厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2020.01.08

一、求下列的定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(x+2)^3}\mathrm{d}x$；

解：令 $t=x+2$，

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{(x+2)^3}\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\frac{(u-2)^2}{u^3}\mathrm{d}u$$

$$=\int_{1}^{2}\frac{1}{u}-4u^{-2}+4u^{-3}\mathrm{d}u$$

$$=(\ln u+\frac{4}{u}-\frac{2}{u^2})\big|_1^2$$

$$=\ln 2+2-\frac{1}{2}-(0+4-2)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；

解法一：$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x-\sec x\cdot\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=(\tan x-\sec x)\big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=(1-\sqrt{2})-(0-1)=2-\sqrt{2}$$

解法二：

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=}\int_{0}^{\tan\frac{\pi}{8}}\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\tan\frac{\pi}{8}}\frac{2}{(t+1)^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2}{t+1}\Big|_0^{\tan\frac{\pi}{8}}$$

$$= 2-\sqrt{2}$$

3. $\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cdot\sin^3 x\,\mathrm{d}x$。

解法一：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cdot\sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin^3 x\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\sin^3 x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\sin^3 x\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}\pi$$

解法二：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cdot\sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin^3 x\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\sin^3 x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}(\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x)$$

$$= 2x\cdot(\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x)\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{3}\pi + \frac{2}{3}\int_0^{\pi}(2+\sin^2 x)\,\mathrm{d}\sin x$$

$$= \frac{4}{3}\pi + \frac{2}{3}(2\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$

二、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x(1+e^x)}$；

解：$\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{e^x} - 1 + \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$

$= \int e^{-x} - 1\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}(1+e^x)$

$= -e^{-x} - x + \ln(1+e^x) + C$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}$。

解：令 $x = \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{x^2+1} = \sec t$，代入

$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\tan t}{(1+2\tan^2 t)\sec t} = \int \frac{\sec t\,\mathrm{d}t}{1+2\tan^2 t}$

$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t + 2\sin^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}\sin t}{1+\sin^2 t}$

$= \arctan(\sin t) + C$

$= \arctan \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$

三、（6 分）求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)} - \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$。

解：$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(1+x)} - \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = (\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)})\Big|_{0^+}^{+\infty}$

$= 0 - \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)}$

$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$

四、（8 分）设 $f(x)$ 一个原函数为 $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$，试求 $\int x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ 。

解法一：$\int x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}(\dfrac{\cos(\ln x)}{x})$

$= x\cdot\cos(\ln x) - \int \dfrac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x^2 = x\cdot\cos(\ln x) - 2\int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

又 $\int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\cos(\ln x) - \int x\mathrm{d}\cos(\ln x) = x\cdot\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$

$= x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot\sin(\ln x) - \int x\mathrm{d}\sin(\ln x)$

$= x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

所以 $\int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\cdot[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)] + C$

因此 $\int x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = -x\sin(\ln x) + C$

解法二：$\int x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = -\int \sin(\ln x) + \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

$= -\int\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x - \int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

$= -x\cdot\sin(\ln x) + \int x\,\mathrm{d}\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

$= -x\cdot\sin(\ln x) + \int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x - \int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = -x\cdot\sin(\ln x) + C$

五、（10 分）求函数 $y=(x-5)\cdot x^{\frac{2}{3}}$ 的极值，以及其图形的凹凸区间和拐点。

解：由 $y' = \dfrac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$，求得可疑极值点为 $x=0$， $x=2$；

由 $y'' = \dfrac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$，求得可疑拐点为 $x=-1$， $x=0$ 。

注意到当 $x<0$ 时， $y'>0$；当 $0<x<2$ 时， $y'<0$；当 $x>2$ 时， $y'>0$ 。因此由一阶判别法，函数 $y=(x-5)\cdot x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 取到极大值 0，在 $x=2$ 取到极小值 $-3\sqrt[3]{4}$ 。

又注意到当 $x<-1$ 时，$y''<0$；当 $x>-1$，$x\neq 0$ 时，$y''>0$，所以其图形的凸区间为 $(-\infty,-1)$ 凹区间为 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 。因此 $(-1,-6)$ 为拐点。

六、（8 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\,(e^{(x-t)^2}-1)\,\mathrm{d}t}{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}$。

解：

$$\int_0^x t\,(e^{(x-t)^2}-1)\,\mathrm{d}t \overset{u=x-t}{=} \int_x^0 (x-u)(e^{u^2}-1)\,\mathrm{d}(x-u) = x\int_0^x (e^{u^2}-1)\ \mathrm{d}u-\int_0^x u\,(e^{u^2}-1)\ \mathrm{d}u$$

由麦克劳林公式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\,(e^{(x-t)^2}-1)\,\mathrm{d}t}{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x (e^{u^2}-1)\ \mathrm{d}u-\int_0^x u\,(e^{u^2}-1)\ \mathrm{d}u}{(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4))-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2!}+o(x^4))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x (e^{u^2}-1)\ \mathrm{d}u-\int_0^x u\,(e^{u^2}-1)\ \mathrm{d}u}{-\frac{x^4}{12}}=-12\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x (e^{u^2}-1)\ \mathrm{d}u-\int_0^x u\,(e^{u^2}-1)\ \mathrm{d}u}{x^4}$$

$$=-12\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{u^2}-1)\ \mathrm{d}u}{4x^3}=-3\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=-1$$

七、（8 分）求由反正弦曲线 $y=\arcsin x$ 和直线 $y=\dfrac{\pi}{2}x$ 所围成的平面图形的面积 A。

解法一：由图形对称性，

$$A=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y-\frac{2}{\pi}y\ \ \mathrm{d}y$$

$$=2(-\cos y-\frac{1}{\pi}y^2\ )\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2-\frac{\pi}{2}$$

解法二：由图形对称性，

$$A=2\int_0^1\frac{\pi}{2}x-\arcsin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}x^2\ \Big|_0^1\ -2\int_0^1\arcsin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}-2x\arcsin x\ \Big|_0^1\ +2\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}-2\sqrt{1-x^2}\ \Big|_0^1\ =2-\frac{\pi}{2}$$

八、（8 分）求极坐标下的对数螺线 $\rho = e^{2\theta}$ 相应于 $0 \le \theta \le \ln 3$ 的一段弧长 s。

解：由 $\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{5}\,e^{2\theta}\mathrm{d}\theta$，得

$$s = \int_0^{\ln 3} \sqrt{5}e^{2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{2\theta}\Big|_0^{\ln 3} = 4\sqrt{5}$$

九、（8 分）由曲线 $y = x\ln x\ (x \ge 1)$ 与直线 $y = x$，$y = 0$ 围成了一个平面图形，求此平面图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。

解法一：$V = \pi\int_0^e x^2(y)\ \mathrm{d}y - \frac{\pi}{3}\cdot e^2 \cdot e$

$$= \pi\int_1^e x^2\ \mathrm{d}(x\ln x) - \frac{\pi}{3}\cdot e^2\cdot e = \pi\int_1^e x^2\ln x\ \mathrm{d}x + \pi\int_1^e x^2\ \mathrm{d}x - \frac{\pi}{3}\cdot e^3$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_1^e \ln x\ \mathrm{d}x^3 + \frac{\pi}{3}x^3\Big|_1^e - \frac{\pi}{3}\cdot e^3 = \frac{\pi}{3}(x^3\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x^3\ \mathrm{d}\ln x) - \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3}e^3 - \frac{\pi}{3}\int_1^e x^2\ \mathrm{d}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}e^3 - \frac{\pi}{9}x^3\Big|_1^e - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{9}(e^3 - 1)$$

解法二：$V = 2\pi\int_0^e x^2\ \mathrm{d}x - 2\pi\int_1^e x^2\ln x\ \mathrm{d}x$

$$= \frac{2\pi}{3}x^3\Big|_0^e - \frac{2\pi}{3}\int_1^e \ln x\ \mathrm{d}x^3 = \frac{2\pi}{3}e^3 - \frac{2\pi}{3}(x^3\ln x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_1^e$$

$$= \frac{2\pi}{3}e^3 - \frac{4\pi}{9}e^3 - \frac{2\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}(e^3 - 1)$$

十、（8 分）设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上单调增加的连续函数，证明：对于任意的 $x \in [a,b]$，都有 $(b-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \le (x-a)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$。

证法一：当 $x = a$ 或者 $x = b$，结论显然成立。当 $x \in (a,b)$,

$$(b-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - (x-a)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = (b-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - (x-a)(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^b f(t)\mathrm{d}t)$$

$$= (b-x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - (x-a)\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$$

$= (b-x)f(\xi_1)(x-a) - (x-a)f(\xi_2)(b-x)$ 其中 $\xi_1 \in (a,x)$，$\xi_2 \in (x,b)$ （积分中值定理）

$= (b-x)(x-a)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] < 0$ 此时结论也成立。 得证。

证法二：利用单调性

当 $x=a$ 结论显然成立。令 $\varphi(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x-a}$， $x\in(a,b]$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(a,b]$ 可导，且

$$\varphi'(x)=\frac{(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^2}=\frac{(x-a)[f(x)-f(\xi)]}{(x-a)^2}>0 \qquad \xi\in(a,x)$$ （积分中值定理），

因此 $\varphi(x)$ 在 $(a,b]$ 严格单调增加，从而 $\varphi(x)\le\varphi(b)=\dfrac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}{b-a}$，得证。

证法三：利用最值。

令 $\varphi(x)=(b-a)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-(x-a)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$， $x\in[a,b]$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且

$\varphi'(x)=(b-a)f(x)-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ 。

由积分中值定理以及 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的单调性，从而存在唯一的 $x_0\in(a,b)$，使得

$f(x_0)(b-a)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$，即有 $\varphi'(x_0)=0$，

并且当 $a\le x<x_0$ 时， $\varphi'(x)=f(x)-f(x_0)<0$；当 $x_0<x\le b$ 时， $\varphi'(x)=f(x)-f(x_0)>0$，

故 $\varphi(x)$ 在 x_0 取得最小值，这样 $\varphi(x)$ 在端点处 $x=a$ 或者 $x=b$ 取得最大值 0，也就是 $\varphi(x)\le 0$，

$\forall x\in[a,b]$。

十一、（6 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，并且 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$，

证明在区间 $(0,\pi)$ 上存在两个不同的点 $x=\xi_1$ 和 $x=\xi_2$，使得 $f'(x)+2f(x)\cot x=0$。

证明：作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)\sin^2 x$， $x\in[0,\pi]$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,\pi]$ 连续，在 $(0,\pi)$ 内可导。

由积分中值定理，存在 $x_0\in(0,\pi)$，使得 $0=\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=f(x_0)(\pi-0)$，即有 $f(x_0)=0$。

因此 $\varphi(0)=\varphi(x_0)=\varphi(\pi)=0$，在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,\pi]$ 分别用罗尔定理，可知存在 $\xi_1\in(0,x_0)$，

$\xi_2\in(x_0,\pi)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$，结论得证。