐标大的地方，电场强度更大；距中心圆点相同距离的点  $x$  坐标大的，电势更高。

本实验通过一种通用的求解积分的方法对莫比乌斯带的性质进行了探究，因此此法也可以进行改良，制作一种仅需输入研究对象参数方程即可求解出该对象的电场电势分布状况的一般性程序。万分遗憾的是，碍于时间与资源的限制，课题组未能对此法做出卓有成效的尝试，希望其他研究者可以再接再厉，勇创新高。

**关键词：**电磁学；莫比乌斯带；电场分布

## ABSTRACT

The nature of the Mobius belt is very peculiar. In order to apply what we have learned and explore the distribution of the electric field around the Mobius Belt, this experiment calculated the electric field strength and potential around the Mobius Belt through the method of Matlab simulation, and visualized them.

Through the observation of the result image, the research group found that the electric field intensity vector is basically perpendicular to the tangent plane of the Mobius belt surface and parallel to the normal vector. In addition, where the ycoordinate is large, the electric field intensity is greater; The point with the same distance from the center dot xcoordinates is larger, and the potential is higher.

In this experiment, we explored the properties of Mobius band through a general method of solving integral, so this method can also be improved, and a general program can be made to solve the distribution of electric field potential of the object by inputting the parameter equation of the object of study. It is a great pity that due to the limitation of time and resources, the research group failed to make an effective attempt on this method. We hope that other researchers can continue to work hard to reach new heights.

**Key Words:** Electromagnetics; Mobius strip; Electric field distribution

## 目 录

第 1 章 绪论·····	1
第 2 章 构建方法·····	2
2.1 莫比乌斯带参数方程及模型的构建·····	2
2.1.1 莫比乌斯带的参数方程 <sup>[4]</sup> ·····	2
2.1.2 莫比乌斯带模型的生成·····	2
2.2 电场强度及电势的计算 <sup>[5]</sup> ·····	3
2.2.1 电场强度的计算·····	3
2.2.2 电势的计算·····	4
2.3 电场强度与电势的可视化·····	5
2.3.1 电场强度的可视化·····	5
2.3.2 电势的可视化·····	6
第 3 章 结果结论·····	8
参考文献·····	9





## 第 1 章 绪 论

公元 1858 年，两名德国数学家莫比乌斯和 Johann Benedict Listing 分别发现，一个扭转 180 度后再两头粘接起来的纸条，具有魔术般的性质。与普通纸带具有两个面 (双侧曲面) 不同，这样的纸带只有一个面 (单侧曲面)，一只小虫可以爬遍整个曲面而不必跨过它的边缘！这一神奇的单面纸带被称为“莫比乌斯带”。作为一种典型的拓扑图形，莫比乌斯带引起了许多科学家的研究兴趣，并在生活和生产中有了些应用。例如，动力机械的皮带就可以做成“莫比乌斯带”状，这样皮带就不会只磨损一面了。<sup>[1]</sup> 实验室中也有可能产生莫比乌斯带形状的粒子。一群科学家在 *Journal of Chemical Physics* 上发表了一篇论文，其中预言了一种莫比乌斯带形状的碳单质（准确来说应该是石墨烯）。它能抵抗摄氏 200 度左右的温度，算是相当稳定。由于它莫比乌斯带的结构，它应该是一个偶极子，从而可以形成稳定的晶体。<sup>[2]</sup>

鉴于石墨烯可以带电，现假设某由石墨烯构成的莫比乌斯带均匀带电，以此来研究其周围空间中电场强度和电势的分布情况。对于一个带电的物体，在计算它的电场时，可以把它分成若干小块，只要每个小块足够小，就可把每小块所带的电荷看成为点电荷，然后用点电荷电场叠加的方法计算整个带电体的电场。<sup>[3]</sup>

## 第2章 构建方法

### 2.1 莫比乌斯带参数方程及模型的构建

#### 2.1.1 莫比乌斯带的参数方程<sup>[4]</sup>

认为莫比乌斯带是通过一条长为  $2t_0$  线段  $AB$  绕自身中点  $M$  旋转，同时中点  $M$  以  $R$  为半径绕坐标原点  $O$  旋转而成。那么在此过程中，线段  $AB$  绕自身中点  $M$  旋转了  $\pi$ ，同时中点  $M$  绕坐标原点  $O$  旋转了  $2\pi$ 。通常认为旋转是均匀进行的，那么线段  $AB$  旋转的转角  $\theta$  与中点  $M$  转过的极角  $\phi$  满足如下关系

$$\theta = \frac{1}{2}\phi \quad (2.1)$$

那么线段  $AB$  中点  $M$  的坐标可用参数方程表示为

$$\begin{cases} x = R \cos \phi \\ y = R \sin \phi \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

另设一参量  $t$  表示线段上某点  $P(x_0, y_0, z_0)$  到线段  $AB$  中点  $M$  的距离，那么， $P$  点的坐标可以通过  $M$  点的坐标写出为

$$\begin{cases} x_0 = R \cos \phi + t \cos \theta \cos \phi = \left(R + t \cos \frac{\phi}{2}\right) \cos \phi \\ y_0 = R \sin \phi + t \cos \theta \sin \phi = \left(R + t \cos \frac{\phi}{2}\right) \sin \phi \\ z_0 = 0 + t \sin \theta = t \sin \frac{\phi}{2} \end{cases} \quad (2.3)$$

其中  $t \in [-t_0, t_0]$ ， $\phi \in [0, 2\pi)$ 。由此可以得出莫比乌斯带的参数方程

$$\begin{cases} x = \left(R + t \cos \frac{\phi}{2}\right) \cos \phi \\ y = \left(R + t \cos \frac{\phi}{2}\right) \sin \phi \\ z = t \sin \frac{\phi}{2} \end{cases} \quad (2.4)$$

#### 2.1.2 莫比乌斯带模型的生成

根据方程 (2.4)，可以通过如下 Matlab 程序绘制莫比乌斯带的图像

```
1 clear;
2 clc;
3 t=linspace(-0.5,0.5,40);
4 phi=linspace(0,2.*pi,40);
5 [T,Phi]=meshgrid(t,phi);
```

```

6 x=(1+T.*cos(Phi./2)).*cos(Phi);
7 y=(1+T.*cos(Phi./2)).*sin(Phi);
8 z=T.*sin(Phi./2);
9 surf(x,y,z);
10 colormap spring;

```

## 2.2 电场强度及电势的计算<sup>[5]</sup>

### 2.2.1 电场强度的计算

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = 1 \quad (2.5)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 \quad (2.6)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \phi} \quad (2.7)$$

所以场强

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_D \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} dt d\phi \quad (2.8)$$

其中  $D = \left\{ -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right\}$ 。

```

11 function [Ex,Ey,Ez,E] = Ee(R,x0,y0,z0)
12 % 输入莫比乌斯带半径R及空间中某点坐标(x0,y0,z0)
13 % 输出该点场强E及其分量Ex,Ey,Ez
14
15 % 给出莫比乌斯带的参数方程
16 syms t phi;
17 x=(1+t.*cos(phi./2)).*cos(phi);
18 y=(1+t.*cos(phi./2)).*sin(phi);
19 z=t.*sin(phi./2);
20 % 给出空间中一点到面上某点的距离r
21 r=sqrt((x-x0).^2+(y-y0).^2+(z-z0).^2);
22 % 面元dS的面积元素(E==1)
23 G=(-sin(phi)-0.5.*t.*sin(phi./2)).*cos(phi)-t.*cos(phi./2).*sin(
    phi)).^2+(cos(phi)-0.5.*t.*sin(phi./2)+t.*cos(phi./2).*cos(phi
    )).^2+(0.5.*t.*cos(phi./2)).^2;
24 F=-0.5.*t.*sin(phi).*(cos(phi).^2);
25
26 % 各个分量的需要积分的部分
27 funx=sqrt(G-F.^2).*(x0-x)./(r.^3);
28 fx=matlabFunction(funx);% 参数化
29 funy=sqrt(G-F.^2).*(y0-y)./(r.^3);
30 fy=matlabFunction(funy);
31 funz=sqrt(G-F.^2).*(z0-z)./(r.^3);
32 fz=matlabFunction(funz);
33
34 % 各个分量需要积分的部分的积分

```

```

35 Funx=integral2(fx,-0.5,0.5,0,2.*pi);
36 Funy=integral2(fy,-0.5,0.5,0,2.*pi);
37 Funz=integral2(fz,-0.5,0.5,0,2.*pi);
38 % 总场强需要积分的部分的积分
39 Fun=sqrt(Funx.^2+Funy.^2+Funz.^2);
40
41 %  $\sigma, \epsilon_0$ 
42 sigma=1;
43 epsilon_0=8.854187817e-12;
44
45 % 场强及其分量
46 Ex=sigma./(4.*pi.*epsilon_0).*Funx;
47 Ey=sigma./(4.*pi.*epsilon_0).*Funy;
48 Ez=sigma./(4.*pi.*epsilon_0).*Funz;
49 E=sigma./(4.*pi.*epsilon_0).*Fun;
50 end

```

## 2.2.2 电势的计算

同理，电势

$$U = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_D \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dt d\phi \quad (2.9)$$

其中  $D = \left\{ -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right\}$ 。

```

51 function [U] = Uu(R,x0,y0,z0)
52 % 输入莫比乌斯带半径R及空间中某点坐标(x0,y0,z0)
53 % 输出该点电势U
54
55 % 给出莫比乌斯带的参数方程
56 syms t phi;
57 x=(R+t.*cos(phi./2)).*cos(phi);
58 y=(R+t.*cos(phi./2)).*sin(phi);
59 z=t.*sin(phi./2);
60 % 给出空间中一点到面上某点的距离r
61 r=sqrt((x-x0).^2+(y-y0).^2+(z-z0).^2);
62
63 % 面元dS的面积元素(E==1)
64 G=(-sin(phi)-0.5.*t.*sin(phi./2)).*cos(phi)-t.*cos(phi./2).*sin(
    phi).^2+(cos(phi)-0.5.*t.*sin(phi./2)+t.*cos(phi./2)).*cos(phi
    )).^2+(0.5.*t.*cos(phi./2)).^2;
65 F=-0.5.*t.*sin(phi).*(cos(phi).^2);
66
67 % 电势的需要积分的部分
68 fun=sqrt(G-F.^2)./r;
69 f=matlabFunction(fun);% 参数化
70
71 % 电势需要积分的部分的积分
72 Fun=integral2(f,-0.5,0.5,0,2.*pi);
73
74 %  $\sigma, \epsilon_0$ 

```

```

75 sigma=1;
76 epsilon_0=8.854187817e-12;
77
78 % 电势
79 U=sigma./(4.*pi.*epsilon_0).*Fun;
80 end

```

## 2.3 电场强度与电势的可视化

### 2.3.1 电场强度的可视化

在  $[-5,5] \cap [-5,5] \cap [-5,5]$  以 1 为间隔取 125 个点，分别计算他们的电场强度，并画在图上

```

81 clear;clc;
82
83 R=1;i=1;j=1;k=1;
84 Ex=zeros(5,5,5);
85 Ey=zeros(5,5,5);
86 Ez=zeros(5,5,5);
87 E=zeros(5,5,5);
88
89 for x=-2:1:2
90     for y=-2:1:2
91         for z=-2:1:2
92             [ex,ey,ez,e]=Ee(R,x,y,z);
93             Ex(i,j,k)=ex;
94             Ey(i,j,k)=ey;
95             Ez(i,j,k)=ez;
96             E(i,j,k)=e;
97             if (e>10e10)
98                 Ex(i,j,k)=0;
99                 Ey(i,j,k)=0;
100                 Ez(i,j,k)=0;
101                 E(i,j,k)=0;
102             end
103             disp(i)
104             disp(j)
105             disp(k)
106             fprintf('\n');
107             k=k+1;
108         end
109         j=j+1;
110         k=1;
111     end
112     i=i+1;
113     j=1;
114     k=1;
115 end
116
117
118 x=[-2:1:2];

```

```

119 y=[-2:1:2];
120 z=[-2:1:2];
121 [X,Y,Z] = meshgrid(x,y,z);
122 hold on
123 quiver3(X,Y,Z,Ex,Ey,Ez);
124 grid on;
125 axis equal;
126
127 t=linspace(-0.5,0.5,40);
128 phi=linspace(0,2.*pi,40);
129 [T,Phi]=meshgrid(t,phi);
130 x=(1+T.*cos(Phi./2)).*cos(Phi);
131 y=(1+T.*cos(Phi./2)).*sin(Phi);
132 z=T.*sin(Phi./2);
133 surf(x,y,z);
134 colormap spring;
135
136 grid on;%网格线
137 xlabel('x');%x轴名称
138 ylabel('y');%y轴名称
139 zlabel('z');%z轴名称
140 hold off

```

### 2.3.2 电势的可视化

在  $[-5,5] \cap [-5,5] \cap [-5,5]$  以 1 为间隔取 125 个点，分别计算他们的电势，并画在图上

```

141 clear;clc;
142
143 R=1;i=1;j=1;k=1;
144
145 U=zeros(1,125);
146 for x=-2:1:2
147     for y=-2:1:2
148         for z=-2:1:2
149             [u]=Uu(R,x,y,z);
150             U((i-1)*25+(j-1)*5+k)=u;
151             disp(i)
152             disp(j)
153             disp(k)
154             fprintf('\n');
155             k=k+1;
156         end
157         j=j+1;
158         k=1;
159     end
160     i=i+1;
161     j=1;
162     k=1;
163 end
164
165 X=zeros(1,125);
166 Y=zeros(1,125);

```

```
167 Z=zeros(1,125);
168 for i=1:1:5
169     for j=1:1:5
170         for k=1:1:5
171             X((i-1)*25+(j-1)*5+k)=i-3;
172             Y((i-1)*25+(j-1)*5+k)=j-3;
173             Z((i-1)*25+(j-1)*5+k)=k-3;
174         end
175     end
176 end
177
178
179 hold on
180 scatter3(X,Y,Z,U.*(10.^(-8.5)),U,'filled');
181 axis equal;
182
183 t=linspace(-0.5,0.5,40);
184 phi=linspace(0,2.*pi,40);
185 [T,Phi]=meshgrid(t,phi);
186 x=(1+T.*cos(Phi./2)).*cos(Phi);
187 y=(1+T.*cos(Phi./2)).*sin(Phi);
188 z=T.*sin(Phi./2);
189 surf(x,y,z);
190 colormap spring;
191
192
193 colorbar;%颜色栏图例
194 grid on;%网格线
195 xlabel('x');%x轴名称
196 ylabel('y');%y轴名称
197 zlabel('z');%z轴名称
198 hold off
```

### 第3章 结果结论

图3.1和图3.2分别显示了莫比乌斯岛周围的电场、电势分布状况。

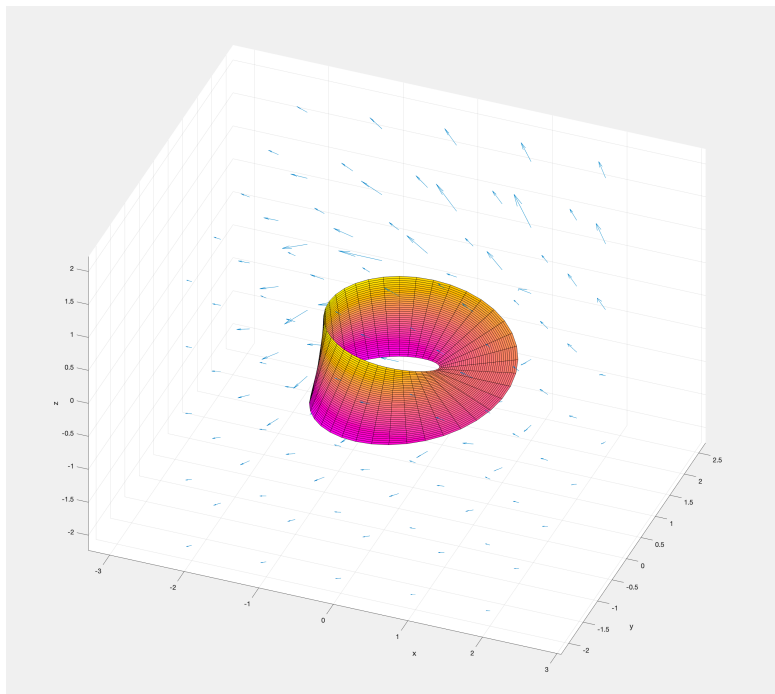


图 3.1 莫比乌斯带周围电场的分布

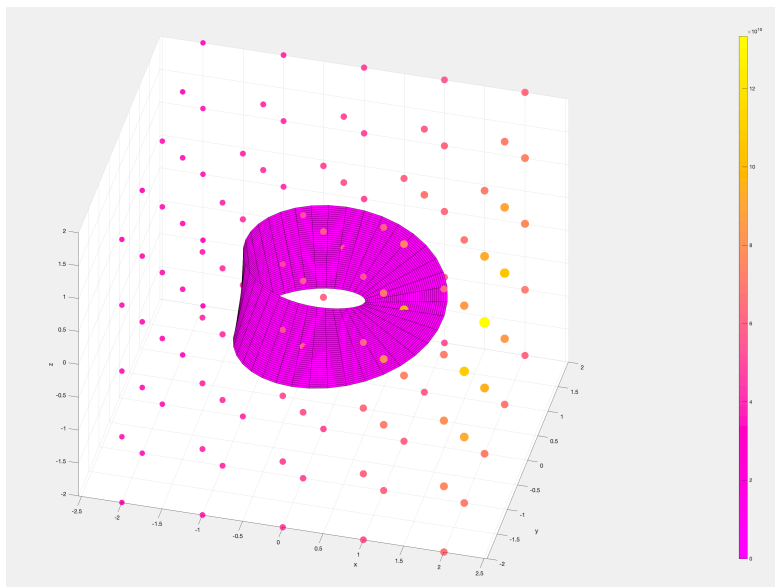


图 3.2 莫比乌斯带周围电势的分布

从图中可以看出，靠近莫比乌斯带面的地方，电场强度矢量基本垂直于该面切平面，与法向量平行。此外，y 坐标大的地方，电场强度更大；距中心圆点相同距离的点 x 坐标大的，电势更高。



## 参 考 文 献

- [1] 百度百科. 莫比乌斯带 [DB/OL]. (2022-11-21)[2022-12-11]. <https://baike.baidu.com/item/莫比乌斯带/4457881>
- [2] 百度文库. 莫比乌斯带——精选推荐 [DB/OL]. [2022-12-11]. [https://wenku.baidu.com/view/6823a462ae02de80d4d8d15abe23482fb4da02ca.html?\\_wks\\_=1670857341735&bdQuery=莫比乌斯带带电](https://wenku.baidu.com/view/6823a462ae02de80d4d8d15abe23482fb4da02ca.html?_wks_=1670857341735&bdQuery=莫比乌斯带带电)
- [3] 百度百科. 电场叠加原理 [DB/OL]. (2022-11-21)[2022-12-11]. <https://baike.baidu.com/item/电场叠加原理/846636>
- [4] 知乎. 莫比乌斯带的参数方程是怎么来的? 它又为什么没有方向呢? [EB/OL]. (2019-07-30)[2022-12-11]. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/75237170>
- [5] 叶邦角. 电磁学 [M]. 第 2 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2018: 28-47.