

历届试题选 (五)

一、求下列极限:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$; (2016—2017)

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)(x^2 + \ln(1 - x^2))}{x^3(e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x)}$; (2016—2017)

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{\frac{1}{x}}(x^2 - x + 1) - \sqrt{1 + x^4}]$; (2016—2017)

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{3}x^2 - \sqrt[3]{1 + x^2}}{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}$; (2017—2018)

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^3)^{\frac{1}{\tan x - x}}$; (2018—2019)

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\sqrt{1 + x^2} \sin x - \sqrt{1 + x^4}}$; (2019—2020)

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \cos x - 3}{x^4}$; (2020—2021)

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$; (2021—2022)

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$; (2021—2022)

二、设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sin x_n$ 给出.

(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其极限值;

(2) 试求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$. (2019—2020)

三、试确定常数 a, b , 使 $1 - \sqrt[3]{\cos x}$ 和 $a \ln(1 + x) + bx$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的等价无穷小.

(2020—2021)