与定积分相关的证明题

一、 积分不等式的证明：

要证明含有积分限 a 和 b 的不等式，常将 a 或 b 设为变量，构造辅助函数，利用单调性加以证明. 注意：在证明过程中，经常用到积分中值定理或推广到积分中值定理.

积分中值定理： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

推广的积分中值定理： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明： 做辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),$$

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

例 1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加，试证：对于任何的 $b>a>0$，有

$$b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x < 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \qquad (2016—2017)$$

分析： 将不等式改写为小于 0 或大于 0 的形式：

$$b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x < 0,$$

然后左边将 a 或 b 改写成 t，构造辅助函数

$$\varphi(t)=t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x..$$

证明： 令 $\varphi(t)=t\int_0^t f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x.$

因为 $$\varphi'(t)=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x + tf(t) - 2tf(t)$$

$$=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x - tf(t)$$

由推广的积分中值定理，存在 $\xi\in(0,t)$，使得 $\int_0^t f(x)\mathrm{d}x = tf(\xi)$.

于是，当$t>0$时，$\varphi'(t)=t(f(\xi)-f(t))$.

又因为 $f(x)$ 在区间$[0,+\infty)$上单调增加，且$0<\xi<t$，故当$t>0$时，$\varphi'(t)>0$.

所以，$\varphi(t)$在$[0,+\infty)$上单调增加，即当$t>0$时，$\varphi(t)>\varphi(0)=0$.

取$t=b$，则有，$\varphi(b)=b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x-a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x>0$，即

$$\varphi(b)=b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x-a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x>2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

例 2. 设 $f(x)$ 为$[a,b]$上的连续的单调增加函数，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x>\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(2017—2018)

分析： 将$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x>\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$改写为

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

将左边的b改写为变量t，构造辅助函数$\varphi(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$.

证明： 令$\varphi(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,\ t\in[a,b]$.

得
$$\varphi'(t)=tf(t)-\frac{a+t}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

由推广的积分中值定理，当$a<t\le b$时，存在$\xi\in(a,t)$，使得$\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(t-a)$.

于是，当$a<t\le b$时，$\varphi'(t)=\frac{t-a}{2}(f(t)-f(\xi))$.

因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调增加，所以，当$a<t\le b$时，$\varphi'(t)>0$.

于是，$\varphi(t)$在$[a,b]$上单调增加，因此，$\varphi(b)>\varphi(a)=0$，即

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x>\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 3. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，证明 Cauchy—Schwartz 不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.\qquad (2020—2021)$$

分析： 要证明的式子$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$改写成

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\le 0.$$

将b改为t，作辅助函数

$$\varphi(t)=(\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2-\int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^t g^2(x)\mathrm{d}x..$$

证明： 作辅助函数$\varphi(t)=(\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2-\int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^t g^2(x)\mathrm{d}x.$

因为
$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=2(\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x)(\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x)'\\&\quad-(\int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x)'\int_a^t g^2(x)\mathrm{d}x-(\int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x)(\int_a^t g^2(x)\mathrm{d}x)'\\&=2(\int_a^t f(x)g(x)\mathrm{d}x)f(t)g(t)-f^2(t)(\int_a^t g^2(x)\mathrm{d}x)-g^2(t)(\int_a^t f^2(x)\mathrm{d}x)\\&=\int_a^t 2f(x)g(x)f(t)g(t)\mathrm{d}x-\int_a^t f^2(t)g^2(x)\mathrm{d}x-\int_a^t f^2(x)g^2(t)\mathrm{d}x\\&=-\int_a^t[f^2(t)g^2(x)-2f(x)g(x)f(t)g(t)+f^2(x)g^2(t)]\mathrm{d}x\\&=-\int_a^t[f(t)g(x)-f(x)g(t)]^2\mathrm{d}x\le 0.\end{aligned}$$

即$\varphi(t)$单调不增，即$\varphi(b)\le\varphi(a)=0$.

于是，
$$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2-\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\le 0.$$

故
$$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

例 4. 设$f(x)$为区间$[a,b]$上单调增加的连续函数，证明：对于任意的$x\in[a,b]$，都有

$$(b-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\le(x-a)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.\quad(2019—2020)$$

分析： 要证明的式子$(b-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\le(x-a)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$改写成

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

将左边的函数作为辅助函数$\varphi(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，问题就变成$a\le x\le b$时，$\varphi(x)\le\varphi(b)$.

因此，只需证明$\varphi(x)$在$[a,b]$上单调增加.

证明： 令$\varphi(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\varphi'(x)=\frac{(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t)'(x-a)-(x-a)'\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}=\frac{(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}.$$

因为$f(x)$为连续函数，由积分中值定理，对$a<x<b$，存在$a<\xi<x$，使得

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)(x-a),$$

即 $\varphi'(x)=\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-a}>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

因此，当 $a\le x<b$ 时，都有 $\varphi(x)<\varphi(b)$. $x=b$ 时，$\varphi(x)=\varphi(b)$.

故当 $a\le x<b$ 时，都有 $\varphi(x)\le\varphi(b)$，即 $\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\le\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，也即

$$(b-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\le(x-a)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

例 5. 设非负函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a](a>0)$ 上连续，且对于任意给定的 $x\in[0,a]$，均有 $f(x)\le\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，试证：$f(x)\equiv 0,\forall x\in[0,a]$.（2016—2017）

分析： $f(x)\le\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$ 可改写成

$$f(x)-\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\le 0 \Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\le 0$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x)'\le 0.$$

故可作辅助函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$.

证明： 作辅助函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，则

$$\varphi'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-x}f(x)=\mathrm{e}^{-x}[f(x)-\int_0^x f(x)\mathrm{d}x]\le 0.$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调不增，于是，对于任意的 $x\in[0,a]$，则有 $\varphi(x)\le\varphi(0)=0$，即对于任意的 $x\in[0,a]$，有 $\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\le 0$.

另一方面，由 $f(x)\ge 0$ 可得 $\mathrm{e}^{-x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\ge 0,\ x\in[0,a]$.

所以，对任意的 $x\in[0,a]$，$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=0.$

两边求导，$(\int_0^x f(x)\mathrm{d}x)'=0$，于是对任意的 $x\in[0,a]$，$f(x)=0.$

例 6. 设非负函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$.（2018—2019）

证明一： 设 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $\varphi'(x)=f(x)\ge 0,\ x\in[a,b]$.

故 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减，即 $0=\varphi(a)\le\varphi(x)\le\varphi(b)=0,\ x\in[a,b]$，

因此，$\varphi(x)=0,\ x\in[a,b]$.

由$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=0$两边求导，得 $f(x)=0, x\in[a,b]$.

证明二： 用反证法. 设结论不成立，即存在$x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)\neq 0$. 不妨设 $f(x_0)>0$.

于是，由 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0$.

由极限的保号性，存在包含x_0的区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得 $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$， $x\in[\alpha,\beta]$.

由 $f(x)\geq 0$，可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\geq\frac{1}{2}f(x_0)(\beta-\alpha)>0.$$

与已知条件$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.

故对任意$x\in[a,b]$，都有 $f(x)=0$.

二、罗尔中值定理和积分中值定理的应用

常遇到的问题： 存在ξ，使得 $f'(\xi)+f(\xi)g(\xi)=0$.

辅助函数的构造： $\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}$，因为

$$\varphi'(x)=f'(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}+f(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}\cdot g(x)=\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}[f'(x)+f(x)g(x)]$$

例 7. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，并且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，证明在$(0,\pi)$上存在两个不同的点$x=\xi_1$和$x=\xi_2$，使得 $f'(x)+2f(x)\cot x=0$. （2019—2020）

分析： 令$g(x)=2\cot x$，

$$\int g(x)\mathrm{d}x=2\int\cot x\mathrm{d}x=2\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}\sin x=2\ln|\sin x|+C.$$

可设辅助函数$\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}=f(x)e^{2\ln|\sin x|}=f(x)\mathrm{e}^{\ln\sin^2 x}=f(x)\sin^2 x$.

证明： 因为函数 $f(x)$ 在区间$[0,\pi]$上连续，由推广的积分中值定理，存在$c\in(0,\pi)$，使得

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\pi f(c)。$$

由$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$可得 $f(c)=0$.

作辅助函数$\varphi(x)=f(x)\sin^2 x$，由函数 $f(x)$ 在区间$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，知$\varphi(x)$

在区间$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导.

又$\varphi(0)=\varphi(c)=\varphi(\pi)=0$，由罗尔中值定理，存在$0<\xi_1<c<\xi_2<\pi$，使得

$$\varphi'(\xi_1)=f'(\xi_1)\sin^2\xi_1+f(\xi_1)\cdot 2\sin\xi_1\cos\xi_1=0,$$

$$\varphi'(\xi_2)=f'(\xi_2)\sin^2\xi_2+f(\xi_2)\cdot 2\sin\xi_2\cos\xi_2=0.$$

即 $$f'(\xi_1)+2\cot\xi_1 f(\xi_1)=0,\quad f'(\xi_2)+2\cot\xi_2 f(\xi_2)=0.$$

得证.

例 8. 设$f(x)$可导，$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x$，证明：$\exists\ \xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.(2014—2015)

证明： 因$f(x)$可导，则$f(x)$连续.

由推广的积分中值定理，存在$\eta\in(0,\frac{1}{2})$，使得$\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=f(\eta)\cdot(\frac{1}{2}-0)=\frac{1}{2}f(\eta)$.

由$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x$可得$f(1)=f(\eta)$.

因为$f(x)$可导，由罗尔中值定理，存在$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.

例 9. 设函数$f(x)$是$[0,3]$上的连续，在$(0,3)$内可导，且有$\frac{1}{3}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=f(3)$，试证：必有$\xi\in(0,3)$，使$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi)$．（2013—2014）

分析： 要证明的等式$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi)$改写成$f'(\xi)+\frac{1}{\xi}f(\xi)=0$.

$$g(x)=\frac{1}{x},\quad \int g(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C.$$

构造辅助函数$\varphi(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}=f(x)\mathrm{e}^{\ln x}=xf(x)$.

证明： 构造辅助函数$\varphi(x)=xf(x)$.

因为函数$f(x)$是$[0,1]$上的连续，由推广的积分中值定理，存在$\eta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\eta f(\eta).$$

由$\frac{1}{3}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=f(3)$得$\eta f(\eta)=3f(3)$，即$\varphi(\eta)=\varphi(3)$.

因为函数$f(x)$是$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，故函数$\varphi(x)$是$[\eta,3]$上连续，在$(\eta,3)$内可

导，且$\varphi(\eta)=\varphi(3)$，由罗尔中值定理，存在$\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得$\varphi'(\xi)=0$，即

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0,$$

即
$$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi).$$

三、其他例子

例 10. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$，并由此计算

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x.\quad(2017—2018)$$

分析： 将要证明的式子$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$看成$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t$.

从中可以看出令$x=a+b-t$.

证明： 令$x=a+b-t$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

利用该式子，有

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}{(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)[\pi-2(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)]}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)[\pi-2(\frac{\pi}{2}-x)]}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{(\frac{\pi}{2}-x)\cdot 2x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x,$$

即
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{2x}+\frac{1}{\pi-2x})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2\pi}\ln|\pi-2x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2\pi}\ln 2-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\ln 2.$$

例 11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，其值域为 I . 函数 $\varphi(u)$ 在 I 上二阶可导，且对于 I 上任意一点 u 都有 $\varphi''(u)\ge 0$. 证明：Jensen 不等式：

$$\varphi(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))\mathrm{d}x.\qquad(2018—2019)$$

证明： 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，由推广的积分中值定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使

$$f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由泰勒公式，我们有

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+\varphi'(t_0)(t-t_0)+\frac{\varphi''(\xi)}{2!}(t-t_0)^2，\xi \text{ 介于 } t \text{ 和 } t_0 \text{ 之间.}$$

取 $t=f(x)$， $t_0=f(x_0)$，于是，

$$\varphi(f(x))=\varphi(f(x_0))+\varphi'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))+\frac{\varphi''(\xi)}{2!}(f(x)-f(x_0))^2,$$

其中 ξ 介于 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 之间.

因为 $\varphi''(\xi)\ge 0$，则

$$\varphi(f(x))\ge\varphi(f(x_0))+\varphi'(f(x_0))(f(x)-f(x_0)),$$

两边积分，得

$$\int_a^b\varphi(f(x))\mathrm{d}x\ge\int_a^b\varphi(f(x_0))\mathrm{d}x+\int_a^b\varphi'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))\mathrm{d}x$$

$$=(b-a)\varphi(f(x_0))+\varphi'(f(x_0))[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(x_0)(b-a)]$$

$$=(b-a)\varphi(f(x_0)).\qquad(\because f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)$$

故 $$\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))\mathrm{d}x\ge\varphi(f(x_0))=\varphi(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x).$$

例 12. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且 $f(x)>0$，令 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$，证明：$F(x)$

在区间$(0,+\infty)$上单调增加.　(2021—2022)

证明： 因为

$$F'(x)=\frac{(\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t)'(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)-(\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t)(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)'}{(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^2}$$

$$=\frac{xf(x)(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)-(\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t)f(x)}{(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^2}$$

$$=\frac{f(x)[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t]}{(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^2}$$

$$=\frac{f(x)\cdot\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t)^2},$$

利用推广的积分中值定理，对于任意的$x\in(0,+\infty)$，存在$\xi\in(0,x)$，使得

$$\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=(x-\xi)f(\xi)x>0,$$

于是，$F'(x)>0$，即$F(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调增加.