11.

$f(x,y) = x \oplus y$

x	y	f	f*
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$\Rightarrow$ f^* - двоїста до f. $f^*(x,y) = x \sim y$

28.

Запишемо класи кожної функції в табличку

	T_0	T_1	M	L	S
$\wedge$	+	+	+	-	-
$\oplus$	+	-	-	+	-
0	+	-	+	+	-

$\Rightarrow$ система f не функціонально повна, тому що f всюди зерігає 0 на нульовому кортежі

39. Запишемо класи кожної функцій в таблиці

$g = (0111)$, $k = (01011010)$, $h = (01111111)$

	T_0	T_1	M	L	S
g	+	+	-	+	-
k	+	-	+	-	-
h	+	+	-	+	-

$\Rightarrow$ система f не функціонально повна бо усі функції зберігають 0 на нульвх кортежі.

33.

Якщо $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \in M$, то для будь-яких $a = (a_1, \ldots, a_n)$ і $b = (b_1, \ldots, b_n)$ таких, що $a \leq b$ виконується нерівність $f(a) \leq f(b)$. Позначимо $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$ і $\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)$.

Тоді $a \leq b$ рівносильно $\bar{b} \leq \bar{a}$, $f^*(\bar{b}) = f(b)$ $f^*(a) = f(a)$, тому $f^*(b) \geq f^*(a)$. Отже $f^* \in M$. Усі наведені міркування оборотні, тому $f \in M \iff f^* \in M$.

15.

$f = (*001*1**)$

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів

$f(000) = * = a_0$? Нехай $a_0 = 1$ $f(000) = 1$

$f(001) = 0 = a_1 + a_0 \Rightarrow a_1 = 1$

$f(010)$ $0 = a_2 + a_0$ $\Rightarrow a_2 = 1$

$f(011) = 1 = a_4 \oplus a_2 \oplus a_1 + a_0 \Rightarrow a_4 = 0$

$f(100) = * = a_3 + a_0 \Rightarrow$ Нехай $a_3 = 0 \to f(100) = 1$

$f(101) = 1 =$ $a_5 = 0$ $f(101) = 0$

$f(110) = * = $ $a_6 = 0 \to f(110) = 0$

$f(111) = *$ $a_7 = 0$ $f(111) = 1$

$f(10011101) = 1 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3$

13. Покажемо необхідність:

Якби істотна змінна x_i не входила явно в поліном Жегалкіна, то зміна значення цієї змінної ніяк би не впливала на значення самої функції f, що заперечувало б істотність нашої змінної x_i.

Покажемо достатність:

Нехай x_i входить у поліном Жегалкіна $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функції f. Подамо P у вигляді $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i Q(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \oplus R(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Оскільки x_i явно входить у P, то поліном Q не тотожний 0. Тому існує набір значень $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_n)$ на якому Q дорівнює 1. Підставимо цей набір у вищенаведений розклад, дістанемо $g(x_i) = P(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = x_i \oplus b$, де $b = R(a_1, a_2, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_n) \Rightarrow (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) = g(0) = b \neq$
$\neq 1 \oplus b = g(1) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$, тому x_i - істотна змінна ■

14. Розглянемо функцію двох змінних. Тоді вектори значень для самодвоїстої функції буде мати вигляд:

Коли верхні два елементи:

00 -> $f(0011)$
01 -> $f(0101)$
10 -> $f(1010)$
11 -> $f(1100)$

Нехай наша функція від двох змінних x, y, тоді:

$(0011) \to f(x,y) = x$
$(0101) \to f(x,y) = y$
$(1010) \to f(x,y) = \bar{y}$
$(1100) \to f(x,y) = \bar{x}$

$\Longrightarrow$ $\exists$ 4 самодвоїсті функції двох змінних. З цього випливає, що функція двох змінних є самодвоїстою тоді і лише тоді, коли одна із змінних фіктивна ■

25. Підемо від супротивного. Нехай f монотонна і самодвоїста.

Припустимо, що f самодвоїста. Тоді $f = f^*$ за означенням двоїстої функції, але f не є константою. Тоді $f \vee f^*$ не є константа. Суперечність.

Тепер нехай f монотонна і зростає. З цього випливає, що $f \vee f^*$ не є константою, тому що f на нульовому кортежі дорівнює 0, а на одиничному кортежі f приймає значення 1. Тоді f^* на нульовому кортежі буде дорівнювати 0, а на одиничному котежі 1. Значить $f \vee f^*$ на нульовому кортежі дорівнюватиме 0, а на одиничному 1. Тобто $f \vee f^*$ не константа. Заперечення.

14. Спробуємо довести, що к-ть БФ, що суттєво залежить від n змінних можна подати рекурентним співвідношенням

$A_i = 2^{2^n} - \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i A_i$, де A_i к-ть БФ, що суттєво залежать від i аргументів.

при $n=1$: $A_1 = 4 - \sum_{i=0}^{0} C_1^0 A_0 = 4$

припустимо, що рівність виконується і для $n = k$. Тобто для всіх $i = \overline{0,k}$, ми знаємо значення A_i.

Розглянемо випадок $n = k+1$ та знайдемо к-ть БФ, що суттєво залежить від $k+1$ аргументів.

Усі можливі значення БФ, що залежать від $k+1$ аргументів: $2^{2^{k+1}}$, Попередні випадки ($A_0, A_1, \ldots, A_k$) можуть бути враховані, тому віднімемо їх, що і буде виражати рекурсивне співвідношення: $A_n = 2^{2^{k+1}} - \sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^i \cdot A_i \Rightarrow$ що співвідношення виконується для усіх n.

18. Доведемо твердження за допомогою методу математичної індукції.

при $n=1$ $f(x_1) = x_1$

Припустимо, що твердження виконується і для $n=k$. Тоді покажимо випадок $n=k+1$

$$f(x_1, x_2, \dots x_k, x_{k+1}) = x_i \cdot f(x_1, x_2, \dots x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots x_{k+1}) \wedge$$
$$\wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots x_{k+1}).$$

Оскільки для набору із k аргументів твердження вірне, то очевидно, що й для $k+1$ твердження виконується.

36.

Припустимо, що проста імплікантa W монотонної булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ містить заперечення якоїсь змінної x_i. Тоді $W = \overline{x_i} V$, де V - елементарна кон'юнкція. Розглянемо множину N_W двійкових наборів довжини n, на яких W (і функція f) набувають значення 1. Нехай $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots a_n) \in N_W$. Тоді внаслідок монотонності функції f матимемо $f(a_1, a_2 \dots a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots a_n) =$. Це означає, що $x_i V$ - також імплікантa функції f. Якщо $\overline{x_i} V$ і $x_i V$ імпліканти функції f, то імплікантою f буде й V, що суперечить про припущення, про простоту W

39. $\overline{(\bar x \vee \bar z)\cdot(y \vee \bar z)} \vee x(y \vee z\bar y) \vee \bar x \bar y$

$\overline{(\bar{\bar z} \vee \bar x)\cdot(\bar{\bar z} \vee y)} \vee xy \vee x\bar y z \vee \bar x \bar y$

$\overline{(\bar z \vee \bar x y)} \vee xy \vee x\bar y z \vee \bar x \bar y$

$\bar{\bar z} \wedge \overline{\bar x y} \vee xy \vee x\bar y z \vee \bar x \bar y$

$z\cdot(x \vee \bar y) \vee xy \vee x\bar y z \vee \bar x \bar y$

$zx \vee z\bar y \vee xy \vee x\bar y z \vee \bar x \bar y$ - ДНФ

$xz\cdot(y \vee \bar y) \vee z\bar y\cdot(x \vee \bar x) \vee xy(z \vee \bar z) \vee \cancel{x\bar y z} \vee \bar x \bar y(z \vee \bar z)$

$xyz \vee x\bar y z \vee \bar x \bar y z \vee xy\bar z \vee \bar x \bar y \bar z$ - ДДНФ

Мінімізуємо методом Блейка

$zx \vee z\bar y \vee xy \vee x\bar y z \vee \bar x \bar y$

$zx \vee zx \vee xy \vee xz \vee x\bar y z \vee \bar y z \vee \bar x \bar y$

$xz \vee xy \vee xz \vee \bar y z \vee \bar x \bar y$

$xz \vee xy \vee \bar y z \vee \bar x \bar y$

$xz \vee \bar x \bar y \vee xy$

	xyz	$x\bar y z$	$\bar x \bar y z$	$xy\bar z$	$\bar x \bar y \bar z$
A xz	*	*			
B $\bar x \bar y$			*		*
C xy	*			*	
	$A \vee C$	A	B	C	B

$(A \vee C)\cdot A \cdot B \cdot C \cdot B = ABC(A \vee C) = ABC \vee ABC = ABC$

$xy \vee \bar x \bar y \vee x \bar z$