



厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2020.01.08

一、求下列的定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{(x+2)^3} dx$;

解：令 $t = x + 2$,

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{(x+2)^3} dx = \int_1^2 \frac{(u-2)^2}{u^3} du$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{u} - 4u^{-2} + 4u^{-3} du$$

$$= \left(\ln u + \frac{4}{u} - \frac{2}{u^2} \right) \Big|_1^2$$

$$= \ln 2 + 2 - \frac{1}{2} - (0 + 4 - 2) = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx$;

解法一： $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x - \sec x \cdot \tan x dx$$

$$= (\tan x - \sec x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (1 - \sqrt{2}) - (0 - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

解法二：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx \stackrel{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{2}{(t+1)^2} dt$$

$$= -\frac{2}{t+1} \Big|_0^{\tan \frac{\pi}{8}}$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

$$3. \int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \cdot \sin^3 x \, dx .$$

解法一：

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \cdot \sin^3 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin^3 x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin^3 x \, dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \pi$$

解法二：

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x + x^2) \cdot \sin^3 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin^3 x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin^3 x \, dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi} x \, d\left(\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x\right)$$

$$= 2x \cdot \left(\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x\right) \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x\right) \, dx$$

$$= \frac{4}{3} \pi + \frac{2}{3} \int_0^{\pi} (2 + \sin^2 x) \, d \sin x$$

$$= \frac{4}{3} \pi + \frac{2}{3} \left(2 \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x\right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{3} \pi$$

二、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

1. $\int \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$;

解： $\int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{e^x} - 1 + \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$$= \int e^{-x} - 1 dx + \int \frac{1}{1+e^x} d(1+e^x)$$

$$= -e^{-x} - x + \ln(1+e^x) + C$$

2. $\int \frac{dx}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}$ 。

解： 令 $x = \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，则 $\sqrt{x^2+1} = \sec t$ ，代入

$$\int \frac{dx}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{d\tan t}{(1+2\tan^2 t)\sec t} = \int \frac{\sec t dt}{1+2\tan^2 t}$$

$$= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t + 2\sin^2 t} = \int \frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}$$

$$= \arctan(\sin t) + C$$

$$= \arctan \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

三、（6 分）求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)} - \frac{1}{x^2} dx$ 。

解： $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)} - \frac{1}{x^2} dx = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) \Big|_0^{+\infty}$

$$= 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$$

四、（8分）设 $f(x)$ 一个原函数为 $\frac{\cos(\ln x)}{x}$ ，试求 $\int x^2 \cdot f(x) dx$ 。

$$\text{解法一：} \int x^2 \cdot f(x) dx = \int x^2 d\left(\frac{\cos(\ln x)}{x}\right)$$

$$= x \cdot \cos(\ln x) - \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx^2 = x \cdot \cos(\ln x) - 2 \int \cos(\ln x) dx$$

$$\text{又} \int \cos(\ln x) dx = x \cdot \cos(\ln x) - \int x d \cos(\ln x) = x \cdot \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$$

$$= x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x) - \int x d \sin(\ln x)$$

$$= x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$\text{所以} \int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} \cdot [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$$

$$\text{因此} \int x^2 \cdot f(x) dx = -x \sin(\ln x) + C$$

$$\text{解法二：} \int x^2 \cdot f(x) dx = - \int \sin(\ln x) + \cos(\ln x) dx$$

$$= - \int \sin(\ln x) dx - \int \cos(\ln x) dx$$

$$= -x \cdot \sin(\ln x) + \int x d \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$= -x \cdot \sin(\ln x) + \int \cos(\ln x) dx - \int \cos(\ln x) dx = -x \cdot \sin(\ln x) + C$$

五、（10分）求函数 $y = (x-5) \cdot x^{\frac{2}{3}}$ 的极值，以及其图形的凹凸区间和拐点。

解：由 $y' = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$ ，求得可疑极值点为 $x=0$ ， $x=2$ ；

由 $y'' = \frac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$ ，求得可疑拐点为 $x=-1$ ， $x=0$ 。

注意到当 $x < 0$ 时， $y' > 0$ ；当 $0 < x < 2$ 时， $y' < 0$ ；当 $x > 2$ 时， $y' > 0$ 。因此由一阶判别

法，函数 $y = (x-5) \cdot x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 取到极大值 0，在 $x=2$ 取到极小值 $-3\sqrt[3]{4}$ 。

又注意到当 $x < -1$ 时， $y'' < 0$ ；当 $x > -1$ ， $x \neq 0$ 时， $y'' > 0$ ，所以其图形的凸区间为 $(-\infty, -1)$

凹区间为 $(-1, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 。因此 $(-1, -6)$ 为拐点。

六、(8分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t(e^{(x-t)^2} - 1) dt}{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}$ 。

解:

$$\int_0^x t(e^{(x-t)^2} - 1) dt \stackrel{u=x-t}{=} \int_x^0 (x-u)(e^{u^2} - 1) d(x-u) = x \int_0^x (e^{u^2} - 1) du - \int_0^x u(e^{u^2} - 1) du$$

由麦克劳林公式, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t(e^{(x-t)^2} - 1) dt}{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x (e^{u^2} - 1) du - \int_0^x u(e^{u^2} - 1) du}{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2!} + o(x^4))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x (e^{u^2} - 1) du - \int_0^x u(e^{u^2} - 1) du}{-\frac{x^4}{12}} = -12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x (e^{u^2} - 1) du - \int_0^x u(e^{u^2} - 1) du}{x^4}$$

$$= -12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{u^2} - 1) du}{4x^3} = -3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = -1$$

七、(8分) 求由反正弦曲线 $y = \arcsin x$ 和直线 $y = \frac{\pi}{2}x$ 所围成的平面图形的面积 A 。

解法一: 由图形对称性,

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y - \frac{2}{\pi} y dy \\ &= 2(-\cos y - \frac{1}{\pi} y^2) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

解法二: 由图形对称性,

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 \frac{\pi}{2} x - \arcsin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} x^2 \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \arcsin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 2x \arcsin x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

八、（8 分）求极坐标下的对数螺线 $\rho = e^{2\theta}$ 相应于 $0 \leq \theta \leq \ln 3$ 的一段弧长 s 。

解：由 $ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = \sqrt{5} e^{2\theta} d\theta$ ，得

$$s = \int_0^{\ln 3} \sqrt{5} e^{2\theta} d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{2\theta} \Big|_0^{\ln 3} = 4\sqrt{5}$$

九、（8 分）由曲线 $y = x \ln x$ ($x \geq 1$) 与直线 $y = x$ ， $y = 0$ 围成了一个平面图形，求此平面图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V 。

解法一： $V = \pi \int_0^e x^2(y) dy - \frac{\pi}{3} \cdot e^2 \cdot e$

$$= \pi \int_1^e x^2 d(x \ln x) - \frac{\pi}{3} \cdot e^2 \cdot e = \pi \int_1^e x^2 \ln x dx + \pi \int_1^e x^2 dx - \frac{\pi}{3} \cdot e^3$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_1^e \ln x dx^3 + \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_1^e - \frac{\pi}{3} \cdot e^3 = \frac{\pi}{3} (x^3 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^3 d \ln x) - \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} e^3 - \frac{\pi}{3} \int_1^e x^2 dx - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} e^3 - \frac{\pi}{9} x^3 \Big|_1^e - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} (e^3 - 1)$$

解法二： $V = 2\pi \int_0^e x^2 dx - 2\pi \int_1^e x^2 \ln x dx$

$$= \frac{2\pi}{3} x^3 \Big|_0^e - \frac{2\pi}{3} \int_1^e \ln x dx^3 = \frac{2\pi}{3} e^3 - \frac{2\pi}{3} (x^3 \ln x - \frac{1}{3} x^3) \Big|_1^e$$

$$= \frac{2\pi}{3} e^3 - \frac{4\pi}{9} e^3 - \frac{2\pi}{9} = \frac{2\pi}{9} (e^3 - 1)$$

十、（8 分）设 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上单调增加的连续函数，证明：对于任意的 $x \in [a, b]$ ，都

有 $(b-a) \int_a^x f(t) dt \leq (x-a) \int_a^b f(t) dt$ 。

证法一：当 $x = a$ 或者 $x = b$ ，结论显然成立。当 $x \in (a, b)$ ，

$$(b-a) \int_a^x f(t) dt - (x-a) \int_a^b f(t) dt = (b-a) \int_a^x f(t) dt - (x-a) \left(\int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt \right)$$

$$= (b-x) \int_a^x f(t) dt - (x-a) \int_x^b f(t) dt$$

$$= (b-x) f(\xi_1) (x-a) - (x-a) f(\xi_2) (b-x) \text{ 其中 } \xi_1 \in (a, x), \xi_2 \in (x, b) \text{ (积分中值定理)}$$

$$= (b-x)(x-a)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] < 0 \text{ 此时结论也成立。} \quad \text{得证。}$$

证法二：利用单调性

当 $x = a$ 结论显然成立。令 $\varphi(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x-a}$, $x \in (a, b]$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(a, b]$ 可导, 且

$$\varphi'(x) = \frac{(x-a)f(x) - \int_a^x f(t) dt}{(x-a)^2} = \frac{(x-a)[f(x) - f(\xi)]}{(x-a)^2} > 0 \quad \xi \in (a, x) \quad (\text{积分中值定理}),$$

因此 $\varphi(x)$ 在 $(a, b]$ 严格单调增加, 从而 $\varphi(x) \leq \varphi(b) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a}$, 得证。

证法三: 利用最值。

令 $\varphi(x) = (b-a)\int_a^x f(t) dt - (x-a)\int_a^b f(t) dt$, $x \in [a, b]$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 且

$$\varphi'(x) = (b-a)f(x) - \int_a^b f(t) dt.$$

由积分中值定理以及 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的单调性, 从而存在唯一的 $x_0 \in (a, b)$, 使得

$$f(x_0)(b-a) = \int_a^b f(t) dt, \text{ 即有 } \varphi'(x_0) = 0,$$

并且当 $a \leq x < x_0$ 时, $\varphi'(x) = f(x) - f(x_0) < 0$; 当 $x_0 < x \leq b$ 时, $\varphi'(x) = f(x) - f(x_0) > 0$,

故 $\varphi(x)$ 在 x_0 取得最小值, 这样 $\varphi(x)$ 在端点处 $x = a$ 或者 $x = b$ 取得最大值 0, 也就是 $\varphi(x) \leq 0$,

$\forall x \in [a, b]$ 。

十一、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内可导, 并且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$,

证明在区间 $(0, \pi)$ 上存在两个不同的点 $x = \xi_1$ 和 $x = \xi_2$, 使得 $f'(x) + 2f(x)\cot x = 0$ 。

证明: 作辅助函数 $\varphi(x) = f(x)\sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[0, \pi]$ 连续, 在 $(0, \pi)$ 内可导。

由积分中值定理, 存在 $x_0 \in (0, \pi)$, 使得 $0 = \int_0^\pi f(x) dx = f(x_0)(\pi - 0)$, 即有 $f(x_0) = 0$ 。

因此 $\varphi(0) = \varphi(x_0) = \varphi(\pi) = 0$, 在 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, \pi]$ 分别用罗尔定理, 可知存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$,

$\xi_2 \in (x_0, \pi)$, 使得 $\varphi'(\xi_1) = \varphi'(\xi_2) = 0$, 结论得证。