与积分相关的计算问题

一、 和定积分定义相关的计算:

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})]=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,,$$

注: 这类题目都提出一个 $\frac{1}{n}$，再看其余部分.

更一般地，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}[f(a+\frac{1}{n}(b-a))+f(a+\frac{2}{n}(b-a))+\cdots+f(a+\frac{n}{n}(b-a))]$$

例 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$；（2016—2017）

解: 这里 $f(\frac{k}{n})=\ln(1+\frac{k}{n})$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1+x)'\ln(1+x)\mathrm{d}x$$

$$=(1+x)\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=2\ln 2-\int_0^1\mathrm{d}x=2\ln 2-1.$$

例 2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$；（2017—2018）

解:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}})\qquad(提出\frac{1}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1=2\sqrt{2}-2.$$

二、与变上限积分相关的计算

变上限积分的导数：设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可导，a 和 b 是常数，则

$$(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t)'=f(x)\text{，}\quad (\int_x^b f(t)\mathrm{d}t)'=-f'(x)\text{；}$$

$$(\int_a^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t)'=f(\psi(x))\psi'(x)\text{，}\quad (\int_{\varphi(x)}^b f(t)\mathrm{d}t)'=-f(\varphi(x))\varphi'(x)\text{；}$$

$$(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t)'=f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

注： 这里的被积函数 $f(t)$ 不带 x．如果带有 x 须作变换后，再求导.

含变上限积分的极限，如果是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，可采用洛必达法则.

例 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x (x-t)\cos t^2\mathrm{d}t}$；（2016—2017）

分析： $x\to 0$ 时，

$$\lim_{x\to 0}(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t)^2=(\int_0^0 \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t)^2=0\text{，}\quad \lim_{x\to 0}\int_0^x (x-t)\cos t^2\mathrm{d}t=\int_0^0 (0-t)\cos t^2\mathrm{d}t=0\text{，}$$

所以所求极限是 $\frac{0}{0}$ 型.

因为分母中的被积函数含有 x，需要处理一下.

$$\int_0^x (x-t)\cos t^2\mathrm{d}t=\int_0^x x\cos t^2\mathrm{d}t-\int_0^x t\cos t^2\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t-\int_0^x t\cos t^2\mathrm{d}t\quad \text{（注：这里积分变量是 } t\text{）}$$

解： $$\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t)^2}{\int_0^x (x-t)\cos t^2\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t)^2}{x\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t-\int_0^x t\cos t^2\mathrm{d}t}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t)^2]'}{[x\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t-\int_0^x t\cos t^2\mathrm{d}t]'}\qquad \text{（洛必达法则）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t)(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t)'}{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t+x(\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t)'-(\int_0^x t\cos t^2\mathrm{d}t)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(\int_0^x e^{t^2}dt)e^{x^2}}{\int_0^x \cos t^2dt+x\cos x^2-x\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(\int_0^x e^{t^2}dt)e^{x^2}}{\int_0^x \cos t^2dt}=\lim_{x\to0}2e^{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x \cos t^2dt}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x \cos t^2dt}\quad（还是\frac{0}{0}型）$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)'}{(\int_0^x \cos t^2dt)'}\qquad（洛必达法则）$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}}{\cos x^2}=2.$$

例 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt}{\sin^2 x}$；（2017—2018）

分析: $\lim\limits_{x\to0}\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt=\int_0^0 e^{-t^2}dt=0$，$\lim\limits_{x\to0}\sin^2 x=0$，所以是$\dfrac{0}{0}$型，其中$\sin^2 x\sim x^2$，$(x\to0)$.

解:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt}{x^2}\qquad（等价无穷小代换：\sin^2 x\sim x^2，(x\to0)）$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt)'}{(x^2)'}\qquad（洛必达法则）$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}(x^2)'}{2x}=\lim_{x\to0}e^{-x^2}=1.$$

例 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t(e^{(x-t)^2}-1)dt}{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}$；（2019—2020）

分析: 本题也是$\dfrac{0}{0}$型.

（1）分子的被积函数含有x，为了求导数，分子须做一些处理.

令$x-t=u$，则

$$\int_0^x t(\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1)\mathrm{d}t=\int_x^0(x-u)(\mathrm{e}^{u^2}-1)(-\mathrm{d}u)$$

$$=\int_0^x(x-u)(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^x x(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u-\int_0^x u(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u$$

$$=x\int_0^x(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u-\int_0^x u(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u\ ;$$

（2）分母需用麦克劳林公式找到等价无穷小.

解：令 $x-t=u$，则

$$\int_0^x t(\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1)\mathrm{d}t=x\int_0^x(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u-\int_0^x u(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u\,.$$

由麦克劳林公式，有

$$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4))$$

$$=(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4\cdot 2!})x^4+o(x^4)$$

$$=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\,.$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{-\frac{1}{12}x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{12}x^4}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{o(x^4)}{-\frac{1}{12}x^4})=1$，即

当 $x\to 0$ 时，$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\frac{1}{12}x^4$.

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t(\mathrm{e}^{(x-t)^2}-1)\mathrm{d}t}{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u-\int_0^x u(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u}{-\frac{1}{12}x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[x\int_0^x(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u-\int_0^x u(\mathrm{e}^{u^2}-1)\mathrm{d}u]'}{-\frac{1}{12}(x^4)'}\qquad\text{（洛必达法则）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{u^2}-1)du + x(e^{x^2}-1) - x(e^{x^2}-1)}{-\frac{1}{12}4x^3}$$

$$=-3\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{u^2}-1)du}{x^3} = -3\lim_{x\to 0}\frac{[\int_0^x (e^{u^2}-1)du]'}{(x^3)'} \qquad \text{(洛必达法则)}$$

$$=-3\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = -1. \qquad (x\to 0\text{时，}e^{x^2}-1\sim x^2)$$

例 6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_1^{y^3} e^{-t^2}dt + \int_x^0 \cos^6(x-t)dt = 0$ 所确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$．（2020—2021）

解： 取 $x=0$，由 $\int_1^{y^3} e^{-t^2}dt + \int_x^0 \cos^6(x-t)dt = 0$ 得

$$\int_1^{y^3} e^{-t^2}dt + \int_0^0 \cos^6(x-t)dt = 0 \Rightarrow \int_1^{y^3} e^{-t^2}dt = 0.$$

因为 e^{-t^2} 大于 0，故 $\int_1^{y^3} e^{-t^2}dt = 0 \Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$，即 $y|_{x=0} = 1$.

令 $u = x - t$，则 $\int_x^0 \cos^6(x-t)dt = \int_0^x \cos^6 u(-du) = -\int_0^x \cos^6 u du$.

故已知等式化为

$$\int_1^{y^3} e^{-t^2}dt - \int_0^x \cos^6 u du = 0.$$

方程两边对 x 求导，则

$$e^{-y^3}\cdot 3y^2 y' - \cos^6 x = 0, \qquad \text{(注：}y\text{是}x\text{的函数)}$$

即
$$y' = \frac{\cos^6 x}{e^{-y^3}\cdot 3y^2}.$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入，得 $y'|_{x=0} = \frac{1}{e^{-1}\cdot 3\cdot 1^2} = \frac{e}{3}$.

三、函数方程：

若给定 $f(x) = g(x) + h(x)\int_a^b \varphi(x) f(x)dx$，求 $f(x)$，这里 a 和 b 是常数，$g(x)$，$h(x)$ 为已知函数.

注意到 $\int_a^b \varphi(x) f(x)dx$ 是常数，记 $A = \int_a^b \varphi(x) f(x)dx$，只要把 A 算出就可以.

由 $f(x)=g(x)+Ah(x)$ 两边同乘 $\varphi(x)$，然后积分

$$A=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x+A\int_a^b h(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

解方程，可求得 A.

例 7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且满足 $f(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x$，试求 $f(x)$.

（2016—2017）

解： 记 $A=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x$. 由 $f(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 可得 $f(x)=\mathrm{e}^x+A$，于是，

$$f(x)\sin x=\mathrm{e}^x\sin x+A\sin x,$$

两边积分，得

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x+A\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$$

即 $$A=\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x+2A.$$

移项后，得

$$A=-\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x \qquad \text{（分部积分）}$$

$$=-\mathrm{e}^\pi-1-(\mathrm{e}^x\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x) \qquad \text{（分部积分）}$$

$$=-\mathrm{e}^\pi-1+\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^\pi-1-A,$$

故 $A=-\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^\pi+1)$.

所以，$f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^\pi+1)$.

例 8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，且满足 $f(x)=\sin^3 x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x$，试求 $f(x)$. （2017—2018）

解： 令 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x$，则 $f(x)=\sin^3 x+2A$，即 $f(x)\sin x=\sin^4 x+2A\sin x$.

于是，$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\mathrm{d}x+2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+2A$$

解得 $A=-\frac{3}{16}\pi.$

注： $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{为奇数时}, \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数时}.\end{cases}$

四、被积函数为积分上限函数的积分计算

例 9. 设 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\mathrm{e}^x\cdot f(x)\mathrm{d}x$.（2018—2019）

分析： 本题求不出 $f(x)$，但 $f'(x)=-\frac{\sin x}{x}$.

解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\mathrm{e}^x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\mathrm{e}^x)'\cdot f(x)\mathrm{d}x$$

$$=(x\mathrm{e}^x)\cdot f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{e}^x\cdot f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}f(\frac{\pi}{2})-0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x.$$

因为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-(\mathrm{e}^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x(-\sin x)\mathrm{d}x)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-(-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1).$$

所以，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\mathrm{e}^x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1).$$

例 10. 设 $f(x)=\int_x^1\cos t^2\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$____________.（2021—2022）

解： 注意到，$f(1)=\int_1^1\cos t^2\mathrm{d}t=0$，于是，

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x)' f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(1) - \int_0^1 x(-\cos x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos x^2 \mathrm{d}x^2$$

$$= \frac{1}{2}\sin x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sin 1.$$