历届试题选（六）

一、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)\cdot f(2)>0$，$f(0)\cdot f(1)<0$．证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)$．（2016—2017）

二、设函数 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续（n 为自然数，$n\geq 2$），$f(0)=f(n)$．证明：存在 ξ，$\xi+1\in[0,n]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+1)$．（2016—2017）

三、设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可导，并且满足 $\forall x\in\mathbb{R}$，$\left|f(x)\right|\leq 1$，$\left|f'''(x)\right|\leq 1$．证明：$\forall x\in\mathbb{R}$，$\left|f'(x)\right|^3\leq\dfrac{9}{8}$．（2016—2017）

四、设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(2)=2f(1)$．证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$．（2017—2018）

五、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有连续的二阶导数．证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-2f(\dfrac{a+b}{2})+f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$．（2017—2018）

六、设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且有 $f(0)=0$，$f(1)+f(2)=2$，$f(3)=4$．证明：(1) 至少存在一点 $\xi\in[1,2]$，使得 $f(\xi)=1$；(2) 至少存在一点 $\eta\in(0,3)$，使得 $f'(\eta)=1$．(2018—2019)

七、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(1)=0$．试证：（1）存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=x_0$；（2）存在不同的 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$．（2019—2020）

八、设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(1)+f(2)=0$．证明存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$．（2020—2021）

九、设 $a>b>0$，证明：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$．（2020—2021）

十、设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且有 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=-1$．证明：至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$．（2021—2022）