# 历届试题选（三）解答

一、求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x^{\frac{2}{3}})(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+x+1}})$；（2016—2017）

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x^{\frac{2}{3}})(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+x+1}})=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+x+1}}(x^2+x^{\frac{2}{3}})(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1}}-1)$

$$=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+x+1}}\lim_{x\to\infty}(x^2+x^{\frac{2}{3}})\cdot(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1})$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x^2+x^{\frac{2}{3}})\cdot\frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(1+x^{-\frac{4}{3}})\cdot\frac{1+\frac{1}{x}}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$$

$$=0\times1=0.$$

（2）$\lim\limits_{x\to0}(\frac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4})^{\frac{1}{x}}$；（2016—2017）

解：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{2^x-1+3^x-1+4^x-1+5^x-1}{4})^{\frac{1}{x}}$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1+3^x-1+4^x-1+5^x-1}{4}\cdot\frac{1}{x}$

$$=\frac{1}{4}(\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{5^x-1}{x})$$

$$=\frac{1}{4}(\ln2+\ln3+\ln4+\ln5)=\ln(2\cdot3\cdot4\cdot5)^{\frac{1}{4}}=\ln\sqrt[4]{120},$$

故$\lim\limits_{x\to0}(\frac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4})^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt[4]{120}}=\sqrt[4]{120}.$

二、求函数$y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.（2017—2018）

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})'$

$$=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}[e^x+\frac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}}(1+e^{2x})']$$

$$=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}[e^x+\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}e^{2x}]$$

$$=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}[\sqrt{1+e^{2x}}+e^x]\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

三、求函数 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+(\sec x)^x$ 的一阶导数. （2018—2019）

解: $$y'=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+(e^{x\ln\sec x})'$$

$$=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+e^{x\ln\sec x}(x\ln\sec x)'$$

$$=\frac{2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}+e^{x\ln\sec x}(\ln\sec x+\frac{x}{\sec x}(\sec x)')$$

$$=2\sqrt{1-x^2}+(\sec x)^x(\ln\sec x+\frac{x}{\sec x}\cdot\sec x\tan x)$$

$$=2\sqrt{1-x^2}+(\sec x)^x(\ln\sec x+x\tan x).$$

四、求函数 $y=x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arctan\frac{1-x}{1+x}$ 的一阶导数.（2019—2020）

解: $$y'=\sqrt{1+x^2}+x\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'+\frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2}(\frac{1-x}{1+x})'$$

$$=\sqrt{1+x^2}+x\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)')$$

$$+\frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\frac{-1\cdot(1+x)-1\cdot(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\frac{1}{(1+x^2)}$$

$$=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{1+x^2}$$

$$=2\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}.$$

五、求 $y=\arctan\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$ 的一阶导数.（2020—2021）

解：设 $u=\sqrt{1-x^2}$ ，则 $y=\arctan u+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+u}{1-u}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u})=\frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{1-u^2}=\frac{2}{(1+u^2)(1-u^2)},$$

于是，
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{(1+u^2)(1-u^2)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'$$

$$=\frac{2}{(1+1-x^2)(1-1+x^2)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$=\frac{2}{(x^3-2x)\sqrt{1-x^2}}.$$

六、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(1)=f(1)=2$， $f'(2)=3$，则 $y=f(f(x))$ 在 $x=1$ 处的导数为___6____.（2021—2022）

解： $y'=f'(f(x))f'(x)$，则 $y'\big|_{x=1}=f'(f(1))f'(1)=f'(2)f'(1)=3\times2=6.$

七、设 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$，求 $f'(0)$.（2017—2018）

解： $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x}\cos\dfrac{1}{x}$.

因为 $\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=0$，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=0$.

又因为 $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\le1$，故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x}\cos\dfrac{1}{x}=0$.

八、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^k\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ x^2+a, & x\ge0\end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一阶导数连续，数 $k,a$ 应如何取值？（2016—2017）

解：显然， $f(x)$ 在 $x\neq0$ 导数都存在且连续，且

$$f'(x)=\begin{cases} kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ 2x, & x>0 \end{cases}.$$

因此，要使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一阶导数连续，只需保证 $f(x)$ 应在 $x=0$ 处连续，可导，且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可.

因此，
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^k\sin\frac{1}{x}$$
存在，则 $k>0$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} x^k=0$，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$，故 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+a)=a=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$，即 $a=0$.

所以，
$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^k\sin\frac{1}{x}}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{k-1}\sin\frac{1}{x},$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=0.$$

由 $f'_-(0)=f'_+(0)$ 可得 $k>1$，且 $f'(0)=0$.

由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(kx^{k-1}\sin\frac{1}{x}-x^{k-2}\cos\frac{1}{x}\right)=f'(0)=0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}2x=0,$$
可得 $k>2$.

九、设函数 $f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2, & x>0 \\ \mathrm{e}^{ax}-1, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导，求 $a$，$b$.

(2018—2019)

解：因为 $f'(x)=\begin{cases} b\cos x, & x>0 \\ \mathrm{e}^{ax}-1, & x<0 \end{cases}$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都可导，因此只需考虑 $x=0$ 点的连续性和可导性.

由于 $$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(b(1+\sin x)+a+2)=a+b+2,$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(\mathrm{e}^{ax}-1)=0,$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，于是

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0),$$

即 $$a+b+2=0.$$

又 $$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{b(1+\sin x)+a+2-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{b\sin x}{x}=b,$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\mathrm{e}^{ax}-1-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax}{x}=a,$$

由 $f_+'(0)=f_-'(0)$，得 $a=b$，因为 $a+b+2=0$，故 $a=b=-1$.

十、设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+ax^2)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ b, & x=0\\ c+\sin x, & x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，试求常数 $a,b,c$.（2020—2021）

解： $f(x)$ 在 $x\neq0$ 处都是可导的，只需考虑 $x=0$ 处 $f(x)$ 的可导性.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

注意到，$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1+ax^2)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(1+ax^2)^{\frac{1}{x}}$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+} ax^2\cdot\dfrac{1}{x}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}(1+ax^2)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1$，即 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$.

而 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(c+\sin x)=c$，由 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0)$，可得

$$1=c=b.$$

又 $$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{ax^2\cdot\frac{1}{x}}{x}=a,$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1+\sin x-1}{x}=1.$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，即 $f_+'(0)=f_-'(0)$，故 $a=1$.

十一、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域上单调、二阶可导，其反函数为 $g(x)$. 已知 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，$f''(0)=3$，求 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的一阶导数和二阶导数.（2018—2019）

解：$\because g(f(x))=x$，则两边求导，得

$$g'(f(x))f'(x)=1.$$

令 $x=0$，则 $g'(1)\cdot 2=1$，故 $g'(1)=\dfrac{1}{2}$.

对式子 $g'(f(x))f'(x)=1$，两边对 $x$ 求导，得

$$g''(f(x))(f'(x))^2+g'(f(x))f''(x)=0,$$

令 $x=0$，得 $$g''(f(0))(f'(0))^2+g'(f(0))f''(0)=0,$$

即 $$g''(1)\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 3=0.$$

解得 $$g''(1)=-\frac{3}{8}.$$

十二、已知函数 $f(x)=\arctan x+\sin x$，求 $f^{(11)}(0)$.（2016—2017）

解：令 $g(x)=\arctan x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，即 $(1+x^2)g'(x)=1$.

两边求 $n$ 阶导数，即 $[(1+x^2)g'(x)]^{(n)}=0$.

由莱布尼茨公式，

$$g^{(n+1)}(x)(1+x^2)+ng^{(n)}(x)(1+x^2)'+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}g^{(n-1)}(x)(1+x^2)''=0,$$

即 $$g^{(n+1)}(x)(1+x^2)+ng^{(n)}(x)\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2!}g^{(n-1)}(x)\cdot 2=0.$$

令 $x=0$，$g^{(n+1)}(0)=-n(n-1)g^{(n-1)}(0)$.

所以，$g^{(11)}(0)=-10\cdot 9g^{(9)}(0)=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7g^{(7)}(0)=\cdots=-10!g'(0)$.

因为 $g'(0)=1$，所以，$g^{(11)}(0)=-10!$.

故 $$f^{(11)}(x)=g^{(11)}(x)+(\sin x)^{(11)}=g^{(11)}(x)+\sin(x+\frac{11}{2}\pi).$$

令 $x=0$，得 $$f^{(11)}(0)=g^{(11)}(0)+\sin\frac{11}{2}\pi=-10!-1.$$

十三、已知 $y=x^2\cos^2 x+\dfrac{1}{1+x}$，求 $y^{(n)}(0)$ $(n\ge 3)$.（2017—2018）

解：$y=x^2\cos^2 x+\dfrac{1}{1+x}=x^2\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x+\dfrac{1}{1+x}$.

记 $g(x)=x^2\cos 2x$，由莱布尼茨公式，得

$$g^{(n)}(x)=(\cos 2x)^{(n)}\cdot x^2+n(\cos 2x)^{(n-1)}\cdot(x^2)'+\frac{n(n-1)}{2}(\cos 2x)^{(n-2)}\cdot(x^2)''$$

$$g^{(n)}(x)=2^n\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)\cdot x^2+n\cdot 2^{n-1}\cos(2x+\frac{n-1}{2}\pi)\cdot 2x$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}\cos(2x+\frac{n-2}{2}\pi)\cdot 2.$$

令 $x=0$，得

$$g^{(n)}(0)=-2^{n-2}n(n-1)\cos\frac{n}{2}\pi.$$

注意到，$(\frac{1}{1+x})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$，故

$$y^{(n)}(0)=\frac{1}{2}g^{(n)}(0)+(\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}})\Big|_{x=0}=-2^{n-3}n(n-1)\cos\frac{n\pi}{2}+(-1)^n n!.$$

十四、设函数 $f(x)=x\ln(1-x^2)$，求 $f^{(11)}(0)$.（2019—2020）

解：记 $g(x)=\ln(1-x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$，则 $g'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x-1}$.

则 $$g^{(n)}(x)=(\frac{1}{1+x})^{(n-1)}+(\frac{1}{x-1})^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}.$$

所以，$g^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!-(n-1)!$.

由莱布尼茨公式，得

$$f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)\cdot x+ng^{(n-1)}(x)\cdot 1,$$

令 $x=0$，$f^{(n)}(0)=ng^{(n-1)}(0)=[(-1)^n-1]n(n-2)!$.

故 $$f^{(11)}(0)=[(-1)^{11}-1]\cdot 11\cdot 9!=-\frac{11!}{5}.$$

十五、设 $f(x)=(x^2+x+1)\cos^2\frac{x}{2}$，求 $f^{(20)}(0)$.（2020—2021）

解：$f(x)=(x^2+x+1)\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(x^2+x+1)(1+\cos x)$.

由莱布尼茨公式，

$$f^{(n)}(x)=(1+\cos x)^{(n)}\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)+n(1+\cos x)^{(n-1)}\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)'$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(1+\cos x)^{(n-2)}\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)''$$

$$=\cos(x+\frac{n\pi}{2})\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)+n\cos(x+\frac{(n-1)\pi}{2})\cdot\frac{1}{2}(2x+1)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cos(x+\frac{(n-2)\pi}{2})\cdot 1$$

故 $$f^{(n)}(0)=\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{n}{2}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2}.$$

因此，$$f^{(10)}(0)=\frac{1}{2}\cos 5\pi+5\cos\frac{9\pi}{2}+\frac{10\cdot 9}{2}\cos 4\pi$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{90}{2}=\frac{89}{2}.$$

十六、设函数 $f(x)=(x^2+x+1)\cos 2x$，求 $f^{(8)}(0)$.（2021—2022）

解：由莱布尼茨公式，得

$$f^{(n)}(x)=(x^2+x+1)(\cos 2x)^{(n)}+n(x^2+x+1)'(\cos 2x)^{(n-1)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}(x^2+x+1)''(\cos 2x)^{(n-2)}$$
$$=(x^2+x+1)\cdot 2^n\cos(2x+\frac{n\pi}{2})+n(2x+1)\cdot 2^{n-1}\cos(2x+\frac{(n-1)\pi}{2})$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot 2^{n-2}\cos(2x+\frac{(n-2)\pi}{2}).$$

故 $$f^{(n)}(0)=2^n\cos\frac{n\pi}{2}+n\cdot 2^{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+n(n-1)\cdot 2^{n-2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2}.$$

因此，

$$f^{(8)}(0)=2^8\cos 4\pi+8\cdot 2^7\cos\frac{7\pi}{2}+56\cdot 2^6\cos 3\pi=2^8-7\cdot 2^9=-13\cdot 2^8=-3328.$$

十七、已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2})=2$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.（2021—2022）

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2})=2$，由极限与无穷小的关系，$x\neq 0$ 时，我们有

$$\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}=2+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 为 $x\to 0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

于是，$$f(x)=1+\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}+2x+x\alpha(x).$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}[1+\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}+2x+x\alpha(x)]$$

$$=1+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=1+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot2x}{x}=2.$$

又 $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}+2x+x\alpha(x)-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}-1}{x}+\lim_{x\to0}(2+\alpha(x))$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}+2$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+2x}-1-x)(\sqrt{1+2x}+1+x)}{x^2(\sqrt{1+2x}+1+x)}+2$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1+2x}+1+x)}+2$$

$$=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}.$$