厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷（A 卷）

评分标准

一、计算下列各题：（每小题 5 分，共 10 分）

（1）考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 的收敛性。

解：级数为正项级数，采用根值判别法，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ …………(2 分)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{\mathrm{e}}{3}<1.$$ …………(4 分)

故所求级数收敛. …………(5 分)

（2）计算曲线积分 $\int_\Gamma\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t$， $y=\mathrm{e}^t\sin t$， $z=\mathrm{e}^t$ 上对应于 t 从 0 到 2 的一段弧.

解：原式 $=\int_0^2\frac{-\mathrm{e}^t\sin t(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t)+\mathrm{e}^t\cos t(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)+\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t+\mathrm{e}^{2t}\sin^2 t+\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t$

…………(2 分)

$$=\int_0^2\frac{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^t}{2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^2(1+\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$ …………(3 分)

$$=\frac{1}{2}(t-\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^2=\frac{1}{2}(3-\mathrm{e}^{-2})$$ …………(5 分)

二、计算下列各题：（每小题 5 分，共 10 分）

（1）将函数 $\frac{1}{(3-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛域.

解：注意到 $\frac{1}{(3-x)^2}=(\frac{1}{3-x})'$，

因为 $$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n,(-3<x<3),$$ …………(2 分)

逐项求导，可得$\dfrac{1}{(3-x)^2}=\dfrac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}n(\dfrac{x}{3})^{n-1}$， …………(4 分)

其收敛域为$-3<x<3$. …………(5 分)

（2）计算$\oint_L(2|x|+y)\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=4$.

解：由L的对称性和被积函数的奇偶性可知，

$$\oint_L(2|x|+y)\mathrm{d}s=\oint_L(2|x|)\mathrm{d}s\,.$$ …………(2 分)

设$x=2\cos\theta,y=2\sin\theta$，则$\mathrm{d}s=\sqrt{4\sin^2\theta+4\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$.

…………(3 分)

因此，$\oint_L(2|x|+y)\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(2\cos\theta)2\mathrm{d}\theta=32$. …………(5 分)

注：算对$\oint_L 2|x|\mathrm{d}s$得 3 分，算对$\oint_L y\mathrm{d}s=0$得 2 分.

三、计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是曲面$x^2+y^2+z^2=a^2\,(a>0)$在$z\geq 0$的部分.

解一：由于$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

…………(2 分)

$$=\int_{-a}^{a}(\pi ax+2a\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x$$ …………(4 分)

$$=2a\int_{-a}^{a}(\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x$$ …………(6 分)

$$=2a\cdot\frac{\pi a^2}{2}=\pi a^3$$ …………(8 分)

解二：利用对称性，

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$$ …………(4 分)

$$=\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$$ …………(6 分)

$$=a\cdot\pi a^2=\pi a^3$$ …………(8 分)

注：（1）$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S$，$\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S$，$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$三个积分算对各得 2 分，包括利用对称性得到$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S$，

$\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S$；（2）写对曲面积分转换成二重积分的公式得 2 分.

四、计算 $\oiint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 Σ 是正立方体 Ω：$0 \le x \le a$，$0 \le y \le a$，$0 \le z \le a$ 的表面取外侧.（8 分）

解一：应用高斯公式，所求曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(yx-yz)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(y^2+xz)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{…………(3 分)}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(y+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{…………(4 分)}$$

$$=\int_0^a \mathrm{d}z\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a (y+x)\mathrm{d}x \qquad \text{…………(6 分)}$$

$$=a\int_0^a (ay+\frac{1}{2}a^2)\mathrm{d}y \qquad \text{…………(7 分)}$$

$$=a^4 \qquad \text{…………(8 分)}$$

解二：应用高斯公式，所求曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(yx-yz)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(y^2+xz)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{…………(3 分)}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(y+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{…………(4 分)}$$

利用形心公式

$$\bar{x}=\frac{a}{2}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{a^3}，\quad \bar{y}=\frac{a}{2}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{a^3} \qquad \text{…………(6 分)}$$

则 $$\iiint\limits_{\Omega}(y+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{a}{2}\cdot a^3+\frac{a}{2}\cdot a^3=a^4. \qquad \text{…………(8 分)}$$

五、求由曲面 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$ 所围成的立体图形的体积.（8 分）

解：所求的体积$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$.　　…………(1 分)

两曲面的交线为$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=1\end{cases}$，故在$xOy$面上的投影区域为

$$D_{xy}:\ \begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ z=0\end{cases}.\qquad\text{…………(3 分)}$$

作柱面坐标变换$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$.　　…………(4 分)

则$0\le\theta\le 2\pi$，$0\le r\le 2$.

$$\frac{x^2+y^2}{4}\le z\le\sqrt{5-x^2-y^2}\Rightarrow\frac{r^2}{4}\le z\le\sqrt{5-r^2}.$$

所求的体积　$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}}\mathrm{d}z$　　…………(6 分)

$$=2\pi\int_0^2 r\left(\sqrt{5-r^2}-\frac{r^2}{4}\right)\mathrm{d}r\qquad\text{…………(7 分)}$$

$$=\pi\int_0^2\left(\sqrt{5-r^2}-\frac{r^2}{4}\right)\mathrm{d}\left(r^2\right)$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-4\right).\qquad\text{…………(8 分)}$$

六、讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$的收敛性.（10 分）

解：因为$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$，　　…………(1 分)

且

$$u_n-u_{n+1}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}>0\qquad\text{…………(2 分)}$$

即$u_n>u_{n+1}$.

由莱布尼兹判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$收敛. …………(4 分)

又$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]\right| = \sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$.

因为$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$. …………(6 分)

而$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散，$\therefore$由比较判别法的极限形式，$\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$发散. …………(8 分)

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$为条件收敛. …………(10 分)

另解：级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$的收敛性也可以如下证明：

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$ …………(6 分)

由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$发散，得级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$发散. …………(8 分)

七、求无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n(n+1)}$的和函数$S(x)$，指出其收敛域，并计算$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$.（10 分）

解：记$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$. 由$\lim_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2}=1$，因此原级数的收敛半径为 1.

…………(1 分)

注意到$x=\pm1$时，级数也收敛，因此其收敛域为$[-1,1]$. …………(2 分)

当$x\in(-1,1)$时，$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}=\dfrac{-1}{1+x}$，

因此，$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}=-\ln(1+x).$$ …………(4 分)

当$x=0$时，原级数和为 0； …………(5 分)

当$x\in(-1,0)\cup(0,1)$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+\frac{1}{x}(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}+x). \qquad \text{…………(7 分)}$$

因此，原级数的和函数 $S(x)=1-(1+\frac{1}{x})\ln(1+x)$. …………(8 分)

当 $x=-1$ 时，级数和为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1$. …………(9 分)

因此本问题级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}1-(1+\frac{1}{x})\ln(1+x), x\in(-1,0)\cup(0,1],\\ 0, \qquad x=0,\\ 1, \qquad x=-1.\end{cases}$$

当 $x=1$ 时，可求得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}=1-2\ln 2.$ …………(10 分)

八、计算 $\oint_L\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$，$L$ 为椭圆曲线 $\frac{(x-a)^2}{4}+(y-a)^2=1$ 取正向, 其中参数 a 满足 $a>0$ 且 $a\neq\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

解：设 $P=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{y-x}{x^2+y^2}$. 易知当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \qquad \text{…………(1 分)}$$

(1) 当 $a>\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，原点 $(0,0)$ 不在椭圆曲线 L 所包含的区域内，因此由 Green 公式即得原积分 $I=\oint_L\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\iint_{\Omega}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

…………(4 分)

(2) 当 $0<a<\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，原点 $(0,0)$ 在椭圆曲线 L 所包含的区域内.

作辅助曲线为中心在原点、半径为ε的圆周

$$L_{\varepsilon}: x=\varepsilon\cos\theta，\quad y=\varepsilon\sin\theta$$

方向取负向（顺时针方向）. …………(6 分)

则在L与L_{ε}所围成的区域Ω_{ε}内，由格林公式可得$\iint\limits_{\Omega_{\varepsilon}}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

于是，$I=\oint_{L+L_{\varepsilon}}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y-\oint_{L_{\varepsilon}}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{\Omega_{\varepsilon}}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oint_{L_{\varepsilon}}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=-\oint_{L_{\varepsilon}}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$ …………(8 分)

$$=-\int_{2\pi}^{0}(\cos\theta+\sin\theta)(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta+(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=-2\pi.$$

…………(10 分)

九、展开函数$f(x)=|x|\,(-\pi<x<\pi)$ 为傅里叶级数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$的值.（10 分）

解：将函数$f(x)=|x|\,(-\pi<x<\pi)$做周期延拓.

因为$f(x)=|x|$是偶函数，所以$b_n=0$. …………(1 分)

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi,$$ …………(2 分)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots$$ …………(4 分)

于是有$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$.

由于$f(x)$在$(-\pi,\pi)$ 中连续，因此

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$ …………(6 分)

令$x=0$，$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. …………(8 分)

设$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$,，由于

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}(S_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2})=\frac{1}{4}(S_1+\frac{\pi^2}{8}),$$

解得$S_1=\frac{\pi^2}{24}$. …………(10 分)

十、 计算$\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是抛物面$z=1-x^2-y^2$在第一卦限部分，方向取下侧.（8 分）

解一：Σ在xoy平面的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y):x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$.

由于曲面Σ的方向取下侧，其上一点的单位法向量可取为

$$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(-\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},-\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},-\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}) .$$

…………(2 分)

原积分可按如下计算：

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(yz\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+xz\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+1)\cos\gamma\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}(4xyz+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ …………(4 分)

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}(4xy(1-x^2-y^2)+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ …………(6 分)

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4r^2\cos\theta\sin\theta(1-r^2)+1)r\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{\pi}{4}.$$ …………(8 分)

解二： Σ在yoz平面的投影区域为$D_{yz}=\{(y,z):0\le z\le 1-y^2,0\le y\le 1\}$.

$$\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint\limits_{D_{yz}}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y^2}yz\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\int_0^1 y(1-y^2)^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(1-y^2)^2\mathrm{d}(1-y^2)=\frac{1}{12}(1-y^2)^3=-\frac{1}{12}.$$ …………(2 分)

Σ在zox平面的投影区域为$D_{zx}=\{(z,x):0\le z\le 1-x^2,0\le x\le 1\}$.

$$\iint_{\Sigma} zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{D_{zx}} zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}xz\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x^2)^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(1-x^2)^2\mathrm{d}(1-x^2)=\frac{1}{12}(1-x^2)^3=-\frac{1}{12}.$$ …………(4 分)

Σ在xoy平面的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y):x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$.

$$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}.$$ …………(6 分)

故$\iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{6}-\frac{\pi}{4}$. …………(8 分)

注：$\iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\iint_{\Sigma} zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$每个积分两分，最后结果 2 分.

十一、设$u_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^n x\mathrm{d}x$，（1）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(u_n+u_{n+2})$的值；（2） 证明：对任意参数$\lambda>0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^{\lambda}}$收敛.

解: （1）首先, 可求得

$$u_n+u_{n+2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^n x(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^n x\csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^n x\,\mathrm{d}\cot x=-\left.\frac{\cot x}{n+1}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n+1}.$$ …………(2 分)

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(u_n+u_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1$. …………(4 分)

（2）设$\cot x=t$，可得$\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，且成立如下不等式:

$$0 < u_n = \int_1^0 (-t^n) \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \le \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\,,$$ …………(6 分)

因此成立 $0 < \dfrac{u_n}{n^\lambda} < \dfrac{1}{n^{1+\lambda}}$. …………(7 分)

当 $\lambda > 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛.

利用比较判别法即证得结论. …………(8 分)