一、计算下列各题：（每小题 5 分，共 30 分）

1．设α与β均为单位向量，其夹角为$\dfrac{\pi}{4}$，求以$\alpha+2\beta$与$2\alpha-\beta$为邻边的平行四边形的面积.

解：$(\alpha+2\beta)\times(2\alpha-\beta)=\alpha\times(2\alpha)-\alpha\times\beta+(2\beta)\times(2\alpha)-(2\beta)\times\beta=-5(\alpha\times\beta)$，

故所求的平行四边形的面积为 $\left|(\alpha+2\beta)\times(2\alpha-\beta)\right|=5|\alpha||\beta|\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}.$

2．设点$P(2,8,-1)$为从原点到一平面的垂足，求该平面的方程.

解：法向量为$\overrightarrow{OP}=\{2,8,-1\}$，故所求的平面方程为

$$2(x-2)+8(y-8)-(z+1)=0\text{ ，即 }2x+8y-z-69=0.$$

3．求曲面$\sin xy+\sin yz+\sin zx=1$在$(1,\dfrac{\pi}{2},0)$处的切平面方程.

解：记$F(x,y,z)=\sin xy+\sin yz+\sin zx-1$，则已知曲面在$(1,\dfrac{\pi}{2},0)$处的法向量为

$$\vec{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}\Big|_{(1,\frac{\pi}{2},0)}=\left\{y\cos xy+z\cos xz,x\cos xy+z\cos yz,y\cos yz+x\cos xz\right\}\Big|_{(1,\frac{\pi}{2},0)}=\{0,0,\frac{\pi}{2}+1\}$$

故所求的切平面方程为$z=0$.

4．计算二重积分$\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是以$y=x,y=x+a,y=a,y=3a\,(a>0)$为边的平行四边形.

解：$\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x+y)\mathrm{d}x=\int_a^{3a}[\,\dfrac{1}{2}(2ay-a^2)+ay]\mathrm{d}y\;=(ay^2-\dfrac{1}{2}a^2y)\Big|_a^{3a}=7a^3$.

5．计算二次积分$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\sin x^2\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\sin x^2\mathrm{d}x=\iint\limits_D\sin x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sin x^2\mathrm{d}y=\int_0^1x\sin x^2\mathrm{d}x\;=(-\dfrac{1}{2})\cos x^2\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}(1-\cos1)$.

6．设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le1\}$，计算三重积分$\iiint\limits_\Omega|z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解：利用对称性，$\iiint\limits_\Omega|z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le1,z\ge0\}$.

于是，$\iiint\limits_\Omega|z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这里$D_z:\begin{cases}x^2+y^2\le1-z^2\\ z=0\end{cases}$.

故 $\iiint\limits_\Omega|z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^1z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1z\cdot\pi(1-z^2)\mathrm{d}z=2\pi\cdot(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4})=\dfrac{\pi}{2}$

二、计算下列各题：（每小题 6 分，共 30 分）

1．求函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1,0,1)$处沿点A指向点$B(3,-2,2)$的方向导数.

解：$\overrightarrow{AB}=\{2,-2,1\}$，$\overrightarrow{AB^0}=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\{2,-2,1\}=\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}$. 因此，所求的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,0,1)}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{(1,0,1)}$$

$$=\left.\left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{y^2+z^2}}\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2z}{2\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{1}{3}\right)\right|_{(1,0,1)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

2．设函数$z=f(x+\mathrm{e}^y,x^2y)$的二阶偏导连续，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot 2xy=f_1'+2xyf_2'$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot\mathrm{e}^y+f_{12}''\cdot x^2+2xf_2'+2xy\cdot(f_{21}''\cdot\mathrm{e}^y+f_{22}''\cdot x^2)$$

$$=f_{11}''\cdot\mathrm{e}^y+(x^2+2xy\mathrm{e}^y)f_{12}''+2xf_2'+2x^3yf_{22}''$$

3．计算二重积分$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由$x=1,y=0,y=x$所围成的区域.

解：$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}r(r^2-1)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{4}\sec^4\theta-\frac{1}{2}\sec^2\theta+\frac{1}{4})\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{16}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{4}(1+\tan^2\theta)\sec^2\theta-\frac{1}{2}\sec^2\theta+\frac{1}{4})\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{16}+\left.(\frac{1}{4}\tan\theta+\frac{1}{12}\tan^3\theta-\frac{1}{2}\tan\theta+\frac{1}{4}\theta)\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}.$$

4．求直线$L:\begin{cases}2x-y-3z+2=0\\ x+2y-z-6=0\end{cases}$在平面$x-y-2z+1=0$的投影直线方程.

解：已知平面$x-y-2z+1=0$的法向量为$\overrightarrow{n_1}=\{1,-1,-2\}$.

设过直线L作垂直于已知平面$x-y-2z+1=0$的平面束方程为

$$2x-y-3z+2+\lambda(x+2y-z-6)=0，$$

即 $$(2+\lambda)x+(-1+2\lambda)y+(-3-\lambda)z+2-6\lambda=0.$$

其法向量为$\vec{n}=\{2+\lambda,-1+2\lambda,-3-\lambda\}$.

令 $\vec{n}\cdot\vec{n_1}=0$ ，可得 $(2+\lambda)\cdot 1+(-1+2\lambda)\cdot(-1)+(-3-\lambda)\cdot(-2)=0$ ，则 $\lambda=-9$.

过直线 L 作垂直于已知平面 $x-y-2z+1=0$ 的平面方程为 $-7x-19y+6z+56=0$.

故直线 $L:\begin{cases}2x-y-3z+2=0\\ x+2y-z-6=0\end{cases}$ 在平面 $x-y-2z+1=0$ 的投影直线方程为

$$\begin{cases}x-y-2z+1=0\\ -7x-19y+6z+56=0\end{cases}.$$

5． 求点 $M(3,2,1)$ 关于平面 $x+2y-z=0$ 的对称点坐标.

解：设对称点坐标为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的法向量平行，即

$$\frac{3-x_0}{1}=\frac{2-y_0}{2}=\frac{1-z_0}{-1}$$

故 $y_0=2x_0-4,\ z_0=4-x_0$.

又因为 M_0 与 M 连线的中点 $(\frac{3+x_0}{2},\frac{2+2x_0-4}{2},\frac{1+4-x_0}{2})$ 位于平面上，故有

$$\frac{3+x_0}{2}+2\times\frac{2+2x_0-4}{2}-\frac{1+4-x_0}{2}=0$$

解得 $x_0=1$ ， $y_0=-2,\ z_0=3$.

于是，点 $M(3,2,1)$ 关于平面 $x+2y-z=0$ 的对称点坐标为 $M_0(1,-2,3)$.

三、计算下列各题：（每小题 8 分，共 40 分）

1． 设 $z=\sqrt{|xy|}$ ，1）求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ ， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ ；2）证明该函数在点 $(0,0)$ 处不可微.

解：1） $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0$ ， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot\Delta y|}-0}{\Delta y}=0$.

2） $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$.

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$ 与 k 的选择有关.

所以极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在，所以该函数在点 $(0,0)$ 处不可微.

2． 求曲线 $x^2+y^2-z^2=1$， $x+y-2z=0$ 在点（1,1,1）处的切线方程和法平面方程.

解：对方程组$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$两边求导，得$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x-z}{z-2y} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{z-2y} \end{cases}$

切向量为$\vec{T}=\left\{1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right\}\Bigg|_{(1,1,1)}=\left\{1,\dfrac{2x-z}{z-2y},\dfrac{x-y}{z-2y}\right\}\Bigg|_{(1,1,1)}=\{1,-1,0\}$.

于是，所求的切线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$或$\begin{cases} x+y-2=0 \\ z=1 \end{cases}$，

法平面方程为$(x-1)-(y-1)=0$，即$x-y=0$.

3． 设平面Π经过点$(0,-1,0)$和$(0,0,-1)$，且与平面$\Pi_1: y+z=7$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，求平面Π的方程.

解：设Π的方程为$Ax+By+Cz+D=0$。Π经过点$(0,-1,0)$和$(0,0,-1)$，故

$$D-B=0,\ D-C=0\text{，即 } B=C=D.$$

又$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{|(A,D,D)\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{A^2+2D^2}\sqrt{2}}$，因此$A=\pm\sqrt{6}D$.

故所求平面Π的方程为$\sqrt{6}x+y+z+1=0$和$\sqrt{6}x-y-z-1=0$.

4． 求曲面$\Sigma: x^2+y^2-2z=0$上的点到点$P(2,2,0)$的最短距离.

解：作拉格朗日函数$L(x,y,z,\lambda)=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-2z)$，令

$$L_x=2(x-2)+2\lambda x=0 \qquad (1)$$

$$L_y=2(y-2)+2\lambda y=0 \qquad (2)$$

$$L_z=2z-2\lambda=0 \qquad (3)$$

$$x^2+y^2-2z=0 \qquad (4)$$

由（1）和（2）得$(x-2)y=x(y-2)$，即$x=y$. 代入（4），由（3）得$x^2=z=\lambda$.

将$\lambda=x^2$代入（1），有$x^3+x-2=0$解得$x=1$，于是$y=1$，$z=1$. 故求得唯一驻点$(1,1,1)$

实际问题最短距离一定存在，故曲面$\Sigma: x^2+y^2-2z=0$上的点$(1,1,1)$到点$P(2,2,0)$的距离最短，最短距离为$d=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{3}$.

5． 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为球体$x^2+y^2+z^2\le 4$介于$z=0$与$z=1$之间的部分.

解一：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega+\Omega_1}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{4-r^2}}r^3z\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}r\int_1^{\sqrt{4-r^2}}r^3z\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^2 r^3(4-r^2)\mathrm{d}r-\pi\int_0^{\sqrt{3}}(3-r^2)r^3\mathrm{d}r=\frac{16}{3}\pi-\frac{27}{12}\pi=\frac{37}{12}\pi.$$

解二：用截面法

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 z(4-z^2)^2\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{4}\int_0^1(4-z^2)^2\mathrm{d}(4-z^2)=-\frac{\pi}{12}(4-z^2)^2\Big|_0^1=\frac{37\pi}{12}.$$

附加题：

1．（10 分）从原点到曲面$z=xy$的切平面做垂线，求垂足的轨迹方程.

解：设$M(x_0,y_0,z_0)$为曲面$z=xy$上的点，则M处的法向量为$(y_0,x_0,\text{-}1)$，切平面为

$y_0(x-x_0)+x_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$，即

$$y_0x+x_0y-z-z_0=0. \qquad ①$$

原点到切平面的垂线为

$$L{:}\frac{x}{y_0}=\frac{y}{x_0}=-z \qquad ②$$

且 $\qquad z_0=x_0y_0. \qquad ③$

从以上三个方程中消去x_0,y_0,z_0，可得到垂足的轨迹方程：由②得$x_0=-\dfrac{y}{z},y_0=-\dfrac{x}{z}$，

代入③，得$z_0=\dfrac{xy}{z^2}$，再由①得

$$\frac{y^2}{z}+\frac{x^2}{z}+z+\frac{xy}{z^2}=0.$$

化简得轨迹方程为$z(x^2+y^2+z^2)+xy=0$.