历届试题选（三）

一、求下列极限:

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x^{\frac{2}{3}})(\mathrm{e}^{\frac{2}{x^2}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+x+1}})$；（2016—2017）

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4})^{\frac{1}{x}}$；（2016—2017）

二、求函数 $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.（2017—2018）

三、求函数 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+(\sec x)^x$ 的一阶导数. （2018—2019）

四、求函数 $y=x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ 的一阶导数.（2019—2020）

五、求 $y=\arctan\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$ 的一阶导数.（2020—2021）

六、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(1)=f(1)=2$， $f'(2)=3$，则 $y=f(f(x))$ 在 $x=1$ 处的导数为__________.（2021—2022）

七、设 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$，求 $f'(0)$.（2017—2018）

八、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^k\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ x^2+a, & x\geq 0\end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一阶导数连续，数 k,a 应如何取值？（2016—2017）

九、设函数 $f(x)=\begin{cases}b(1+\sin x)+a+2, & x>0\\ \mathrm{e}^{ax}-1, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导，求 a，b.（2018—2019）

十、设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+ax^2)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ b, & x=0\\ c+\sin x, & x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,试求常数 a,b,c.（2020—2021）

十一、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域上单调、二阶可导，其反函数为 $g(x)$. 已知 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，$f''(0)=3$，求 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的一阶导数和二阶导数.（2018—2019）

十二、已知函数 $f(x)=\arctan x+\sin x$，求 $f^{(11)}(0)$.（2016—2017）

十三、已知 $y=x^2\cos^2 x+\dfrac{1}{1+x}$，求 $y^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$.（2017—2018）

十四、设函数 $f(x)=x\ln(1-x^2)$，求 $f^{(11)}(0)$.（2019—2020）

十五、设 $f(x)=(x^2+x+1)\cos^2\dfrac{x}{2}$，求 $f^{(20)}(0)$.（2020—2021）

十六、设函数 $f(x)=(x^2+x+1)\cos 2x$，求 $f^{(8)}(0)$.（2021—2022）

十七、已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}\right)=2$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.（2021—2022）