М. К. №1
з АГ
студентки ІПС-12
Терещенко Вікторії Вікторівни
(15:43–16:57)
Варіант №3

1. Базис та розмірність.
$L\{-x^2-2x+3,\ 3x^2+4x-1,\ 2x^2+2x+2\} = L\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$

$p_1(x)+p_2(x) = 2x^2+2x+2 = p_3(x)$, тому $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ — лінійно залежні, проте $p_1(x)$ та $p_2(x)$ — лінійно незалежні, оскільки $\nexists \alpha : p_1(x) = \alpha p_2(x)\ \forall x \in R$.
Тоді $\{p_1(x), p_2(x)\}$ — базис L як лінійної оболонки
$\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\} = \{p_1(x), p_2(x), p_1(x)+p_2(x)\}$

Тоді $\dim L = 2$ як число векторів у базисі.

Чи належить вектор оболонці:
$f(x) = x^2+3$

Нехай $\exists \alpha, \beta$:
$\alpha p_1(x) + \beta p_2(x) = f(x)$
$\alpha(-x^2-2x+3) + \beta(3x^2+4x+1) = x^2+3$
$(-\alpha+3\beta-1)x^2 + (-2\alpha+4\beta)x + (3\alpha-\beta-3) = 0$

$$\begin{cases} -\alpha+3\beta-1 \\ -2\alpha+4\beta=0 \\ 3x-\beta-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=2\beta \\ -2\beta+3\beta-1=0 \\ 6\beta-\beta-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=2\beta \\ \beta=1 \\ \beta=\frac{3}{5} \end{cases}$$

Отримали протиріччя, тому $f(x) \notin L$.

3. $\varphi(x): x \to x\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$
Покажемо, що $\varphi(x)$ — лінійний оператор
$\varphi(\alpha x) = (\alpha x)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \alpha\left(x\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right) = \alpha\varphi(x)$
$\varphi(x+y) = (x+y)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \varphi(x)+\varphi(y)$
Отже, $\varphi(x)$ — лінійний оператор.
$E = (E_1, E_2, E_3, E_4)$
$E_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Знайдемо матрицю $\varphi(x)$:

$\varphi(E_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix}=-2E_1+E_2$

$\varphi(E_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\0&0\end{pmatrix}=3E_1-E_2$

$\varphi(E_3)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-2&1\end{pmatrix}=-2E_3+E_4$

$\varphi(E_4)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\3&-1\end{pmatrix}=3E_1-E_4$

Отже,

$$M=\begin{pmatrix}-2&3&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-2&3\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

Знайдемо $\ker\varphi$:

$x\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}-2\alpha+3\beta=0\\\alpha-\beta=0\\-2\gamma+3\delta=0\\\gamma-\delta=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2\alpha+3\alpha=0\\\alpha=\beta\\-2\gamma+3\gamma=0\\\gamma=\delta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=\beta=0\\\gamma=\delta=0\end{cases}$$

Отже, $\ker\varphi=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow \operatorname{def}\varphi=0$

Тоді $r(\varphi)=\dim\varphi-\operatorname{def}\varphi=4-0=4$

2. R^4, U, V — підпростори

$U(a_1, a_2, a_3)$, $V(b_1, b_2, b_3)$

$a_1=(1,1,-1,-1), a_2=(3,-1,1,-2), a_3=(2,-2,2,-1), b_1=(2,1,2,-3),$

$b_2=(1,2,3,-3), b_3=(1,-1,-1,0)$

Базиси підпросторів B_u і B_v:

$$U=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\3&-1&1&-2\\2&-2&2&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\R_2-3R_1\\R_3-2R_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-4&4&1\\0&-4&4&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\R_3-R_2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&-4&4&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)=2$$

$B_u=\{a_1, a_2\}$

$$A_v=\begin{pmatrix}2&1&2&-3\\1&2&3&-3\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\1&2&3&-3\\2&1&2&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\R_2-R_1\\R_3-2R_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\0&3&4&-3\\0&3&4&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\R_3-R_2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\0&3&4&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R(A)_2$$

$B_v=\{b_1, b_2\}$

Доведення $R^4=U+V$:

$U, V\in R^4$

B_{u+v}

$b_1=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&2\\1&-1&-2&1\\-1&1&2&2\\-1&-2&-1&-3\end{array}\right)\begin{matrix}\cancel{R_2-R_4}\\R_2-R_1\\R_3+R_1\\R_4+R_1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&2\\0&-4&-4&-1\\0&4&4&4\\0&1&3&-1\end{array}\right)R_3+R_2\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&2\\0&-4&-4&-1\\0&0&0&3\\0&1&3&-1\end{array}\right)\Rightarrow\varnothing$$

Системи розв'язків немає, a_1, a_2, b_1 — лінійно незалежні.

$b_2=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&1\\1&-1&-2&2\\-1&1&2&3\\-1&-2&1&-3\end{array}\right)\begin{matrix}\\R_2-R_1\\R_3+R_1\\R_4+R_1\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&1\\0&-4&-4&1\\0&4&4&4\\0&1&3&-2\end{array}\right)R_3+R_2\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&1\\0&-4&-4&1\\0&0&0&5\\0&1&3&-2\end{array}\right)\Rightarrow\varnothing$$

Системи розв'язків немає, a_1, a_2, b_1, b_2 — лінійно незалежні.

$B_{u+v}=\{a_1, a_2, b_1, b_2\}\Rightarrow U+V=R^4$ ■

При написанні цієї роботи зобов'язуюсь дотримуватися правил і принципів академічної доброчесності.