《微积分 I-1》历届期末试题解答（一）

一、原函数与不定积分的概念

如果已知 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，那么， $f(x)=\varphi'(x)$. 解题时，可以先求出 $f(x)$ 再求解，也可以直接用分部积分公式.

例 1. 设 $e^x\sin x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int e^{-x}f(x)dx$.（2017-2018）

解一： $f(x)=(e^x\sin x)'=e^x(\sin x+\cos x)$,

则 $\int e^{-x}f(x)dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$.

解二： $\int e^{-x}f(x)dx=\int e^{-x}(e^x\sin x)'dx=e^{-x}\cdot e^x\sin x-\int(e^{-x})'e^x\sin xdx$

$$=\sin x+\int\sin xdx=\sin x-\cos x+C.$$

例 2. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\cos(\ln x)}{x}$，试求 $\int x^2\cdot f(x)dx$.（2019-2020）

解一： 因为 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\cos(\ln x)}{x}$，即 $f(x)=(\frac{\cos(\ln x)}{x})'$.

故
$$\int x^2\cdot f(x)dx=\int x^2\cdot[\frac{\cos(\ln x)}{x}]'dx$$
$$=x^2\frac{\cos(\ln x)}{x}-\int 2x\cdot\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$$
$$=x\cos(\ln x)-2\int\cos(\ln x)dx.$$

因为
$$\int\cos(\ln x)dx=\int(x)'\cos(\ln x)dx$$
$$=x\cos(\ln x)-\int x(\cos(\ln x))'dx$$
$$=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx$$
$$=x\cos(\ln x)+\int(x)'\sin(\ln x)dx$$
$$=x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx,$$

故
$$\int\cos(\ln x)dx=\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.$$

因此，
$$\int x^2\cdot f(x)dx=x\cos(\ln x)-2\cdot\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$$
$$=-x\sin(\ln x)+C.$$

解二： $f(x)=[\frac{\cos(\ln x)}{x}]'=\frac{x\cdot(-\sin(\ln x))\cdot\frac{1}{x}-\cos(\ln x)\cdot 1}{x^2}=-\frac{\sin(\ln x)+\cos(\ln x)}{x^2}$.

于是，

$$\begin{aligned}\int x^2\cdot f(x)\mathrm{d}x&=-\int(\cos\ln x+\sin\ln x)\mathrm{d}x\\&=-\int\cos\ln x\mathrm{d}x-\int\sin\ln x\mathrm{d}x\\&=-\int\cos\ln x\mathrm{d}x-\int(x)'\sin\ln x\mathrm{d}x\\&=-\int\cos\ln x\mathrm{d}x-[x\sin(\ln x)-\int x\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x]\\&=-\int\cos\ln x\mathrm{d}x-x\sin(\ln x)+\int\cos\ln x\mathrm{d}x\\&=-x\sin(\ln x)+C.\end{aligned}$$

二、不定积分的凑微分法

如果 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F(\varphi(x))+C.$$

例 3. $\int\sec^4 x\mathrm{d}x$.（2016-2017）

解： $\int\sec^4 x\mathrm{d}x=\int\sec^2 x\sec^2 x\mathrm{d}x=\int(1+\tan^2 x)\mathrm{d}\tan x$

$$=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$$

注： 一般地，当 m 为正整数，n 为非负整数时. 令 $\tan x=u$

$$\begin{aligned}\int\tan^n x\sec^{2m}x\mathrm{d}x&=\int\tan^n x\sec^{2m-2}x\sec^2 x\mathrm{d}x\\&=\int\tan^n x(1+\tan^2 x)^{m-1}\sec^2 x\mathrm{d}x\\&=\int\tan^n x(1+\tan^2 x)^{m-1}\mathrm{d}\tan x\\&=\int u^n(1+u^2)^{m-1}\mathrm{d}u=\cdots.\end{aligned}$$

例 4. 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}$.（2018-2019）

解： $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}=\int\frac{1}{1+\ln x}\mathrm{d}(1+\ln x)=\ln|1+\ln x|+C.$

注： $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}f(x)=\ln|f(x)|+C.$

例 5. 求不定积分 $\int\frac{x^2}{1-x^6}\mathrm{d}x$.（2020-2021）

解： $\int\frac{x^2}{1-x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-(x^3)^2}\cdot 3x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-(x^3)^2}\cdot\mathrm{d}x^3$.

令 $u=x^3$，则

$$\int\frac{x^2}{1-x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-u^2}\cdot\mathrm{d}u=\frac{1}{6}\int(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u})\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{6}[\ln|1+u|-\ln|1-u|]+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3-1}\right|+C.$$

例 6. $\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.（2021-2022）

解：
$$\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}\ln(1+x^2)=\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+C.$$

三、不定积分的第二换元法

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$，其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

常见的代换:

（1）被积函数含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，故可作变换 $x=a\tan t\ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$.

（2）被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，故可作变换 $x=a\sin t\ (-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2})$.

（3）被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，故可作变换 $x=a\sec t\ (0<t<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<t<\pi)$.

（4）被积函数含有指数函数，可作指数代换 $t=a^x$ 或 $t=\mathrm{e}^x$.

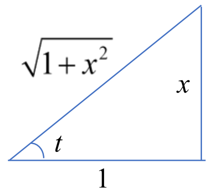
例 7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.（2016-2017）

解： 令 $x=\tan t\ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$，则

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\sqrt{1+\tan^2 t}} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 t} d\sin t = -\frac{1}{\sin t} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$



例 8. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. (2017-2018)

解一： $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-2x) dx$

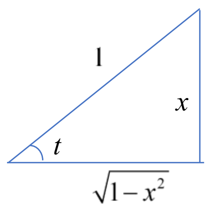
$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2)$$

$$= \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + C.$$

解二： 令 $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$，则

$$\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1-2\sin t}{\cos t} \cos t dt = \int (1-2\sin t) dt = t + 2\cos t + C$$

$$= \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + C.$$



注： 本题既可以凑微分，也可以应第二换元法.

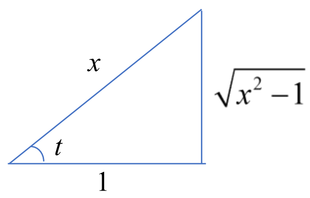
例 9. 求不定积分 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.（2018-2019，2021-2022）

解： 当 $x > 1$ 时，令 $x = \sec t \ (0 < t < \frac{\pi}{2})$，则 $dx = \sec t \tan t dt$.

于是，$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{\sec^2 t\sqrt{\sec^2 t - 1}} \sec t \tan t dt$

$$= \int \frac{1}{\sec^2 t \tan t} \sec t \tan t dt$$

$$= \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$



当 $x < -1$ 时，令 $u = -x$，则 $u > 1$ 于是，

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{(-u)^2\sqrt{(-u)^2-1}} d(-u) = -\int \frac{1}{u^2\sqrt{u^2-1}} du$$

$$=-\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$$

故 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$$

例 10. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}$. (2019-2020)

解： 令 $u=\mathrm{e}^x$， 则 $x=\ln u$， $\mathrm{d}x=\frac{1}{u}\mathrm{d}u$.

于是， $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}=\int\frac{1}{u(1+u)}\frac{1}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{1+u-u}{u^2(1+u)}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u-\int\frac{1}{u(1+u)}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{u}-\int\frac{1+u-u}{u(1+u)}\mathrm{d}u=-\frac{1}{u}-\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u+\int\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{u}-\ln u+\ln(1+u)+C$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}-x+\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$$

注： 对于带有指数函数的被积函数，可以考虑作指数代换.

例 11. $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}$. (2019-2020)

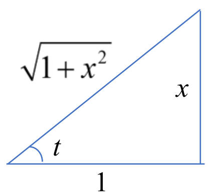
解： 令 $x=\tan t\ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$， 则 $\mathrm{d}x=(\tan t)'\mathrm{d}t=\sec^2 t\mathrm{d}t$， 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{(1+2\tan^2 t)\sqrt{1+\tan^2 t}}\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{1}{(1+2\tan^2 t)\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t+2\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

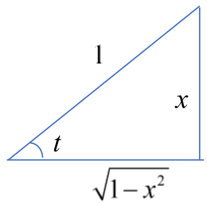
$$=\int\frac{1}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}\sin t=\arctan(\sin t)+C$$

$$=\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$



例 12. 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$．（2020-2021）

解一： 令 $x=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(-,\frac{\pi}{2})$，则



$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t-\int \mathrm{d}t$$

$$=-\cot t-t+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C.$$

解二：

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=\int (-\frac{1}{x})'\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\int (-\frac{1}{x})(\sqrt{1-x^2})'\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\int (-\frac{1}{x})\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C.$$

注： 本题的解法是第二换元法和分部积分法.

四、不定积分的分部积分法

分部积分法公式：$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$

u 的选择：（1）反三角函数和对数函数；（2）幂函数；（3）指数函数和三角函数.

例题：见例 1，例 2，例 12，例 13，例 15.

例 13. 求不定积分 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$．（2017-2018，2020-2021）

解： 分部积分法

$$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\int [\frac{1}{2}(x^2+1)]'\arctan x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\int \frac{1}{2}(x^2+1)(\arctan x)'\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\int\frac{1}{2}(x^2+1)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+C.$$

注： 被积函数有对数或反三角函数，通常用分部积分.

五、不定积分的一题多解

例 14. 求不定积分 $\int\frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$．（2017-2018）

解一： $3\sin x+4\cos x=A(2\sin x+\cos x)+B(2\sin x+\cos x)'$

$$=A(2\sin x+\cos x)+B(2\cos x-\sin x)$$

$$=(2A-B)\sin x+(A+2B)\cos x.$$

令 $\begin{cases}2A-B=3\\A+2B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=1\end{cases}$，故

$$\int\frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{2(2\sin x+\cos x)+(2\sin x+\cos x)'}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\int 2\mathrm{d}x+\int\frac{(2\sin x+\cos x)'}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=2x+\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C.$$

注：（1）对于不定积分 $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a_2\sin x+b_2\cos x}\mathrm{d}x$，可以将分子，分解成

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A(a_2\sin x+b_2\cos x)+B(a_2\sin x+b_2\cos x)'$$

则
$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a_2\sin x+b_2\cos x}\mathrm{d}x=\int(A+B\frac{(a_2\sin x+b_2\cos x)'}{a_2\sin x+b_2\cos x})\mathrm{d}x$$

$$=Ax+B\ln\left|a_2\sin x+b_2\cos x\right|+C.$$

（2）$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}f(x)=\ln\left|f(x)\right|+C.$

解二：(万能代换)：令 $\tan\frac{x}{2}=t$，则

$$\int\frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=4\int\frac{2+3t-2t^2}{(1+t^2)(1+4t-t^2)}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&=\int\left(\frac{-2t+4}{1+t^2}+\frac{4-2t}{1+4t-t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&=-\int\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t+4\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int\frac{4-2t}{1+4t-t^2}\mathrm{d}t \\
&=-\ln(1+t^2)+4\arctan t+\ln\left|1+4t-t^2\right|+C \\
&=4\arctan t+\ln\frac{\left|1+4t-t^2\right|}{1+t^2}+C \\
&=4\cdot\frac{x}{2}+\ln\frac{\left|1+4\tan\frac{x}{2}-\tan^2\frac{x}{2}\right|}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+C \\
&=2x+\ln\left|\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+2\cdot\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right|+C \\
&=2x+\ln\left|\cos x+2\sin x\right|+C\,.
\end{aligned}
$$

注：三角函数有理式可以通过万能代换 $\tan\frac{x}{2}=t$，将积分转换成有理函数的积分，从而求得原积分.

万能代换的常用公式：

$$\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow x=2\arctan t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\,.$$

解三：令 $\tan x=t$，则 $x=\arctan t$，即 $\mathrm{d}x=(\arctan t)'\mathrm{d}t=\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

$$
\begin{aligned}
\int\frac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x&=\int\frac{3\tan x+4}{2\tan x+1}\mathrm{d}x \\
&=\int\frac{3t+4}{2t+1}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&=\int\left(\frac{2}{2t+1}+\frac{-t+2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&=\int\frac{2}{2t+1}\mathrm{d}t-\int\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t+2\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&=\ln\left|2t+1\right|-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+2\arctan t+C \\
&=\ln\left|\frac{1+2t}{\sqrt{1+t^2}}\right|+2\arctan t+C
\end{aligned}
$$

$$=\ln\left|\frac{1+2\tan x}{\sec x}\right|+2x+C$$

$$=\ln\left|\cos x+2\sin x\right|+2x+C.$$

六、其他类型的题目

例 15. 设常数 a,b 满足 $\int\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x=ax\sqrt{x^2+4}+b\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C$，则 $a=$________，$b=$____________.（2021-2022）

解一：

$$\int\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+4}-\int x(\sqrt{x^2+4})'\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+4}-\int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+4}-\int\frac{x^2+4-4}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+4}-\int\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x+4\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$$

故
$$\int\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C.$$

故 $a=\dfrac{1}{2}$， $b=2$.

解二： 对式子 $\int\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x=ax\sqrt{x^2+4}+b\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C$ 两边求导，得

$$\sqrt{x^2+4}=a(x\sqrt{x^2+4})'+b[\ln(x+\sqrt{x^2+4})]'$$

$$=a\sqrt{x^2+4}+ax\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}+b\frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}})$$

$$=a\sqrt{x^2+4}+\frac{ax^2}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{b}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\frac{2ax^2+4a+b}{\sqrt{x^2+4}},$$

即
$$x^2+4=2ax^2+4a+b.$$

故 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=2$.

注： $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$