极限的计算方法

一、利用极限四则运算法则

对函数做某些恒等变形，然后运用极限四则运算法则进行计算。常用的变形或化简有：分式的约分或通分、分式的分解、分子或分母的有理化，三角函数的恒等变形等

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)$；（2018—2019 学年）

解： $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

注：本题是利用分子有理化进行变形的.

（2） $\lim\limits_{x\to-1}(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3})$；（2019—2020 学年）

解： $\lim\limits_{x\to-1}(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3})=\lim\limits_{x\to-1}(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{(1+x)(1-x+x^2)})$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{(1+x)(1-x+x^2)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{1-x+x^2}=-1.$$

注：本题是通过通分，然后进行因式分解变形后，求得极限的.

二、幂指函数极限的计算

幂指函数：$(u(x))^{v(x)}$，其中$u(x)$， $v(x)$是x的函数，不是常数.

幂指函数极限的计算方法：

（1）利用重要极限：$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}.$

（2）通常是利用$(u(x))^{v(x)}=\mathrm{e}^{\ln(u(x))^{v(x)}}=\mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))}$，通过计算$v(x)\ln(u(x))$的极限，得到幂指函数的极限.

常见的形式是$\lim u(x)=1$， $\lim v(x)=\infty$的情形.

可以用下列方法计算:

$$\lim(u(x))^{v(x)}=\lim \mathrm{e}^{\ln(u(x))^{v(x)}}=\mathrm{e}^{\lim v(x)\ln(u(x))},$$

因为$\lim v(x)\ln u(x)=\lim v(x)\ln(1+u(x)-1)=\lim v(x)(u(x)-1)$，只要计算$\lim v(x)(u(x)-1)$，就可以得到$\lim(u(x))^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim v(x)(u(x)-1)}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}$；(2021—2022 学年)

解一: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2n})^{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\dfrac{1}{2n})^{-2n}]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

解二: $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{4n\ln(1-\frac{1}{2n})}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}4n\ln(1-\dfrac{1}{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}4n\cdot(-\dfrac{1}{2n})=-2$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}=\mathrm{e}^{-2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$；(2017—2018 学年)

解: 因为$\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan^2 x-1)\cdot\dfrac{1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\tan^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{x\cdot x}=2$,

故$\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\mathrm{e}^2$.

(5) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{2-x}{x})^{\frac{x}{\sin\pi x}}$

解: 由于$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{2-x}{x}-1)\cdot\dfrac{x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(1-x)}{x\sin\pi(1-x)}=2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{x\cdot\pi(1-x)}=\dfrac{2}{\pi}$,

故$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{2-x}{x})^{\frac{x}{\sin\pi x}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$.

三、利用夹逼极限准则:

关键在于适当的放缩.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}})$；(2016—2017 学年)

解: 因为$\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}})<\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=2,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=2,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=2$.

由夹逼极限准则，得$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}})=2$.

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}})$；（2017—2018 学年）

解：$\because \dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

由夹逼极限准则，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}})=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$；（2019—2020 学年）

解：因为$3=\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{2^n+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n}=3\sqrt[n]{2}$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}3\sqrt[n]{2}=3$，由夹逼极限准则可得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}x[\dfrac{1}{x}]$. （2021—2022 学年）

解：因为$x\cdot(\dfrac{1}{x}-1)<x[\dfrac{1}{x}]\le x\cdot\dfrac{1}{x}$，即$1-x<x[\dfrac{1}{x}]\le 1$.

由于$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1$，由夹逼极限准则知，$\lim\limits_{x\to 0}x[\dfrac{1}{x}]=1$.

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})$;

解：因为$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\le\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$，即

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})\le\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}).$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$，由夹逼极限准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})=\frac{1}{2}$.

注：分子不能放缩，否则放缩过大.

四、利用“有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小”的性质

（11）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x+\sin x}$；（2018—2019 学年）

解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$|\sin x|\le 1$，由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=0\times\frac{1}{1+0}=0.$$

又因为 $|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sin x}\arctan x=0.$$

（12）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$；（2021—2022 学年）

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，而 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$.

由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，故 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

五、利用等价无穷小代换

记住常见的等价无穷小代换：当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad (1+x)^{\mu}-1\sim\mu x.$$

（13）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2+x^4)+\ln(1+x^2+x^4)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$；

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2+x^4)+\ln(1+x^2+x^4)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1-x^2+x^4)(1+x^2+x^4)]}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^4+x^8)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x^8}{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}=2\lim_{x\to 0}(1+x^4)=2.$$

（14） $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+x})(e^{1+x}-e^{1-x})$；（2020-2021）

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+x})(e^{1+x}-e^{1-x})=\lim\limits_{x\to 0}e^{1-x}\frac{x-1}{x^2+x}(e^{2x}-1)$

$$=\lim_{x\to 0}e^{1-x}\frac{x-1}{x^2+x}\cdot 2x=2\lim_{x\to 0}e^{1-x}\frac{x-1}{x+1}=-2e.$$

六、变量替换

利用变量替换将极限转化，例如，令 $x=\varphi(t)$ 或者 $t=\psi(x)$，将 x 的极限转化为求 t 的极限.

注：（1）需要先求出 t 的极限，且极限表达式中的 x 都全部应换成 t；

（2） $x\to\infty$ 的极限可通过倒代换 $x=\frac{1}{t}$ 转化成 $t\to 0$ 的极限.

（15） $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$；（2020—2021 学年）

解：令 $u=\pi-\arccos x$， $\arccos x=\pi-u$，则 $x=\cos(\pi-u)=-\cos u$，且

$$\lim_{x\to -1^+}u=\lim_{x\to -1^+}(\pi-\arccos x)=0.$$

于是，$\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u^2}{1-\cos u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u^2}{\frac{1}{2}u^2}=2.$

（16） $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+2}-x)$；（2018—2019 学年）

解：令 $x=\frac{1}{t}$，则 $t\to 0^+$. 于是，

$$\lim_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(\sqrt{\frac{1}{t^2}+2}-\frac{1}{t})=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2t^2}-1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2t^2}{t^2}=$$

注：这里用到了 $t\to 0$ 时， $(1+2t^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot 2t^2$.

七、利用单调有界准则

常用归纳法讨论数列的单调性和有界性，然后通过递推式两边求极限，解方程，可求出极限.

单调性的判定：（1） $x_{n+1}-x_n$ 的符号；（2）如果 $x_n>0$ 可通过 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 大于等于 1 或小于等于 1 来判定；

有界性判定： 可以先假设极限存在，求出极限后，对单调数列来说，极限值就是它的一个界.

（17）证明：数列 $x_1 = 2$， $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$，$n = 1,2,3,\cdots$ 极限存在，并求出极限. （2016-2017 学年）

证明：首先，用归纳法证明：$0 < x_n \le 3,\ n = 1,2,\cdots$

事实上，当 $n = 1$ 时，结论显然成立.

假设结论当 $n = k$ 时成立，即 $0 < x_k \le 3$.

当 $n = k+1$ 时，$0 < x_{k+1} = \sqrt{3x_k} \le \sqrt{3\cdot 3} = 3$，结论也成立.

因此，数列 $\{x_n\}$ 有界.

又因为 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\dfrac{3}{x_n}} \ge 1$，即 $x_{n+1} \ge x_n$，$n = 1,2,\cdots$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由于单调有界数列必有极限，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

由 $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$ 两边求极限，有 $A = \sqrt{3A}$，故 $A = 3$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

（18）设 $-1 < x_1 < 0$， $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$， $n = 1,2,\cdots$. 证明： $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.（2017—2018 学年）

证明：首先，用归纳法证明：$-1 < x_n < 0, n = 1,2,\cdots$.

由已知条件，当 $n = 1$ 时，结论成立.

假设结论对 $n = k$ 时，结论成立，即 $-1 < x_k < 0$.

当 $n = k+1$ 时，$x_{k+1} = x_k^2 + 2x_k = x_k(x_k + 2) < 0$，且

$$x_{k+1} + 1 = x_k^2 + 2x_k + 1 = (x_n + 1)^2 > 0,$$

即 $-1 < x_{k+1} < 0$.

故数列 $\{x_n\}$ 有界.

又 $x_{n+1} - x_n = x_n^2 + x_n = x_n(x_n + 1) < 0$，即数列 $\{x_n\}$ 单调减少.

由于单调有界数列必有极限，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

由 $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$ 两边求极限，得 $A = A^2 + 2A \Rightarrow A = 0$ 或 $A = -1$.

因为$\{x_n\}$单调减少，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不可能为 0，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

（19）设数列$\{x_n\}$满足：$x_1 = \sqrt{2}$，$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求其极限值.（2018—2019 学年）

证明：首先，用归纳法证明：$0 < x_n < 2,\ n = 1, 2, \cdots$

事实上，当$n = 1$时，结论显然成立.

假设结论当$n = k$时成立，即$0 < x_k < 2$.

当$n = k + 1$时，$0 < x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$，结论也成立.

因此，数列$\{x_n\}$有界.

接下来，用归纳法证明数列$\{x_n\}$单调增加，即$x_{n+1} \geq x_n$，$n = 1, 2, \cdots$.

当$n = 1$时，$x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$，结论成立.

设结论对$n = k - 1$时也成立，即$x_k \geq x_{k-1}$，则当$n = k$时，

$$x_{k+1} - x_k = \sqrt{2 + x_k} - \sqrt{2 + x_{k-1}} = \frac{x_k - x_{k-1}}{\sqrt{2 + x_k} + \sqrt{2 + x_{k-1}}} \geq 0,$$

即$x_{k+1} \geq x_k$，结论对$n = k$时也成立.

因此，数列$\{x_n\}$单调增加.

由于单调有界数列必有极限，故极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

由$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$两边取极限，得$A = \sqrt{2 + A}$. 解得$A = 2$.

故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

（20）证明数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$存在，且极限值大于 1 但不超过 2.（2020—2021 学年）

证明：记$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$，显然数列$\{x_n\}$是单调增加的.

又因为 $0 < x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

$$<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2,$$

即数列$\{x_n\}$有界.

由于单调有界数列必有极限，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$存在.

由于$0<x_n<2,\ n=1,2,\cdots$，由极限的保号性，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$不会超过 2.

（21）设数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限值.（2021—2022 学年）

证明一：因为$x_1<1$，当$n>1$时，$x_n-1=-x_{n-1}^2+2x_{n-1}-1=-(x_{n-1}-1)^2\le 0$.

故$x_n\le 1,\ n=1,2,\cdots$.

由$x_1>0$，如果$x_n>0$，由$0<x_n\le 1$，有$x_{n+1}=x_n(-x_n+2)>0$，即$0<x_n\le 1,\ n=1,2,\cdots$.

当$n=1,2,\cdots$时，

$$x_{n+1}-x_n=-x_n^2+x_n=x_n(1-x_n)\ge 0,$$

故数列$\{x_n\}$单调增加.

由于单调有界数列必有极限，故极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$两边求极限可得$A=-A^2+2A$，解得$A=0$或$A=1$.

由于$x_n\ge\frac{1}{2},\ n=1,2,\cdots$，则$A\ne 0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

证法二：由$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$可得

$$x_{n+1}-1=-x_n^2+2x_n-1=-(x_n-1)^2.$$

于是，$$x_n-1=-(x_{n-1}-1)^2=-(x_{n-2}-1)^4=\cdots=-(x_1-1)^{2^{n-1}},$$

即$x_n=1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}})=1$.

八、根据参数不同求极限

（22） $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+xe^{tx}}$ 的表达式.（2017—2018）

解：如果 $x>0$， $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+xe^{tx}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{tx}(xe^{-tx}+1)}{e^{tx}(e^{-tx}+x)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{xe^{-tx}+1}{e^{-tx}+x}=\dfrac{0+1}{0+x}=\dfrac{1}{x}$；

如果 $x=0$， $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{0+1}{1+0}=\lim\limits_{t\to+\infty}1=1$；

如果 $x<0$，则 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+xe^{tx}}=\dfrac{x+0}{1+0}=x$.

故 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\\ x, & x<0\end{cases}$.

注： $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{tx}=\begin{cases}+\infty, & x>0\\ 1, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$， $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-tx}=\begin{cases}0 & x>0\\ 1, & x=0\\ +\infty & x<0\end{cases}$.