历届试题选（二）

一、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x^2+x^4)+\ln(1+x^2+x^4)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$；

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x^2+x^4)+\ln(1+x^2+x^4)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[(1-x^2+x^4)(1+x^2+x^4)]}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^4+x^8)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4+x^8}{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}=2\lim_{x\to0}(1+x^4)=2.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})$；

解：因为$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$，即

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})\le\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}).$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}$，由夹逼极限准则得$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})=\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{2-x}{x})^{\frac{x}{\sin\pi x}}$；

解：$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{2-x}{x})^{\frac{x}{\sin\pi x}}=\lim\limits_{x\to1}(1+\dfrac{2-2x}{x})^{\frac{x}{\sin\pi x}}$.

由于$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-2x}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin\pi x}=2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\sin\pi(1-x)}=2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\pi(1-x)}=\dfrac{2}{\pi}$，故$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{2-x}{x})^{\frac{x}{\sin\pi x}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2+x})(\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{1-x})$；（2020-2021）

解：$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2+x})(\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{1-x})=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{1-x}\dfrac{x-1}{x^2+x}(\mathrm{e}^{2x}-1)$

$$=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{1-x}\frac{x-1}{x^2+x}\cdot2x=2\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{1-x}\frac{x-1}{x+1}=-2\mathrm{e}.$$

二、写出函数$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}$的表达式.（2017—2018）

解：如果 $x>0$， $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{tx}(x\mathrm{e}^{-tx}+1)}{\mathrm{e}^{tx}(\mathrm{e}^{-tx}+x)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{-tx}+1}{\mathrm{e}^{-tx}+x}=\dfrac{0+1}{0+x}=\dfrac{1}{x}$；

如果 $x=0$， $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{0+1}{1+0}=\lim\limits_{t\to+\infty}1=1$；

如果 $x<0$，则 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}=\dfrac{x+0}{1+0}=x$.

二、试求函数 $f(x)=\dfrac{x-x^2}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并说明间断点的类型. 如果是第一类间断点，说明是可去间断点还是跳跃间断点.（2017—2018）

解：间断点出现函数没有定义的点，即分母为零的点 $x=0, x=1, x=-1$.

因为
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x-x^2}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-x}{x^2-1}=-1,$$
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x-x^2}{-x(x^2-1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-x}{-x^2+1}=1.$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$， $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 都存在，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，但由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(1-x)}{x(x+1)(x-1)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$， $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 都存在，而且相等. 故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，为可去间断点.

注意到， $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)(1-x)}{x(1-x)}=0$，故 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$. 所以， $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点，且为无穷间断点.

三、试求函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x^2-3x+2|}$ 的间断点，并判断间断点类型（说明理由）.（2018—2019）

解：间断点出现函数没有定义的点，即 $x=0, x=1, x=2$.

因为
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\ln x}{-(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x\ln(1+x-1)}{-(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x}{-(x-2)}=1,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln(1+x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-2}=-1.$$

故 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ 都存在，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，但由于 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x^2-3x+2|}=0$ $\left(\because \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x|=0\right)$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 都存在，而且相等. 故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，为可去间断点.

注意到，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{|x^2-3x+2|\cdot x\ln|x|}{x\ln|x|}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$. 所以，$x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点，且为无穷间断点.

四、设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且有 $f(1)+f(2)=2$. 证明：至少存在一点 $\xi\in[1,2]$，使得 $f(\xi)=1$.（2018—2019）

证明：(1) 如果 $f(1)=1$，则 $f(2)=1$. 取 $\xi=1$ 或 $\xi=2$，都有 $f(\xi)=1$；

(2) 如果 $f(1)<1$，则 $f(2)>1$，$f(1)<1<f(2)$，由连续函数的介值定理，存在 $\xi\in[1,2]$，使得 $f(\xi)=1$；

(3) 如果 $f(1)>1$，则 $f(2)<1$，$f(2)<1<f(1)$，由连续函数的介值定理，存在 $\xi\in[1,2]$，使得 $f(\xi)=1$.

五、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(1)=0$. 试证：存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=x_0$.（2019—2020）

证明：作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

又 $F(0)=f(0)=1>0$，而 $F(1)=f(1)-1=-1<0$，由零点定理，存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$.

六、求函数 $y=\dfrac{|x^2+x|}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点，并判别其类型.（2020—2021）

解：间断点为 $x=0$ 和 $x=-1$ 点.

因为

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{\left|x^2+x\right|}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-(x^2+x)}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to -1^+}(-x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})=\mathrm{e}^{-1},$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{\left|x^2+x\right|}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to -1^-}x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=-\mathrm{e}^{-1},$$

即 $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{\left|x^2+x\right|}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\neq\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{\left|x^2+x\right|}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，故 $x=-1$ 为函数 $y=\frac{\left|x^2+x\right|}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的第一类间断点，且为跳跃间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left|x^2+x\right|}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to +\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{t}=+\infty$ （这里需要用到洛必达法则），因此，$x=0$ 为函数 $y=\frac{\left|x^2+x\right|}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点，为无穷间断点.

七、利用不等式：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ $(0<b<a)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.（2020—2021）.

证明：取 $a=k$，$b=k-1$，则 $\frac{1}{k}<\ln\frac{k}{k-1}<\frac{1}{k-1}$ ，$k=2,3,\cdots$.

于是，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}$$
$$=1+\ln(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1})=1+\ln n,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$
$$=\ln(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)>\ln n,$$

即

$$1=\frac{\ln n}{\ln n}<\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}<\frac{1+\ln n}{\ln n},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\ln n})=1$，由夹逼极限准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.