# 厦门大学《线性代数 I》期中试卷

________ 学院 ________ 系 ________ 年级 ________ 专业

主考教师： ________ 试卷类型：（A卷） 2019年11月30日

**注意：所有行列式化简和矩阵初等变换必须标出每一步骤！**

| 分数 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

一、（10）设$A_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式，行列式$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ -3 & 5 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$，求$A_{14} - 2A_{24} + A_{44}$.

$$A_{14} - 2A_{24} + A_{44} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+2r_4]{r_1-r_4} \begin{vmatrix} -5 & 3 & -2 & 0 \\ 10 & -5 & 7 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+7r_3]{r_1-2r_3} \begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 & 0 \\ -11 & 30 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+7c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -47 & 0 & 0 \\ -3 & -16 & -1 & 0 \\ 4 & 26 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 47$$

（不论直接计算代数余子式，化简一行或一列然后展开还是化成上三角或者下三角形，计算过程8分。没有详细化简过程或标识的，以及有详细过程和标识但算错的，一律扣4分。只有最后一步中一个数字写错可扣1分。最终结果2分，只看对错。）

| 分数 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

二、（10）已知$X\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求$X$。

(必须使用伴随矩阵计算逆矩阵!)

先求$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$的逆矩阵，计算行列式（2分）：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

计算代数余子式（2分）：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

得$\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-2&2&2\end{bmatrix}$（2分）。因此

$$X=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-2&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{7}{6}&\frac{8}{3}\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

（上式中第一个等号，知道$X$的表达得2分，最后结果2分。）

| 分数 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

三、（10）设$A=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\-1&-2&4&b\\0&a&3&0\end{bmatrix}$，求$R(A)$。

$$\begin{bmatrix}1&2&2&0\\-1&-2&4&b\\0&a&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&2&2&0\\0&0&6&b\\0&a&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1&2&2&0\\0&6&0&b\\0&3&a&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&2&2&0\\0&3&a&0\\0&6&0&b\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&2&2&0\\0&3&a&0\\0&0&-2a&b\end{bmatrix}$$

所以当$a\neq 0$ 或 $b\neq 0$时，$R(A)=3$；当$a=0$且$b=0$时，$R(A)=2$。

（过程8分，评分标准参见第一题，两个结果各1分）

| 分数 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

四、（10）设$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1=2\alpha_2-3\alpha_3$。令$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求方程组$AX=\beta$ 的通解。

因为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1=2\alpha_2-3\alpha_3$，所以$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$是向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$的最大无关组（1分）。于是向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$的秩为3（1分），从而$R(A)=3$（1分）。由此可知，线性方程组$Ax=0$的基础解系由$4-3=1$个线性无关的向量组成（1分）。一个向量线性无关当且仅当是非零向量（1分）。由

$$A\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\0\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\0\end{bmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=0$$

得$[1,-2,3,0]^T$是$Ax=0$的一个基础解系（2分）。又

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta$$

知$[1,1,1,1]^T$是$Ax=\beta$的一个特解（1分）。由解的结构可知，方程组$Ax=\beta$的通解为（2分）

$$x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\0\end{bmatrix},\quad c\in R$$

| 分数 | 阅卷人 |
| --- | --- |
| | |

五、（20）解线性方程组：（必须用矩阵初等变换解题）

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ ; (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = -5 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 - x_5 = -7 \end{cases}$

（1）对系数矩阵化行最简形，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

令$x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$得通解$x_1 = -\frac{1}{2}c_1, x_2 = \frac{3}{2}c_1 - c_2, x_3 = c_1, x_4 = c_2$，即

$$x = c_1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_i \in R$$

（2）对增广矩阵化行最简形，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 8 & 3 & -1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\substack{r_4-r_3 \\ r_2+5r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 24 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3\times\frac{1}{8}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令$x_3 = c_1$，$x_5 = c_2$，得通解$x_1 = 2c_2 - 2, x_2 = -2c_1, x_3 = c_1, x_4 = -3c_2 + 1, x_5 = c_2$，即

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_i \in R$$

（每题10分，过程8分，结果2分。过程不详细，过程详细但出错以及没化到行最简形都扣4分；结果没写“参数取任意数”扣1分）

| 分数 | 阅卷人 |
| --- | --- |
| | |

六、(25)设有向量组 $\alpha_1=[1,2,3,1]^T$,$\alpha_2=[2,1,4,1]^T$,$\alpha_3=[3,0,5,1]^T$, $\alpha_4=[1,2,6,3]^T$, $\alpha_5=[-3,-6,-3,1]^T$,

(1) 求向量组的秩和一个最大线性无关组,并把其他向量用这个最大线性无关组线性表示出来。

(2) $\beta_1=[5,1,12,4]^T$,$\beta_2=[1,-1,1,0]^T$,向量组$\{\beta_i\}$是否能被向量组$\{\alpha_j\}$ 线性表示?(给出详细判断过程)

(3) 在向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\beta_1,\beta_2\}$ 中,找出一个包含$\beta_1,\beta_2$ 的最大无关组并简要说明理由。

设$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]$,$B=[\beta_1,\beta_2]$。

(1)对矩阵$A$化行最简形(8分),

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix}1&2&3&1&-3\\2&1&0&2&-6\\3&4&5&6&-3\\1&1&1&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1}}\begin{bmatrix}1&2&3&1&-3\\0&-3&-6&0&0\\0&-2&-4&3&6\\0&-1&-2&2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{\substack{r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\r_3+2r_2}}\begin{bmatrix}1&2&3&1&-3\\0&1&2&0&0\\0&0&0&3&6\\0&0&0&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&2&3&1&-3\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-5\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以向量组的秩是3(1分),$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$是最大无关组(1分),且(2分)

$$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2,\quad \alpha_5=-5\alpha_1+2\alpha_4.$$

(2)向量组$\{\beta_i\}$被向量组$\{\alpha_j\}$ 线性表示的充要条件为$R(A)=R(A,B)$(2分)。于是由(4分)

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\beta_1,\beta_2]=\begin{bmatrix}1&2&3&1&-3&5&1\\2&1&0&2&-6&1&-1\\3&4&5&6&-3&12&1\\1&1&1&3&1&4&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1}}\begin{bmatrix}1&2&3&1&-3&5&1\\0&-3&-6&0&0&-9&-3\\0&-2&-4&3&6&-3&-2\\0&-1&-2&2&4&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{\substack{r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\\r_3+2r_2}}\begin{bmatrix}1&2&3&1&-3&5&1\\0&1&2&0&0&3&1\\0&0&0&3&6&3&0\\0&0&0&2&4&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&2&3&1&-3&5&1\\0&1&2&0&0&3&1\\0&0&0&1&2&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可知向量组$\{\beta_i\}$可以被向量组$\{\alpha_j\}$ 线性表示(2分)。

(3)由于已知向量组的秩是3,且$\beta_1,\beta_2$ 两个向量不成比例,即线性无关(2分),只需再找一个$\alpha_i$与它们构成线性无关组即可(2分)。通过前面的矩阵计算可知任一$\alpha_i$皆可(1分)。

(其中第二问共8分,也可以按照定义以线性方程组是否有解作为2分的判断依据,这样其余6分平分给两个线性方程组,各过程2分结论1分;如果将上述(2)中的矩阵直接与(1)中矩阵合并一起化简同时解决前两问,则化简过程合并为8+4=12分;第三问共5分,若选择将$\beta_1,\beta_2$放在$\alpha_i$前化简,或者和任意$\alpha_i$验证求秩,则判断依据2分,计算过程2分,结论1分)

| 分数 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

七、（15）1、$A^*$是$n$阶矩阵$A$的伴随矩阵，证明 $R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n; \\ 1, & R(A)=n-1; \\ 0, & R(A)<n-1. \end{cases}$

2、若复数$\omega\neq 1$满足$\omega^n=1(n>1)$，求$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \cdots & \omega \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-2} \end{vmatrix}$

1、当$R(A)=n$时，$A$是可逆矩阵，即$|A|\neq 0$。由$A^*=|A|A$得$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，所以$A^*$也可逆，即$R(A^*)=n$；（3分）

当$R(A)<n-1$时，所有$n-1$阶子式皆为0，因此所有代数余子式都是0，即$A^*=O$，所以$R(A^*)=0$；（2分）

当$R(A)=n-1$时，存在$n-1$阶子式不为0，因此$A^*\neq O$，即$R(A^*)\geq 1$（2分）。又此时$|A|=0$，所以$AA^*=|A|E=O$（1分）。因此由矩阵秩的性质，

$$R(A)+R(A^*)=n-1+R(A^*)\leq n+R(AA^*)=n$$

得$R(A^*)\leq 1$（1分）。因此$R(A^*)=1$（1分）。

2、因为$\omega^n=1$，

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \cdots & \omega \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^n \\ 1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \cdots & \omega^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^n & \omega^{n+1} & \cdots & \omega^{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n+1,n,\cdots,2]{r_i-r_{i-1}\times\omega}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1-\omega & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\omega & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\omega & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

当$n\geq 3$时，有两行完全相同，因此$D_n=0$（4分）；当$n=2$时，$\omega=-1$，此时三阶行列式为（1分）

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-4.$$