Білет 1.

1. Непуста множина А РПМ ⇔коли вона співпадає з множиною значень деякої ПРФ.

Теорема 6.3. Непуста множина A РП множина ⇔ коли вона співпадає з множиною значень деякої ПРФ.

Необхідність (множина A значень ПРФ $f(x)$ є РПМ). Дійсно, часткова характеристична функція множини A може бути обчислена алгоритмом:

```
function χ_A(a)
begin
    i = 0
    while f(i) ≠ a
        do i = i + 1
    χ_A = 0
end.
```

Достатність (якщо множина A – РПМ, то співпадає з множиною значень деякої ПРФ). Розглянемо функцію, яка обчислюється алгоритмом

```
function f(n)
    begin
        if F(l(n), r(n)) = 0 then f = l(n)
        else f = b
    end,
```

де $F(a, x)$ ПРФ така, що рівняння $F(a, x) = 0$ має розв'язок $\Leftrightarrow a \in A$, $b \in A$.

Ця функція ПРФ за побудовою. Крім того:

a) Значення цієї функції належать до A;

b) Якщо m – довільний елемент множини A, то рівняння $F(m, x) = 0$ має розв'язок i. Покладемо $n = \mathbf{c}(m, i)$. Тоді значення функції f в точці n дорівнює m.

2. Довести, що кожна m-універсальна множина не рекурсивна.

Відомо, що існують не рекурсивні РПМ. Наприклад, область визначення функції K(n, x). Нехай b – РПМ, яка не є рекурсивною множиною. Якщо припустити, що m-універсальна множина a є рекурсивною, то з того, що b $<=_m$ a випливає, що b буде РМ. Дійсно, характеристична фунція множини b може бути в цьому випадку обчислена алгоритмом:

```
function X_b(x)
    begin
        i = 0
        if X_b(f(x)) = 0 then X_b = 0
        else X_b = 1
    end
```

де f(x) – функція, яка m-зводить b до a. А це не так.

3. Розв’язати систему рівнянь
$\Gamma(x, 0) = 1$
$\Gamma(x, 1) = 2$
$\Gamma(x, 2) = 1$.

Знаходимо число R таке, що числа $1 + R$, $1 + 2R$ та $1 + 3R$ попарно прості і $1 + R > 1$, $1 + 2R > 2$, $1 + 3R > 1$.
Таким числом є число $R = 2$.
Далі знаходимо число L таке, що $rest(L, 3) = 1$, $rest(L, 5) = 2$, $rest(L, 7) = 1$
Таким числом є число 22. Тоді розв’язок системи рівнянь шукаємо як канторовий номер пари (22, 2), тобто $x = c(22, 2) = 322$

Білет 2.
1. Поняття рекурсивної функції.
Під функцією будемо розуміти функцію натуральних аргументів і значень.
Базовими функціями називаються найпростіші функції

$o(x) = 0$,
$s(x) = x+1$ та функції-селектори
$I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$, де $n \geq m \geq 1$.
Всі базові функції всюди визначені.

Основними обчислювальними операціями будуть операції *суперпозиції* $\mathbf{S}^{n+1}$, *примітивної рекурсії* **R** та *мінімізації* **M**.

Операція суперпозиції $\mathbf{S}^{n+1}$ дозволяє із n-арної функції $g(x_1, \ldots, x_n)$ та n функцій $g_1(x_1, \ldots, x_m)$, ... , $g_n(x_1, \ldots, x_m)$, однакової арності утворити функцію

$$f(x_1, \ldots, x_m) = g(g_1(x_1,\ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1,\ldots, x_m)).$$

Таку функцію позначають $\mathbf{S}^{n+1}(g, g_1, \ldots,g_n)$.

Операція примітивної рекурсії **R** дозволяє із n-арної функції g та n+2-арної функції h утворити n+1-арну функцію f за допомогою наступних співвідношень:

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$$
$$f(x_1,\ldots, x_n, y+1) = h(x_1,\ldots, x_n, y, f(x_1,\ldots, x_n, y))$$

Таку функцію позначають **R**(g, h).

Операція мінімізації **M** дозволяє із n-арної функції g утворити n-арну функцію f, що задається співвідношенням:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y (g(x_1, \ldots, x_{n-1},y) = x_n).$$

Тобто, значення функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ дорівнює найменшому y для якого $g(x_1, \ldots, x_{n-1},y) = x_n$.
Значення функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ вважається невизначеним у випадках:

1) для всіх y значення $g(x_1, \ldots, x_{n-1},y) \neq x_n$;
2) для всіх $y<t$ значення $g(x_1, \ldots, x_{n-1},y)$ визначене і $\neq x_n$, а значення $g(x_1, \ldots, x_{n-1},t)$ невизначене;
3) значення $g(x_1, \ldots, x_{n-1},0)$ невизначене.

Таку функцію позначають **M**(g).

Функцію, яку можна одержати з базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції та примітивної рекурсії, називають *примітивно рекурсивною функцією* (скорочено ПРФ). Зрозуміло, що кожна примітивно рекурсивна функція є рекурсивною.

Функцію, яку можна одержати з базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації, називають *частково рекурсивною функцією* (скорочено ЧРФ).

Всюди визначену ЧРФ називають *рекурсивною функцією*(скорочено РФ).
Із визначень ПРФ, ЧРФ, РФ маємо такі співвідно-шення між класами функцій:
ПРФ $\subseteq$ РФ $\subseteq$ ЧРФ.

2. Довести, що предикат P(x) = ∃ n (x = 1 + 2 +…+ n) є примітивно рекурсивним.
Він є рекурсивним, оскільки обчислюється алгоритмом:

```
function P(x):
   begin:
      if x := 0 then P := 1
      else
         if x := 1 then P := 0
         else
            begin
               s := 1
               for i = 2 to x
                  if s != x then
                        s := s + i
                        if i = x then P := 1
                  else P := 0
            end
   end
```

Отже, P(x) — ПР предикат

3. Довести, що функція, універсальна для одномісних ПРФ приймає всі значення.
а) Нехай b – довільне натуральне число. Розглянемо функцію:
f(x) = b => f(x) = D(n, x) = b
б) $f_0(x) = \begin{matrix} b, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{matrix}$, $f_1(x) = \begin{matrix} b, x = 1 \\ 0, x \neq 1 \end{matrix}$, $f_2(x) = \begin{matrix} b, x = 2 \\ 0, x \neq 2 \end{matrix}$, …
$f_0(0) = D(n_0, 0) = b$ – оскільки функція ПР, то для деякого n_0 ця рівність виконується
$f_1(1) = D(n_0, 1) = b$
$f_2(2) = D(n_0, 2) = b$
...
Оскільки b було вибране довільно, а універсальна функція D(n,x) здатна відтворити будь-яку одномісну ПРФ, то D(n,x) приймає всі можливі натуральні значення.

Таким чином, доведено, що універсальна функція для одномісних ПРФ приймає всі натуральні значення.

Білет 3.

1. Рекурсивно перелічимі множини. Рекурсивні та примітивно рекурсивні множини.

Множина чисел A називається рекурсивно перелічимою (РПМ), якщо існує двомісна ПР функція f(a, x) така, що рівняння f(a, x) = 0 має розв'язок x тоді і тільки тоді, коли a є A.

Наслідок. Множина чисел A рекурсивно перелічима тоді і тільки тоді, коли існує алгоритм, який для довільного n є N дає відповідь на питання n є A, якщо n дійсно належить A, або працює нескінченно довго, якщо $n \notin A$.

Підмножина A множини натуральних чисел N називається рекурсивною (примітивно рекурсивною), якщо характеристична функція множини A рекурсивна (примітивно рекурсивна). Так, як всі ПР функції рекурсивні, то кожна ПР множина є рекурсивною множиною.

Наслідок. Підмножина A множини натуральних чисел N рекурсивна або примітивно рекурсивна тоді і тільки, коли існує алгоритм, який для довільного n є N дає відповідь на питання n є A чи $n \notin A$.

Причому, у випадку ПР множини такий алгоритм будується з алгоритмів типу $S^{n+1}(g, g_1, \ldots , g_n)$, R(g, h), а у випадку Р множини – з алгоритмів типу $S^{n+1}(g, g_1, \ldots , g_n)$, R(g, h), M^l (g), де M^l – оператор слабкої мінімізації.

2. Функція f(x) = 0, якщо x = 0 і f(x) = 1 + 2 +…+ x, якщо x > 0 – ПРФ. Довести.

Вона є ПРФ оскільки обчислюється алгоритмом:

```
function f(x)
   begin
      if x := 0 then f := 0
      else
         s := 1
         for i = 2 to x
            s := s + I
         f := s
   end
```

3. Показати, що кожна нескінченна РП множина M містить нескінченну рекурсивну підмножину.

Дійсно, нехай множина M співпадає з множиною значень ПР функції f(x). Розглянемо множину, характеристична функція якої обчислюється алгоритмом:

```
function XM(x)
   begin
      s := 0
      for i = 0 to x
         if g(i) = x then s := 1
      if s = 1then XM := 0
      else XM := 1
   end
```

де функція g(x) обчислюється алгоритмом.

```
function g(x)
   begin
      s := 1
      i := 0
      j := 0
      if x = 0 then g := f(0)
      else
         begin
            while s != x do
               begin
                  while f(i) >= f(j) do
                     j := j + 1
               end
            i := j
            s := s + 1
         end
      g := f(j)
   end.
```

Ця функція буде характеристичною для нескінченної рекурсивної підмножини множини М. Зазначимо, що тут було використане твердження про те, що множина М рекурсивна тоді і тільки тоді, коли вона співпадає з множиною значень сторого зростаючої рекурсивної функції.

Білет 4.

1. Теорема про мажоруючі неявні функції.

Розглянемо рівняння g(x, y) = 0, ліва частина якого є всюди визначена функція. Припустимо, що для кожного значення х це рівняння має єдиний розв'язок у. Тоді цей розв'язок буде однозначною всюди визначеною функцією від х. Чи буде ця функція примітивно рекурсивною, якщо функція g є ПР функцією від x, y? В загальному випадку відповідь на це питання негативна. Але справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай g(x, y), a(x) такі примітивно рекурсивні функції, що рівняння g(x, y) = 0 для кожного х має хоча б один розв'язок і $u_y(g(x, y) = 0) \leq a(x)$ для будь-якого х. Тоді функція f(x) = $g_y(g(x, y) = 0)$ теж примітивно рекурсивна.

Доведення.

```
function f(x)
   begin s := 0
      for i = 0 to a(x)
         if h(x, i) != 0 then s := s + 1
      f := s
end
```

де h(x, i) = g(x, 0) □ … □ g(x, i).

2. Довести, що існує ПРФ g така, що $\{x\} = \pi_{g(x)}$.

Для розв'язання задачі теба показати, що існує ПРФ g така, що $\{0\} = \pi_{g(0)}$, $\{1\} = \pi_{g(1)}$, … .

Відомо, що для будь-якої ЧРФ f(x, y) існує ПРФ g(x) така, що f(x, y) = K(g(x), y).

Покладемо f(x, y) = x + 0*y. Тоді будемо мати рівності:

$\{0\}$ = f(0, y) = K(g(0), y),

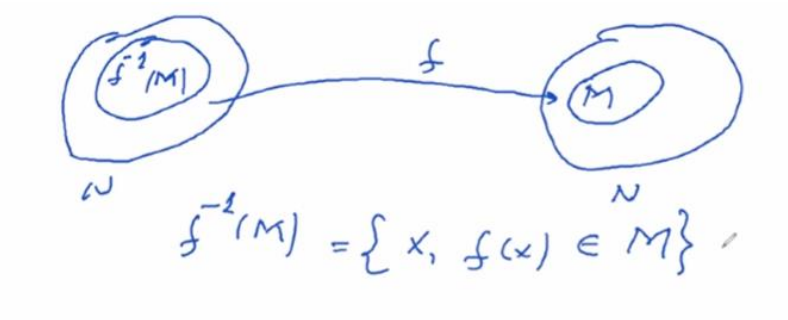
$\{1\}$ = f(1, y) = K(g(1), y),

………………………

Отже, $\{x\} = \pi_{g(x)}$.

3. Показати, що образ РП множини M відносно ЧРФ f(x) є РПМ.

$f^{-1}(M)$ – РПМ, якщо f – ЧРФ, M – РПМ



M – РПМ => співпадає з множиною значень функції a(x)

Нехай Gf = <f_1(x), f_2(x)> - графік f(x)

x є f^{-1}(M) <=> x є області визначення f і f(x) є M

f_1(i), i = 0, 1, 2, … - область визначення: f(i) = x

f_2(i), i = 0, 1, 2, … - область значень: f(i) = a(j) => f(x) є M

```
function X(x)
	begin
		i = 0
		j = 0
		while f2(i) != x do
			i = i+1
		while a(j) != f1(i) do
			j = j+1
		X = 0
	end
```

Білет 5.

1. Теорема Поста.

Теорема 6.5 (Поста). Якщо множина A і її доповнення Ā рекурсивно перелічимі, то A і Ā рекурсивні.

Доведення. Розглянемо алгоритм обчислення функції h(n):

```
function h(n)
   begin
      i := 0
      while |f(i) – n|*| f `(i) – n| != 0 do
         i := i + 1
      h := i
   end.
```

Тоді характеристичні функції множин A і Ā□ обчислюються алгоритмами:

a)

```
function XA (n)
   begin
      if |f (h(n)) – n| = 0 then XA := 0
      else XA := 1
   end.
```

b)

```
function XA`(n)
   begin
      if |f'(h(n)) – n| = 0 then XA` := 0
      else XA` := 1
end
```

де f, f` – ПРФ з множинами значень A і A`відповідно. Таким чином, доповнення РП множини, яка не є рекурсивною, не може бути РП множиною.

2. Якщо нескінченна множина A – рекурсивна, то вона є множиною значень строго зростаючої рекурсивної функції. Довести.

Оскільки кожна ПР множина є рекурсивною, то покажемо, що A - ПРМ.

A = {f(0), f(1), …}.

Алгоритм обчислення характеристичної функції цієї множини наступний:

```
function XA(x)
   begin
      s := 0
      for i = 0 to x
         if f(i) = x then s := 1
      if s = 1 then XA := 0
      else XA := 1
   end.
```

Якщо функція монотонно зростає, тобто правдива імплікація x < y => f(x) < f(y), то f(x) >= x

для будь-якого x.
Дійсно, за методом математичної індукції маємо:
1. f(0) >= 0;
2. Нехай f(x) >= x;
3. Тоді f(x + 1) > f(x) >= x. Отже, f(x + 1) >= x + 1.

У випадку правдивості імплікації x < y => f(x) □<= f(y), множина A всіх значень цієї функції буде ПР множиною.

Дійсно, в цьому випадку слід розглянути функцію g(x) = f(x) + x. Ця функція примітивно рекурсивна і задовольняє співвідношенню x < y => g(x) < g(y), оскільки з того, що x < y випливає, що g(x) = f(x) + x < f(y) + y = g(y). Тому множина всіх значень цієї функції є ПР множиною. Якщо через X позначити характеристичну функцію цієї множини, то характеристична функція X_A множини A може бути обчислена алгоритмом

```
function XA(x)
   begin
      s := 0
      for i = 0 to x
         if g(i) ∸ i = x then s := 1
      if s = 1 then XA := 0
      else XA := 1
   end.
```

3. Показати, що множина M = {<x_1, ... , x_n>, ∃ y f(x_1, ... , x_n, y) = 0} є РПМ, де f – ЧРФ.

Дійсно, часткова характеристична функція множини M обчислюється наступним алгоритмом

$G_f = \{<f_1(i), f_2(i), \dots, f_n(i), f_{n+1}(i), f_{n+2}(i)>, i = 1, 2, \dots, n\}$

$f_1(i)$!= x_1 & $f_2(i)$!= x_2 & … & $f_n(i)$!= x_n & $f_{n+2}(i)$!= 0

еквівалентно $<f_1(i), f_2(i), \dots, f_n(i), f_{n+1}(i), f_{n+2}(i)> = <x_1, x_2, \dots, x_n, f_{n+1}(i), 0>$ =>

$<x_1, x_2, \dots, x_n>$ є M і $f(x_1, x_2, \dots, x_n, f_{n+1}(i)) = 0$

```
function XM(x1, x2, …, xn)
   begin
      i = 0
      while (f1(i) != x1 v f2(i) != x2 v … v fn(i) != xn v fn+2(i) != 0) do
         i = i+1
      XM = 0
   end
```

Білет 6.

1. Теорема про кусково задану функцію.

Теорема 2.3. Нехай функції $f_1, f_2, \ldots , f_{k+1}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ примітивно рекурсивні, причому при будь-яких значеннях змінних ніякі дві з функцій $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ не дорівнюють 0. Тоді функція, яка визначається кусковою схемою

$$f(\overline{x}) = \begin{cases} f_1(\overline{x}), \text{якщо } \alpha_1(\overline{x}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(\overline{x}), \text{якщо } \alpha_k(\overline{x}) = 0, \\ f_{k+1}(\overline{x}) \text{ в інших випадках,} \end{cases}$$

буде примітивно рекурсивною.

Доведення.

```
function f(x)
    begin
      if  α1(x) = 0 then f := f1(x)
      if  α2(x) = 0 then f := f2(x)
      ……………………………
      if  αk(x) = 0 then f := fk(x)
      else f = fk+1(x)
    end.
```

В теоремі розглянуто типовий випадок, коли умова має вигляд $\alpha_i = 0$.

Так як умови вигляду $\alpha_i = \beta_i$, $\alpha_i <= \beta_i$, $\alpha_i < \beta_i$ рівносильні, відповідно, умовам $|\alpha_i - \beta_i| = 0$, $\alpha_i \dot{-} \beta_i = 0$, $nsg\ (\beta_i \dot{-} \alpha_i) = 0$, то теорема залишається справедливою і в тому разі, коли в кусковій схемі рівності $\alpha_i = 0$ замінюються іншими умовами, де α_i , β_i – ПР функції.

2. Нехай D(x,y) – універсальна для одномісних ПРФ. Показати, що D(x,y,z) = D(x, c(y,z)) – універсальна для 2-місних ПРФ.

$D^3(x, y, z) = D^2(x, c(y, z))$

а) D^3 – рекурсивна

б) g(y, z) – ПРФ

$g(y, z) = D^3(n, y, z)$ для деякого фіксованого n

а) $D^3(n, y, z) = D^2(n, c(y, z))$ => D^2 ПРФ, бо одержується з функції $D^2(n, y)$ за операцією суперпозиції. Тоді і D^3 - ПРФ

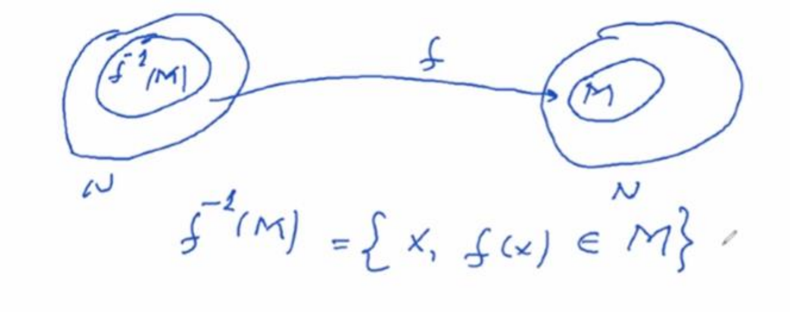
б) g(y, z) – довільна ПРФ

Розглянемо функцію f(x) = g(l(x), r(x)) – ПРФ, оскільки l(x), r(x) і g – ПРФ, тому f(k) = D(x, k) для деякого x. Тоді виконується рівність:

f(c(y, z)) = g(l(c(y, z)), r(c(y, z))) = g(y, z) => D(x, c(y, z))

3. Показати, що повний прообраз РПМ M відносно ЧРФ є РПМ.

$f^{-1}(M)$ – РПМ, якщо f – ЧРФ, M – РПМ



M – РПМ => співпадає з множиною значень функції a(x)

Нехай $Gf = <f_1(x), f_2(x)>$ - графік f(x)

x є $f^{-1}(M)$ <=> x є області визначення f і f(x) є M

$f_1(i)$, i = 0, 1, 2, … - область визначення: f(i) = x

$f_2(i)$, i = 0, 1, 2, … - область значень: f(i) = a(j) => f(x) є M

```
function X(x)
    begin
        i = 0
        j = 0
        while f2(i) != x do
            i = i+1
        while a(j) != f1(i) do
            j = j+1
        X = 0
    end
```

Білет 7.

Теорема 6.3. Непуста множина A РП множина $\Leftrightarrow$ коли вона співпадає з множиною значень деякої ПРФ.

Необхідність (множина A значень ПРФ $f(x)$ є РПМ). Дійсно, часткова характеристична функція множини A може бути обчислена алгоритмом:

```
function χ_A(a)
begin
    i = 0
    while f(i) ≠ a
        do i = i + 1
    χ_A = 0
end.
```

Достатність (якщо множина A – РПМ, то співпадає з множиною значень деякої ПРФ). Розглянемо функцію, яка обчислюється алгоритмом

```
function f(n)
    begin
        if F(l(n), r(n)) = 0 then  f = l(n)
        else f = b
    end,
```

де $F(a, x)$ ПРФ така, що рівняння $F(a, x) = 0$ має розв'язок $\Leftrightarrow a \in A$, $b \in A$.

Ця функція ПРФ за побудовою. Крім того:

a) Значення цієї функції належать до A;

b) Якщо m – довільний елемент множини A, то рівняння $F(m, x) = 0$ має розв'язок i. Покладемо $n = \mathbf{c}(m, i)$. Тоді значення функції f в точці n дорівнює m.

1. Непуста множина A є РПМ ⇔коли вона співпадає з множиною значень деякої ПРФ.

2. Якщо R(x, y) – ПР предикат, то $Q(x, z) = \exists y_{(y < z)} R(x, y)$ – ПР предикат.

Він є рекурсивним, оскільки обчислюється алгоритмом:

```
function Q(x, z)
   begin
      for y := 0 to z
         if R(x, y) = 0 then Q := 0
      Q := 1
   end
```

Отже Q(x, z) – РП предикат

3. Показати, що множина A всіх натуральних n для яких існує розв'язок рівняння $x^n + y^n + z^n = v^n$ в натуральних числах, відмінних від нуля, є РПМ.
Дійсно, часткова характеристична функція X_A множини A обчислюється наступним алгоритмом:

```
function X(x)
  begin
    i := 1
    while c41(i) + c42(i) + c43(i) != c44(i) do
      i := i + 1
    X:= 0
  end.
```

Де c_{kj} — функція, яка відповідає за систематичний перебір натуральних чисел.
j — номер конкретного елемента трійки або четвірки (x,y,z,v), яка відповідає одному набору чисел для перевірки рівності.

Білет 8.

1. Теорема про сумування.

Теорема 2.1 (про сумування). Нехай функція g примітивно рекурсивна. Тоді функція f, яка визначається рівністю

$$f(x) = \sum_{i=0}^{x} g(i)$$

теж примітивно рекурсивна.

Доведення.

```
function f(x)
  begin
    if x = 0 then f := g(0)
    else f := f(x – 1) + g(x)
  end
```

```
2. function f(x)
  begin
    s := 0
    for i = 0 to x
      s := s + g(i)
    f := s
  end
```

Наслідок 2.1. Якщо функція g примітивно рекурсивна, то 2-місна функція f, яка визначається схемою

$$f(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=x}^{y} g(i), x \le y \\ 0, \qquad x > y \end{cases}$$

також ПР функція.

Доведення.

```
function f(x,y)
  begin
    if x > y then f := 0
    else
      begin
        s := 0
        for i = x to y
          s := s + g(i)
        f := s
      end
  end.
```

Наслідок 2.2. Якщо g, h, k – ПР функції, то функція f^*, що визначається співвідношенням

$$f^*(x) = \begin{cases} \sum\limits_{h(x)}^{k(x)} g(i), \text{ якщо } h(x) \le k(x) \\ 0, \text{якщо } h(x) > k(x) \end{cases}$$

18

також ПР функція.

Ця функція є суперпозицією функції f з наслідку 2.1 та функцій h, k ($f^*(x) = f(h(x), k(x))$) і обчислюється наступним алгоритмом:

```
function f*(x)
    begin
        if  h(x) > k(x) then f*:= 0
        else f* := f(h(x), k(x))
    end
```

де f – функція з наслідку 1.

2. Нехай f(a, y) – ЧРФ. Сукупність A тих a, для яких рівняння f(a, y) = 0 має розв’язок є РПМ. Довести.

Графік функції f(a, y) можна подати у вигляді <a_1(t), a_2(t), a(t)>, t = 0, 1, 2, …

Тоді часткова характеристична функція множини A обчислюється алгоритмом:

```
function XA(a)
   begin
      i := 0
      while a(i) != 0 v a1(i) != x do
         i := i + 1
       XA := 0
   end.
```

3. Показати, що функція w(x) = {0, U(x, x) > 1; 1, інакше} не є РФ.
Покажемо, що не існує алгоритму, який її обчислює.
Припустимо, що такий алгоритм існує, тобто функція w(x) – рекурсивна. Це означає, що w(x) = U(m, x) для деякого m. Тобто, цю функцію можна обчислити в довільній точці алгоритмом A1:

```
function w(x)
   begin
      w := U(m, x)
   end
```

```
function U(n, x)
   begin
      i := 0
      while D(n, x, i) != 0 do
         i := i + 1
      U := l(i)
   end.
```

Обчислимо значення функції w в точці m. Якщо w(m) = 0, то U(m, m) = 0 (оскільки w(m) = U(m, m)). З іншого боку, якщо w(m) = 0, то U(m, m) > 1 (визначення функції w). Одержали суперечність. Отже, алгоритм A1 функцію w не обчислює

Білет 9.
1. Універсальні функції.

Нехай $\mathfrak{I}$ – система часткових одномісних функцій.

Часткова функція $F(x, y)$ від двох змінних називається універсальною для сімейства $\mathfrak{I}$, якщо виконуються наступні умови:

1. Для кожного фіксованого i функція $F(i, y)$ належить $\mathfrak{I}$;
2. Для кожної функції $f(y)$ із $\mathfrak{I}$ існує таке число i, що для всіх y $F(i, y) = f(y)$.

10.1. Універсальна рекурсивна функція

Теорема 10.1. Система всіх одномісних ПР функцій має універсальну рекурсивну функцію.

Така функція позначається через $D(n, x)$ і має наступні властивості:

1. Для кожного фіксованого одномісна функція $D(n, x)$ є ПР функцією.
2. Для кожної одномісної ПР функції $f(x)$ існує число n таке, що $D(n, x) = f(x)$.

Теорема 10.2. Кожна ЧРФ $f(x_1, \ldots, x_n)$ може бути обчислена алгоритмом:

$$
\begin{array}{l}
\text{function } f(x_1, \ldots, x_n) \\
\quad \text{begin} \\
\quad\quad i := 0 \\
\quad\quad \text{while } F(x_1, \ldots, x_n, i) \neq 0 \text{ do} \\
\quad\quad\quad i := i + 1 \\
\quad\quad f := G(i) \\
\quad \text{end,}
\end{array}
$$

де F, G деякі (залежні від f) ПРФ.

2. Довести, що існує множина, яка не є РПМ.
Скористаємось 3 теоремами, довівши останю за допомогою перших двух

Теорема 1. Ніяка ЧРФ U(x,y) універсальна для сукупності всіх одномісних ЧРФ не може мати рекурсивних довизначе
Теорема 2. Якщо область визначення M ЧРФ f(x) рекурсивна, то f(x) має рекурсивне довизначення.
Теорема 3. Якщо ЧРФ U(x, y) є універсальною для всіх одномісних ЧРФ, то область визначення M цієї функції є нерекурсивною РПМ
Доведення. Множина M – РПМ, як область визначення ЧРФ. Якби ця множина була рекурсивною то за теоремою 2 функція U(x, y) мала б рекурсивне довизначення. На підставі теореми 1 такого довизначення функція U(x, y) мати не може. Це означає, що доповнення таких множин не може бути РПМ. Звідси випливає, що існують також множини, які не є РПМ.

3. За визначенням $K^2(x_0, x_1) = T^2(l(x_0), c(r(x_0), x_1))$. Виразити $T^2(x_0, x_1)$ через K^2, c(x,y), l(x), r(x).

Раніше було показано, що кожна ЧРФ може бути обчислена алгоритмом:

```
function f(x)                function T(n, x)
    begin                        begin
        f := T(n, x)                 i := 0
    end                              while D(n, x, i) ≠ 0 do
                                         i := i + 1
                                     T := l(i)
                                 end.
```

Це означає, що функція $T(n, x)$ є функцією універсальною для класу одномісних ЧРФ.

Якщо у співвідношенні

$$K^2(x_0, x_1) = T^2(\boldsymbol{l}(x_0), \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}(x_0), x_1))$$

покласти $n = \boldsymbol{l}(x_0)$, $x = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}(x_0), x_1)$, то з другої рівності одержимо $x_1 = \boldsymbol{r}(x)$, $\boldsymbol{r}(x_0) = \boldsymbol{l}(x)$, а із співвідношення $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{l}(x_0), \boldsymbol{r}(x_0)) = x_0$ – рівність $x_0 = \boldsymbol{c}(n, \boldsymbol{l}(x))$. Звідси,

$$T^2(n, x) = K^2(\boldsymbol{c}(n, \boldsymbol{l}(x)), \boldsymbol{r}(x)).$$

Білет 10.
1. Рекурсивно перелічимі множини. Рекурсивні та примітивно рекурсивні множини.
Множина чисел A називається рекурсивно перелічимою (РПМ), якщо існує двомісна ПР функція f(a, x) така, що рівняння f(a, x) = 0 має розв'язок x тоді і тільки тоді, коли a є A.
Наслідок. Множина чисел A рекурсивно перелічима тоді і тільки тоді, коли існує алгоритм, який для довільного n є N дає відповідь на питання n є A, якщо n дійсно належить A, або працює нескінченно довго, якщо n ∉ A.

Підмножина A множини натуральних чисел N називається рекурсивною (примітивно рекурсивною), якщо характеристична функція множини A рекурсивна (примітивно рекурсивна). Так, як всі ПР функції рекурсивні, то кожна ПР множина є рекурсивною множиною.
Наслідок. Підмножина A множини натуральних чисел N рекурсивна або примітивно рекурсивна тоді і тільки, коли існує алгоритм, який для довільного n є N дає відповідь на питання n є A чи n ∉ A.

Причому, у випадку ПР множини такий алгоритм будується з алгоритмів типу $S^{n+1}(g, g_1, \dots, g_n)$, $R(g, h)$, а у випадку Р множини – з алгоритмів типу $S^{n+1}(g, g_1, \dots, g_n)$, $R(g, h)$, $M^l(g)$, де M^l – оператор слабкої мінімізації.

2. Існує в точності $\aleph_0$ ЧР функцій. Довести. (GPT, як на мене, то норм)

Спробуємо побудувати бі'єктивне відображення між множиною всіх ЧРФ та множиною натуральних чисел

а) Всі ЧРФ можна занумерувати за допомогою універсальної функції T(n, x)

Ін'єктивність: Нехай T(n,x) — універсальна частково рекурсивна функція, яка обчислює ЧРФ $f_n(x)$ для кожного натурального числа n. Припустимо, що існують два різні натуральні числа n і m такі, що T(n,x)=T(m,x) для всіх x. Тобто, обидва номери n і m описують одну й ту ж саму ЧРФ.

Однак, за визначенням універсальної функції T(n,x), кожен номер nnn кодує унікальну ЧРФ. Тому, якщо T(n,x)=T(m,x)для всіх x, то це означає, що n = m. Це суперечить припущенню, що $n \neq m$. Тому, якщо T(n,x) і T(m,x) однакові, то n =m. Отже універсальна функція є ін'єктивною відображенням між натуральними числами і ЧРФ.

Сюр'єктивність: Нехай f(x)— будь-яка ЧРФ. За визначенням універсальної функції T(n,x) існує таке натуральне число n, що T(n,x)=f(x) для всіх x. Це означає, що кожна ЧРФ може бути обчислена універсальною функцією за відповідним номером n. Отже універсальна функція є сюр'єктивною відображенням між натуральними числами і ЧРФ.

3. Довести, що функція f(x) = [√(2x)] є ПРФ.

Дійсно, алгоритм обчислення цієї функції наступний:

```
function f(x)
   begin
      if x = 0 then f := 0
      else
         for i = 1 to x
            if (i² ∸ 2*x) <=0 & ((i+1)² ∸ 2*x) > 0 then f := i + 1

   end
```

Білет 11.

1. Теорема про графік ЧРФ. Наслідки.

8.1. Теорема про графік ЧРФ

Теорема 8.1 (про графік частково рекурсивної функції). Для того, щоб часткова функція f була частково рекурсивною, необхідно і достатньо, щоб графік f був рекурсивно перелічимим.

Достатність (графік G_f функції f є РПМ $\Rightarrow f$ є ЧРФ). За попередньою теоремою множина G_f співпадає з множиною пар виду $< f_1(x),\ f_2(x) >, x = 0,1, \ldots$.

Тоді для обчислення функції f існує алгоритм

```
function f(x)
    begin
      i := 0
      while f1(i) ≠ x
          do i := i + 1
      f := f2(i)
    end.
```

Цей алгоритм або обчислює значення $f(x)$, або працює нескінченно довго у випадку, якщо $f(x)$ невизначена.

Необхідність (f є ЧРФ $\Rightarrow$ графік G_f функції f є РПМ). Часткова характеристична функція множини G_f може бути обчислена алгоритмом:

```
function χ_{G_f}(x, y)
    begin
      i := 0
      while i ≠ x
         do i := i + 1
      while f(x) ≠ y
         do i := i + 1
      χ_{G_f} := 0
    end.
```

Наслідок 1. Область визначення кожної ЧРФ є РПМ.
Наслідок 2. Область значень ЧРФ є РПМ.
Наслідок 3. Множина А n-ок чисел РП <=> коли часткова характеристична функція множини А є ЧРФ.
Наслідок 4. Якщо F(x,y) – ЧРФ, то сукупність А тих x, для яких рівняння F(x, y) = 0 має розв’язок y є РПМ.
Наслідок 8.5. Сукупність А розв’язків рівняння $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, де f – ЧРФ, є РПМ.

2. Довести, що нескінченна множина А рекурсивна тоді і тільки тоді, коли А є множиною значень строго зростаючої рекурсивної функції.

Оскільки кожна ПР множина є рекурсивною, то покажемо, що А - ПРМ.
A = {f(0), f(1), …}.
Алгоритм обчислення характеристичної функції цієї множини наступний:

```
function X_A(x)
 begin
 s := 0
 for i = 0 to x
 if f(i) = x then s := 1
 if s = 1 then X_A := 0
```

```
 else X_A := 1
 end.
```

Якщо функція монотонно зростає, тобто правдива імплікація $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, то $f(x) >= x$ для будь-якого x.

Дійсно, за методом математичної індукції маємо:
1. $f(0) >= 0$;
2. Нехай $f(x) >= x$;
3. Тоді $f(x + 1) > f(x) >= x$. Отже, $f(x + 1) >= x + 1$.

У випадку правдивості імплікації $x < y \Rightarrow f(x)$ □$<= f(y)$, множина A всіх значень цієї функції буде ПР множиною.

Дійсно, в цьому випадку слід розглянути функцію $g(x) = f(x) + x$. Ця функція примітивно рекурсивна і задовольняє співвідношенню $x < y \Rightarrow g(x) < g(y)$, оскільки з того, що $x < y$ випливає, що $g(x) = f(x) + x < f(y) + y = g(y)$. Тому множина всіх значень цієї функції є ПР множиною. Якщо через X позначити характеристичну функцію цієї множини, то характеристична функція X_A множини A може бути обчислена алгоритмом

```
function X_A(x)
   begin
      s := 0
      for i = 0 to x
         if g(i) ∸ i = x then s := 1
      if s = 1 then X_A := 0
      else X_A := 1
   end.
```

3. Довести, що функція $f(x, y) = [x, y]$ є бієкцією. (GPT, умова дебіла)

Оскільки у завдані не вказано між чим вести бієкцію, а сама функція задана не зрозуміло, то доведемо бієктивність між парою [x, y] та множиною натуральних чисел.

Для доведення скористаємось нумерацією Кантора.

Ін'єктивність: нехай $f(x_1, y_1)=f(x_2,y_2)$, тобто $c(x_1,y_1)=c(x_2,y_2)$. Це означає, що обидві пари мають однаковий номер у послідовності Кантора. Оскільки послідовність Кантора будується за принципом $c(x, y) = (x+y)*(x+y+1)/2 + x$ то якщо два номери однакові, то очевидно, що й координати x та y у цих парах також повинні збігатися. Тобто $x_1=x_2$. Отже, функція $f(x,y)$ є ін'єктивною.

Сюр'єктивність: Для доведення сюр'єктивності потрібно показати, що для будь-якого натурального числа nnn існує пара (x,y), така що $f(x,y)=n$. Згідно з нумерацією Кантора, кожному натуральному числу nnn відповідає певна пара (x,y).

Розглянемо функції $l(n)$ та $r(n)$, які обчислюють координати пар у послідовності Кантора:

$l(n)$ — ліва координата пари, що відповідає номеру nnn у послідовності Кантора.

$r(n)$ — права координата пари, що відповідає номеру nnn у послідовності Кантора.

Згідно з визначенням, $c(l(n),r(n)) = n$, тобто для будь-якого натурального числа n існує така пара (x,y), що $c(x,y)=n$. Це означає, що кожному n можна знайти відповідну пару координат (x,y), яка відповідає цьому числу в послідовності Кантора.

Білет 12.

1. Нумерація n-ок натуральних чисел. Основні тотожності.

Одну із бієкцій (нумерацій) між N та $N \times N$ можна задати наступним чином. Всі пари натуральних чисел розташуємо в послідовність

$$<0, 0>, <0, 1>, <1, 0>, <0, 2>, <1, 1>, <2, 0>, <0, 3>, \dots ,$$

тобто, впорядкуємо всі пари так, що пара $<x, y>$ йде раніше за пару $<u, v>$ якщо

$$x + y < u + v,$$

або якщо

$$x + y = u + v \text{ і } x < u.$$

Бієкцію задаємо співвідношенням

$$<x, y> \leftrightarrow n,$$

де n – номер пари в цій послідовності.

Така бієкція називається нумерацією Кантора пар чисел і позначається $c(x, y)$, тобто $c(x, y)$ – це номер пари $<x, y>$ в послідовності Кантора.

Лівий та правий елементи пари $<x, y>$ з номером n визначають функції $l(n)$ і $r(n)$, які називаються лівою та правою координатними функціями.

Теорема 4.1. Функції $c(x, y)$, $l(n)$, $r(n)$ – ПР функції.

Доведення. Функція $c(x, y)$ обчислюється наступним алгоритмом:

```
function c(x, y)
    begin
      s := 0
      for i = 0 to (x + y)
          s := s + i
      for i = 0 to (x + y)
          begin
             j := (x + y) ∸ i
             if  x = i ∧ y = j then k := i
          end
      c := s + k
    end.
```

Враховуючи, що $l(n) \le n$, $r(n) \le n$ функція $l(n)$ обчислюється алгоритмом:

```
function l(n)
    begin
      for i = 0 to n
      for j = 0 to n
          if c(i, j) = n  then l := i
    end,
```

а функція $r(n)$ обчислюється алгоритмом:

```
function r(n)
    begin
      for i = 0 to n
      for j = 0 to n
          if c(i, j) = n  then r := j
    end.
```

Таким чином, $c(x, y)$, $l(n)$ та $r(n)$ – ПР функції.

Зазначимо також, що із визначення функцій $c(x, y)$, $l(n)$, $r(n)$ випливають наступні співвідношення

$$c(l(n), r(n)) = n,\ l(c(x, y)) = x,\ r(c(x, y)) = y.$$

З допомогою нумерації пар чисел можна одержати нумерацію трійок, четвірок і т. д. натуральних чисел. Для цього вводяться наступні функції

$$c^3(x_1, x_2, x_3) = c(c(x_1, x_2), x_3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c^{n+1}(x_1, x_2, \dots , x_{n+1}) = c^n(c(x_1, x_2), x_3, \dots , x_{n+1}).$$

За визначенням, число $c^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається канторовим номером n-ки $<x_1, x_2, \dots, x_n>$.

Якщо $c^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$, то із тотожностей для $c(x, y)$, $l(x)$, $r(x)$, одержимо:

$$x_n = r(x), x_{n-1} = rl(x), \dots , x_2 = rl \dots l(x), x_1 = ll \dots l(x).$$

Ввівши позначення $c_{nn}(x), \dots, c_{n1}(x)$ для правих частин вище приведених рівностей, одержимо:

$$c^n(c_{n1}(x), \dots , c_{nn}(x)) = x,$$
$$c_{ni}(c^n(x_1, x_2, \dots , x_n)) = x_i \ (i = 1, \dots , n).$$

Це аналоги канторової нумерації для n-ок чисел.

2. Проблема зупинки алгоритмічно нерозв’язна. Довести.

Спершу припустимо що проблема розв'язна, і існує функція end(f), яка повертає 1, якщо програма f зупиняється і 0 - якщо ні. Тоді, маючи функцію:

```
function f
   begin
      if (end(f) = 1) then
         while true do
   end
```

end(f) згідно початкового припущення має повернути 1 або 0, але у випадку 1 парадокс увійде у нескінченний цикл і не зупиниться, тому такий результат суперечитиме визначенню функції зупиняється. У випадку 0 - аналогічно. Маємо суперечність, тому початкове припущення про те що функція зупиняється може існувати — хибне.

3. Нехай задані клінівські номери функцій f(x) і g(x). Знайти клінівський номер їх суперпозиції.

Приклад 1. Побудувати ПРФ, яка за номерами Кліні функцій $f(x)$ і $g(x)$ обчислює номер Кліні функції $f(g(x))$.

За умовою задачі

$$f(y) = K(m, y),\ g(x) = K(n, x),$$

і, відповідно, $f(g(x)) = K(m, K(n, x))$.

Розглянемо функцію $K(u, K(v, x))$. Для неї справедливі рівності:

$$K(u, K(v, x)) = K(a, u, v, x) = K([a, u, v], x).$$

Якщо покласти $u = m,\ v = n$, то зліва одержимо суперпозицію $f(g(x))$, а справа – її подання через універсальну функцію Кліні. Отже, достатньо покласти

$$\varphi(u, v) = [a, u, v].$$

Білет 13.

1. Теза Чорча. Зміст. Застосування

Теза Черча. Клас алгоритмічно обчислюваних числових функцій співпадає з класом всіх частково рекурсивних функцій.

Далі алгоритми будемо записувати в мові ПсевдоPascal, яка є спрощеним діалектом мови Pascal.

Операторами цієї мови будуть наступні:

<ідентифікатор> := <вираз>,

if <предикат> then <оператор> | {<оператор>, … , <оператор>}

else <оператор> | {<оператор>, … , <оператор>},

while < предикат> do <оператор> | {<оператор>, … , <оператор>},

for <вираз> to <вираз> <оператор> | {<оператор>, … , <оператор>}.

Нехай X(x) – характеристична функція множини натуральних чисел A.

Тоді функція $X_ч(x) = 0 – X(x)$ – часткова характеристична функція множини A.

Теорема 1.1. Нехай f(x) – примітивно рекурсивна функція, A – примітивно рекурсивна множина. Тоді часткова функція $f_ч(x) = f(x)$, якщо x є A і невизначена, якщо $x \notin A$ є частково рекурсивною.

Доведення.

Існує алгоритм, який обчислює її значення в точках, де вона визначена і працює нескінченно довго в точках, де вона невизначена.

```
function fч (x)
   begin
      i = 0
      while XA(x) != 0 do
         i = i + 1
      fч = f(x)
   end.
```

Всюди визначені частково рекурсивні функції називаються загальнорекурсивними.

2. Довести, що предикат $P(x) = \exists\, n\ (x = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$ є примітивно рекурсивним.

Він є рекурсивним, оскільки обчислюється алгоритмом:

```
function P(x):
   begin:
      if x := 0 then P := 1
      else
         if x := 1 then P := 0
         else
            begin
               s := 1
               for i = 2 to x
                  if s != x then
                        s := s + i^2
                        if i = x then P := 1
                  else P := 0
            end
   end
```

Отже, P(x) — ПР предикат

3. Довести, що існує число n таке, K(n, n) = n.

Скористаємось теоремою Кліні про нерухому точку. Тоді для кожної часткової рекурсивної функції h(x) існує натуральне число a, таке що: K(h(a),x)=K(a,x)

Покладемо h(x)=x, тобто h — це функція, яка кожному числу x ставить у відповідність саме це число x. Тоді, згідно з теоремою Кліні про нерухому точку, існує таке n, що виконується рівність: K(h(n),x)=K(n,x)
Оскільки h(x)=x, то h(n)=n. Підставимо h(n)=n у рівність: K(n,x)=K(n,x)
Для випадку, коли x=n, отримуємо: K(n,n)=n.
Отже, доведено, що існує таке число n, для якого виконується рівність K(n,n)=n

Білет 14.

1. Поняття примітивно рекурсивної функції.

Під функцією будемо розуміти функцію натуральних аргументів і значень.
Базовими функціями називаються найпростіші функції

o(x) = 0,
s(x) = x+1 та функції-селектори
I_m^n $(x_1, \ldots, x_n) = x_m$, де n≥m≥1.
Всі базові функції всюди визначені.

Основними обчислювальними операціями для ПРФ будуть операції *суперпозиції* $\mathbf{S}^{n+1}$, *примітивної рекурсії* **R.**

Операція суперпозиції $\mathbf{S}^{n+1}$ дозволяє із n-арної функції $g(x_1, \ldots, x_n)$ та n функцій $g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)$, однакової арності утворити функцію

$$f(x_1, \ldots, x_m) = g(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Таку функцію позначають $\mathbf{S}^{n+1}(g, g_1, \ldots, g_n)$.

Операція примітивної рекурсії **R** дозволяє із n-арної функції g та n+2-арної функції h утворити n+1-арну функцію f за допомогою наступних співвідношень:

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$$

Таку функцію позначають **R**(g, h).

Функцію, яку можна одержати з базових функцій за допомогою скінченної кількості застосувань операцій суперпозиції та примітивної рекурсії, називають *примітивно рекурсивною функцією* (скорочено ПРФ). Зрозуміло, що кожна примітивно рекурсивна функція є рекурсивною.

2 Довести, що якщо предикати P(x) і Q(x) рекурсивні, то предикат P(x) → Q(x) рекурсивний.
→ - позначає імплікацію. Предикат P(x) повертає 0, якщо P(x) – істина. Аналогічно і Q(x).
Покажемо, що предикат N(x) = ¬P(x) v Q(x) є ПР предикатом
Він є рекурсивним, оскільки обчислюється алгоритмом:

```
function N(x)
   begin
      if P(x) := 1 v Q(x) := 0 then N(x) := 0
      else N(x) := 1
   end
```

Отже Q(x, z) – РП предикат

3. Довести, що існує число n таке, K(n,0) = n.
Скористаємось теоремою Кліні про нерухому точку. Тоді для кожної часткової рекурсивної функції h(x) існує натуральне число a, таке що: K(h(a),x)=K(a,x)
Покладемо h(x)=x, тобто h — це функція, яка кожному числу x ставить у відповідність саме це число x. Тоді, згідно з теоремою Кліні про нерухому точку, існує таке n, що виконується рівність: K(h(n),x)=K(n,x)
Покладемо x = 0. Підставимо h(0)=0 у рівність: K(0,0)=K(0,0)
Для випадку, коли x=0, отримуємо: K(0,0)=0.
Отже, доведено, що існує таке число n, для якого виконується рівність K(n,0)=0

Білет 15.
1. Універсальна ЧРФ.

Теорема 10.2. Кожна ЧРФ $f(x_1, \ldots, x_n)$ може бути обчислена алгоритмом:

```
function f (x1, ... , xn)
    begin
        i := 0
        while F(x1, ... , xn, i) ≠ 0 do
            i := i +1
        f := G(i)
    end,
```

де F, G деякі (залежні від f) ПРФ.

Доведення. Якщо f – ЧРФ, то її графік G_f є РПМ. Тому $G_f = \langle f_1(x), \ldots, f_n(x), f_{n+1}(x)\rangle$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, а f_i – ПРФ. Покладемо

$$F(x_1, \ldots, x_n, i) = |f_1(i) - x_1| + \ldots + |f_n(i) - x_n|, \text{ а}$$
$$G(x) = f_{n+1}(x).$$

Якщо f в точці $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ визначена, то ця точуа належить G_f, а, отже, існує i таке, що $F(x_1, \ldots, x_n, i) = 0$. Значення функції f в цьому випадку дорівнює $f_{n+1}(i)$. Якщо f в точці $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ не визначена, то алгоритм працює нескінченно довго.

Зауваження. Теорему 1 можна сформулювати і так: кожна ЧРФ $f(x_1, \ldots, x_n\rangle$ може бути представлена у формі

$$f(x_1, \ldots, x_n) = G(\mu_i(F(x_1, \ldots, x_n, i) = 0)).$$

Теорема 10.3. Кожна ЧРФ $f(x)$ може бути обчислена алгоритмом

```
function f(x)
    begin
        i := 0
        while F(x, i) ≠ 0 do
            i := i + 1
        f := I(i)
    end,
```

де F – деяка (залежна від f) ПРФ.

Теорема 10.4. Кожна ЧРФ $f(x)$ може бути обчислена алгоритмом

```
function f(x)
    begin
        i := 0
        while D(n, x, i) ≠ 0 do
            i := i + 1
        f := I(i)
    end,
```

де n – деяке (залежне від f) натуральне число.

2. Множина всіх РПМ є зліченою. Довести.

Отже множина всіх РПМ це бієкція між РПМ і N:{РПМ} <-> N

а) Маємо, що множина рекурсивно перелічима <=> вона співпадає з множиною значень деякої примітивно рекурсивної функції

б) Всі примітивно рекурсивні функції можна занумерувати

1-рівень: s(x) q(x)

2-рівень: s(x) + q(x), s(q(x)), q(s(x)), s*(x), q*(x)

…

Якщо ми ці функції занумеруємо починаючи з 0, то одержимо бієктивне відображення в множину натуральних чисел.

Доведемо:

Ін'єктивність:

A — РПМ. Кожній РПМ ми будемо ставити у відповідність перше натуральне число $\xrightarrow{f}$ n таке, що область значень функції з номером n співпадає з A.

Відображення f – ін'єктивне, тому що якщо всі різні РПМ, то відповідні функції з областями значень, які рівні цим множинам, то і номери будуть різні.

Сюр'єктивність:

∀ n ∃ РПМ, яка є областю значень функції з номером n.

3. Нехай A, B – РПМ. Довести, що існують РПМ C ⊆ A, D ⊆ B такі, що C ∩ D = ∅, C ∪ D =

A∪B.
Скористаємось теоремою, що кожна ПР множина є рекурсивно перелічимою.
Оскільки в умові не показано, що множини A і B різні, то візьмемо їх A = B = N. Оскільки множина натуральних чисел є ПРМ, то вона є і РПМ. Тоді можемо покласти, що множина C – множина всіх парних чисел, а множина D – всіх непарних.

Вони обчислюються алгоритмами:

1. function $d(x)$
   begin
   if $rest(x, 2) = 0$ then $d := 0$
   else $d := 1$
   end.

2. function $\chi_p(x)$
   begin
   if $nd(x) = 2$ then $\chi_p := 0$
   else $\chi_p := 1$
   end.

А тому теж є ПРМ, а отже є і РПМ.
Отже виконуються всі умови:
C ⊆ A = {всі парні} ⊆ N, D ⊆ B = {всі непарні} ⊆ N
C ∩ D = {всі парні} ∩ {всі непарні} = ∅,
C ∪ D = A∪B, оскільки {всі парні} ∪ {всі непарні} = N∪N = N.

Білет 16.
1. Теорема про існування нерекурсивних рекурсивно перелічимих множини.
Теорема 1. Ніяка ЧРФ U(x,y) універсальна для сукупності всіх одномісних ЧРФ не може мати рекурсивних довизначе

Теорема 2. Якщо область визначення M ЧРФ f(x) рекурсивна, то f(x) має рекурсивне довизначення.
Теорема 3. Якщо ЧРФ U(x, y) є універсальною для всіх одномісних ЧРФ, то область визначення M цієї функції є нерекурсивною РПМ
Доведення. Множина M – РПМ, як область визначення ЧРФ. Якби ця множина була рекурсивною то за теоремою 2 функція U(x, y) мала б рекурсивне довизначення. На підставі теореми 1 такого довизначення функція U(x, y) мати не може
2. Якщо графік всюди визначеної функції f(x) є РПМ, то f є РФ. Довести.
Графік Gf – це сукупність (n + 1)-ок виду: $<f_1(t), \ldots, f_n(t), g(t)>$
де f_i , g – ПРФ.
Тоді значення функції f в довільній точці можна обчислити за допомогою наступного алгоритму:

```
function f(x1, … , xn)
   begin
      i := 0
      while f1(i) != x1 v … v fn(i) != xn do
         i := i +1
      f := g(i)
   end
```

отже, функція f – рекурсивна.

3. Нехай f, g – рекурсивні функції, причому g – бієкція. Крім того, нехай f(x) ≥ g(x) для всіх x. Тоді, якщо ρ_g – РМ, то ρ_f – РМ. Довести. (ρ_f – область значень f(x)).
Оскільки g(x) є бієкцією, її область значень дорівнює всій множині натуральних чисел:
Тоді з умови, що (x) ≥ g(x) для всіх x випливає, що ρ_f — теж бієктивна. Крім того з даної умови слідує, що функції f(x) і g(x) монотонно зростають. Тоді покажемо, що множина значень ρ_f = M = {f(0), f(1), …} монотонно зростаючи функції f(x) є РМ:
Алгоритм обчислення характеристичної функції цієї множини наступний:

```
function XM(x)
   begin
      s := 0
      for i = 0 to x
         if f(i) = x  then s := 1
      if s = 1 then XM := 0
      else XM := 1
   end.
```

Отже дійсно ρ_f - РМ

Білет 17.

1. Нумерація n-ок натуральних чисел. Основні тотожності.

Одну із бієкцій (нумерацій) між N та $N \times N$ можна задати наступним чином. Всі пари натуральних чисел розташуємо в послідовність

$$<0, 0>, <0, 1>, <1, 0>, <0, 2>, <1, 1>, <2, 0>, <0, 3>, \dots ,$$

тобто, впорядкуємо всі пари так, що пара $<x, y>$ йде раніше за пару $<u, v>$ якщо

$$x + y < u + v,$$

або якщо

$$x + y = u + v \text{ і } x < u.$$

Бієкцію задаємо співвідношенням

$$<x, y> \leftrightarrow n,$$

де n – номер пари в цій послідовності.

Така бієкція називається нумерацією Кантора пар чисел і позначається $\boldsymbol{c}(x, y)$, тобто $\boldsymbol{c}(x, y)$ – це номер пари $<x, y>$ в послідовності Кантора.

Лівий та правий елементи пари $<x, y>$ з номером n визначають функції $\boldsymbol{l}(n)$ і $\boldsymbol{r}(n)$, які називаються лівою та правою координатними функціями.

Теорема 4.1. Функції $\boldsymbol{c}(x, y)$, $\boldsymbol{l}(n)$, $\boldsymbol{r}(n)$ – ПР функції.

Доведення. Функція $\boldsymbol{c}(x, y)$ обчислюється наступним алгоритмом:

```
function c(x, y)
    begin
       s := 0
       for i = 0 to (x + y)
           s := s + i
       for i = 0 to (x + y)
          begin
             j := (x + y) ∸ i
             if  x = i ∧ y = j then k := i
          end
       c := s + k
    end.
```

Враховуючи, що $\boldsymbol{l}(n) \le n$, $\boldsymbol{r}(n) \le n$ функція $\boldsymbol{l}(n)$ обчислюється алгоритмом:

```
function l(n)
    begin
       for i = 0 to n
       for j = 0 to n
             if c(i, j) = n  then l := i
    end,
```

а функція $\boldsymbol{r}(n)$ обчислюється алгоритмом:

```
function r(n)
    begin
       for i = 0 to n
       for j = 0 to n
             if c(i, j) = n  then r := j
    end.
```

Таким чином, $\boldsymbol{c}(x, y)$, $\boldsymbol{l}(n)$ та $\boldsymbol{r}(n)$ – ПР функції.

Зазначимо також, що із визначення функцій $\boldsymbol{c}(x, y)$, $\boldsymbol{l}(n)$, $\boldsymbol{r}(n)$ випливають наступні співвідношення

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{l}(n), \boldsymbol{r}(n)) = n, \ \boldsymbol{l}(\boldsymbol{c}(x, y)) = x, \ \boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}(x, y)) = y.$$

З допомогою нумерації пар чисел можна одержати нумерацію трійок, четвірок і т. д. натуральних чисел. Для цього вводяться наступні функції

$$\boldsymbol{c}^3(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}(x_1, x_2), x_3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\boldsymbol{c}^{n+1}(x_1, x_2, \dots , x_{n+1}) = \boldsymbol{c}^n(\boldsymbol{c}(x_1, x_2), x_3, \dots , x_{n+1}).$$

За визначенням, число $\boldsymbol{c}^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається канторовим номером n-ки $<x_1, x_2, \dots, x_n>$.

Якщо $\boldsymbol{c}^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$, то із тотожностей для $\boldsymbol{c}(x, y)$, $\boldsymbol{l}(x)$, $\boldsymbol{r}(x)$, одержимо:

$$x_n = \boldsymbol{r}(x), x_{n-1} = \boldsymbol{rl}(x), \dots , x_2 = \boldsymbol{rl} \dots \boldsymbol{l}(x), x_1 = \boldsymbol{ll} \dots \boldsymbol{l}(x).$$

Ввівши позначення $\boldsymbol{c}_{nn}(x), \dots, \boldsymbol{c}_{n1}(x)$ для правих частин вище приведених рівностей, одержимо:

$$\boldsymbol{c}^n(\boldsymbol{c}_{n1}(x), \dots , \boldsymbol{c}_{nn}(x)) = x,$$
$$\boldsymbol{c}_{ni}(\boldsymbol{c}^n(x_1, x_2, \dots , x_n)) = x_i \ (i = 1, \dots , n).$$

Це аналоги канторової нумерації для n-ок чисел.

2. Якщо всюди визначена функція f(x) – ЧРФ, то множина розвязків рівняння f(x) = 0 – рекурсивна. Довести.

Оскільки функція f(x) всюди визнасена ЧРФ, то вона є рекурсивною функцією. Характеристична функція множини розв'язків обчислюється наступним алгоритмом:

```
function X(x)
   begin
      if f(x) = 0 then X:= 0
      else X := 1
   end.
```

3. Множина M канторових номерів тих пар <a, b>, для яких рівняння K(a, x) = b має розв'язок, є РПМ. Довести.

```
function X(n):
   begin
      i := 0
      while K(l(n), i) != r(n) do
         i := i + 1
      X = 0
   end
```

Білет 18.

1. Властивості РПМ.

6.1. Властивості ПР (Р) множин

Теорема 6.1. Кожна ПР множина є рекурсивно перелічимою.

Доведення. Існує алгоритм

```
function g(x)
      begin
         i := 0
         while f(x) ≠ 0
              do i := i + 1
         g := 0
      end,
```

який обчислює часткову характеристичну функцію g ПР множини, де f – характеристична функція множини.

Теорема 6.2. Нехай $F(a, x)$ – ПР функція від змінних a, x. Множина M тих значень параметра a, для яких рівняння

$$F(a, x) = 0$$

має хоча б один розв'язок x є РП множиною.

Доведення. Часткова характеристична функція множини M обчислюється наступним алгоритмом:

```
function χ_M(x)
    begin
      i := 0
      while F(x, i) ≠ 0
          do i := i + 1
      χ_M := 0
   end.
```

Теорема 6.3. Непуста множина A РП множина ⇔ коли вона співпадає з множиною значень деякої ПРФ.

Необхідність (множина A значень ПРФ $f(x)$ є РПМ). Дійсно, часткова характеристична функція множини A може бути обчислена алгоритмом:

```
function χ_A(x)
    begin
      i := 0
      while f(i) ≠ x
          do i := i + 1
      χ_A := 0
    end.
```

Достатність (якщо множина A – РПМ, то співпадає з множиною значень деякої ПРФ). Розглянемо функцію, яка обчислюється алгоритмом

```
function f(n)
    begin
      if F(l(n), r(n)) = 0 then f := l(n)
      else f := b
    end,
```

де $F(a, x)$ ПРФ така, що рівняння $F(a, x) = 0$ має розв'язок ⇔ $a \in A$, $b \in A$.

Ця функція ПРФ за побудовою. Крім того:

а) Значення цієї функції належать до A;

b) Якщо m – довільний елемент множини A, то рівняння $F(m, x) = 0$ має розв'язок i. Покладемо $n = c(m, i)$. Тоді значення функції f в точці n дорівнює m.

Теорема 6.4. Сума та перетин скінченної кількості РПМ є РПМ.

Доведення. Нехай A_i – РПМ, а f_i – функції такі, що рівняння $f_i(a, x) = 0$ має розв'язок ⇔ $a \in A_i$. Тоді часткові характеристичні функції суми та перетину обчислюються алгоритмами:

```
a) function χ∪(x)
    begin
      i := 0
      while f1(x, i) · … · fn(x, i) ≠ 0
          do i := i + 1
      χ∪ := 0
   end.

b) function χ∩(x)
    begin
      i := 0
      while f1(x, i) + … + fn(x, i) ≠ 0
          do i := i + 1
      χ∩ := 0
    end.
```

2. Довести, що прообраз рекурсивної множини відносно рекурсивної функції є рекурсивною множиною.

Прообраз мн-ни A —
$B = \{n,\ f(n) \in A\}$.
Показати, що $\chi_B(x)$ — рекурсивна?

```
function X_b(x)
    begin
        if X_a(f(x)) = 0 then X_b = 0
        else X_b = 1
    end
```

3. Довести, що множина всіх клінівських номерів функцій f таких, що f(a) = b є РПМ.

Введемо нову функцію g(y, a) = f(a) + y*0. Тоді її можна занумерувати згідно універсальної функції як $T^3(z, y, a) \Rightarrow K^2(c(z, y), a)$

Покладемо c(z, y) = b. Тоді матимемо $K^2(b, a)$

Запишемо часткову характеристичну функцію:

```
function X(n):
   begin
      i := 0
      while K(r(i), l(i)) != n do
         i := i + 1
      X = 0
   end
```

Білет 19.

1. Теорема про існування нерекурсивних РПМ.

Теорема 1. Ніяка ЧРФ U(x,y) універсальна для сукупності всіх одномісних ЧРФ не може мати рекурсивних довизначе

Теорема 2. Якщо область визначення M ЧРФ f(x) рекурсивна, то f(x) має рекурсивне довизначення.

Теорема 3. Якщо ЧРФ U(x, y) є універсальною для всіх одномісних ЧРФ, то область визначення M цієї функції є нерекурсивною РПМ

Доведення. Множина M – РПМ, як область визначення ЧРФ. Якби ця множина була рекурсивною то за теоремою 2 функція U(x, y) мала б рекурсивне довизначення. На підставі теореми 1 такого довизначення функція U(x, y) мати не може

2. Для того, щоб непуста сукупність була РП, достатньо, щоб вона співпадала з сукупністю значень РФ. Довести.

Теорема 6.3. Непуста множина A РП множина $\Leftrightarrow$ коли вона співпадає з множиною значень деякої ПРФ.

Необхідність (множина A значень ПРФ $f(x)$ є РПМ). Дійсно, часткова характеристична функція множини A може бути обчислена алгоритмом:

function $\chi_A(x)$
  begin
    $i := 0$
    while $f(i) \neq x$
      do $i := i + 1$
    $\chi_A := 0$
  end.

Достатність (якщо множина A – РПМ, то співпадає з множиною значень деякої ПРФ). Розглянемо функцію, яка обчислюється алгоритмом

function $f(n)$
  begin
    if $F(\boldsymbol{l}(n), \boldsymbol{r}(n)) = 0$ then $f := \boldsymbol{l}(n)$
    else $f := b$
  end,

де $F(a, x)$ ПРФ така, що рівняння $F(a, x) = 0$ має розв'язок $\Leftrightarrow a \in A$, $b \in A$.

Ця функція ПРФ за побудовою. Крім того:

a) Значення цієї функції належать до A;

b) Якщо m – довільний елемент множини A, то рівняння $F(m, x) = 0$ має розв'язок i. Покладемо $n = \boldsymbol{c}(m, i)$. Тоді значення функції f в точці n дорівнює m.

3. Довести, що множина всіх клінівських номерів функцій з непустою областю визначення є РПМ.
Існує часткова характеристична функція:

```
function X(n)
   begin
      i := 0
      while K((i), r(i)) != n do
         i := i + 1
      X := 0
   end
```

Білет 20.
1. Рекурсивно перелічимі множини.
Множина чисел A називається рекурсивно перелічимою (РПМ), якщо існує двомісна ПР функція f(a, x) така, що рівняння f(a, x) = 0 має розв'язок x тоді і тільки тоді, коли a є A.

Наслідок. Множина чисел A рекурсивно перелічима тоді і тільки тоді, коли існує алгоритм, який для довільного n є N дає відповідь на питання n є A, якщо n дійсно належить A, або працює нескінченно довго, якщо n $\notin$ A.
+ властивості РПМ

2. Функція f(x, y) = {1, K(x, y) визначена; 0, інакше} не є ЧРФ. Довести.
Функція f(x, y) є характеристичною функцію множини, яка визначає чи належить пара <x, y> множині для яких функція K(x, y) є визначеною.
Але проблема належності є алгоритмічно нерозв'язною.
Доведення. Дійсно, розв'язність проблеми належності означає рекурсивність множини пар для яких рівняння K(x, y) = t має розв'язок. Але алгоритму, який би перевіряв це не існує.
Отже f(x, y) не є чрф

3. Графік рекурсивної функції є рекурсивною множиною. Довести.
Нехай f(x) є РФ. За означенням для $\forall$ x $\exists$ y: f(x) = y.
Тобто G_f = {<x, f(x)> | $\forall$ x є N: y = f(x)}
Тоді множина M = {C(x, y) | $\forall$ x є N: $\exists$ y = f(x)} має бути РМ, тобто для неї має існувати характеристична функція, яка дає відповідь на питання чи C(x, y) є M.
Запишемо характеристичну функцію:

```
function Xm(x)
        begin
                if r(x) = f(l(x)) then Xm = 0
                else Xm = 1
        end
```

Білет 21.
1. Універсальна функція Кліні.
2. Чи є функція f(x) = {1, K(x, x) = 1; 0, в інших випадках} ЧРФ?
Функція f(x) є характеристичною функцію множини, яка визначає чи належить пара <x, x> множині для яких функція K(x, x) є визначеною.
Але проблема належності є алгоритмічно нерозв'язною.
Доведення. Дійсно, розв'язність проблеми належності означає рекурсивність множини пар для яких рівняння K(x, x) = t має розв'язок. Але алгоритму, який би перевіряв це не існує.
Отже f(x) не є чрф

3. Довести, що функція $f(x) = [\sqrt{([(x/2)])}]$ є ПРФ.
Позначимо $[(x/2)] = g(x) \Rightarrow f(x) = [\sqrt{g(x)}]$
$g(x)$ – можна обчислити, як:

```
function g(x)
   begin
      if x := 0 v x := 1then x:= 0
      else
         if (rest(x, 2) = 1) then g := (x-1)/2
         else g := x/2
   end
```

Оскільки функція rest(x, 2) ПРФ, а також (x-1)/2 та x/2 очевидно будуть всюди визначені, то g(x) ПРФ.

$f(x)$ – можна обчислити, як:

```
function f(x)
   begin
      if x = 0 then f := 0
      else
         for i = 1 to x
            if (i² ∸ g(x)) <=0 & ((i+1)² ∸ g(x)) > 0 then f := i + 1
   end
```

Білет 22.
1. Теорема про мажоруючі неявні функції.
2. Нехай заданий клінівський номер функції g(x). Знайти клінівський номер функції $f(x) = \mu_y(g(y) = x)$.

Нехай номер $g(x) = K(n, x)$
Згідно мінімізації функція f(x) є оберненою до g(x). Тобто, якщо $g(y)=x$, то $f(x)=y$. Тоді знайдемо $f(g(x))$

За умовою задачі $f(x) = K(m, x)$, $g(x) = K(n, x)$, і, відповідно, $f(g(x)) = K(m, K(n, x))$. Розглянемо функцію $K(u, K(v, x))$. Для неї справедливі рівності: $K(u, K(v, x)) = K(a, u, v, x) = K([a, u, v], x)$. Якщо покласти $u = m$, $v = n$, то зліва одержимо суперпозицію $f(g(x))$, а справа – її подання через універсальну функцію Кліні. Отже, достатньо покласти $\varphi(u, v) = [a, u, v]$

3. Довести, що множина A розв'язків рівняння $f(x_1, \dots, x_n) = a$ є РПМ, де f – ЧРФ.
Графік функції $f(a, y)$ можна подати у вигляді $<a_1(t), \dots, a_n(t), a(t)>$, $t = 0, 1, 2, \dots$
Тоді часткова характеристична функція множини A обчислюється алгоритмом:

```
function X_A(a)
   begin
      i := 0
      while a_1(i) != x_1 v … v a_n(i) != x_n v a(i) != a do
         i := i + 1
       X_A := 0
   end.
```

Білет 23.
1. Нумерація Поста.
2. Функція f(x) = {1, K(x, x) визначена; 0, інакше} не є ЧРФ. Довести.
Функція f(x) є характеристичною функцію множини, яка визначає чи належить пара <x, x> множині для яких функція K(x, x) є визначеною.
Але проблема належності є алгоритмічно нерозв'язною.
Доведення. Дійсно, розв'язність проблеми належності означає рекурсивність множини пар для яких рівняння K(x, x) = t має розв'язок. Але алгоритму, який би перевіряв це не існує.
Отже f(x) не є чрф

3. Довести, що множина A розв'язків рівняння $f(x_1, \dots, x_n) = a$ є РПМ, де f – ЧРФ.
Графік функції f(a, y) можна подати у вигляді $\langle a_1(t), \dots, a_n(t), a(t)\rangle$, t = 0, 1, 2, …
Тоді часткова характеристична функція множини A обчислюється алгоритмом:

```
function X_A(a)
   begin
      i := 0
      while a_1(i) != x_1 v … v a_n(i) != x_n v a(i) != a do
         i := i + 1
       X_A := 0
   end.
```

Білет 24.
1. Звідність та m-еквівалентність множин.
2. Чи є функція f(x) = {не визначена, K(x, x) визначена; 1, в інших випадках} ЧРФ?.
Функція f(x) є характеристичною функцію множини, яка визначає чи належить пара <x, x> множині для яких функція K(x, x) є визначеною.
Але проблема належності є алгоритмічно нерозв'язною.
Доведення. Дійсно, розв'язність проблеми належності означає рекурсивність множини пар для яких рівняння K(x, x) = t має розв'язок. Але алгоритму, який би перевіряв це не існує.
Отже f(x) не є чрф
3. Якщо множини A і B рекурсивні, то множина A∪B – рекурсивна. Довести.

b) Алгоритм

```
function f(x)
   begin
      if f_1(x) · ... · f_n(x) = 0 then f := 0
      else f := 1
   end
```

обчислює характеристичну функцію об'єднання множин.

Білет 25.

1. Універсальна функція Кліні.

2. Показати, що якщо функція f(x) є ЧРФ, то всяка функція, яка відрізняється від f(x) на скінченній множині значень аргументу, є ЧРФ.

Введемо нову функцію g(x). Нехай f(x) — ЧРФ і g(x) - функція, яка відрізняється від f(x) тільки на скінченній множині аргументів x. Тобто, існує скінченна множина $S=\{x_1,\dots,x_k\}$така що:

g(x) = {f(x), x ∉ S; h(x), x є S}, де h(x) — функція, яка може змінювати значення f(x) тільки на точках з множини S.

Оскільки множина S скінчена, то вона є РПМ. Тоді для неї існує характеристична функція X_s
Також оскільки f(x) – ЧРФ, то її множина значень злічена, крім цього через скінченність множини S, g(x) відрізняється від f(x) на скінчену кількість значень.

Можемо, обчислити g(x)

```
function g(x)
   begin
      if (x є S) then g := h(x)
      else g := f(x)
   end
```

оскільки f(x) — ЧРФ, то і g(x) - ЧРФ

3. Якщо множина А рекурсивна, то множина N \ A – рекурсивна. Довести.

Теорема 5.1. Доповнення Р (ПР) множини, а також об'єднання і перетин будь-якої скінченної системи Р (ПР) множин є Р (ПР) множиною.

Доведення. Нехай $f_1(x)$, …, $f_n(x)$ – характеристичні функції множин $A_1,\dots,A_n$. Тоді функції

$$f(x) = \overline{sg}\, f_1(x),$$
$$g(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x),$$
$$h(x) = sg(f_1(x) + \ldots + f_n(x))$$

36

будуть характеристичними для доповнення множини A_1, об'єднання та перетину множин $A_1, \dots, A_n$. Якщо $f_1(x), \dots, f_n(x)$ рекурсивні або ПР функції, то такими ж будуть і функції $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$.

Інше доведення полягає в побудові алгоритмів обчислення характеристичних функцій, а саме:

Нехай $f_1(x)$, …, $f_n(x)$ – алгоритми для обчислення характеристичних функцій множин $A_1,\dots,A_n$. Тоді алгоритм

а)
```
function f̄ᵢ (x)
   begin
      if fᵢ(x) = 0 then f̄ᵢ :=1
      else f̄ᵢ := 0
   end
```

Білет 26.

1. Універсальна функція Кліні.
2. Функція f(x, y) = {K(x, y), K(x, y) визначена; 0 в інших випадках} не є ЧРФ. Довести.
Функція f(x, y) є характеристичною функцію множини, яка визначає чи належить пара <x, y> множині для яких функція K(x, y) є визначеною.
Але проблема належності є алгоритмічно нерозв’язною.
Доведення. Дійсно, розв’язність проблеми належності означає рекурсивність множини пар для яких рівняння K(x, y) = t має розв’язок. Але алгоритму, який би перевіряв це не існує.
Отже f(x) не є чрф
3. Якщо множини A і B рекурсивні, то множина A∩B – рекурсивна. Довести.

с) Алгоритм

```
function f(x)
    begin
        if (f1(x) + ... + fn(x)) = 0 then f := 0
        else f := 1
    end
```

обчислює характеристичну функцію перетину множин.

Білет 27.
1. Теорема про існування нерекурсивних РПМ.
2. Довести, що образ РПМ відносно ЧРФ є РПМ.

f – ЧРФ, M – РПМ => M - Множина значень a(x)
f(M) є f(N), Gf = {<f1(i), f2(i)>, i = 1, 2, …}

```
function X(y)
    begin
        i = 0
        j = 0
        while f2(i) != y do
            i = i+1
        while a(j) != f1(i) do
            j = j+1
        X = 0
    end
```

3. Відношення m-звідності ≤m транзитивне. Довести.

Твердження. Відношення m-звідності $\le_m$ транзитивне.

Доведення. Дійсно, якщо $\alpha \le_m \beta$ і $\beta \le_m \gamma$, то існує рекурсивна функція h, яка m-зводить α до γ. Ця функція визначається співвідношенням $h(x) = g(f(x))$, де функція f m-зводить α до β, функція g m-зводить β до γ, оскільки

$$
\begin{aligned}
&g(f(\alpha)) \subseteq \gamma \qquad\qquad (f(\alpha) \subseteq \beta),\\
&g(f(N \setminus \alpha)) = N \setminus \gamma.
\end{aligned}
$$

Множина β називається m-універсальною, якщо вона є РП-множиною і кожна РП-множина m-зводиться до β.

Із визначення m-звідності і транзитивності відношення $\le_m$ випливає, що якщо m-універсальна множина m-зводиться до РПМ α, то α теж є m-універсальною множиною.

Наступна теорема дає приклад m-універсальної множини.

Білет 28.

1. Універсальна функція Кліні.
2. Довести, що прообраз РПМ відносно ЧРФ є РПМ.

f – ЧРФ, M – РПМ => M - Множина значень a(x)

f(M) є f(N), Gf = {<f1(i), f2(i)>, i = 1, 2, …}

```
function X(y)
    begin
        i = 0
        j = 0
        while f2(i) != y do
            i = i+1
        while a(j) != f1(i) do
            j = j+1
        X = 0
    end
```

3. Якщо m-універсальна множина m-зводиться до РПМ α, то α теж є m-універсальною множиною. Довести.

Числова множина α називається m-звідною до числової множини β (позначається $\alpha \leq_m \beta$), якщо існує рекурсивна функція $f(x)$ така, що

$$f(\alpha) \subseteq \beta,$$
$$f(N \setminus \alpha) \subseteq N \setminus \beta.$$

При цьому говорять, що функція $f(x)$ m-зводить α до β.

Твердження. Відношення m-звідності $\leq_m$ транзитивне.

Доведення. Дійсно, якщо $\alpha \leq_m \beta$ і $\beta \leq_m \gamma$, то існує рекурсивна функція h, яка m-зводить α до γ. Ця функція визначається співвідношенням $h(x) = g(f(x))$, де функція f m-зводить α до β, функція g m-зводить β до γ, оскільки

$$g(f(\alpha)) \subseteq \gamma \qquad (f(\alpha) \subseteq \beta),$$
$$g(f(N \setminus \alpha)) = N \setminus \gamma.$$

Множина β називається m-універсальною, якщо вона є РП-множиною і кожна РП-множина m-зводиться до β.

Із визначення m-звідності і транзитивності відношення $\leq_m$ випливає, що якщо m-універсальна множина m-зводиться до РПМ α, то α теж є m-універсальною множиною.

Наступна теорема дає приклад m-універсальної множини.

Білет 29.

1. Універсальна функція Кліні.

2. Якщо графік G_f функції f(x) є РПМ, то існує ПРФ g(a, b, z) така, що рівняння g(a, b, z) = 0 має розв'язок ⇔<a, b> ∈ G_f. Довести.

G_f - РПМ => $C(G_f)$ – РПМ => існує ПРФ h(a, x) така, що рівняння h(a, x) = 0 має розв'язок <=> a = $C(G_f)$.

Покладемо g(a, b, z) = h(C(a, b), z)

Тоді g(a, b, z) = 0 <=> h(C(a, b), z) = 0 <=> C(a, b) є $C(G_f)$ <=> (a, b) є (G_f)

3. Рекурсивна множина {a_1, a_2, a_3} m-зводиться до множини {1,2}. Довести.

Білет 30.

1. Нумерація n-ок натуральних чисел. Основні тотожності.

2. Якщо графік G_f функції f(x) є РПМ, то існує ПРФ g(a, b, z) така, що рівняння g(a, b, z) = 0 має розв'язок ⇔<a, b> ∈ G_f. Довести.

G_f - РПМ => $C(G_f)$ – РПМ => існує ПРФ h(a, x) така, що рівняння h(a, x) = 0 має розв'язок <=> a = $C(G_f)$.

Покладемо g(a, b, z) = h(C(a, b), z)

Тоді g(a, b, z) = 0 <=> h(C(a, b), z) = 0 <=> C(a, b) є $C(G_f)$ <=> (a, b) є (G_f)

3. Якщо множина γ m-зводиться до РПМ δ, то γ – РПМ. Довести.

Для доведення другої частини теореми припустимо, що функція $f(x)$ *m*-зводить γ до РМ δ. Тоді характеристична функція множини γ буде обчислюватися алгоритмом

```
function χ_γ(x)
    begin
      if χ_δ(f(x)) = 0 then χ_γ := 0
      else χ_γ := 1
    end,
```

де χ_δ – характеристична функція множини δ.

Якщо множина δ – РПМ, то вона співпадає з множиною значень деякої ПРФ функції $g(x)$. Тому, алгоритм обчислення часткової характеристичної функції χ_γ множини γ буде наступним:

```
function χ_γ(x)
   begin
     i := 0
     while g(i) ≠ x do
        i := i + 1
     χ_γ := 0
   end,
```