厦门大学《微积分 II-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2018.1.17

得　分	
评阅人	

一、求下列不定积分（每小题 8 分, 共 24 分）.

1. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$　　2. $\int x\cos 2x dx$

3. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

解：1. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int \sin(\ln x)d(\ln x) = -\cos(\ln x) + C$

2. $$\int x\cos 2xdx = \frac{1}{2}\int xd\sin(2x) = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2xdx$$
$$= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2xd(2x) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

3. 作代换 $x = \sin t \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$，则 $dx = \cos tdt$，于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sin t\cos t}\cos tdt = \int \csc tdt$$

$$= \ln|c\sc t - \cot t| + c = \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + c = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + c$$

二、求下列定积分（每小题 8 分, 共 16 分）.

得　分	
评阅人	

1. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x(1+\sin 2x)dx$　　2. $\int_0^1 e^{\sqrt{1-x}}dx$

解：1. $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x(1+\sin 2x)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos xdx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\sin 2xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos xdx + 0 = 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

2. 令 $t = \sqrt{1-x}$，则 $x = 1-t^2, dx = -2tdt$，于是 当 $x = 0$时，$t = 1$，当$x = 1$时，$t = 0$，所以

$$\int_0^1 e^{\sqrt{1-x}}dx = -\int_1^0 2te^t dt = 2\int_0^1 tde^t = 2(te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt) = 2(e - e^t\Big|_0^1) = 2$$

得　分	
评阅人	

二、求下列函数极限（每题 8 分，共 24 分）.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\arctan\frac{1}{n}+\arctan\frac{2}{n}+\cdots+\arctan\frac{n}{n}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin t dt}{\sin^4 x}$　　3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

解： 1. 原式 $=\int_0^1\arctan x dx = x\arctan x|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin t dt}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin t dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(x^2\right)2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(x^2\right)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

3. $\because e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$　　$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

注:也可用洛必达法则计算

得　分	
评阅人	

四、(8 分)　设方程 $x-\int_1^{y+x}e^{-u^2}du=0$ 确定了 y 是 x 的函数，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

解：对方程 $x-\int_1^{y+x}e^{-u^2}du=0$ 两边对 $\boldsymbol{x}$ 求导得:

$$\mathbf{1-e^{-(y+x)^2}\left(y'+1\right)=0}$$

将 $\boldsymbol{x=0}$ 代入原方程，得到：$\int_1^{y(0)}e^{-u^2}du=0$，从而 $y\left(0\right)=1$

则 $1-e^{-1}\left(1+y'\left(0\right)\right)=0$；　所以 $y'\left(0\right)=e-1$

得　分	
评阅人	

五、（8 分）求函数 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 的单调区间以及极值.

解：$y'=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$，令 $y'=0$,解得

$x=0,x=1$。列表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	−	0	+
$f(x)$	单调减	不是极值点	单调减	极小值 0	单调增

所以，$f(x)$ 的单调增加区间为 $(1,+\infty)$；单调增加区间为 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ (或合并区间成 $(-\infty,1)$). 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=0$。

.

得　分	
评阅人	

六、（8 分）求抛物线方程 $y^2=2ax$ 的曲率。(8 分)

解：　对抛物线方程 $y^2=2ax$ 两边关于 x 求导

$$2yy'=2a \quad \Rightarrow y'=\frac{a}{y},$$

,

$$y''=-\frac{ay'}{y^2}=-\frac{a^2}{y^3}$$

则　$k=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|=\frac{a^2}{(a^2+y^2)^{3/2}}=\frac{a^2}{(a^2+2ax)^{3/2}}$

注：把 y 看作自变量也能得到相同的答案（$\frac{a^2}{(a^2+y^2)^{3/2}}$）. 把 x 看作自变量将原方程分成两个函数分别求导也能得到相同答案（$\frac{a^2}{(a^2+2ax)^{3/2}}$）

得　分	
评阅人	

七、（6 分）计算 $\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x tf(x-t)dt$，其中 $f(x)$ 是连续函数。

解：　令 $x-t=u$，则 $t=x-u$

当 $t=0$ 时，$u=x$；当 $t=x$ 时，$u=0$

所以 $\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0 (x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$

故 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x-t)dt=\frac{d}{dx}[x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du]=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du$

$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x tf(x-t)dt=\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du=f(x)$

得　分	
评阅人	

八、（6 分）设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，且单调增加，证明：$\left(a+x\right)\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t<2\int_a^x tf\left(t\right)\mathrm{d}t,\quad x>a$。

证明：作辅助函数 $F\left(x\right)=\left(a+x\right)\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t-2\int_a^x tf\left(t\right)\mathrm{d}t$，

因为

$$\begin{aligned}F'\left(x\right)&=\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t+\left(a+x\right)f\left(x\right)-2xf\left(x\right)\\&=\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t-\left(x-a\right)f\left(x\right)\\&=\int_a^x\left[f\left(t\right)-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}t\\&<0\end{aligned}$$

故 $F\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上单调减少，

所以当 $x>a$ 时，$F\left(x\right)=\left(a+x\right)\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t-2\int_a^x tf\left(t\right)\mathrm{d}t<F\left(a\right)=0$