厦门大学《微积分 II-1》课程期末试卷

试卷类型：(A 卷)　　考试日期　2017.1.11

姓名：＿＿＿＿＿＿　　　　学号：＿＿＿＿＿＿＿＿

得　分	
评阅人	

一、求下列极限（每小题 5 分，共 20 分）：

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{arc\cot x}$.

解：由罗必塔法则，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{arc\cot x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{1+x}}=\lim\dfrac{1+x^2}{x(1+x)}=1$。

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)-\sin x}{x^2}$.

解：由于 $\ln(1+x+x^2)=(x+x^2)-\dfrac{1}{2}(x+x^2)^2+o(x^2)=x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，　$\sin x=x+o(x^2)$，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}dx$.

解：由于 $0\le\dfrac{x^n}{1+x}\le x^n, x\in[0,1]$，从而 $0\le\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}dx\le\int_0^1x^ndx=\dfrac{1}{n+1}$。由夹逼定理知

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}dx=0$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\int_0^x e^t dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

解：由罗必塔法则，

$$\lim_{x\to0}\frac{(\int_0^x e^t dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim_{x\to0}\frac{2e^x\int_0^x e^t dt}{xe^{2x^2}}=\lim\frac{2e^x}{e^{2x^2-x}+x(4x-1)e^{2x^2-x}}=2.$$

得　分	
评阅人	

二、计算下列积分（每小题 5 分，共 30 分）:

1. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

解：$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}\tan x + \frac{x}{2} + C$.

2. $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

解

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)}d\sqrt{x} = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x}) = (\arctan\sqrt{x})^2 + C.$$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

解：令 $x = a\sin t$，则 $dx = a\cos t dt$。

故 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int a^2\sin^2 t dt = a^2\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = a^2\int \frac{1}{2}dt - \frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2}t - \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C$。

按照 $\sin t = \frac{x}{a}$ 做辅助三角形 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C$.

4. $\int e^{2x}(\tan x+1)^2 dx$

解：$\int e^{2x}(\tan x+1)^2 dx = \int e^{2x}(\tan^2 x + 2\tan x + 1)dx = \int e^{2x}(\sec^2 x + 2\tan x)dx$

$= \int e^{2x}d\tan x + 2\int e^{2x}\tan x dx = e^{2x}\tan x - 2\int e^{2x}\tan x dx + 2\int e^{2x}\tan x dx$

$= e^{2x}\tan x + C$.

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{|x|\sin x}{1+x^4}+1\right)dx$

解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{|x|\sin x}{1+x^4}+1\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\frac{|x|\sin x}{1+x^4}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$,

注意到 $\frac{1}{1+\cos x}\frac{|x|\sin x}{1+x^4}, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 为奇函数，从而 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\frac{|x|\sin x}{1+x^4}dx=0$。

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}=2$.

6. $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xdx$

解： $\int e^{-x}\sin xdx==\int -\sin xde^{-x}=-\sin xe^{-x}+\int e^{-x}\cos xdx$

$=-\sin xe^{-x}-\int\cos xde^{-x}=-\sin xe^{-x}-\cos xe^{-x}-\int e^{-x}\sin xdx$，

从而 $\int e^{-x}\sin xdx==\frac{1}{2}[-\sin xe^{x}-\cos xe^{-x}]+C$，

所以 $\int_0^A e^{-x}\sin xdx=\frac{1}{2}[-\sin Ae^{-A}-\cos Ae^{-A}]+\frac{1}{2}$。由于 $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xdx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x}\sin xdx$，

$\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xdx=\frac{1}{2}$.

三、解答与证明题（每题 6 分，共 36 分）

得　分	
评阅人	

1. $\int f'(\sqrt{x})dx=x(e^{\sqrt{x}}+1)+c$，求 $f(\sin x)$

解： 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2, dx=2tdt$，

$\int f'(\sqrt{x})dx=\int f'(t)2tdt=2\int tdf(t)=2tf(t)-2\int f(t)dt$。从而原方程可变形为

$2tf(t)-2\int f(t)dt=t^2(e^t+1)+c$。方程两边同时对 t 求导数可得，

$f'(t)=1+e^t+\frac{1}{2}te^t$。从而 $f(t)=t+\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}te^t+c$， $f(\sin x)=\sin x+\frac{1}{2}e^{\sin x}+\frac{1}{2}\sin xe^{\sin x}$.

2. 求曲线 $y=x-2\arctan x$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点。

解： $y'(x)=\frac{x^2-1}{1+x^2}$，从而递增的区间为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，递减区间为 $[-1,1]$。计算可得

$y''(x)=\frac{4x}{(1+x^2)^2}$， $y''(-1)<0$，故 -1 是极大值点，极大值为 $-1+\frac{\pi}{2}$， $y''(1)>0$，故 -1 是极小值点，极大值为 $1-\frac{\pi}{2}$。凹区间为 $[0,+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,0]$，拐点为 $(0,0)$。

3. 已知 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^{2x}xf(t)dt+2\int_x^0 tf(2t)dt=2x^3(x-1)$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最值。

解： 由题意知， $x\int_0^{2x} f(t)dt + 2\int_x^0 tf(2t)dt = 2x^3(x-1)$ ，方程两边同时对 x 求导数，得 $\int_0^{2x} f(t)dt = 8x^3 - 6x^2$ 。两边同时求导得 $f(2x) = 12x^2 - 6x$， 故 $f(x) = 3x^2 - 3x, x \in [0,2]$ 。$f'(x) = 6x - 3,$ 从而唯一驻点为 $\frac{1}{2}$ 。计算可得 $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}, f(2) = 6$，所以最大、最小分别为 6 和 $\frac{-3}{4}$ 。

4. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} dt$ ， 求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$

解： 由 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} dt$ 得， $f'(x) = e^{-x^2+2x}$ 。

$\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)d(\frac{1}{3}(x-1)^3) = -\int_0^1 \frac{1}{3}(x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx$ ， 令 $x-1=t,$ 则

$-\int_0^1 \frac{1}{3}(x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx = -\frac{1}{3}\int_{-1}^0 t^3 e^{-t^2+1} dt = -\frac{e}{6}\int_{-1}^0 t^2 e^{-t^2} dt^2$。 令 $t^2 = u$ ， 则

$-\frac{e}{6}\int_{-1}^0 t^2 e^{-t^2} dt^2 = -\frac{e}{6}\int_0^1 ude^{-u} = \frac{e-2}{6}$ 。

5. 设 $f(x)$ 有连续的二阶连续导数， $f(\pi) = 2$， $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]\sin x = 5$， 求 $f(0)$ 。

解： $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]\sin xdx = \int_0^{\pi} f(x)\sin xdx + \int_0^{\pi} \sin xdf'(x)$

$= \int_0^{\pi} f(x)\sin xdx - \int_0^{\pi} f'(x)\cos xdx = \int_0^{\pi} f(x)\sin xdx - \int_0^{\pi} \cos xdf(x)$

$= f(\pi) + f(0) = 5$ 。 由 $f(\pi) = 2$， 得 $f(0) = 3$ 。

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， 在 $(0,1)$ 上可导， $f(0) = 0$， $f(1) = 1$， 证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$， 使 $f(\xi) + f'(\xi) = e^{1-\xi}$ 。

证明：令 $F(x) = e^x f(x),$ 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理，故存在 $\xi \in (0,1),$ 使得 $\frac{F(1)-F(0)}{1} = F'(\xi)$ 。 即 $e = e^{\xi} f(\xi) + e^{\xi} f'(\xi)$， $f(\xi) + f'(\xi) = e^{1-\xi}$ 。

四、证明题 （每题 7 分，共 14 分））

得　分	
评阅人	

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续且单调减少，若 $0 < a < b$ ，

证明： $a\int_0^b f(x)dx < b\int_0^a f(x)dx.$

证明： $b\int_0^a f(x)dx - a\int_0^b f(x)dx = b\int_0^a f(x)dx - a\int_0^a f(x)dx - a\int_a^b f(x)dx$

$= (b-a)\int_0^a f(x)dx - a\int_a^b f(x)dx$ 。由改进的积分中值定理，知存在 $\xi_1 \in (0,a), \xi_2 \in (a,b)$，使得 $(b-a)\int_0^a f(x)dx = a(b-a)f(\xi_1), a\int_a^b f(x)dx = a(b-a)f(\xi_2)$。由 $f(x)$ 递减性，知结论成立。

2. 证明：$\sin x+\tan x>2x$， $x\in(0,\frac{\pi}{2})$。

证明：令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$,**则** $f'(x)=\frac{\cos^3 x-2\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$。

令 $g(x)=\cos^3 x-2\cos^2 x+1$**，则** $g'(x)=-3\sin x\cos^2 x+4\cos x\sin x=\sin x\cos x(4-3\cos x)$。

由于 $g'(x)>0$, 从而 $g(x)$ 单调递增， $g(x)>g(0)=0, x\in(0,\frac{\pi}{2})$。由此 $f'(x)>0$**，从而** $f(x)$ **单调递增，故** $f(x)>f(0)=0$,**即** $\sin x+\tan x>2x$。