厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷解答

________学院________系________年级________专业

试卷类型:(理工类A卷)　　　　考试时间:2022.06.09

一、填空题:(每小题 4 分,共 24 分)

1. 二次积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$ 的值是 $\underline{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}}$。

2. 设 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2\}$,则二重积分 $I_1=\iint_D \frac{x+y}{4}\mathrm{d}\sigma$ 和 $I_2=\iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$ 之间的大小关系为 $\underline{I_2}\ >\ \underline{I_1}$ 。

3. 设 Σ 是平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分的下侧,则第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(6x+4y+3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{-36}$ 。

4. 已知常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\underline{\ 8\ }$。

5. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛,则该幂级数的收敛半径 $R=\underline{\ 2\ }$。

6. 函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数为 $\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$,其收敛域为 $\underline{[-1,1]}$ 。

二、(本题 10 分)计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是由三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体。

解法一:用截面法。令 $D_z=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1-z\}$,

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z$$

$$\overset{t=1-z}{=}\frac{1}{2}\int_0^1 t^2(1-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{24}\text{。}$$

解法二：先一后二法。令 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1\}$，

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(1-x-y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{-1}{3}(1-x-y)^3\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{3}(1-x)^3\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-1}{24}(1-x)^4\Big|_0^1=\frac{1}{24}\text{。}$$

三、（**本题 10 分**）设 L 为由上半圆 $y=\sqrt{4-x^2}$ 及 x 轴所围成的有界区域的整个边界，计算第一类曲线积分 $I=\oint_L(x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}s$。

解：令 $L_1:y=\sqrt{4-x^2}\ (-2\le x\le 2)$，$L_2:y=0\ (-2\le x\le 2)$ 。则

$$I=\int_L x\,\mathrm{d}s+\int_L(y+x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=\int_L(y+x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_{L_1}(y+x^2+y^2)\,\mathrm{d}s+\int_{L_2}(y+x^2+y^2)\,\mathrm{d}s\text{，又}$$

$$\int_{L_1}(y+x^2+y^2)\,\mathrm{d}s\overset{x=2\cos\theta,\,y=2\sin\theta}{=}\int_0^{\pi}(2\sin\theta+4)\cdot\sqrt{(-2\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta+8\pi=4(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}+4\pi=8+8\pi\text{，}$$

$$\int_{L_2}(y+x^2+y^2)\ \mathrm{d}s\overset{y=0}{=}\int_{-2}^{2}x^2\,\mathrm{d}x=2\int_0^2x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{16}{3}\text{，因此，}$$

$$I=\oint_L(x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}s=\frac{40}{3}+8\pi\text{。}$$

四、（**每小题 8 分，共 16 分**）判别下列级数的敛散性：

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos^2\frac{n\pi}{3}$；

解：注意到 $\dfrac{n}{2^n}\cos^2\dfrac{n\pi}{3}\le\dfrac{n}{2^n}$，又因为 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛，因此，

由比较审敛法，正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos^2\frac{n\pi}{3}$ 收敛。

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$。

解： 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\geq 3$。则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调减少。故当 $n\geq 3$ 时，$f(n)=\frac{\ln n}{n}$ 是单调减少的。又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$，因此由 Leibniz 判别法，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 收敛。

五、（本题 10 分） 设 L 为上半椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1\ (y\geq 0)$ 上从 $(1,0)$ 到 $(0,2)$ 的那一段有向弧，计算第二类曲线积分：

$$I=\int_L (x^2+3y-2\sin y\cos y)\,\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\,\mathrm{d}y。$$

解： 用格林公式。作辅助线 $l_1: x=0$，$y:2\to 0$ 和 l_2：$y=0$，$x:0\to 1$。设 D 为有向曲线 L，l_1 和 l_2 所围成的有界区域。则由格林公式，得

$$I=(\int_{L+l_1+l_2}-\int_{l_1}-\int_{l_2})(x^2+3y-\sin 2y)\,\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 4\sin^2 y-(3-2\cos 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{l_1}(x^2+3y-\sin 2y)\,\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{l_2}(x^2+3y-\sin 2y)\,\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\,\mathrm{d}y=-\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_2^0\mathrm{d}\,y-\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\,x$$

$$=-\frac{1}{4}\pi\cdot 1\cdot 2+2-\frac{1}{3}x^3\big|_0^1=-\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$$

六、（本题 10 分） 计算第一类曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为旋转抛物面 $2z=x^2+y^2$ 在 $0\leq z\leq 2$ 的部分。

解： 令 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,0\leq x^2+y^2\leq 4\}$，

$$I=\iint_{\Sigma}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(1+\rho^2)\,\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^2(\rho+\rho^3)\,\mathrm{d}\rho=2\pi(\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{4}\rho^4)\big|_0^2=2\pi(2+4)=12\pi。$$

七、（**本题 10 分**）计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧。

解：设 Ω 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的空间区域。由高斯公式，得

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{5}r^5\Big|_0^1=6\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{3\pi}{5}(2-\sqrt{2})。$$

八、（**本题 10 分**）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解：收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$，又当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(-1)^n}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$ 收敛。因此，该幂级数的收敛域为 $(-1,1]$。

令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n+1}$，$x\in(-1,1]$。则当 $x\in(-1,1)$ 且 $x\neq0$ 时，

$x\,s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$，从而 $[x\,s(x)]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\dfrac{1}{1+x}$，进而有 $x\,s(x)=\ln(1+x)$，

故当 $x\in(-1,1)$ 且 $x\neq0$ 时，$s(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$。注意到 $s(0)=1$，又因为 $s(x)$ 在 $(-1,1]$ 连续，

所以 $s(1)=\lim\limits_{x\to1^-}s(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln2$。因此

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & x\in(-1,1],x\neq0\\ 1 & x=0\end{cases}。$$