厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2017.01.11

得　分	
评阅人	

一、求下列定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

$\frac{9}{2}\pi$

2. $\int_{-3}^{3}[\sqrt{9-x^2}+x\ln(1+x^2)]\mathrm{d}x$

$\frac{\pi}{4}$

3. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

二、求下列不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

得　分	
评阅人	

1. $\int \sec^4 x \mathrm{d}x$

$\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

1/2*根号下（1+1/x 平方）+C

三、求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} \mathrm{d}x$。（8 分）

得　分	
评阅人	

四、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续，且满足：

得　分	
评阅人	

$f(x)=e^x+\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x$，试求 $f(x)$。（8 分）

五、计算下列极限：（每小题 6 分，共 12 分）

得　分	
评阅人	

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$

$2\ln 2-1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x (x-t)\cos t^2\mathrm{d}t}$

六、求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 的通解。（9 分）

得　分	
评阅人	

七、求微分方程 $y''-y=2(\mathrm{e}^{x}+\cos x)$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=2$ 的特解。（10 分）

得　分	
评阅人	

八、有一向上凹的光滑曲线在原点与 x 轴相切，且该曲线在任一点 (x, y) 处的曲率为 e^{-y}，求该曲线的方程 $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$。（10 分）

得　分	
评阅人	

九、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续且单调增加，试证：对于任何的 $b > a > 0$，有

$$b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x < 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$ 。（8 分）

得　分	
评阅人	

十、设非负函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上连续，且对任意给定的 $x\in[0,a]$，均有 $f(x)\le\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，试证：$f(x)\equiv 0$，$\forall x\in[0,a]$。（5 分）

得　分	
评阅人	