厦门大学《线性代数 I》课程期中考试卷

学院________年级__________姓名__________学号____________

主考教师： **试卷类型：**

仅列出关键思路

一（10 分）．设 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求 $f(A)$.

$$f(A)=A^3-3A^2+3A+\underline{2E}$$

二（10 分）．已知 $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1 & 5\\ -1 & 5 & 7 & -8\\ 2 & 1 & 3 & 4\\ 6 & 1 & -5 & 3\end{bmatrix}$，求矩阵 A 的第 1 列的各元素的代数余子式之和.

三（10 分）. 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3], |A|=1, B=[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3]$,

求 $|B|$.

$$B = A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

四（15 分）. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1}+2X$，求矩阵 X.

$$(A^*-2E)X = A^{-1}$$

$$A(A^*-2E)X = AA^{-1}$$

$$(|A|E-2A)X = E$$

To solve X.

$$[\,|A|E-2A \,,\, E\,] \xrightarrow{\text{行变}} [\,E \,,\, 小\,]$$

所求 X

五（10分）计算 $D_n=\begin{vmatrix} a+b & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & a+b & -b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & -b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & a+b \end{vmatrix}$ （其中 $a\neq b$）.

见详本 1.4 A4(8)

六（18 分）设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3 \\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5 \end{cases}$，问 a,b 为何值时，此线性方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求通解.

参考 例 2.1.7 P.85

七（15 分）.已知 A,B 是 3 阶矩阵，满足 $AB-4A=2B$ 。

（1） 证明 $A-2E$ 是可逆的；

（2） 如果 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 A .

(1) 验证 $(A-2E)(B-4E)=8E$

则 $|A-2E|\neq 0$

$A-2E$ 可逆

(2) $A(B-4E)=2B$

若 $B-4E$ 可逆 则.

$A=2B\underbrace{(B-4E)^{-1}}_{\text{右乘}}$

$$\begin{bmatrix}B-4E\\ 2B\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列变!}}\begin{bmatrix}E\\ ?\end{bmatrix}$$

所求的A

八（12 分）（1）设 $x>y>z>0$，证明 $\frac{1}{xy+yz+zx}\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & xz \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}<0$.

（2）设 $A=\left[a_{ij}\right]_n (n>2)$ 是非零矩阵，且 $A^*=A^T$，证明 $AA^T=E$.

(2) $A^*=A^T$

$AA^*=AA^T$

$|A|E=AA^T$ —— (*)

同取行列式

$|A|^n=|A|\,|A^T|=|A|^2$

$|A|^2(|A|^{n-2}-1)=0$

若 $|A|=0$. (*) $\Rightarrow$ $0=AA^T$

$=\begin{bmatrix}\alpha_1^T \\ \\ \alpha_n^T\end{bmatrix}[\alpha_1 \cdot \quad \alpha_n]$

$=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & & \\ & \alpha_2^T\alpha_2 & \\ & & \end{bmatrix}$ (**)

$\Rightarrow \alpha_i^T\alpha_i=0 \Rightarrow A=0$ 矛盾.

若 $|A|^{n-2}=1$ 若 $n>2$ 为奇数 $|A|=1$

(*) $\Rightarrow$ $AA^T=E$

若 $n>2$ 为偶数 $|A|=1$ 或 -1

则 (*) $\Rightarrow$ $\pm E=AA^T$ 但从 (**) 知 AA^T 对角线元素非负

故 $E=AA^T$.