厦门大学《微积分 II-1》课程期末试卷

试卷类型：(理工类 A 卷)　　考试日期　2019.1.16

得　分	
评阅人	

一、求下列不定积分（每小题 8 分, 共 24 分）.

1. $\int x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x$　　　　2. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$

3. $\int \dfrac{3x+2}{x^2(x+1)}dx$

1、解：$\int x^3 e^{-x^2}dx = \dfrac{1}{2}\int x^2 e^{-x^2}dx^2$，----2 分 令 $x^2 = t$，则原式$=\dfrac{1}{2}\int te^{-t}dt = -\dfrac{1}{2}\int tde^{-t}$，

-----4 分 由分步积分公式得，原式$=-\dfrac{1}{2}\mathrm{te}^{-t}+\dfrac{1}{2}\int e^{-t}dt = -\dfrac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$。

分部积分使用正确 6 分，答案也正确 8 分

2、 解：设 $x=\sin t, t\in\left[-\pi/2, \pi/2\right]$，----3 分

则原式$=\int \sin^2 t\cos^2 t dt = \dfrac{1}{4}\int \sin^2 2t dt = \dfrac{1}{8}\int (1-\cos 4t)dt$ ----6 分

$=\dfrac{1}{8}(t-\dfrac{1}{4}\sin 4t) = \dfrac{1}{8}\arcsin x - \dfrac{1}{32}\sin 4\arcsin x$。----8 分

3、解：被积函数可以分解为$\dfrac{3x+2}{x^2(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$，所以，

$3x+2 = Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2$，

令 $x=0,-1,1$：$2=B,\quad -1=C,\quad 5=2A+2B+C$，解之得 $A=1$，$B=2$，$C=-1$。----4 □

因此，$\int\dfrac{3x+2}{x^2(x+1)}dx=\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\ln|x|-\dfrac{2}{x}-\ln|x+1|+C$。----8 □

得　分	
评阅人	

二、求下列定积分（每小题 8 分, 共 16 分）.

1. 对于正整数 n，计算 $\int_0^{2n\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ \mathrm{e}^x, & x\geq 0\end{cases}$，计算 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

1、解：$\int_0^{2\pi 2\pi 2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^{n}\ |\cos x|\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot n\int_0\ |\cos x|\mathrm{d}x$ ----3 分

$=2\sqrt{2}\cdot n\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=4\sqrt{2}\cdot n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$ ----6 分

$$=4\sqrt{2}\cdot n(\sin x)_0^{\frac{\pi}{2}}=4\sqrt{2}\cdot n \text{ ----8 分}$$

2、解：$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ ----4 分

$$=\int_{-1}^{0}(1+x^2)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+\mathrm{e}-1=\frac{1}{3}+\mathrm{e}\text{。 ----8 分}$$

得　分	
评阅人	

三、求下列函数极限（每题 8 分，共 24 分）.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$

2. 设 $F(x)=x\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{t^2-x^2}\mathrm{d}t$，求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{Ln\sin mx}{Ln\sin nx}$，$m,n\in N^+$

1、解：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$。

定积分正确表达 5 分，答案也正确 8 分

2、解：$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt+xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}$ ----3 分

$=\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{2xe^{x^2}}=\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}=\frac{1}{2}$。中间过程正确 6 分，结果也正确 8 分

3、解：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{Ln\sin mx}{Ln\sin nx}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{m\cos mx}{\sin mx}}{\frac{n\cos nx}{\sin nx}}=\frac{m}{n}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin nx}{\sin mx}=\frac{m}{n}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{nx}{mx}=1$。第一步正确 3 分，

第二步正确 5 分，结果也正确 8 分

得　分	
评阅人	

四、(8 分)　求函数 $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式。

解：$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$，$f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$，----4 分 由泰勒中值定理知，

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+\dfrac{(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}x^{n+1}$，其中$\xi$位于 0 与 x 之间。----8 分

得　分	
评阅人	

五、（8 分）求函数 $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ 的凹凸区间、拐点及函数曲线的渐近线。

解： 该函数的定义域为 $x\neq\pm1$，且 $y'=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$， $y''=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$。

$y''=0$ 或者不存在的点为 $x=\pm1$ 或 0----2 分。所以，

在区间 $(-\infty,-1)$ 上， $y''<0$，函数向上凸；在区间 $(-1,0)$ 上， $y''>0$，函数向上凹；---4 分

在区间 $(0,1)$ 上， $y''<0$，函数向上凸；在区间 $(1,+\infty)$ 上， $y''>0$，函数向上凹。

综上所述，函数的凹区间为 $(-1,0]$， $(1,+\infty)$；函数的凸区间为 $(-\infty,-1)$， $[0,1)$；

函数的拐点是 $(0,0)$。---6 分

$\lim\limits_{x\to\pm1}y=\infty$，因此， $x=1$ 与 $x=-1$ 是该函数的两条竖直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=0$ 可知，该函数存在斜渐近线 $y=x$。----8 分

得　分	
评阅人	

六、（8 分）设 $f'(\sin x)=\cos^2 x$，求 $\int f(\sin x)dx$。

解： $f(\sin x)=\int f'(\sin x)d(\sin x)=\int\cos^2 x d(\sin x)$ ---2 分

$=\int[1-\sin^2 x]d(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x+c_1$ ----4 分

$\int f(\sin x)dx=\int[\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x+c_1]dx$

$=\int\sin xdx+\dfrac{1}{3}\int[1-\cos^2 x]d\cos x+\int c_1 dx$ ----6 分

$=-\cos x+\dfrac{1}{3}\cos x-\dfrac{1}{9}\cos^3 x+c_1x+c_2=-\dfrac{2}{3}\cos x-\dfrac{1}{9}\cos^3 x+c_1x+c_2$ ----8 分

得　分	
评阅人	

七、（6 分）计算已知 $f(x)=\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$。

解：$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx^2=\frac{1}{2}f(x)x^2\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)$

$=0-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{e^{x^2}}{x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 xe^{x^2}dx \quad =-\frac{1}{4}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1-e}{4}$。

每一步正确各得 2 分

得　分	
评阅人	

八、（6 分）.试证明：在区间 $(0,\frac{1}{2})$ 内，恒有不等式

$$2x+(x-2)\arctan x>(x+\frac{1}{2})\ln(1+x^2)$$

成立.

证明：令 $f(x)=2x+(x-2)\arctan x-(x+\frac{1}{2})\ln(1+x^2)$，---2 分

则

$$f'(x)=2+\arctan x+\frac{x-2}{1+x^2}-\ln(1+x^2)-\frac{x(2x+1)}{1+x^2}=\arctan x-\ln(1+x^2)\text{；----4 分}$$

又 $f''(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1-2x}{1+x^2}>0$，则当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，所以当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，

$f(x)>f(0)=0$，----7 分

即　$2x+(x-2)\arctan x>(x+\frac{1}{2})\ln(1+x^2)$。----8 分