厦门大学《微积分 II-1》课程期末答案

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2018.1.17

得　分	
评阅人	

一、求下列不定积分（每小题 8 分，共 24 分）．

1. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$　　　　2. $\int x\cos 2x dx$

3. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

解：1. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int \sin(\ln x)d(\ln x) = -\cos(\ln x)+C$ ---第一步 6 分，第二步 2 分

2. $$\int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int x d\sin(2x) = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$
（每一步 2 分，共 8 分）

3. 作代换 $x=\sin t$　$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,，　则 $dx=\cos t dt$，　于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sin t\cos t}\cos t dt = \int \csc t dt$$
$$= \ln|\csc t - \cot t| + c = \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + c = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + c$$
（每一步 2 分，共 8 分）

得　分	
评阅人	

二、求下列定积分（每小题 8 分，共 16 分）．

1. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x(1+\sin 2x)dx$　　　　2. $\int_0^1 e^{\sqrt{1-x}}dx$

解：1. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x(1+\sin 2x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

----把积分开写成两个积分的形式，给 2 分；只算对余弦函数求积分部分给 5 分，全算对给 8 分

2. 令 $t=\sqrt{1-x}$，则 $x=1-t^2, dx=-2tdt$，于是 当 $x=0$时，$t=1$，当$x=1$时，$t=0$，所以

$$\int_0^1 e^{\sqrt{1-x}}dx = -\int_1^0 2te^t dt = 2\int_0^1 t de^t = 2(te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt) = 2(e - e^t\Big|_0^1) = 2$$

---2 分，若是积分上下限没直接写，下面运算中写了也给 2 分

----第一个等式与前面“换元论述”总共给 2 分；第二到第四个等式分别给 2 分，共 8 分

得　分	
评阅人	

三、求下列函数极限（每题 8 分，共 24 分）.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\arctan\frac{1}{n}+\arctan\frac{2}{n}+\cdots+\arctan\frac{n}{n}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt}{\sin^4 x}$　　　3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

解： 1. 原式 $=\int_0^1\arctan x\,dx=x\arctan x\,|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\,|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$　　**第一步 4 分，以后每步 1 分**

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(x^2\right)2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(x^2\right)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

第一步 2 分，第二步 4 分，以后每步 1 分

3. $\because e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$　　$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

第一步 6 分，其中每个展开 3 分，以后每步 1 分。

注:也可用洛必达法则计算

得　分	
评阅人	

四、（8 分）　设方程 $x-\int_1^{y+x}e^{-u^2}du=0$ 确定了 y 是 x 的函数，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

解：对方程 $x-\int_1^{y+x}e^{-u^2}du=0$ 两边对 $\boldsymbol{x}$ 求导得:

$\boldsymbol{1-e^{-(y+x)^2}\left(y'+1\right)=0}$ **------4 分**

将 $\boldsymbol{x=0}$ 代入原方程，得到：$\boldsymbol{\int_1^{y(0)}e^{-u^2}du=0}$，从而 $\boldsymbol{y\left(0\right)=1}$ **-----7 分**

则 $\boldsymbol{1-e^{-1}\left(1+y'\left(0\right)\right)=0}$；所以 $\boldsymbol{y'\left(0\right)=e-1}$ **----8 分**

第一步 4 分

得　分	
评阅人	

五、（8 分）求函数 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 的单调区间以及极值.

解：$y'=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$，**-----1 分**令 $y'=0$,解得

$x=0,x=1$。**------2 分**列表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	+
$f(x)$	单调减	不是极值点	单调减	极小值 0	单调增

-----7 分

所以，$f(x)$ 的单调增加区间为 $(1,+\infty)$；单调增加区间为 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ (或合并区间成 $(-\infty,1)$). 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=0$。**-----8 分**

得　分	
评阅人	

六、（8 分）求抛物线方程 $y^2=2ax$ 的曲率。(8 分)

解：　对抛物线方程 $y^2=2ax$ 两边关于 x 求导

$2yy'=2a \quad \Rightarrow y'=\dfrac{a}{y}$, **-----2 分**

$$y''=-\frac{ay'}{y^2}=-\frac{a^2}{y^3}$$

------5 分

则 $k=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|=\dfrac{a^2}{(a^2+y^2)^{3/2}}=\dfrac{a^2}{(a^2+2ax)^{3/2}}$ **------8 分**

注：把 y 看作自变量也能得到相同的答案（$\dfrac{a^2}{(a^2+y^2)^{3/2}}$）. 把 x 看作自变量将原方程分成两个函数分别求导也能得到相同答案（$\dfrac{a^2}{(a^2+2ax)^{3/2}}$）

得　分	
评阅人	

七、（6 分）计算 $\dfrac{d^2}{dx^2}\int_0^x tf(x-t)dt$，其中 $f(x)$ 是连续函数。

解：　令 $x-t=u$，则 $t=x-u$----1 分

当 $t=0$ 时，$u=x$；当 $t=x$ 时，$u=0$

所以 $\int_0^x tf(x-t)dt = -\int_x^0 (x-u)f(u)du = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$ ---2 分

故 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x-t)dt = \frac{d}{dx}[x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du] = \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du$ ---2 分

$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x tf(x-t)dt = \frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du = f(x)$ ---1 分

得　分	
评阅人	

八、（6 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调增加，证明：$(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t < 2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t,\quad x>a$。

证明：作辅助函数 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - 2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t$，　**---2 分**

因为 $F'(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + (a+x)f(x) - 2xf(x)$

$=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - (x-a)f(x)$

$=\int_a^x [f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$

<0　**----5 分**

故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，

所以当 $x>a$ 时，$F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - 2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t < F(a)=0$ **---6 分**