2017-2018 学年第一学期《微积分 I-1》期末试卷参考答案（A 卷）

一、1. 解：令 $y'=1-\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{x-1}{1+x}=0$，求得驻点 $x=1$

当 $-1<x<1$ 时，$y'<0$；当 $x>1$ 时，$y'>0$，

因此函数 $y=x-2\ln(1+x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调减少，在 $(1,+\infty)$ 上单调增加.

故函数 $y=x-2\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，极小值为 $1-2\ln 2$.

2. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^4}\cdot 2x}{2\sin x\cos x}=1$

3. 解一：$\displaystyle\int\frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\arcsin x+2\sqrt{1-x^2}+C$$

解二：令 $x=\sin t$，则 $\displaystyle\int\frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int(1-2\sin t)\mathrm{d}t$

$$=t+2\cos t+C=\arcsin x+2\sqrt{1-x^2}+C$$

4. 解：$\displaystyle\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{x}{2}+C$$

5. 解：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}})$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1=2\sqrt{2}-2$$

6. 解：$\displaystyle\int\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\sin x)=\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x\sin x)+\int\sin x\mathrm{d}x$

$$=\sin x-\cos x+C$$

7. 解：$\displaystyle s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t$

$$=6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$$

二、1. 解一：令 $x=\sin t$，则 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=(\tan t+\frac{1}{\cos t})\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2.$$

解二： 令 $x=\sin t$，则 $\int_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2})^2}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})}\mathrm{d}t$$

$$=-\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\tan\frac{3\pi}{8}-\tan\frac{\pi}{8}=2.$$

解三： 令 $x=\sin t$，则 $\int_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin t}\mathrm{d}t$

令 $\tan\frac{t}{2}=u$，则 $\int\frac{1}{1+\sin t}\mathrm{d}t=2\int\frac{1}{(1+u)^2}\mathrm{d}u=-\frac{2}{1+u}+C=-\frac{2}{1+\tan\frac{t}{2}}+C$，

故 原式 $=-2(\frac{1}{1+\tan\frac{\pi}{8}}-\frac{1}{1-\tan\frac{\pi}{8}})=\frac{4\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=2.$

2. **解：** 令 $t=x^2$，则 $\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(-t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t)$

$$=\frac{1}{2}(-\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

3. **解一：** $\frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}=2+\frac{-\sin x+2\cos x}{2\sin x+\cos x}$，

则 $\int\frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int(2+\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x})\mathrm{d}x=2x+\ln|2\sin x+\cos x|+C.$

解二： 令 $\tan\frac{x}{2}=t$，则

$$\int\frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=4\int\frac{2+3t-2t^2}{(1+t^2)(1+4t-t^2)}\mathrm{d}t$$

$$=\int(\frac{-2t+4}{1+t^2}+\frac{4-2t}{1+4t-t^2})\mathrm{d}t\quad（或=\int(\frac{-2t+4}{1+t^2}+\frac{1}{\sqrt5-2+t}-\frac{1}{\sqrt5+2-t})\mathrm{d}t）$$

$$=4\arctan t+\ln\left|\frac{1+4t-t^2}{1+t^2}\right|+C=2x+\ln|2\sin x+\cos x|+C.$$

解三： 令 $\tan x=t$，则

$$\int\frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{3\tan x+4}{2\tan x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{3t+4}{(2t+1)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{2}{2t+1}+\frac{-t+2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln|2t+1|-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+2\arctan t+C$$

$$=2\arctan t+\ln\left|\frac{2t+1}{1+t^2}\right|+C$$

$$=2x+\ln|2\sin x+\cos x|+C$$

4. 解： 记 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\mathrm{d}x$，则

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x+2A\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x,$$

故 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{3}{16}\pi$.

其中 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})\mathrm{d}x=\frac{3}{16}\pi$，

因此，$f(x)=\sin^3 x-\frac{3}{8}\pi$。

5. 解： $\int_{-1}^{1}(1+x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1+x^2+1-x^2+2x+2\sqrt{1-x^2}+2x\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{1}(2+2x+2\sqrt{1-x^2}+2x\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=4+\pi.$$

三、解： $A=\int_0^2(x+2-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=2+4-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$；

$$B=\pi\int_0^2[(x+2)^2-x^4]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}(x+2)^3\Big|_0^2-\frac{\pi}{5}x^5\Big|_0^2=\frac{\pi}{3}(64-8)-\frac{32}{5}\pi=\frac{184}{15}\pi.$$

四、证明一： 作辅助函数 $F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,\ t\in[a,b]$.

因为 $F'(t)=tf(t)-\frac{a+t}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}x$

因为 $f(x)$ 为单调增加函数，故当 $t>a$ 时，$F'(t)>0$，即 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上单调增加函数。

所以，$F(b)=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>F(a)=0$，即 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x>\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明二：因为 $f(x)$ 为单调增加函数，故

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(a)\int_a^\eta (x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x+f(b)\int_\eta^b (x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x$$ （由积分第二中值定理，$a<\eta<b$）

$$=f(a)[\frac{1}{2}(\eta-\frac{a+b}{2})^2-\frac{(b-a)^2}{8}]+f(b)[\frac{(b-a)^2}{8}-\frac{1}{2}(\eta-\frac{a+b}{2})^2]$$

$$=\frac{1}{2}[f(b)-f(a)](\eta-a)(\eta-b)>0.$$

五、解：（1）令 $t=a+b-x$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

（2）$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)[\pi-2(\frac{\pi}{2}-x)]}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{(\pi-2x)x}\mathrm{d}x$,

故 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{(\pi-2x)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln(\pi-2x)]\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{2x}+\frac{1}{\pi-2x})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2]=\frac{\ln 2}{\pi}.$$