厦门大学《线性代数 I》课程期中考试卷

学院________年级________姓名__________学号____________

主考教师：　　　　　　试卷类型：（A 卷）　　2018.4.14

一（10 分）．设 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $f(A)$.

解法一　令 $A=E-B$，其中 $B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，2′ 计算得 $B^3=0$，3′ 所以

$$f(A)=A^3-3A^2+3A+2E$$

$$=(E-B)^3-3(E-B)^2+3(E-B)+2E=3E.\ 5'$$

解法二　$f(A)=A^3-3A^2+3A+2E=\left(A^3-3A^2+3A-E\right)+E+2E$

$$=(A-E)^3+3E=(-B)^3+3E=3E.\ 10'$$

二（10 分）．已知 $A=\begin{bmatrix}2&-3&1&5\\-1&5&7&-8\\2&1&3&4\\6&1&-5&3\end{bmatrix}$，求矩阵 A 的第 1 列的各元素的代数余子式之和.

解　由定义可知，A 第 1 列的各元素的代数余子式之和=$\begin{vmatrix}1&-3&1&5\\1&5&7&-8\\1&1&3&4\\1&1&-5&3\end{vmatrix}$ 5′ =360. 5′

三（10 分）．设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3],|A|=1,B=[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3]$,

求 $|B|$.

解　$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$

$$\overset{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}{=}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3|\overset{c_3-2c_2}{=}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|\ 5'$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3|=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2\ 5'$$

四（15 分）. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$,矩阵$X$ 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，求矩阵 X .

解 由 $A^*X=A^{-1}+2X$ 可得 $\left(A^*-2E\right)X=A^{-1}$，左乘 A，利用 $AA^*=|A|E$，2′ 得

$\left(|A|E-2A\right)X=E$，从而矩阵 X 可逆，且 $X=\left(|A|E-2A\right)^{-1}$.3′

计算得 $|A|=4$,5′ $|A|E-2A=4E-2A=\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{bmatrix}$，故

$$X=\left(|A|E-2A\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}.5'$$

五（10 分）计算 $D_n=\begin{vmatrix}a+b&-b&0&\cdots&0&0\\-a&a+b&-b&\cdots&0&0\\0&-a&a+b&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a+b&-b\\0&0&0&\cdots&-a&a+b\end{vmatrix}\left(其中 a\neq b\right)$.

解 该行列式的第二行至第 n-1 行和均为零，将其余各列均加到第一列，即

$$D_n=\begin{vmatrix}a&-b&0&\cdots&0&0\\0&a+b&-b&\cdots&0&0\\0&-a&a+b&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a+b&-b\\b&0&0&\cdots&-a&a+b\end{vmatrix}$$

再按第一列展开有

$$D_n=aD_{n-1}+b\left(-1\right)^{n+1}\begin{vmatrix}-b&0&\cdots&0&0\\a+b&-b&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&-b&0\\0&0&\cdots&a+b&-b\end{vmatrix}_{n-1}=aD_{n-1}+b\left(-1\right)^{n+1}\left(-b\right)^{n-1}$$

即

$$D_n=aD_{n-1}+b^n，5'$$

利用该行列式的结构，有类似的结论 $D_n=bD_{n-1}+a^n$，3′

因此 $\left(a-b\right)D_{n-1}=a^n-b^n$，利用 $a\neq b$ 可得 $D_{n-1}=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$，即 $D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.2′

六（18 分）设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3 \\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5 \end{cases}$，问 a,b 为何值时，此线性方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求通解.

解　对线性方程组的增广矩阵作行初等变换，化为行阶梯形矩阵

$$(A,\beta)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix} 4'$$

（1）　当 $a\neq -1$ 时，$R(A)=R(A,\beta)=4$，线性方程组有唯一解；$3'$

（2）　当 $a=-1$ 时

$$(A,\beta)\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

此时，若 $b\neq 0$，则 $R(A)=2$，$R(A,\beta)=3$ 线性方程组无解；$3'$

（3）　当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时

$$(A,\beta)\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

此时，$R(A)=R(A,\beta)=2<3$ 线性方程组有无穷多解，$3'$ 原线性方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+2x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \end{cases},$$

因此通解为$\begin{cases} x_1=-2k_1+k_2 \\ x_2=k_1-2k_2+1 \\ x_3=k_1 \\ x_4=k_2 \end{cases}$，或 $x=k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 其中 k_1，k_2 为任意常数. $5'$

七（15 分）.已知 A,B 是 3 阶矩阵，满足 $AB-4A=2B$。

（1） 证明 $A-2E$ 是可逆的；

（2） 如果 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 A.

解 （1） 由 $AB-4A=2B$ 可得 $(A-2E)(B-4E)=8E$，因此矩阵 $A-2E$ 可逆. 5'

(2) 由 $AB-4A=2B$ 可得 $A(B-4E)=2B$. 2'

$$[B-4E,E]=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[r]{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$ 4'

故矩阵 $B-4E$ 可逆，且 $(B-4E)^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，5'

因此

$$A=2B(B-4E)^{-1}=2\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$ 3'

八（12 分）（1）设 $x>y>z>0$，证明 $\frac{1}{xy+yz+zx}\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & xz \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}<0$.

（2）设 $A=\left[a_{ij}\right]_n (n>2)$ 是非零矩阵，且 $A^*=A^T$，证明 $AA^T=E$.

证明 （1）由 $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & xz \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} \overset{c_3+(x+y+z)c_1}{=} \begin{vmatrix} x & x^2 & x(x+y+z)+yz \\ y & y^2 & y(x+y+z)+xz \\ z & z^2 & z(x+y+z)+xy \end{vmatrix}$

$$\overset{c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} x & x^2 & xy+xz+yz \\ y & y^2 & yx+yz+xz \\ z & z^2 & zx+zy+xy \end{vmatrix} = (xy+xz+yz)\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(xy+xz+yz)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (xy+xz+yz)(z-y)(z-x)(y-x)$$

因为 $x>y>z>0$，故

$$\frac{1}{xy+yz+zx}\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & xz \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (z-y)(z-x)(y-x)<0.$$ 6'

(2) 利用伴随矩阵的性质有 $AA^*=|A|E$，2' 即 $AA^T=|A|E$.故

$$|AA^T|=\left||A|E\right|，|A||A^T|=|A|^n，|A|^{n-2}\left(|A|^2-1\right)=0$$

故 $|A|=1$，或 $|A|=-1$，或 $|A|=0$．接下来证明 $|A|=1$. 2'

由 $A=\left[a_{ij}\right]_n (n>2)$ 是非零矩阵得必有非零元，设 $a_{kl}\neq 0$，将矩阵 A 的行列式按第 k 行展

开，注意到 $A^*=A^T$ 即为 $a_{ij}=A_{ij}$，故

$$|A|=a_{k1}A_{k1}+\cdots+a_{kl}A_{kl}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=a_{k1}^2+\cdots+a_{kl}^2+\cdots+a_{kn}^2>0.$$

因此 $|A|=1$，结论成立. 2'