厦门大学《微积分 II-1》课程期末试卷

试卷类型：(理工类 A 卷)　　考试日期　2020.1.8

得　分	
评阅人	

一、求下列不定积分（每小题 8 分，共 24 分）．

1. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　2. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$

3. $\int x(\arctan x)^2 dx$

1. 解

$$\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \quad \text{(1 分)}$$

$$= \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + C$$

2. **解：** 令 $x = \sin t$ $(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2})$，则 $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$，于是，

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \int \sin^2 t\cos^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \sin^2 2t\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin 4t + C$$

$$= \frac{1}{8}\arcsin x - \frac{1}{8}\sin t\cos t(1-2\sin^2 t) + C$$

$$= \frac{1}{8}\arcsin x - \frac{1}{8}(x-2x^3)\sqrt{1-x^2} + C.$$

3. 解：用分部积分

$$\int x(\arctan x)^2 dx = \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - \int \frac{1}{2}x^2\frac{2\arctan x}{1+x^2}dx \quad (3\ \square\ )$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - \int \arctan x dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx,$$

再次分部积分，有

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \quad (2\ \square\ )$$

由换元法，有

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int \arctan x\, d(\arctan x) = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C, \quad (2\ \square\ )$$

综上所述，有

$$\int x(\arctan x)^2 dx = \frac{1}{2}(x^2+1)(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

二、求下列定积分（每小题 8 分, 共 16 分）.

得　分	
评阅人	

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin dx$　　　2. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

1. 解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\, d\cos x$

$$= -e^{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e-1.$$

2. 解：令 $t=\sqrt{x}$，则 $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{dt^2}{1+t} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}dt = \int_0^2 2dt - \int_0^2 \frac{2}{1+t}dt$

$$= 4 - 2\ln|t+1|\Big|_0^2 = 4-2\ln 3$$

三、求下列函数极限（每题 8 分，共 16 分）.

得　分	
评阅人	

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt\right)}{x^3}$

2. 设 $F(x)=x\cdot\int_0^x e^{t^2-x^2}dt$，求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$

（1）原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}F(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt + xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}} = \frac{1}{2}$

得　分	
评阅人	

四、(8 分)　设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，求 $\int_0^1 f(x)dx$.

解：令 $c=\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+c\sqrt{1-x^2}$，故

$$\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}+c\sqrt{1-x^2}\right)dx = c.$$

等式左边积分得 $\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}+c\sqrt{1-x^2}\right)dx = \arctan x\,|_0^1 + c\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

$$= \frac{\pi\pi 1}{4} + c\int_0^{\frac{\pi\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{}{4} + \frac{}{2}c\int_0^{\frac{}{2}}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}c\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}c.$$

从而可得 $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}c=c$, 解得 $c=\frac{\pi}{4-\pi}$.

注释：也可直接利用定积分的几何意义，$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示圆心在原点半径为 1 的圆形的面积的四分之一，即 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

得　分	
评阅人	

五、（8 分）求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调增减区间和极值.

解　注意到 $f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，

其导数 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+x^2(2xe^{-x^4})-2x(x^2e^{-x^4})=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$.

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$.

因此，函数只可能在这三点取得极值．列表如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	（1，+∞）
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值 0	↗	极大值	↘	极小值 0	↗

由上表可见：函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 单调增加，在区间 $[-1,0)\cup[1,+\infty)$ 单调减少.

且 $f(0)=-\int_1^0te^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_0^1e^{-t^2}d(-t^2)=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$ 为极大值。

$f(\pm1)=\int_1^1(1-t)e^{-t^2}dt=0$ 为极小值。

得　分	
评阅人	

六、（8 分）试求常数 a,b，使得当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=x-a\sin x-b\sin 2x$ 是关于 x 的 5 阶无穷小。

解：当 $x\to 0$ 时，

$$f(x)=x-a\left[x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right]-b\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{5!}(2x)^5+o(x^5)\right]$$

……4 分

$$=(1-a-2b)\,x+\frac{a+8b}{6}x^3-\frac{a+32b}{5!}x^5+o(x^5)$$ ……1 分

根据题意，有 $a+2b=1$， $a+8b=0$， $a+32b\neq 0$，解得 $a=\frac{4}{3}$， $b=-\frac{1}{6}$。 ……3 分

。(8 分)

得　分	
评阅人	

七、(8 分) $\sin x+\tan x>2x$， $x\in(0,\frac{\pi}{2})$。

证明：令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x,$ **则**

$$f'(x)=\frac{\cos^3 x-2\cos^2 x+1}{\cos^2 x}。$$

令 $g(x)=\cos^3 x-2\cos^2 x+1$，**则** $g'(x)=-3\sin x\cos^2 x+4\cos x\sin x=\sin x\cos x(4-3\cos x)$。

由于 $g'(x)>0,$ 从而 $g(x)$ 单调递增， $g(x)>g(0)=0, x\in(0,\frac{\pi}{2})$。由此 $f'(x)>0$，**从而** $f(x)$ **单调递增，故** $f(x)>f(0)=0,$ **即** $\sin x+\tan x>2x$。

。

得　分	
评阅人	

八、(6 分)**设** $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上可导，且满足** $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}x^2 f(x)\mathrm{d}x$，**试证明：存在** $\xi\in(0,1)$，**使得** $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$

证明：构造函数正确得 4 分，运用积分中值定理正确 2 分。

得　分	
评阅人	

九、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$. 证明：

1. 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

2. 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，则 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

证明：1. 由已知条件得 $f(-x)=f(x)$，令 $t=-u$，

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^{x}(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=F(x)$$

则 $F(x)$ 也是偶函数.

2. $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.

解法一:

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - 2xf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - xf(x) = f(\xi)x - xf(x)$$

$$=(f(\xi)-f(x))x \le 0, \xi \in (0,x)$$

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是减函数。

解法二: $F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x) - 2xf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - xf(x) = \int_0^x [f(t)-f(x)]\mathrm{d}t$

因为 $t \le x$, 所以 $f(t)-f(x) \le 0$， 从而 $F'(x) \le 0$.

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是减函数.

。