

## 历届试题选 (五)

一、求下列极限:

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$ ; (2016—2017)  $2$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)(x^2 + \ln(1 - x^2))}{x^3(e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x)}$ ; (2016—2017)  $1$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{\frac{1}{x}}(x^2 - x + 1) - \sqrt{1 + x^4}]$ ; (2016—2017)  $\frac{1}{2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{3}x^2 - \sqrt[3]{1 + x^2}}{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}$ ; (2017—2018)  $-\frac{1}{3}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^3)^{\frac{1}{\tan x - x}}$ ; (2018—2019)  $e^3$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\sqrt{1 + x^2} \sin x - \sqrt{1 + x^4}}$ ; (2019—2020)  $\frac{1}{3}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \cos x - 3}{x^4}$ ; (2020—2021)  $\frac{7}{12}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ ; (2021—2022)  $-\frac{1}{3}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ ; (2021—2022)  $\text{同} \textcircled{1}$

二、设数列  $\{x_n\}$  由递推公式  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \sin x_n$  给出.

(1) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求其极限值;

(2) 试求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ . (2019—2020)

三、试确定常数  $a, b$ , 使  $1 - \sqrt[3]{\cos x}$  和  $a \ln(1 + x) + bx$  为  $x \rightarrow 0$  时的等价无穷小.

(2020—2021)

$\frac{4}{3} - \frac{1}{3}$