2013-2014 厦门大学《多元微积分 A 类》课程试卷

B 卷---参考解答

2014 年 6 月 13 日

一、（9 分）设均匀柱体密度为 ρ，占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le h\}$．求它对位于点 $M^0(0,0,a)(a>h)$ 处的单位质量的质点的引力.

解：Ω 是一位于 xoy 面上方的圆柱体，它关于 xoz 面 yoz 面都是对称的，因此有

$$F_x=F_y=0$$

下面计算 F_z：

$$\begin{aligned}F_z&=\iiint\limits_{\Omega}G\rho\frac{z-a}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}}dv\\&=G\rho\int_0^h(z-a)dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{rdr}{(r^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=-2\pi G\rho(\sqrt{(h-a)^2+R^2}-\sqrt{R^2+a^2}+h)\end{aligned}$$

故引力为 $\vec{F}=\{0,0,-2\pi G\rho(\sqrt{(h-a)^2+R^2}-\sqrt{R^2+a^2}+h)\}$.

二、（8 分）证明当 $f(z)$ 连续时，$\iiint\limits_{\Omega}f(z)dv=\pi\int_{-1}^{1}f(z)(1-z^2)dz$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，并用此公式计算 $\iiint\limits_{\Omega}(z^3+z^2+z+1)dv$ 的值.

证明： 由 Ω 的表面方程为 $x^2+y^2+z^2=1$ 知，$z\in[-1,1]$，在 $(-1,1)$ 内任取一点 z，过 z 作垂直于 z 轴的平面截 Ω 得一平面区域 $D_z: x^2+y^2\le 1-z^2$．于是 D_z 的面积为 $\pi(1-z^2)$．因此

$$\iiint\limits_{\Omega}f(z)dz=\int_{-1}^{1}dz\iint\limits_{D_Z}f(z)dxdy=\int_{-1}^{1}f(z)dz\iint\limits_{D_Z}dxdy=\pi\int_{-1}^{1}f(z)(1-z^2)dz,$$

当 $f(z)=z^3+z^2+z+1$ 时，有

$$\iiint\limits_{\Omega}(z^3+z^2+z+1)dv=\pi\int_{-1}^{1}(z^3+z^2+z+1)(1-z^2)dz=\frac{5}{8}\pi.$$

三、（10 分） 设 $grad\ u=(x^5+4x^3y^2, 2x^4y-y^5)$, 试求

(1) 函数 $u(x,y)$ 的表达式；

(2) 计算 $I=\int_L(x^5+4x^3y^2)dx+(2x^4y-y^5)dy$，其中 L 为从 $A(2,2)$ 到 $B(1,1)$ 的任意光滑曲线.

解：(1) 设 $P(x,y)=x^5+4x^3y^2$，$Q(x,y)=2x^4y-y^5$. 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=8x^3y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，因此曲线积分和路径无关.

可取折线段 $(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$ 来计算原函数 $u(x,y)$，结果如下：

$$u(x,y)=\int_0^x x^5dx+\int_0^y(2x^4y-y^5)dy=\frac{x^6}{6}+x^4y^2-\frac{y^6}{6}+C.$$

(2) 由曲线积分和路径无关，可知

$$\begin{aligned}I&=\int_L(x^5+4x^3y^2)dx+(2x^4y-y^5)dy\\&=\int_2^1(2\cdot 2^4y-y^5)dy+\int_2^1(x^5+4x^3)dx\\&=-63.\end{aligned}$$

四、(6 分)求圆柱螺线 $L:(x,y,z)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt),\ 0\le t\le 2\pi$ 的弧长，其中 a, b 为常数.

解：弧长 $S=\int_L ds$

$$\begin{aligned}&=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}dt\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

五、（10 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x+2y+3z}{x^2+y^2+z^2}dS$,其中 Σ 为介于平面 $z=0$ 和 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

解：由于 Σ 关于 yoz 平面对称，且 $\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 关于 x 为奇函数，因此 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}dS=0.$

同理可求得 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}dS=0.$ 因为 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 在 $z=0$ 和 $z=H$ 之间的一部分，可取面积微元 $dS=2\pi Rdz$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{3z}{x^2+y^2+z^2}dS=3\int_0^H\frac{z\cdot 2\pi Rdz}{R^2+z^2}=3\pi R\int_0^H\frac{dz^2}{R^2+z^2}=3\pi R\ln(R^2+z^2)|_0^H=3\pi R\ln\frac{R^2+H^2}{R^2}.$$

综上可知，原积分的计算结果为 $3\pi R\ln\dfrac{R^2+H^2}{R^2}$.

六、（10 分）求 $\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^2dzdx+zdxdy$，其中 Σ 为 $z=x^2+y^2$ 在 $0\le z\le 1$ 的下侧.

解：易求得曲面 Σ 的外法线为 $\{2x,2y,-1\}$，设曲面 Σ 的外法线方向余弦为 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，则

$$\frac{\cos\alpha}{2x}=\frac{\cos\beta}{2y}=\frac{\cos\gamma}{-1}.$$

设 D_{xy} 为曲面 Σ 在 xoy 坐标面上的投影。由于 $\dfrac{dydz}{dxdy}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=-2x,\dfrac{dzdx}{dxdy}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}=-2y$，因此原积分可化为

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma}(x^3\cdot(-2x)+y^2\cdot(-2y)+z)dxdy\\
&=\iint_{D_{xy}}(x^3\cdot(-2x)+y^2\cdot(-2y)+x^2+y^2)dxdy\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(-2r^4\cos^4\theta-2r^3\sin^3\theta+r^2)rdr\\
&=-2\cdot 4\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta\int_0^1 r^5dr+2\pi\int_0^1 r^3dr\\
&=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

七、（10 分）按以下两种曲面计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) Σ 为不包含原点的光滑闭曲面；

(2) Σ 为曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ，其中 $R>0$ 为常数，Σ 取上侧.

解：设 $P(x,y,z)=\dfrac{x}{r^3},Q(x,y,z)=\dfrac{y}{r^3},R(x,y,z)=\dfrac{z}{r^3}$ ，当 $r\neq 0$, 有

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}。$$

(1) 若曲面 Σ 不包含原点，设 Σ 所包含的区域为 Ω ，由高斯公式直接可得，

$$I=\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz=0.$$

(2) 取一充分小的正数 ε ，作曲面 $\Sigma_1: z=\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}$ ，使得 Σ_1 包含在 Σ 内；再作 Σ_2 为 xoy 平面上介于 Σ 和 Σ_1 之间的部分，Σ_1 和 Σ_2 取下侧。设 Ω_1 使由 Σ ，Σ_1 和 Σ_2 所围成的区域，由高斯公式得

$$I=(\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2})\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iiint_{\Omega_1}0dxdydz-\iint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}\iint_{\Sigma_2}\frac{0dxdy}{r^3}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy,$$

再次添加辅助曲面 Σ_3 为 xoy 平面上 $x^2+y^2\le\varepsilon^2$ 的圆域，Σ_3 取上侧，易知 $\iint\limits_{\Sigma_3}xdydz+ydzdx+zdxdy=0$ 。

再由高斯公式，原积分进一步计算得到

$$I=-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1+\Sigma_3}xdydz+ydzdx+zdxdy=-\frac{1}{\varepsilon^3}(-2\pi\varepsilon^3)=2\pi.$$

八、（10 分，每小题 5 分）判断下列级数的敛散性，如果收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛？

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\sin n$； （2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ （ $p>0$ ）.

解：（1）因为 $u_n=\frac{n}{2^n}\sin n$ 满足：$|u_n|=\left|\frac{n^2}{2^n}\sin n\right|\le\frac{n^2}{2^n}$，

而对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$，其通项为 $v_n=\frac{n^2}{2^n}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^2}{2^n}\sin n\right|$ 收敛，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\sin n$ 绝对收敛.

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},$

当 $p>1$ 时，原级数绝对收敛

当 $0<p\le 1$ **时，** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，但 $\frac{1}{n^p}>\frac{1}{(n+1)^p}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$

由莱布尼兹判别法知原级数收敛，故原级数条件收敛.

九、(7 分) 把 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ 展成麦克劳林级数.

解：$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (-1<x<1)$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \qquad (-1<x<1)$$

十、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$ 的和函数.

解：记 $a_n=\frac{1}{n^2-1}$. 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{(n+1)^2-1}=1$，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$ 的收敛半径为1.

又 $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(\pm1)^n}{n^2-1}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

记 $s(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-1}$，于是，当 $|x|<1$ 且 $x\neq 0$ 时，

$$s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n-1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x u^{n-2}\mathrm{d}u-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x u^n\mathrm{d}u$$

$$=\frac{x}{2}\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}u^{n-2}\mathrm{d}u-\frac{1}{2x}\int_0^x\sum_{n=2}^{\infty}u^n\mathrm{d}u$$

$$=\frac{x}{2}\int_0^x\frac{1}{1-u}\mathrm{d}u-\frac{1}{2x}\int_0^x\frac{u^2}{1-u}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{x}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2x}[\frac{1}{2}x^2+x+\ln(1-x)]$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x).$$

由 $s(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-1}$ 可得 $s(0)=0$.

$$s(1)=\lim_{x\to 1^-}s(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4},\quad s(-1)=\lim_{x\to -1^+}s(x)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

故
$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1-x^2}{2x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0, & x=0\\ \dfrac{3}{4}, & x=1\end{cases}.$$

十一、（10 分）设在 $[-\pi,\pi]$ 上，$f(x)=\cos\beta x$，β 不是整数.

(1)将 $f(x)=\cos\beta x$ 展开成傅立叶级数；(2)求级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2\beta^2}{\beta^2-n^2}$ 的和函数.

解：（1）$\because f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续可微，使得其傅立叶级数处处收敛，

且 $b_n=0,\quad(n=1,2,\cdots)$

故只需求 $a_n,\quad(n=0,1,2,\cdots)$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\beta xdx=\frac{2\sin\beta\pi}{\beta\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\beta x \cos nx dx = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{\beta - n} + \frac{1}{\beta + n}\right)\sin\beta x$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2\beta}{\beta^2 - n^2}\sin\beta\pi \,.$$

于是，在$[-\pi,\pi]$上

$$f(x) = \cos\beta x = \frac{\sin\beta\pi}{\beta\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\beta}{\beta^2 - n^2}\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\cos nx \text{。}$$

（2）在上式中，令 $x=0$，有 $1 = \frac{\sin\beta\pi}{\beta\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\beta}{\beta^2 - n^2}\frac{\sin\beta\pi}{\pi}$,

则 $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\beta^2}{\beta^2 - n^2} = \frac{\beta\pi}{\sin\beta\pi}$.