附件 2

实验方案设计
单摆法测重力加速度

李佩哲　PB21051049

2022 年 3 月 19 日

原理

已知单摆的周期公式为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left[1+\frac{d^2}{20l^2}-\frac{m_0}{12m}\left(1+\frac{d}{2l}+\frac{m_0}{m}\right)+\frac{\rho_0}{2\rho}+\frac{\theta^2}{16}\right]}$$

其中误差量对 T 的修正均小于 10^{-3}. 根据要求

$$\frac{\Delta g}{g} < 1.0\% = 10^{-2}$$

由 $10^{-2} > 10^{-3}$ 可知，这些因素可以忽略，从而

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

故

$$g = l\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \left(L_{\text{绳长}} + \frac{d_{\text{摆球直径}}}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

按求不确定度传递公式的方法估算，有

$$\ln g = \ln\left[\left(L+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right] = \ln\left(L+\frac{d}{2}\right) + 2\ln 2\pi - 2\ln T$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}g}{g} = \frac{\mathrm{d}\left(L+\frac{d}{2}\right)}{L+\frac{d}{2}} + \frac{-2\mathrm{d}T}{T} = \frac{\mathrm{d}L}{L+\frac{d}{2}} + \frac{\mathrm{d}d}{2L+d} + \frac{-2\mathrm{d}T}{T}$$

$$\therefore \frac{\Delta g}{g} = \frac{u_g}{g} = \sqrt{\frac{u_L^2}{\left(L+\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{u_d^2}{(2L+d)^2} + \frac{4u_T^2}{T^2}} < 1.0\%$$

根据不确定度均分原理，有

$$\frac{u_L^2}{\left(L+\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{u_d^2}{(2L+d)^2} = \frac{4u_T^2}{T^2} < \frac{1}{30000}$$

$$\therefore \frac{u_L}{L+\frac{d}{2}} = \frac{u_d}{2L+d} = \frac{4u_T}{T} < \frac{\sqrt{3}}{3}\%$$

即

$$\frac{\Delta L}{l} = \frac{1}{2}\frac{\Delta d}{l} = 4\frac{\Delta T}{T} < \frac{\sqrt{3}}{3}\% \approx 0.577\%$$

了解到实验仪器最大允差为 $\Delta_{\text{钢卷尺}} \approx 0.2$ cm，$\Delta_{\text{游标卡尺}} \approx 0.002$ cm，$\Delta_{\text{千分尺}} \approx 0.001$ cm，$\Delta_{\text{秒表}} \approx 0.01$ s，

人员测量时间的估计误差为 $\Delta_{人} \approx 0.2$ s. 由已知条件“……调节标尺高度，使其上沿中点距悬挂点 50 cm”可知，$l > 50$cm. 对于钢卷尺，有 $\frac{\Delta L}{l} < 0.4\% < \frac{\sqrt{3}}{3}\%$，因此对于符合要求的绳长，选用钢卷尺测量即可. 同理可得，对 $l > 50$ cm，解 $\frac{1}{2}\frac{\Delta d}{l} < \frac{\sqrt{3}}{3}\%$ 得 $\Delta d < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 即可，显然，使用钢卷尺测摆球直径即可. 综上，测量摆长使用的仪器为钢卷尺，且容易看出 l 越大，相对误差越小，精度越高.

对于周期的测量，与实际测量相比较，有

$$T = \frac{t_{测量时间} \pm \sqrt{(t_P u_A)^2 + \left(k_P \frac{\sqrt{\Delta^2_{秒表} + \Delta^2_{人}}}{C}\right)^2}}{n}$$

其中 n 为测量的周期数. 可以看到，在测量 T 时，可以通过增加 n 来减小 U_P 的影响. 按最大不确定度估计，有

$$4\frac{\sqrt{\Delta^2_{秒表} + \Delta^2_{人}}}{t} \approx 4\frac{\sqrt{\Delta^2_{秒表} + \Delta^2_{人}}}{nT} < \frac{\sqrt{3}}{3}\%$$

解得 $t > 4\sqrt{1203}$ s ≈ 138.7 s，又因为求解条件为 $t \approx nT$，故保险起见，应测 140 s 附近的完整的周期个数.

结论

摆长至少 50 cm，增加摆长可以提高测量精度. 摆长应用钢卷尺测量，且不需要使用游标卡尺测量摆球直径. 测量周期，应测 140 s 附近的完整的周期个数.

实验步骤

1. 取仪器，调整至可用状态；
2. 调节螺栓使立柱竖直；
3. 调节标尺高度，使其上沿中点距悬挂点 50 cm；
4. 测量摆线长度、小球直径，多次测量并记录原始数据；
5. 悬挂摆线，借助平面镜调整视角；
6. 将摆线拉开 $\theta(\theta < 5^\circ)$ 角，松手，记录摆线第一次通过标尺中心线的时间；
7. 持续计时，在经过 140 s 左右时记录摆线最后一次通过标尺中心线的时间，记录时间差，重复步骤6、7；
8. 数据处理，计算 g 与 $\frac{\Delta g}{g}$；
9. 整理器材，打乱支架平衡、标尺及平面镜位置.