厦门大学《线性代数（A）》期末试卷

________ 学院 ________ 系 ________ 年级 ________ 专业

主考教师： ________ 试卷类型：（A卷）

一、（16）填空题

1. 所有与$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$可交换的矩阵是 $\begin{bmatrix}a&0\\b&a\end{bmatrix}$， $a,b\in R$ ；

2. $A=\begin{bmatrix}E&O\\A_1&A_2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}B_1&B_2\\E&B_3\end{bmatrix}$，则$AB=\begin{bmatrix}B_1&B_2\\A_1B_1+A_2&A_1B_2+A_2B_3\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}B_1+B_2A_1&B_2A_2\\E+B_3A_1&B_3A_2\end{bmatrix}$；

3. 线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\2x_1+3x_2+ax_3=3\\x_1+ax_2+3x_3=2\end{cases}$ 无解的充要条件是 $a=-3$ ；

4. $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则$B=(kE+A)^2$正定的充要条件是 $k\neq 0,-2$ 。

二、（14） $A(E-C^{-1}B)^TC^T=E$, 其中$B=\begin{bmatrix}1&-1&&\\&1&-1&\\&&1&-1\\&&&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\&2&1&3\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$，求矩阵$A$

由$A(C-B)^T=E$得$A=(C^T-B^T)^{-1}$，而$C^T-B^T=\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\3&2&1&\\4&3&2&1\end{bmatrix}$，于是$A=\begin{bmatrix}1&&&\\-2&1&&\\1&-2&1&\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$

三、（15） 求方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-5\\x_2+2x_3+2x_4+ax_5=b\\5x_1+4x_2+3x_3+ax_4-x_5=-7\end{cases}$在参数各种取值时的通解

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&-1\\3&2&1&1&-3&-5\\0&1&2&2&a&b\\5&4&3&a&-1&-7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5&-3\\&1&2&2&6&2\\&&&a-3&&\\&&&&a-6&b-2\end{bmatrix}$$

(1)$a\neq 3,6$时，矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5&-3\\&1&2&2&6&2\\&&&1&&\\&&&&1&\frac{b-2}{a-6}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0&\frac{5b-3a+8}{a-6}\\&1&2&0&0&\frac{2a-6b}{a-6}\\&&&1&&\\&&&&1&\frac{b-2}{a-6}\end{bmatrix}$，因此通解

为

$$x=\begin{bmatrix}\frac{5b-3a+8}{a-6}\\ \frac{2a-6b}{a-6}\\ 0\\ 0\\ \frac{b-2}{a-6}\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad k\in R$$

(2)$a=3$时，矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5&-3\\ &1&2&2&6&2\\ &&&&1&\frac{2-b}{3}\\ &&&&&\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&0&\frac{1-5b}{3}\\ &1&2&2&0&2b-2\\ &&&&1&\frac{2-b}{3}\\ &&&&&\end{bmatrix}$，因此通解为

$$x=\begin{bmatrix}\frac{1-5b}{3}\\ 2b-2\\ 0\\ 0\\ \frac{2-b}{3}\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad k_i\in R$$

(3)$a=6$时，只有$b=2$时有解，此时矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5&-3\\ &1&2&2&6&2\\ &&&3&&\\ &&&&&\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&-5&-3\\ &1&2&0&6&2\\ &&&1&&\\ &&&&&\end{bmatrix}$,

因此通解为

$$x=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix},\quad k_i\in R$$

四、（15） $A=\begin{bmatrix}0.1&-0.1&0.1\\0.2&0.4&-0.2\\-0.3&-0.3&0.5\end{bmatrix}$，求$A^9$ (保留乘方符号，不必具体计算)

$A=10^{-1}B$，其中$B=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{bmatrix}$。由$|B-\lambda E|=0$得特征值2, 2, 6。解方程得特征值2的线性无关特征向量$[-1,1,0]^T$, $[1,0,1]^T$；特征值6的特征向量$[1,-2,3]^T$。于是有

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\1&0&3\end{bmatrix}^{-1}B\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}$$

经计算，$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，因此

$$A^9 = 10^{-9}B^9 = 10^{-9}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^9 & & \\ & 2^9 & \\ & & 6^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{2^9}{4\cdot 10^9}\begin{bmatrix}5-3^9 & 1-3^9 & -1+3^9\\ -2+2\cdot 3^9 & 2+2\cdot 3^9 & 2-2\cdot 3^9\\ 3-3^{10} & 3-3^{10} & 1+3^{10}\end{bmatrix}$$

五、(**15**) 设$a_1 = (1,-1,0,4)^T$，$a_2 = (2,1,5,6)^T$，$a_3 = (1,-1,-2,0)^T$，$a_4 = (3,0,7,14)^T$，求向量组的秩，找出一个最大线性无关组，并用其线性表示出其他的向量。

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 5 & -2 & 7\\ 4 & 6 & 0 & 14\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以秩为3，最大无关组为a_1,a_2,a_3，$a_4 = 2a_1 + a_2 - a_3$

六、(**15**) 二次型$f = x^T\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & 2a\\ & & 3\end{bmatrix}x$ 经正交替换化为$by_1^2 + cy_2^2 + 5y_3^2$, 且$a \le b \le c$, 求a, b, c 及正交替换

二次型的矩阵为$\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & a\\ & a & 3\end{bmatrix}$，由5是特征值得$a = \pm 2$，此时另两个特征值为1，2。因为$a \le b \le c$，所以$a = -2$，$b = 1$，$c = 2$。

解方程得特征值$1,2,5$的特征向量分别为$(0,1,1)^T,(1,0,0)^T,(0,-1,1)^T$，于是正交替换为

$$x = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}y$$

七、(**10**) (1) $A^2 = E, A \ne E$, 证明$A+E$不可逆；(2) 实矩阵$A_{n\times p}$ $B_{n\times q}$有性质$A^TA = E_p, B^TB = E_q$, 证明B^TAA^TB的特征值满足$0 \le \lambda \le 1$。

(1)若$A+E$可逆，则由$A^2 - E = (A+E)(A-E) = O$得$A - E = O$，矛盾；因此得证

(2)设$A = [\xi_1,\cdots,\xi_p]$，则由$A^TA = E_p$可知$\{\xi_i\}$是单位正交向量组。令$\eta_1,\cdots,\eta_{n-p}$是方程组$Ax = 0$的单位正交的基础解系，$C = [\eta_1,\cdots,\eta_{n-p}]$，则$[A,C]$是正交矩阵。如果$\lambda$是$B^TAA^TB$的特征值，$\alpha$是对应的特征向量，于是

$$\alpha^T\alpha = \alpha^TB^TB\alpha = \alpha^TB^T[A,C][A,C]^TB\alpha = \alpha^TB^TAA^TB\alpha + \alpha^TB^TCC^TB\alpha \ge \alpha^TB^TAA^TB\alpha = \lambda\alpha^T\alpha$$

又$\alpha^TB^TAA^TB\alpha = \lambda\alpha^T\alpha \ge 0$，得证