厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷答案

________学院________系________年级________专业

试卷类型:(理工类A卷)　　　　考试时间:2023.06.20

一、选择题:(**每小题 4 分,共 16 分**)

1. 函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值点为（　A　）。

（A） $(1,0)$；　（B） $(1,2)$；　（C） $(-3,0)$；　（D） $(-3,2)$。

2. 设 λ 为大于零的常数，关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{\lambda}}$ 的敛散性，下列说法正确的是（　D　）。

（A）条件收敛；（B）绝对收敛；（C）发散；（D）需从 λ 的值来判定是条件收敛还是绝对收敛。

3. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，取顺时针方向，则 $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$（　C　）。

（A） 0；　（B） 2π；　（C） -2π；　（D） π。

4. 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的闭区域，则 $\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$（D）。

（A） $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}z$；　（B） $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\mathrm{d}z$；

（C） $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}1\mathrm{d}z$；　（D） $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\mathrm{d}z$。

二、填空题:(**每小题 4 分,共 20 分**)

1. 设 D 是顶点分别为 $(0,0)$、$(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域，则二重积分 $\iint_D\cos(y-x)\,\mathrm{d}\sigma=\underline{2}$。

2. 函数 $z=xe^y$ 在点 $(1,0)$ 处沿着从点 $(1,0)$ 到点 $(0,1)$ 的方向的方向导数为____0____。

3. 设 Σ 是平面 $3x+3y+2z=3$ 在第一卦限的部分的下侧，则 $\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{-\frac{1}{6}}$。

4. 设 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=1$，则对弧长的曲线积分 $\oint_L(x+y)\mathrm{d}s=\underline{2\pi}$。

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数为 $\underline{\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}}$，其收敛域为 $\underline{(-1,1)}$。

三、(本题 10 分)计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z^2=x^2+y^2$ 与上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的有界闭区域。

解： $\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r=\pi(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{r^6}{6}\Big|_0^1=\frac{1}{12}\pi$。

四、(每小题 7 分，共 14 分)判别下列级数的敛散性： 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n}$； 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$。

解： 1. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=1$, 所以由比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin^2\frac{1}{n}$ 收敛。

2. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{-1}{n})^{-n}]^{-1}=\frac{1}{e}<1$，所以由根值审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n})^{n^2}$ 收敛。

五、(本题 10 分)设 L 为从点 $A(0,0)$ 到点 $B(2,0)$、再从点 $B(2,0)$ 到点 $C(1,1)$ 的那一段有向折线 ABC，计算对坐标的曲线积分：$I=\int_L(x^2-y+e^x\sin^2 x)\mathrm{d}x+(x-e^y\sin^2 y)\mathrm{d}y$。

解： 作辅助线 CA： $y=x,\quad x:1\to 0$。设 D 为三角形 ΔABC。由格林公式，

$$
\begin{aligned}
I&=\oint_{ABCA}(x^2-y+e^x\sin^2 x)\mathrm{d}x+(x-e^y\sin^2 y)\mathrm{d}y\\
&\quad-\int_{CA}(x^2-y+e^x\sin^2 x)\mathrm{d}x+(x-e^y\sin^2 y)\mathrm{d}y\\
&=\iint_D[1-(-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_1^0(x^2-x+e^x\sin^2 x)+(x-e^x\sin^2 x)\mathrm{d}x\\
&=2\iint_D\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\\
&=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\\
&=\frac{7}{3}。
\end{aligned}
$$

六、（本题 10 分）计算对面积的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$在$\frac{1}{2}\le z\le 1$的部分。

解：根据题意，Σ：$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ ，$(x,y)\in D_{xy}=\{(x,y)\,|\,3\le x^2+y^2\le\frac{15}{4}\}$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\frac{2}{4-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}}\frac{1}{4-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=-2\pi\ln(4-\rho^2)\Big|_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$=-2\pi(\ln\frac{1}{4}-\ln 1)=4\pi\ln 2\text{。}$$

七、（本题 10 分）设Ω是圆柱体$x^2+y^2\le 4$位于平面$z=0$上方及平面$z=y$下方的那一部分立体，Σ为Ω的整个边界曲面的外侧。计算对坐标的曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解：用高斯公式。令$D_{xy}=\{(x,y):x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$，由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}(1+1+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\cdot\rho^3\Big|_0^2=2\cdot 8=16\text{。}$$

八、（本题 10 分）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$的和函数。

解法一： $R=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{(2n+2)(2n+3)}=+\infty$，因此该幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

[或者 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}=0<1$，因此该幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$。]

令$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$， $x\in(-\infty,+\infty)$，则当$x\in(-\infty,+\infty)$时， $s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$。

从而$s'(x)+s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$，解得

$s(x)=e^{-\int \mathrm{d}x}(C+\int e^x\cdot e^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x)=e^{-x}(C+\frac{1}{2}e^{2x})$， 又 $s(0)=0$， 所 以 $C=-\frac{1}{2}$。 因 此

$s(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\operatorname{sh}x$。

解法二： $R=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{(2n+2)(2n+3)}=+\infty$，因此该幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

[或者 $\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}=0<1$，因此该幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$。]

令 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$， $x\in(-\infty,+\infty)$， 则 当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时， $s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，

$s''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=s(x)$， 即 $s''(x)-s(x)=0$， 解得 $s(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$， 又 $s(0)=0$，

$s'(0)=1$，所以$C_1=\frac{1}{2}$， $C_2=-\frac{1}{2}$。因此$s(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\operatorname{sh}x$。