厦门大学《微积分I-2》课程试卷

试卷类型 A卷答案 考试日期

高等数学教学组

1. (1)(5分) 设函数$u(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$，求$\mathbf{grad}u$、$div(\mathbf{grad}u)$和$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)$。

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+z^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2yz+x^2$，$\frac{\partial u}{\partial z}=2zx+y^2$。

$\mathbf{grad}u=\{2xy+z^2,2yz+x^2,2zx+y^2\}$；

$div(\mathbf{grad}u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2x+2y+2z$；

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z^2 & 2yz+x^2 & 2zx+y^2\end{vmatrix}=\{0,0,0\}$$

(2)(5分)计算$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，$L$为$x^2+y^2=4$上半圆周与$x$轴围成的封闭曲线。

解：

$$\begin{aligned}\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds &= \int_0^{\pi} e^2\sqrt{(-2\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2}d\theta+\int_{-2}^{2}e^{\sqrt{x^2}}\sqrt{1+0}dx\\ &= \int_0^{\pi}2e^2d\theta+2\int_0^2 e^x dx=2e^2\pi+2(e^2-1)\end{aligned}$$

(3) （5分）计算$\int_L xydx$，L为曲线$y^2=x$由$(1,-1)$到$(1,1)$。

解：方法一：以y为参数，$dx=2dy$,则

$$\int_L xydx=\int_{-1}^{1}y^2\cdot y\cdot 2ydy=\frac{2}{5}y^5|_{-1}^{1}=\frac{4}{5}.$$

方法二：以x为参数，将曲线分成上下段$y=\pm\sqrt{x}$，则

$$\int_L xydx=\int_0^1 x\sqrt{x}dx+\int_1^0 x(-\sqrt{x})dx=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}.$$

(4) （5分）讨论正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|\sin n|}{2^n}$的敛散性。

解：方法一：因为$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}$，根据根植判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，（2分）

由于$\frac{n|\sin n|}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|\sin n|}{2^n}$收敛。（3分）

方法二：因为$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}$, 根据比值判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，由于$\frac{n|\sin n|}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|\sin n|}{2^n}$收敛。

2. （8分）计算$\iint_\Sigma (x+z)dS$，Σ是由平面$z=x+1$被圆柱面$x^2+y^2=1$所截部分。

解：

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x+z)dS &= \iint_{D_{xy}} (2x+1)\sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2}\iint_{D_{xy}} xdxdy + \sqrt{2}\iint_{D_{xy}} 1dxdy \\ &= 0+\sqrt{2}\pi = \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

注：平面$z=x+1$被圆柱面$x^2+y^2=1$所截部分在xoy面上的投影是轴对称的。

3. （10分）计算$\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，$L$为$(x-1)^2+y^2=2$，逆时针方向。

解：令$P=\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{-x}{x^2+y^2}$，则$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 但是被积函数在$(0,0)$无意义，不能直接用格林公式。加一封闭曲线$\bar{L}: x^2+y^2=R^2$，其中$R$充分小使得$\bar{L}$包含在$L$内，取顺时针方向。

$$\begin{aligned}\int_L Pdx+Qdy &= \int_{L+\bar{L}} Pdx+Qdy - \int_{\bar{L}} Pdx+Qdy \\ &= \iint_{D_{xy}} (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy + \int_{\bar{L}^-} Pdx+Qdy \\ &= 0+\int_{\bar{L}^-}\frac{ydx-xdy}{R^2} = \int_0^{2\pi}\frac{R\sin\theta(-R\sin\theta)-R\cos\theta R\cos\theta}{R^2}d\theta \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

4. （10分）

(1) （2分）证明：在整个xOy平面内，$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$ 为某个二元函数$u(x,y)$的全微分；

(2) （5分）求解全微分方程$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=0$；

(3) （3分）求$\int_L (x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$，其中$L:(x-1)^2+y^2=4, y\geq 0$, L方向为逆时针方向。

解：

(1) 由于在整个xOy平面内，$\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y}=1=\frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x}$，所以$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$为某个二元函数$u(x,y)$的全微分。（2分）

(2)

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x (x+1)\mathrm{d}x + \int_0^y (x-y^2+3)\mathrm{d}y \quad （3分） \\ &= \frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y. \quad （1分）\end{aligned}$$

全微分方程的通解为$\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y=C$.（1分）

(3)

$$\int_L (x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=\int_{(3,0)}^{(-1,0)}(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y \quad（2分）$$

$$=u(-1,0)-u(3,0)=-8. \quad（1分）$$

或者补充从$(-1,0)$到$(3,0)$的直线段L_1，根据格林公式计算得

$$\int_L (x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=(\int_{L+L_1}-\int_{L_1})(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{L_1}(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{-1}^{3}(x+1)dx=-8.$$

5. （10分）求向量场$(x,0,0)$经过曲面Σ指定侧的通量，其中Σ为圆柱面$x^2+y^2=1$位于$z=0$上方及平面$z=y$下方的部分,取外侧。

解：方法一：设$\Sigma_1: x=\sqrt{1-y^2}$，取前侧，$\Sigma_2: x=-\sqrt{1-y^2}$，取后侧。（2分）
Σ_1,Σ_2在yOz面的投影区域为三角形$D_{yz}=\{(y,z)|y\le z, 0\le y\le 1, x=0\}$。（2分）
通量

$$\Phi=\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad（2分）$$

$$=\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{yz}}(-\sqrt{1-y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad（2分）$$

$$=2\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}z=\frac{2}{3} \quad（2分）$$

方法二：利用高斯公式，设$\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\\ y=z\end{cases}$，取上侧，$\Sigma_1$ 的法向量与x轴正向夹角$\alpha=\frac{\pi}{2}$；$\Sigma_2: x^2+y^2\le 1,\ ,y\ge 0,\ z=0,$ 取下侧。（2分）
通量

$$\Phi=\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad（2分）$$

$$=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\int_{\Sigma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega \mathrm{d}V-0-0 \quad（4分）$$

$$=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{r\sin\theta}\mathrm{d}z=\frac{2}{3} \quad（2分）$$

方法三：Σ指定侧的一个法向量为$\vec{n}=(2x,2y,0)$，方向余旋为$\cos\alpha=x$。（2分）
设L为柱面与平面$y=z$交线在xOy面的投影曲线，$L: x^2+y^2=1,\quad y\ge 0$。（2分）

通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} x\cos\alpha \mathrm{d}S \quad （2分） \\ &= \iint_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}S = \int_L x^2 y \mathrm{d}s \quad （2分） \\ &= \int_0^{\pi} r^3\cos^2 t\sin t \mathrm{d}t = \frac{2}{3} \quad （2分）\end{aligned}$$

方法四：Σ指定侧的一个法向量为$\vec{n}=(2x,2y,0)$，方向余旋为$\cos\alpha = x$。（2分）
设D_{zx}为曲面Σ在zOx面的投影区域，$D_{zx}=\{(z,x)|x^2+z^2\le 1, z\ge 0\}$。（2分）
通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} x\cos\alpha \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} x^2\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \quad （2分） \\ &= \iint_{D_{zx}} x^2\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \iint_{D_{zx}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \quad （2分） \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}z = \frac{2}{3} \quad （2分）\end{aligned}$$

6. （10分）

(1) （8分）讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$的收敛性。

(2) （2分）判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$的敛散性。

解:

(1) 由于$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n^2+4}}{\frac{1}{n}}=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，根据比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$发散。（3分）
设$f(x)=\frac{x}{x^2+4}$，$f'(x)=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}<0\ (x>2)$，因此当$n\ge 3$时，$\frac{n}{n^2+4}$为单调减数列；
又$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+4}=0$，由Libernitz判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$收敛。（4分）
综上，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$条件收敛。（1分）

(2) 由于$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，根据收敛级数的性质得
级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$发散。（2分，写出发散即给2分）

7. （8分）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$在$(-1,1)$内的和函数。
解：方法一：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^{2n+2}}{n}-\frac{x^{2n+2}}{n+1})=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1},$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}=-\ln(1-x^2) \qquad (-1<x<1)$$

所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}=-\ln(1-x^2)-x^2\qquad(-1<x<1),$$

因而所求的幂级数在$(-1<x<1)$内的和函数是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}=-x^2\ln(1-x^2)+\ln(1-x^2)+x^2.$$

方法二：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}&=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^{2n+2})'}{n(n+1)}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{n(n+1)}\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{n}\mathrm{d}x=\int_0^x 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^x 2x\ln(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^x\ln(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)\\&=\int_1^{1-x^2}\ln u\mathrm{d}u=u\ln u|_1^{1-x^2}-\int_1^{1-x^2}u\mathrm{d}\ln u\\&=(1-x^2)\ln(1-x^2)-(1-x^2-1)\\&=-x^2\ln(1-x^2)+\ln(1-x^2)+x^2\qquad(-1<x<1)\end{aligned}$$

8. （8分）将$f(x)=\frac{x-1}{x^2}$展开成$x-2$的幂级数。

解：注意到$f(x)=\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$. 而

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2+x-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\quad(0<x<4)$$

对上式两边求导，得

$$-\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(x-2)^n\quad(0<x<4)$$

于是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(x-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-n)(-1)^n}{2^{n+2}}(x-2)^2\quad(0<x<4).$$

9. （10分）将函数$f(x)=1+x\ (0<x\le 1)$ 展开成以2 为周期的正弦级数, 并指出该级数在$x=1$处的值。

解：(2分) 对$f(x)$进行奇周期延拓，则有

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \quad （2分）\\
b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 (1+x)\sin n\pi x\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}[\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}\cos(n\pi x)] \\
&= -\frac{2}{n\pi}[(1+x)\cos n\pi x|_0^1 - \int_0^1 \cos n\pi x\mathrm{d}x] \\
&= -\frac{2}{n\pi}[2\cos n\pi - 1 + 0] = \frac{2}{n\pi}[1 - 2(-1)^n] \quad （2分）
\end{aligned}
$$

因此，我们得到$f(x) = 1 + x$ 在$(0 < x \leq 1)$ 的正弦级数

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1 - 2(-1)^n)\sin n\pi x. \quad （2分）
$$

根据收敛定理，在函数间断点$x = 1$处，该级数收敛于

$$
\frac{f(1+0) + f(1-0)}{2} = 0. \quad （2分）
$$

10. （6分）设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.
证明：令$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$, 则$S_n = a_n - a_0$. 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛, 所以$\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，设$\lim_{n\to\infty} S_n = S$, 则有$\lim_{n\to\infty} a_n = S + a_0$. 所以存在$M > 0$，对于一切的自然数$n$有$|a_n| \leq M$. 因为$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛. 又$0 \leq |a_n b_n| < M|b_n|$, 于是由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.