历届试题选（一）

一、求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}})$；（2016—2017 学年）

解：因为 $\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}})<\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=2,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=2,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=2$.

由夹逼极限准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}})=2$.

（2）$\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$；（2017—2018 学年）

解：因为 $\lim\limits_{x\to0}2\tan^2 x\cdot\frac{1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{x\cdot x}=2$，故 $\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\mathrm{e}^2$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}})$；（2017—2018 学年）

解：$\because \frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\le\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}$，

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

由夹逼极限准则，$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}})=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2}-x)$；（2018—2019 学年）

解一：$\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

解二：令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $t\to 0^+$．于是，

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(\sqrt{\frac{1}{t^2}+2}-\frac{1}{t})=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2t^2}-1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2t^2}{t^2}=1$$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x+\sin x}$；（2018—2019 学年）

解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$|\sin x|\le 1$，由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}=0\times\frac{1}{1+0}=0.$$

又因为 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sin x}\arctan x=0.$$

（6）$\lim\limits_{x\to-1}(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3})$；（2019—2020 学年）

解：$\lim\limits_{x\to-1}(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3})=\lim\limits_{x\to-1}(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{(1+x)(1-x+x^2)})$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{(1+x)(1-x+x^2)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{1-x+x^2}=-1.$$

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$；（2019—2020 学年）

解：因为 $3=\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{2^n+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n}=3\sqrt[n]{2}$．

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}3\sqrt[n]{2}=3$，由夹逼极限准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3.$

（8）$\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$；（2020—2021 学年）

解：令 $u=\pi-\arccos x$，$\arccos x=\pi-u$，则 $x=\cos(\pi-u)=-\cos u$，且

$$\lim_{x\to -1^+} u = \lim_{x\to -1^+}(\pi - \arccos x) = 0.$$

于是，$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u^2}{1-\cos u} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u^2}{\frac{1}{2}u^2} = 2.$

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n}$；（2021—2022 学年）

解一：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2n})^{4n} = \lim\limits_{n\to\infty}[(1-\dfrac{1}{2n})^{-2n}]^{-2} = e^{-2}.$

解二：$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{4n\ln(1-\frac{1}{2n})}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}4n\ln(1-\dfrac{1}{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty}4n\cdot(-\dfrac{1}{2n}) = -2$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n-1}{2n})^{4n} = e^{-2}$.

（10）$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$；（2021—2022 学年）

解：因为$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$，而$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le 1$.

由于有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，故$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

（11）$\lim\limits_{x\to 0} x[\dfrac{1}{x}]$. （2021—2022 学年）

解：因为$x\cdot(\dfrac{1}{x}-1) < x[\dfrac{1}{x}] \le x\cdot\dfrac{1}{x}$，即$1-x < x[\dfrac{1}{x}] \le 1$.

由于$\lim\limits_{x\to 0}(1-x) = 1$，由夹逼极限准则知，$\lim\limits_{x\to 0} x[\dfrac{1}{x}] = 1$.

二、证明：数列$x_1 = 2$，$x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$，$n = 1,2,3,\cdots$极限存在，并求出极限. （2016-2017 学年）

证明：首先，用归纳法证明：$0 < x_n \le 3,\ n = 1,2,\cdots$

事实上，当$n=1$时，结论显然成立.

假设结论当$n=k$时成立，即$0 < x_k \le 3$.

当$n=k+1$时，$0 < x_{k+1} = \sqrt{3x_k} \le \sqrt{3\cdot 3} = 3$，结论也成立.

因此，数列$\{x_n\}$有界.

又因为$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\dfrac{3}{x_n}} \ge 1$，即$x_{n+1} \ge x_n$，$n = 1,2,\cdots$，即数列$\{x_n\}$单调增加.

由于单调有界数列必有极限，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

由$x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$两边求极限，有$A = \sqrt{3A}$，故$A = 3$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

三、设$-1 < x_1 < 0$，$x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.（2017—2018 学年）

证明：首先，用归纳法证明：$-1 < x_n < 0, n = 1, 2, \cdots$.

由已知条件，当$n = 1$时，结论成立.

假设结论对$n = k$时，结论成立，即$-1 < x_k < 0$.

当$n = k+1$时，$x_{k+1} = x_k^2 + 2x_k = x_k(x_k + 2) < 0$，且

$$x_{k+1} + 1 = x_k^2 + 2x_k + 1 = (x_n + 1)^2 > 0,$$

即$-1 < x_{k+1} < 0$.

故数列$\{x_n\}$有界.

又$x_{n+1} - x_n = x_n^2 + x_n = x_n(x_n + 1) < 0$，即数列$\{x_n\}$单调减少.

由于单调有界数列必有极限，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

由$x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$两边求极限，得$A = A^2 + 2A \Rightarrow A = 0$或$A = -1$.

因为$\{x_n\}$单调减少，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不可能为 0，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

四、设数列$\{x_n\}$满足：$x_1 = \sqrt{2}$，$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在, 并求其极限值. (2018—2019 学年)

证明：首先，用归纳法证明：$0 < x_n < 2,\ n = 1, 2, \cdots$

事实上，当$n = 1$时，结论显然成立.

假设结论当$n = k$时成立，即$0 < x_k < 2$.

当$n = k+1$时，$0 < x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2+2} = 2$，结论也成立.

因此，数列$\{x_n\}$有界.

接下来，用归纳法证明数列$\{x_n\}$单调增加，即$x_{n+1} \ge x_n$，$n = 1, 2, \cdots$.

当$n=1$时，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=x_1$，结论成立.

设结论对$n=k-1$时也成立，即$x_k\geq x_{k-1}$，则当$n=k$时，

$$x_{k+1}-x_k=\sqrt{2+x_k}-\sqrt{2+x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-1}}{\sqrt{2+x_k}+\sqrt{2+x_{k-1}}}\geq 0,$$

即$x_{k+1}\geq x_k$，结论对$n=k$时也成立.

因此，数列$\{x_n\}$单调增加.

由于单调有界数列必有极限，故极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

由$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$两边取极限，得$A=\sqrt{2+A}$. 解得$A=2$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

五、证明数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$存在，且极限值大于 1 但不超过 2.（2020—2021 学年）

证明：记$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$，显然数列$\{x_n\}$是单调增加的.

又因为

$$\begin{aligned}0<x_n&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\\&=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2,\end{aligned}$$

即数列$\{x_n\}$有界.

由于单调有界数列必有极限，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$存在.

由于$0<x_n<2,\ n=1,2,\cdots$，由极限的保号性，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$不会超过 2.

六、设数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限值. (2021—2022 学年)

证明一：因为$x_1<1$，当$n>1$时，$x_n-1=-x_{n-1}^2+2x_{n-1}-1=-(x_{n-1}-1)^2\leq 0$.

故$x_n\leq 1,\ n=1,2,\cdots$.

由 $x_1>0$，如果 $x_n>0$，由 $0<x_n\le 1$，有 $x_{n+1}=x_n(-x_n+2)>0$，即 $0<x_n\le 1,\ n=1,2,\cdots$.

当 $n=1,2,\cdots$ 时，

$$x_{n+1}-x_n=-x_n^2+x_n=x_n(1-x_n)\ge 0,$$

故数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

由于单调有界数列必有极限，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$ 两边求极限可得 $A=-A^2+2A$，解得 $A=0$ 或 $A=1$.

由于 $x_n\ge\dfrac{1}{2},\ n=1,2,\cdots$，则 $A\ne 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

证法二：由 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$ 可得

$$x_{n+1}-1=-x_n^2+2x_n-1=-(x_n-1)^2.$$

于是，$$x_n-1=-(x_{n-1}-1)^2=-(x_{n-2}-1)^4=\cdots=-(x_1-1)^{2^{n-1}},$$

即 $x_n=1-\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}})=1$.