第二次小测

学号：33920212204567　　　　　姓名：任宇

➢ 证明课件《第 2-1 章 灰度变换》第 25 页 PPT 中，随机变量 s 的概率密度计算公式：

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right|$$

答：已知 $p_r(r)$ 和 $p_s(s)$ 分别是 r 和 s 的概率密度函数，且 T(r) 是连续可微的。由于 T(r) 在 0≤r≤1 内为单调递增函数，所以其反函数存在而且其反函数单调递增并可微，可得：

$$F_s(s) = P\{T(R) \le s\} = P\{R \le T^{-1}(s)\} = F_r\left(T^{-1}(s)\right) = \int_0^{T^{-1}(s)} p_r(t)dt$$

接着由分布函数和密度函数的关系可以计算得：

$$p_s(s) = F_s'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{T^{-1}(s)} p_r(t)dt = p_r(r)\frac{1}{\frac{ds}{dr}} = p_r(r)\frac{dr}{ds}$$

因为题目规定了 T(r) 为单调递增函数，当其为单调递减函数时，可知事件“g(X)≤y”等价于“X≥h(y)”，所以由单调递增情况可知：

$$F_s(s) = P\{T(R) \le s\} = P\{R \ge T^{-1}(s)\} = 1 - \int_0^{T^{-1}(s)} p_r(t)dt$$

那么可以计算得到：

$$p_s(s) = -p_r(r)\frac{dr}{ds}$$

因此，综上两种情况可以证明得到：

$$p_s(s) = p_r(r)|\frac{dr}{ds}|$$