

2016-2017 学年第二学期《微积分 I-2》期末试卷解答

一、讨论下列级数的敛散性. 如果收敛, 说明是条件收敛, 还是绝对收敛? (每小题 4 分, 共 12 分)

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}; \quad 2. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} + n \sin \frac{1}{n} \right); \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 [1+2(-1)^n]^n}{6^n}.$$

解: 1. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 发散。 -----(1 分)

设 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$, $f'(x) = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0, (x > 1)$, 数列 $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{n-1} \right\}_2$ 单调递减,

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$, 由莱布尼兹判别法, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ 收敛。 -----(3 分)

因此, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ 条件收敛。 -----(4 分)

2. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1 \neq 0$, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 发散, -----(2 分)

因此, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} + n \sin \frac{1}{n} \right)$ 发散。 -----(4 分)

3. $\frac{n^2 |1+2(-1)^n|^n}{6^n} \leq \frac{n^2}{2^n}$, -----(1 分)

由比值判别法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} < 1$ 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 收敛, -----(3 分)

由比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{2} + (-1)^n \right)^n}{3^n}$ 绝对收敛。 -----(4 分)

二、计算下列各题: (每小题 6 分, 共 12 分)

1. $\iint_D |xy| dx dy$, 平面区域 $D: \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}, a > 0$.

解：设 D_1 为区域 D 在第一象限部分，由对称性

$$\iint_D |xy| dx dy = 4 \iint_{D_1} xy dx dy \quad \text{-----}(2 \text{ 分})$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^3 \cos \theta \sin \theta d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho \quad \text{-----}(4 \text{ 分})$$

$$= 4 \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2}{2}. \quad \text{-----}(6 \text{ 分})$$

2. $\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz$, 其中 Ω 为 $z=1$, $z=4$ 和 $z=y^2+x^2$ 所围区域.

解一：利用柱坐标截面法, $\Omega: \begin{cases} 1 \leq z \leq 4; \\ (x, y) \in D_z: 0 \leq \rho \leq \sqrt{z}, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$

$$\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz = \int_1^4 dz \iint_{D_z} x^2 + y^2 dx dy = \int_1^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} \rho^3 d\rho \quad \text{-----}(4 \text{ 分})$$

$$= 2\pi \int_1^4 \frac{z^2}{4} dz = \frac{21\pi}{2}. \quad \text{-----}(6 \text{ 分})$$

解二：利用柱坐标投影法：

$$\Omega: \begin{cases} 1 \leq z \leq 4, & (x, y) \in D_1: 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi; \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4, & (x, y) \in D_2: 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz &= \iint_{D_1} x^2 + y^2 dx dy \int_1^4 dz + \iint_{D_2} x^2 + y^2 dx dy \int_{x^2+y^2}^4 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_1^4 dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^4 dz \quad \text{-----}(4 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$= \frac{3\pi}{2} + 9\pi = \frac{21\pi}{2}. \quad \text{-----}(6 \text{ 分})$$

三、计算下列各题：（每小题 6 分，共 12 分）

(1) $\iiint_{\Omega} e^{|z|} dx dy dz$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

解: 令 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$, 利用球坐标,

$$\Omega_1: x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1,$$

由三重积分的对称性可得:

$$\iiint_{\Omega} e^{|z|} dx dy dz = 2 \iiint_{\Omega_1} e^z dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 e^{r \cos \varphi} r^2 \sin \varphi dr \quad \text{-----}(4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} &= -4\pi \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{r \cos \varphi} r d(r \cos \varphi) \\ &= 4\pi \int_0^1 r(e^r - 1) dr = 4\pi \left(re^r - e^r - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 2\pi. \end{aligned} \quad \text{-----}(6 \text{ 分})$$

(2) $\int_{\Gamma} z^2 ds$, 曲线 Γ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $y = x$ 的交线.

答案: $\Gamma: x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, z = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$, ----- (1 分)

$$\int_{\Gamma} z^2 ds = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right)^2 + (\cos t)^2} dt \quad \text{-----}(4 \text{ 分})$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi. \quad \text{-----}(6 \text{ 分})$$

四、(1) 确定常数 a, b , 使得 $\frac{ax+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y+b}{x^2+y^2} dy$ 为某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分;

(2) 求该二元函数 $u(x, y)$ 。(8 分)

解: 1. 设 $P(x, y) = \frac{ax+y}{x^2+y^2}, Q(x, y) = -\frac{x-y+b}{x^2+y^2}$

$$\text{则 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2 - 2xy + 2xb}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 - 2axy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{-----}(2 \text{ 分})$$

$$\text{由于 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \text{ 我们有 } -2xy + 2xb = -2axy \Rightarrow a = 1, b = 0. \quad \text{-----}(4 \text{ 分})$$

2. 解一:

$$u(x, y) = \int_1^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy = \int_1^x \frac{1}{x}dx + \int_0^y \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy \quad \text{-----}(2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} &= \ln|x| + \int_0^y \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy = \ln|x| + \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} \right) \Big|_0^y \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad \text{-----}(4 \text{ 分})$$

解二: $u(x, y) = \int \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx = \int \frac{x+y}{x^2 + y^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} + C(y)$

----- (2 分)

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} + C'(y) = Q(x, y) \Rightarrow C'(y) = 0$$

因此, 取 $C(y) = 0$, 则 $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y}$. ----- (4 分)

五、用格林公式计算曲线积分 $I = \int_L (x^2 - 2y)dx - (x + \sin^2 y)dy$, 其中 L 是点 $A(0,0)$ 到点 $B(2,0)$ 的上半圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$. (8 分)

解: 设从 $A(0,0)$ 到 $B(2,0)$ 的有向线段为 l . 则 $L + l$ 为上半圆面 $D: y \leq \sqrt{2x - x^2}$ 的正向边界, 由格林公式

----- (2 分)

$$\begin{aligned} I &= - \int_L (x^2 - 2y)dx - (x + \sin^2 y)dy \\ &= - \left[\int_{L+l} (x^2 - 2y)dx - (x + \sin^2 y)dy - \int_l (x^2 - 2y)dx - (x + \sin^2 y)dy \right] \\ &= - \left(\iint_D dx dy - \int_0^2 x^2 dx \right) \end{aligned} \quad \text{-----}(6 \text{ 分})$$

$$= - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}. \quad \text{-----}(8 \text{ 分})$$

六、将函数 $\frac{1}{x^2-1}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数。(8 分)

$$\begin{aligned}\text{解: } \frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+x-3} - \frac{1}{4+x-3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{x-3}{2}} - \frac{1}{8} \frac{1}{1+\frac{x-3}{4}}\end{aligned}\quad \text{-----(4 分)}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{2} \right)^n - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{4} \right)^n, \left(\left| \frac{x-3}{2} \right| < 1 \text{ 且 } \left| \frac{x-3}{4} \right| < 1 \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-3)^n, (1 < x < 5).\end{aligned}\quad \text{-----(8 分)}$$

七、设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 利用 Gauss 公式计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy,$$

其中 Σ 为任意不经过原点的闭曲面, 取外侧。(10 分)

$$\text{解: 当 } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \text{ 时, } \frac{\partial \left(\frac{x}{r^3} \right)}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, \frac{\partial \left(\frac{y}{r^3} \right)}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}, \frac{\partial \left(\frac{z}{r^3} \right)}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}, \text{ 有}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{r^3} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{y}{r^3} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{z}{r^3} \right)}{\partial z} = 0.\quad \text{-----(2 分)}$$

设 Σ 围成的空间区域为 Ω .

如果 Ω 不包含原点, 则利用 Gauss 公式, 可得 $\oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy = 0$.

----- (5 分)

如果 Ω 包含原点, 在椭球面内作辅助小球面

$$\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2, \text{ 取内侧,} \quad \text{----- (7 分)}$$

由高斯公式, 可得

$$\begin{aligned}
\oiint_{\Sigma} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy - \oiint_{\Sigma_1} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy \\
&= 0 - \oiint_{\Sigma_1} \frac{x}{r^3} dydz + \frac{y}{r^3} dzdx + \frac{z}{r^3} dxdy = \frac{1}{\varepsilon^3} \oiint_{\Sigma_1^-} x dydz + y dzdx + z dxdy \quad \text{-----}(8 \text{ 分}) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega} 3dv = 4\pi. \quad \text{-----}(10 \text{ 分})
\end{aligned}$$

八、设 Σ 是四面体 $x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的表面,

计算 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS$. (10 分)

解：设四面体的四个面分别为

$$\Sigma_1: x+y+z=1, \Sigma_2: z=0, \Sigma_3: x=0, \Sigma_4: y=0,$$

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{(1+x+y)^2} \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2} dxdy = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy$$

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{(1+x+y)^2} \sqrt{1+0} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy$$

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS = \iint_{D_{yz}} \frac{1}{(1+y)^2} \sqrt{1+0} dydz = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{1}{(1+y)^2} dy$$

$$\iint_{\Sigma_4} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS = \iint_{D_{xz}} \frac{1}{(1+x)^2} \sqrt{1+0} dxdz = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{1}{(1+x)^2} dx \quad \text{-----}(6 \text{ 分})$$

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS = (\sqrt{3}+1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy + 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{1}{(1+y)^2} dy$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1) \ln 2. \quad \text{-----}(10 \text{ 分})$$

九、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!}$ 的收敛域以及和函数 $S(x)$ ，并由此求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)4^n}{(n+1)!}$ (10 分)

解：设 $u_n = \frac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)x^2}{(n+2)(n+1)} = 0$,

因此幂级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. -----(2 分)

$x \in (-\infty, +\infty)$ 时，设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!}$,

$$\begin{aligned} \int_0^x S(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{(n+1)!}, (x \neq 0) \\ &= \frac{1}{x} (e^{x^2} - 1), (x \neq 0). \end{aligned}$$
 -----(6 分)

等式两边同时求导，得 $S(x) = -\frac{1}{x^2} (e^{x^2} - 1) + 2e^{x^2}, (x \neq 0)$.

由幂级数的表达式得 $S(0) = 1$. -----(8 分)

令 $x = 2$ ，则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)4^n}{(n+1)!} = S(2) = -\frac{1}{4} (e^4 - 1) + 2e^4 = \frac{7}{4}e^4 + \frac{1}{4}$. -----(10 分)

十、将函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成正弦级数，并求该级数在 $[0, \pi]$ 上

的和函数 $S(x)$. (10 分)

解：将 $f(x)$ 奇周期延拓为以 2π 为周期的周期函数 $F(x)$ ， $F(x)$ 满足收敛定理的

条件，当 $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 时， $F(x)$ 的傅立叶级数收敛于 $F(x)$ 。 -----(1 分)

由于 $F(x)$ 为奇函数， $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$ -----(2 分)

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2},$$
 -----(3 分)

当 $n \neq 1$ 时， $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin nx dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[(n-1)x] \cdot \cos[(n+1)x] dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin[(n-1)x]}{n-1} - \frac{\sin[(n+1)x]}{n+1} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n-1} - \frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{n+1} \right) = \begin{cases} 0, & n=2k+1, k \in \mathbb{Z}^+; \\ \frac{(-1)^{k-1}4k}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k, k \in \mathbb{Z}^+, \end{cases} \text{-----}(7 \text{ 分})
\end{aligned}$$

当 $x \in [0, \pi], x \neq \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = F(x)|_{[0, \pi]} = \frac{1}{2} \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}4k}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kx$. -----(8 分)

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $F(x)$ 的傅立叶级数收敛于 $\frac{f(\frac{\pi}{2}+0) + f(\frac{\pi}{2}-0)}{2} = \frac{1}{2}$.

因此, 在 $[0, \pi]$ 上和函数为 $S(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}); \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$ -----(10 分)