厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷答案

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2021.01.05

一、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int \frac{x^2}{1-x^6}\mathrm{d}x$；

解：$\int \frac{x^2}{1-x^6}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x^3}{1-x^6}$

$= \frac{1}{6}\int (\frac{1}{x^3+1} - \frac{1}{x^3-1})\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{6}(\int \frac{\mathrm{d}(x^3+1)}{x^3+1} - \int \frac{\mathrm{d}(x^3-1)}{x^3-1})$

$= \frac{1}{6}\ln|\frac{x^3+1}{x^3-1}| + C$

2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$；

解法一：令 $x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$，代入

$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}(\sin t) = \int \cot^2 t\,\mathrm{d}t = \int \csc^2 t - 1\mathrm{d}t = -\cot t - t + C$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$

解法二：$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(\frac{1}{x}) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$

3. $\int x \cdot \arctan x\,\mathrm{d}x$。

解：$\int x \cdot \arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arctan x\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$

二、求下列的定积分（每小题 7 分，共 14 分）：

1. $\int_{-2}^{2} \dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}}\,\mathrm{d}x$；

解：$\int_{-2}^{2} \dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{8}\int_{-2}^{2} (4x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(4x^2+9) + \dfrac{1}{2}\int_{-2}^{2} \dfrac{1}{\sqrt{(2x)^2+3^2}}\,\mathrm{d}(2x)$

$= \dfrac{1}{4}(4x^2+9)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-2}^{2} + \dfrac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9})\Big|_{-2}^{2} = \dfrac{1}{4}(5-5) + \dfrac{1}{2}(\ln 9 - \ln 1) = \ln 3$

或者 $\int_{-2}^{2} \dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+9}}\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+9}}\,\mathrm{d}x = 0 + 2\int_{0}^{2} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+9}}\,\mathrm{d}x$

$= \int_{0}^{2} \dfrac{1}{\sqrt{(2x)^2+9}}\,\mathrm{d}(2x) = \ln(2x+\sqrt{4x^2+9})\Big|_{0}^{2} = \ln 9 - \ln 3 = \ln 3$

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$。

解：$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x\,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x\,\mathrm{d}x$

$\because \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x\,\mathrm{d}(\sin 2x) = \dfrac{1}{2}e^x \sin 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2}e^x \sin 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x\,\mathrm{d}(\cos 2x)$

$= (\dfrac{1}{2}e^x \sin 2x + \dfrac{1}{4}e^x \cos 2x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x\mathrm{d}x$

$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x\,\mathrm{d}x = (\dfrac{2}{5}e^x \sin 2x + \dfrac{1}{5}e^x \cos 2x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

因此 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x = (\dfrac{1}{2}e^x - \dfrac{1}{5}e^x \sin 2x - \dfrac{1}{10}e^x \cos 2x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - 0 + \dfrac{1}{10}e^{\frac{\pi}{2}}) - (\dfrac{1}{2} - 0 - \dfrac{1}{10}) = \dfrac{3}{5}e^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{2}{5}$

三、（8 分）求反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}\mathrm{d}x$。

解法一：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt[3]{x-1}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^3+1)t}\mathrm{d}(t^3+1)=\int_0^{+\infty}\frac{3t}{t^3+1}\mathrm{d}t$

$\because \int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t \overset{u=\frac{1}{t}}{=} \int_{+\infty}^0\frac{\frac{1}{u}\cdot u^3}{u^3+1}\cdot(\frac{-1}{u^2})\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^3+1}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t$

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}+\frac{1}{t^3+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t+1}{t^3+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\mathrm{d}(t-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

因此，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\mathrm{d}x=3\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^3+1}\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ 。

解法二：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt[3]{x-1}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^3+1)t}\mathrm{d}(t^3+1)=\int_0^{+\infty}\frac{3t}{t^3+1}\mathrm{d}t$

$=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$

$=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$

$=[\frac{1}{2}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}+\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}]\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ 。

四、（8 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_1^{y^3}e^{-t^2}\mathrm{d}t+\int_x^0\cos^6(x-t)\mathrm{d}t=0$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$。

解：$\int_x^0\cos^6(x-t)\mathrm{d}t \overset{u=x-t}{=} \int_0^x\cos^6u\,\mathrm{d}(x-u)=-\int_0^x\cos^6u\,\mathrm{d}u$，因此方程变为

$$\int_1^{y^3}e^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_0^x\cos^6t\,\mathrm{d}t=0。$$

方程两边对 x 求导，得 $e^{-y^6}3y^2y'-\cos^6x=0$，解得 $y'=\frac{e^{y^6}\cos^6x}{3y^2}$。又注意到 $y(0)=1$，所以

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\frac{e}{3}$。

五、（12 分）已知标准正态分布密度函数为 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，

(1) 求该函数的单调区间、极值、最值；(2) 判定该函数图形的凹凸性，并求其拐点。

解：$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$， $y''=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 。

（1） 令 $y'=0$，得 $x=0$ 为唯一的可疑极值点。当 $x<0$ 时， $y'>0$，该函数单调增加；当 $x>0$ 时， $y'<0$，该函数单调减少。又 $y''(0)<0$，因此 $x=0$ 为极大值点，同时也是最大值点。又因为 $y>0$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$，所以该函数没有最小值。综上所述，该函数的单调增加区间为 $(-\infty,0)$，单调减少区间为 $(0,+\infty)$，极大值和最大值为 $y(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$，没有极小值和最小值。

(2) 令 $y''=0$，得 $x=\pm 1$。注意到当 $x<-1$ 或者 $x>1$ 时， $y''>0$，因此 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 的图形是向上凹的；注意到当 $-1<x<1$ 时， $y''<0$，因此 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在区间 $(-1,1)$ 的图形是向上凸的。其拐点为（$\pm 1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$）。

六、（8 分）求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 的全长 s。

解法一：把星形线写成参数方程形式表示： $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ 。

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{(-3\cos^2 t\cdot\sin t)^2+(3\sin^2 t\cdot\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=3\sqrt{\cos^4 t\cdot\sin^2 t+\sin^4 t\cdot\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=3\cdot|\cos t|\cdot|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\cdot|\sin 2t|\,\mathrm{d}t$$

由对称性，其弧长 $s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\cdot|\sin 2t|\,\mathrm{d}t=6\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\mathrm{d}t=6\cdot(-\frac{1}{2}\cos 2t)\big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6$ 。

解法二：在 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 两边对 x 求导，解得 $y'=-x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ 。

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x=|x|^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x\text{ 。}$$

由对称性，其弧长 $s=4\int_0^1|x|^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x=4\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=6x^{\frac{2}{3}}\big|_0^1=6$ 。

七、（8 分）求心形线 $\rho=1+\cos\theta$ 所围成的平面图形与圆 $\rho=1$ 所围成平面图形之间重叠部分的面积 A。

解：$A=\dfrac{\pi}{2}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)^{2}\,\mathrm{d}\theta$

$=\dfrac{\pi}{2}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\dfrac{3}{2}+2\cos\theta+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$

$=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{4}\pi+(2\sin\theta+\dfrac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{4}\pi+[0+0-(2+0)]=\dfrac{5}{4}\pi-2$

八、（8 分）求由圆 $x^2+(y-3)^2=4$ 所围成的平面图形绕 x 轴一周所形成的旋转体的体积 V。

解：$V=\pi\int_{-2}^{2}(3+\sqrt{4-x^2})^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-2}^{2}(3-\sqrt{4-x^2})^2\,\mathrm{d}x$

$=12\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

$\overset{\text{几何意义}}{=}12\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=24\pi^2$

九、（8 分）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明 Cauchy-Schwartz 不等式：

$$(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x。$$

证明：作辅助函数 $\varphi(x)=\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t-(\int_a^x f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t)^2$，$x\in[a,b]$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且注意到

$\varphi'(x)=f^2(x)\cdot\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t+g^2(x)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t-2f(x)\cdot g(x)\cdot\int_a^x f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t$

$=\int_a^x f^2(x)\cdot g^2(t)+g^2(x)\cdot f^2(t)-2f(x)\cdot g(x)\cdot f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t$

$=\int_a^x[f(x)\cdot g(t)-g(x)\cdot f(t)]^2\,\mathrm{d}t\ge 0$

故 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 非减，因此 $\varphi(b)\ge\varphi(a)=0$，得证。

十、（8 分）已知对于任意的 $t>0$，反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$ 都是收敛的。现设 $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$，$t>0$，称之为 Gamma 函数。

(1) 证明对任意的 $t>0$，成立递推公式：$\Gamma(t+1)=t\,\Gamma(t)$；

(2) 计算反常积分 $\int_0^1 x^2(\ln x)^{10}\,\mathrm{d}x$。

(1) 证： $\Gamma(t+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^t\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} x^t\mathrm{d}e^{-x}=-\frac{x^t}{e^x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x^t$

$=0+0+t\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x=t\Gamma(t)$

(2) $\int_0^1 x^2(\ln x)^{10}\,\mathrm{d}x \overset{t=-\ln x}{=} \int_{+\infty}^0 e^{-2t}t^{10}\mathrm{d}e^{-t}=\int_0^{+\infty} e^{-3t}t^{10}\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{3^{11}}\int_0^{+\infty} e^{-3t}(3t)^{10}\mathrm{d}(3t)\overset{u=3t}{=}\frac{1}{3^{11}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{10}\mathrm{d}u=\frac{1}{3^{11}}\Gamma(11)$

$=\frac{10!}{3^{11}}\Gamma(1)=\frac{10!}{3^{11}}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{10!}{3^{11}}\cdot(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=\frac{10!}{3^{11}}$ 。