历届试卷中有关中值问题的应用

一、利用零点定理：

将要证明的等式改写成$\varphi(\xi)=0$，然后找出区间内存在两点异号的点，再用零点定理证明存在一点ξ，使得$\varphi(\xi)=0$.

二、利用罗尔定理

将要证明的结论写成$\varphi'(\xi)=0$的情形，然后找处区间内函数值相等的两个点，再利用罗尔定理证明.

例 1. 设函数$f(x)$在$[0,n]$上连续（n为自然数，$n\geq 2$），$f(0)=f(n)$. 证明：存在ξ，$\xi+1\in[0,n]$，使得$f(\xi)=f(\xi+1)$. （2016—2017）

分析： 将要证明的式子改写成$f(\xi)-f(\xi+1)=0$，故可设辅助函数为$F(x)=f(x)-f(x+1)$.

证明：由已知条件，可得$F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=f(0)-f(n)=0$.

如果$F(0)=F(1)=\cdots=F(n-1)=0$，则可取$\xi=k(k=0,1,\cdots,n-1)$.

如果存在某个整数$k(0\leq k\leq n-1)$，使得$F(k)\neq 0$，由$F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=0$知，一定能找到另一个整数$l(0\leq l\leq n-1)$，使得$F(k)F(l)<0$.

由于$f(x)$在$[0,n]$上连续，由零点定理，在k和l之间必存在点ξ，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=f(\xi+1)$..

显然，$\xi\in[0,n-1]$，$\xi+1\in[0,n]$.

例 2. 设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且有$f(0)=0$，$f(1)+f(2)=2$，$f(3)=4$. 证明：

(1) 至少存在一点$\xi\in[1,2]$，使得$f(\xi)=1$；(2) 至少存在一点$\eta\in(0,3)$，使得$f'(\eta)=1$. (2018—2019)

分析：（1）将$f(\xi)=1$改写成$f(\xi)-1=0$，作辅助函数$\varphi(x)=f(x)-1$.

（2）将$f'(\eta)=1$改写成$f'(\eta)-1=0$，即$(f(x)-x)'\big|_{x=\eta}=0$. 作辅助函数$F(x)=f(x)-x$.

证明：（1）作辅助函数$\varphi(x)=f(x)-1$.

容易得到，$\varphi(1)+\varphi(2)=f(1)+f(2)-2=0$，即$\varphi(1)\varphi(2)\leq 0$.

如果$\varphi(1)=0$，即$f(1)=1$，取$\xi=1$.

如果$\varphi(1)\neq 0$，则$\varphi(1)\varphi(2)<0$，由零点定理，存在$\xi\in(1,2)$，使得$\varphi(\xi)=0$，即$f(\xi)=1$.

（2）作辅助函数$F(x)=f(x)-x$，

由（1）知，$\xi\in[1,2]$，$f(\xi)=1$. 于是，$F(\xi)=f(\xi)-\xi=1-\xi\leq 0$，而$F(3)=f(3)-3=4-3>0$，

由零点定理，存在$c\in[\xi,3]$，使得$F(c)=0$.

因为函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，则函数$F(x)$在$[0,c]$上连续，在$(0,c)$内可导，且

$F(c)=F(0)=0$.

由罗尔定理，存在$\eta\in(0,c)\subset(0,3)$，使得$F'(\eta)=0$，即$f'(\eta)=1$.

三、常见中值问题类型：$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$.

将式子改写成$f'(\xi)\mathrm{e}^{g(\xi)}+\mathrm{e}^{g(\xi)}g'(\xi)f(\xi)=0$，由于

$$[f(x)\mathrm{e}^{g(x)}]'=f'(x)\mathrm{e}^{g(x)}+f(x)\mathrm{e}^{g(x)}g'(x)$$

故可设辅助函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$.

例 1. 设函数$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且$f(0)\cdot f(2)>0$，$f(0)\cdot f(1)<0$. 证明：存在$\xi\in(0,2)$，使得$f'(\xi)=2f(\xi)$. （2016—2017）

分析： 要证的式子改写为$f'(\xi)-2f(\xi)=0$. 这里的$g'(x)=-2$，所以，取$g(x)=-2x$.

故可设辅助函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-2x}$.

证明：因为函数$f(x)$在$[0,2]$上连续，且$f(0)\cdot f(2)>0$，$f(0)\cdot f(1)<0$，由零点定理，存在$x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,2)$，使得$f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$.

作辅助函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-2x}$，则$F'(x)=f'(x)\mathrm{e}^{-2x}-2f(x)\mathrm{e}^{-2x}$.

因为$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导知，$F(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)内可导，且$f(x_1)=f(x_2)=0$.

由罗尔定理，存在$\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,2)$，使得$F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)\mathrm{e}^{-2\xi}-2f(\xi)\mathrm{e}^{-2\xi}=0,$$

移项后可得 $f'(\xi)=2f(\xi)$.

例 2. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(2)=2f(1)$．证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$．（2017—2018）

分析： $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$ 可改写成 $f'(\xi)-\dfrac{1}{\xi}f(\xi)=0$．这里的 $g'(x)=-\dfrac{1}{x}$，故 $g(x)=-\ln x$，于是作辅助函数 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-\ln x}=\dfrac{f(x)}{x}$.

证明： 作辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，于是，$F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

由于函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，则函数 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导.

因为 $f(2)=2f(1)$，故 $F(1)=\dfrac{f(1)}{1}=f(1)=\dfrac{f(2)}{2}=F(2)$.

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0$，也即 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

例 3. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(1)+f(2)=0$．证明存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.（2020—2021）

分析： $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ 可改写成 $f'(\xi)+\dfrac{1}{\xi}f(\xi)=0$．此时 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$，即 $g(x)=\ln x$，于是作辅助函数 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\ln x}=xf(x)$.

注意到 $F(0)=0$，于是只要找到另一个零点即可.

证明： 首先证明在 $[1,2]$ 中存在一点 c，使得 $f(c)=0$.

如果 $f(1)=f(2)=0$，则取 $c=1$ 或 $c=2$.

如果 $f(1)\neq 0$，因为 $f(1)+f(2)=0$，则 $f(1)f(2)<0$，由 $f(x)$ 的连续及零点定理，存在 $c\in(1,2)$，使得 $f(c)=0$.

作辅助函数 $F(x)=xf(x)$.

由于 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，可得 $F(x)$ 在 $[0,c]$ 上连续，在 $(0,c)$ 内可导，且

$$F(0)=0,\ F(c)=cf(c)=0.$$

由罗尔定理，存在$\xi \in (0,c) \subset (0,2)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

例 4. 设函数$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且有$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=-1$. 证明：至少存在一点$\xi \in (0,2)$，使得$f'(\xi)=f(\xi)$.（2021—2022）

分析： $f'(\xi)=f(\xi)$可改写成$f'(\xi)-f(\xi)=0$. $g'(x)=-1$可取$g(x)=-x$，于是作辅助函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

由于$f(0)=0$，则$F(0)=f(0)=0$，只需再找一个零点即可.

证明： 作辅助函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

由$f(1)=1$，$f(2)=-1$，即$f(1)f(2)<0$. 有连续函数的零点定理，存在$c \in (1,2)$，使得$f(c)=0$.

因为函数$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，则函数$F(x)$在$[0,c]$上连续，在$(0,c)$内可导，且$F(0)=F(c)=0$. 由罗尔定理，存在$\xi \in (0,c) \subset (0,2)$，使得$F'(\xi)=f'(\xi)\mathrm{e}^{-\xi}+f(\xi)(-\mathrm{e}^{-\xi})=0$，

即$f'(\xi)=f(\xi)$.

四、拉格朗日中值定理的应用

（1）证明不等式；（2）中值问题的应用

例 1. 设$a>b>0$，证明：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.（2020—2021）

解： 利用拉格朗日中值定理，$\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b=\dfrac{1}{\xi}(a-b)$，其中$b<\xi<a$.

由$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{b}$，得$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$.

例 2. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=1$，$f(1)=0$. 试证：（1）存在$x_0 \in (0,1)$，使得$f(x_0)=x_0$；（2）存在不同的$\xi,\eta \in (0,1)$，使得$f'(\xi)f'(\eta)=1$.（2019—2020）

分析：（1）要证明的式子$f(x_0)=x_0$改写成$f(x_0)-x_0=0$，作辅助函数$F(x)=f(x)-x$，用零点定理证明；

（2）一般情况下，（2）证明需要用到（1）的结论，即$f(x_0)=x_0$.

证明： 作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$F(0)=f(0)=1>0,\quad F(1)=f(1)-1=-1<0.$$

由零点定理，存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$.

（2）因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,x_0)$，$\eta\in(x_0,1)$

$$f(x_0)-f(0)=f'(\xi)(x_0-0)，即\ x_0-1=f'(\xi)x_0,$$

$$f(1)-f(x_0)=f'(\eta)(1-x_0)，即 -x_0=f'(\eta)(1-x_0).$$

两式相乘，可得 $-x_0(x_0-1)=f'(\eta)(1-x_0)f'(\xi)x_0$，即 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

五、泰勒中值定理的应用

如果要证明的结论涉及到高阶导数，一般用泰勒公式.

（1）展开的项数：取决于题目告诉你导数的阶数.

例如，已知条件说函数 $f(x)$ 具有三阶导数，那么就应展成如下形式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_0)^3,$$

其中 ξ 介于 x_0 和 x 之间.

（2）常见的展开点（即上式中的 x_0）：

导数值已知的点（包括极值点，极值点导数为 0）；中点，边界点.

如果是估计函数导数值，有时用以下展开式

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(t-x)^3，\ \xi\ 介于\ x\ 和\ t\ 之间.$$

（3）代入点，常常是已知函数值的点，

例 1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可导，并且满足 $\forall x\in\mathbb{R}$，$|f(x)|\le 1$，$|f'''(x)|\le 1$. 证明：$\forall x\in\mathbb{R}$，$|f'(x)|^3\le\frac{9}{8}$.（2016—2017）

分析： 本题提到高阶导数，需要泰勒公式.

（1）已知函数三阶可导，所以展开到三阶导数出现；

（2）展开点是要估计一阶导数的值，就在x处展开，即

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(t-x)^3$$

（3）已知条件有函数和三阶导数的的估计式，没有二阶导数的估计式，所以可以使x成为中点，通过两式相减消掉中点的函数值.

证明： 由已知条件和泰勒公式，有

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(t-x)^3,$$

其中ξ介于x和t之间.

任取$h>0$，分别将$t=x+h$及$t=x-h$代入上式，得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)h^3,$$
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2-\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)h^3.$$

其中$x-h<\xi_2<x<\xi_1<x+h.$

两式相减，有

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)h^3+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)h^3,$$

即，$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)h^2-\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)h^2.$$

于是，$$|f'(x)|\le\frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|}{2h}+\frac{1}{2\cdot 3!}|f'''(\xi_2)|h^2+\frac{1}{2\cdot 3!}|f'''(\xi_1)|h^2$$
$$\le\frac{2}{2h}+\frac{1}{2\cdot 3!}h^2+\frac{1}{2\cdot 3!}h^2=\frac{1}{h}+\frac{1}{6}h^2.$$

令$\frac{1}{2h}=\frac{1}{6}h^2$（或令$(\frac{1}{h}+\frac{1}{6}h^2)'=0$），有$h=\sqrt[3]{3}$，则有$|f'(x)|\le\frac{6+h^3}{6h}\le\frac{9}{8}$.

例 2. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有连续的二阶导数. 证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$ （2017—2018）

分析： 展开到二阶导数，展开点应该是中点.

证明： 由泰勒公式，

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2$$，ξ 介于 x 和 $\frac{a+b}{2}$ 之间.

分别取 $x=a$， $x=b$，得

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})-f'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4},$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4},$$

其中 $a<\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2<b$.

两式相加，得

$$f(a)+f(b)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}$$

$$=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)],$$

因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有连续的二阶导数，所以， $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，故 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上取得最大值 M 和最小值 m.

于是，$m\le\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\le M$.

由连续函数的介值定理，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$.

故 $$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$