历届试卷中高阶导数的计算方法

一、常用函数的高阶导数公式

（1）$(\mathrm{e}^{ax})^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax}$；

（2）$(\sin ax)^{(n)}=a^n\sin(ax+\frac{n\pi}{2})$；$(\cos ax)^{(n)}=a^n\cos(ax+\frac{n\pi}{2})$

（3）$(\ln(x+a))^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$；$(\ln(a-x))^{(n)}=-\frac{(n-1)!}{(a-x)^n}$；

（4）$(\frac{1}{x+a})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$；$(\frac{1}{a-x})^{(n)}=\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$.

二、莱布尼茨公式：

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

三、arctan$x$ 的高阶导数求法：

令 $y=\arctan x$，则 $y'=\frac{1}{1+x^2}$，于是，$(1+x^2)y'=1$.

利用莱布尼茨公式，两边求 $n-1$ 阶导数，即可得到 $y^{(n)}$ 的递推式，进而求出 $y^{(n)}$.

四、需要用到的三角公式：

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}，\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

遇到 $\sin^k x$，$\cos^k x$ 时，需要用到上述公式进行降幂处理，直到讲到一次幂为止.

五、例题：

1. 已知函数 $f(x)=\arctan x+\sin x$，求 $f^{(11)}(0)$.（2016—2017）

解：令 $g(x)=\arctan x$，则 $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，即 $(1+x^2)g'(x)=1$.

两边求 n 阶导数，即 $[(1+x^2)g'(x)]^{(n)}=0$.

由莱布尼茨公式，

$$g^{(n+1)}(x)(1+x^2)+ng^{(n)}(x)(1+x^2)'+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}g^{(n-1)}(x)(1+x^2)''=0,$$

即 $$g^{(n+1)}(x)(1+x^2)+ng^{(n)}(x)\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2!}g^{(n-1)}(x)\cdot 2=0.$$

令 $x=0$，$g^{(n+1)}(0)=-n(n-1)g^{(n-1)}(0)$.

所以，$g^{(11)}(0)=-10\cdot 9g^{(9)}(0)=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7g^{(7)}(0)=\cdots=-10!g'(0)$.

因为 $g'(0)=1$，所以，$g^{(11)}(0)=-10!$.

故 $$f^{(11)}(x)=g^{(11)}(x)+(\sin x)^{(11)}=g^{(11)}(x)+\sin(x+\frac{11}{2}\pi).$$

令 $x=0$，得 $$f^{(11)}(0)=g^{(11)}(0)+\sin\frac{11}{2}\pi=-10!-1.$$

2. 已知 $y=x^2\cos^2 x+\dfrac{1}{1+x}$，求 $y^{(n)}(0)$ $(n\geq 3)$.（2017—2018）

解：$y=x^2\cos^2 x+\dfrac{1}{1+x}=x^2\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x+\dfrac{1}{1+x}$.

记 $g(x)=x^2\cos 2x$，由莱布尼茨公式，得

$$g^{(n)}(x)=(\cos 2x)^{(n)}\cdot x^2+n(\cos 2x)^{(n-1)}\cdot(x^2)'+\frac{n(n-1)}{2}(\cos 2x)^{(n-2)}\cdot(x^2)''$$

$$g^{(n)}(x)=2^n\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)\cdot x^2+n\cdot 2^{n-1}\cos(2x+\frac{n-1}{2}\pi)\cdot 2x$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}\cos(2x+\frac{n-2}{2}\pi)\cdot 2.$$

令 $x=0$，得

$$g^{(n)}(0)=-2^{n-2}n(n-1)\cos\frac{n}{2}\pi.$$

注意到，$(\dfrac{1}{1+x})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$，故

$$y^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)+\left.(\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}})\right|_{x=0}=-2^{n-2}n(n-1)\cos\frac{n\pi}{2}+(-1)^n n!.$$

3. 设函数 $f(x)=x\ln(1-x^2)$，求 $f^{(11)}(0)$.（2019—2020）

解：记 $g(x)=\ln(1-x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x-1}$.

则 $$g^{(n)}(x)=(\frac{1}{1+x})^{(n-1)}+(\frac{1}{x-1})^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}.$$

所以，$g^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!-(n-1)!$.

由莱布尼茨公式，得

$$f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)\cdot x+ng^{(n-1)}(x)\cdot 1,$$

令 $x=0$， $f^{(n)}(0)=ng^{(n-1)}(0)=[(-1)^n-1]n(n-2)!$.

故 $$f^{(11)}(0)=[(-1)^{11}-1]\cdot 11\cdot 9!=-\frac{11!}{5}.$$

4. 设 $f(x)=(x^2+x+1)\cos^2\dfrac{x}{2}$，求 $f^{(20)}(0)$.（2020—2021）

解：$f(x)=(x^2+x+1)\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)(1+\cos x)$.

由莱布尼茨公式，

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=(1+\cos x)^{(n)}\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)+n(1+\cos x)^{(n-1)}\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)'\\&\quad+\frac{n(n-1)}{2}(1+\cos x)^{(n-2)}\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)''\\&=\cos(x+\frac{n\pi}{2})\cdot\frac{1}{2}(x^2+x+1)+n\cos(x+\frac{(n-1)\pi}{2})\cdot\frac{1}{2}(2x+1)\\&\quad+\frac{n(n-1)}{2}\cos(x+\frac{(n-2)\pi}{2})\cdot 1\end{aligned}$$

故 $$f^{(n)}(0)=\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{n}{2}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2}.$$

因此，$$\begin{aligned}f^{(10)}(0)&=\frac{1}{2}\cos 5\pi+5\cos\frac{9\pi}{2}+\frac{10\cdot 9}{2}\cos 4\pi\\&=-\frac{1}{2}+\frac{90}{2}=\frac{89}{2}.\end{aligned}$$

5. 设函数 $f(x)=(x^2+x+1)\cos 2x$，求 $f^{(8)}(0)$.（2021—2022）

解：由莱布尼茨公式，得

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=(x^2+x+1)(\cos 2x)^{(n)}+n(x^2+x+1)'(\cos 2x)^{(n-1)}\\&\quad+\frac{n(n-1)}{2}(x^2+x+1)''(\cos 2x)^{(n-2)}\\&=(x^2+x+1)\cdot 2^n\cos(2x+\frac{n\pi}{2})+n(2x+1)\cdot 2^{n-1}\cos(2x+\frac{(n-1)\pi}{2})\\&\quad+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot 2^{n-2}\cos(2x+\frac{(n-2)\pi}{2}).\end{aligned}$$

故 $$f^{(n)}(0)=2^n\cos\frac{n\pi}{2}+n\cdot 2^{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+n(n-1)\cdot 2^{n-2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2}.$$

因此，

$$f^{(8)}(0)=2^8\cos 4\pi+8\cdot 2^7\cos\frac{7\pi}{2}+56\cdot 2^6\cos 3\pi=2^8-7\cdot 2^9=-13\cdot 2^8=-3328.$$