Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та
кібернетики

Лабораторна робота №1 з курсу «Управління
динамічними системами»
на тему:
«Аналітичне розв’язування диференціальних рівнянь
за допомогою комп’ютерних пакетів програм»
Виконав: студент групи ІПС-21
факультету комп’ютерних наук та кібернетики
Міцкевич Костянтин Олександрович
Варіант 3

Київ – 2024

Зміст

Завдання 1

№1 Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Рівняння: $xy` + y=y^2$;

Точки: $M_1(4, 3)$, $M_2(2, -3)$, $M_3(-2, -1)$, $M_4(-1, 2)$;

Аналітичний розв’язок

$$xy' + y = y^2$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y^2 - y$$

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{y^2 - y}}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int \frac{dx}{x}}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I.}\ \int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}\right) dy \boxed{=}$$

$$\begin{cases} y(A+B) = 0 \\ -A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -1 \\ B = 1 \end{matrix}$$

$$\boxed{=} \int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \ln|y-1| - \ln|y|$$

$$\mathrm{II}\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\ln|y-1| - \ln|y| - \ln|x| = C$$

$$\ln|(1 - \frac{1}{y}) \cdot \frac{1}{x}| = \ln C$$

$$\frac{1}{y} = 1 - x \cdot C \Rightarrow y = \frac{1}{1 - Cx}$$

Задача Коші:

1) $y(4) = 3$

$$3 = \frac{1}{1 - 4 \cdot C} \Rightarrow 3 - 12C = 1$$

$$C = \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{1 - \frac{x}{6}}$$

2) $y(2) = -3$

$$-3 = \frac{1}{1 - 2C} \Rightarrow -3 + 6C = 1$$

$$C = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}x}$$

3) $y(-2) = -1$

$$-1 = \frac{1}{1 + 2C} \Rightarrow -2C - 1 = 1$$

$$C = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{1 + x}$$

4) $y(-1) = 2$

$$2 = \frac{1}{1 - C} \Rightarrow 1 - 2C = 1$$

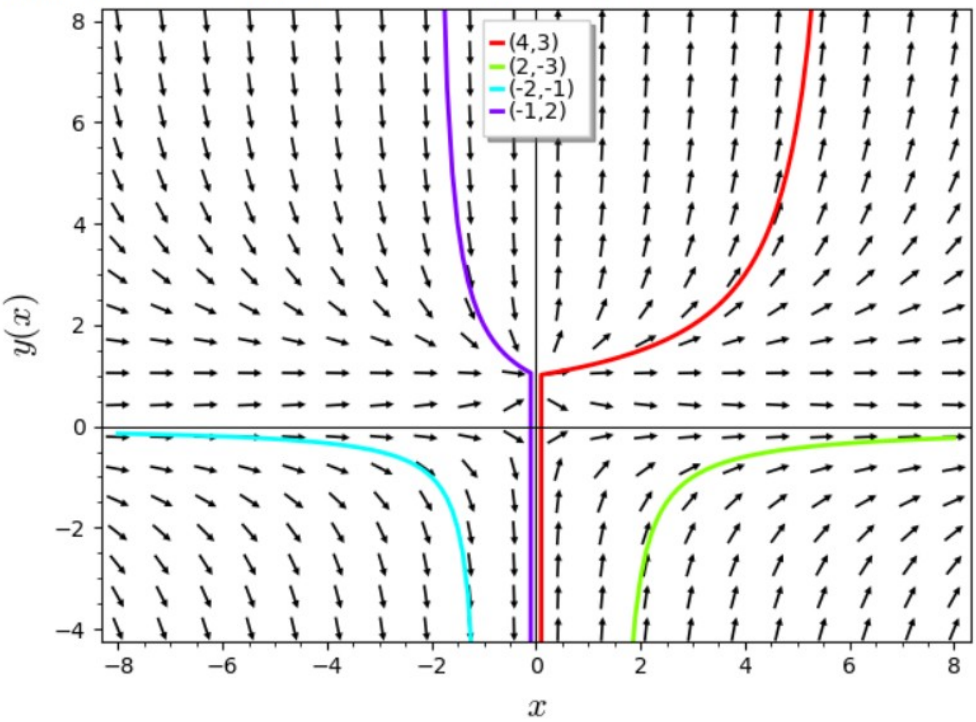
$$C = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{1 - 3}$$

Код програми Sage

```
#general solution
y=function('y')(x)
de = x*diff(y, x) + y == y^2
solution=desolve(de, y)

#simplify the solution
solution=solution.simplify_full()
solution=solution.canonicalize_radical()

#print
solution.show()

#Couchy problem solution
points = [[4, 3], [2, -3], [-2, -1], [-1, 2]]
couchy_solutions = []
for i in range(4):
    couchy_solutions.append(desolve(de,y,ics=points[i]))
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].simplify_full()
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].canonicalize_radical()
    couchy_solutions[i].show()
#Plot for Couchy problems
x, y=var('x, y')
f(x, y) = (y^2 - y)/x
r = 8
plot = plot_slope_field(f, (x, -r, r), (y, -r+4, r), headaxislength=3, headlength=3, axes_labels = ['$x$', '$y(x)$'])
points_for_graph = [[4, 3], [2, -3], [-2, -1], [-1, 2]]
points_printable = ["(4,3)", "(2,-3)", "(-2,-1)", "(-1,2)"]
for i in range(4):
    plot += desolve_rk4(f, y, ics=points_for_graph[i], ivar=x, output='plot',end_points=[-r, r], thickness=2,
                        rgbcolor=hue(0.25*i), legend_label=points_printable[i])
    show(plot, xmin=-r, xmax=r, ymin=-r+4, ymax=r)
```

Результат роботи програми Sage

$$\log\left(y\left(x\right) - 1\right) - \log\left(y\left(x\right)\right) = C + \log\left(x\right)$$
$$\log\left(y\left(x\right) - 1\right) - \log\left(y\left(x\right)\right) = -\log\left(3\right) - \log\left(2\right) + \log\left(x\right)$$
$$\log\left(y\left(x\right) - 1\right) - \log\left(y\left(x\right)\right) = -\log\left(3\right) + \log\left(2\right) + \log\left(x\right)$$
$$\log\left(y\left(x\right) - 1\right) - \log\left(y\left(x\right)\right) = -i\,\pi + \log\left(x\right)$$
$$\log\left(y\left(x\right) - 1\right) - \log\left(y\left(x\right)\right) = -i\,\pi - \log\left(2\right) + \log\left(x\right)$$



Код програми Maple

```
> # Визначення диф. рівняння
ode := x*diff(y(x),x) + y(x) = y(x)^2;

# Загальне рішення
general_solution := dsolve(ode);
print(general_solution);

# Розв'язок задачі коші
ics1 := y(4) = 3;
couchy_sol_1 := dsolve({ode, ics1});
print(couchy_sol_1);

ics2 := y(2) = -3;
couchy_sol_2 := dsolve({ode, ics2});
print(couchy_sol_2);

ics3 := y(-2) = -1;
couchy_sol_3 := dsolve({ode, ics3});
print(couchy_sol_3);

ics4 := y(-1) = 2;
couchy_sol_4 := dsolve({ode, ics4});
print(couchy_sol_4);

# Імпорт інструментів для побудови графіків
with(DEtools) :

# Побудова графіка інтегральних кривих та поля напрямків
DEplot(ode, y(x), x = -10 .. 10, y = -10 .. 10,
  [[y(4) = 3], [y(2) = -3], [y(-2) = -1], [y(-1) = 2]],
  color = black, linecolor = [red, green, blue, purple]
);
```

Результат роботи програми Maple:

$$ode := x\left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + y(x) = y(x)^2$$

$$general\_solution := y(x) = \frac{1}{x\, c_1 + 1}$$

$$y(x) = \frac{1}{x\, c_1 + 1}$$

$$ics1 := y(4) = 3$$

$$couchy\_sol\_1 := y(x) = -\frac{6}{x - 6}$$

$$y(x) = -\frac{6}{x - 6}$$

$$ics2 := y(2) = -3$$

$$couchy\_sol\_2 := y(x) = -\frac{3}{2\, x - 3}$$

$$y(x) = -\frac{3}{2\, x - 3}$$

$$ics3 := y(-2) = -1$$

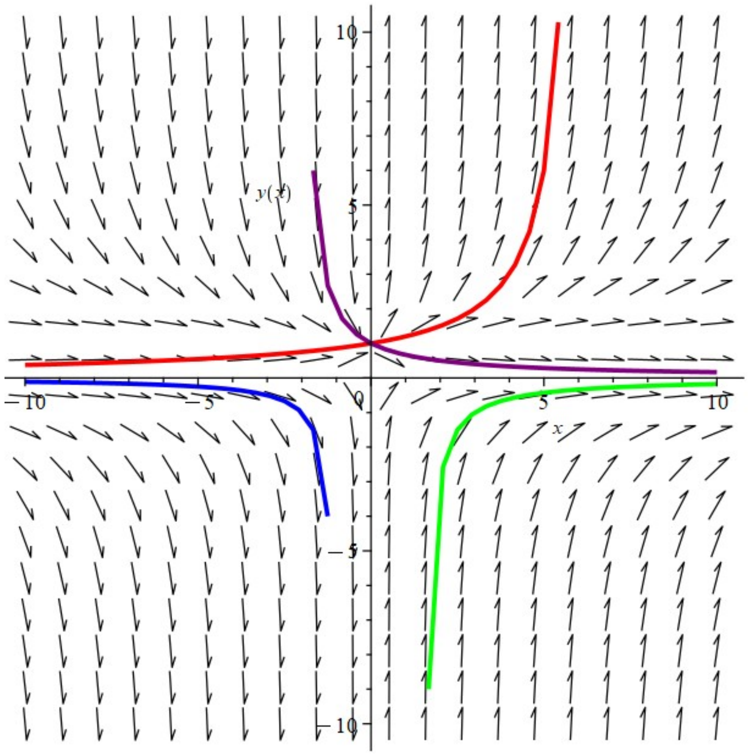
$$couchy\_sol\_3 := y(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$y(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$ics4 := y(-1) = 2$$

$$couchy\_sol\_4 := y(x) = \frac{2}{x + 2}$$

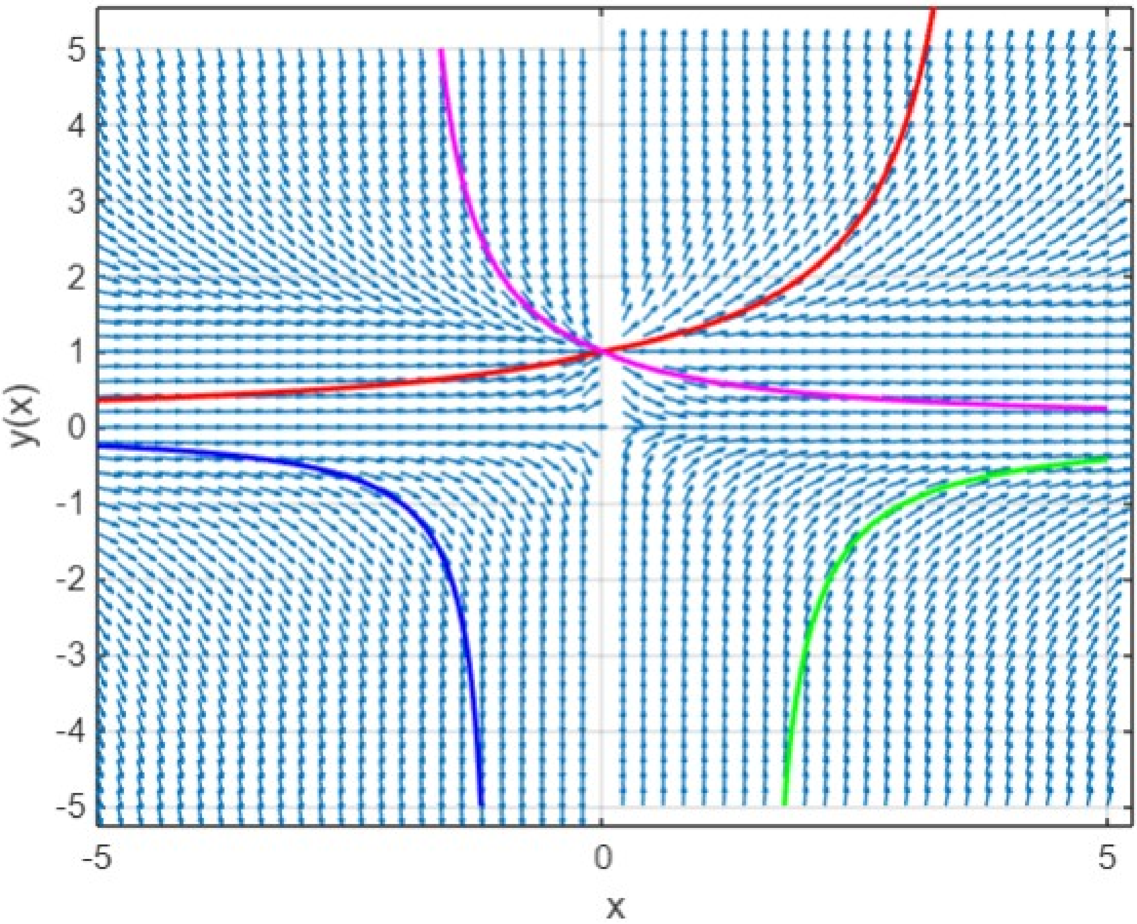
$$y(x) = \frac{2}{x + 2}$$



Код програми MATLAB

```
clc;
clear;

syms x y(x)

% Визначення диференціального рівняння
ode = x * diff(y(x), x) + y(x) == y(x)^2;

% Знаходження загального розв'язку
general_solution = dsolve(ode);
disp('General Solution: ');
disp(general_solution);

% Початкові точки для задачі Коші
ics = {y(4) == 3, y(2) == -3, y(-2) == -1, y(-1) == 2};
cauchy_solutions = cell(size(ics));

% Розв'язання задачі Коші
for i = 1:length(ics)
    cauchy_solutions{i} = dsolve(ode, ics{i});
    disp(['Cauchy Solution ' num2str(i) ':']);
    disp(cauchy_solutions{i});
end

% Створення сітки для напряму поля
[x, y] = meshgrid(-5:0.2:5, -5:0.2:5);
m = (y.^2 - y)./x; % Нахил напряму поля
L = sqrt(1 + m.^2); % Нормалізуючий коефіцієнт для стрілок
quiver(x, y, 1./L, m./L); % Візуалізація напряму поля
axis tight;
hold on;

fun = @(x, y) (y.^2 - y)./x;

% Встановлення інтервалів для обрахунку точки M1(3, 4)
[x1, y1] = ode45(fun, [3, 3.28], 4);
plot(x1, y1, 'r', 'LineWidth', 1.5), hold on;
[x2, y2] = ode45(fun, [3, -5], 4);
plot(x2, y2, 'r', 'LineWidth', 1.5), hold on;

% Встановлення інтервалів для обрахунку точки M2(2, -3)
[x1, y1] = ode45(fun, [2, 5], -3);
plot(x1, y1, 'g', 'LineWidth', 1.5), hold on;
[x2, y2] = ode45(fun, [2, 1.8], -3);
plot(x2, y2, 'g', 'LineWidth', 1.5), hold on;

% Встановлення інтервалів для обрахунку точки M3(-2, -1)
[x1, y1] = ode45(fun, [-2, -1.2], -1);
plot(x1, y1, 'b', 'LineWidth', 1.5), hold on;
[x2, y2] = ode45(fun, [-2, -5], -1);
plot(x2, y2, 'b', 'LineWidth', 1.5), hold on;

% Встановлення інтервалів для обрахунку точки M4(-1, 2)
[x1, y1] = ode45(fun, [-1, 5], 2);
plot(x1, y1, 'm', 'LineWidth', 1.5), hold on;
[x2, y2] = ode45(fun, [-1, -1.6], 2);
plot(x2, y2, 'm', 'LineWidth', 1.5), hold on;

% Відкриття графіку
grid on, xlabel('x'), ylabel('y(x)');
```

Результат роботи програми MATLAB:




```
General Solution:
            1
            0
-1/(C1*x - 1)

Cauchy Solution 1:
-6/(x - 6)

Cauchy Solution 2:
-1/((2*x)/3 - 1)

Cauchy Solution 3:
1/(x + 1)

Cauchy Solution 4:
2/(x + 2)
```

Завдання 2

№2 Побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Рівняння: $(x+4y)y` = 2x + 3y - 5$

Точки: $M_1(4, 3)$, $M_2(2, -3)$, $M_3(-2, -1)$, $M_4(-1, 2)$;

Аналітичний розв’язок

$$y' = \frac{2x+3y-5}{x+4y}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y=-1 \\ x=4 \end{matrix}$$

ЗАМІНА:

$x_1 = x+4$

$y_1 = y-1$ $\Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1+3y_1}{x_1+4y_1}$ – однорідне рівняння

$y' = y_1'$

ЗАМІНА

$y_1 = ux_1$

$dy_1 = u\,dx_1 + x_1 d$ $\Rightarrow \frac{u\,dx_1 + x_1 du}{dx_1} = \frac{2x_1+3ux_1}{x_1+4ux_1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow ux_1 dx_1 + x_1^2 du + 4u^2 x_1 dx_1 + 4ux_1^2 du = 2x_1 dx_1 + 3ux_1 dx_1 \quad | \cdot \frac{1}{x_1}$

$u\,dx_1 + x_1 du + 4u^2 dx_1 + 4ux_1 du = 2dx_1 + 3u\,dx_1$

$dx_1(-2u+4u^2-2) = du(-4u-1) \cdot x$

$$\frac{-(4u+1)du}{4u^2-2u-2} = \frac{dx_1}{x_1}$$

$$\underbrace{\int \frac{4u-1}{4u^2-2u-2} \cdot du}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int \frac{dx_1}{x_1}}_{\mathrm{II}}$$

$\mathrm{I} - \int \frac{4u-1}{4u^2-2u-2} du = -\frac{1}{4} \int \frac{4u+1}{(u-1)(u+\frac{1}{2})} \boxminus$

$u = -\frac{1}{2}, u = 1$

$\frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+\frac{1}{2}} = \frac{(A+B)u + \frac{1}{2}A - A}{(u-1)(u+\frac{1}{2})} \Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ A-1B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B=\frac{2}{3} \\ A=\frac{10}{3} \end{matrix}$

$\boxminus -\frac{1}{4}\int \frac{10}{3} \frac{du}{u-1} - \frac{1}{4}\int \frac{2}{3} \frac{du}{u+\frac{1}{2}} = -\frac{5}{6} \ln|u-1| - \frac{1}{6} \ln|u+\frac{1}{2}|$

$\mathrm{II} - \int \frac{dx_1}{x_1} = \ln|x_1| + C$

$-\ln(u-1)^{5/6} - \ln(u+\frac{1}{2})^{1/6} - \ln x_1 = C$

$-\ln(\frac{y_1}{x_1} - 1)^{5/6} - \ln(\frac{2y_1}{x_1}+1)^{1/6} - \ln x_1 = \ln C + \ln 2$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{\left(\frac{y+1}{x-4} - 1\right)^5} \cdot \sqrt[6]{\frac{2y+2}{x-4} + 1}} = C \cdot (x-4) \quad |^{\wedge 6}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{y-x+5}{x-4}\right)^5 \cdot \frac{2y+x-2}{x-4}} = \frac{1}{C} \cdot \cancel{(x-4)^6}$$

$$\boxed{(y-x+5)^5 \cdot (2y+x-2) = C}$$

ЗАДАЧІ КОШІ

1) $y(4) = 3 \Rightarrow C = 2^{13}$

2) $y(2) = -3 \Rightarrow C = 0$

3) $y(-2) = -1 \Rightarrow C = -6^6$

4) $y(-1) = 2 \Rightarrow C = 8$

Код програми Sage

1 Варіант коду:

```
x = var('x')
y = function('y')(x)
ode = diff(y, x) == (2*x + 3*y -5)/(x+4*y)
sol = desolve(ode, y, contrib_ode=True)

sum(sol).show()

cauchy_sol = desolve(ode, y, ics = [4,3], contrib_ode=True
```

2 Варіант коду:

```
x = var('x')
y = function('y')(x)
de = diff(y, x) == (2*x + 3*y - 5)/(x+4*y)

solution = desolve(de, y, contrib_ode=True)
if isinstance(solution, list):
    for sol in solution:
        sol = sol.simplify_full()
        sol = sol.canonicalize_radical()
        sol.show()

points = [[4, 3], [2, -3], [-2, -1], [-1, 2]]

f(x, y) = (2*x + 3*y - 5)/(x+4*y)

r = 8
plot = plot_slope_field(f, (x, -r, r+2), (y, -r, r+2), headlength=3, headaxislength=3, axes_labels=['$x$', '$y(x)$'])
points_printable = ["(4,3)", "(2,-3)", "(-2,-1)", "(-1,-2)"]

for i in range(4):
    sol_plot = desolve_rk4(f, y, ics=points[i], ivar=x,
                           output='plot', end_points=[-r, r], thickness=2, rgbcolor=hue(0.25*i),
                           legend_label=points_printable[i])
    plot += sol_plot

show(plot, xmin=-r, xmax=r+2, ymin=-r, ymax=r+2)
```

Результат роботи програми Sage

1 Варіант коду:

$$\frac{1}{6}\log\left(x + 2\,y\left(x\right) - 2\right) + \frac{5}{6}\log\left(x - y\left(x\right) - 5\right) = C$$

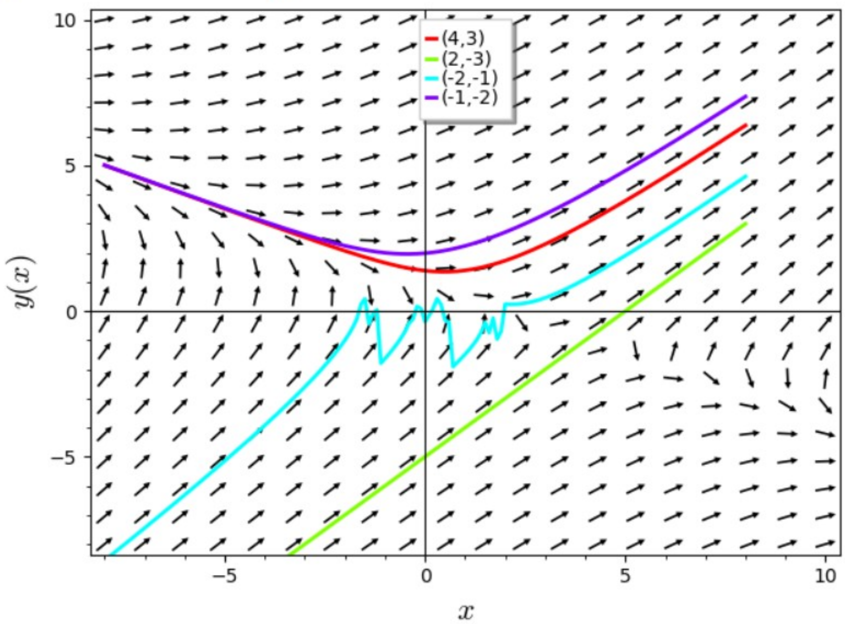
```
---------------------------------------------------------------------------
NotImplementedError                       Traceback (most recent call last)
Cell In [1], line 8
      4 sol = desolve(ode, y, contrib_ode=True)
      6 sum(sol).show()
----> 8 cauchy_sol = desolve(ode, y, ics = [Integer(4),Integer(3)], contrib_ode=True)

File /home/sc_serv/sage/src/sage/calculus/desolvers.py:607, in desolve(de, dvar, ics, ivar, show_method, contrib_ode, algorithm)
    605     if not show_method:
    606         maxima_method = P("method")
--> 607     raise NotImplementedError("Unable to use initial condition for this equation (%s)." % (str(maxima_method).strip()))
    608 if len(ics) == 2:
    609     tempic = (ivar == ics[0])._maxima_().str()

NotImplementedError: Unable to use initial condition for this equation (lie).
```

Помилка виникає через те, що SAGE не може розв’язати дане диференціальне рівняння з початковими умовами, оскільки параметр contrib_ode дає змогу це зробити лише для окремих випадків:

- `contrib_ode` – (optional) if `True`, `desolve` allows to solve Clairaut, Lagrange, Riccati and some other equations. This may take a long time and is thus turned off by default. Initial conditions can be used only if the result is one SymbolicEquation (does not contain a singular solution, for example).

2 Варіант коду:

$$\frac{1}{6}\log\left(x + 2\,y\left(x\right) - 2\right) + \frac{5}{6}\log\left(x - y\left(x\right) - 5\right) = C$$



Код програми Maple

```
> ode := diff(y(x),x) = (3y(x) − 5 + 2x)/(x + 4*y(x));
  general_solution := dsolve(ode, y(x) );

  ics1 := y(4) = 3;
  couchy_sol_1 := dsolve({ics1, ode});

  ics2 := y(2) = −3;
  couchy_sol_2 := dsolve({ics2, ode});

  ics3 := y(−2) = −1;
  couchy_sol_3 := dsolve({ics3, ode});

  ics4 := y(−1) = 2;
  couchy_sol_4 := dsolve({ics4, ode});

  with(DEtools);
  DEplot(ode, y(x), x = −10 .. 10, y = −10 .. 10, [[y(4) = 3], [y(2) = −3], [y(−2) = −1], [y(−1) = 2]], color = black, linecolor = [red, green, blue, purple]);
```

Результат роботи програми Maple:

$$ode := \frac{d}{dx}\, y(x) = \frac{2x + 3y(x) - 5}{x + 4y(x)}$$

$$general\_solution := y(x) = -1 + \frac{(x-4)\left(RootOf\left(\_Z^{36} + 3\,(x-4)^6 c_1\,\_Z^6 - 2\,(x-4)^6 c_1\right)^6 - 1\right)}{RootOf\left(\_Z^{36} + 3\,(x-4)^6 c_1\,\_Z^6 - 2\,(x-4)^6 c_1\right)^6}$$

$$ics1 := y(4) = 3$$

$$couchy\_sol\_1 := y(x) = \begin{cases} 3 \\ \dfrac{-8192\, RootOf\left(8192\,\_Z^{36} + \left(3x^6 - 72x^5 + 720x^4 - 3840x^3 + 11520x^2 - 18432x + 12288\right)\_Z^6 - 2x^6 + 48x^5 - 480x^4 + 2560x^3 - 7680x^2 + 12288x - 8192\right)^{30} - (x-2)\,(x-4)^5}{2\,(x-4)^5} \end{cases}$$

$$ics2 := y(2) = -3$$

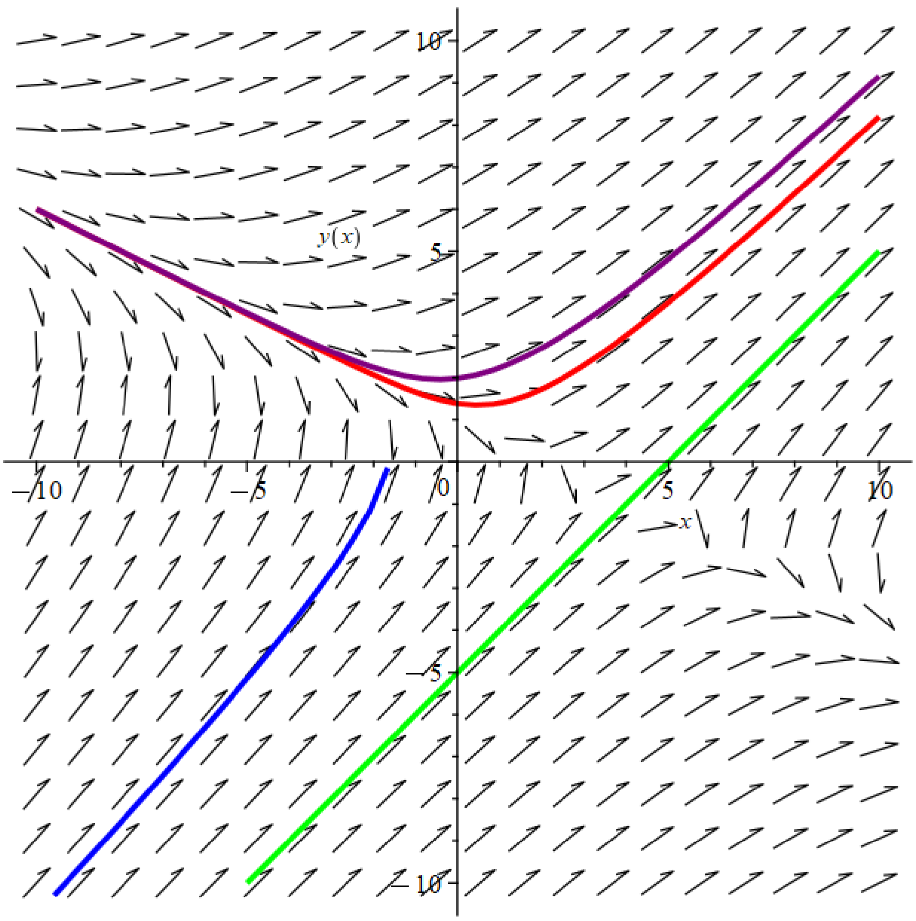
$$couchy\_sol\_2 := y(x) = x - 5$$

$$ics3 := y(-2) = -1$$

$$couchy\_sol\_3 := y(x) = \Big(x\, RootOf\left(46656\,\_Z^{36} + \left(-3x^6 + 72x^5 - 720x^4 + 3840x^3 - 11520x^2 + 18432x - 12288\right)\_Z^6 + 2x^6 - 48x^5 + 480x^4 - 2560x^3 + 7680x^2 - 12288x + 8192\right)^6 - 5\, RootOf\left(46656\,\_Z^{36} + \left(-3x^6 + 72x^5 - 720x^4 + 3840x^3 - 11520x^2 + 18432x - 12288\right)\_Z^6 + 2x^6 - 48x^5 + 480x^4 - 2560x^3 + 7680x^2 - 12288x + 8192\right)^6 - x + 4\Big) \Big/ RootOf\left(46656\,\_Z^{36} + \left(-3x^6 + 72x^5 - 720x^4 + 3840x^3 - 11520x^2 + 18432x - 12288\right)\_Z^6 + 2x^6 - 48x^5 + 480x^4 - 2560x^3 + 7680x^2 - 12288x + 8192\right)^6$$

$$ics4 := y(-1) = 2$$

$$couchy\_sol\_4 := y(x) = \Big(x\, RootOf\left(32768\,\_Z^{36} + \left(3x^6 - 72x^5 + 720x^4 - 3840x^3 + 11520x^2 - 18432x + 12288\right)\_Z^6 - 2x^6 + 48x^5 - 480x^4 + 2560x^3 - 7680x^2 + 12288x - 8192\right)^6 - 5\, RootOf\left(32768\,\_Z^{36} + \left(3x^6 - 72x^5 + 720x^4 - 3840x^3 + 11520x^2 - 18432x + 12288\right)\_Z^6 - 2x^6 + 48x^5 - 480x^4 + 2560x^3 - 7680x^2 + 12288x - 8192\right)^6 - x + 4\Big) \Big/ RootOf\left(32768\,\_Z^{36} + \left(3x^6 - 72x^5 + 720x^4 - 3840x^3 + 11520x^2 - 18432x + 12288\right)\_Z^6 - 2x^6 + 48x^5 - 480x^4 + 2560x^3 - 7680x^2 + 12288x - 8192\right)^6$$



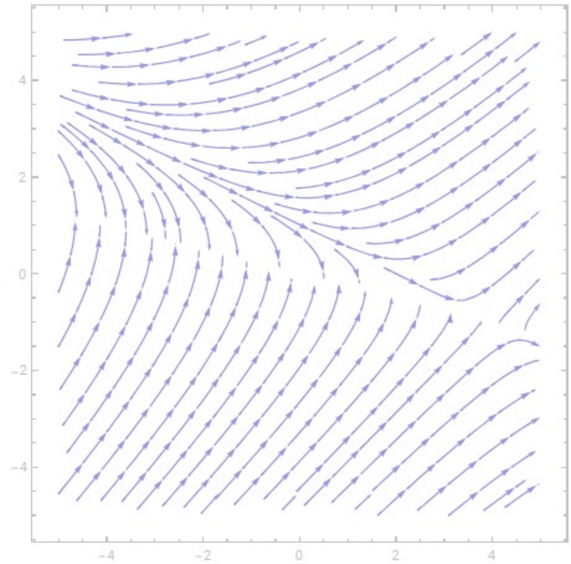
Код програми Mathematica

```
Clear[y, x];
ode = y'[x] == (2 * x + 3 * y[x] - 5) / (x + 4 * y[x]);
sol = DSolve[ode, y[x], x];
Print["General Solution: ", sol];

initialConditions = {y[4] == 3, y[2] == -3, y[-2] == -1, y[-1] == 2};
solutions = Table[DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x], {i, 1, Length[initialConditions]}];
Print["Solutions with Initial Conditions: ", solutions];

StreamPlot[{1, (2 * x + 3 * y - 5) / (x + 4 * y)}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
combinedPlot = Plot[ Evaluate[Table[y[x] /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}]], {x, -5, 5}, PlotStyle → Thick, PlotLegends →
  Placed[Table[initialConditions[[i]], {i, 1, Length[initialConditions]}], Below] ]; (* Об'єднання поля потоків і графіків рішень *)
 Show[combinedPlot]
```

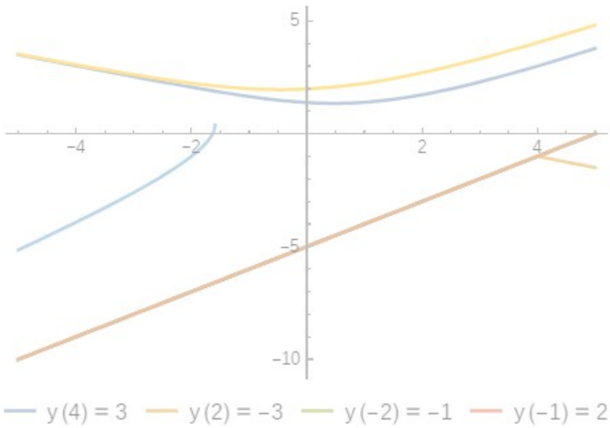
Результат роботи програми Mathematica:

General Solution: $\left\{\left\{y[x] \to -\frac{x}{4} + \frac{1}{4\,\text{Root}\left[1 + (96 - 24\,x)\,\#1 + (3\,600 - 1\,800\,x + 225\,x^2)\,\#1^2 + (64\,000 - 48\,000\,x + 12\,000\,x^2 - 1\,000\,x^3)\,\#1^3 + (480\,000 - 480\,000\,x + 180\,000\,x^2 - 30\,000\,x^3 + 1\,875\,x^4)\,\#1^4 + \left(-12\,800\,000 + 3\,125\,e^{\frac{15\,c_1}{8}} + 19\,200\,000\,x - 12\,000\,000\,x^2 + 4\,000\,000\,x^3 - 750\,000\,x^4 + 75\,000\,x^5 - 3\,125\,x^6\right)\#1^5\ \&,\ 1\right]}\right\},$

Out[143]=



Out[144]=



Завдання 3

№3 Розв’язати рівняння (показати вигляд загального розв’язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Рівняння: y = x(y` - x*cos(x))

Точки: $M_1(\frac{\pi}{2}, 1)$, $M_2(-\pi, 2)$, $M_3(\frac{-3\pi}{2}, -3)$, $M_4(\frac{3\pi}{2}, -1)$;

.єж0

Аналітичний розв'язок

$$y = x(y' - x \cdot \cos x)$$

$$y' - y \cdot \frac{1}{x} = x \cos x$$

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot \left[\int x \cdot \cos x \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} + C \right] =$$

$$= x \left[\int \cos x \, dx + C \right] =$$

$$= x \cdot (\sin x + C)$$

Задачі Коші

1. $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$C = \frac{2}{\pi} - 1 \Rightarrow y = x(\cos x + \frac{2}{\pi} - 1)$

2. $y(-\pi) = 2$

$C = -\frac{2}{\pi} \Rightarrow y = x(\cos x - \frac{2}{\pi})$

3. $y(-\frac{3\pi}{2}, -3)$

$C = \frac{2}{\pi} - 1 \Rightarrow y = x(\cos x + \frac{2}{\pi} - 1)$

4. $y(\frac{3\pi}{2}) = -1$

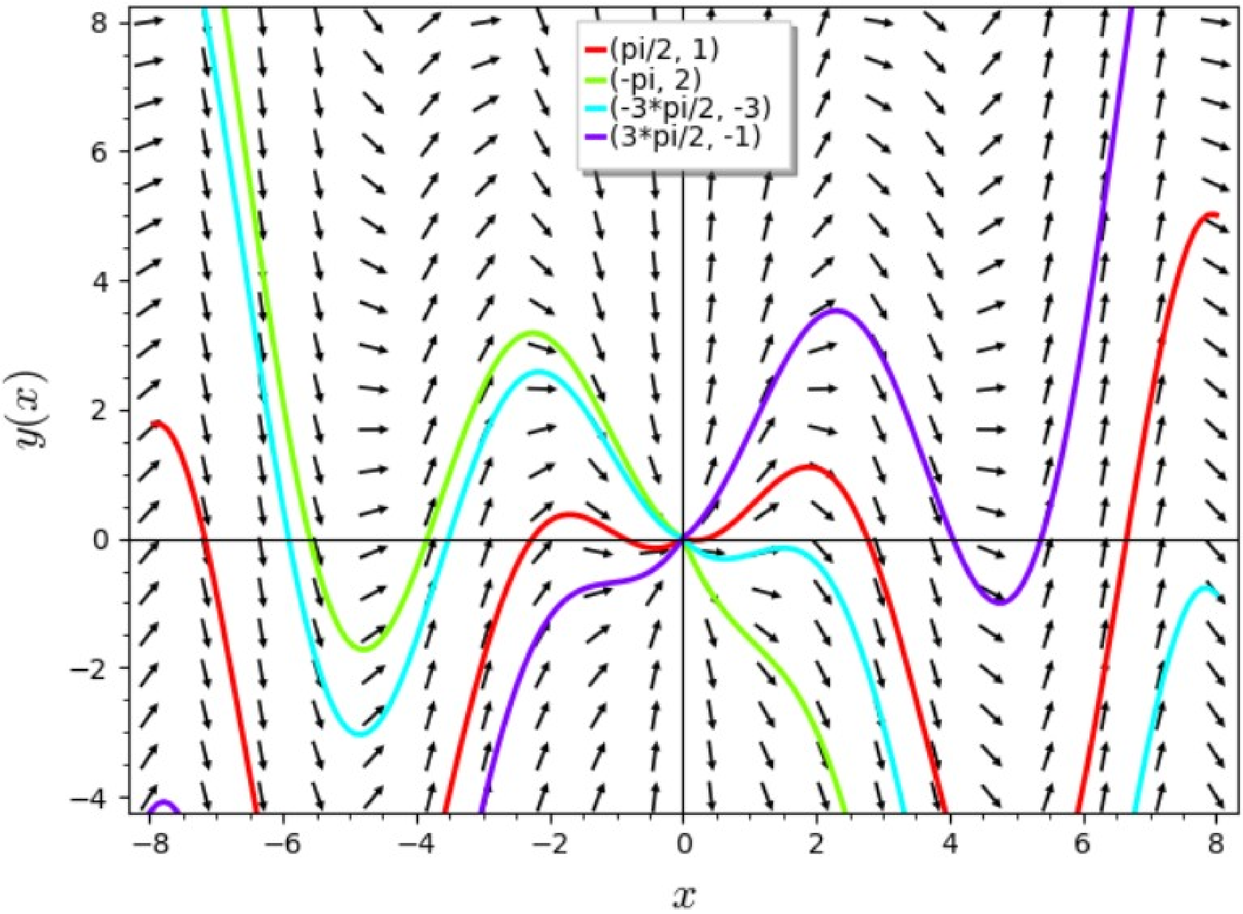
$C = 1 - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y = x(\cos x + 1 - \frac{2\pi}{3})$

Код програми Sage

```
x = var('x')
y = function('y')(x)

ode = y == x*(diff(y, x) -x*cos(x))
sol = desolve(ode, y)
print("General solution: ")
sol.show()

points= [[(pi/2), 1], [-pi, 2], [(-3*pi/2), -3], [(3*pi/2), -1]]
couchy_sol = []
for i in range(4):
    couchy_sol.append(desolve(ode, y, ics=points[i]))
    print(f"Cauchy solution for {points[i]}: {couchy_sol[i]}");

x, y = var('x', 'y')
f(x,y) = (y/x) + x*cos(x)

r=8
plot = plot_slope_field(f, (x, -r, r), (y, -r+4, r), headaxislength=3, headlength=3,
                        axes_labels=['$x$', '$y(x)$'])
points_for_graph = [[gp(pi/2), 1], [gp(-pi), 2], [gp(-3*pi/2), -3], [gp(3*pi/2), -1]]
points_printable = ["(pi/2, 1)", "(-pi, 2)", "(-3*pi/2, -3)", "(3*pi/2, -1)"]

for i in range(4):
    plot += desolve_rk4(f, y, ics=points_for_graph[i], ivar=x, output='plot', end_points=[-r, r],
                        thickness=2, rgbcolor=hue(0.25 * i), legend_label=points_printable[i])

show(plot, xmin=-r, xmax=r, ymin=-r + 4, ymax=r)
```

Результат роботи програми Sage

```
General solution:
```
$$(C+\sin(x))x$$
```
Cauchy solution for [1/2*pi, 1]: (pi*x*sin(x) - (pi - 2)*x)/pi
Cauchy solution for [-pi, 2]: (pi*x*sin(x) - 2*x)/pi
Cauchy solution for [-3/2*pi, -3]: (pi*x*sin(x) - (pi - 2)*x)/pi
Cauchy solution for [3/2*pi, -1]: 1/3*(3*pi*x*sin(x) + (3*pi - 2)*x)/pi
```



Код програми Maple

```
ode := y(x) = x * (diff(y(x), x)  - x * cos(x)) ;
general_solution := dsolve(ode, y(x));

 ics1 := y(Pi/2) = 1;
couchy_sol_1 := simplify(dsolve({ics1, ode}));

ics2 := y(-Pi) = 2;
couchy_sol_2 := simplify(dsolve({ics2, ode}));

ics3 := y(-3 * Pi/2) = -3;
couchy_sol_3 := simplify(dsolve({ics3, ode}));

ics4 := y(-3 * Pi/2) = -1;
couchy_sol_4 := simplify(dsolve({ics4, ode}));

with(DEtools);
DEplot(ode, y(x), x = -10 .. 10, y = -10 .. 10,
  [[y(Pi/2) = 2],
   [y(-Pi) = 2],
   [y(-3*Pi/2) = -3],
   [y(-3*Pi/2) = -1]],
  color = black,
  linecolor = [red, green, blue, purple]);
```

Результат роботи програми Maple:

$$ode := y(x) = x\left(\frac{d}{dx}\,y(x) - x\cos(x)\right)$$

$$general\_solution := y(x) = \left(\sin(x) + c_1\right)x$$

$$ics1 := y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$couchy\_sol\_1 := y(x) = \frac{\left(\sin(x)\,\pi - \pi + 2\right)x}{\pi}$$

$$ics2 := y(-\pi) = 2$$

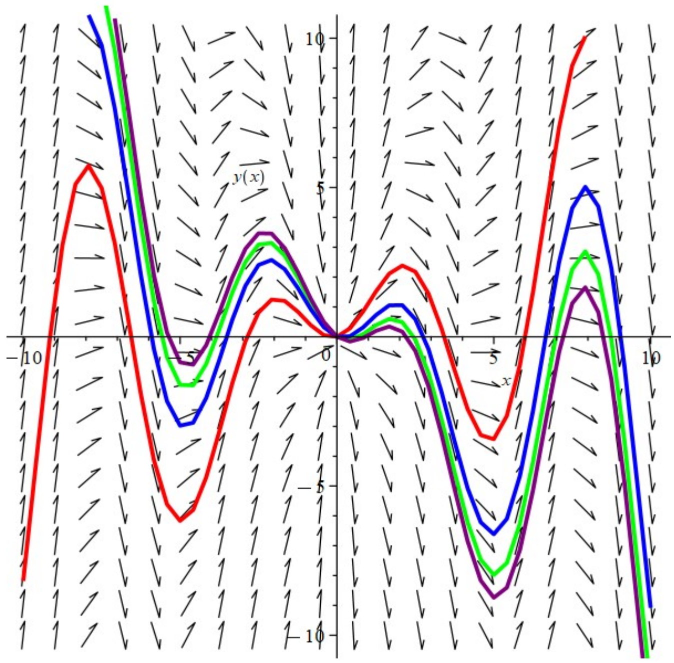
$$couchy\_sol\_2 := y(x) = \left(\sin(x) - \frac{2}{\pi}\right)x$$

$$ics3 := y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -3$$

$$couchy\_sol\_3 := y(x) = \frac{\left(\sin(x)\,\pi - \pi + 2\right)x}{\pi}$$

$$ics4 := y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$couchy\_sol\_4 := y(x) = \left(\sin(x) + \frac{-\pi + \frac{2}{3}}{\pi}\right)x$$



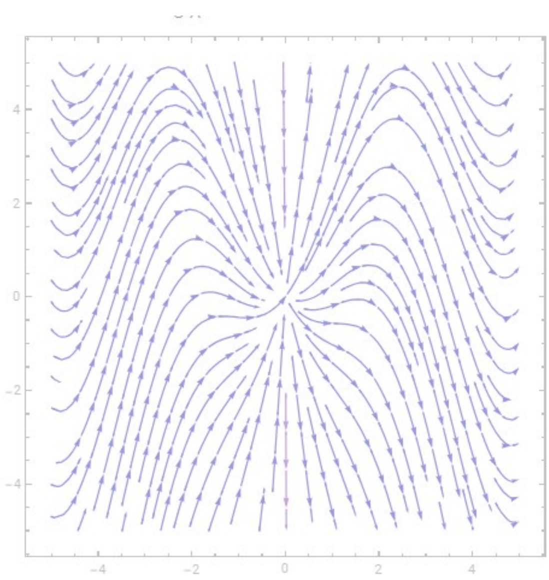
Код програми Mathematica

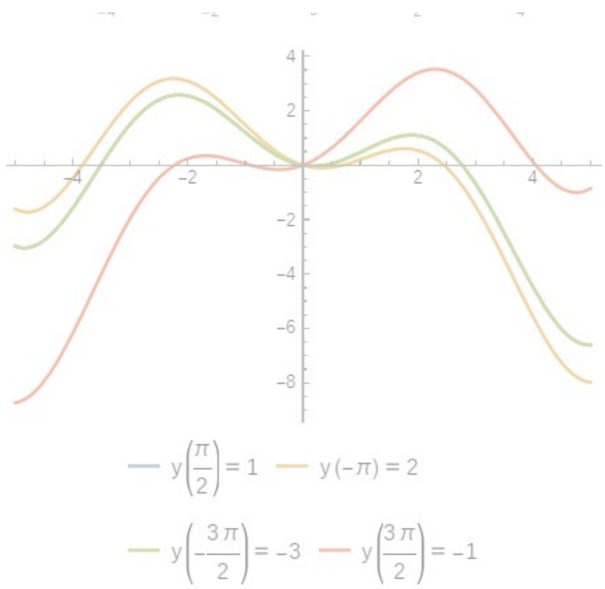
```
Clear[y, x];
ode = y[x] == x * (y'[x] - x Cos[x]);
sol = DSolve[ode, y[x], x];
Print["General Solution: ", sol];

initialConditions = {y[Pi / 2] == 1, y[-Pi] == 2, y[-3 * Pi / 2] == -3, y[3 * Pi / 2] == -1};
solutions = Table[DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x], {i, 1, Length[initialConditions]}];
Print["Solution  with initial conditions:", solutions]

streamPlot = StreamPlot[{1, y / x + x Cos[x]}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
combinedPlot = Plot[ Evaluate[Table[y[x] /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}]], {x, -5, 5}, PlotStyle → Thick, PlotLegends →
  Placed[Table[initialConditions[[i]], {i, 1, Length[initialConditions]}], Below] ];
Show[combinedPlot]
```

Результат роботи програми Mathematica:

General Solution: $\{\{y[x] \to x\,C_1 + x\,\mathrm{Sin}[x]\}\}$

Solution with initial conditions: $\left\{\left\{\left\{y[x] \to \frac{2x - \pi x + \pi x\,\mathrm{Sin}[x]}{\pi}\right\}\right\}, \left\{\left\{y[x] \to \frac{-2x + \pi x\,\mathrm{Sin}[x]}{\pi}\right\}\right\}, \left\{\left\{y[x] \to \frac{2x - \pi x + \pi x\,\mathrm{Sin}[x]}{\pi}\right\}\right\}, \left\{\left\{y[x] \to \frac{-2x + 3\pi x + 3\pi x\,\mathrm{Sin}[x]}{3\pi}\right\}\right\}\right\}$





Завдання 4

№4 Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Рівняння: y'' - 9*y == $e^{-3x}(x^2$ + Sin(3x))

Точки: $M_1(\frac{\pi}{2}, 1) \Rightarrow y`(\frac{\pi}{2}) = 2$;

$M_2(-\frac{\pi}{3}, 3) \Rightarrow y`(-\frac{\pi}{3}) = -4$;

$M_3(-\frac{\pi}{2}, -2) \Rightarrow y`(\frac{\pi}{2}) = -1$;

$M_4(\frac{\pi}{4}, -1) \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4}) = 3$;

Аналітичний розв’язок

Даний аналітичний розв’язок подається без розв’язку задачі Коші задля економії часу на обрахунок складної системи

$$y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 - \sin x)$$

$$y_{зно} = y_{зо} + y_{чр}$$

1. $y'' - 9y = 0$

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -3$$

$$y_{зо} = e^{-3x} \cdot C_1 + e^{3x} \cdot C_2$$

2. $y'' - 9y = e^{-3x} x^2$

$$y_1 = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{-3x} \cdot x$$

$$y_1' = (3Ax^2 + 2Bx + C - 3Ax^3 - 3Bx^2 - 3Cx) \cdot e^{-3x}$$

$$y_1'' = (6Ax + 2B - 9Ax^2 - 6Bx - 3C + {} \\ - 9Ax^2 - 6Bx - 3C + 9Ax^3 + 9Bx^2 + 9Cx) \cdot e^{-3x} = \\ = (9Ax^3 + (-18A + 9B)x^2 + (6A - 12B + 9C)x - 6C + 2B) \cdot e^{-3x}$$

$$\frac{9Ax^3 + (-18A + 9B)x^2 + (6A - 12B + 9C)x - 6C - 9(Ax^2 + Bx + C) \cdot x}{e^{3x}} = \frac{x^2}{e^{3x}}$$

3. $y'' - 9y = -e^{-3x} \sin x$

$$y_2 = (A \cdot \cos 3x + B \sin 3x) \cdot e^{-3x}$$

$$y_2' = (-3A \sin 3x + 3B \sin 3x - 3A \cos 3x - 3B \sin 3x) \cdot e^{-3x}$$

$$y_2'' = 18A \sin 3x - 18B \cos 3x) \cdot e^{-3x}$$

$$e^{-3x}(18A \sin 3x - 18B \cos 3x - 9A \cos 3x - 9B \sin 3x) = e^{-3x} \sin 3x$$

$$\begin{cases} 18A - 9B = 1 \\ -18B - 9A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 2/45 \\ B = -1/45 \end{matrix}$$

$$y_{чн} = \frac{2\cos 3x - \sin 3x}{45 e^{x}}$$

$$y_{зн} = e^{-3x} \cdot C_1 + e^{3x} \cdot C_2 + \frac{2\cos 3x - \sin 3x}{45 e^{x}} + e^{-3x}\left(\frac{-x^3}{18} + \frac{x^2}{36} - \frac{x}{108}\right)$$

Код програми Sage

```
x = var('x')
y = function('y')(x)

ode = diff(y, x, 2) - 9*y == e^(-3*x)*(x^2+sin(3*x))
sol = desolve(ode, y)
print("General solution: ")
sol.show()

points= [[(pi/2), 1, 2], [(-pi/3), 3, -4], [(-pi/2), -2, -1], [(pi/4), -1, 3]]
couchy_sol = []
for i in range(4):
    couchy_sol.append(desolve(ode, y, ics=points[i]))
    print(f"Cauchy solution for {points[i]}:", flush=True);
    couchy_sol[i].show()

r=8
plots = []
points_printable = ["(pi/2, 1, 2)", "(-pi/3), 3, -4)", "(-pi/2), -2, -1]", "(pi/4), -1, 3)"]

for i in range(4):
    plots.append(plot(couchy_sol[i], xmin=-r, xmax=r, thickness=2,
                      rgbcolor=hue(0.25 * i), legend_label=points_printable[i]))

show(plots[0] + plots[1] + plots[2] + plots[3], xmin=-r, xmax=r, ymin=-r + 4, ymax=r)
```

Результат роботи програми Sage

```
General solution:
```

$$K_1e^{(3\,x)} - \frac{1}{3240}\,\left(180\,x^3 + 90\,x^2 + 30\,x - 144\,\cos\left(3\,x\right) + 72\,\sin\left(3\,x\right) + 5\right)e^{(-3\,x)} + K_2e^{(-3\,x)}$$

```
Cauchy solution for [1/2*pi, 1, 2]:
```

$$\frac{1}{6480}\,\left(30\,\pi + 45\,\pi^2 + 5400\,e^{\left(\frac{3}{2}\,\pi\right)} - 134\right)e^{(-3\,\pi+3\,x)} + \frac{1}{144}\,\left(\pi^3 + 24\,e^{\left(\frac{3}{2}\,\pi\right)}\right)e^{(-3\,x)} - \frac{1}{3240}\,\left(180\,x^3 + 90\,x^2 + 30\,x - 144\,\cos\left(3\,x\right) + 72\,\sin\left(3\,x\right) + 5\right)e^{(-3\,x)}$$

```
Cauchy solution for [-1/3*pi, 3, -4]:
```

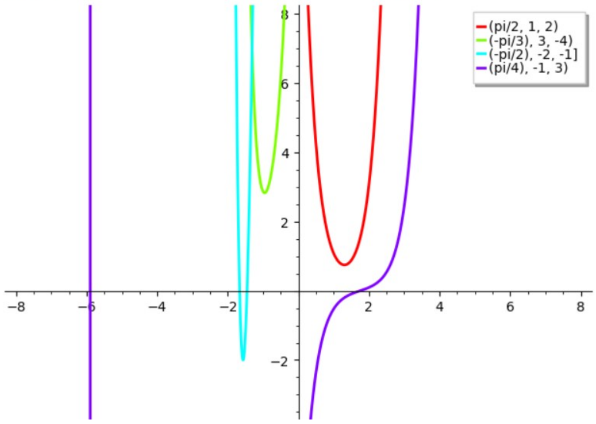
$$-\frac{1}{486}\,\left(\pi^3e^{\pi} - 27\,e^{\pi} - 1053\right)e^{(-\pi-3\,x)} + \frac{1}{3240}\,\left(10\,\pi^2e^{(2\,\pi)} - 10\,\pi e^{(2\,\pi)} + 2700\,e^{\pi} - 31\,e^{(2\,\pi)}\right)e^{(3\,x)} - \frac{1}{3240}\,\left(180\,x^3 + 90\,x^2 + 30\,x - 144\,\cos\left(3\,x\right) + 72\,\sin\left(3\,x\right) + 5\right)e^{(-3\,x)}$$

```
Cauchy solution for [-1/2*pi, -2, -1]:
```

$$-\frac{1}{144}\,\left(\pi^3e^{\left(\frac{3}{2}\,\pi\right)} + 120\right)e^{\left(-\frac{3}{2}\,\pi-3\,x\right)} - \frac{1}{6480}\,\left(\left(30\,\pi - 45\,\pi^2 - 154\right)e^{(3\,\pi)} + 7560\,e^{\left(\frac{3}{2}\,\pi\right)}\right)e^{(3\,x)} - \frac{1}{3240}\,\left(180\,x^3 + 90\,x^2 + 30\,x - 144\,\cos\left(3\,x\right) + 72\,\sin\left(3\,x\right) + 5\right)e^{(-3\,x)}$$

```
Cauchy solution for [1/4*pi, -1, 3]:
```

$$\frac{1}{25920}\,\left(60\,\pi + 45\,\pi^2 + 144\,\sqrt{2} + 40\right)e^{\left(-\frac{3}{2}\,\pi+3\,x\right)} + \frac{1}{1152}\,\left(\pi^3 + 32\,\sqrt{2} - 1152\,e^{\left(\frac{3}{4}\,\pi\right)}\right)e^{(-3\,x)} - \frac{1}{3240}\,\left(180\,x^3 + 90\,x^2 + 30\,x - 144\,\cos\left(3\,x\right) + 72\,\sin\left(3\,x\right) + 5\right)e^{(-3\,x)}$$



Код програми Maple

```
> ode := diff(diff(y(x),x),x) - 9*y(x) = exp(-3*x)*(x^2 + sin(3*x));
  general_solution := dsolve(ode, y(x));

  ics1 := y(Pi/2) = 1, D(y)(Pi/2) = 2;
  cauchy_sol_1 := dsolve({ics1, ode});

  ics2 := y((-Pi)/3) = 3, D(y)(-Pi/3) = -4;
  cauchy_sol_3 := dsolve({ics2, ode});

  ics3 := y(-Pi/2) = -2, D(y)(-Pi/2) = -1;
  cauchy_sol_3 := dsolve({ics3, ode});
  ics4 := y(Pi/4) = -1, D(y)(Pi/4) = 3;
  cauchy_sol_4 := dsolve({ics4, ode});


  with(DEtools);
  DEplot(ode, y(x), x = -10 .. 10, y = -10 .. 10, [[ics1], [ics2], [ics3], [ics4]], color = black, linecolor = [red, green, blue,
      purple]);
```

Результат роботи програми Maple:

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 9\, y(x) = e^{-3x}\left(x^2 + \sin(3x)\right)$$

$$general\_solution := y(x) = e^{3x} c_2 + e^{-3x} c_1 + \frac{\left(-180\, x^3 - 90\, x^2 + 144\cos(3x) - 72\sin(3x) - 30\, x - 5\right) e^{-3x}}{3240}$$

$$ics1 := y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, D(y)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$cauchy\_sol\_1 := y(x) = e^{3x}\left(\frac{\left(45\pi^2 + 30\pi - 134\right)\left(e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)^2}{6480} + \frac{5\, e^{-\frac{3\pi}{2}}}{6}\right) + e^{-3x}\left(\frac{\pi^3}{144} + \frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{6}\right) + \frac{\left(-180\, x^3 - 90\, x^2 + 144\cos(3x) - 72\sin(3x) - 30\, x - 5\right) e^{-3x}}{3240}$$

$$ics2 := y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3, D(y)\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -4$$

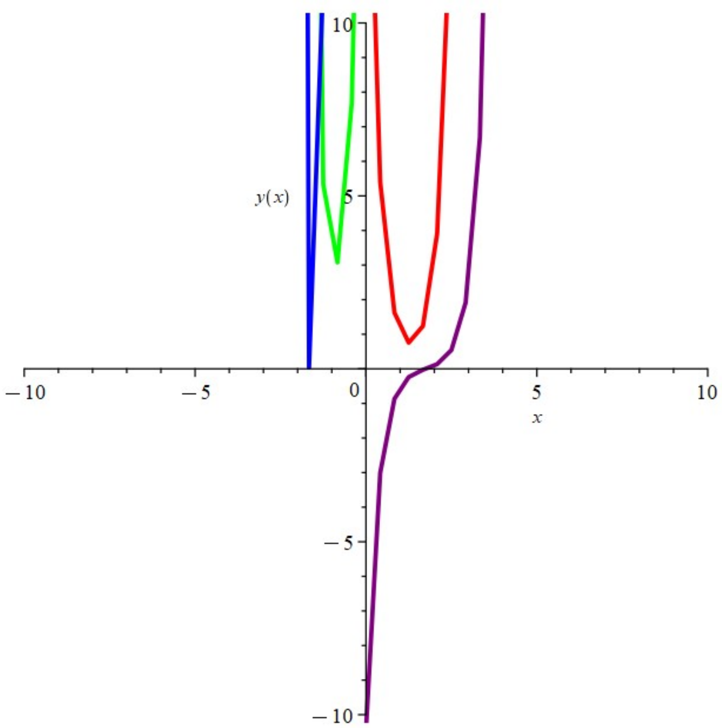
$$cauchy\_sol\_3 := y(x) = \frac{e^{3x} e^{\pi}\left(270 + \left(\pi^2 - \pi - \frac{31}{10}\right) e^{\pi}\right)}{324} + e^{-3x}\left(-\frac{\pi^3}{486} + \frac{1}{18} + \frac{13\, e^{-\pi}}{6}\right) + \frac{\left(-180\, x^3 - 90\, x^2 + 144\cos(3x) - 72\sin(3x) - 30\, x - 5\right) e^{-3x}}{3240}$$

$$ics3 := y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2, D(y)\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$cauchy\_sol\_3 := y(x) = e^{3x}\left(\frac{\left(45\pi^2 - 30\pi + 154\right)\left(e^{\frac{3\pi}{2}}\right)^2}{6480} - \frac{7\, e^{\frac{3\pi}{2}}}{6}\right) + e^{-3x}\left(-\frac{\pi^3}{144} - \frac{5\, e^{-\frac{3\pi}{2}}}{6}\right) + \frac{\left(-180\, x^3 - 90\, x^2 + 144\cos(3x) - 72\sin(3x) - 30\, x - 5\right) e^{-3x}}{3240}$$

$$ics4 := y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1, D(y)\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$$

$$cauchy\_sol\_4 := y(x) = \frac{e^{3x} e^{-\frac{3\pi}{2}}\left(45\pi^2 + 144\sqrt{2} + 60\pi + 40\right)}{25920} + e^{-3x}\left(\frac{\pi^3}{1152} - e^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{36}\right) + \frac{\left(-180\, x^3 - 90\, x^2 + 144\cos(3x) - 72\sin(3x) - 30\, x - 5\right) e^{-3x}}{3240}$$



Код програми Mathematica

```
Clear[y, x];
ode = y''[x] - 9 * y[x] == Exp[-3 * x] * (x^2 + Sin[3 * x]);
sol = DSolve[ode, y[x], x]; Print["General Solution: ", sol];

initialConditions = { {y[Pi / 2] == 1, y'[Pi / 2] == 2}, {y[-Pi / 3] == 3, y'[-Pi / 3] == -4}, {y[-Pi / 2] == -2, y'[-Pi / 2] == -1},
  {y[Pi / 4] == -1, y'[Pi / 4] == 3} };
solutions = Table[DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x], {i, 1, Length[initialConditions]}];
Print["Solution  with initial conditions:", solutions]

combinedPlot = Plot[ Evaluate[Table[y[x] /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}]], {x, -5, 5}, PlotStyle → Thick,
  PlotLegends → Placed[Table[initialConditions[[i]], {i, 1, Length[initialConditions]}], Below] ];
Show[combinedPlot]
```

Результат роботи програми Mathematica:

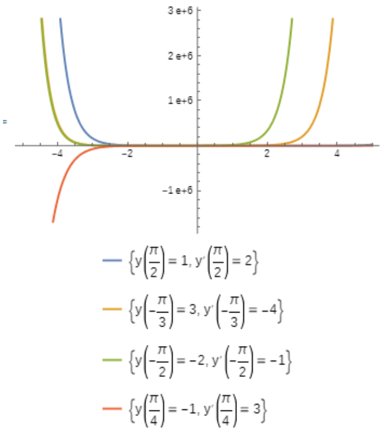
General Solution: $\left\{\left\{y[x] \to e^{3x} c_1 + e^{-3x} c_2 - \frac{e^{-3x}\left(5+30x+90x^2+180x^3-144\,\mathrm{Cos}[3x]+72\,\mathrm{Sin}[3x]\right)}{3240}\right\}\right\}$

Solution with initial conditions: $\left\{\left\{\left\{y[x] \to \frac{e^{-3\pi-3x}\left(-10e^{3\pi}+1080e^{9\pi/2}-134e^{6x}+5400e^{\frac{3\pi}{2}+6x}+30e^{6x}\pi+45e^{6x}\pi^2+45e^{3\pi}\pi^3-60e^{3\pi}x-180e^{3\pi}x^2-360e^{3\pi}x^3+288e^{3\pi}\mathrm{Cos}[3x]-144e^{3\pi}\mathrm{Sin}[3x]\right)}{6480}\right\}\right\}, \left\{\left\{y[x] \to\right.\right.\right.$

$$\frac{e^{-\pi-3x}\left(21060+525e^{\pi}+8100e^{2\pi+6x}-93e^{3\pi+6x}-30e^{3\pi+6x}\pi+30e^{3\pi+6x}\pi^2-20e^{\pi}\pi^3-90e^{\pi}x-270e^{\pi}x^2-540e^{\pi}x^3+432e^{\pi}\mathrm{Cos}[3x]-216e^{\pi}\mathrm{Sin}[3x]\right)}{9720}\}\}, \{\{y[x] \to$$

$$\frac{e^{-\frac{3\pi}{2}-3x}\left(-5400-10e^{3\pi/2}-7560e^{3\pi+6x}+154e^{\frac{9\pi}{2}+6x}-30e^{\frac{9\pi}{2}+6x}\pi+45e^{\frac{9\pi}{2}+6x}\pi^2-45e^{3\pi/2}\pi^3-60e^{3\pi/2}x-180e^{3\pi/2}x^2-360e^{3\pi/2}x^3+288e^{3\pi/2}\mathrm{Cos}[3x]-144e^{3\pi/2}\mathrm{Sin}[3x]\right)}{6480}\}\}, \{\{y[x] \to$$

$$\frac{e^{-\frac{3\pi}{2}-3x}\left(-80e^{3\pi/2}+1440\sqrt{2}\,e^{3\pi/2}-51840e^{9\pi/4}+80e^{6x}+288\sqrt{2}\,e^{6x}+120e^{6x}\pi+90e^{6x}\pi^2+45e^{3\pi/2}\pi^3-480e^{3\pi/2}x-1440e^{3\pi/2}x^2-2880e^{3\pi/2}x^3+2304e^{3\pi/2}\mathrm{Cos}[3x]-1152e^{3\pi/2}\mathrm{Sin}[3x]\right)}{51840}\}\}\}$$



Завдання 5

№5 Розв’язати системи рівняннь (показати вигляд загального розв’язку), побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Рівняння:

$$\dot{x} = Ax,$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Точки: $M_1(0, e/2, e, 0)$ $M_2(0, -e, e, e/2)$, $M_3(0, -1/e, -2/e, -e)$, $M_4(0, e\char`^2, -e, 0)$

Аналітичний розв’язок

$\dot{x} = A\cdot x,\ A = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$

$x = c_1\cdot e^{\lambda_1 t}\cdot a_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\cdot a_2 + c_3\cdot e^{\lambda_3 t} a_3$

$\det|A-\lambda E| = 0$

$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1\\ 3 & -1 & -2-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda = 0$

$-\lambda(\lambda^2-1) = 0$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$

1. $\lambda_1 = 0$

$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha_1 = \alpha_3\\ \alpha_2 = \alpha_3\\ \alpha_3 \in R\end{matrix} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2. $\lambda_2 = 1$

$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\beta_1 = \beta_3\\ \beta_2 = 0\\ \beta_3 \in P\end{matrix} \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

3. $\lambda_3 = -1$

$\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & -4 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{matrix}c_1 = \frac{c_3}{2}\\ c_2 = \frac{c_3}{2}\\ c_3 \in R\end{matrix} \Rightarrow a_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$x = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\cdot e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ – загальний розв'язок

Задача Коші

1) $x(0) = \begin{pmatrix}e/2\\ e\\ 0\end{pmatrix}: C_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e/2\\ e\\ 0\end{pmatrix}$

$C_1 = \frac{2e}{2},\ C_2 = -\frac{e}{2},\ C_3 = -\frac{e}{2}$

2) $x(0) = \begin{pmatrix}-e\\ e\\ e/2\end{pmatrix}: c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-e\\ e\\ e/2\end{pmatrix}$

$C_1 = -\frac{e}{2},\ C_2 = -2e,\ C_3 = \frac{3e}{2}$

3) $x(0) = \begin{pmatrix}-1/e\\ -2/e\\ -e\end{pmatrix}: C_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{e}\\ -2/e\\ -e\end{pmatrix}$

$C_1 = -\frac{3}{e}+e,\ C_2 = \frac{1}{e},\ C_3 = -e+\frac{1}{e}$

4) $x(0) = \begin{pmatrix}e^2\\ -e\\ 0\end{pmatrix}: c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^2\\ -e\\ 0\end{pmatrix}$

$C_1 = -e+e^2,\ C_2 = e^2+e,\ C_3 = -e^2$

Код програми Sage

```
#general solution
t = var('t')

f_x =function ('x')(t)
f_y =function ('y')(t)
f_z =function ('z')(t)

deX = diff(f_x,t) == 2*f_x- f_y - f_z

deY = diff(f_y,t) == f_x - f_z
deZ = diff(f_z,t) == 3*f_x - f_y-  2*f_z

print("Matrix solution: ", flush=True)
sol = desolve_system([deX ,deY,deZ],[f_x,f_y,f_z],ivar=t)
solx, soly, solz = sol[0].rhs(), sol[1].rhs(), sol[2].rhs()
sol_m = matrix([[solx], [soly], [solz]])
show(sol_m)

points = [[0, e/2, e, 0], [0, -e, e, e/2], [0, -1/e, -2/e, -e], [0, e^2, -e, 0]]
couchy_sol = []

for i in range(4):
    print(f"Couchy solution({points[i]}): ", flush=True)
    couchy_sol.append(desolve_system([deX, deY, deZ], [f_x, f_y, f_z], points[i], ivar=t))
    solx, soly, solz = couchy_sol[i][0].rhs(), couchy_sol[i][1].rhs(), couchy_sol[i][2].rhs()
    sol_m = matrix([[solx], [soly], [solz]])
    show(sol_m)


r = 15
legend_labels = ['solution_1.x', 'solution_1.y','solution_1.z',
                 'solution_2.x', 'solution_2.y','solution_2.z',
                 'solution_3.x', 'solution_3.y','solution_3.z',
                 'solution_4.x', 'solution_4.y','solution_4.z']
plots = []
for i in range(4):
    solx, soly, solz = couchy_sol[i][0].rhs(), couchy_sol[i][1].rhs(), couchy_sol[i][2].rhs()
    plots.append(plot(solx, xmin=-r, xmax=r, thickness=2, rgbcolor=hue(0.25*i+0.06), legend_label=legend_labels[3*i]))
    plots.append(plot(soly, xmin=-r, xmax=r, thickness=2, rgbcolor=hue(0.25*i+0.12), legend_label=legend_labels[3*i+1]))
    plots.append(plot(solz, xmin=-r, xmax=r, thickness=2, rgbcolor=hue(0.25*i+0.18), legend_label=legend_labels[3*i+2]))

plot = plots[0]
for i in range (11):
    plot += plots[i+1]
show(plot)
```

Результат роботи програми Sage

```
Matrix solution:
```

$$\begin{pmatrix} -(x(0) - z(0))e^{(-t)} + (x(0) - y(0))e^{t} + x(0) + y(0) - z(0) \\ -(x(0) - z(0))e^{(-t)} + x(0) + y(0) - z(0) \\ -2\,(x(0) - z(0))e^{(-t)} + (x(0) - y(0))e^{t} + x(0) + y(0) - z(0) \end{pmatrix}$$

```
Couchy solution([0, 1/2*e, e, 0]):
```

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\,e - \frac{1}{2}\,e^{(t+1)} - \frac{1}{2}\,e^{(-t+1)} \\ \frac{3}{2}\,e - \frac{1}{2}\,e^{(-t+1)} \\ \frac{3}{2}\,e - \frac{1}{2}\,e^{(t+1)} - e^{(-t+1)} \end{pmatrix}$$

```
Couchy solution([0, -e, e, 1/2*e]):
```

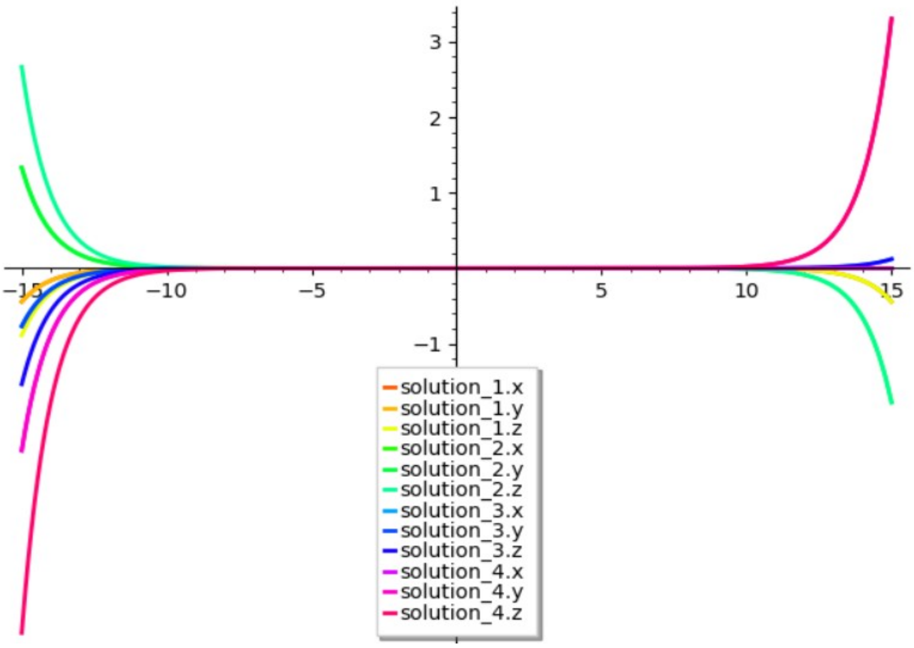
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e - 2\,e^{(t+1)} + \frac{3}{2}\,e^{(-t+1)} \\ -\frac{1}{2}\,e + \frac{3}{2}\,e^{(-t+1)} \\ -\frac{1}{2}\,e - 2\,e^{(t+1)} + 3\,e^{(-t+1)} \end{pmatrix}$$

```
Couchy solution([0, -e^(-1), -2*e^(-1), -e]):
```

$$\begin{pmatrix} (e^{2} - 3)e^{(-1)} - (e^{2} - 1)e^{(-t-1)} + e^{(t-1)} \\ (e^{2} - 3)e^{(-1)} - (e^{2} - 1)e^{(-t-1)} \\ (e^{2} - 3)e^{(-1)} - 2\,(e^{2} - 1)e^{(-t-1)} + e^{(t-1)} \end{pmatrix}$$

```
Couchy solution([0, e^2, -e, 0]):
```

$$\begin{pmatrix} (e^{2} + e)e^{t} + e^{2} - e - e^{(-t+2)} \\ e^{2} - e - e^{(-t+2)} \\ (e^{2} + e)e^{t} + e^{2} - e - 2\,e^{(-t+2)} \end{pmatrix}$$



Код програми Maple

```
> sys_ODE := diff(x(t), t) = 2·x(t) − y(t) − z(t), diff(y(t), t) = x(t) − z(t), diff(z(t), t) = 3
    ·x(t) − y(t)
  −2·z(t);
  print('General solutin :');
  dsolve([sys_ODE]);
```

$ics1 := x(0) = \frac{e}{2}, y(0) = e, z(0) = 0;$

$ics2 := x(0) = -\mathrm{e}\,, y(0) = \mathrm{e}, z(0) = \frac{e}{2};$

$ics3 := x(0) = -\frac{1}{e}, y(0) = -\frac{2}{e}, z(0) = -e;$

$ics4 := x(0) = e^2, y(0) = -e, z(0) = 0;$

$sol1 = dsolve([sys\_ODE, ics1]);$

$plot\left(\left[\frac{3\exp(1)}{2} - \frac{\exp(1-t)}{2} - \frac{\exp(1+t)}{2}, \frac{3\exp(1)}{2} - \frac{\exp(1-t)}{2}, -\exp(1-t) + \frac{3\exp(1)}{2} - \frac{\exp(1+t)}{2}\right], t = -5..5, y = -5..5\right);$

$sol2 = dsolve([sys\_ODE, ics2]);$

$plot\left(\left[-\frac{\exp(1)}{2} + \frac{3\cdot\exp(1-t)}{2} - 2\cdot\exp(1+t), -\frac{\exp(1)}{2} + \frac{3\exp(1-t)}{2}, 3\exp(1-t) - \frac{\exp(1)}{2} - 2\exp(1+t)\right], t = -5..5, y = -5..5\right);$

$sol3 = dsolve([sys\_ODE, ics3]);$

$plot\left(\left[\frac{\exp(2)-3}{\exp(1)} - \frac{(\exp(2)-1)\cdot\exp(-t)}{\exp(1)} + \exp(t-1), \frac{\exp(2)-3}{\exp(1)} - \frac{(\exp(2)-1)\exp(-t)}{\exp(1)}, -\frac{2(\exp(2)-1)\exp(-t)}{\exp(1)} + \frac{\exp(2)-3}{\exp(1)} + \exp(t-1)\right], t = -5..5, y = -5..5\right);$

$sol4 = dsolve([sys\_ODE, ics4]);$

$plot([\exp(2) - \exp(1) - \exp(2-t) + \exp(t)\,(\exp(2) + \exp(1)), \exp(2) - \exp(1) - \exp(2-t), -2\exp(2-t) + \exp(2) - \exp(1) + \exp(t)\,(\exp(2) + \exp(1))], t = -5..5, y = -5..5)$

Результат роботи програми Maple:

$$sys\_ODE := \frac{d}{dt}x(t) = 2x(t) - y(t) - z(t), \frac{d}{dt}y(t) = x(t) - z(t), \frac{d}{dt}z(t) = 3x(t) - y(t) - 2z(t)$$

General solutin

$$\left\{x(t) = c_2 + c_3 e^{-t} + e^t c_1, y(t) = c_2 + c_3 e^{-t}, z(t) = 2c_3 e^{-t} + c_2 + e^t c_1\right\}$$

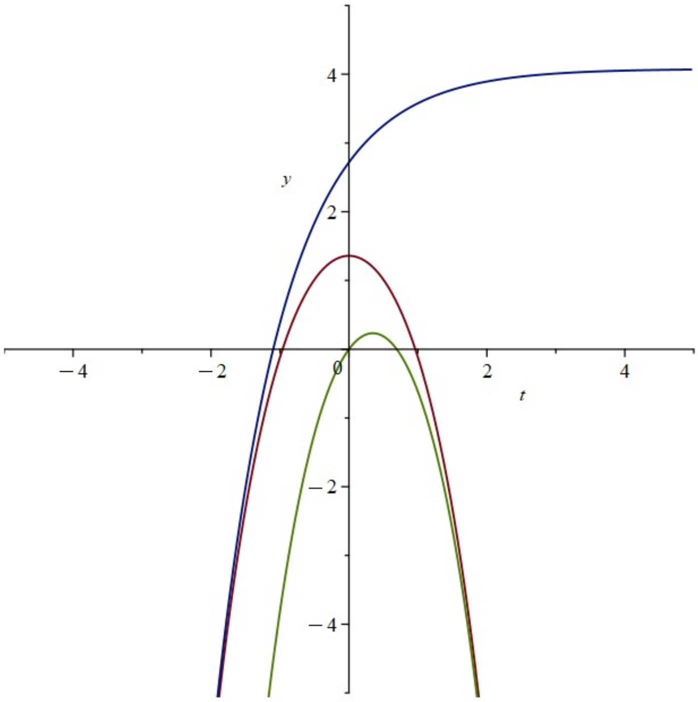
$$ics1 := x(0) = \frac{e}{2}, y(0) = e, z(0) = 0$$

$$ics2 := x(0) = -e, y(0) = e, z(0) = \frac{e}{2}$$

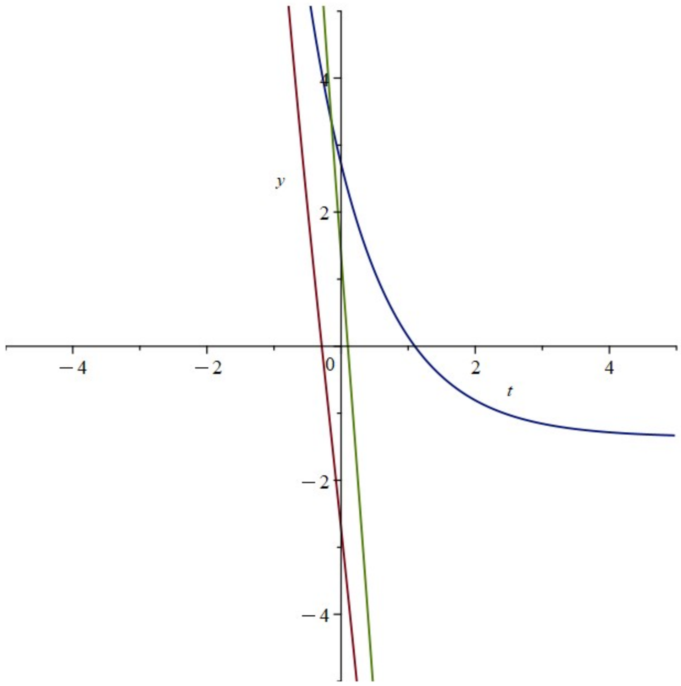
$$ics3 := x(0) = -\frac{1}{e}, y(0) = -\frac{2}{e}, z(0) = -e$$

$$ics4 := x(0) = e^2, y(0) = -e, z(0) = 0$$

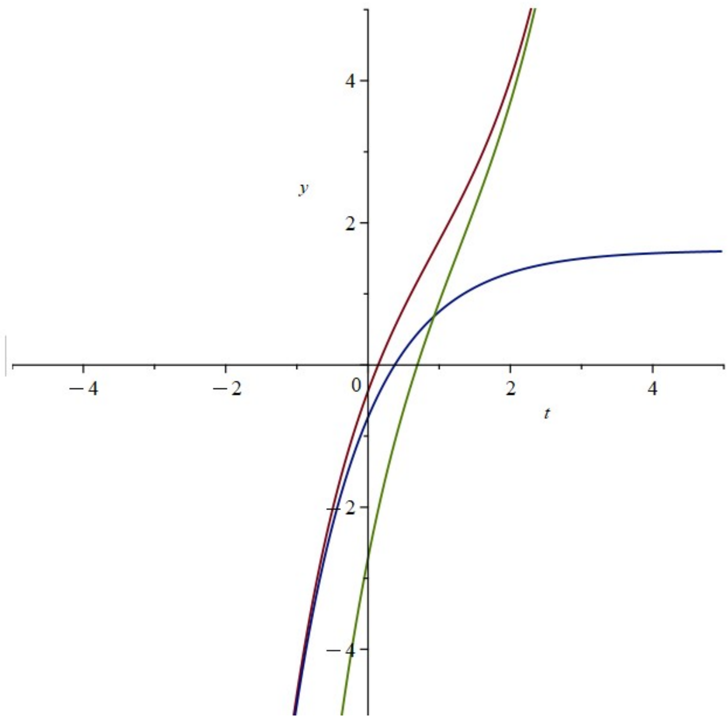
$$sol1 = \left\{x(t) = \frac{3e}{2} - \frac{e\,e^{-t}}{2} - \frac{e^t e}{2}, y(t) = \frac{3e}{2} - \frac{e\,e^{-t}}{2}, z(t) = -e\,e^{-t} + \frac{3e}{2} - \frac{e^t e}{2}\right\}$$



$$sol2=\left\{x(t)=-\frac{e}{2}+\frac{3\,e\,\mathrm{e}^{-t}}{2}-2\,\mathrm{e}^{t}\,e,\ y(t)=-\frac{e}{2}+\frac{3\,e\,\mathrm{e}^{-t}}{2},\ z(t)=3\,e\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{e}{2}-2\,\mathrm{e}^{t}\,e\right\}$$



$$sol3=\left\{x(t)=\frac{e^2-3}{e}-\frac{\left(e^2-1\right)\mathrm{e}^{-t}}{e}+\frac{\mathrm{e}^{t}}{e},\ y(t)=\frac{e^2-3}{e}-\frac{\left(e^2-1\right)\mathrm{e}^{-t}}{e},\ z(t)=-\frac{2\left(e^2-1\right)\mathrm{e}^{-t}}{e}+\frac{e^2-3}{e}+\frac{\mathrm{e}^{t}}{e}\right\}$$



$$sol4 = \left\{x(t) = e^2 - e - e^2\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t\left(e^2 + e\right), y(t) = e^2 - e - e^2\,\mathrm{e}^{-t}, z(t) = -2\,e^2\,\mathrm{e}^{-t} + e^2 - e + \mathrm{e}^t\left(e^2 + e\right)\right\}$$