Лінійна алгебра

Київ – 2015

Зміст

ВСТУП

Представлене до розгляду видання є методичним посібником з теорії лінійних (векторних) просторів. Посібник складено на основі курсу лінійної алгебри, що протягом багатьох років викладається на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. В посібнику представлені основні необхідні теоретичні факти, а також приклади розв’язання задач. На завершення наводиться перелік задач для самостійного розв’язання. Видання супроводжується списком рекомендованої літератури. Читач повинен мати попередні знання з теорії визначників, матриць та систем лінійних рівнянь. Посібник рекомендується для студентів перших двох курсів факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка стаціонарного та заочного відділень, а також для студентів інших математичних факультетів університетів та педагогічних факультетів.

1. ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ ТА ОПЕРАТОРИ

1.1. Поняття поля та лінійного (векторного) простору.

Непорожня множина F називається ***полем***, якщо для її елементів введено дві бінарні алгебраїчні операції «+» та «·», які задовольняють умови:

1) для довільних $\alpha, \beta \in F$ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2) для довільних $\alpha, \beta, \gamma \in F$ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3) існує ***нульовий*** елемент $0 \in F$ такий, що $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$ для довільного $\alpha \in F$;
4) для довільного $\alpha \in F$ існує ***протилежний*** елемент $-\alpha \in F$ такий, що $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$;
5) для довільних $\alpha, \beta \in F$ $\alpha\beta = \beta\alpha$;
6) для довільних $\alpha, \beta, \gamma \in F$ $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;
7) існує елемент $1 \in F$ такий, що $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$ для довільного $\alpha \in F$;
8) для довільного $\alpha \in F$, такого що $\alpha \neq 0$, існує елемент $\alpha^{-1} \in F$, такий що $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$; елемент α^{-1} називається ***оберненим*** для елемента α;
9) для довільних $\alpha, \beta, \gamma \in F$ $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Нехай F – деяке поле.

Непорожня множина V називається ***лінійним*** або ***векторним простором*** над полем F, якщо для її елементів введено операції додавання «+» та множення на елементи поля F «·», які задовольняють умови (аксіоми):

1) для довільних $a, b \in V$ $a + b = b + a$;
2) для довільних $a, b, c \in V$ $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) існує елемент $\theta \in V$ такий, що $a + \theta = \theta + a = a$ для довільного $a \in V$; елемент θ називається ***нульовим*** або ***нуль-вектором***;
4) для довільного $a \in V$ існує протилежний елемент $-a \in V$ такий, що $a + (-a) = (-a) + a = \theta$; елемент $-a$ називається ***протилежним*** для елемента a;
5) для довільного $a \in V$ $1 \cdot a = a$;
6) для довільного $a \in V$ та довільних $\alpha, \beta \in F$ $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
7) для довільного $a \in V$ та довільних $\alpha, \beta \in F$ $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
8) для довільних $a, b \in V$ та довільного $\alpha \in F$ $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Далі елементи векторного простору називаються ***векторами***, а елементи відповідного поля – ***скалярами***.

1.2. Елементарні наслідки аксіом лінійного простору.

Нехай V – векторний простір над полем F.

1. Нульовий елемент θ єдиний.
2. Для довільного $a \in V$ протилежний елемент єдиний.
3. Для довільного $a \in V$ $0 \cdot a = \theta$.
4. Для довільного $a \in V$ $(-1) \cdot a = -a$.
5. Для довільних $a, b \in V$ рівняння $a + x = b$ має в просторі V єдиний розв'язок x, причому $x = b + (-a) = (-a) + b$.
6. Для довільного $\alpha \in F$ $\alpha \cdot \theta = \theta$.
7. Для довільного $a \in V$ та довільного $\alpha \in F$ рівність $\alpha a = \theta$ виконується тоді і тільки тоді, коли $a = \theta$ або $\alpha = 0$.

Лінійні простори V_1 та V_2 над фіксованим полем F називаються ***ізоморфними***, якщо існує взаємно однозначне відображення φ простору V_1 на V_2 таке, що:

1) для довільних $a, b \in V_1$ $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;
2) для довільних $a \in V_1$ та $\alpha \in F$ $\varphi(\alpha a) = \alpha\, \varphi(a)$.

При цьому це відображення φ називається ***ізоморфним*** або ***ізоморфізмом***.

1.3. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів.

Нехай V – фіксований векторний простір над полем F.

Системою векторів в просторі V називається довільна скінченна множина векторів. Нехай $a_1, a_2, ..., a_m \in V$ – система векторів, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in F$ – система скалярів, тоді вектор $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_m a_m$ називається ***лінійною комбінацією*** системи $a_1, a_2, ..., a_m$, а скаляри $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ – коефіцієнтами лінійної комбінації. При цьому кажуть, що вектор a ***лінійно виражається*** через систему $a_1, a_2, ..., a_m$.

Лінійна комбінація називається ***тривіальною***, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю, і ***нетривіальною***, якщо серед коефіцієнтів є принаймні один ненульовий.

Система векторів називається ***лінійно залежною***, якщо для неї існує нетривіальна лінійна комбінація, що дорівнює θ.

Система векторів називається ***лінійно незалежною***, якщо лише тривіальна лінійна комбінація цієї системи дорівнює θ.

1.4. Властивості лінійно залежних та лінійно незалежних систем.

1) Якщо до системи входить θ, то система лінійно залежна.
2) Система з числом векторів, більшим 1, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один з векторів системи лінійно виражається через інші.
3) Упорядкована система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один з векторів системи лінійно виражається через попередні, або коли перший вектор в системі нульовий.
4) Якщо підсистема системи векторів лінійно залежна, то вся система лінійно залежна.
5) Будь-яка підсистема лінійно незалежної системи лінійно незалежна.

Нехай S – непорожня підмножина в просторі V.

Лінійною оболонкою підмножини S називається множина всіх лінійних комбінацій всіх можливих систем векторів з множини S і позначається $<S>$.

Лема про дві системи (перше формулювання).

Нехай $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_k\}$ – системи векторів у просторі V. Усі вектори системи A лінійно виражаються через вектори системи B. Якщо $m>k$, то система A лінійно залежна.

Лема про дві системи (друге формулювання).

Нехай $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_k\}$ – системи векторів у просторі V, причому усі вектори системи A лінійно виражаються через вектори системи B. Якщо система A лінійно незалежна, то $m\le k$.

1.5. Поняття базису.

Непорожня підмножина B векторного простору V називається ***базисом*** простору, якщо:

1) будь-яка скінчена система векторів з B лінійно незалежна;
2) кожний вектор простору лінійно виражається через систему векторів з B.

Векторний простір, в якому існує скінченний базис, називається ***скінченновимірним***.

Система векторів $a_1,a_2,...,a_n\in V$ називається ***базисом*** скінченновимірного простору V, якщо

1) ця система лінійно незалежна;
2) кожний вектор простору V лінійно виражається через $a_1, a_2, ..., a_n$.

Теореми про базис.

Теорема 1. Якщо в просторі V існує базис, що складається з n векторів, то будь-які m векторів при $m > n$ лінійно залежні.

Наслідок.
Всі базиси скінченновимірного простору складаються з однакового числа векторів.

Розмірністю скінченновимірного простору V ($\dim V$) називається число векторів в його базисі.

Теорема 2. В скінченновимірному просторі будь-які лінійно незалежну систему можна доповнити до базису простору.

Наслідок.
В просторі розмірності n будь-які n лінійно незалежних векторів утворюють базис.

Теорема 3. Нехай $a_1, a_2, ..., a_m \in V$ – система векторів в просторі V, $V = < a_1, a_2, ..., a_m >$. Тоді з даної системи за рахунок викреслювання деяких векторів можна отримати базис простору.

Теорема 4. Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ – базис простору V, тоді будь-який вектор $x \in V$ однозначно подається як лінійна комбінація базису. Причому, якщо $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$, то коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ називаються ***координатами вектора*** x в базисі $a_1, a_2, ..., a_n$.

1.6. Зв'язок між базисами. Матриця переходу.

Нехай $B_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B_2 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ – два базиси векторного простору V, тоді за означенням всі вектори базису B_2 лінійно виражаються через вектори базису B_1

$$b_1 = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + ... + \alpha_{n1} a_n,$$
$$b_2 = \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + ... + \alpha_{n2} a_n,$$
$$\dots$$

$$b_n = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + ... + \alpha_{nn}a_n .$$

Позначимо

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

тоді матриця T називається ***матрицею переходу*** від базису B_1 до базису B_2. Тобто, для того, щоб скласти матрицю переходу від базису B_1 до базису B_2, необхідно в стовпчики матриці послідовно виписати координати векторів базису B_2 в базисі B_1.

Нехай вектори базисів B_1, B_2 задаються координатами в деякому третьому базисі, матриця A – матриця, яка складається з координат векторів базису B_1, записаних у стовпчики, а B – матриця, яка складається з координат векторів базису B_2, записаних у стовпчики, тоді має місце матрична рівність

$$B = AT .$$

Причому, якщо T – матриця переходу від базису B_1 до базису B_2, то T^{-1} – матриця переходу від базису B_2 до базису B_1.

Нехай довільний вектор $x \in V$ в базисах B_1 і B_2 має відповідно координати $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ і $x = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Тоді зв'язок координат вектора x в базисах B_1 і B_2 визначається рівностями

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

1.7. Поняття підпростору.

Непорожня множина L векторного простору V над полем F називається ***підпростором***, якщо виконуються умови:

1) для довільних $a, b \in L$ $a + b \in L$,
2) для довільних $a \in L$ та $\alpha \in F$ $\alpha a \in L$.

Ці дві умови можна замінити однією: для довільних $a, b \in L$ та $\alpha, \beta \in F$ $\alpha a + \beta b \in L$.

1.8. Елементарні властивості підпростору.

Нехай L – підпростір векторного простору V над полем F, тоді

1) якщо $a_1, a_2, ..., a_k \in L$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in F$, то $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k \in L$;
2) $\theta \in L$;
3) якщо $a \in L$, то $-a \in L$;
4) множина L утворює векторний простір над полем F відносно операцій простору V.

Лінійна оболонка будь-якої непорожньої множини є підпростором.

1.9. Властивості лінійних оболонок як підпросторів.

1) лінійна оболонка $< S >$ є найменшим підпростором, в якому міститься підмножина S. Тобто, якщо L такий, що $S \subseteq L$, то $< S > \subseteq L$;
2) для непорожньої підмножини M рівність $M = < M >$ виконується тоді і тільки тоді, коли M – підпростір.

1.10. Операції над підпросторами.

1. ***Перетином*** двох лінійних підпросторів $L_1, L_2 \in V$ називається сукупність $D = L_1 \cap L_2$ усіх векторів з V, кожний з яких належить як L_1, так і L_2.

   Перетин підпросторів завжди підпростір.
2. ***Сумою*** двох лінійних підпросторів $L_1, L_2 \in V$ називається сукупність $S = L_1 + L_2$ усіх векторів з V, кожний з яких представляється в вигляді $x = x_1 + x_2$, де $x_1 \in L_1$ та $x_2 \in L_2$.

   Сума підпросторів завжди підпростір.

Для скінченого числа підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_k \in V$ сумою називається сукупність $L_1 + L_2 + \ldots + L_k = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_k \mid x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, \ldots, x_k \in L_k\}$.

1.11. Поняття прямої суми.

Означення 1. Лінійний простір V називається ***прямою сумою*** своїх підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_k \in V$, якщо кожен вектор $x \in V$ можна розкласти в суму вигляду $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, де $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, \ldots, x_k \in L_k$ і цей розклад єдиний.

Пряма сума позначається так : $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$.

Означення 2. Лінійний простір V називається ***прямою сумою*** своїх підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_k \in V$, якщо

1) $V = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$;
2) для довільного $i = \overline{1,k}$ $L_i \cap (L_1 + L_2 + \ldots + L_{i-1} + L_{i+1} + \ldots + L_k) = \{\theta\}$.

Теорема.

Два означення прямої суми еквівалентні.

Теорема (про базис прямої суми).

Нехай $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$. Система векторів $B_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset L_1$ утворює базис L_1, $B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset L_2$ утворює базис $L_2, \ldots$, $B_k = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\} \subset L_k$ утворює базис L_k, тоді система $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ утворює базис V.

Теорема (про розмірність суми та перетину).

Нехай L_1, L_2 – скінченновимірні підпростори векторного простору V. Тоді $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$.

1.12. Фактор-простір векторного простору.

Нехай V – векторний простір над полем F, M – підпростір простору V. Вектори $x, y \in V$ будемо називати M***-еквівалентними*** або ***еквівалентними відносно*** M, якщо $x - y \in M$, і позначати $x \underset{M}{\sim} y$. Для M-еквівалентності виконуються умови бінарного відношення еквівалентності, а отже відношення M - еквівалентності визначає розбиття простору V на класи M - еквівалентності, які не перетинаються.

Нехай $x \in V$. Клас M- еквівалентності, до якого належить x, позначимо як $[x]$. Отже $[x] = \{y \in V \mid x \underset{M}{\sim} y\}$.

Неважко показати, що $[x] = x + M = \{x + y \mid y \in M\}$.

Множину всіх класів M- еквівалентності позначимо V/M і введемо на цій множині операції векторного простору над полем F. Операції додавання та множення на скаляр введемо таким чином: нехай $[x],[y] \in V/M$, $\alpha \in F$, тоді $[x]+[y]=[x+y]$, $\alpha[x]=[\alpha x]$.

Множина V/M з введеними операціями додавання та множення на елементи з поля F називається ***фактор-простором*** векторного простору V по підпростору M.

Теорема.

Нехай M – підпростір скінченновимірного простору V. Тоді простір V/M скінченновимірний і $\dim V = \dim M + \dim V/M$.

1.13. Лінійні відображення векторного простору.

Нехай V_1, V_2 – векторні простори над полем F.

Відображення $\mathscr{A} : V_1 \to V_2$ називається ***лінійним***, якщо виконуються умови:

1) для довільних $a, b \in V_1$ $\mathscr{A}(a+b) = \mathscr{A}(a) + \mathscr{A}(b)$;
2) для довільного $a \in V_1$, $\alpha \in F$ $\mathscr{A}(\alpha a) = \alpha \mathscr{A}(a)$;

Ці дві умови можна замінити однією:

для довільних $a, b \in V_1$ та $\alpha, \beta \in F$ $\mathscr{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha \mathscr{A}(a) + \beta \mathscr{A}(b)$.

1.14. Елементарні властивості лінійних відображень.

1. Якщо $\theta_1 \in V_1$, $\theta_2 \in V_2$ – нульові елементи, то $\mathscr{A}(\theta_1) = \theta_2$.
2. Якщо $a \in V_1$, то $\mathscr{A}(-a) = -\mathscr{A}(a)$.
3. Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V_1$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in F$, то $\mathscr{A}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k) = \alpha_1 \mathscr{A}(a_1) + \alpha_2 \mathscr{A}(a_2) + \ldots + \alpha_k \mathscr{A}(a_k)$.

Два лінійні відображення $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ і $\mathscr{B}: V_1 \to V_2$ будемо вважати ***рівними***, якщо вони співпадають як відображення, тобто, для довільного $x \in V_1$ $\mathscr{A}(x) = \mathscr{B}(x)$.

Якщо $V_1 = V_2 = V$, то лінійне відображення $\mathscr{A}: V \to V$ називають ***лінійним перетворенням*** простору V або ***лінійним оператором*** на просторі V.

Лема.

Нехай V – скінченновимірний простір над полем F, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – деякий фіксований базис простору V, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in V$ – система векторів, тоді існує єдине лінійне перетворення $\mathscr{A}: V \to V$ таке, що $\mathscr{A}(a_1) = b_1$, $\mathscr{A}(a_2) = b_2, \ldots, \mathscr{A}(a_n) = b_n$.

1.15. Матриця лінійного перетворення в базисі.

Нехай $\mathscr{A}: V \to V$ – лінійне перетворення скінченновимірного простору V, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – деякий базис простору, тоді вектори $\mathscr{A}(a_1)$, $\mathscr{A}(a_2), \ldots$, $\mathscr{A}(a_n)$ лінійно виражаються через цей базис:

$$\begin{gathered}
\mathscr{A}(a_1) = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \ldots + \alpha_{n1} a_n, \\
\mathscr{A}(a_2) = \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \ldots + \alpha_{n2} a_n, \\
\ldots \\
\mathscr{A}(a_n) = \alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \ldots + \alpha_{nn} a_n.
\end{gathered}$$

З коефіцієнтів складемо таку матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається ***матрицею лінійного перетворення*** $\mathscr{A}$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для того, щоб скласти матрицю лінійного перетворення $\mathscr{A}$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$, необхідно в її стовпчики послідовно виписати координати векторів $\mathscr{A}(a_1), \ \mathscr{A}(a_2), \ldots, \ \mathscr{A}(a_n)$ в цьому базисі.

1.16. Властивості матриць лінійних перетворень.

1) Лінійні перетворення скінченновимірного простору рівні тоді і тільки тоді, коли в деякому базисі їх матриці співпадають.
2) Нехай V – векторний простір розмірності n над полем F, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – деякий базис простору, $C = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – квадратна матриця порядку n з елементами з поля F. Тоді існує єдине лінійне перетворення простору V, якому в даному базисі відповідає матриця C.
3) Нехай A – матриця лінійного перетворення $\mathscr{A}$ в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Вектори базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і образи базисних векторів $\mathscr{A}(a_1), \ \mathscr{A}(a_2), \ldots, \ \mathscr{A}(a_n)$ задаються в деякому іншому базисі. B, C – квадратні матриці порядку n, стовпчики яких складаються з координат системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і $\mathscr{A}(a_1), \ \mathscr{A}(a_2), \ldots, \ \mathscr{A}(a_n)$ відповідно. Тоді виконується матрична рівність $C = BA$

1.17. Обчислення координат образу вектора при лінійному перетворенні.

Теорема.

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійне перетворення скінченновимірного простору V, якому в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідає матриця $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in V$ – деякий вектор, $\mathscr{A}(x) = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, вектори задаються координатами в цьому ж базисі, тоді має місце матрична рівність:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \ldots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

1.18. Поняття ядра та образу лінійного перетворення.

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійне перетворення векторного простору V над полем F.
Ядром $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ називається множина

$$\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{x \in V \mid \mathscr{A}(x) = \theta\}.$$

Ядро лінійного перетворення є підпростором.

Дефектом $def\ (\mathscr{A})$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ скінченновимірного простору називається розмірність його ядра:

$$def\ (\mathscr{A}) = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{A}.$$

Лінійне перетворення $\mathscr{A}$ називається ***невиродженим***, якщо

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{\theta\}.$$

Образом $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ лінійного перетворення $\mathscr{A}$ називається множина

$$\operatorname{Im} \mathscr{A} = \{ \mathscr{A}(x) \mid x \in V\}.$$

Образ лінійного перетворення є підпростором.

Рангом лінійного перетворення $\mathscr{A}$ скінченновимірного простору V називається розмірність образу лінійного перетворення:

$$r(\mathscr{A}) = \dim \operatorname{Im} \mathscr{A}.$$

Теорема (про розмірність ядра та образу лінійного перетворення).

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійне перетворення векторного простору V, $\dim V = n$, тоді $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} + \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} = n$.

З цієї теореми та наведених вище означень випливає, що

$$def\ (\mathscr{A}) + r(\mathscr{A}) = \dim V = n.$$

1.19. Алгебра лінійних операторів.

1. Нульовим оператором називається такий оператор $\mathscr{O}$, що для будь-якого $x \in V$ $\mathscr{O}(x) = \theta$.

   Нульовому оператору $\mathscr{O}$ в довільному базисі відповідає нульова матриця.
2. Одиничним оператором називається такий оператор $\mathscr{E}$, що для будь-якого $x \in V$ $\mathscr{E}(x) = x$.

   Одиничному оператору $\mathscr{E}$ в довільному базисі відповідає одинична матриця.
3. Сумою двох лінійних операторів $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$ називається такий лінійний оператор $\mathscr{A} + \mathscr{B}$, що для довільного $x \in V$ $(\mathscr{A} + \mathscr{B})(x) = \mathscr{A}(x) + \mathscr{B}(x)$.

   Сумі операторів в довільному базисі відповідає сума матриць операторів в цьому базисі.
4. Якщо $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на векторному просторі V над полем F, $\lambda \in F$, то під $\lambda\mathscr{A}$ розуміється лінійний оператор, такий що для довільного $x \in V$ $(\lambda\mathscr{A})(x) = \lambda\mathscr{A}(x)$. Матриця оператора $\lambda\mathscr{A}$ в довільному базисі дорівнює матриці оператора $\mathscr{A}$ в цьому базисі, помноженої на λ.
5. Добутком двох лінійних операторів $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$ називається такий лінійний оператор $\mathscr{A}\mathscr{B}$, що для довільного $x \in V$ $(\mathscr{A}\mathscr{B})(x) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(x))$. Добутку

операторів в довільному базисі відповідає добуток матриць операторів в цьому базисі.

Лінійні оператори, для яких $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$ називаються ***переставними***.

1.20. Поняття оберненого оператора.

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на векторному просторі V. Якщо для цього оператора існує лінійний оператор $\mathscr{B}:V\to V$, такий що $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}$, то оператор $\mathscr{B}$ називається ***оберненим*** для $\mathscr{A}$ і позначається $\mathscr{B}=\mathscr{A}^{-1}$.

Квадратна матриця A називається не виродженою, якщо $\det A\neq 0$.

Теорема (про обернений оператор).

Для лінійного оператора на скінченновимірному просторі існує обернений оператор тоді і тільки тоді, коли в деякому базисі оператору відповідає невироджена матриця.

Якщо для даного оператора існує обернений, то він єдиний.

Якщо для оператора $\mathscr{A}$ існує обернений, і в даному базису оператору $\mathscr{A}$ відповідає матриця A, то в цьому базисі оператору $\mathscr{A}^{-1}$ відповідає матриця A^{-1}.

1.21. Еквівалентні умови існування оберненого оператора.

Нехай $\mathscr{A}$– лінійний оператор на скінченновимірному просторі V, тоді наступні умови еквівалентні:

1. Для $\mathscr{A}$ існує обернений оператор.
2. У довільному базисі оператору $\mathscr{A}$ відповідає невироджена матриця.
3. Оператор $\mathscr{A}$ будь-яку лінійно незалежну систему векторів відображає в лінійно незалежну систему.
4. Оператор $\mathscr{A}$ будь-який базис простору відображає в базис простору.
5. $\operatorname{Ker}\mathscr{A}=\{\theta\}$.
6. $\operatorname{Im}\mathscr{A}=V$.
7. Оператор $\mathscr{A}$ взаємно однозначний, тобто якщо $x\neq y$, то $\mathscr{A}(x)\neq\mathscr{A}(y)$.

1.22. Зв'язок матриць лінійного оператора у різних базисах.

Теорема.

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на скінченновимірному просторі V, якому в базисі $B_1=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ відповідає матриця A, а в базисі

$B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ відповідає матриця B. Якщо T – матриця переходу від базису B_1 до B_2, то виконується матрична рівність $B = T^{-1}AT$.

Дві квадратні матриці A і B однакового порядку називаються ***подібними***, якщо існує квадратна не вироджена матриця T, така що $B = T^{-1}AT$.

1.23. Характеристичний многочлен лінійного оператору.

Нехай $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – деяка квадратна матриця порядку n, t – деяка змінна. Матриця

$$A - tE = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - t & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - t & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - t \end{pmatrix}$$

називається ***характеристичною матрицею*** матриці A.

Визначник $\chi(t) = |A - tE|$ називається ***характеристичним многочленом*** матриці A, а корені характеристичного многочлена – ***характеристичними числами*** матриці A.

Теорема.

Характеристичні многочлени подібних матриць співпадають.

Характеристичний многочлен оператора $\mathscr{A}$ на скінченновимірному просторі $\chi_A(t)$ – це характеристичний многочлен його матриці в деякому базисі.

1.24. Власні числа та власні вектори лінійного оператора.

Нехай $\mathscr{A}$– лінійний оператор на векторному просторі V над полем F, вектор $a \in V$ $(a \neq \theta)$ називається ***власним вектором*** оператора $\mathscr{A}$, якщо $\mathscr{A}(a) = \lambda a$ для $\lambda \in F$, при цьому відповідний скаляр λ називається ***власним числом*** або ***власним значенням*** оператора $\mathscr{A}$. В цьому випадку вектор a називається λ***-власним вектором***, або власним вектором, що відповідає власному числу λ.

Підпростір $L_\lambda = \{x \in V \mid \mathscr{A}(x) = \lambda x\}$ називається ***власним підпростором***, що відповідає власному числу λ.

Теореми про власні вектори і числа.

Теорема 1. Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F, $\lambda \in F$ – власне число оператора. Тоді розмірність власного підпростору L_λ не перевищує кратності λ як кореня характеристичного многочлена оператора.

Теорема 2. Власні вектори лінійного оператора, що відповідають різним власним числам, лінійно незалежні.

Теорема 3. Нехай $\mathscr{A}$– лінійний оператор на векторному просторі V, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ – попарно різні власні числа лінійного оператора, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in L_{\lambda_1}$, $b_1, b_2, \ldots, b_k \in L_{\lambda_2}$, …, $c_1, c_2, \ldots, c_k \in L_{\lambda_s}$ – лінійно незалежні системи у відповідних власних підпросторах, тоді система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_k$ – лінійно незалежні.

1.25. Інваріантність.

Нехай $\mathscr{A}$– лінійний оператор на векторному просторі V. Підпростір $L \subset V$ називається ***інваріантним*** відносно оператора $\mathscr{A}$, якщо для довільного $x \in L$ $\mathscr{A}(x) \in L$.

Теореми про інваріантність.

Теорема 1. Нехай $\mathscr{A}$– лінійний оператор на векторному просторі V над полем F і всі ненульові вектори підпростору L є λ-власним векторами оператора $\mathscr{A}$ для фіксованого власного числа $\lambda \in F$. Тоді підпростір L є інваріантним відносно оператора $\mathscr{A}$.

Наслідок.
Нехай λ – власне число лінійного оператора $\mathscr{A}$. Тоді власний підпростір L_λ є інваріантним відносно оператора $\mathscr{A}$.

Теорема 2. Нехай $\mathscr{A}$– лінійний оператор на векторному просторі V над полем F. Тоді лінійна оболонка довільної множини власних векторів оператора $\mathscr{A}$ є підпростором, інваріантним відносно оператора $\mathscr{A}$.

Теорема 3. Нехай $\mathscr{A}$– лінійний оператор на векторному просторі V над полем F. Підпростір L розмірності 1 є підпростором, інваріантним відносно оператора $\mathscr{A}$ тоді і тільки тоді, коли базисний вектор з простору є власним вектором оператора.

Теорема 4. Для будь-якого лінійного оператора у скінченновимірному просторі над полем комплексних чисел існує інваріантний підпростір розмірності 1.

Теорема 5. Для будь-якого лінійного оператора у скінченновимірному просторі над полем дійсних чисел непарної розмірності існує інваріантний підпростір розмірності 1.

Теорема (про інваріантні підпростори дійсного векторного простору).

Для будь-якого лінійного оператора у скінченновимірному просторі над полем дійсних чисел існує інваріантний підпростір розмірності 1 або 2.

1.26. Лінійні оператори простої структури.

Будемо вважати, що оператор $\mathscr{A}$ діє на скінченновимірному просторі V над полем F і $\dim V = n$.

Лінійний оператор $\mathscr{A}$ називається ***оператором простої структури***, якщо простір V є прямою сумою одновимірних підпросторів, інваріантних відносно оператора $\mathscr{A}$, тобто $V = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$, $\dim M_j = 1$, $j = \overline{1,n}$, всі M_j інваріантні відносно $\mathscr{A}$.

Теорема.

Для лінійного оператора $\mathscr{A}$ на просторі V наступні умови еквівалентні:
1) $\mathscr{A}$ – оператор простої структури;
2) існує базис простору, що складається з власних векторів оператора;
3) існує базис простору, в якому оператору відповідає діагональна матриця.

1.27. Достатня умова оператора простої структури.

Теорема.

Нехай всі корені характеристичного многочлена оператора $\mathscr{A}$ попарно різні і належать основному полю F. Тоді $\mathscr{A}$ – оператор простої структури.

1.28. Критерії оператора простої структури.

Теорема (критерій 1).

Лінійний оператор $\mathscr{A}$ на векторному просторі V є оператором простої структури тоді і тільки тоді, коли

1) всі корені його характеристичного многочлена належать основному полю F;
2) якщо $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in F$ – всі попарно різні корені характеристичного многочленна, то розмірність кожного власного підпростору L_{λ_j} співпадає з кратністю λ_j як кореня характеристичного многочлена.

Теорема (критерій 2).

Лінійний оператор $\mathscr{A}$ на векторному просторі V є оператором простої структури тоді і тільки тоді, коли

1) всі корені його характеристичного многочлена належать основному полю F;
2) якщо $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in F$ – всі попарно різні корені характеристичного многочлена, то $V = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_s}$.

1.29 ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.

1. Довести, що вектори $e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,1,2), e_3 = (1,2,3)$ утворюють базис і знайти координати вектора $x = (6,9,14)$ в цьому базисі (афінні координати вектора x).

Розв'язування.

Вектори утворюють базис тоді і тільки тоді, коли вони лінійно незалежні. Складемо з векторів e_1, e_2, e_3 матрицю, записавши вектори в рядочки. Вектори системи будуть лінійно незалежні, якщо ранг матриці співпадає з кількістю векторів в системі.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг дорівнює 3, тобто вектори e_1, e_2, e_3 утворюють базис. Тепер знайдемо координати вектора x в цьому базисі.

Розкладемо вектор x за базисом e_1, e_2, e_3, тобто запишемо вектор x у вигляді лінійної комбінації векторів e_1, e_2, e_3:

$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, тобто

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Перепишемо рівняння в матричному вигляді та за допомогою елементарних перетворень отримаємо зліва одиничну матрицю. Вектор, що з'явиться з правого боку і буде нам давати афінні координати вектора x в базисі e_1, e_2, e_3, тобто шукані $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\1&1&2&9\\1&2&3&14\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&0&1&3\\0&1&2&8\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&2&8\\0&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right).$$

Отже, $x = e_1 + 2e_2 + 3e_3$.

2. Довести, що кожна з двох систем векторів є базисом, та знайти зв'язок координат одного і того ж вектора в цих двох базисах:
$e_1 = (1, 2, 1), e_2 = (2, 3, 3), e_3 = (3, 7, 1)$;
$e'_1 = (3, 1, 4), e'_2 = (5, 2, 1), e'_3 = (1, 1, -6)$.

Розв'язування.

Система векторів є базисом, якщо вона лінійно незалежна і кількість векторів в базисі дорівнює розмірності простору. Складемо з координат векторів кожної системи матрицю і покажемо незалежність за допомогою елементарних перетворень.

Для першої системи маємо:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&3\\3&7&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Аналогічно для другої системи:

$$\begin{pmatrix}1&1&-6\\3&1&4\\5&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-6\\0&-2&22\\0&-3&31\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-6\\0&1&-11\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Отже лінійну незалежність доведено.

Позначимо $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B_2 = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ – два базиси. Щоб знайти зв'язок координат одного і того ж вектора в цих двох базисах, необхідно спочатку знайти матрицю переходу T від базису B_1 до базису B_2. Для цього складемо із векторів систем B_1 і B_2 розширену матрицю, записавши вектори у стовпчики, і далі використаємо метод елементарних перетворень. Наша мета – з правої частини отримати одиничну матрицю, а з лівої і буде матриця переходу T.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right).$$

Отже $T = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, тоді, якщо вектор x в базисі B_1 має координати (x_1, x_2, x_3), а в B_2 – (x_1', x_2', x_3'), то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},\text{ звідси}$$

$x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3'$,
$x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3'$,
$x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'$.

2. Нехай лінійний підпростір L_1 є підмножиною лінійного підпростору L_2. Довести, що розмірність L_1 не перевищує розмірності L_2, причому розмірності рівні тоді і тільки тоді, коли $L_1 = L_2$.

Розв’язування.

Припустимо, що $\dim L_1 = k$, $\dim L_2 = m$. Вектори $a_1, a_2 \ldots, a_k \in L_1$ утворюють базис підпростору L_1. Оскільки $L_1 \subseteq L_2$, то вектори $a_1, a_2 \ldots, a_k$ утворюють лінійно незалежну систему у підпросторі L_2. Але $\dim L_2 = m$, а тому в L_2 не існує лінійно незалежних систем з числом векторів, більшим m. Отже, $k \le m$. Припустимо, що $k = m$. Тоді число векторів у базисі $a_1, a_2 \ldots, a_k$ підпростору L_1 дорівнює $\dim L_2$. Оскільки $a_1, a_2 \ldots, a_k \in L_2$, то вектори $a_1, a_2 \ldots, a_k$ утворюють базис підпростору L_2. А тому будь-який вектор $x \in L_2$ лінійно виражається через базис, тобто $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots = \alpha_k a_k$. Це означає, що $x \in L_1$. Отже $L_2 \subseteq L_1$. Оскільки за умовою $L_1 \subseteq L_2$, то $L_1 = L_2$.

3. Знайти розмірність і базис лінійної оболонки системи векторів:
   $a_1 = (1, 0, 0, -1), a_2 = (2, 1, 1, 0), a_3 = (1, 1, 1, 1), a_4 = (1, 2, 3, 4), a_5 = (0, 1, 2, 3)$.

   Розв'язування.

Складемо з векторів $a_1, \dots, a_5$ матрицю, записавши їх, наприклад, в рядочок, і за допомогою елементарних перетворень над рядочками з'ясуємо кількість лінійно незалежних рядків. Ця кількість і буде дорівнювати розмірності простору. Відповідні лінійно незалежні вектори і будуть утворювати базис простору.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, розмірність простору дорівнює 3, а базис утворюють, наприклад, вектори a_1, a_2, a_4. Базис визначаються неоднозначно.

4. Знайти систему лінійних рівнянь, що задає лінійний підпростір, натягнутий на таку системи векторів:
   $a_1 = (1, -1, 1, 0), a_2 = (1, 1, 0, 1), a_3 = (2, 0, 1, 1)$.

   Розв'язування.

Будь-який вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ з підпростору лінійно виражається через вектори a_1, a_2, a_3. Тобто, його можна представити у вигляді лінійної комбінації цих векторів:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Запишемо розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & -1 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 + x_1 - 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right).$$

Отже перейдемо до шуканої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 + x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_4 + x_3 - x_1 = 0 \end{cases},$$

причому

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x_1 - x_4 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_4 \end{cases}.$$

5. Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину лінійних підпросторів :
   L_1 – лінійна оболонка $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (1, 3, 1, 3)$,
   L_2 – лінійна оболонка $b_1 = (1, 2, 0, 2), b_2 = (1, 2, 1, 2), b_3 = (3, 1, 3, 1)$.

Розв’язування.

Щоб знайти розмірність суми лінійних підпросторів, складемо з векторів підпросторів L_1 і L_2 матрицю, записавши їх, наприклад, в рядок, і за допомогою елементарних перетворень над рядками маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\dim(L_1 + L_2)$=3, звідси ж видно, що $\dim L_1$=2.

Знайдемо розмірність L_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \text{ отже } \dim L_2 = 3.$$

З теореми про розмірність суми та перетину маємо:

$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2)$=2+3–3=2.

6. Знайти базис суми і перетину лінійних підпросторів, натягнутих на системи векторів $a_1 = (1, 2, 1, -2), a_2 = (2, 3, 1, 0), a_3 = (1, 2, 2, -3)$ і $b_1 = (1, 1, 1, 1), b_2 = (1, 0, 1, -1), b_3 = (1, 3, 0, -4)$.

Розв'язування.

Щоб знайти базис суми лінійних підпросторів, складемо з векторів підпросторів L_1 і L_2 матрицю, записавши їх, наприклад, в рядок, і за допомогою елементарних перетворень над рядками маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лінійно незалежні вектори, що залишились, і будуть утворювати базис. Отже, базис складають вектори a_1, a_2, a_3, b_2. Базис визначається неоднозначно.

Якщо вектор належить перетину півпросторів, то його можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів з базисів цих підпросторів. Базис L_1 складають вектори a_1, a_2, a_3. Знайдемо базис L_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отже, базис L_2 складають вектори b_1, b_2, b_3.

Можна скористатись формулою з попередньої задачі $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2)$, щоб визначити кількість векторів в базисі перетину: $\dim(L_1 \cap L_2)$=3+3–4=2.

Далі, якщо вектор $z \in L_1 \cap L_2$, то

$$z = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = y_1 + 3y_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = y_1 + y_2 \\ -2x_1 - 3x_3 = y_1 - y_2 - 4y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - y_1 - y_2 - y_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - y_1 - 3y_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - y_1 - y_2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_3 - y_1 + y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}.$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків (ФСР) однорідної системи, записавши рівняння системи в матричному вигляді.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо систему:

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 + 5y_3 \\ x_2 = y_1 - y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_3 \\ y_2 = 0 \end{cases},$$

де y_1, y_3 – незалежні змінні.

ФСР:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
d_1	-2	1	1	1	0	0
d_2	5	-1	-2	0	0	1

Отже, вектори

$z_1 = -2a_1 + a_2 + a_3 = b_1$,

$z_2 = 5a_1 - a_2 - 2a_3 = b_3$

є шуканими векторами перетину.

7. Довести, що сума S лінійних підпросторів L_1 і L_2 є прямою сумою тоді і тільки тоді, коли для принаймні одного вектора $x \in S$ існує єдиний розклад у суму $x = x_1 + x_2$, де $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$.

Розв'язування.

За умовою $S = L_1 + L_2$. Зрозуміло, що коли $S = L_1 \oplus L_2$, то для будь-якого вектора $a \in S$ існує єдиний розклад у суму $a = a_1 + a_2$, де $a_1 \in L_1, a_2 \in L_2$. Припустимо навпаки, що $S = L_1 + L_2$ та для деякого вектора $x \in S$ існує єдиний розклад у суму $x = x_1 + x_2$, де $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$. Нехай $y \in S$. Оскільки $S = L_1 + L_2$, то для $y \in S$ існує розклад у суму $y = y_1 + y_2$, де $y_1 \in L_1, y_2 \in L_2$. Залишилось, що цей розклад єдиний. Припустимо, що існує інший розклад $y = z_1 + z_2$, де $z_1 \in L_1, z_2 \in L_2$. Тоді $x = x + y - y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) =$ $c_1 + c_2$, де $c_1 = x_1 + y_1 - z_1$, $c_2 = x_2 + y_2 - z_2$. Зрозуміло, що $c_1 \in L_1, c_2 \in L_2$, причому $x = c_1 + c_2$. Але для вектора x розклад у суму $x = x_1 + x_2$, де $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$, єдиний. Отже, $c_1 = x_1, c_2 = x_2$. Це означає, що $x_1 + y_1 - z_1 = x_1$, $x_2 + y_2 - z_2 = x_2$. Звідси $z_1 = y_1, z_2 = y_2$, а тому для $y \in S$ розклад також єдиний. Отже, $S = L_1 \oplus L_2$.

8. Підпростір L векторного простору V є лінійною оболонкою системи векторів $a_1 = (1, 0, 2, 1), a_2 = (2, 1, 2, 3), a_3 = (0, 1, -2, 1)$. Знайти базис фактор-простору V / L.

Розв'язування.

Ідея розв'язування пов'язана з таким фактом. Якщо вектори $b_1, b_2, \dots, b_k$ утворюють базис підпростору L, то цей базис можна доповнити до базису простору векторами $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n$. Тоді система елементів $[b_{k+1}], [b_{k+2}], \dots, [b_n] \in V / L$ утворює базис фактор-простору V / L. Отже, знаходимо базис підпростору L і доповнення цього базису до базису простору V. Доповнення лінійно незалежної системи векторів до базису простору можна взяти з будь-якого базису простору. Оскільки $L =< a_1, a_2, a_3 >$, то за базис L можна взяти будь-який базис системи векторів a_1, a_2, a_3. Отже, знаходимо базис системи векторів a_1, a_2, a_3, а доповнення цього базису до базису простору беремо з стандартного базису $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0,0, 1, 0), e_4 = (0,0, 0, 1)$ простору.

Координати векторів $a_1, a_2, a_3, e_1, e_2, e_3, e_4$ послідовно записуємо в стовпчики матриці A порядку 4×7

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&0\\2&2&-2&0&0&1&0\\1&3&1&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що ранг матриці A дорівнює 4, оскільки останні чотири стовпчики лінійно незалежні. Кожен стовпчик матриці A відповідає одному з початкових векторів $a_1,a_2,a_3,e_1,e_2,e_3,e_4$. Далі ця відповідність зберігається і виконуються елементарні перетворення лише рядків матриці, а стовпчики не переставляються. Перетворення рядків полягає в тому, що в матриці за рахунок перетворень рядків одержуються стовпчики, які разом складають одиничну матрицю E при умові, що за рахунок перших трьох стовпчиків, що відповідають підпростору L, одержується максимальне число стовпчиків і ці стовпчики доповнюються стовпчиками, які одержуються з інших чотирьох стовпчиків. Тоді початкові вектори, що відповідають стовпчикам одиничної матриці E в заключній матриці, утворюють базис простору V.

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&0\\2&2&-2&0&0&1&0\\1&3&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&0\\0&-2&-2&-2&0&1&0\\0&1&1&-1&0&0&1\end{pmatrix}\to$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-2&1&-2&0&0\\0&1&1&0&1&0&0\\0&0&0&-2&2&1&0\\0&0&0&-1&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

Одержуємо матрицю, в якій стовпчики з номерами 1, 2, 6, 7 разом утворюють одиничну матрицю E. У початковій матриці A цим стовпчикам відповідають вектори a_1,a_2,e_3,e_4. Це означає, що вектори a_1,a_2,e_3,e_4 утворюють базис простору V. При цьому вектори a_1,a_2 утворюють базис підпростору L, а вектори $e_3=(0,0,1,0), e_4=(0,0,0,1)$ є доповненням цього базису до базису простору V. Отже, базисом фактор-простору V/L є елементи $[e_3],[e_4]$, де $e_3=(0,0,1,0), e_4=(0,0,0,1)$.

9. Довести, що існує єдиний лінійний оператор $\mathscr{A}$ тривимірного простору, що переводить вектори a_1,a_2,a_3 відповідно в b_1,b_2,b_3, і знайти матрицю C цього оператора в тому ж базисі, в якому задано координати усіх векторів:
   $a_1=(2,3,5)$, $b_1=(1,1,1)$,

$a_2 = (0, 1, 2)$, $b_2 = (1, 1, -1)$,
$a_3 = (1, 0, 0)$, $b_3 = (2, 1, 2)$.

Розв'язування.

З умови задачі випливає, що
$\mathscr{A}(a_1) = Ca_1 = b_1$,
$\mathscr{A}(a_1) = Ca_2 = b_2$,
$\mathscr{A}(a_3) = Ca_3 = b_3$,
де $C = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$.

Якщо все розписати, то ми отримаємо 9 рівнянь з 9 невідомими, або ж матричне рівняння $CA = B$, де A складається із векторів a_i, $i = \overline{1,3}$, записаних у стовпчики, та B – із векторів b_i, $i = \overline{1,3}$, записаних у стовпчики. Його розв'язком є $C^T = (A^T)^{-1} B^T$. На практиці складемо розширену матрицю з векторів a_i, b_i, $i = \overline{1,3}$, записаних у рядки, і за допомогою елементарних перетворень над рядками отримаємо в лівій частині одиничну матрицю, а в правій – C^T.

Маємо:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right)$$, отже

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Лінійний оператор $\mathscr{A}$ в базисі e_1, e_2, e_3 має матрицю
$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайти його матрицю в базисі $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

Розв'язування.

З умови задачі випливає: $f_1 = (2,3,1)$, $f_2 = (3,4,1)$, $f_3 = (1,2,2)$.

Позначимо $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B_2 = \{f_1, f_2, f_3\}$, $T-$ матриця переходу від базису B_1 до базису B_2.

Знайдемо матриці T і T^{-1}(див. задачу 1).

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси $T^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Як відомо, шукану матрицю можна знайти за формулою:

$$B = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Нехай оператор $\mathscr{A}$ в базисі $a_1 = (1,2)$, $a_2 = (2,3)$ має матрицю $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Оператор $\mathscr{B}$ в базисі $b_1 = (3,1)$, $b_2 = (4,2)$ має матрицю $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ в базисі b_1, b_2.

Розв'язування.

Позначимо $B_1 = \{a_1, a_2\}$, $B_2 = \{b_1, b_2\}$, T – матриця переходу від базису B_1 до базису B_2. Нехай оператору $\mathscr{A}$ в базисі B_2 відповідає матриця A', тоді $A' = T^{-1}AT$.

Знайдемо матриці T і T^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Звідси $T = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -7 & -8 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 8 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right), \text{ тоді}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & -27 \\ \frac{43}{2} & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix}.$$

Тоді оператору $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ в базисі B_2 відповідає матриця

$$A' + B = \begin{pmatrix} 40 & 38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29\frac{1}{2} & -25 \end{pmatrix}.$$

12. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування.

За означенням власний вектор $x \neq \theta$ лінійного оператора $\mathscr{A}$ задовольняє рівність

$$\mathscr{A}(x) = \lambda x,$$

де λ – власне число.

Отже, якщо A – матриця лінійного оператора $\mathscr{A}$, то $Ax = \lambda x$ або $(A - \lambda E)x = 0$. Ця система має нетривіальний розв'язок, якщо $\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$.

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 1) = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

Знайдемо власні вектори для $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

З означення $(A - \lambda_1 E)x = 0$.

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \text{ отже}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{2x_3}{3} \end{cases}.$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Отже, власні вектори, що відповідають $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, мають вигляд:

$x = \alpha\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) = \beta(1, 2, 3)$, де $\beta \neq 0$.

Знайдемо власні вектори для $\lambda_3 = 1$.

З означення $(A - \lambda_3 E)x = 0$.

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ отже}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases},$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	1	1

Отже, власні вектори, що відповідають $\lambda_3 = 1$, мають вигляд:
$x = \gamma(1,1,1)$, де $\gamma \neq 0$.

13. Знайти всі підпростори векторного простору V, інваріантні відносно лінійного оператора $\mathscr{A}$, який задається в деякому базисі матрицею

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Будемо вважати, що всі вектори задаються координатами в початковому базисі. Зрозуміло, що $\dim V = 3$. Тому для розмірності інваріантного підпростору існують лише чотири можливості. Розмірність може бути рівною лише 0, 1, 2, 3. Припустимо, що L – інваріантний підпростір та $\dim L = 0$. Єдиним підпростором розмірності 0 є нульовий підпростір $L = \{\theta\}$. Зрозуміло, що $L = \{\theta\}$ є підпростором, інваріантним відносно будь-якого лінійного оператора. Єдиним підпростором розмірності 3 є весь простір *V*. Зрозуміло, що підпростір *L*=*V* є інваріантним. Залишається визначити всі інваріантні підпростори розмірності 1 та 2. За теоремою 3 про інваріантність базисним вектором інваріантного підпростору *L* розмірності 1 є будь-який власний вектор оператора $\mathscr{A}$. Отже, шукаються всі власні вектори оператора.

Складається характеристичний многочлен

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -6-t & 2 & 3 \\ 2 & -3-t & 6 \\ 3 & 6 & 2-t \end{vmatrix}.$$

Виконуються елементарні перетворення матриці визначника, що не змінюють величини визначника. Від другого та третього рядків віднімається перший, помножений на 2 та 3 відповідно.

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -6-t & 2 & 3 \\ 14+2t & -7-t & 0 \\ 21+3t & 0 & -7-t \end{vmatrix}.$$

З другого та третього рядків за знак визначника виноситься множник $(-7-t)$.

$$\chi(t) = (-7-t)^2 \begin{vmatrix} -6-t & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Від першого рядка віднімається останній, помножений на 3.

$$\chi(t) = (-7-t)^2 \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкладом за елементами 3-го стовпчика одержуємо

$$\chi(t) = (-7-t)^2 \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-7-t)^2 \left(3-t+4\right) = (-7-t)^2 \left(7-t\right).$$

Отже, власними числами лінійного оператора є $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = 7$.

Шукаються власні вектори для $\lambda_1 = -7$:

$$\begin{pmatrix} -6+7 & 2 & 3 \\ 2 & -3+7 & 6 \\ 3 & 6 & 2+7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0;$$

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3.$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
–2	1	0
–3	0	1

$$a_1 = \left(-2, 1, 0\right), \quad a_2 = \left(-3, 0, 1\right).$$

Отже, базисом власного підпростору L_{-7}, відповідного власному числу $\lambda_1 = -7$ є вектори a_1, a_2. А тоді довільний власний вектор, відповідний $\lambda_1 = -7$, має вигляд

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2, \text{ де } \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0.$$

Шукаються власні вектори для $\lambda_2 = 7$:

$$\begin{pmatrix} -6-7 & 2 & 3 \\ 2 & -3-7 & 6 \\ 3 & 6 & 2-7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 6 & -5 \\ -13 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 21 & -14 \\ 0 & -63 & 42 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 &= \frac{2}{3}x_3 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 &= \frac{2}{3}x_3 \end{aligned};$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Отже, базисним вектором власного підпростору L_7, відповідного власному числу $\lambda_2 = 7$, є вектор $a_3 = (1, 2, 3)$. Всі власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_2 = 7$ – це вектори вигляду

$$\gamma a_3, \text{ де } \gamma \neq 0.$$

Всередині підпростору розмірності 1 не існує інших підпросторів розмірності 1. Тому у власному підпросторі L_7 підпросторами є лише $L_7 = < a_3 >$ та $\{\theta\}$. Базисом інваріантного підпростору розмірності 1 є власний вектор оператора. Тому всі власні підпростори розмірності 1 – це підпростори $< a_3 >, < \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 >$, при умові $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$.

Знаходимо всі інваріантні підпростори розмірності 2. Припустимо, що L – інваріантний підпростір, $\dim L = 2$, вектори b_1, b_2 утворюють базис L. Неважко бачити, що базисні вектори власних підпросторів a_1, a_2, a_3 утворюють базис простору, причому, враховуючи власні числа, $\mathscr{A}(a_1) = -7\ a_1$, $\mathscr{A}(a_2) = -7\ a_2$, $\mathscr{A}(a_3) = 7\ a_3$. Тоді вектори b_1, b_2 лінійно виражаються через базис простору a_1, a_2, a_3:

$$b_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$
$$b_2 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3 .$$

Зрозуміло, що можливі два випадки.

1) $\alpha_3 = \beta_3 = 0$. Тоді

$$b_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$$
$$b_2 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 .$$

Вектори b_1, b_2 лінійно виражаються через a_1, a_2. Але вектори a_1, a_2 утворюють базис власного підпростору L_{-7}, тому $b_1, b_2 \in L_{-7}$, отже $L = < b_1, b_2 > \subseteq L_{-7}$. Але $\dim L = 2 = \dim L_{-7}$, отже $L = L_{-7}$. Тому в цьому випадку L співпадає з власним підпростором, відповідним $\lambda_1 = -7$, а тому $L = L_{-7} = < a_1, a_2 >$.

2) принаймні одне з чисел α_3, β_3 не дорівнює 0. Для визначеності нехай $\alpha_3 \neq 0$. Тоді $b_1 \in L$, в силу інваріантності, $\mathscr{A}(b_1) \in L$.

$\mathscr{A}(b_1) = \mathscr{A}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3) = \alpha_1 \mathscr{A}(a_1) + \alpha_2 \mathscr{A}(a_2) + \alpha_3 \mathscr{A}(a_3) =$
$= -7\alpha_1 a_1 - 7\alpha_2 a_2 + 7\alpha_3 a_3.$

Отже, $\mathscr{A}(b_1) = -7\alpha_1 a_1 - 7\alpha_2 a_2 + 7\alpha_3 a_3 \in L$. Але $b_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \in L$. Тоді $\mathscr{A}(b_1) + 7b_1 \in L$, тобто $(-7\alpha_1 a_1 - 7\alpha_2 a_2 + 7\alpha_3 a_3) + (7\alpha_1 a_1 + 7\alpha_2 a_2 + 7\alpha_3 a_3) \in L$, $14\alpha_3 a_3 \in L$ при умові $\alpha_3 \neq 0$. Тому $a_3 \in L$.

Далі, серед коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ для векторів b_1, b_2 є принаймні один ненульовий. В супротивному випадку вектори b_1, b_2 лінійно виражаються через один вектор a_3, а тому за лемою про дві системи, лінійно залежні і не можуть утворювати базис. Отже, для визначеності, нехай $\alpha_1 \neq 0$. Тоді $b_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \in L$, за доведеним, $a_3 \in L$, тобто $\alpha_3 a_3 \in L$. Звідси $b_1 - \alpha_3 a_3 \in L$, тобто $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in L$, причому $\alpha_1 \neq 0$. Таким чином ми одержали, що $a_3 \in L$, $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in L$ при $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. Вектори a_3 та $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0)$ є власними векторами оператора А, що відповідають різним власним числам 7, –7, а тому лінійно незалежні. Отже, оскільки $\dim L = 2$, ці вектори утворюють базис підпростору L. Тобто $L = < a_3, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 >$ при умові $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. Таким чином, ми одержали наступні підпростори

$$
\begin{array}{ll}
\dim L_1 = 0 & L = \{\theta\} \\
\dim L = 1 & L = < a_3 >, L = < \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 > (\gamma_1^2 + \gamma_1^2 \neq 0) \\
\dim L = 2 & L = < a_1, a_2 >, L = < a_3, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 > (\alpha_1^2 + \alpha_1^2 \neq 0) \\
\dim L = 3 & L = V .
\end{array}
$$

Оскільки всі ненульові лінійні підпростори є лінійними оболонками систем власних векторів, то вони інваріантні. Інших інваріантних підпросторів не існує.

14. З'ясувати, чи можна матрицю A лінійного оператора звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Будемо використовувати останню теорему з пункту. 1.26 та 1-й критерій оператора простої структури з пункту 1.28.

Зрозуміло, що розмірність простору $\dim V = 3$.

Знайдемо характеристичні числа матриці A.

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0,$$

отже $\lambda_1 = 1$ кратності $n_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ кратності $n_2 = 2$.

Отже, кількість дійсних коренів з урахуванням кратності дорівнює розмірності простору.

Далі, для $\lambda_1 = 1$

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	1	1

Отже розмірність власного підпростору L_{λ_1} співпадає з n_1.

Базис L_{λ_1} складається з одного вектора $(1, 1, 1)$.

Для $\lambda_2 = 2$

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x_1 = x_2 - \frac{1}{3} x_3 .$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
1	1	0
$-\frac{1}{3}$	0	1

Отже розмірність власного підпростору L_{λ_2} співпадає з n_2 .

Базис L_{λ_2} складається з векторів $(1,\ 1,\ 0)$ та $(1, 0, -3)$.

Отже, оператор має просту структуру і в базисі

$$(1, 1, 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ (1, 0, -3)$$

оператору $\mathscr{A}$ відповідає така діагональна матриця

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

тобто $D = T^{-1}AT$, де

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що діагональними елементами матриці D є власні числа оператора, причому порядок розташування власних чисел на діагоналі строго відповідає порядку розміщення власних векторів в базисі. Перестановка власних векторів в базисі означає перестановку відповідних діагональних елементів матриці. Власні вектори визначаються з точністю до ненульових числових множників.

1.30. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Довести, що вектори $e_1 = (1, 2, -1, -2), e_2 = (2, 3, 0, -1), e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)$ утворюють базис і знайти координати вектора $x = (7, 14, -1, 2)$ в цьому базисі (афінні координати вектора x).
2. Довести, що кожна з двох систем векторів є базисом, та знайти зв'язок координат одного і того ж вектора в цих двох базисах:
   $e_1 = (1, 1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 1, 1), e_3 = (1, 1, 2, 1), \quad e_4 = (1, 3, 2, 3)$;
   $e_1' = (1, 0, 3, 3), e_2' = (-2, -3, -5, -4), e_3' = (2, 2, 5, 4), e_4' = (-2, -3, -4, -4)$.
3. Знайти розмірність і базис лінійної оболонки системи векторів:
   $a_1 = (1, 1, 1, 1, 0), a_2 = (1, 1, -1, -1, -1), a_3 = (2, 2, 0, 0, -1), a_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$,
   $a_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.
4. Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину лінійних підпросторів :
   L_1 – лінійна оболонка $a_1 = (1, 2, 0, 1), a_2 = (1, 1, 1, 0)$,
   L_2 – лінійна оболонка $b_1 = (1, 0, 1, 0), b_2 = (1, 3, 0, 1)$.
5. Знайти базис суми і перетину лінійних підпросторів, натягнутих на системи векторів $a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (1, 1, -1), a_3 = (1, 3, 3)$ і $b_1 = (2, 3, -1), b_2 = (1, 2, 2), b_3 = (1, 1, -3)$.
6. Знайти базис суми і перетину лінійних підпросторів, натягнутих на системи векторів $a_1 = (1, 1, 0, 0), a_2 = (0, 1, 1, 0), a_3 = (0, 0, 1, 1)$ і $b_1 = (1, 0, 1, 0), b_2 = (0, 2, 1, 1), b_3 = (1, 2, 1, 2)$.
7. Довести, що для будь-якого лінійного підпростору L_1 простору R^n можна знайти інший підпростір L_2 такий, що увесь простір R^n буде прямою сумою L_1 і L_2.
8. З'ясувати, чи є оператор $\mathscr{A}$, заданий шляхом задання координат вектора $\mathscr{A}(x)$ як функції координат вектора x, лінійним. Якщо так, то

знайти матрицю оператора в тому базисі, в якому задано координати векторів $\mathscr{A}(x)$ і x.

$\mathscr{A}(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

9. Довести, що існує єдиний лінійний оператор $\mathscr{A}$ тривимірного простору, що переводить вектори a_1, a_2, a_3 відповідно в b_1, b_2, b_3, і знайти матрицю C цього оператора в тому ж базисі, в якому задано координати усіх векторів:

   $a_1 = (2, 0, 3)$, $b_1 = (1, 2, -1)$,

   $a_2 = (4, 1, 5)$, $b_2 = (4, 5, -2)$,

   $a_3 = (3, 1, 2)$, $b_3 = (1, -1, 1)$.

10. Лінійний оператор $\mathscr{A}$ в базисі $a_1 = (8, -6, 7), a_2 = (-16, 7, -13),\ a_3 = (9, -3, 7)$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20- \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Знайти його матрицю в базисі $b_1 = (1, -2, 1), b_2 = (3, -1, 2), b_3 = (2, 1, 2)$.

11. Нехай оператор $\mathscr{A}$ в базисі $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ має матрицю $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Оператор $\mathscr{B}$ в базисі $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, 6)$ має матрицю $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\mathscr{A}\mathscr{B}$ в тому ж базисі, в якому задано координати усіх векторів.

12. Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор диференціювання, а $\mathscr{B}$ – множення на x в нескінченновимірному просторі всіх многочленів від x з дійсними коефіцієнтами. Довести, що $\mathscr{A}\mathscr{B}^n - \mathscr{B}^n\mathscr{A} = n\mathscr{B}^{n-1}$.

13. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

14. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

15. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

16. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

17. З'ясувати, чи можна матрицю A лінійного оператора звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. З'ясувати, чи можна матрицю A лінійного оператора звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. З'ясувати, чи можна матрицю A лінійного оператора звести до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. Знайти всі підпростори тривимірного простору, інваріантні відносно лінійного оператора, заданого матрицею

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Підпростір L векторного простору V є лінійною оболонкою системи векторів $a_1 = (2, 1, 3, -1), a_2 = (3, 2, 0, -2), a_3 = (3, 1, 9, -1)$. Знайти базис фактор-простору V / L.

2. ТЕОРЕМА ЖОРДАНА

2.1. Поняття матричного многочлена.

Нехай $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, A_m$ – квадратні матриці однакового порядку, λ – деяка незалежна змінна, тоді сума

$$G(\lambda) = A_m(\lambda)^n + A_{m-1}(\lambda)^{n-1} + \ldots + A_2(\lambda)^2 + A_1(\lambda) + A_0$$

називається ***матричним многочленом*** від λ, при цьому самі матриці $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_2, A_1, A_0$ називаються ***коефіцієнтами матричного многочлена*** $G(\lambda)$.

Найбільше натуральне число k, для якого матриця $A_k \neq 0$ називається ***степенем многочлена***, а тоді A_k – ***старшим коефіцієнтом***.

Поліноміальною матрицею або λ***-матрицею*** будемо називати квадратну матрицю, всі елементи якої є многочлени від фіксованої змінної λ. Будь-яку λ-матрицю можна подати як матричний многочлен.

Нехай $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ – деякий многочлен з коефіцієнтами з поля F, A – квадратна матриця з коефіцієнтами з поля F, тоді під $f(A)$ розуміємо $f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 E$.

Теорема (Гамільтона-Келі).

Кожна квадратна матриця є матричним коренем свого характеристичного многочлена.

Наслідок.

Нехай А – лінійний оператор в скінченновимірному просторі V, $\chi(t)$ – його характеристичний многочлен, тоді $\chi(A) = 0$.

2.2. Теорема Жордана.

Нехай F – деяке поле, $\lambda \in F$ – фіксований елемент, $k \in V$ – деяке натуральне число.

Жордановою клітинкою порядку k з параметром λ називається квадратна матриця $J_k(\lambda)$ порядку k, яка має вигляд

$$J_k(\lambda) = \left(\underbrace{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{matrix}}_{k} \right).$$

Жордановою матрицею називається матриця, вдовж головної діагоналі якої стоять жорданові клітинки, а усі інші елементи дорівнюють нулю, тобто

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & & \\ & & J_{k_3}(\lambda_3) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

Поле F називається ***алгебраїчно замкненим***, якщо довільний многочлен ненульового степеня з коефіцієнтами з поля F має в цьому полі корінь.

Теорема (Жордана).

Для кожної квадратної матриці A з елементами з алгебраїчно замкненого поля F існує невироджена квадратна матриця T з елементами з цього поля, що $B = T^{-1}AT$ – жорданова.

Матриця B називається ***жордановою нормальною формою*** матриці A.

Теорема (Жордана в термінах теорії лінійних операторів).

Для будь-якого лінійного оператора A в скінченовимірному просторі V над алгебраїчно замкненим полем F існує базис, у якому оператору A відповідає жорданова матриця.

Такий базис називається ***жордановим базисом*** оператора A .

2.3. Поліноміальні матриці (λ-матриці).

Поліноміальною матрицею (λ-матрицею) будемо називати квадратну матрицю, всі елементи якої є многочленами від деякої фіксованої змінної λ з коефіцієнтами з поля *P*. Прикладом поліноміальної матриці є характеристична матриця $A-\lambda E$ довільної квадратної матриці A з елементами з поля *P*.

Нехай задається λ – матриця

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Елементарними перетвореннями цієї матриці називається перетворення таких типів:

1) перестановка рядків;
2) перестановка стовпчиків;
3) домноження будь-якого рядка на будь-яке число $\alpha \in P$, таке, що $\alpha \neq 0$;
4) домноження будь-якого стовпчика на будь-яке число $\alpha \in P$, таке, що $\alpha \neq 0$;
5) додавання до *i*-го рядка матриці *j*-го рядка, домноженого на будь який многочлен $\varphi(\lambda)$ з елементами з поля *P* при умові $i \neq j$;
6) додавання до *i*-го стовпчика матриці *j*-го стовпчика, домноженого на будь-який многочлен $\varphi(\lambda)$ з елементами з поля *P* при умові $i \neq j$.

Дві λ-матриці $A(\lambda)$ та $B(\lambda)$ вважаються еквівалентними, якщо від матриці $A(\lambda)$ можна перейти до матриці $B(\lambda)$ за допомогою скінченного числа елементарних перетворень. Цей факт позначається так $A(\lambda) \sim B(\lambda)$. Всі квадратні λ-матриці порядка *n* над полем *P* розпадаються на класи еквівалентних матриць, що не перетинаються.

Канонічною λ-матрицею називається λ-матриця, для якої виконуються наступні умови

1) матриця діагональна, тобто має вигляд

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix};$$

2) якщо $e_i(\lambda)$– ненульовий многочлен ($2 \le i \le n$), то $e_i(\lambda)$ ділиться на $e_{i-1}(\lambda)$, якщо $e_i(\lambda)$– нульовий многочлен при $i < n$, то нульовими є всі многочлени $e_{i+1}(\lambda), e_{i+2}(\lambda), ..., e_n(\lambda)$;

3) старший коефіцієнт будь якого ненульового многочлена $e_i(\lambda)$ ($1 \le i \le n$) дорівнює одиниці.

Будь-яка λ-матриця еквівалентна деякій канонічній λ-матриці, тобто зводиться елементарними перетвореннями до канонічного вигляду. Будь яка λ–матриця еквівалентна лише єдиній канонічній λ-матриці.

2.4. Алгоритм зведення λ-матриці до канонічного вигляду методом елементарних перетворень.

Припускаємо, що задається λ-матриця

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Ставиться задача звести матрицю $A(\lambda)$ до канонічного вигляду елементарними перетвореннями. Якщо матриця нульова, то вона канонічна. Отже, вважаємо, що $A(\lambda)$ – ненульова матриця.

1 крок. Серед ненульових елементів матриці береться многочлен мінімального степеня і перестановками рядків та стовпчиків цей многочлен переставляється в лівий верхній кут матриці. Якщо такий многочлен неєдиний, то переставляється будь-який з них. Отже, вважаємо, що $a_{11}(\lambda)$– саме такий ненульовий многочлен.

2 крок. Перевіряється умова: кожен елемент в першому рядку та в першому стовпчику матриці ділиться на $a_{11}(\lambda)$. Якщо це виконується, то перехід на крок 3, якщо не виконується, то на крок 5.

3 крок. Всі елементи першого рядка та першого стовпчика діляться на $a_{11}(\lambda)$. Від кожного рядка матриці віднімається перший рядок, домножений на відповідний многочлен таким чином, що в першому стовпчику матриці на всіх місцях крім першого одержуються нулі. Далі аналогічно від кожного стовпчика матриці віднімається перший, домножений на відповідний многочлен таким чином, що в першому рядку матриці на всіх місцях крім першого одержуються нулі. Отже, одержується λ- матриця

$$A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & b_{23}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ 0 & b_{32}(\lambda) & b_{33}(\lambda) & \dots & b_{3n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2}(\lambda) & b_{n3}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Причому $A(\lambda) \sim A_1(\lambda)$.

4 крок. Припустимо, що $B(\lambda) = \begin{pmatrix} b_{22}(\lambda) & b_{23}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ b_{32}(\lambda) & b_{33}(\lambda) & \dots & b_{3n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2}(\lambda) & b_{n3}(\lambda) & \dots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$

Якщо порядок матриці $B(\lambda)$ дорівнює 1, або матриця $B(\lambda)$ нульова, то перехід на 6 крок. Інакше виконуються перетворення матриці $B(\lambda)$. Для цього перехід на крок 1 для матриці $B(\lambda)$.

5 крок. Припускаємо, що, наприклад, у першому стовпчику матриці $A(\lambda)$ є многочлен $a_{1j}(\lambda)$ ($j > 1$), який не ділиться на $a_{11}(\lambda)$. Елемент $a_{1j}(\lambda)$ ділиться на $a_{11}(\lambda)$ з залишком:

$$a_{1j}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda),$$

де $r(\lambda)$ ненульовий многочлен, степінь якого менший за степінь $a_{11}(\lambda)$. Далі від j-го рядка матриці віднімається 1-й рядок, домножений на $q(\lambda)$. На перетині j-го рядка та 1-го стовпчика з'являється ненульовий многочлен $r(\lambda)$ степеня, меншого за степінь $a_{11}(\lambda)$. Далі з одержаною матрицею перехід на крок 1.

6 крок. Одержана діагональна матриця

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} c_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{k+1,k+1}(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Припускаємо, що $c_{11}(\lambda) \neq 0,\ c_{22}(\lambda) \neq 0, \dots,\ c_{kk}(\lambda) \neq 0, c_{k+1,k+1}(\lambda) = 0, \dots,$ $c_{nn}(\lambda) = 0$. Якщо для всіх j таких, що $1 < j \le k$ виконується умова: $c_j(\lambda)$ ділиться на $c_{j-1}(\lambda)$, то перехід на 8 крок, інакше перехід на крок 7.

7 крок. Умова: $c_{jj}(\lambda)$ ділиться на $c_{j-1,j-1}(\lambda)$ для всіх j таких, що $1 < j \le k$ не виконується. Через j_0 позначимо мінімальний номер, для якого така умова не виконується. Многочлен $c_{j_0 j_0}(\lambda)$ крім $c_{j_0-1,j_0-1}(\lambda)$ може не ділитись ще на кілька попередніх многочленів. Тому нехай $i_0\ (1 \le i_0 < j_0)$ – мінімальний номер, для якого $c_{j_0 j_0}(\lambda)$ не ділиться на $c_{i_0 i_0}(\lambda)$. До стовпчика з номером i_0 додається стовпчик з номером j_0. Одержується матриця, в i_0-м стовпчику якої знаходиться многочлен, який не ділиться на діагональний елемент $c_{i_0 i_0}(\lambda)$. Далі для даної матриці перехід на 1 крок.

8 крок. Одержана діагональна матриця

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} d_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{kk}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{k+1,k+1}(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & d_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$d_{11}(\lambda) \ne 0,\ d_{22}(\lambda) \ne 0, \dots,\ d_{kk}(\lambda) \ne 0,\ d_{k+1,k+1}(\lambda) = 0, \dots,\ d_{nn}(\lambda) = 0.$$

Причому для всіх j таких, що $1 < j \le k$ многочлен $d_{jj}(\lambda)$ ділиться на $d_{j-1,j-1}(\lambda)$. Кожен з рядків матриці від 1-го до k-го ділиться на старший коефіцієнт діагонального елемента і одержується шукана канонічна матриця :

$$E(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e_k(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_{k+1}(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$e_1(\lambda) \ne 0,\ e_2(\lambda) \ne 0, \dots,\ e_k(\lambda) \ne 0,\ e_{k+1}(\lambda) = 0, \dots,\ e_n(\lambda) = 0.$$

Означення.

Многочлени $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_k(\lambda), e_{k+1}(\lambda), , \dots, e_n(\lambda)$ називаються інваріантними многочленами матриці $A(\lambda)$.

Задача 1.

Звести λ-матрицю $A(\lambda)$ до канонічного вигляду методом елементарних перетворень

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda & 3\lambda^2+3\lambda \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Ненульовими елементами мінімального степеня в матриці є многочлени степеня 2. Такий многочлен знаходиться в лівому верхньому куті, тому початкових перестановок рядків чи стовпчиків не потрібно. Елементи в першому стовпчику, що стоять на другому та третьому місцях, не діляться на кутовий многочлен λ^2. Беремо один з них, наприклад, $\lambda^2+\lambda$. Далі від третього рядка віднімаємо перший:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}.$$

В одержаній матриці ненульовими елементами мінімального степеня є многочлени степеня 1. Беремо один із них, наприклад λ, і переставляємо в лівий верхній кут, міняючи місцями 1-й та 3-й рядки:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2-\lambda & \lambda^3+4\lambda^2-3\lambda \\ \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & 3\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

В одержаній матриці всі елементи 1-го рядка та 1-го стовпчика діляться на елемент λ, що стоїть в лівому верхньому куті, а тому одержуємо нулі в першому стовпчику та в першому рядку. Для цього спочатку від другого рядка віднімаємо перший, домножений на $\lambda-1$, а від третього віднімаємо перший, домножений на λ. Далі від другого стовпчика віднімаємо подвійний, а від третього – потрійний перший:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

В матриці

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda \\ -\lambda^2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

ненульовими елементами мінімального степеня є многочлени степеня 2, і такий многочлен знаходиться в лівому верхньому куті. Елементи 1-го рядка та 1-го стовпчика діляться на цей елемент, отже, можна одержувати нулі.

Додаванням до останнього рядка матриці передостаннього з наступним відніманням від останнього стовпчика передостаннього, домноженого на λ, одержуємо

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Одержується діагональна λ - матриця

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Кожен з діагональних елементів матриці $B(\lambda)$ ділиться на попередній. Старші коефіцієнти многочленів $e_1(\lambda)=\lambda, e_2(\lambda)=\lambda^2+\lambda, e_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2$ дорівнюють одиниці. Отже, ми одержали канонічний вигляд λ-матриці $A(\lambda)$.

Задача 2.

Звести λ-матрицю $A(\lambda)$ до канонічного вигляду методом елементарних перетворень

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Початкова матриця має діагональний вигляд, але ненульовим многочленом мінімального степеня є $\lambda-3$. За методом, переставляються перший та другий рядки, далі – перший та другий стовпчики:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda-3 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Одержується діагональна матриця, в якій елементи λ^2 та $\lambda^3+\lambda^2$ не діляться на перший елемент $\lambda-3$. До першого стовпчика додається другий:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

У першому стовпчику матриці знаходиться елемент λ^2, який не ділиться на кутовий елемент $\lambda - 3$. Враховуючи, що $\lambda^2 = (\lambda - 3)(\lambda + 3) + 9$, від другого рядка віднімається перший, домножений на $\lambda + 3$

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 9 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Ненульовим елементом мінімального степеня є 9. Тому цей елемент переставляється у лівий верхній кут перестановкою першого та другого рядків:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 9 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Далі перший рядок ділиться на 9, а потім другий стовпчик домножається на 9:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\lambda^2}{9} & 0 \\ \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Всі елементи першого рядка та першого стовпчика діляться на кутовий елемент 1, отже, від другого рядка віднімається перший, домножений на $\lambda - 3$, далі від другого стовпчика віднімається перший, домножений на λ^2.

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & -\lambda^3 + 3\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3 + 3\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Одержується діагональна матриця, в якій елемент $\lambda^3 + \lambda^2$ не ділиться на $-\lambda^3 + 3\lambda^2$. До другого стовпчика додається третій:

$$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3 + 3\lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

В матриці

$$\begin{pmatrix} -\lambda^3 + 3\lambda^2 & 0 \\ \lambda^3 + \lambda^2 & \lambda^3 + \lambda^2 \end{pmatrix}$$

ненульовий елемент мінімального степеня знаходиться у лівому верхньому куті, але елемент першого стовпчика $\lambda^3 + \lambda^2$ не ділиться на $-\lambda^3 + 3\lambda^2$. Враховуючи, що $\lambda^3 + \lambda^2 = -(-\lambda^3 + 3\lambda^2) + 4\lambda^2$, до останнього рядка додається попередній:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^3+3\lambda^2 & 0\\ 0 & 4\lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2\end{pmatrix}.$$

В матриці

$$\begin{pmatrix}-\lambda^3+3\lambda^2 & 0\\ 4\lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2\end{pmatrix}$$

ненульовим елементом мінімального степеня є $4\lambda^2$, отже, переставляються останній та попередній рядки:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4\lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2\\ 0 & -\lambda^3+3\lambda^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Другий рядок ділиться на 4, далі третій стовпчик домножається на 4:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \dfrac{\lambda^3+\lambda^2}{4}\\ 0 & -\lambda^3+3\lambda^2 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2\\ 0 & -\lambda^3+3\lambda^2 & 0\end{pmatrix}.$$

Всі елементи другого рядка та другого стовпчика діляться на діагональний елемент λ^2.Отже, до третього рядка додається другий, домноженй на $\lambda-3$, далі від третього стовпчика віднімається другий, домножений на $\lambda+1$:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^3-3\lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^3-3\lambda^2\end{pmatrix}.$$

Одержується діагональна матриця

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^4-2\lambda^3-3\lambda^2\end{pmatrix}.$$

Кожен з діагольнальних елементів ділиться на попередній. Старші коефіцієнти многочленів дорівнюють одиниці. Отже, ми одержали канонічний вигляд λ-матриці $A(\lambda)$.

2.5. Метод дільників мінорів.

Припустимо, що задається λ-матриця порядку n

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Послідовність многочленів $d_1(\lambda), d_2(\lambda), ..., d_n(\lambda)$ визначається таким чином. Якщо серед мінорів порядку $i\ (1 \le i \le n)$ існує такий, що не дорівнює 0, то $d_i(\lambda)$ – найбільший спільний дільник всіх мінорів порядку i, старший коефіцієнт якого дорівнює 1. Якщо всі мінори порядку i дорівнюють 0, то $d_i(\lambda)=0$. Тоді якщо k – ранг матриці $A(\lambda)$, то $d_1(\lambda)\ne 0, d_2(\lambda)\ne 0, ..., d_k(\lambda)\ne 0, d_{k+1}(\lambda)=0, ,..., d_n(\lambda)=0$. Припустимо, що

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix} -$$

канонічний вигляд матриці $A(\lambda)$.
Тоді $e_1(\lambda)\ne 0, e_2(\lambda)\ne 0, ..., e_k(\lambda)\ne 0, e_{k+1}(\lambda)=0, ..., e_n(\lambda)=0$.
Інваріантні многочлени $e_1(\lambda), e_2(\lambda), ..., e_k(\lambda)$ знаходяться за наступними правилами: $e_1(\lambda)=d_1(\lambda), e_i(\lambda)=\dfrac{d_i(\lambda)}{d_{i-1}(\lambda)}$ при $1< i \le k$.

Задача 1.

Звести λ-матрицю $A(\lambda)$ до канонічного вигляду методом дільників мінорів

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Мінорами порядку 1 є елементи матриці. Оскільки

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} (\lambda+1)(\lambda-1) & \lambda+1 \\ \lambda+1 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix},$$

то $d_1(\lambda)=\lambda+1$. Єдиним мінором порядку 2 є визначник всієї матриці. Тому

$$d_2(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda^2-1 & \lambda+1\\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1\end{vmatrix}=\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)-(\lambda+1)^2=(\lambda+1)^2\left(\lambda^2-2\right)=$$

$$=\lambda^4+2\lambda^3-\lambda^2-4\lambda-2.$$

Тоді
$e_1(\lambda)=d_1(\lambda)=\lambda+1$
$$e_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=\frac{(\lambda+1)^2\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda+1}=(\lambda+1)\left(\lambda^2-2\right)=\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2.$$

Отже, одержується канонічний вигляд матриці $A(\lambda)$:

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0\\ 0 & \lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2\end{pmatrix}.$$

Задача 2.
Звести λ-матрицю $A(\lambda)$ до канонічного вигляду методом дільників мінорів

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda(\lambda-1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3)\end{pmatrix}.$$

Розв'язування.
Мінорами порядку 1 є елементи матриці, а тому $d_1(\lambda)=\lambda.$ Зрозуміло, що для знаходження $d_2(\lambda)$ достатньо взяти найбільший спільний дільник лише таких мінорів порядку 2, що не дорівнюють 0. Таких мінорів існує лише три:

$$\begin{vmatrix}\lambda(\lambda-1) & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-2)\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2),$$
$$\begin{vmatrix}\lambda(\lambda-1) & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-3)\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3),$$
$$\begin{vmatrix}\lambda(\lambda-2) & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-3)\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Отже, $d_1(\lambda)=\lambda^2$. Єдиним мінором порядку 3 є визначник матриці $A(\lambda)$. Отже,

$$d_3(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda(\lambda-1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3)\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Знаходимо інваріантні многочлени

$$e_1(\lambda)=d_1(\lambda)=\lambda,$$

$$e_2(\lambda)=\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}=\frac{\lambda^2}{\lambda}=\lambda,$$

$$e_3(\lambda)=\frac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)}=\frac{\lambda^3(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{\lambda^2}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Одержуємо канонічний вигляд матриці $A(\lambda)$

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\end{pmatrix}.$$

2.6. Алгоритм побудови жорданової нормальної форми квадратної матриці.

Припустимо, що задається квадратна матриця A порядку n

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Ставиться задача побудувати жорданову нормальну форму матриці A.

1 крок. Від усіх елементів на головній діагоналі матриці A віднімається змінна λ і одержується характеристична матриця $A-\lambda E$ матриці A:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

2 крок. Матриця $A–\lambda E$ зводиться до канонічного вигляду $B(\lambda)$ як λ-матриця.

3 крок. Припустимо, що канонічна матриця $B(\lambda)$ має такий вигляд

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e_k(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_{k+1}(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Тоді в даному випадку всі інваріантні многочлени $e_1(\lambda)$, $e_2(\lambda),\dots,$ $e_n(\lambda)$ ненульові. Припустимо, що
$e_1(\lambda)=1, e_2(\lambda)=1,\dots,e_k(\lambda)=1, e_{k+1}(\lambda)\neq 1, e_{k+2}\neq 1,\dots,e_n(\lambda)\neq 1\ (k<n).$
Тобто ст$e_{k+1}>0$, ст$e_{k+2}>0,\dots,$ ст $e_n>0$. Для кожного з многочленів ненульового степеня $e_{k+1}(\lambda)$, $e_{k+2}(\lambda),\dots,$ $e_n(\lambda)$ одержується канонічний розклад в добуток лінійних множників.

4 крок. Припустимо, що $e_j(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ – канонічний розклад многочлена $e_j(\lambda)$ в добуток лінійних множників при $k<j\le n$. Тоді λ_1, $\lambda_2,\dots,\lambda_s$ – всі попарно різні корені многочлена $e_j(\lambda)$. Кожен з многочленів $(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\dots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ називається інваріантним множником матриці A. Кожному інваріантному множнику $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ $(1\le i\le s)$ в заключній жордановій матриці відповідає жорданова клітинка $J_{n_i}(\lambda_i)$ порядку n_i з параметром λ_i

$$J_{n_i}(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Таким чином, даному інваріантному многочлену $e_j(\lambda)$ в заключній жордановій матриці відповідають s жорданових клітинок порядків $n_1, n_2, \ldots, n_s$ та з параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ відповідно.

5 крок. Одержавши всі жорданові клітинки для кожного з многочленів ненульового степеня $e_{k+1}(\lambda), e_{k+2}(\lambda), ..., e_n(\lambda)$, будується заключна матриця J таким чином. Вздовж головної діагоналі послідовно розміщуються всі одержані жорданові клітинки, а всі інші елементи беруться рівними 0. Як правило, клітинки розміщуються за зростанням порядку, але порядок розміщення клітинок може бути будь-яким. Одержується заключна жорданова матриця J, яка є жордановою нормальною формою матриці A.

Задача 1.

Скласти жорданову нормальну форму квадратної матриці A, якщо задаються інваріантні многочлени $e_i(\lambda)\left(i=\overline{1,n}\right)$ її характеристичної матриці $A-\lambda E$:

$$e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=e_3(\lambda)=e_4(\lambda)=e_5(\lambda)=e_6(\lambda)=1, \quad e_7(\lambda)=\lambda-5,$$
$$e_8(\lambda)=(\lambda-5)^2(\lambda+3), \quad e_9(\lambda)=(\lambda-5)^2(\lambda+3)^3.$$

Розв'язування.

Виходячи з числа інваріантних многочленів, робимо висновок, що порядок матриці A дорівнює 9. Зрозуміло, що сума порядків всіх жорданових клітинок дорівнює 9. З методу побудови жорданової матриці випливає, що матрицю можна побудувати лише за умови, що сума ступенів всіх інваріантних многочленів також дорівнює порядку матриці, тобто 9. Перевіряючи цю умову, одержуємо

$$6*0+1+3+5=9.$$

Умова виконується, тобто жорданову матрицю можна скласти. Складемо всі жорданові клітинки. Многочленам $e_1(\lambda), e_2(\lambda), e_3(\lambda), e_4(\lambda), e_5(\lambda), e_6(\lambda)$ жорданові клітинки не відповідають. Тому клітинки будуються лише за многочленами $e_7(\lambda)=\lambda-5, \quad e_8(\lambda)=(\lambda-5)^2(\lambda+3), \quad e_9(\lambda)=(\lambda-5)^2(\lambda+3)^3$. Многочлени задаються канонічними розкладами в добутки лінійних множників. Многочлену $e_7(\lambda)=\lambda-5$ відповідає одна жорданова клітинка порядку 1 $J_1(5)=(5)$. Многочлену $e_8(\lambda)=(\lambda-5)^2(\lambda+3)$ відповідають дві клітинки $J_2(5)=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $J_1(-3)=(-3)$.

Многочлену $e_9(\lambda)=(\lambda-5)^2(\lambda+3)^3$ відповідають дві жорданові клітинки $J_2(5)=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $J_3(-3)=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

Далі будуємо заключну жорданову матрицю *J*. Для цього вздовж діагоналі квадратної матриці порядку 9 розміщуються одержані жорданові клітинки, а всі інші елементи беруться рівними 0. Клітинки розміщуються за зростанням порядку:

$$J=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Задача 2.

Знайти жорданову нормальну форму матриці

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 5 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

За алгоритмом беремо характеристичну матрицю $A-\lambda E$ матриці *A*:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}5-\lambda & 1 & -1 & -1\\ 1 & 5-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 1 & 3-\lambda & -1\\ 1 & 1 & -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}.$$

Далі цю матрицю зводимо до канонічного вигляду як λ-матрицю будь-яким методом. Скористаємось методом елементарних перетворень.

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}5-\lambda & 1 & -1 & -1\\ 1 & 5-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 1 & 3-\lambda & -1\\ 1 & 1 & -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3-\lambda\\ 1 & 1 & 3-\lambda & -1\\ 1 & 5-\lambda & -1 & -1\\ 5-\lambda & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3-\lambda\\ 0 & 0 & 4-\lambda & -4+\lambda\\ 0 & 4-\lambda & 0 & -4+\lambda\\ 0 & -4+\lambda & 4-\lambda & -16+8\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4-\lambda & -4+\lambda\\ 0 & 4-\lambda & 0 & -4+\lambda\\ 0 & -4+\lambda & 4-\lambda & -16+8\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 0 & -4+\lambda\\ 0 & 0 & 4-\lambda & -4+\lambda\\ 0 & -4+\lambda & 4-\lambda & -16+8\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 0 & -4+\lambda\\ 0 & 0 & 4-\lambda & -4+\lambda\\ 0 & 0 & 4-\lambda & -20+9\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4-\lambda & -4+\lambda\\ 0 & 0 & 4-\lambda & -20+9\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4-\lambda & -4+\lambda\\ 0 & 0 & 0 & -16+8\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & -16+8\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-8\lambda+16\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-4)^2\end{pmatrix}.$$

Одержуються інваріантні многочлени матриці A:

$$e_1(\lambda)=1, e_2(\lambda)=\lambda-4, e_3(\lambda)=\lambda-4, e_4(\lambda)=(\lambda-4)^2.$$

Жорданові клітинки будуються лише для многочленів $e_2(\lambda), e_3(\lambda), e_4(\lambda)$.

Многочлену $e_2(\lambda)=\lambda-4$ відповідає жорданова клітинка порядку 1 $J_1(\lambda)=(4)$. Многочлену $e_3(\lambda)=\lambda-4$ також відповідає жорданова клітинка порядку 1 $J_1(\lambda)=(4)$. Многочлену $e_4(\lambda)=(\lambda-4)^2$ відповідає жорданова клітинка порядку 2 $J_2(4)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. Розміщуючи клітинки вздовж діагоналі матриці порядку 4 за зростанням порядку клітинок, одержуємо відповідь

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

2.7. Алгоритм знаходження жорданова базису (випадок єдиного власного числа).

Нехай $\mathscr{A}$ - лінійний оператор на векторному просторі V над полем F, dim V=n, у даному базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору оператору $\mathscr{A}$ відповідає матриця $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$. Ставиться задача знайти жорданів базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ оператора $\mathscr{A}$ та жорданову матрицю J оператора в цьому базисі. Для визначеності вважаємо, що всі вектори задаються координатами в початковому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1 крок. Складається характеристичний многочлен оператора $\chi(t)=|A-tE|$ і знаходяться всі корені цього многочлена. Припускаємо, що многочлен $\chi(t)$ має лише єдиний корінь $t=\lambda_0$, причому $\lambda_0\in F$, тобто $\chi(t)=(-1)^n(t-\lambda_0)^n$. Це означає, що параметром усіх жорданових клітинок заключної жорданової матриці J є число λ_0.

2 крок. Розгляд переноситься на лінійний оператор $\mathscr{B}=\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E}$, де $\mathscr{E}$ – одиничний оператор. Оператор $\mathscr{B}$ нільпотентний, у початковому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ оператору $\mathscr{B}$ відповідає матриця B=$A-\lambda_0 E$. Жорданів базис оператора $\mathscr{B}$ є жордановим базисом для $\mathscr{A}$ та навпаки. Отже, далі знаходиться жорданів базис оператора $\mathscr{B} = \mathscr{A} - \lambda_0 \mathscr{E}$.

3 крок. Знаходиться показник нільпотентності k оператора $\mathscr{B}$. Для цього береться послідовність матриць $B, B^2, \ldots, B^{k-1}, B^k$ така, що k – мінімальний ступінь, для якого B^k –нульова матриця. Показник нільпотентності k означає, що у заключній жордановій матриці J максимальний порядок жорданової клітинки дорівнює k.

4 крок. Розглядається послідовність підпросторів M_0, M_1, $\ldots, M_{k-1}, M_k$ таких, що $M_i = \operatorname{Ker} \mathscr{B}^i (0 \le i \le k)$. Оскільки вважається, що $\mathscr{B}^0 = \mathscr{E}$, то $M_0 = \{\theta\}$. З того, що k – показник нільпотентності оператора $\mathscr{B}$ випливає, що $\mathscr{B}^k = \mathscr{O}$, $\mathscr{B}^{k-1} \ne \mathscr{O}$, **…** , $\mathscr{B}^1 \ne \mathscr{O}$, $\mathscr{B}^0 \ne \mathscr{O}$, а тому $M_k = V, M_{k-1} \ne V, \ldots, M_1 \ne V, M_0 \ne V$ і при цьому виконуються включення $\{\theta\} = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{k-1} \subset M_k = V$. Будемо називати висотою вектора $x \in V$ мінімальне натуральне число h таке, що $\mathscr{B}^h(x) = \mathscr{O}$. Оскільки $\mathscr{B}^k = \mathscr{O}$, то $0 \le h \le k$. Складаються початкові базиси підпросторів M_i за наступними правилами. Оскільки $M_0 = \{\theta\}$, в підпросторі M_0 базису немає. Будується довільний базис $Б_1$ підпростору $M_1 = \operatorname{Ker} \mathscr{B}$. Для цього береться деяка фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь порядку n з основною матрицею системи B. Зрозуміло, що висота кожного вектора в базисі $Б_1$ дорівнює 1. Далі система векторів $Б_1$ доповнюється до базису $Б_2$ підпростору M_2. Для цього, наприклад, можна знайти довільний базис M_2, як фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь з основною матрицею B^2, та з цього базису взяти відповідну кількість векторів з урахуванням умови лінійної незалежності. Зрозуміло, що усі доповнюючі вектори висоти 2. Далі система $Б_2$ аналогічним чином доповнюється до початкового базису $Б_3$ підпростору M_3. Продовжуючи цей процес, одержується послідовність початкових базисів $Б_1$, $Б_2$, $\ldots, Б_{k-1}, Б_k$ підпросторів M_0, M_1, $\ldots, M_{k-1}$, M_k відповідно і при цьому $Б_1 \subset Б_2 \subset \ldots \subset Б_{k-1} \subset Б_k$. Базис $Б_k$ підпростору $M_k = V$ є базисом простору V. Він складається з системи $Б_{k-1}$ та доповнюючих векторів. Висота кожного вектора, що доповнює базис $Б_{k-1}$ до $Б_k$, дорівнює k. Висота кожного вектора з базису $Б_{k-1}$ не більше $k-1$.

5 крок. Будується жорданів базис. Для цього складається послідовність ланцюжків (серій) векторів за наступними правилами. На першому кроці для кожного вектора c висоти k з базису $Б_k$ складається серія з k векторів c, $\mathscr{B}(c)$, $\mathscr{B}^2(c)$, **…** , $\mathscr{B}^{k-1}(c)$ з початковим вектором c. Оскільки висота вектора c дорівнює k, то серія складається з ненульових векторів. При цьому зрозуміло, що під дією оператора $\mathscr{B}$ кожен вектор переводиться у вектор з висотою, меншою на одиницю. Отже, векторам серії c, $\mathscr{B}(c)$, $\mathscr{B}^2(c)$,…, $\mathscr{B}^{k-1}(c)$ відповідають висоти k, $k-1$, $k-2$, …, 1. При цьому $c \in M_k$, $\mathscr{B}(c) \in M_{k-1}$, $\mathscr{B}^2(c) \in M_{k-2}$,…, $\mathscr{B}^{k-1}(c) \in M_1$. Система векторів, яка складається з усіх побудованих серій, лінійно незалежна. Далі, якщо потрібно, на другому кроці нові серії будуються за наступними правилами. Береться початковий базис $Б_{k-2}$ підпростору M_{k-2}, з кожної побудованої серії береться вектор висоти $k-1$. Одержується лінійно незалежна система у підпросторі M_{k-1} і далі ця система доповнюється до базису M_{k-1}. Доповнюючі вектори можна взяти, наприклад, з початкового базису $Б_{k-1}$ підпростору M_{k-1}. Висота кожного доповнюючого вектора d дорівнює $k-1$, і далі для кожного такого вектора складається ланцюжок(серія) з $k-1$ векторів d, $\mathscr{B}(d)$, $\mathscr{B}^2(d)$,…, $\mathscr{B}^{k-2}(d)$. Вектори усіх серій, побудованих на першому та другому кроках, лінійно незалежні. Припускаємо, що зроблено j ($1 \le j < k$) кроків будування серій. На $j+1$ кроці береться початковий базис підпростору M_{k-j-1}, з кожної серії береться вектор висоти $k-j$, одержується лінійно незалежна система в підпросторі M_{k-j}, ця система доповнюється до базису M_{k-j} векторами, наприклад, з початкового базису $Б_{k-j}$ підпростору M_{k-j} і для кожного з додатково взятих векторів z складається серія з $k-j$ векторів z, $\mathscr{B}(z)$, $\mathscr{B}^2(z)$,… , $\mathscr{B}^{k-j-1}(z)$. Вектори всіх побудованих серій на всіх кроках лінійно незалежні. Процес будування серій завершується, коли вектори всіх побудованих серій разом утворюють базис простору. Це виконується, коли число векторів у всіх побудованих на даний крок серіях співпадає з розмірністю простору.

6 крок. Жорданів базис складається з усіх побудованих серій. Вектори впорядковуються наступним чином. У кожній серії вектори розташовуються у зворотньому порядку (у кожній серії початковий вектор береться останнім). Кожна серія у базисі розташовується єдиним блоком.

7 крок. Жорданова нормальна форма J матриці A визначається наступним чином. Оскільки характеристичний многочлен має єдиний корінь λ_0, то кожна жорданова клітинка у матриці J є клітинкою з параметром λ_0. Кожній серії векторів у базисі відповідає одна клітинка. Порядок клітинки строго дорівнює довжині серії. Порядок розташування клітинок строго відповідає порядку розміщення серій в базисі.

Задача 1.

Лінійний оператор у початковому базисі простору V задається матрицею A. Знайти базис b_1, b_2, b_3, в якому оператор задається жордановою матрицею J, та знайти матрицю J

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

На першому кроці шукаються власні числа матриці A. Для цього складається характеристичний многочлен оператора

$$\chi(t)=|A-tE|=\begin{vmatrix}4-t & 1 & 1\\ -2 & 1-t & -2\\ 1 & 1 & 4-t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-t & 3-t & 3-t\\ -2 & 1-t & -2\\ 1 & 1 & 4-t\end{vmatrix}=$$

$$=(3-t)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 1-t & -2\\ 1 & 1 & 4-t\end{vmatrix}=(3-t)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3-t & 0\\ 0 & 0 & 3-t\end{vmatrix}=(3-t)^3.$$

Отже, характеристичний многочлен має лише єдиний корінь t=3. Беремо $\lambda_0=3$, далі складемо матрицю $B=A-\lambda_0E$.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Визначаємо показник нільпотентності k матриці B:

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Таким чином, k =2. Це означає, що максимальний порядок жорданової клітинки в жордановій нормальній формі дорівнює 2, причому параметром всіх клітинок є власне число $\lambda_0=3$. Далі знаходимо початкові базиси підпросторів $M_1, M_2=V$.

Базис M_1. Знаходимо фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь з основною матрицею системи B.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

$$x_1 = -x_2 - x_3;$$

x_1	x_2	x_3
–1	1	0
–1	0	1

Отже, початковим базисом підпростору M_1 є пара векторів $a_1 = (-1, 1, 0)$, $a_2 = (-1, 0, 1)$.

Базис $M_2 = V$. Оскільки k=2, то підпростір M_2 співпадає з усім простором V. За алгоритмом, початковий базис підпростору M_1 доповнюється до базису простору V. Оскільки $\dim M_1$= 2, а $\dim M_2$= 3, то доповнення складається лише з одного вектора. Достатньо взяти такий вектор, що є лінійно незалежним з a_1, a_2. Таким вектором може бути, наприклад, $a_3 = (1, 0, 0)$. Отже, початковим базисом підпростору M_2 є трійка векторів $a_1 = (-1, 1, 0)$, $a_2 = (-1, 0, 1)$, $a_3 = (1, 0, 0)$.

У цьому базисі вектори a_1, a_2 висоти 1, вектор a_3 висоти 2. Починаємо будувати жорданів базис. У початковому базисі підпростору $M_2 = V$ вектори a_1, a_2 утворюють базис M_1, вектор a_3 є доповнюючим до базису M_2. Для доповнюючого вектора a_3 будуємо першу серію. Оскільки висота вектора a_3 дорівнює 2, то серія складається з двох векторів. Першим вектором береться $a_3 = (1, 0, 0)$. Другим вектором береться вектор $\mathscr{B}(a_3)$

$$\mathscr{B}(a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, першу серію утворюють вектори $a_3 = (1, 0, 0)$, $\mathscr{B}(a_3) = (1, -2, 1)$.

В цій серії вектор a_3 висоти 2, вектор $\mathscr{B}\left(a_3\right)$ висоти 1, $\mathscr{B}\left(a_3\right) \in M_1$. Число векторів в серії менше розмірності простору, отже, серія не утворює базис простору, тому процес будування серій продовжується. За методом будуємо новий базис підпростору M_1. Оскільки підпростір $M_0 = \{\theta\}$ базису не має, новий базис M_1 складається лише з векторів висоти 1 в кожній побудованій серії та доповнюючих векторів. Отже, з єдиної побудованої серії до нового базису M_1 береться вектор $\mathscr{B}\left(a_3\right) = (1,-2\,,\,1\,)$. Оскільки $\dim M_1 =$ 2, цей вектор доповнюється до базису підпростору M_1 ще одним вектором, який можна вибрати, наприклад, з початкового базису M_1, виходячи з умови лінійної незалежності з вектором $\mathscr{B}\left(a_3\right)$. Наприклад, доповнюючим вектором беремо $a_1 = (-1\,,1\,,0\,)$. Отже, новий базис M_1 утворюють вектори $\mathscr{B}\left(a_3\right) = (1,-2\,,\,1\,)$, $a_1 = (-1\,,1\,,0\,)$. У цьому базисі доповнюючим вектором є $a_1 = (-1\,,1\,,0\,)$. За цим вектором будуємо другу серію.

Вектор a_1 висоти 1, а тому друга серія складається лише з одного вектора $a_1 = (-1\,,1\,,0\,)$.

Число векторів у двох побудованих серіях дорівнює 3=dim V . Тому серії разом утворюють базис простору. За методом, у кожній серії вектори представляємо у зворотньому порядку і одержуємо жорданів базис

$$b_1 = (1,-2\,,\,1\,),\, b_2 = (1\,,0\,,0\,),\, b_3 = (-1\,,1\,,0\,).$$

Для побудови жорданової матриці у цьому базисі враховуємо, що єдиним власним числом є $\lambda_0 = 3,$ а тому всі жорданові клітинки з параметром $\lambda_0 = 3.$ Кожній серії відповідає одна клітинка, порядок якої дорівнює довжині серії. Отже, вектори $b_1 = (1,-2\,,\,1\,)$, $b_2 = (1\,,0\,,0\,)$ утворюють серію довжини 2, якій відповідає жорданова клітинка порядку 2. Вектор $b_3 = (-1\,,1\,,0\,)$

утворює серію довжини 1, якій відповідає жорданова клітинка порядку 1. Порядок розташування клітинок на діагоналі матриці відповідає порядку розміщення серій в жордановому базисі. Отже, одержуємо жорданову матрицю

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.

Лінійний оператор у деякому базисі задається матрицею A. Знайти базис b_1, b_2, b_3, b_4, в якому оператор задається жордановою матрицею J та знайти матрицю J

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Шукаємо власні числа оператора. Для цього розглядаємо характеристичний многочлен.

$$\chi(t)=|A-tE|=\begin{vmatrix}1-t & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6-t & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1-t & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}1-t & -3 & 3\\ -2 & -6-t & 13\\ -1 & -4 & 8-t\end{vmatrix}=$$

$$=(1-t)\begin{vmatrix}1-t & -3 & 3\\ 0 & 2-t & -3+2t\\ -1 & -4 & 8-t\end{vmatrix}=(1-t)\begin{vmatrix}1-t & 3-3t & -6+6t\\ 0 & 2-t & -3+2t\\ -1 & -4 & 8-t\end{vmatrix}=$$

$$=(1-t)^2\begin{vmatrix}1 & 3 & -6\\ 0 & 2-t & -3+2t\\ -1 & -4 & 8-t\end{vmatrix}=(1-t)^2\begin{vmatrix}1 & 3 & -6\\ 0 & 2-t & -3+2t\\ 0 & -1 & 2-t\end{vmatrix}=$$

$$=(1-t)^2\begin{vmatrix}2-t & -3+2t\\ -1 & 2-t\end{vmatrix}=(1-t)^2\begin{vmatrix}1-t & -1+t\\ -1 & 2-t\end{vmatrix}=(1-t)^3\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2-t\end{vmatrix}=$$

$$=(1-t)^3(2-t-1)=(1-t)^4.$$

Характеристичний многочлен має лише єдиний корінь $t=1$. Отже, беремо $\lambda_0=1$, далі складаємо матрицю $B=A-\lambda_0 E$.

$$B=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -7 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 0 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

Визначаємо показник нільпотентності k матриці B

$$B^2=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -7 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 0 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -7 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 0 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9 & 0 & -18\\ 1 & 3 & 0 & -6\\ 3 & 9 & 0 & -18\\ 1 & 3 & 0 & -6\end{pmatrix};$$

$$B^3=\begin{pmatrix}3&9&0&-18\\1&3&0&-6\\3&9&0&-18\\1&3&0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&-3&0&3\\-1&-4&0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Отже, $k=3$. Таким чином, в заключній жордановій матриці всі жорданові клітинки з параметром $\lambda_0=1$, а максимальний порядок жорданової клітинки дорівнює 3. Знаходимо початкові базиси підпросторів $M_1, M_2, M_3=V$.

Базис M_1. Знаходимо фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з основною матрицею системи B.

$$-3x_2+0x_3+3x_4=0$$
$$-2x_1-7x_2+0x_3+13x_4=0$$
$$-3x_2+0x_3+3x_4=0$$
$$-x_1-4x_2+0x_3+7x_4=0$$

$$\begin{pmatrix}0&-3&0&3\\-2&-7&0&13\\0&-3&0&3\\-1&-4&0&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\-1&-4&0&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&-7\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};$$

$$x_1+4x_2+0x_3-7x_4=0$$
$$x_2+0x_3-x_4=0;$$

$$x_2=0x_3+x_4$$
$$x_1=-4x_2+0x_3+7x_4;$$

$$x_1=0x_3+3x_4$$
$$x_2=0x_3+x_4;$$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	1	0
3	1	0	1

Отже, початковий базис підпростору M_1 утворюють вектори $a_1=(0,0,1,0)$, $a_2=(3,1,0,1)$.

Базис M_2. За алгоритмом, початковий базис підпростору M_1 доповнюється до базису M_2. Для цього складається деякий базис підпростору M_2 та з цього базису беруться доповнюючі вектори. Базисом

M_2 можна взяти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з основною матрицею системи B^2.

$$3x_1+9x_2+0x_3-18x_4=0$$
$$x_1+3x_2+0x_3-6x_4=0$$
$$3x_1+9x_2+0x_3-18x_4=0$$
$$x_1+3x_2+0x_3-6x_4=0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_1+3x_2+0x_3-6x_4=0;$$

$$x_1=-3x_2+0x_3+6x_4;$$

x_1	x_2	x_3	x_4
–3	1	0	0
0	0	1	0
6	0	0	1

За алгоритмом, початковий базис підпростору M_1 доповнюється до початкового базису M_2. Зрозуміло, що $\dim M_1=2$, $\dim M_2=3$, тобто береться лише один доповнюючий вектор. Цей вектор можна взяти з побудованого базису підпростору M_2, виходячи з умови лінійної незалежності з векторами a_1,a_2. Таким вектором можна взяти $a_3=(-3,1,0,0)$. Отже, початковий базис підпростору M_2 утворюють вектори $a_1=(0,0,1,0)$, $a_2=(3,1,0,1)$, $a_3=(-3,1,0,0)$.

Базис $M_3=V$. Оскільки $k=3$, підпростір M_3 співпадає з усім простором V. Тому, за алгоритмом, початковий базис підпростору M_2 доповнюється до базису простору V. Оскільки $\dim M_2=3$, береться лише один доповнюючий вектор, лінійно незалежний з векторами a_1,a_2,a_3. Таким вектором можна взяти $a_4=(1,0,0,0)$. Отже, базис $M_3=V$ утворюють вектори $a_1=(0,0,1,0)$, $a_2=(3,1,0,1)$, $a_3=(-3,1,0,0)$, $a_4=(1,0,0,0)$. В цій системі вектори a_1,a_2 висоти 1, вектор a_3 висоти 2, вектор a_4 висоти 3.

Доповнюючим вектором до останнього базису є вектор $a_4=(1,0,0,0)$ висоти 3. Отже, за цим вектором будуємо першу серію, яка складається з 3-х векторів. Першим вектором береться вектор $a_4 = (1,0,0,0)$. Другим вектором береться вектор $\mathscr{B}(a_4)$:

$$\mathscr{B}(a_4)=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Третім вектором береться вектор $\mathscr{B}^2(a_4)$:

$$\mathscr{B}^2(a_4)=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, першу серію утворюють вектори

$$a_4 = (1,0,0,0),\ \mathscr{B}(a_4) = (0,-2,0,-1),\ \mathscr{B}^2(a_4) = (3,1,3,1).$$

В цій серії вектор a_4 висоти 3, вектор $\mathscr{B}(a_4)$ висоти 2, а тому $\mathscr{B}(a_4) \in M_2$, вектор $\mathscr{B}^2(a_4)$ висоти 1, а тому $\mathscr{B}^2(a_4) \in M_1$. Число векторів в серії менше розмірності простору, отже серія не утворює базису простору, тому процес будування серій продовжується.

Будується новий базис підпростору M_2. За методом, до цього базису включається початковий базис підпростору M_1, тобто вектори $a_1 = (0,0,1,0)$, $a_2 = (3,1,0,1)$. Далі, до нового базису M_2 включаються вектори висоти 2 з усіх побудованих серій. У даному випадку існує лише одна серія, в якій вектором висоти 2 є $\mathscr{B}(a_4) = (0,-2,0,-1)$. Але $\dim M_2 = 3$. Ми одержали в новому базисі підпростору M_2 3 вектори $a_1 = (0,0,1,0)$, $a_2 = (3,1,0,1)$, $\mathscr{B}(a_4) = (0,-2,0,-1)$. Доповнюючих векторів немає, а тому немає нових серій. Число векторів в побудованих серіях дорівнює 3, що менше розмірності простору, отже будуємо новий базис підпростору M_1. Оскільки підпростір $M_0 = \{\theta\}$ базису не має, до нового базису M_2 включаємо вектори висоти 1, з усіх побудованих серій. Існує лише одна серія, в якій вектором висоти 1 є вектор $\mathscr{B}^2(a_4) = = (3,1,3,1)$. Оскільки $\dim M_1 = 2$, цей вектор доповнюється до базису підпростору M_1 ще одним вектором. Доповнюючий вектор можна взяти з початкового базису підпростору M_1, виходячи з умови лінійної незалежності з вектором $\mathscr{B}^2(a_4) = (3,1,3,1)$. Беремо, наприклад, вектор $a_1 = (0,0,1,0)$. Новий базис M_1 утворюють вектори: $\mathscr{B}^2(a_4) = (3,1,3,1)$, $a_1 = (0,0,1,0)$. У цьому базисі доповнюючим вектором є $a_1 = (0,0,1,0)$. За цим вектором будуємо другу серію. Вектор a_1 висоти 1, а тому серія складається лише з одного вектора.

Другу серію утворює вектор $a_1 = (0,0,1,0)$.

Число векторів у двох побудованих серіях дорівнює $4 = \dim V$. Тому серії утворюють базис простору. У кожній серії переставляємо вектори у зворотньому порядку і одержуємо жорданів базис

$$b_1 = (3,1,3,1),\ b_2 = (0,-2,0,-1),\ b_3 = (1,0,0,0),\ b_4 = (0,0,1,0).$$

Для побудови жорданової матриці у цьому базисі враховуємо, що єдиним власним числом є $\lambda_0 = 1$. Тому всі жорданові клітинки з параметром $\lambda_0 = 1$. Кожній серії відповідає одна клітинка, порядок якої співпадає з довжиною серії. Вектори $b_1 = (3,1,3,1)$, $b_2 = (0,-2,0,-1)$, $b_3 = (1,0,0,0)$ утворюють серію довжини 3, якій відповідає клітинка порядку 3. Вектор $b_4 = (0,0,1,0)$ утворює серію довжини 1, якій відповідає клітинка порядку 1. Розташування клітинок на діагоналі жорданової матриці відповідає порядку розміщення серій в жордановому базисі. Отже, одержуємо жорданову матрицю

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.8. Алгоритм знаходження жорданового базису (випадок існування різних власних чисел).

Нехай $\mathscr{A}$ – лінійний оператор на векторному просторі V над полем F, $\dim V = n$, у початковому базисі простору оператору $\mathscr{A}$ відповідає матриця $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$. Ставиться задача знайти жорданів базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ оператора $\mathscr{A}$ та жорданову матрицю J оператора в цьому базисі. Для визначеності вважаємо, що всі вектори задаються координатами в початковому базисі.

1 крок. Складається характеристичний многочлен оператора $\chi(t) = |A - tE|$ і знаходяться всі корені цього многочлена. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in F$ – це всі попарно різні корені, причому $s > 1$. Також нехай $m_1, m_2, \ldots, m_s$ – відповідні кратності коренів. Тоді $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$ та $\chi(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{m_1} (t-\lambda_2)^{m_2} \ldots (t-\lambda_s)^{m_s}$. Це означає, що в заключній жордановій матриці J існують клітинки лише з параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, кожному власному числу відповідає принаймні одна клітинка, причому сума порядків усіх клітинок, що відповідають даному власному числу λ_j $(1 \le j \le s)$ дорівнює показнику кратності m_j, а тому в жордановому базисі власному числу λ_j відповідає в точності m_j векторів.

2 крок. Позначимо многочлени $f_1(t)=(-1)^{m_1}(t-\lambda_1)^{m_1}$, $f_2(t)=(-1)^{m_2}(t-\lambda_2)^{m_2},\dots,\ f_s(t)=(-1)^{m_s}(t-\lambda_s)^{m_s}$. Оскільки всі корені λ_1, $\lambda_2,\dots,\lambda_s$ є попарно різними, то многочлени є попарно взаємно простими і за теоремою про розщеплення лінійного оператора простір V розпадається в пряму суму підпросторів $V=L_1\oplus L_2\oplus\ldots\oplus L_s$, де L_1 $=\operatorname{Ker} f_1(\mathscr{A})$, $L_2=\operatorname{Ker} f_2(\mathscr{A})$,..., $L_s=\operatorname{Ker} f_s(\mathscr{A})$. Кожен з підпросторів L_1, L_2, …, L_s є інваріантним відносно оператора A, причому для кожного номера j $(1\le j\le s)$ звуження оператора $\mathscr{A}$ на підпростір L_j має лише єдине власне число λ_j. Тому будується жорданів базис $Б_j$ підпростору L_j і далі жорданів базис простору $Б=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ береться як об'єднання базисів підпросторів.

3 крок. Будується жорданів базис $Б_j$ підпростору L_j $(1\le j\le s)$. Аналогічно тому, як це виконувалося при існуванні єдиного власного числа, береться послідовність підпросторів $\{\theta\}=M_0\subset M_1\subset\ \ldots\subset M_{k_j-1}\subset M_{k_j}$ та будуються початкові базиси цих підпросторів. Процес завершується, коли $\dim M_{k_j-1}<m_j$, $\dim M_{k_j}=m_j$. В початковому базисі підпростору M_{k_j} є принаймні один вектор висоти k_j. Далі будуються серії, в кожній серії вектори розташовуються в зворотньому порядку і одержується жорданів базис $Б_j$ підпростору L_j.

4 крок. Оскільки $V=L_1\oplus L_2\oplus\ldots\oplus L_s$, то за теоремою про базис прямої суми система $Б=Б_1\cup Б_2\cup\ldots\cup Б_s$ утворює базис простору. Кожен підпростір є інваріантним відносно оператора $\mathscr{A}$, а тому у базисі $Б$ оператору $\mathscr{A}$ відповідає матриця J клітинного вигляду

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & 0\\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s\end{pmatrix}.$$

Кожна клітинка J_k є матрицею звуження оператора $\mathscr{A}$ на інваріантний підпростір L_k в жордановом базисі $Б_k$. Отже, кожна клітинка J_k є жордановою матрицею, а тому вся матриця J є жордановою. Отже, базис $Б=Б_1\cup Б_2\cup\ldots\cup Б_s$ є жордановим базисом простору оператора $\mathscr{A}$, а J є відповідною жордановою матрицею.

Задача.

Лінійний оператор у початковому базисі задається матрицею A. Знайти базис b_1,b_2,b_3,b_4, в якому оператор задається жордановою матрицею J та знайти матрицю J

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

На першому кроці шукаються власні числа матриці A. Для цього складається характеристичний многочлен оператора

$$\chi(t) = |A - tE| = \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-t & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1-t & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-t & 3-t & 0 & 0 \\ -1 & 2-t & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1-t & 1 \\ 0 & 0 & 3-t & 3-t \end{vmatrix} =$$

$$= (3-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-t & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-t & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-t)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-t)^3 \begin{vmatrix} -1-t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-t)^3(-1-t-1) =$$

$$= (3-t)^3(-2-t).$$

Отже, власне число $t_1 = 3$ є коренем характеристичного многочлена кратності 3, а тому числу $t_1 = 3$ в жордановому базисі відповідають 3 вектори та для підпростору $L_1 = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - 3\mathscr{E})^3$ $\dim L_1 = 3$. Власне число $t_2 = -2$ є коренем кратності 1, а тому числу $t_2 = -2$ в жордановому базисі відповідає один вектор та для підпростору $L_2 = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} + 2\mathscr{E})$ $\dim L_2 = 1$.

Знаходиться жорданів базис підпростору L_1. Складається матриця $B = A - 3E$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо початковий базис M_1. Цей базис утворює фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь з основною матрицею системи B:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\ -6x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -2x_3 - x_4 \end{aligned};$$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	–2	1	0
0	–1	0	1

Отже, початковий базис підпростору M_1 утворюють вектори з координатами $(1,-2,1,0)$, $(0,-1,0,1)$. Тому $\dim M_1 = 2$, отже, $\dim M_1 < 3 = \dim L_1$. Це означає, що далі будується початковий базис M_2 доповненням до базису M_1 ще одного вектора.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 25 & 0 \\ 25 & 0 & -25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Береться система лінійних однорідних рівнянь з основною матрицею B^2 :

$$\begin{aligned} 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4&=0\\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4&=0\\ -25x_1+0x_2+25x_3+0x_4&=0\\ 25x_1+0x_2-25x_3+0x_4&=0 \end{aligned};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -25 & 0 & 25 & 0\\ 25 & 0 & -25 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -25 & 0 & 25 & 0\\ 25 & 0 & -25 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 25 & 0 & -25 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 25 & 0 & -25 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_1+0x_2-x_3+0x_4=0;$$

$$x_1=0x_2+x_3+0x_4;$$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	0	0
1	0	1	0
0	0	0	1

Базис M_2 утворюють три вектори $(0,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$. Отже, $\dim M_2 = 3 = \dim L_1$. Початковий базис M_2 одержується як доповнення початкового базису M_1. Доповнюючим вектором можна взяти будь-який вектор з одержаного базису M_2, такий, що лінійно незалежний з векторами початкового базису M_1, наприклад, $(0,1,0,0)$. Отже, початковий базис M_2 утворюють вектори $(1,-2,1,0)$, $(0,-1,0,1)$, $(0,1,0,0)$. В цій системі векторів перші два вектори висоти 1, третій – висоти 2. Для цього вектора будується перша серія з двох векторів. Першим є $(0,1,0,0)$. Другий знаходиться як

$$B\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ 6 & 1 & -4 & 1\\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Отже, першу серію складають вектори $(0,1,0,0)$, $(1,-1,1,-1)$. Але $\dim L_1 = 3$, тому вектори серії не утворюють базис L_1. Отже, будується новий базис M_1. З серії береться вектор висоти 1, в даному випадку це $(1,-1,1,-1)$.

Але $\dim M_1 = 2$, тому з початкового базису M_1 береться один доповнюючий вектор, наприклад, (0,–1,0,1). Для цього вектора будується друга серія довжини 1, яку утворює лише вектор $(0,-1,0,1)$. В двох серіях 3 вектори, $\dim L_1 = 3$, тому в серіях переставляємо вектори у зворотньому порядку і одержуємо жорданів базис підпростору L_1:

$$b_1 = (1,-1,1,-1)\,, b_2 = (0,1,0,0)\,, b_3 = (0,-1,0,1)\,.$$

Далі знаходиться жорданів базис підпростору L_2 = Ker ($\mathscr{A}$ +2 $\mathscr{E}$). Оскільки $\dim L_2 = 1$, то в жордановому базисі простору власному числу $t_2 = -2$ відповідає лише один вектор, а тому у відповідній жордановій матриці одна клітинка порядку 1. Отже, в жордановій матриці цьому вектору відповідає стовпчик, де єдиний ненульовий елемент знаходиться на головній діагоналі і дорівнює –2. Тому цей вектор є власним вектором оператора, що відповідає власному числу $t_2 = -2$. Отже, цим вектором можна взяти будь-який власний вектор. Шукаються власні вектори, які відповідають власному числу $t_2 = -2$. Знаходиться фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь з основною матрицею

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -6x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0 \quad ;$$
$$x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0 \quad ;$$
$$x_3 = -x_4$$

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	–1	1

Четвертим базисним вектором можна взяти $b_4 = (0,0,-1,1)$. Отже, жорданів базис простору утворюють вектори $b_1 = (1,-1,1,-1)$, $b_2 = (0,1,0,0)$, $b_3 = (0,-1,0,1)$, $b_4 = (0,0,-1,1)$. Складемо матрицю J оператора $\mathscr{A}$ в цьому базисі. Враховуємо, що вектори b_1, b_2, b_3 відповідають власному числу $t_1 = 3$, вектор b_4 – власному числу $t_2 = -2$. При цьому вектори b_1, b_2 утворюють серію. Кожен з векторів b_3, b_4 утворює окрему серію. Одержується така матриця

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.9. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

1. Звести λ-матриці до канонічного вигляду методом елементарних перетворень

1) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 \\ 3\lambda - 1 & 3\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \grave{}0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 + \lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$.

2. Звести λ-матриці до канонічного вигляду методом дільників мінорів

1) $\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$;

2)
$$\begin{pmatrix} (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) \end{pmatrix}$$
;

3) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

3. Скласти жорданову нормальну форму матриці A, якщо задаються інваріантні многочлени $e_i(\lambda)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ характеристичної матриці $A - \lambda E$

   1) $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = 1$, $e_3(\lambda) = e_4(\lambda) = \lambda - 1$, $e_5(\lambda) = e_6(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)$;

   2) $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = e_3(\lambda) = 1$, $e_4(\lambda) = \lambda + 1$, $e_5(\lambda) = (\lambda+1)^2$,
   $e_6(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-5)$.

4. Скласти жорданову нормальну форму заданих матриць

   1) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

   3) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;

   5) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

   7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ порядок матриці дорівнює n;

8) $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$, порядок матриці дорівнює *n*.

5. Лінійний оператор у деякому базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ задається матрицею *A*. Знайти базис $b_1, b_2, \dots, b_n$, в якому оператор задається жордановою матрицею *J* та знайти матрицю *J*.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 8) $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ.

Означення. Векторний простір V над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається евклідовим, якщо для кожної пари векторів $x, y \in V$, взятих у певному порядку ставиться у відповідність дійсне число (x, y) і при цьому виконуються наступні умови:

1) $\forall x, y \in V \ (x, y) = (y, x)$;
2) $\forall x, y, z \in V \ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $\forall x, y \in V \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4) $\forall x \in V \ (x, x) > 0$ при $x \neq \theta$, $(x, x) = 0$ при $x = \theta$.

Функція двох аргументів (x, y), яка вводиться на евклідові просторі називається скалярним добутком. На даному векторному просторі V над полем $\mathbb{R}$ скалярний добуток можна задати за різними правилами. Якщо евклідові простори співпадають як векторні простори, але скалярні добутки на них задаються по-різному, то такі простори вважаються різними.

Найпростіші наслідки аксіом евклідова простору.

Вважаємо, що V- евклідів простір.

1) $\forall x, y, z \in V \ (x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;
2) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} \ (x, \alpha y) = \alpha(x, y)$;
3) $\forall x \in V, \ (x, \theta) = 0$.

Дійсно, $\theta = 0 \cdot x \Rightarrow (x, \theta) = (x, 0 \cdot x) = 0 \cdot (x, x) = 0$.

4) Якщо для даного фіксованого $x \in V \ (x, y) = 0 \ \forall y \in V$, то $x = \theta$.

Дійсно, якщо $(x, y) = 0 \ \forall y \in V$, беремо $x = y$. Тоді $(x, x) = 0 \Rightarrow x = \theta$.

5) Якщо $x_1, x_2 \in V$ і $\forall y \in V \ (x_1, y) = (x_2, y)$, то $x_1 = x_2$.

Дійсно, якщо $\forall y \in V \ (x_1, y) = (x_2, y)$, то $(x_1, y) - (x_2, y) = (x_1 - x_2, y) = 0, x_1 - x_2 = \theta \Rightarrow x_1 = x_2$.

Приклади евклідових просторів

1.Нехай $\mathbb{R}^n$ – простір всіх n-вимірних векторів з дійсними координатами. Введемо на цьому просторі скалярний добуток: для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ покладемо $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Неважко перевірити, що аксіоми евклідова простору виконуються. Тобто, $\mathbb{R}^n$ перетворюється на евклідів простір. Будь-який скінченновимірний векторний простір над полем $\mathbb{R}$ можна перетворити на евклідів простір. Зафіксуємо в просторі V деякий базис $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тоді кожен вектор в V однозначно визначається своїми координатами в цьому базисі. Для векторів $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$, $y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$ покладемо $(x, y) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$. Простір V стає евклідовим простором. Оскільки на даному просторі можна зафіксувати різні базиси, то звідси випливає, що скалярний добуток можна задати по-різному і одержати різні евклідові простори.

2. $C_{[a,b]}$ – простір всіх неперервних на $[a, b]$ функцій. Введемо на цьому просторі скалярний добуток: для $f(t), g(t) \in C_{[a,b]}$ $(f, g) - \int_a^b f(t) g(t)\, dt$. Аксіоми скалярного добутку виконуються, тобто простір $C_{[a,b]}$ перетворюється на евклідів простір.

Поняття довжини вектора.

В евклідові просторі можна визначити довжину вектора та кут між ненульовими векторами. Припускаємо, що V– евклідів простір.

Означення. Довжиною вектора x евклідова простору V називається число $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Коректність цього означення випливає з 4-ої аксіоми евклідова простору. При цьому $|x| = 0$ при $x = \theta$, $|x| > 0$ при $x \neq \theta$.

Нерівність Коші-Буняківського.

Нерівність Коші-Буняківського. Для будь-яких $x, y \in V$ (V – евклідів простір) виконується $(x,y)^2 \leq |x|^2|y|^2$. Причому рівність виконується тоді і тільки тоді, коли вектори x, y лінійно залежні, тобто кратні.

Доведення. Якщо хоча б один з векторів x, y співпадає з θ, то нерівність виконується, причому як рівність. Припустимо, що $x \neq \theta,\ y \neq \theta$. Нехай t – незалежна змінна з дійсними значеннями. Тоді за 4-ою аксіомою евклідового простору $\forall t \in \mathbb{R}$ $(x - ty, x - ty) \geq 0$. Це означає, що $(x,x) - 2t(x,y) + t^2(y,y) \geq 0$; одержуємо квадратний тричлен від змінної t, причому $(y,y) > 0$. Якщо для дискримінанта D тричлена виконується $D > 0$, то тричлен має пару різних дійсних коренів, а тому при деяких значеннях t він приймає від'ємні значення, чого бути не може. А тому $D \leq 0$, або $4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0$, $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y) \Rightarrow (x,y)^2 \leq |x|^2|y|^2$. Рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $D = 0$. Тобто тричлен має єдиний корінь $t = t_0$. А тому $(x - t_0 y, x - t_0 y) = 0$. Отже, $x - t_0 y = \theta$, $x = t_0 y$, і вектори x, y лінійно залежні. Навпаки, якщо $x, y -$ лінійно залежні, то вони кратні. Тому при деякому $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = \alpha y \Rightarrow (x,y)^2 = (\alpha y, y)^2 = \alpha^2 (y,y)^2 = \alpha^2|y|^4 = |y|^2|\alpha y|^2 = |x|^2|y|^2$.

Наслідок 1 (Нерівність Коші). Для будь-яких наборів дійсних чисел $(x_1, x_2, \dots, x_k), (y_1, y_2, \dots, y_k)$ виконується $(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ky_k)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2)$. Для доведення цього достатньо записати нерівність Коші-Буняківського в просторі $\mathbb{R}^k$ k-вимірних векторів.

Наслідок 2 (Нерівність Буняківського). Для всіх дійсних функцій $f(t), g(t)$ на сегменті $[a,b]$ виконується $\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 = \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b g^2(t)\,dt$. Для доведення цього потрібно скористатись нерівністю Коші-Буняківського в просторі $C_{[a,b]}$.

Поняття кута між векторами.

Згадаємо означення скалярного добутку з аналітичної геометрії: для пари ненульових векторів x, y $(x,y) = |x||y|\cos\varphi$, де $\varphi -$ кут між векторами x, y. Аналогічно можна ввести поняття кута між ненульовими векторами в евклідові просторі V.

Означення. Кутом між ненульовими векторами $a, b \in V$ називається кут φ, такий, що $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a||b|}$.

З нерівності Коші-Буняківського випливає коректність цього означення. Для ненульових векторів a, b виконується $(a,b)^2 \leq |a|^2|b|^2$ або $|(a,b)| \leq |a||b|$, $-|a||b| \leq (a,b) \leq |a||b| \Rightarrow -1 \leq \frac{(a,b)}{|a||b|} \leq 1$, $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$.

Нерівність трикутника.

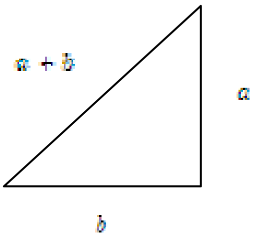
Нерівність трикутника. Для кожної пари векторів x, y з евклідова простору V виконується $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Доведення. З нерівності Коші-Буняківського випливає: $(x+y)^2 - (x+y, x+y) - (x,x) + 2(x,y) + (y,y) - |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$. Оскільки всі величини невід'ємні, то $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Ортогональність.

Означення. Вектори x, y в евклідові просторі називаються ортогональними, якщо $(x,y) = 0$. Ортогональність векторів позначається так: $x \perp y$.

Як відомо, для ортогональних векторів на площині виконується теорема Піфагора: $\forall\ a, b\ \ |a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$.



Доведемо аналогічну теорему Піфагора для евклідова простору *V*. Припустимо, що $a, b \in V,\ a \perp b$. Тоді $|a+b|^2 = (a+b, a+b) = (a,a) + 2(a,b) + (b,b) = (a,a) + \ +(b,b) = |a|^2 + |b|^2$. Тобто , $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$. *Означення.* Система векторів в евклідові просторі називається ортогональною, якщо вектори в цій системі попарно ортогональні.

Теорема. В евклідові просторі будь-яка ортогональна система ненульових векторів лінійно незалежна.

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ є такою системою векторів, що $\forall$ $= \overline{1,k},\ a_i \neq \theta,\ \ a_i \perp a_j$ при $i \neq j$. Беремо лінійну комбінацію $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ \dots + \alpha_i a_i + \ \dots + \alpha_k a_k = \theta$. Покажемо, що $\alpha_i = 0$ при даному фіксованому i:

$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ \dots + \alpha_i a_i + \ \dots + \alpha_k a_k, a_i) = (\theta, a_i) = 0$; також $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ \dots + \alpha_i a_i + \dots + \alpha_k a_k, a_i) = \quad \alpha_1(a_1, a_i) + \alpha_2(a_2, a_i) + \dots + \alpha_i(a_i, a_i) + \dots + \alpha_k(a_k, a_i) = \ \alpha_i(a_i, a_i)$.

Таким чином $\alpha_i(a_i, a_i) = 0$; $(a_i, a_i) \neq 0 \ \Rightarrow\ a_i \neq \theta$, тому $\alpha_i = 0$, тобто лінійна комбінація тривіальна. Вектори лінійно незалежні.

В теоремі показано, що будь-яка ортогональна система ненульових векторів лінійно незалежна. Довільна незалежна система векторів в евклідові просторі ортогональною не буде. Але існує метод, який дозволяє за допомогою даної лінійної незалежної системи з k векторів в евклідові просторі скласти ортогональну систему з k ненульових векторів. Цей метод називається процесом ортогоналізації.

Процес ортогоналізації.

В евклідові просторі *V* задається лінійно незалежна система векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$. Процес ортогоналізації дає можливість, користуючись цими векторами, одержати систему з k ненульових попарно ортогональних векторів $b_1, b_2, \dots, b_k$.

Беремо $b_1 = a_1$, наступний вектор b_2 шукаємо у вигляді: $b_2 = a_2 - \alpha_{21} b_1$, де коефіцієнт $\alpha_{21} \in \mathbb{R}$ підбираємо з умови ортогональності $(b_2, b_1) = 0$, тобто $(a_2 - \alpha_{21}\ b_1, b_1) = 0 \Rightarrow (a_2, b_1) - \alpha_{21}\ (b_1, b_1) = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = (a_2, b_1)/(b_1, b_1)$.

Покажемо, що $b_2 \neq \theta$. Припустимо супротивне, що $b_2 = \theta$, тобто $a_2 - \alpha_{21}\ b_1 = \theta \Rightarrow a_2 = \alpha_{21}\ b_1 = \alpha_{21} a_1$, що суперечить лінійній незалежності початкової системи векторів, отже $b_2 \neq \theta$.

Припустимо тепер, що за допомогою векторів $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ вже побудовано систему лінійно незалежних попарно ортогональних векторів $b_1, b_2, \dots, b_{i-1}$ при *i<n*. Черговий вектор шукаємо у вигляді $b_i = a_i - \alpha_{i1}\ b_1 - \alpha_{i2}\ b_2 - \dots - \alpha_{i,i-1} b_{i-1}$. Коефіцієнти підбираємо з умови ортогональності. Отже,

візьмемо
$(b_i, b_1) = 0$, $(a_i - \alpha_{i1} b_1 - \alpha_{i2} b_2 - \dots - \alpha_{i,i-1} b_{i-1}, b_1) = 0 \Rightarrow (a_i, b_1) - \alpha_{i1}(b_1, b_1) - \alpha_{i2}(b_2, b_1) - \dots - \alpha_{i,i-1}(b_{i-1}, b_1) = 0 \Rightarrow (a_i, b_1) - \alpha_{i1}(b_1, b_1) = 0 \Rightarrow \alpha_{i1} = (a_i, b_1)/(b_1, b_1)$.

Аналогічно, з умови, що ($(b_i, b_2) = 0$ випливає, що $\alpha_{i2} = (a_i, b_2)/(b_2, b_2), \dots$, з умови, що $(b_{i-1}, b_1) = 0$, що $\alpha_{i,i-1} = (a_i, b_{i-1})/(b_{i-1}, b_{i-1})$.

Покажемо тепер, що $b_i \neq \theta$. Припустимо супротивне, що $b_i = \theta$, тобто $a_i - \alpha_{i1} b_1 - \alpha_{i2} b_2 - \dots - \alpha_{i,i-1} b_{i-1} = \theta \to a_i = \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \dots + \alpha_{i,i-1} b_{i-1}$. За правилами побудови, вектори $b_1, b_2, \dots, b_{i-1}$ лінійно виражаються через вектори $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$. Тоді вектор a_i лінійно виражається через $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$, що суперечить лінійній незалежністі початкової системи векторів, а тому $b_i \neq \theta$. Таким чином, через k кроків одержимо систему ненульових попарно ортогональних векторів $b_1, b_2, \dots, b_k$, причому $b_1 = a_1$, $b_i = a_i - \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} b_j$ при $i < n$, де $\alpha_{ij} = (a_i, b_j)/(b_j, b_j)$.

Зауваження. Припустимо, що ортогональна система векторів $b_1, b_2, \dots, b_k$ одержується ортогоналізацією лінійно незалежної системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$, тоді $\forall i = \overline{1, k}$ для лінійних оболонок виконується $\langle b_1, b_2, \dots, b_i \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_i \rangle$.

Дійсно, беремо $L = \langle a_1, a_2, \dots, a_i \rangle$. За правилами процесу ортогоналізації, вектори $b_1, b_2, \dots, b_i$ лінійно виражаються через $a_1, a_2, \dots, a_i$, тому $b_1, b_2, \dots, b_i \in L$, $\langle b_1, b_2, \dots, b_i \rangle \leq L$. Вектори $a_1, a_2, \dots, a_i$ лінійно незалежні, а тому утворюють базис L, тобто $dim L = i$; вектори $b_1, b_2, \dots, b_i$ також лінійно незалежні, як ненульові попарно ортогональні, число їх дорівнює $dim L$, а тому вони також утворюють базис L. Всі вектори підпростору L лінійно виражаються через $b_1, b_2, \dots, b_i$, а тому $L = \langle a_1, a_2, \dots, a_i \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_i \rangle$.

Теорема. В скінченновимірному евклідові просторі існує ортогональний базис.

Доведення. Нехай V – скінченновимірний евклідів простір, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – його базис. Проведемо ортогоналізацію системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$. Одержується ортогональна система ненульових векторів $b_1, b_2, \dots, b_n$. Ці вектори лінійно незалежні як ненульові попарно ортогональні, число їх дорівнює розмірністі простору, а тому вони утворюють ортогональний базис простору.

Поняття ортонормованої системи векторів.

Означення. Система векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$ в евклідові просторі V називається ортонормованою, якщо вона ортогональна і довжина кожного вектора системи дорівнює 1.

Таким чином, для векторів ортонормованої системи виконується $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$.

Теорема. В скінченновимірному евклідові просторі існує ортонормований базис.

Доведення. Нехай V – скінченновимірний евклідів простір, $b_1, b_2, \dots, b_n$ – його ортогональний базис. Покладемо $e_1 = \frac{1}{|b_1|} b_1, e_2 = \frac{1}{|b_2|} b_2, \dots, e_n = \frac{1}{|b_n|} b_n$ і покажемо, що вектори $e_1, e_2, \dots, e_n$ утворюють ортонормований базис простору.

1. Беремо $(e_i, e_i) = \left(\frac{1}{|b_i|} b_i, \frac{1}{|b_i|} b_i\right) = \frac{1}{|b_i||b_i|}(b_i, b_i) = \frac{1}{|b_i||b_i|}|b_i|^2 = 1$ при $i = \overline{1, n}$.

2. Беремо $(e_i, e_j) = \left(\frac{1}{|b_i|} b_i, \frac{1}{|b_j|} b_j\right) = \frac{1}{|b_i||b_j|}(b_i, b_j) = 0$ при $i \neq j$. Таким чином, система векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$ ортонормована. Вона лінійно незалежна, число векторів в ній дорівнює розмірністі простору, тобто вона утворює ортонормований базис простору.

Наслідок. В скінченновимірному евклідові просторі будь-яку ортонормовану систему векторів можна доповнити до ортонормованого базису простору.

Доведення. Припустимо, задана ортонормована система векторів $e_1, e_2, \dots, e_k$. Ця система лінійно незалежна, а тому її можна доповнити до базису простору векторами $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$. Проведемо ортогоналізацію базису $e_1, e_2, \dots, e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$. Оскільки вектори $e_1, e_2, \dots, e_k$ ортогональні, то при ортогоналізації вони не змінюються. Таким чином, одержали ортогональний базис простору $e_1, e_2, \dots, e_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n$. В цьому базисі кожен вектор ділимо на його довжину. Оскільки вектори $e_1, e_2, \dots, e_k$ мають довжину, що дорівнює 1, то вони при цьому не змінюються. Таким чином, одержимо ортонормований базис $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$.

Обчислення скалярного добутку в ортонормованому базисі.

Нехай в евклідові просторі V задається ортонормований базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, вектори $x, y \in V$ задаються координатами в цьому базисі: $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Знайдемо скалярний добуток (x, y). Оскільки $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$, то

$$(x, y) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) =$$

$$= \alpha_1\beta_1(e_1, e_1) + \alpha_1\beta_2(e_1, e_2) + \dots + \alpha_1\beta_n(e_1, e_n) + \dots + \alpha_n\beta_1(e_n, e_1) + \alpha_n\beta_2(e_n, e_2) + \dots + \alpha_n \cdot$$

$$\cdot \beta_n(e_n, e_n) = \alpha_1\beta_1(e_1, e_1) + \alpha_2\beta_2(e_2, e_2) + \dots + \alpha_n\beta_n(e_n, e_n) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n.$$

Припустимо тепер, що зафіксований ортонормований базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в скінченновимірному просторі V, $x \in V$. Треба знайти координати вектора x в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$. Припустимо, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. Тоді $(x, e_i) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, e_i) = \alpha_i(e_i, e_i) = \alpha_i$. Таким чином, $\forall i = \overline{1, n}$ $\alpha_i = (x, e_i)$.

Поняття ортогонального доповнення простору.

Означення. Ортогональним доповненням підпростору M евклідова простору V називається множина $M^{\perp} = \{x \in V \mid (x, y) = 0, \forall y \in M\} = \{x \in V \mid x \perp y, \forall y \in M\}$. Таким чином, ортогональне доповнення підпростору M – це множина всіх векторів простору V, ортогональних до всіх векторів підпростору M.

<u>Властивості ортогонального доповнення.</u>

1) Ортогональне доповнення підпростору M є підпростором.

Доведення. Беремо $a, b \in M^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Якщо x – довільний вектор з M, то $(\alpha a + \beta b, x) = \alpha(a, x) + \beta(b, x) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha a + \beta b \in M^{\perp}$.

2) Припустмо, що $a_1, a_2, \dots, a_k$ – базис підпростору M. Вектор $b \in V$ належить ортогональному доповненню $M^{\perp}$ тоді і тільки тоді, коли виконується $b \perp a_i$, $\forall i = \overline{1, k}$.

Доведення. Якщо $b \in M^{\perp}$ то цей вектор ортогональний до всіх векторів з M, а тому і до базису вектора. Припустимо, що виконується умова $b \perp a_i$, $\forall i = \overline{1, k}$. Беремо $x \in M$. Цей вектор можна розкласти в лінійну комбінацію базису M: $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$, тоді $(x, b) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k, b) = \alpha_1(a_1, b) + \alpha_2(a_2, b) + \dots + \alpha_k(a_k, b) = 0$. Отже, маємо: $b \perp x$, $\forall x \in M$, тобто $b \in M^{\perp}$.

3) Для будь-якого підпростору M виконується $M \cap M^{\perp} = \{\theta\}$.

Доведення. Беремо $x \in M \cap M^{\perp}$, тоді $(x,x) = 0$, а тому за 4-ю аксіомою евклідова простору $x = \theta$.

4) Нехай M – підпростір скінченновимірного евклідова простору V, тоді $V = M \oplus M^{\perp}$.

Доведення. Як вже було доведено, $M \cap M^{\perp} = \{\theta\}$. Тому залишилося показати, що $V = M + M^{\perp}$.

Беремо деякий ортогональний базис $a_1, a_2, \ldots, a_k$ підпростору M і доповнюємо його векторами $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ до ортогонального базису простору V. Покажемо, що вектори $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ утворюють базис підпростору $M^{\perp}$. Ці вектори лінійно незалежні як частини базису простору; оскільки ці вектори $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ ортогональні до векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то за 2-ю властивістю ортогонального доповнення, $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n \in M^{\perp}$. Вектор $x \in M^{\perp}$ лінійно виражається через базис простору, тобто $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \alpha_{k+2} a_{k+2} + \ldots + \alpha_n a_n$. Покажемо, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Оскільки $x \in M^{\perp}$, $a_1 \in M$, то $(x, a_1) = 0$. Тобто $(x, a_1) = (\alpha_1 a_1 + + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \alpha_{k+2} a_{k+2} + \ldots + \alpha_n a_n, a_1) = \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_1) + \ldots +$

$+\alpha_k (a_k, a_1) + \alpha_{k+1} (a_{k+1}, a_1) + \alpha_{k+2} (a_{k+2}, a_1) + \ldots + \alpha_n (a_n, a_1) = \alpha_1 (a_1, a_1) = \alpha_1$

. Бачимо, що $\alpha_1 = 0$. Аналогічним чином з умов $(x, a_2) = 0, \ldots, (x, a_k) = 0$ випливає, що $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$. Звідси маємо $x = \alpha_{k+1} a_{k+1} + \alpha_{k+2} a_{k+2} + \ldots + \alpha_n a_n$. Бачимо, що x лінійно виражається через $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ і вектори $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ утворюють базис $M^{\perp}$.

Беремо $y \in V$. Вектор можна розкласти в лінійну комбінацію базису простору: $y = \beta_1 a_1 + + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_k a_k + \beta_{k+1} a_{k+1} + \beta_{k+2} a_{k+2} + \ldots + \beta_n a_n = y_1 + y_2$;
$y_1 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_k a_k \in M$;

$y_2 = \beta_{k+1} a_{k+1} + \beta_{k+2} a_{k+2} + \ldots + \beta_n a_n \in M^{\perp}$. Це означає, що $V = M + M^{\perp}$, $M \cap M^{\perp} = \{\theta\}$, отже, $V = M \oplus M^{\perp}$.

Таким чином, якщо M- підпростір скінченновимірного евклідова простору V, то кожен вектор $x \in V$ однозначно можна розкласти в суму $x = y + z$, де $y \in M$, $z \in M^{\perp}$. Вектор $y \in M$ називається ортогональною проекцією вектора x на підпростір M. Вектор $z \in M^{\perp}$ називається ортогональною складовою x відносно підпростору M.

5) Для будь-яких підпросторів M_1, M_2 евклідова простору V виконується $(M_1 + M_2)^{\perp} = M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$.

Доведення. Доведемо взаємні включення. Беремо $x \in (M_1 + M_2)^{\perp}$, тоді $\forall y \in M_1 + M_2$, $(x,y) = 0$. Оскільки $M_1 \leq M_1 + M_2$, $M_2 \leq M_1 + M_2$, то для $\forall y \in M_1$, $(x,y) = 0 \Rightarrow x \in M_1^{\perp}$, для $\forall y \in M_2$, $(x,y) = 0 \Rightarrow x \in M_2^{\perp} \Rightarrow x \in M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp} \Rightarrow (M_1 + M_2)^{\perp} \leq M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$.

Навпаки, беремо $x \in M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$, тоді $x \in M_1^{\perp}$, $x \in M_2^{\perp}$, тому для $\forall y_1 \in M_1$, $(x, y_1) = 0$, $\forall y_2 \in M_2$, $(x, y_2) = 0$. Припустимо, що $z \in M_1 + M_2$, тоді $z = z_1 + z_2$, де $z_1 \in M_1$, $z_2 \in M_2$. $(x, z) = (x, z_1 + z_2) = (x, z_1) + (x, z_2) = 0 + 0 = 0$. Таким чином, маємо $x \in (M_1 + M_2)^{\perp} \Rightarrow M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp} \leq (M_1 + M_2)^{\perp} \Rightarrow (M_1 + M_2)^{\perp} = M_1^{\perp} \cap M_2^{\perp}$.

6) Нехай M – підпростір скінченновимірного евклідова простору V, тоді $M = (M^{\perp})^{\perp}$.

Доведення. Нехай $x \in M \Rightarrow \forall y \in M^{\perp}, (x,y) = 0$, тобто вектор x ортогональний до всіх векторів підпростору $M^{\perp}$. Таким чином $x \in (M^{\perp})^{\perp}$, тобто $M \leq (M^{\perp})^{\perp}$. Припустимо, що $dimV = n, dimM = k$, тоді $dimM^{\perp} = n - k$, а $dim(M^{\perp})^{\perp} = n - (n - k) = k$. Тобто виконується $M \leq (M^{\perp})^{\perp}$ і $dimM = dim(M^{\perp})^{\perp} = k$. Отже, базис M буде базисом $(M^{\perp})^{\perp}$, тобто $M = (M^{\perp})^{\perp}$.

7) Нехай M_1, M_2 – підпростори скінченновимірного евклідова простору V, тоді $M_1^{\perp} + M_2^{\perp} = (M_1 \cap M_2)^{\perp}$.

Доведення. Скористаємось 5-ою і 6-ою властивостями. $M_1^{\perp} + M_2^{\perp} = ((M_1^{\perp} + M_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = (M_1^{\perp})^{\perp} \cap (M_2^{\perp})^{\perp} = (M_1 \cap M_2)^{\perp}$.

8) Для всіх евклідових просторів V виконується $V^{\perp} = \{\theta\}, \{\theta\}^{\perp} = V$.

Випливає з наслідків аксіом евклідова простору.

Відстань між векторами в евклідові просторі.

Припустимо, x, y – елементи евклідова простору V. Відстанню між елементами x, y називається число $|x - y|$. Нехай M – підпростір евклідова простору V, $x \in V$ – фіксований елемент. Тоді під відстанню між елементом x і підпростором M будемо розуміти число $\min_{u \in M}|x - u|$. Припустимо, що V – скінченновимірний евклідів простір. Знайдемо відстань між вектором $x \in V$ та підпростором M. Оскільки $V = M \oplus M^{\perp}$, то $x = y + z$, де $y \in M$, $z \in M^{\perp}$. Беремо довільний вектор $u \in M$ і, враховуючи, що $y - u \in \in M$, $z \in M^{\perp}$ одержуємо

$$|x - u|^2 = |y + z - u|^2 = |(y - u) + z|^2 = (y - u + z, y - u + +z) = (y - u, y - u) + 2(y - u, z) + (z, z) = (y - u, y - u) + (z, z) = |y - u|^2 + |z|^2 \geq |z|^2.$$

Рівність виконується лише тоді, коли $y = u$. Таким чином, вектор з підпростору M найближчий до $x \in V$ є його ортогональною проекцією y на підпростір M і відстань між векторами x, y дорівнює довжині ортогональної складової z вектора x відносно підпростору M.

<u>УНІТАРНІ ПРОСТОРИ.</u>

Означення. Векторний простір V над полем комплексних чисел C називається унітарним простором, якщо кожній упорядкованій парі елементів $x, y \in V$ ставиться у відповідність комплексне число $(x, y) \in C$ і при цьому виконуються умови:

1) $\forall x, y \in V, (x,y) = \overline{(y,x)}$;

2) $\forall x, y, z \in V, (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

3) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in C, (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4) $\forall x \in V \ (x,x) > 0$ при $x \neq \theta$, $(x,x) = 0$ при $x = \theta$.

Функція двох аргументів (x, y), яка вводиться для елементів унітарних просторів називається скалярним добутком.

<u>*Найпростіші наслідки аксіом унітарного простору.*</u>

1) $\forall x, y, z \in V, (x, y + z) = (x, z) + (x, y)$.

Доведення. $(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y,x)} + \overline{(z,x)} = (x, y) + (x, z)$.

2) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in C, (x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$.

Доведення. $(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y,x)} = \bar{\alpha}\overline{(y,x)} = \bar{\alpha}(x, y)$.

3) $\forall x \in V, (x, \theta) = 0$.

Припустимо, що C^n – простір всіх n-вимірних векторів з комплексними координатами. Введемо на цьому просторі скалярний добуток (x, y): для векторів

$x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ покладемо $(x, y) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n}$. Простір C^n перетворюється на унітарний.

Довжиною вектора $x \in V$ будемо називати число $|x| = \sqrt{(x,x)}$. В унітарному просторі виконується нерівність Коші-Буняківського:

$\forall\, x, y \in V \quad |(x, y)|^2 \leq |x|^2|y|^2$ або $(x, y)(y, x) \leq (x, x), (y, y)$.

В унітарному просторі виконується нерівність трикутника, що доводиться аналогічно випадку евклідова простору.

Вектори $x, y \in V$ називаються ортогональними, якщо $(x, y) = 0$. Система векторів називається ортогональною, якщо вектори в цій системі попарно ортогональні.

Система векторів називається ортонормованою, якщо вона ортогональна і довжина кожного вектора в системі дорівнює 1.

Будь-яка ортогональна система ненульових векторів лінійно незалежна.

В ортогональному просторі існує процес ортогоналізації, який дозволяє за допомогою лінійно незалежної системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ одержати ортогональну систему ненульових векторів $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Припустимо, що в унітарному просторі V фіксується деякий ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Вектори визначаються координатами в цьому базисі. Знайдемо скалярний добуток. $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Оскільки $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$, то

$(x, y) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n) =$

$= \alpha_1\overline{\beta_1}(e_1, e_1) + \alpha_1\overline{\beta_2}(e_1, e_2) + \ldots + \alpha_1\overline{\beta_n}(e_1, e_n) + \alpha_2\overline{\beta_1}(e_2, e_1) +$

$\alpha_2\overline{\beta_2}(e_2, e_2) + \ldots + \alpha_2\overline{\beta_n}(e_2, e_n) + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_1}(e_n, e_1) + \alpha_n\overline{\beta_2}(e_n, e_2) + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n} \cdot (e_n, e_n) =$

$\alpha_1\overline{\beta_1}(e_1, e_1) + \alpha_2\overline{\beta_2}(e_2, e_2) + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n}(e_n, e_n) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n}$.

Для унітарного простору існує поняття ортогонального доповнення. Властивості ортогонального доповнення аналогічні властивостям в евклідові просторі.

Геометричний зміст процесу ортогоналізації.

Припустимо, що $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – система векторів в скінченновимірному евклідові просторі V. Процес ортогоналізації дає можливість одержати систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_k \in V$, таку що виконуються умови:

1) $b_i \perp b_j$ при $i \neq j$;

2) $\forall i = \overline{1,k}\;\; \langle a_1, a_2, \ldots, a_i\rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_i\rangle$.

При цьому $b_1 = a_1$ і при вже знайдених векторах $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$ вектор b_i береться у вигляді $b_i = a_i - \alpha_{i,1}\, b_1 - \alpha_{i,2}\, b_2 - \ldots - \alpha_{i,i-1}\, b_{i-1}$, коефіцієнти $\alpha_{i,j}$ підбираємо за умовою ортогональності $\forall j = \overline{1, i-1}$, $(b_i, b_j) = 0 \Rightarrow (a_i, b_j) - \alpha_{i,j}(b_j, b_j) = 0$. Якщо $b_j \neq \theta$, то беремо $\alpha_{i,j} = (a_i, b_j)/(b_j, b_j)$. Якщо $b_j = \theta$, то $\alpha_{i,j}$ – будь-яке дійсне число.

Позначимо підпростори $L_1 = \langle a_1\rangle = \langle b_1\rangle$, $L_2 = \langle a_1, a_2\rangle = \langle b_1, b_2\rangle, \ldots, L_k = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle = \langle b_1, b_2, \ldots b_k\rangle$. Для вектора $b_i = a_i - \alpha_{i,1}\, b_1 - \alpha_{i,2}\, b_2 - \ldots - \alpha_{i,i-1}\, b_{i-1}\;\; b_{i-1}$ позначимо $c_i = \alpha_{i,1} b_1 + \alpha_{i,2}\, b_2 + \ldots + \alpha_{i,i-1}\, b_{i-1}$. Тоді $a_i = b_i + c_i$, $c_i \in \langle b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}\rangle = L_{i-1}$ і, оскільки $b_i \perp b_1, b_i \perp b_2, \ldots, b_i \perp b_{i-1}$, то $b_i \in L_{i-1}$. Таким чином вектор c_i є ортого-нальною проекцією a_i на підпростір L_{i-1}, а b_i є ортогональною складовою вектора a_i відносно підпростору L_{i-1}. Таким чином, можна зробити наступні висновки:

1) система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли серед векторів $b_1, b_2, \ldots, b_i$ є принаймні один нульовий.

Якщо $a_1 = \theta$, то $b_1 = \theta$; якщо $a_1 \neq \theta$, то система $a_1, a_2, \dots, a_k$ лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один вектор a_i лінійно виражається через попередні $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$, тобто $a_1 \in \langle a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \rangle = L_{i-1}$. З іншого боку, $a_i = b_i + c_i$, де $b_i \in L_{i-1}{}^{\perp}$, $c_i \in L_{i-1}$. Оскільки $V = L_{i-1} \oplus L_{i-1}{}^{\perp}$, то $a_i = c_i$, $b_i = \theta$.

2) процес ортогоналізації не збільшує довжини векторів, тобто $\forall i = \overline{1,k}$, $|a_i| \geq |b_i|$.

Дійсно, оскільки $a_i = b_i + c_i$, де $b_i \in L_{i-1}{}^{\perp}$, $c_i \in L_{i-1}$, то

$|a_i|^2 = |b_i + c_i|^2 = (b_i + c_i, b_i + c_i) = (b_i, b_i) + +2(b_i, c_i) + (c_i, c_i) = (b_i, b_i) + (c_i, c_i) = |b_i|^2 + |c_i|^2 \geq |b_i|^2$. Отже, маємо: $|a_i| \geq |b_i|$.

Визначник Грама та його властивості.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_m$ – система векторів в евклідові просторі V. Матриця $G(a_1, a_2, \dots, a_m) = \begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_m) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_m,a_1) & (a_m,a_2) & \dots & (a_m,a_m) \end{pmatrix}$ називається матрицею Грама системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$. Визначник матриці Грама називається визначником Грама системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ і позначається $g(a_1, a_2, \dots, a_m) = \det G(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Припустимо, що в просторі V зафіксовано деякий ортонормований базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, A – матриця, рядками якої є координати векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ в даному ортонормованому базисі. $A = \begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_m) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_m,a_1) & (a_m,a_2) & \dots & (a_m,a_m) \end{pmatrix}$, тоді $G(a_1, a_2, \dots, a_m) = A \cdot A^{\mathrm{T}}$.

Теорема про визначник Грама. Нехай система векторів $b_1, b_2, \dots, b_m$ одержана ортогоналізацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$. Тоді $g(a_1, a_2, \dots, a_m) = g(b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Доведення. Згадаємо теорему про елементарні перетворення рядків матриці, до яких належать перетворення трьох типів:

1) додавання до елементів одного рядка відповідних елементів іншого рядка;

2) домноження рядка на ненульове число;

3) перестановка рядків.

Припустимо, що вектори $a_1, a_2, \dots, a_m$ та вектори $b_1, b_2, \dots, b_m$ задаються координатами в деякому ортонормованому базисі. Це може бути базис простору, якщо простір скінченновимірний, або базис деякого скінченновимірного підпростору. Наприклад, $L = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, позначимо через A і B матриці, рядки яких складаються з координат векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ та $b_1, b_2, \dots, b_m$ в цьому базисі відповідно. Якщо базис складається з n векторів, то матриці мають розмір $m \times n$.

Процес ортогоналізації полягає в тому, що ми за допомогою скінченного числа елементарних перетворень $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ переходимо від матриці A до матриці B. Позначимо через $T_1, T_2, \dots, T_s$ матриці, які одержуються з одиничної матриці порядку m елементарними перетвореньнями рядків $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ відповідно. Тоді $B = T_s T_{s-1} \dots T_2 T_1 A = TA$, де $T = T_s T_{s-1} \dots T_2 T_1$. Елементарні перетворення рядків $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ є перетвореннями першого типу: перший рядок зберігається, від другого віднімається перший, домножений на число, від третього – лінійна комбінація першого і другого рядків і т.д. Таким чином $\det T_i = 1$, $\forall i = \overline{1,s}$, $\det T = \det T_s \det T_{s-1} \dots \det T_2 \det T_1 = 1$.

Отже, $G(b_1, b_2, \dots, b_m) = BB^T = TA(TA)^T - TAA^TT^T = TG(a_1, a_2, \dots, a_m)T^T$. Тоді для визначників виконується $g(b_1, b_2, \dots, b_m) = detT\ \ g(a_1, a_2, \dots, a_m)\ detT^T = g(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Таким чином, процес ортогоналізації не змінює визначника Грама.

Наслідок 1. Для всіх систем векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ в евклідові просторі V $g(a_1, a_2, \dots, a_m) \geq 0$. Причому $g(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$ тоді і лише тоді, коли вектори $a_1, a_2, \dots, a_m$ лінійно залежні.

Доведення. Припустимо, що систему векторів $b_1, b_2, \dots, b_m$ одержано ортогоналізацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$. Тоді:

$$g(a_1, a_2, \dots, a_m) = g(b_1, b_2, \dots, b_m) = \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) & \dots & (b_1, b_m) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) & \dots & (b_2, b_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_m, b_1) & (b_m, b_2) & \dots & (b_m, b_m) \end{pmatrix} = =$$

$$\begin{pmatrix} (b_1, b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (b_2, b_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (b_m, b_m) \end{pmatrix} = (b_1, b_1)(b_2, b_2)\dots(b_m, b_m) = |b_1|^2|b_2|^2 \dots |b_m|^2 \geq \geq 0.$$

Тоді $g(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$ тоді і тільки тоді, коли серед векторів $b_1, b_2, \dots, b_m$ є принаймні один ненульовий, тобто вектори $a_1, a_2, \dots, a_m$ лінійно залежні.

Наслідок 2. (Нерівність Адамара). Нехай $A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$ – квадратна матриця з дійсними елементами. Тоді $(detA)^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}{}^2$.

Доведення. Позначимо вектори $a_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots \alpha_{1,n})$, $a_2 = (\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \dots \alpha_{2,n}), \dots, a_n = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \dots \alpha_{n,n})$. Вважатимемо, що їх координати задані в деякому ортогональному базисі. Тоді $g(a_1, a_2, \dots, a_n) = detG(a_1, a_2, \dots, a_n) = detA\bar{A}^T = detA\,det\,A^T = (detA)^2$. З іншого боку, нехай вектори $b_1, b_2, \dots, b_n$ одержані ортогоналізацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тоді маємо

$$g(a_1, a_2, \dots, a_n) = g(b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} |b_1|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |b_2|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |b_n|^2 \end{pmatrix} = |b_1|^2|b_2|^2 \dots |b_n|^2 \leq$$

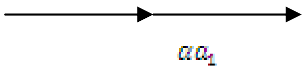
$$|a_1|^2|a_2|^2 \dots |a_n|^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1,j}{}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2,j}{}^2 \cdot \dots \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n,j}{}^2 = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}{}^2.$$

Таким чином, $(detA)^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}{}^2$.

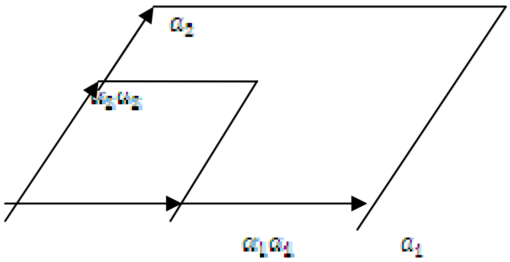
Геометричний зміст визначника n-го порядку.

Нехай a_1, a_2, a_3 – елементи тривимірного простору з дійсними координатами, A – матриця, рядками якої є координати векторів a_1, a_2, a_3. Відомо, що визначник матриці A $detA$ дорівнює мішаному добутку векторів a_1, a_2, a_3. Тобто модуль $detA$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах a_1, a_2, a_3. Аналогічно, якщо a_1, a_2 – вектори на площині з дійсними координатами, A – матриця, рядками якої є координати векторів a_1, a_2, то модуль $detA$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах a_1, a_2. Введемо поняття паралелепіпеда n-го порядку. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – елементи скінченновимірного простору V над полем R. Паралелепіпедом, побудованим на векторах $a_1, a_2, \dots, a_n$ називається множина $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n / 0 \le \alpha_i \le 1,\ i = \overline{1,n}\}$.

Припустимо, що $n = 1 \Rightarrow P(a_1) = \{\alpha a_1 / 0 \le \alpha \le 1\}$, тобто це відрізок прямої.



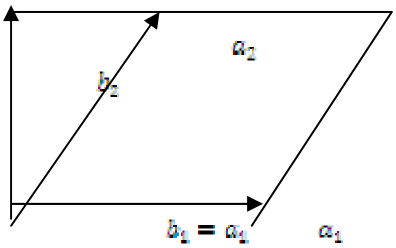
Беремо $n = 2 \Rightarrow P(a_1, a_2) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 / 0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 1\}$. Тобто $P(a_1, a_2)$ є паралелограмом, побудованим на a_1, a_2. Аналогічно, $P(a_1, a_2, a_3)$ є паралелепіпедом, побудованим на векторах a_1, a_2, a_3 в тривимірному просторі.



Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – елементи евклідова простору V, $b_1, b_2, \dots, b_n$ – вектори, одержані ортогоналізацією векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$. Об'ємом паралелепіпеда $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$, побудованого на векторах $a_1, a_2, \dots, a_n$ називається число $v(P(a_1, a_2, \dots, a_n)) = = |b_1||b_2| \dots |b_n|$.

Беремо $n = 1 \Rightarrow b_1 = a_1,\ v(P(a_1)) = |b_1| = |a_1|$. Одержується довжина відрізка.

Беремо $n = 2 \Rightarrow v(P(a_1, a_2)) = |b_1||b_2|$. Одержується площа паралелограма.



Беремо $n = 3 \Rightarrow b_1 = a_1,\ v(P(a_1, a_2, a_3)) = |b_1||b_2||b_3|$. Позначимо $S = |b_1||b_2|,\ h = |b_3|$, отже, $v(P(a_1, a_2, a_3)) = Sh$ (тобто об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту паралелепіпеда). Аналогічно шукається об'єм при будь-якому
$n > 3$: $v(P(a_1, a_2, \dots, a_n)) = |b_1||b_2| \dots |b_n|,\ S = |b_1||b_2| \dots |b_{n-1}|,\ h = |b_n|$, $v(P(a_1, a_2, \dots, a_n)) = Sh$

.

Нехай $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ – деяка квадратна матриця з дійсними елементами. Позначимо вектори $a_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,n}),\ a_2 = (\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \dots, \alpha_{2,n}), \dots, a_n = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \dots, \alpha_{n,n})$. Вважатимемо, що їх координати задані в деякому ортонормованому базисі. Нехай вектори $b_1, b_2, \dots, b_n$ одержуються ортогоналізацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тоді:

$v(P(a_1,a_2,\dots,a_n)) = |b_1||b_2|\dots|b_n| = \sqrt{g(b_1,b_2,\dots,b_n)} = \sqrt{g(a_1,a_2,\dots,a_n)} =$
$\sqrt{\det G(a_1,a_2,\dots,a_n)} = \sqrt{\det AA^T} = \sqrt{(\det A)^2} = |\det A|.$

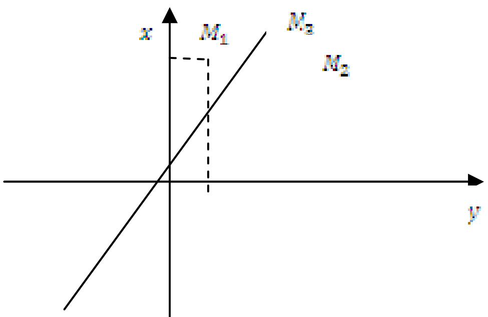
Таким чином, модуль визначника n-го порядку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на його векторах-рядках.

Геометричний зміст нерівності Адамара.

Нехай $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ – деяка квадратна матриця з дійсними елементами. Тоді $(\det A)^2 \le \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^{\;2}$, $|\det A| \le \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^{\;2}}$. Позначимо вектори $a_1 = (\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\dots,\alpha_{1,n})$, $a_2 = (\alpha_{21},\alpha_{22},\dots,\alpha_{2,n}),\dots,a_n = (\alpha_{n,1},\alpha_{n,2},\dots,\alpha_{n,n})$. Вважатимемо, що їх координати задані в деякому ортонормованому базисі евклідова простору. Тоді $\forall i = \overline{1,n}$ $\quad a_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}^{\;2}} \Rightarrow |\det A| \le |a_1||a_2|\dots|a_n|$. Ця нерівність означає, що об'єм паралелепіпеда не перевищує добуток його твірних.

Метод найменших квадратів.

Нехай стоїть така задача: $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2),\dots,M_n(x_n,y_n)$ – точки на площині, про які відомо, що їх координати задовольняють деякому рівнянню прямої $y = kx + b$. При цьому це рівняння невідоме і координати точок відомі неточно. Задача – визначити рівняння прямої $y = kx + b$, яка буде найближчою до точок $M_1, M_2,\dots,M_n$. В загальному випадку задача зводиться до найближчого розв'язку несумісної системи лінійних рівнянь $y_1 = kx_1 + b, y_2 = kx_2 + b,\dots,y_n = kx_n + b$ відносно невідомих k і b.



Розглянемо загальний випадок цієї задачі. Дається несумісна система лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами:

$\beta_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n$,

$\beta_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \dots, \beta_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n$. Потрібно знайти її найменший розв'язок. Позначимо вектори-стовпчики

$$a_1 = \begin{Bmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{Bmatrix}, \; a_2 = \begin{Bmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} \end{Bmatrix}, \dots, \; a_n = \begin{Bmatrix} \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,n} \\ \vdots \\ \alpha_{n,n} \end{Bmatrix}, \; b = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{Bmatrix}.$$

Тоді система подається у вигляді $b = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$.

В просторі n-вимірних векторів з дійсними коефіцієнтами береться підпростір $L = \langle a_1,a_2,\dots,a_n \rangle$. Зрозуміло, що система сумісна тоді і тільки тоді, коли $b \in L$. В нашому випадку $b \notin L$.

Метод найменших квадратів полягає у тому, що в підпросторі L ми знаходимо вектор $b^* \in L$, найближчий до b. І в системі рівнянь b заміняється на b^*: $b^* = a_1x_1 + +a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ – сумісна система рівнянь, її розв'язок $(x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*)$ будемо вважати наближеним розв'язком початкової системи.

Припустимо, що вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$ є елементами евклідова простору скінченної розмірності. Тоді, як вже доведено, вектор підпростору L, найближчий до b, буде його ортогональною проекцією на L. Тобто, якщо $b = y + z,\ y \in L,\ z \in L^{\perp}$, то беремо $b^* = y$.

Для знаходження найближчого розв'язку візьмемо базис системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$. Нехай бази утворюють вектори $a_1, a_2, \dots, a_k$. Зрозуміло, що ці вектори утворюють також базис підпростору L, а тому вектор b^* є їх лінійною комбінацією. $b^* = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$. Враховуючи, що $b = b^* + z,\ b^* \in L,\ z \in L^{\perp}$, одержуємо $\forall i = \overline{1,k}$,

$(b, a_i) = (b^* + z, a_i) = (b^*, a_i) + (z, a_i) = (b^*, a_i) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k, a_i) =$
$\alpha_1(a_1, a_i) + \alpha_2(a_2, a_i) + \dots + \alpha_k(a_k, a_i)$.

Таким чином, виконується система рівностей:

$$(b_1, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) + \dots + \alpha_k(a_k, a_1),$$
$$(b, a_2) = \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(b, a_k) = \alpha_1(a_1, a_k) + \alpha_2(a_2, a_k) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k).$$

Ця система є системою лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Система квадратна, її головний визначник більший за нуль як визначник Грама лінійно незалежної системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$. Тому система має єдиний розв'язок $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_k^*)$.

$b^* = \alpha_1^* a_1 + \alpha_2^* a_2 + \dots + \alpha_k^* a_k \Rightarrow b^* = \alpha_1^* a_1 + \alpha_2^* a_2 + \dots + \alpha_k^* a_k + 0 \cdot a_{k+1} + 0 \cdot a_{k+2} + \dots + 0 \cdot a_n$.

За найближчий розв'язок початкової системи можна взяти $x_1^* = \alpha_1^*,\ x_2^* = \alpha_2^*, \dots, x_k^* = \alpha_k^*,\ x_{k+1}^* = 0,\ x_{k+2}^* = 0, \dots,\ x_n^* = 0$.

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ НА ЕВКЛІДОВИХ ТА УНІТАРНИХ ПРОСТОРАХ.

Спряжені лінійні оператори

Означення. Нехай A – лінійний оператор на евклідові просторі V. Спряженим для оператора A називається такий лінійний оператор B на просторі V, що $\forall\, x, y \in \in V,\ (A(x), y) = (x, B(y))$. Оператор, спряжений для оператора A позначається як A^*.

Лема. Нехай B_1, B_2 – лінійні оператори на евклідові просторі V. Якщо $\forall\, x, y \in V\ (x, B_1(y)) = (x, B_2(y))$, то $B_1 = B_2$.

Доведення. Зафіксуємо елементи $x, y \in V$; $(x, B_1(y)) = (x, B_2(y))$. З наслідків аксіом евклідова простору випливає, що $B_1(y) = B_2(y)$. Оскільки y – довільний елемент, то $B_1 = B_2$.

Теорема 1. Якщо для даного оператора A на евклідові просторі V існує спряжений оператор A^*, то він єдиний.

Доведення. Припустимо, що для оператора A існує ще один оператор B в просторі V, для якого виконується $\forall\, x, y \in V\ \ (A(x), y) = (x, B(y))$. За означенням $\forall\, x, y \in V$

$(A(x),y) = = (x,\ A^*(y))$. Таким чином, $(x,B(y)) = (x,\ A^*(y))\ \ \forall\, x,y \in\ V$ і, за лемою, $B =\ A^*$.

Теорема 2. Для будь-якого лінійного оператора A на скінченновимірному евклідові просторі V існує спряжений оператор A^*.

Доведення. Нехай A – лінійний оператор на скінченновимірному евклідові просторі V. Зафіксуємо деякий ортонормований базис $a_1, a_2, \dots, a_n$ простору. Припустимо, що в цьому базисі оператору A відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. Позначимо через B лінійний оператор на просторі V, якому в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідає матриця $A^1 - \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. Покажемо, що $A^* = B$. Для цього перевіримо, що $\forall\, x,y \in \in V\ \ (A(x),y) = (x,B(y))$. Перевіримо спочатку цю рівність для пар базисних векторів. За означенням матриці лінійного оператора в базисі, $A(a_i) =$
$\alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \dots + \alpha_{ni}a_i \Rightarrow (A(a_i), a_j) = (\ \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \dots + \alpha_{ji}a_j + \dots + \alpha_{ni}a_n,\ a_j) =$
$\alpha_{1i}(a_1, a_j) + \alpha_{2i}(a_2, a_j) + + \dots + \alpha_{ji}(a_j, a_j) + \dots + \alpha_{ni}(a_n, a_j) = \alpha_{ji}(a_j, a_j) = \alpha_{ji}$.
Аналогічно, для оператора B:
$B(a_j) = (a_i, B(a_j)) = (a_i,\ \alpha_{j1}a_1 + \alpha_{j2}a_2 + \dots + \alpha_{ji}a_i + \dots + \alpha_{jn}a_n) = \alpha_{ji}(a_i, a_i) = \alpha_{ji}$. Отже, $(A(a_i), a_j) = (a_i, B(a_j)) = \alpha_{ji}$.

Доведемо тепер, що $\forall\, x,y \in\ V\ \ (A(x),y) = (x,B(y))$. Розкладемо вектори в лінійні комбінації базису: $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$, $y = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n$.

Одержуємо:
$(A(x),y) = \ (A(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n),\ \ \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n) = \ (\lambda_1 A(a_1) + \lambda_2 A(a_2) + \dots + \lambda_n A(a_n),\ \ \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n) - - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\gamma_j (A(a_i), a_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\gamma_j (a_i, B(a_j)) = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n,\ \gamma_1 B(a_1) + \dots + \gamma_n B(a_n)) = (x, B(y))$.
Таким чином, $(A(x),y) = (x,B(y))$ і за означенням $B =\ A^*$.

Зауваження. Таким чином, в теоремах 1 і 2 доводиться, що для всіх лінійних операторів в скінченновимірному евклідові просторі існує спряжений оператор, причому єдиний. При доведенні теореми 2 також показано такий факт: якщо в деякому ортонормованому базисі оператору A відповідає матриця A, то оператору A^* відповідає матриця A^1.

<u>Властивості операції спряження.</u>

Вважається, що A, B – лінійні оператори на евклідові просторі V.

1) $(A + B)^* =\ A^* +\ B^*$.

Доведення. $\forall\ \ x,y \in\ V$,
$((A + B)(x),y) = (x,(A + B)^*(y))$. Інакше, $((A + B)(x),y) = (A(x) + B(x),y) = (A(x),y) + (B(x),y) = (x,\ A^*(y)) + (x,\ B^*(y)) = (x,\ A^*(y) + B^*(y)) = (x,\ (A^* + B^*)(y))$.

Таким чином, $\forall x, y \in V$ $\left(x, (A+B)^*(y)\right) = \left(x, (A^*+B^*)(y)\right)$ і, за лемою, $(A+B)^* = A^* + B^*$.

2) $\forall \alpha \in R$, $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.

Доведення. $\forall x, y \in V$ $\left((\alpha A)(x), y\right) = \left(x, (\alpha A)^*(y)\right)$, інакше, $\left((\alpha A)(x), y\right) = (\alpha A(x), y) = \alpha(A(x), y) = \alpha\left(x, A^*(y)\right) = \left(x, \alpha A^*(y)\right) = \left(x, (\alpha A^*)(y)\right)$. За лемою, $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.

3) $(AB)^* = B^*A^*$.

Доведення. $\forall x, y \in V$ $\left((AB)(x), y\right) = \left(x, (AB)^*(y)\right)$, з іншого боку, $\left((AB)(x), y\right) = \left(A(B(x)), y\right) = \left(B(x), A^*(y)\right) = \left(x, B^*\left(A^*(y)\right)\right) = \left(x, (B^*A^*)(y)\right)$. За лемою, $(AB)^* = B^*A^*$.

4) $A = (A^*)^*$.

Доведення. $\forall x, y \in V$ $(A(x), y) = \left(y, A(x)\right)$. З іншого боку, $(A(x), y) = \left(x, A^*(y)\right) = (A^*(y), x) = \left(y, (A^*)^*(x)\right)$. Таким чином, $\forall x, y \in V$ $\left(y, A(x)\right) = \left(y, (A^*)^*(x)\right)$. За лемою, $A = (A^*)^*$.

5) Якщо E– тотожний оператор, то $E^* = E$.

Доведення. $\forall x, y \in V$ $\left(E(x), y\right) = \left(x, E^*(y)\right)$. Інакше, $(E(x), y) = (x, y) = \left(x, E(y)\right)$. За лемою, $E^* = E$.

6) Якщо для оператора A існує обернений, то для оператора A^* також існує обернений, причому $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Доведення. Скористаємось властивостями 3 та 5. За означенням оберненого оператора, $AA^{-1} = E$, тому $(AA^{-1})^* = E^* = E$. Тобто, $A^*(A^{-1})^* = E$ і, за означенням оберненого оператора, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Теорема про інваріантність ортогонального доповнення. Нехай підпростір L евклідова простору V інваріантний відносно лінійного оператора A, тоді підпростір $L^\perp$ інваріантний відносно A^*.

Доведення. Нехай $y \in L^\perp$. Покажемо, що $A^*(y) \in L^\perp$. Беремо довільний елемент $x \in L$, тоді, за інваріантністю, $A(x) \in L$. Тобто, $(A(x), y) = 0$. Тоді $\left(x, A^*(y)\right) = (A(x), y) = 0$. Елемент $A^*(y)$ ортогональний до довільного елемента $x \in L$, тому $A^*(y) \in L^\perp$.

Спряжені оператори на унітарних просторах.

Означення. Нехай A – лінійний оператор на унітарному просторі V. Лінійний оператор B на просторі V називається спряженим для оператора A, якщо $\forall x, y \in V$ $(A(x), y) = \left(x, B(y)\right)$. Спряжений оператор для даного оператора A позначається, як A^*. Для кожного лінійного оператора на скінченновимірному унітарному просторі існує єдиний спряжений оператор.

Означення. Нехай A - квадратна матриця з комплексними елементами. Спряженою матрицею для матриці A називається матриця $A^* = \bar{A}^T$. Таким чином, для того, щоби для матриці A одержати спряжену матрицю, кожен її елемент заміняється комплексно спряженим числом і матриця транспонується.

Якщо в даному ортонормованому базисі унітарного простору оператору A відповідає матриця A, то в цьому ж базисі оператору A^* відповідає матриця A^*.

<u>*Властивості спряжених операторів на унітарному просторі.*</u>

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$.

2) $\forall \alpha \in C \ \ (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

3) $(AB)^* = B^* A^*$.

4) $A = (A^*)^*$.

5) Якщо E – одиничний оператор, то $E^* = E$.

6) Якщо для оператора A існує обернений оператор, то для оператора A^* також існує обернений, причому $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Нехай підпростір L унітарного простору V інваріантний відносно лінійного оператора A, тоді підпростір $L^{\perp}$ інваріантний відносно A^*.

Всі твердження для спряжених операторів в унітарному просторі доводяться аналогічно твердженням для спряжених операторів в евклідові просторі.

Ортогональні оператори.

Означення. Лінійний оператор A на евклідові просторі V називається ортогональним, якщо $\forall x, y \in V \ (x,y) = \big(A(x), A(y)\big)$.

Таким чином, оператор є ортогональним, якщо він зберігає скалярний добуток.

З означення ортогонального оператора випливає, що $\forall x \in V \ \ (x,x) = \big(A(x), A(x)\big)$, тобто $|x|^2 = |A(x)|^2, |x| = |A(x)|$. Таким чином, ортогональний оператор зберігає довжини векторів. Оскільки він зберігає скалярний добуток, то він зберігає і кути між векторами.

<u>*Властивості ортогональних операторів.*</u>

1) Лінійний оператор A на евклідові просторі V є ортогональним, тоді і тільки тоді, коли $\forall x \in V \ \ (x,x) = \big(A(x), A(x)\big)$, тобто, оператор ортогональний тоді і тільки тоді, коли він зберігає довжини векторів.

Доведення. Знайдемо скалярний добуток $\big(A(x+y), A(x+y)\big)$. З одного боку $\big(A(x+y), A(x+y)\big) = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y)$.

З іншого боку, $\big(A(x+y), A(x+y)\big) = \big(A(x) + A(y), A(x) + A(y)\big) = \big(A(x), A(x)\big) + 2\big(A(x), A(y)\big) + \big(A(y), A(y)\big) = (x,x) + 2\big(A(x), A(y)\big) + (y,y)$

. Таким чином, $(x,x) + 2(x,y) + (y,y) = (x,x) + 2\big(A(x), A(y)\big) + (y,y) \Rightarrow (x,y) = \big(A(x), A(y)\big)$ і оператор A ортогональний.

2) Власні числа ортогонального оператора дорівнюють 1 або -1.

Доведення. Нехай λ – власне число ортогонального оператора A, $x \in V$ – відповідний власний вектор. Тоді $A(x) = \lambda x$; $(x,x) = \big(A(x), A(x)\big) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 (x,x) \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(x,x) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$, оскільки $x \neq 0$.

Зауваження. З даної властивості випливає, що власні числа лінійного ортогонального оператора можуть бути лише ± 1, але власних чисел може і не бути.

3) Власні вектори ортогонального оператора, що відповідають різним власним числам, ортогональні.

Доведення. Нехай x_1, x_2 – власні вектори ортогонального оператора A, λ_1, λ_2 – відповідні власні числа, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Враховуючи властивість 2, можна покласти $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, тобто $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Далі

$(x_1, x_2) = \left(A(x_1), A(x_2)\right) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_1\lambda_2(x_1, x_2) = -(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$

.

4) Лінійний оператор на скінченновимірному евклідові просторі ортогональний тоді і тільки, коли він переводить ортонормований базис простору в ортонормований базис простору.

Доведення. Припустимо, що A – ортогональний оператор, $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормований базис евклідова простора V. Покажемо, що система векторів $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)$ утворює ортонормований базис простору V. Припустимо, що $i \neq j$, $\left(A(e_i), A(e_j)\right) = (e_i, e_j) = 0 \ \forall i = \overline{1,n}$; $\left(A(e_i), A(e_i)\right) = (e_i, e_i) = 1$. Тобто система векторів $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)$ ортонормована. Ці вектори лінійно незалежні як ненульові попарно ортогональні. Число векторів дорівнює розмірністі простору. Таким чином, вектори $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)$ утворюють ортонормований базис простору.

Припустимо, що лінійний оператор A переводить ортонормований базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ простору V в ортонормований базис $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)$ простору. Покажемо, що оператор A ортогональний. Беремо довільні вектори $x, y \in V$ і розкладемо їх в лінійну комбінацію базису $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$. Оскільки базис ортонормований, то $(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$.

$A(x) = \alpha_1 A(e_1) + \alpha_2 A(e_2) + \dots + \alpha_n A(e_n)$, $A(y) = \beta_1 A(e_1) + \beta_2 A(e_2) + \dots + \beta_n A(e_n)$.

Вектори $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)$ утворюють ортонормований базис простору, отже, $\left(A(x), A(y)\right) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$.

Таким чином, $(x, y) = \left(A(x), A(y)\right)$, і, за означенням, лінійний оператор A є ортогональним.

Зауваження. З останньої властивості випливає те, що ортогональний оператор на скінченновимірному евклідові просторі базис переводить в базис. Це означає, що для ортогонального оператора завжди існує обернений оператор.

4) Лінійний оператор A на скінченновимірному евклідові просторі V ортогональний тоді і тільки тоді, коли $A^* = A^{-1}$.

Доведення. Припустимо, що оператор A ортогональний. Тоді $\forall x, y \in V$ $(x, y) = \left(x, E(y)\right)$, інакше, $(x, y) = \left(A(x), A(y)\right) = (x, A^*(A(y))) = \left(x, A^*A(y)\right)$. Це означає, що $AA^* = E$ і, за означенням оберненого оператора, $A^* = A^{-1}$.

Припустимо, що для оператора A евклідова простору V виконується $A^* = A^{-1}$, тоді $\forall x, y \in V$
$(x, y) = \left(x, E(y)\right) = (x, A^{-1}y)\ A(y)) = \left(x, AA^{-1}(y)\right) = (x, A^{-1}\ (AA^*)(y)) = \left(A(x), A(y)\right)$ і опе-ратор A є ортогональним.

Означення. Квадратна матриця A з дійсними елементами називається ортогональною, якщо $AA^{\mathrm{T}} = E$. Таким чином, матриця A ортогональна, якщо $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$.

6) Лінійний оператор A на скінченновимірному евклідові просторі V ортогональний тоді і тільки тоді, коли в деякому ортонормованому базисі він задається ортогональною матрицею.

Доведення Припустимо, оператор A ортогональний, $e_1, e_2, \dots, e_n$ – фіксований ортонормований базис простору V. В цьому базисі оператору A відповідає матриця A. Тоді в цьому ж базисі оператору A^{-1} відповідає матриця A^{-1}, а оператору A^* – матриця A^{T}. З

5-ї властивості маємо $A^* = A^{-1}$, тоді для матриць $A^{\intercal} = A^{-1}$, тобто матриця A ортогональна.

Припустимо, що в ортонормованому базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$ оператору A відповідає ортогональна матриця A, тобто для матриць виконується $A^{\intercal} = A^{-1}$. Тоді в цьому базисі оператору A^{-1} відповідає матриця A^{-1}, а оператору A^* відповідає матриця $A^{\intercal}$. Якщо матриці співпадають, то і оператори рівні, тобто $A^{-1} = A^*$. За 5-ою властивістю A – ортогональний оператор.

7) Нехай підпростір L скінченновимірного евклідова простору V інваріантний відносно ортогонального оператора A. Тоді підпростір $L^{\perp}$ також інваріантний відносно оператора A.

Доведення. Припустимо, $e_1, e_2, \dots, e_k$ – деякий базис підпростору L. Оскільки оператор A невироджений, як ортогональний, то вектори $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_k)$ лінійно незалежні. При цьому $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_k) \in L$. Число векторів дорівнює розмірністі підпростору L, а тому вектори $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_k)$ утворюють базис підпростору L. Беремо $y \in L^{\perp}$ і покажемо, що $A(y) \in L^{\perp}$. Оскільки $\forall i = \overline{1,k}$ $(e_i, y) = 0$, то $(A(e_i), A(y)) = (e_i, y) = 0$. А тому вектор $A(y)$ ортогональний до всіх векторів системи $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_k)$, тобто $A(y)$ ортогональний до базису L і $A(y) \in L^{\perp}$.

Властивості ортогональних матриць.

1) Квадратна матриця з дійсними елементами ортогональна тоді і тільки тоді, коли рядки матриці утворюють ортонормовану систему векторів.

Доведення. Припустимо, що, A – ортогональна матриця порядку n, тобто $AA^{\intercal} = E$. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – вектори, координатами яких в деякому ортонормованому базисі деякого евклідова простору розмірності n є елементи рядків матриці A. Тоді для матриці Грама даної системи векторів виконується $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = AA^{\intercal} = E$, тобто

$$\begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_n) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n,a_1) & (a_n,a_2) & \dots & (a_n,a_n) \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $(a_i, a_j) = 0$, якщо $i \neq j$; $(a_i, a_i) = 1\ \forall i = \overline{1,n}$, тобто система векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ ортонормована.

Припустимо, що порядок матриці A дорівнює n; $a_1, a_2, \dots, a_n$ – вектори, координатами яких є елементи рядків матриці A, і вважаємо, що ці координати задаються в деякому ортонормованому базисі деякого евклідова простору. Нехай ця система векторів ортонормована, тобто $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$, $(a_i, a_i) = 1\ \forall i = \overline{1,n}$. Таким чином, для матриці Грама виконується даної системи векторів виконується $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = E$, тобто $AA^{\intercal} = G(a_1, a_2, \dots, a_n) = E$. Отже, матриця A є ортонормованою.

Наслідок. Квадратна матриця A з дійсними елементами ортогональна тоді і тільки тоді, коли її стовпчики утворюють ортонормовану систему векторів.

Доведення. За означенням, матриця A ортогональна тоді і тільки тоді, коли $AA^{\intercal} = E$, тобто $(A^{\intercal})^{\intercal}A^{\intercal} = E$. Таким чином, матриця A ортогональна тоді і тільки тоді, коли ортогональною є матриця $A^{\intercal}$ і для доведення наслідку достатньо скористатися 1-ою властивістю ортогональних матриць для матриці $A^{\intercal}$.

2) Модуль визначника ортогональної матриці дорівнює 1.

Доведення. Оскільки $AA^{\intercal} = E$, то $1 = detE = detAA^{\intercal} = detAdetA^{\intercal} = (detA)^2 \Rightarrow |detA| = 1$.

3) В скінченновимірному евклідові просторі матриця переходу від ортонормованого базису простору до ортонормованого базису простору ортогональна.

Доведення. Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n$ і $a_1, a_2, \dots, a_n$ – ортонормовані базиси простору V, A – матриця переходу від ортонормованого базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ до ортонормованого базису $a_1, a_2, \dots, a_n$. За означенням матриці переходу, стовпчики матриці A складаються з координат векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$ в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$, тобто стовпчики матриці A утворюють ортонормовану систему векторів, і A – ортогональна матриця.

Ортогональні оператори на прямій.

Нехай V^1 – евклідів простір розмірності 1. Такий простір будемо називати прямою. Вектор e_1 – базисний вектор простору V^1, A – ортогональний оператор на V^1. Тоді $A(e_1) = \alpha e_1$ для деякого $\alpha \in R$. Оскільки ортогональний оператор зберігає довжину векторів, то $|e_1| = |A(e_1)| = |\alpha e_1| = \sqrt{(\alpha e_1, \alpha e_1)} = \sqrt{\alpha^2 (e_1, e_1)} = |\alpha| \sqrt{(e_1, e_1)} = |\alpha||e_1|$. Таким чином, $|\alpha| = 1$, $\alpha = \pm 1$. Розглянемо обидва випадки:

1) $\alpha = 1 \Rightarrow A(e_1) = e_1$. Беремо $x \in V^1$, тоді $x = \beta e_1$ для деякого $\beta \in R$. $A(x) = \beta A(e_1) = \beta e_1 = x$. Таким чином, оператор A – тотожний оператор.

2) $\alpha = -1 \Rightarrow A(e_1) = -e_1$. Беремо $x \in V^1$, тоді $x = \beta e_1$ для деякого $\beta \in R$. $A(x) = = \beta A(e_1) = -\beta e_1 = -x$.

Таким чином, оператор A є дзеркальним відображенням прямої відносно нульового вектора.

Отже, можна зробити висновок, що на прямій ортогональних операторів існує лише два : 1) тотожний; 2) дзеркальне відображення прямої відносно нульового вектора.

Ортогональні оператори на площині.

Нехай V^2 – евклідів простір розмірності 2. Такий простір будемо називати площиною. Припустимо, що вектори e_1, e_2 утворюють ортонормований базис простору; A – ортогональний оператор на V^2. Нехай в базисі e_1, e_2 оператору A відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Оскільки оператор ортогональний, а базис ортонормований, то матриця A – ортогональна, а тому $|detA| = 1$, $detA = \pm 1$.

Розглянемо два випадки:

1) $detA = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = -1$. Беремо характеристичний многочлен оператора A:

$\chi(t) = \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} = \big((a-t)(d-t) - bc\big) = t^2 - (a+d)t + ad - bc == t^2 - (a+d)t - 1$.

Знайдемо корені даного многочлена:

$t^2 - (a+d)t - 1 = 0$, $D = (a+d)^2 + 4 > 0$.

Таким чином, характеристичний многочлен має пару різних дійсних коренів t_1 і t_2, які є власними числами оператора A. Але, за 2-ою властивістю, власними числами ортогонального оператора можуть бути лише числа 1 та -1, тому можна вважати, що $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Власним числам відповідають власні вектори. Можна вибрати власні вектори з одиничною довжиною, тому нехай власному числу $t_1 = 1$ відповідає вектор a_1, а власному числу $t_2 = -1$ відповідає вектор a_2, причому $|a_1| = |a_2| = 1$. Власні вектори a_1, a_2 ортогональні як власні вектори, що відповідають різним власним числам (3-тя властивість ортогонального оператора). Тому вектори a_1, a_2 утворюють ортонормований

базис простору V^2. Знайдемо матрицю оператора A в цьому базисі:
$A(a_1) = 1 \cdot a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2$,
$A(a_2) = (-1) \cdot a_2 = 0 \cdot a_1 + (-1) \cdot a_2$,
тобто в базисі a_1, a_2 оператору A відповідає матриця $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Припустимо, що $x \in V^2$ – довільний вектор, який в базисі a_1, a_2 задається координатами $x = (\alpha_1, \alpha_2)$. Тоді $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$; $A(x) = \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2$. Тобто вектор $A(x)$ в базисі a_1, a_2 задається координатами $A(x) = (\alpha_1, -\alpha_2)$.

Таким чином, оператор A є відбиттям площини відносно прямої, що проходить через нульовий вектор; спрямовуючим вектором прямої є вектор a_1.

2) $detA = 1$. Оскільки A – ортогональна матриця, то $A^{\prime} = A^{-1}$; $A^{\prime} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Матрицю A^{-1} знайдемо за допомогою алгебраїчних доповнень, враховуючи, що $detA = 1$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^{\prime} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Тобто $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow d = a,\ b = -c$ і $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$.

При цьому $detA = a^2 + c^2 = 1$. Можна вважати, що $a = \cos\varphi,\ c = \sin\varphi$ для деякого кута φ. Тобто $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ і ми одержали матрицю повороту ортогонального лінійного оператора у площині.

Можна зробити наступний висновок: у площині існують ортогональні лінійні оператори лише двох типів : 1) відбиття площини відносно деякої прямої, що проходить через нульовий вектор; 2) поворот площини на деякий кут навколо нульового вектора.

Теорема про будову ортогонального оператора. Нехай A – ортогональний оператор на скінченновимірному евклідові просторі V. Тоді для простору V існує розклад в пряму суму підпросторів: $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$ такий, що виконуються умови:

1) Кожен підпростір L_i інваріантний відносно оператора A;

2) Розмірність кожного підпростору L_i дорівнює 1 або 2;

3) Якщо $dimL_i = 1$, то оператор A діє на L_i або як тотожний оператор, або як дзеркальне відображення прямої відносно нульового вектора;

4) Якщо $dimL_i = 1$, то оператор A діє на L_i як поворот площини на деякий кут навколо нульового вектора;

5) $\forall i = \overline{1,k}\ \ L_i^{\perp} = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus L_{i+2} \oplus \dots \oplus L_k$.

Доведення. Доводити теорему будемо методом математичної індукції за розмірністю простору V. Припустимо, що $dimV = 1$. За доведеним, ортогональний оператор A діє на просторі або як тотожний оператор, або як дзеркальне відображення відносно нульового вектора. Тому твердження теореми виконується.

Припустимо, що теорема виконується для всіх просторів, розмірність яких менша за n (n>1) і нехай $dimV = n$. Оскільки V – скінченновимірний евклідів простір над полем R, то для оператора A в просторі V існує інваріантний підпростір M розмірності 1 або 2.

Припустимо спочатку, що $dimM = 1$. За доведенням, оператор A діє на ньому як тотожний оператор або як дзеркальне відображення прямої відносно нульового вектора. Далі, $V = M \oplus M^{\perp}$ і, оскільки підпростір M інваріантний, а оператор A є ортогональним, то підпростір $M^{\perp}$ також інваріантний відносно оператора A. Оскільки $dimM^{\perp} = n - 1 < n$, тому, за припущенням індукції, для $M^{\perp}$ існує розклад в пряму суму підпросторів

$M^{\perp} = L_2 \oplus L_3 \oplus \dots \oplus L_k$, для якого виконуються умови 1-5 теореми. Покладемо $L_1 = M$ і, оскільки $V = M \oplus M^{\perp}$, то $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$.

Припустимо тепер, що в просторі V для оператора A не існує інваріантного підпростору розмірності 1, тому $dimM = 2$. Якщо оператор A діє на M як відбиття площини відносно деякої прямої, то в підпросторі M для оператора A існує інваріантний підпростір розмірності 1, що суперечить припущенню. Таким чином, оператор A діє на M як поворот площини на деякий кут. Далі, $V = M \oplus M^{\perp}$ і, оскільки підпростір M інваріантний, а оператор A є ортогональний, то підпростір $M^{\perp}$ також інваріантний відносно оператора A; $dimM^{\perp} = n - 2 < n$, за припущенням індукції, для $M^{\perp}$ існує розклад в пряму суму підпросторів $M^{\perp} = L_2 \oplus L_3 \oplus \dots \oplus L_k$, для якого виконуються умови 1-5 теореми. Покладемо $L_1 = M$ і, оскільки $V = M \oplus M^{\perp}$, то $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$.

Зрозуміло, що в обох випадках умови 1-4 виконуються. Перевіримо виконання умови 5: $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$, за побудовою, $L_1^{\perp} = L_2 \oplus L_3 \oplus \dots \oplus L_k$. Припустимо, що $i > 1$. За припущенням індукції, $L_2 \oplus L_3 \oplus \dots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus \dots \oplus L_k \leq L_i^{\perp}$. За побудовою, $L_1 \leq L_i^{\perp}$. Таким чином, $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \dots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus \dots \oplus L_k \leq L_i^{\perp}$. Оскільки простір V скінченновимірний, то $V = L_i \oplus L_i^{\perp}$. З іншого боку, $V = L_i \oplus (L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \dots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus \dots \oplus L_k)$, тому $dimL_i^{\perp} = \dim (L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \dots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus \dots \oplus L_k)$.

Таким чином, $L_i^{\perp} = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \dots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus \dots \oplus L_k$.

Теорема про будову ортогональної матриці. Для кожної ортогональної матриці A існує ортогональна матриця F, така, що матриця $B = F^{-1}AF$ має клітинний вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & 0 \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{B_k} \end{pmatrix},$$ де всі клітинки B_i мають порядок 1 або 2; клітинка B_i порядку 1 має вигляд 1 або -1; клітинка B_i порядку 2 має вигляд $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ для деякого кута φ.

Доведення. Припустимо, що порядок матриці A дорівнює n. В просторі R^n всіх n-вимірних векторів з дійсними координатами введемо стандартний скалярний добуток: для $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)$, $(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$. Простір R^n з таким скалярним добутком стає евклідовим простором, причому стандартний базис простору $e_1, e_2, \dots, e_n$ буде ортонормованим базисом.

Позначимо через A лінійний оператор на просторі R^n, якому в стандартному базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$ відповідає матриця A. Оскільки базис ортонормований, а матриця ортогональна, то і оператор A ортогональний.

За теоремою про будову ортогональних операторів, розкладемо простір R^n в пряму суму підпросторів $R^n = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$, які задовольняють умови 1-5. В кожному з підпросторів $L_1, L_2, \dots L_k$ беремо ортонормований базис і об'єднаємо ці базиси в єдину систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_n$. Враховуючи виконання умови 5, одержуємо, що вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$ утворюють ортонормований базис простору R^n. Оператору A в цьому базисі відповідає матриця $B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & 0 \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{B_k} \end{pmatrix}$, де всі клітинки B_i мають порядок 1 або 2; клітинка B_i порядку 1 має вигляд (1) або (-1); клітинка B_i порядку 2 має вигляд $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ для деякого кута φ.

Нехай F – матриця переходу від базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ до базису $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тоді $B = F^{-1}AF$. Оскільки базиси $e_1, e_2, \dots, e_n$ і $a_1, a_2, \dots, a_n$ ортонормовані, то матриця F ортогональна, тобто $F^{-1} = F^T$ і $B = F^TAF$.

Унітарні оператори.

Означення. Лінійний оператор A на унітарному просторі V називається унітарним, якщо $\forall\, x, y \in V$, $(x, y) = (A(x), A(y))$. Таким чином, лінійний оператор називається унітарним, якщо він зберігає скалярний добуток.

Означення. Квадратна матриця A з комплексними елементами називається унітарною, якщо $AA^* = A^*A = E$. Таким чином, матриця A називається унітарною, якщо $A^{-1} = A^* = \bar{A}^T$

Властивості унітарних операторів.

1) Лінійний оператор A на унітарному просторі V є унітарним тоді і тільки тоді, коли $\forall\, x \in V$, $(x, x) = (A(x), A(x))$. Таким чином, лінійний оператор є унітарним тоді і тільки тоді, коли він зберігає довжини векторів.

2) Модуль власного числа унітарного оператора дорівнює 1.

3) Власні вектори унітарних операторів, що відповідають різним власним числам, ортогональні.

Наступні властивості унітарних операторів формулюються для скінченновимірних унітарних просторів.

4) Лінійний оператор є унітарним тоді і тільки тоді, коли він ортонормований базис унітарного простору переводить в ортонормований базис простору.

5) Лінійний оператор A є унітарним тоді і тільки тоді, коли $A^{-1} = A^*$.

6) Лінійний оператор є унітарним тоді і тільки тоді, коли в ортонормованому базисі йому відповідає унітарна матриця.

7) Якщо підпростір L унітарного простору V інваріантний відносно унітарного оператора A, то підпростір $L^\perp$ також інваріантний відносно A.

8) Для будь-якого унітарного оператора в скінченновимірному унітарному просторі існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора, в якому оператору відповідає діагональна матриця.

Властивості унітарних матриць.

1) Квадратна матриця з комплексними елементами є унітарною тоді і тільки тоді, коли її рядки (стовпчики) утворюють ортонормовану систему векторів.

2) Модуль визначника унітарної матриці дорівнює 1.

3) Матриця переходу від ортонормованого базису унітарного простору до ортонормованого базису є унітарною.

Властивості унітарного оператора доводяться аналогічно властивостям ортогональних операторів в евклідові просторі.

Самоспряжені оператори.

Означення. Лінійний оператор A на евклідові просторі V називається самоспряженим, якщо $\forall\, x, y \in V$, $(A(x), y) = (x, A(y))$. Таким чином, лінійний оператор A називається самоспряженим, якщо $A = A^*$.

Самоспряжений оператор на евклідові просторі ще називається симетричним.

Означення. Квадратна матриця A з дійсними елементами називається симетричною, якщо $A = A^T$.

Властивості самоспряжених операторів.

1) Власні вектори самоспряжених операторів, що відповідають різним власним числам, ортогональні.

Доведення. Припустимо, що A – самоспряжений оператор на евклідові просторі V, $x_1, x_2 \in V$ - власні вектори оператора A , λ_1, λ_2 – відповідні власні числа, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тобто $A(x_1) = \lambda_1 x_1$, $A(x_2) = \lambda_2 x_2$. За означенням самоспряженого оператора, $(A(x_1), x_2) = (x_1, A(x_2))$. Але $(A(x_1), x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2)$, $(x_1, A(x_2)) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2) \Rightarrow \lambda_1 (x_1, x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$, або $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$. Таким чином, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $(x_1, x_2) = 0$, $x_1 \perp x_2$.

2) Нехай A – самоспряжений оператор на евклідові просторі V, L – підпростір евклідова простору V, інваріантний відносно оператора A. Тоді підпростір $L^{\perp}$ інваріантний відносно оператора A.

Доведення. За теоремою про інваріантність ортогонального доповнення, якщо підпростір L інваріантний відносно оператора A, то підпростір $L^{\perp}$ інваріантний відносно A^*. Але оператор A – самоспряжений, тому $A = A^*$, і підпростір $L^{\perp}$ інваріантний відносно A.

3) Лінійний оператор на скінченновимірному евклідові просторі самоспряжений тоді і тільки тоді, коли в ортонормованому базисі йому відповідає симетрична матриця.

Доведення .Нехай A – самоспряжений оператор на скінченновимірному евклідові просторі V, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – ортонормований базис простору, в якому оператору відповідає матриця A. Оскільки базис ортонормований, то в цьому базисі оператору A^* відповідає матриця A^T. Для операторів виконується $A = A^*$, тому і для матриць $A = A^T$, тобто матриця A є симетричною.

Припустимо, що в ортонормованому базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ евклідова простору V оператору A відповідає симетрична матриця A. Оскільки базис ортонормований, то в ньому оператору A^* відповідає матриця A^T, для матриць виконується $A = A^T$. Якщо рівні матриці, то рівні й оператори, тобто $A = A^*$ і оператор A є самоспряженим.

4) Всі корені характеристичного многочлена самоспряженого оператора на евклідові просторі є дійсними числами.

Доведення. Припустимо, що A – самоспряжений оператор на евклідові просторі V, $\chi(t)$ – його характеристичний многочлен. Нехай $\chi(t)$ має комплексний корінь $\lambda = \gamma + \mu i$, $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$.

Припустимо, V є скінченновимірним векторним простором над полем R. Як вже було доведено, для оператора A в евклідовому просторі V існує інваріантний підпростір розмірності 1 або 2. При доведенні цього випадку було доведено, що якщо $\lambda = \gamma + \mu i$ – комплексний корінь характеристичного многочлена $\chi(t)$ то в просторі V існують вектори $x, y \in V$, які одночасно не дорівнюють нулю і такі, що $A(x) = \gamma x - \mu y$, $A(y) = \mu x + \gamma y$. Оскільки оператор самоспряжений, то $(A(x), y) = (x, A(y))$. Але $(A(x), y) = (\gamma x - -\mu y, y) = \gamma(x, y) - \mu(y, y)$, $(x, A(y)) = (x, \mu x + \gamma y) = \mu(x, x) + \gamma(x, y)$.

Тоді маємо $\gamma(x,y)-\mu(y,y)=\mu(x,x)+\gamma(x,y)$, $\mu(x,x)+\mu(y,y)=0$, $\mu|x|^2+\mu|y|^2=0$, $\mu(|x|^2+|y|^2)=0$. Отже, при $\mu\neq 0$ маємо $|x|^2+|y|^2=0$, тобто вектори x та y дорівнюють нулю одночасно. Одержеємо суперечність. Це означає, що всі корені характеристичного многочлена самоспряженого оператора на евклідові просторі дійсні.

Будова самоспряженого лінійного оператора на скінченновимірному евклідові просторі.

Теорема. Для будь-якого самоспряженого лінійного оператора в скінченновимірному евклідові просторі існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора.

Доведення. Припустимо, що A – самоспряжений оператор на скінченновимірному евклідові просторі V. Будемо доводити теорему методом математичної індукції за розмірністю простору.

Припустимо спочатку, що $dimV=1$. В просторі V оберемо деякий ненульовий вектор a. Тоді цей вектор утворює базис простору V і $A(a)\in V$, **тобто** $A(a)=\alpha a$ **для деякого** $\alpha\in\mathbb{R}$. Тому вектор a – власний вектор оператора A. Цей вектор можна вибрати так, що $|a|=1$, тоді вектор a утворює шуканий ортонормований базис. Припустимо тепер, що твердження теореми виконується для всіх скінченновимірних евклідових просторів розмірності, що менша за n і нехай $dimV=n$. Оскільки A – самоспряжений оператор, то всі корені його характеристичного многочлена дійсні, тобто є власними числами оператора A. Нехай λ_1 – власне число оператора A, йому відповідає деякий власний вектор $a_1\in V$. Цей вектор можна вибрати таким, що $|a_1|=1$. Позначимо $L=\langle a_1\rangle$, тоді $V=L\oplus L^{\perp}$. Підпростір L інваріантний відносно оператора A і оскільки цей оператор самоспряжений, то підпростір $L^{\perp}$ також інваріантний відносно A; $dimL^{\perp}=n-1<n$, тоді, за припущенням індукції, в підпросторі $L^{\perp}$ для оператора A існує ортонормований базис $a_2,\dots,a_n$, що складається з власних векторів оператора. Тоді вектори $a_1,a_2,\dots,a_n$ утворюють ортонормований базис простору V, що складається з власних векторів оператора A.

Теорема про будову симетричної матриці. Для кожної симетричної матриці A існує діагональна матриця B і ортогональна матриця Q такі, що $B=Q^{\mathrm{T}}AQ$.

Доведення. Припустимо, що порядок симетричної матриці A дорівнює n. На просторі R^n всіх n-вимірних векторів з дійсними координатами введемо стандартний скалярний добуток: для $x=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $y=(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_n)$ $(x,y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\dots+\alpha_n\beta_n$. Простір R^n з таким скалярним добутком стає евклідовим простором, причому стандартний базис простору $e_1,e_2,\dots,e_n$ буде ортонормованим базисом.

Позначимо через A лінійний оператор на просторі R^n, якому в стандартному базисі $e_1,e_2,\dots,e_n$ відповідає дана матриця A. Оскільки базис ортонормований, а матриця симетрична, то оператор A самоспряжений.

За теоремою про будову самоспряжених операторів, в просторі R^n існує ортонормований базис $a_1,a_2,\dots,a_n$, що складається з власних векторів оператора A, тобто $A(a_1)=\lambda_1 a_1$, $A(a_2)=\lambda_2 a_2,\dots,A(a_n)=\lambda_n a_n$. В базисі $a_1,a_2,\dots,a_n$ оператору A відповідає діагональна матриця $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$. Позначимо через Q матрицю переходу від базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ до базису $a_1, a_2, \dots, a_n$, тоді $B = Q^{-1}AQ$. Матриця Q ортогональна, як матриця переходу від ортонормованого базису до ортонормованого базису, тому $Q^{-1} = Q^T$ і $B = Q^TAQ$.

Самоспряжені оператори на унітарному просторі.

Означення. Лінійний оператор A на унітарному просторі V називається самоспряженим, якщо $\forall\ x, y \in V\ (A(x), y) = (x, A(y))$. Таким чином, лінійний оператор A називається самоспряженим, якщо $A = A^*$.

Самоспряжений оператор на унітарному просторі ще називається ермітовим.

Означення. Квадратна матриця A з комплексними елементами називається ермітовою, якщо $A = A^* = \bar{A}^T$.

Властивості ермітових операторів.

1) Власні вектори ермітових операторів, що відповідають різним власним числам, є ортогональними.

2) Якщо підпростір L унітарного простору V інваріантний відносно ермітова оператора A, то підпростір $L^{\perp}$ також інваріантний відносно оператора A.

3) Лінійний оператор на скінченновимірному унітарному просторі термітів тоді і тільки тоді, коли в ортонормованому базисі йому відповідає ермітова матриця.

4) Власні числа ермітових операторів є дійсними числами.

5) Для кожного ермітова оператора в скінченновимірному унітарному просторі існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора.

Властивості ермітового оператора доводяться аналогічно властивостям самоспряженого оператора в евклідові просторі.

Будова невиродженого лінійного оператора на скінченновимірному евклідові просторі.

Лема. Нехай A – невироджений лінійний оператор на скінченновимірному евклідові просторі V, тоді оператор AA^* самоспряжений і всі його власні числа додатні.

Доведення. За властивостями операції спряження маємо: $(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$. Таким чином, оператор A^*A самоспряжений, а тому всі корені його характеристичного многочлена дійсні, тобто є власними числами оператора A^*A.

Нехай λ – власне число оператора A^*A. Покажемо, що $\lambda > 0$. Власному числу λ відповідає деякий власний вектор $a \in V$, тобто $a \neq \theta$, $(A^*A)(a) = \lambda a$. Тоді $((A^*A)(a), a) = (\lambda a, a) = \lambda(a, a)$. З іншого боку, $((A^*A)(a), a) = (A^*(A(a)), a) = (A(a), (A^*)^*(a)) = (A(a), A(a))$, тобто $\lambda(a, a) = (A(a), A(a))$. Але $a \neq \theta$ і оператор A невироджений, тому $A(a) \neq \theta$, звідси $(a, a) > 0$, $(A(a), A(a)) > 0$, тому $\lambda > 0$.

Теорема (про будову невиродженого оператора на скінченновимірному евклідові просторі). Для кожного невиродженного лінійного оператора A на скінченновимірному евклідові просторі V існують ортогональний оператор $\mathcal{H}$ і самоспряжений оператор $\mathcal{F}$ такі, що $A = \mathcal{H}\mathcal{F}$.

Доведення. Оскільки A – невироджений лінійний оператор на скінченновимірному евклідові просторі V, за лемою, оператор A^*A самоспряжений і всі його власні числа додатні. Тому існує ортонормований базис $a_1, a_2, \dots, a_n$ простору V, що складається з власних векторів оператора A^*A. Нехай $(A^*A)(a_1) = \lambda_1 a_1$, $(A^*A)(a_2) = \lambda_2 a_2, \dots, (A^*A)(a_n) = \lambda_n a_n$. При цьому $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$. В базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ оператору A^*A відповідає діагональна матриця $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Позначимо через $\mathcal{F}$ лінійний оператор на просторі V, якому відповідає матриця $F = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$. Оскільки базис є ортонормованим, а матриця F – симетрична, то оператор $\mathcal{F}$ самоспряжений. З того, що $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ випливає, що матриця F невироджена, а тому і оператор $\mathcal{F}$ невироджений, тобто існує оператор $\mathcal{F}^{-1}$. В базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ оператору $\mathcal{F}^{-1}$ відповідає матриця $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$. Оскільки базис $a_1, a_2, \dots, a_n$ ортонормований, то оператору $(\mathcal{F}^{-1})^* = (\mathcal{F}^*)^{-1}$ в цьому базисі відповідає матриця $(F^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$.

Позначимо через $\mathcal{H}$ оператор $\mathcal{H} = \mathcal{A}\mathcal{F}^{-1}$ і покажемо, що оператор $\mathcal{H}$ ортогональний. Для цього визначимо добуток операторів $\mathcal{H}^*\mathcal{H}$: $\mathcal{H}^*\mathcal{H} = (\mathcal{A}\mathcal{F}^{-1})^*\mathcal{A}\mathcal{F}^{-1} = (\mathcal{F}^{-1})^*\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{F}^{-1} = (\mathcal{F}^*)^{-1}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})\mathcal{F}^{-1}$. Цьому оператору в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідає матриця

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ оператору $\mathcal{H}^*\mathcal{H}$ відповідає одинична матриця. Отже, $\mathcal{H}^*\mathcal{H} = \varepsilon$, тобто $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^{-1}$. І оператор $\mathcal{H}$ ортогональний, причому, оскільки $\mathcal{H} = \mathcal{A}\mathcal{F}^{-1}$, то $\mathcal{A} = \mathcal{H}\mathcal{F}$.

Зауваження 1. Доведення теореми конструктивне і дає спосіб знаходження для даного оператора $\mathcal{A}$ операторів $\mathcal{H}$ і $\mathcal{F}$.

Зауваження 2. Аналогічно доводиться таке твердження: для кожного невиродженого лінійного оператора $\mathcal{A}$ на скінченновимірному евклідові просторі V існують ортогональний оператор $\mathcal{H}_1$ і самоспряжений оператор $\mathcal{F}_1$ такі, що $\mathcal{A} = \mathcal{H}_1\mathcal{F}_1$.

4. БІЛІНІЙНІ ТА КВАДРАТИЧНІ ФУНКЦІЇ

4.1. Білінійні функції та білінійні форми

Нехай V - векторний простір над полем R. Відображення f декартового добутку $V \times V$ у поле R називається *білінійною функцією*, якщо виконуються умови:

1. $\forall x, y, z \in V \ f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z)$;
2. $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in R \ f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$;
3. $\forall x, y, z \in V \ f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z)$;
4. $\forall x, y \in V, \ \forall \alpha \in R \ f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$.

Таким чином, функція f білінійна, якщо при фіксованому другому аргументі вона лінійна за першим і при фіксованому першому вона лінійна за другим. Прикладом білінійної функції є скалярний добуток у евклідові просторі. Але в загальному випадку $f(x, y) \neq f(y, x)$.

Припустимо тепер, що V - скінченновимірний простір, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - деякий фіксований базис простору, $x, y \in V$ - довільні вектори, які в даному базисі задаються координатами: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тоді $f(x, y) = f(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n, y_1 a_1 + y_2 a_2 + \ldots + y_n a_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(a_i, a_j) x_i y_j$

.

Позначимо

$$\alpha_{ij} = f(a_i, a_j), \quad i, j = \overline{1, n} \ ,$$

тоді

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j \ .$$

Сума такого вигляду називається *білінійною формою* від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Таким чином, можна зробити висновки:

1. На скінченновимірному просторі при фіксованому базисі будь-яка білінійна функція задається деякою білінійною формою.

2. При фіксованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ білінійна функція $f(x, y)$ на скінченновимірному просторі задається набором чисел $\alpha_{ij} \ (i, j = \overline{1, n})$, де $\alpha_{ij} = f(a_i, a_j)$. У цьому розумінні часто поняття білінійної функції заміняється поняттям білінійної форми. Зрозуміло, що при різних фіксованих базисах білінійна функція задається різними білінійними формами, тому кажуть про вигляд білінійної форми в різних базисах.

4.2. Матриця білінійної функції в базисі

Припустимо, що $f(x,y)$- білінійна функція на просторі V над полем R, $a_1,a_2,\ldots,a_n$- деякий фіксований базис простору V. *Матрицею білінійної функції* f у базисі $a_1,a_2,\ldots,a_n$ називається матриця

$$A=\begin{pmatrix} f(a_1,a_1)\, f(a_1,a_2)\cdots f(a_1,a_n) \\ f(a_2,a_1)\, f(a_2,a_2)\cdots f(a_2,a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(a_n,a_1)\, f(a_n,a_2)\ldots f(a_n,a_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\ \alpha_{22}\ \ldots\alpha_{2n} \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\ \alpha_{n2}\ \ldots\alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця білінійної функції в даному базисі цілком визначає білінійну функцію.

Нехай $x,y\in V$- довільні вектори, які в базисі $a_1,a_2,\ldots,a_n$ задаються такими координатами: $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Знайдемо значення функції f на векторах x,y:

$$f(x,y)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i a_i,\, y\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(a_i,y)=(x_1x_2\ldots x_n)\begin{pmatrix} f(a_1,y) \\ f(a_2,y) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f(a_n,y) \end{pmatrix}.$$

Далі,

$$\forall\ k=\overline{1,n}\ \ f(a_k,y)=f\left(a_k,\sum_{j=1}^{n}y_j a_j\right)=\sum_{j=1}^{n}f(a_k,a_j)y_j=$$

$$=(\,f(a_k,a_1)f(a_k,a_2)\ldots f(a_k,a_n)\ )\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином, виконуються рівності

$$f(a_1, y) = \begin{pmatrix} f(a_1, a_1) f(a_1, a_2) \ldots f(a_1, a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$$f(a_2, y) = \begin{pmatrix} f(a_2, a_1) f(a_2, a_2) \ldots f(a_2, a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

……………………………………………

$$f(a_n, y) = \begin{pmatrix} f(a_n, a_1) f(a_n, a_2) \ldots f(a_n, a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Рівності можемо переписати в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} f(a_1, y) \\ f(a_2, y) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f(a_n, y) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Звідси:

$$f(x, y) = (x_1 x_2 \ldots x_n) \begin{pmatrix} f(a_1, y) \\ f(a_2, y) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f(a_n, y) \end{pmatrix} = (x_1 x_2 \ldots x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином, можна зробити висновок: якщо A - матриця білінійної функції f у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$, вектори $x, y \in V$ задаються координатами в цьому базисі

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

то значення білінійної функції f на векторах x, y можна знайти за формулою

$$f(x,y)=(x_1 x_2 \dots x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

4.3. Зв'язок матриць білінійної функції в різних базисах

Теорема. Нехай білінійній функції $f(x,y)$ на скінченновимірному просторі V над полем R у базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідає матриця $A=(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$, а в базисі $b_1, b_2, \dots, b_n$ - матриця $B=(\beta_{ij})_{i,j=1}^{n}$, F - матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \dots, b_n$. Тоді $B=F^{\mathrm{T}}AF$.

Доведення. Нехай $x, y \in V$ - довільні вектори, які в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ задаються координатами $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, а в базисі $b_1, b_2, \dots, b_n$ - координатами $x=(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, $y=(y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1)$. Оскільки F - матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \dots, b_n$, то виконуються рівності

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=F\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \dots \\ x_n^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}=F\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ \dots \\ y_n^1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f(x,y)=(x_1 x_2 \dots x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}=(x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1)F^{\mathrm{T}}AF\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ \dots \\ y_n^1 \end{pmatrix}.$$

З іншого боку,

$$f(x,y)=\left(x_1^1 x_2^1 \ldots x_n^1\right)B\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ \cdots \\ y_n^1 \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що $B=F^{\mathrm{T}}AF$. Припустимо, що $F^{\mathrm{T}}AF=\left(\gamma_{ij}\right)_{i,j=1}^n$, і покажемо, що $\forall i,j=\overline{1,n}$ $\beta_{ij}=\gamma_{ij}$. Зафіксуємо індекси i,j. Тоді $\beta_{ij}=f\left(b_i,b_j\right)$. З іншого боку,

$$f\left(b_i,b_j\right)=\left(\begin{array}{c} 00\ldots \underset{i}{1}\ldots 0 \end{array}\right)F^{\mathrm{T}}AF\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}_{j}=\gamma_{ij}.$$

Тобто, $\beta_{ij}=\gamma_{ij}$.

Наслідок. Ранг матриці білінійної функції не залежить від вибору базису.

Доведення. Якщо A,B - матриці білінійної функції $f(x,y)$ у різних базисах, то $B=F^{\mathrm{T}}AF$ для деякої невиродженої матриці F. Як відомо, домноження матриці зліва або справа на невироджену матрицю не змінює її рангу. Тому ранги матриць A і B рівні.

З останнього наслідку випливає коректність наступного означення.

Означення. *Рангом білінійної функції* на скінченновимірному просторі називається ранг її матриці в деякому базисі.

Означення. Квадратні матриці A,B називаються *конгруентними*, якщо існує невироджена матриця F така, що $B=F^{\mathrm{T}}AF$.

У теоремі було доведено, що матриці білінійної функції в різних базисах конгруентні.

Матриця білінійної функції в даному базисі цілком задає цю функцію.

З іншого боку, нехай A - квадратна матриця з дійсними елементами порядку n, V - векторний простір над полем R розмірності n, тоді матриця A задає на просторі V деяку білінійну функцію. Дійсно, зафіксуємо деякий базис простору $a_1,a_2,\ldots,a_n$; $x,y\in V$ - довільні вектори, які в цьому базисі задаються такими координатами: $x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, $y=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$. Покладемо

$$f(x,y)=(x_1x_2\dots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\\y_n\end{pmatrix}.$$

Функція f є білінійною функцією на просторі V, якій у даному базисі відповідає матриця A.Таким чином, при фіксованому базисі простору розмірності n між білінійними функціями на цьому просторі і квадратними матрицями з дійсними елементами порядку n існує взаємнооднозначна відповідність.

4.4. Симетричні та кососиметричні білінійні функції

Означення. Білінійна функція $f(x,y)$ на просторі V називається *симетричною*, якщо $\forall x,y\in V\, f(y,x)=f(x,y)$.

Припустимо, що V - скінченновимірний простір, $a_1,a_2,\dots,a_n$ - деякий фіксований базис простору. Тоді $\forall\, i,j=\overline{1,n}\;\; f(a_i,a_j)=f(a_j,a_i)$, тобто, матриця симетричної білінійної функції в будь-якому базисі симетрична. Прикладом симетричної білінійної функції є скалярний добуток у евклідові просторі.

Зрозуміло, що на просторі розмірності n будь-яка симетрична матриця порядку n задає симетричну білінійну функцію.

Означення. Білінійна функція $f(x,y)$ на просторі V називається *кососиметричною,* якщо $\forall x,y\in V\;\; f(y,x)=-f(x,y)$.

Означення. Квадратна матриця A називається *кососиметричною*, якщо $A^{\mathrm{T}}=-A$.

Припустимо, що $f(x,y)$- кососиметрична білінійна функція на скінченновимірному векторному просторі V, $a_1,a_2,\dots,a_n$ - деякий фіксований базис простору. Тоді $\forall\, i,j=\overline{1,n}\;\; f(a_j,a_i)=-f(a_i,a_j)$. Тобто, в будь-якому базисі кососиметричній білінійній функції відповідає кососиметрична матриця.

Зрозуміло також, що для кососиметричної білінійної функції виконується: $\forall\, x\in V\;\; f(x,x)=0$.

Дослідження довільних білінійних функцій у певному розумінні зводиться до дослідження симетричних та кососиметричних білінійних функцій.

Зрозуміло, що існують білінійні функції, які не є симетричними або кососиметричними. Нехай $f(x,y)$- довільна білінійна функція на просторі V
,

покладемо

$$\forall x, y \in V \; g(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x)).$$

Оскільки сума двох білінійних функцій є білінійною функцією, а також добуток білінійної функції на дійсне число - білінійна функція, то $g(x, y)$- білінійна функція. При цьому

$$\forall x, y \in V \; g(y, x) = \frac{1}{2}(f(y, x) + f(x, y)) = g(x, y).$$

Тобто, $g(x, y)$ - симетрична білінійна функція. Далі покладемо

$$\forall x, y \in V \; h(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) - f(y, x)).$$

Тоді $h(x, y)$ - білінійна функція і

$$\forall x, y \in V \; h(y, x) = \frac{1}{2}(f(y, x) - f(x, y)) = -\frac{1}{2}(f(x, y) - f(y, x)) = -h(x, y).$$

Тобто, $h(x, y)$ - кососиметрична білінійна функція. Причому

$$\forall x, y \in V \, f(x, y) = g(x, y) + h(x, y).$$

Таким чином, будь-яка білінійна функція є сумою деякої симетричної та деякої кососиметричної білінійних функцій.

4.5. Квадратичні функції та квадратичні форми

Нехай $g(x, y)$- симетрична білінійна функція на векторному просторі V над полем R.

Означення. *Квадратичною функцією* $f(x)$ називається функція одного аргументу, яка утворена ототожненням аргументів симетричної білінійної функції $g(x, y)$, тобто, $\forall x \in V \; f(x) = g(x, x)$.

Означення. Симетрична білінійна функція $g(x, y)$, яка породжує квадратичну функцію $f(x)$, називається *полярною білінійною функцією* квадратичної функції $f(x)$.

Теорема. Для даної квадратичної функції існує єдина полярна білінійна функція.

Доведення. Нехай $f(x)$- квадратична функція на просторі V , $g(x, y)$- її полярна симетрична білінійна функція. Тоді для даних фіксованих $x, y \in V$, враховуючи симетричність функції g, одержимо:

$$g(x + y, x + y) = g(x, x) + g(x, y) + g(y, x) + g(y, y) = g(x, x) + 2g(x, y) + g(y, y)$$

.

Звідси

$$g(x,y)=\frac{1}{2}\left(g(x+y,x+y)-g(x,x)-g(y,y)\right)=\frac{1}{2}\left(f(x+y)-f(x)-f(y)\right).$$

Якщо $h(x,y)$- інша полярна білінійна функція, то також виконується

$$h(x,y)=\frac{1}{2}\left(f(x+y)-f(x)-f(y)\right),$$

тобто,

$$\forall x,y\in V\ \ g(x,y)=h(x,y)\ .$$

У розумінні цієї теореми дослідження симетричних білінійних функцій зводиться до дослідження квадратичних функцій.

Припустимо, що V - скінченновимірний простір, $a_1,a_2,\dots,a_n$- деякий фіксований базис простору, $x\in V$ - довільний вектор, який у цьому базисі задається такими координатами: $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Тоді

$$f(x)=g(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g(a_i,a_j)x_i x_j\ .$$

Позначимо

$$\alpha_{ij}=g(a_i,a_j),\ \ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}\,.$$

Тоді

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,x_i\,x_j\ .$$

Сума такого вигляду називається *квадратичною формою* від змінних $x_1,x_2,\dots,x_n$. Таким чином, квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі в будь-якому базисі задається деякою квадратичною формою. В цьому розумінні часто ототожнюють поняття квадратичної функції та квадратичної форми. Оскільки в різних базисах квадратична функція задається різними квадратичними формами, то кажуть про вигляд квадратичної форми в тому чи іншому базисі.

Означення. *Матрицею квадратичної функції* $f(x)$ у даному базисі $a_1,a_2,\dots,a_n$ називається матриця в цьому базисі її полярної білінійної функції $g(x,y)$.

4.6. Два способи завдання квадратичних функцій

Припустимо, що $f(x)$- квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі V, $g(x,y)$- її полярна білінійна функція, $a_1,a_2,\dots,a_n$ - фіксований базис простору, в якому квадратичній функції відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22} \dots \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2} \dots \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $x \in V$ - довільний вектор, який у даному базисі має такі координати: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$f(x) = (x_1 x_2 \dots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Цей спосіб є матричним способом завдання квадратичної функції.

Перемножимо матриці і отримаємо:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j ,$$

або, враховуючи симетричність матриці,

$$f(x) = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \dots + \alpha_{nn} x_n^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + 2\alpha_{13} x_1 x_3 + \dots + 2\alpha_{1n} x_1 x_n + 2\alpha_{23} x_2 x_3 +$$

$$+ \dots + 2\alpha_{2n} x_2 x_n + \dots + 2\alpha_{n-1,n} x_{n-1} x_n .$$

Одержуємо квадратичну форму від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Цей спосіб є завданням квадратичної функції за допомогою квадратичної форми.

Припустимо, що в даному базисі квадратична функція задається квадратичною формою. Виникає питання, як знайти матрицю квадратичної функції в цьому базисі. Неважко бачити, що коефіцієнтами при квадратах змінних є діагональні елементи матриці. Припустимо, що всі члени в квадратичній формі зведені, тоді при $i < j$ коефіцієнтом при добутку змінних $x_i x_j$ є сума елементів матриці $\alpha_{ij} + \alpha_{ji}$, причому $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Звідси випливають наступні правила побудови матриці квадратичної функції.

1. Визначається, від скількох змінних залежить квадратична форма. Це число дає порядок матриці.
2. На головній діагоналі матриці виписуються коефіцієнти при квадратах змінних.
3. Заповнюється верхній трикутник матриці: на місці i, j при $i < j$ ставиться половина коефіцієнта при добутку змінних $x_i x_j$.
4. Заповнюється нижній трикутник матриці так, щоби матриця була симетричною.

4.7. Зведення квадратичної функції до канонічного вигляду

Нехай $f(x)$ - квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі V , $a_1, a_2, \dots, a_n$ - фіксований базис простору, в якому квадратична функція задається деякою квадратичною формою

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \; x_j \; .$$

Квадратична форма $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} y_i y_j$ називається *канонічною*, якщо в ній присутні лише квадрати змінних, тобто,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} y_i y_j = \beta_{11} y_1^2 + \beta_{22} y_2^2 + \dots + \beta_{nn} y_n^2 \quad .$$

Задача зведення полягає в тому, що, користуючись даним базисом $a_1, a_2, \dots, a_n$ простору, знаходиться такий базис простору $b_1, b_2, \dots, b_n$, у якому квадратична функція задається канонічною квадратичною формою. Зрозуміло, що в такому базисі матриця квадратичної функції є діагональною. Звідси - матричне формулювання задачі. Користуючись матрицею A квадратичної функції в даному базисі знайти
невироджену матрицю F, таку, що матриця $B = F^{\mathrm{T}} A \; F$ діагональна. Тоді F - матриця переходу до нового базису.

Згадаємо деякі факти. Нехай $Б_1 : a_1, a_2, \dots, a_n$ і $Б_2 : b_1, b_2, \dots, b_n$ - базиси векторного простору V, F - матриця переходу від базису $Б_1$ до базису $Б_2$. Якщо довільний вектор $x \in V$ у базисі $Б_1$ задається координатами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а в базисі $Б_2$ - координатами $x = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Навпаки, якщо для деякої квадратної матриці F виконується:

$$\forall\, x \in V \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

то F - матриця переходу від базису $Б_1$ до базису $Б_2$. Дійсно, зафіксуємо індекс $i\,(\,i \le n)$ і, оскільки рівність виконується для будь-якого $x \in V$, покладемо $x = b_i$. Тоді вектор b_i в базисі $Б_1$ задається такими координатами: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а в базисі $Б_2$- координатами: $b_i = (0{,}0, \dots, 1, \dots, 0)$, де координата 1 знаходиться на i-му місці. Тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що вектор-стовпчик

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

співпадає з i-м стовпчиком матриці F. Тобто, матриця F складається з координат
векторів $b_1, b_2, \dots, b_n$ у базисі $Б_1$. Отже, матриця F є матрицею переходу від базису
$Б_1$ до базису $Б_2$.

4.8. Метод Лагранжа (метод виділення повних квадратів)

Метод Лагранжа є методом зведення квадратичної функції до канонічного вигляду. Він полягає в послідовних виділеннях повних квадратів та замінах змінних. Кожна заміна змінних означає перехід до нового базису. Нехай квадратична функція $f(x)$ на скінченновимірному просторі V у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ задається квадратичною формою:

$$f(x) = \alpha_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + 2\alpha_{13} x_1 x_3 + \ldots + 2\alpha_{1n} x_1 x_n + \\ + 2\alpha_{23} x_2 x_3 + 2\alpha_{24} x_2 x_4 + \ldots + 2\alpha_{2n} x_2 x_n + \ldots + 2\alpha_{n-1,n} x_{n-1} x_n ,$$

і припустимо, що $\alpha_{11} \neq 0$. В дужках збираємо всі доданки, що містять змінну x_1 :

$$f(x) = \left(\alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + 2\alpha_{13} x_1 x_3 + \ldots + 2\alpha_{1n} x_1 x_n\right) + c(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{11}^2 x_1^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2\alpha_{11}\alpha_{1n} x_1 x_n\right) + c(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

де $c(x_2, x_3, \ldots, x_n)$- деяка квадратична форма від змінних $x_2, x_3, \ldots, x_n$. У дужках виділяємо повний квадрат:

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{11}^2 x_1^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2\alpha_{11}\alpha_{1n} x_1 x_n\right) = \\ = \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n)^2 - t(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

де $t(x_2, x_3, \ldots, x_n)$- сума всіх доданків, які не містять змінну x_1. Тоді

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n)^2 + g(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

де $g(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ - квадратична форма від змінних $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Зробимо заміну змінних:

$$y_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3, \ldots, y_n = x_n .$$

Або, в матричному вигляді,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ 0 \quad 1 \quad \ldots \ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \quad \ldots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ 0 \quad 1 \quad \ldots \ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \quad \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця T невироджена, оскільки $\alpha_{11} \neq 0$.

З'ясуємо зміст цієї заміни. Заміна змінних означає перехід до нового базису $c_1, c_2, \dots, c_n$, причому, якщо вектор $x \in V$ у базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ задається координатами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а в базисі $c_1, c_2, \dots, c_n$- координатами $x = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином, T^{-1} - матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $c_1, c_2, \dots, c_n$.

У новому базисі квадратична функція задається квадратичною формою:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_{11}} y_1^2 + g(y_2, y_3, \dots, y_n).$$

Далі застосовуємо аналогічні міркування для квадратичної форми $g(y_2, y_3, \dots, y_n)$.

Припустимо, що в початковій квадратичній формі $\alpha_{11} = 0$, але для деякого i $\alpha_{ii} \neq 0$.Тоді використовуємо аналогічні міркування для змінної x_i.

Окремо розглянемо випадок, коли в початковій квадратичній формі немає квадратів змінних, тобто,

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \dots = \alpha_{nn} = 0.$$

Тоді форма складається лише з мішаних добутків змінних і для деякої пари індексів $i, j\, (i \neq j)\, \alpha_{ij} \neq 0$. Припустимо для визначеності, що $\alpha_{12} \neq 0$, і зробимо заміну змінних:

$$x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3, \dots, x_n = y_n.$$

У матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \dots 0 \\ 1 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \dots 0 \\ 1 & -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Заміна змінних означає перехід від початкового базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до нового базису $v_1, v_2, \dots, v_n$, причому, якщо вектор $x \in V$ у базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ задається координатами: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а в базисі $v_1, v_2, \dots, v_n$ – координатами: $x = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тобто, T_0 - матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $v_1, v_2, \dots, v_n$.

У новому базисі квадратична функція задається квадратичною формою:

$$f(x) = 2\alpha_{12}x_1x_2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + \dots + 2\alpha_{1n}x_1x_n + 2\alpha_{23}x_2x_3 + \dots + 2\alpha_{2n}x_2x_n + \dots + 2\alpha_{n-1,n}x_{n-1}x_n =$$

$$= 2\alpha_{12}(y_1^2 - y_2^2) + 2\alpha_{13}(y_1 + y_2)y_3 + \dots + 2\alpha_{1n}(y_1 + y_2)y_n + 2\alpha_{23}(y_1 - y_2)y_3 + \dots +$$

$$+ 2\alpha_{2n}(y_1 - y_2)y_n + \dots + 2\alpha_{n-1,n}y_{n-1}y_n = 2\alpha_{12}y_1^2 - 2\alpha_{12}y_2^2 + h(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

де квадратична форма $h(y_1, y_2, \dots, y_n)$ складається лише з мішаних добутків змінних.

Продовжуючи цей процес далі, через k кроків приходимо до базису простору $b_1, b_2, \dots, b_n$, у якому квадратична функція $f(x)$ задається канонічною квадратичною формою:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_{11}} z_1^2 + \gamma_{22} z_2^2 + \dots + \gamma_{nn} z_n^2.$$

Кожний крок алгоритму означає перехід до нового базису. Нехай $F_1, F_2, \dots, F_k$

- відповідні матриці переходу. Тоді для початкових та заключних змінних виконується рівність:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = F_1 F_2 \dots F_k \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Це означає, що матриця $F = F_1 F_2 \dots F_k$ є матрицею переходу від початкового базису

$a_1, a_2, \dots, a_n$ до заключного базису $b_1, b_2, \dots, b_n$.

4.9. Метод Якобі

Нехай A - квадратна матриця порядку n. *Кутовим мінором* порядку i $(i \le n)$ матриці A називається мінор Δ_i, побудований на перших i рядках та i стовпчиках матриці A.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22} \dots \alpha_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2} \dots \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

тоді

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}\alpha_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \alpha_{11}, \ \Delta_n = \det A.$$

Будемо казати, що матриця A задовольняє *умову Якобі*, якщо всі її кутові мінори не дорівнюють нулю.

Теорема Якобі (*критерій Якобі*). Нехай квадратична функція $f(x)$ на скінченновимірному векторному просторі V у деякому базисі задається матрицею A, яка задовольняє умову Якобі. Тоді в просторі V існує базис, у якому функції f відповідає квадратична форма:

$$f(x)=\frac{1}{\Delta_1}y_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2+\ldots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}y_n^2\ ,$$

де $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$ - всі кутові мінори матриці A .

Доведення. Припустимо, що в базисі $a_1,a_2,\ldots,a_n$ простору V квадратичній
функції $f(x)$ відповідає матриця

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nn}\end{pmatrix},$$

яка задовольняє умову Якобі . Через $g(x,y)$ позначимо полярну симетричну білінійну функцію, яка породжує квадратичну функцію $f(x)$. Новий базис $b_1,b_2,\ldots,b_n$ простору будемо шукати у вигляді

$$b_1=\beta_{11}a_1,$$
$$b_2=\beta_{21}a_1+\beta_{22}a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_k=\beta_{k1}a_1+\beta_{k2}a_2+\ldots+\beta_{kk}a_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n=\beta_{n1}a_1+\beta_{n2}a_2+\ldots+\beta_{nn}a_n.$$

Для знаходження коефіцієнтів β_{ij} припустимо, що вектори $b_1,b_2,\ldots,b_n$ задовольняють умови

$$g(a_i,b_i)=1\,\forall\ i=\overline{1,n},$$
$$g(a_j,b_i)=0,\ \text{при}\ j<i.$$

Знайдемо спочатку вектор b_1 :

$$1=g(a_1,b_1)=g(a_1,\beta_{11}a_1)=\beta_{11}g(a_1,a_1)=\beta_{11}\alpha_{11}.$$

Оскільки $\alpha_{11}=\Delta_1\neq 0$, то $\beta_{11}=\dfrac{1}{\Delta_1}$, а тому

$$b_1=\frac{1}{\Delta_1}a_1.$$

Припустимо тепер, що вже знайдено вектори $b_1,b_2,\ldots,b_{k-1}$ $(1<k\le n)$, і знайдемо вектор b_k, скориставшись умовами

$$g(a_1,b_k)=0,\ \ g(a_2,b_k)=0,\ldots,g(a_{k-1},b_k)=0,\ \ g(a_k,b_k)=1.$$

Це означає, що

$$g(a_1,\beta_{k1}a_1+\beta_{k2}a_2+\ldots+\beta_{kk}a_k)=\beta_{k1}g(a_1,a_1)+\beta_{k2}g(a_1,a_2)+\ldots+\beta_{kk}g(a_1,a_k)=0$$

$$g(a_2, \beta_{k1}a_1 + \beta_{k2}a_2 + \ldots + \beta_{kk}a_k) = \beta_{k1}g(a_2, a_1) + \beta_{k2}g(a_2, a_2) + \ldots + \beta_{kk}g(a_2, a_k) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g(a_{k-1}, \beta_{k1}a_1 + \beta_{k2}a_2 + \ldots + \beta_{kk}a_k) = \beta_{k1}g(a_{k-1}, a_1) + \beta_{k2}g(a_{k-1}, a_2) + \ldots + \beta_{kk}g(a_{k-1}, a_k$$

$$g(a_k, \beta_{k1}a_1 + \beta_{k2}a_2 + \ldots + \beta_{kk}a_k) = \beta_{k1}g(a_k, a_1) + \beta_{k2}g(a_k, a_2) + \ldots + \beta_{kk}g(a_k, a_k) = 1.$$

Оскільки $\forall\ i, j = \overline{1,n}\ g(a_i, a_j) = \alpha_{ij}$, то ці рівності можна переписати так:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}\beta_{k1} + \alpha_{12}\beta_{k2} + \ldots + \alpha_{1k}\beta_{kk} = 0 \\
&\alpha_{21}\beta_{k1} + \alpha_{22}\beta_{k2} + \ldots + \alpha_{2k}\beta_{kk} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_{k-1,1}\beta_{k1} + \alpha_{k-1,2}\beta_{k2} + \ldots + \alpha_{k-1,k}\beta_{kk} = 0 \\
&\alpha_{k1}\beta_{k1} + \alpha_{k2}\beta_{k2} + \ldots + \alpha_{kk}\beta_{kk} = 1.
\end{aligned}$$

Ми одержали систему лінійних рівнянь відносно невідомих $\beta_{k1}, \beta_{k2}, \ldots, \beta_{kk}$. Система квадратна, її головний визначник D співпадає з кутовим мінором Δ_k матриці A. Тобто, $D \neq 0$, за умовою теореми. Система має єдиний розв'язок, за теоремою Крамера, - $\beta_{k1}, \beta_{k2}, \ldots, \beta_{kk}$, ці значення визначають вектор b_k. Знайдемо β_{kk} за формулою Крамера:

$$\beta_{kk} = \frac{D_k}{D},$$

де D_k - визначник, який одержується з визначника D заміною k-го
стовпчика на

стовпчик вільних членів. Але

$$D = \Delta_k = \begin{vmatrix} & & & \alpha_{1k} \\ & \Delta_{k-1} & & \alpha_{2k} \\ & & & \ldots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} \end{vmatrix},$$

тоді

$$D_k = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & \Delta_{k-1} & & 0 \\ & & & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{k-1}.$$

Тому

$$\beta_{kk} = \frac{D_k}{D} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Доведемо тепер, що вектори $b_1, b_2, \dots, b_n$ утворюють базис простору. Оскільки кількість векторів у цій системі співпадає з розмірністю простору, то достатньо довести лінійну незалежність цієї системи. Припустимо супротивне. Тобто, нехай ці вектори лінійно залежні. Оскільки

$$b_1 = \frac{1}{\Delta_1} a_1 \neq \theta,$$

це означає, що деякий вектор b_k $(k > 1)$ лінійно виражається через попередні вектори системи $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$, тобто,

$$b_k = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_{k-1} b_{k-1}.$$

Але для кожного індексу i вектор b_i лінійно виражається лише через вектори $a_1, a_2, \dots, a_i$, тоді вектор b_k можна лінійно виразити через вектори $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$:

$$b_k = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_{k-1} a_{k-1}$$

для деяких $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}$. Отже,

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_{k-1} b_{k-1} = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_{k-1} a_{k-1}.$$

Тоді

$$b_k = \beta_{k1} a_1 + \beta_{k2} a_2 + \dots + \beta_{k,k-1} a_{k-1} + \beta_{kk} a_k = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_{k-1} a_{k-1}.$$

Оскільки

$$\beta_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} \neq 0,$$

то з останньої рівності вектор a_k можна лінійно виразити через вектори $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$. Цього бути не може, оскільки вектори $a_1, a_2, \dots, a_n$ утворюють базис простору. Таким чином, припущення було не вірним, а тому вектори $b_1, b_2, \dots, b_n$ лінійно незалежні і також утворюють базис простору.

Знайдемо матрицю B квадратичної функції $f(x)$ у базисі $b_1, b_2, \dots, b_n$. Припустимо спочатку, що $j < k$, і, враховуючи принцип побудови векторів $b_1, b_2, \dots, b_n$, одержуємо:

$$g(b_j, b_k) = g(\beta_{j1}a_1 + \beta_{j2}a_2 + \ldots + \beta_{jj}a_j, b_k) =$$
$$= \beta_{j1}g(a_1, b_k) + \beta_{j2}g(a_2, b_k) + \ldots + \beta_{jj}g(a_j, b_k) = 0.$$

Оскільки матриця B симетрична, звідси випливає, що всі її елементи, що стоять поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю. Тобто, матриця B діагональна.

Знайдемо тепер діагональні елементи:

$$g(b_k, b_k) = g(\beta_{k1}a_1 + \beta_{k2}a_2 + \ldots + \beta_{k,k-1}a_{k-1} + \beta_{kk}a_k, b_k) =$$
$$= \beta_{k1}g(a_1, b_k) + \beta_{k2}g(a_2, b_k) + \ldots + \beta_{k,k-1}g(a_{k-1}, b_k) + \beta_{kk}g(a_k, b_k) = \beta_{kk}g(a_k, b_k) = \beta_{kk}.$$

Таким чином,

$$g(b_k, b_k) = \beta_{kk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_1}, & \text{при } k = 1 \\ \dfrac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}, & \text{при } k > 1 \end{cases}.$$

Тобто, матриця має такий вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\Delta_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\Delta_2}{\Delta_3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}.$$

Якщо довільний вектор $x \in V$ у базисі $b_1, b_2, \ldots, b_n$ задається такими координатами: $x = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то

$$f(x) = (y_1 y_2 \ldots y_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_1}y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}y_n^2.$$

Тобто, в базисі $b_1, b_2, \ldots, b_n$ квадратична функція $f(x)$ задається такою канонічною квадратичною формою:

$$f(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2.$$

4.10. Закон інерції квадратичних форм

Нехай $f(x)$ - квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі V над полем R. Тоді в будь-якому базисі простору вона задається деякою квадратичною формою. Квадратичну функцію можна звести до канонічного вигляду. Це означає, що шукається базис, у якому функція $f(x)$ задається канонічною квадратичною формою. Але цей базис можна знайти різними способами. Тому для даної квадратичної функції існує багато таких базисів і багато канонічних квадратичних форм. Але для всіх цих форм виконується закон інерції квадратичних форм.

Теорема (*закон інерції квадратичних форм*). Незалежно від способу зведення квадратичної функції на скінченновимірному просторі до канонічного вигляду у відповідних канонічних квадратичних формах число додатних коефіцієнтів, число від'ємних коефіцієнтів, а тому і число ненульових є величинами сталими.

Доведення. Нехай $f(x)$ - квадратична функція на скінченновимірному просторі V, $Б_1 : a_1, a_2, \ldots, a_n$, $Б_2 : b_1, b_2, \ldots, b_n$ - базиси простору, в яких функція $f(x)$ задається канонічними квадратичними формами. Припустимо, що в базисі $Б_1$ функції $f(x)$ відповідає квадратична форма:

$$f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_k x_k^2 - \lambda_{k+1} x_{k+1}^2 - \lambda_{k+2} x_{k+2}^2 - \ldots - \lambda_{k+s} x_{k+s}^2 + 0x_{k+s+1}^2 + \ldots + 0x_n^2,$$
$$\lambda_i > 0 \ \forall\, i = \overline{1, k+s}.$$

У базисі $Б_2$ функції $f(x)$ відповідає квадратична форма:

$$f(x) = \gamma_1 y_1^2 + \gamma_2 y_2^2 + \ldots + \gamma_m y_m^2 - \gamma_{m+1} y_{m+1}^2 - \gamma_{m+2} y_{m+2}^2 - \ldots - \gamma_{m+p} y_{m+p}^2 + 0y_{m+p+1}^2 + \ldots + 0y_n^2,$$
$$\gamma_i > 0 \ \forall\, i = \overline{1, m+p}.$$

Доведемо, що $k = m$ і $s = p$.

Покажемо спочатку, що $k + s = m + p$. Оскільки в базисі $Б_1$ квадратична функція $f(x)$ задається канонічною квадратичною формою, то в цьому базисі матриця квадратичної функції діагональна. На діагоналі матриці стоять коефіцієнти при квадратах змінних у квадратичній формі. Тобто, ранг цієї матриці дорівнює $k + s$. Аналогічно, в базисі $Б_2$ квадратичній функції

$f(x)$ відповідає діагональна матриця, ранг якої дорівнює $m+p$. Вище було показано, що ранг матриці білінійної функції не залежить від вибору базису, тому $k+s=m+p.$

Покажемо тепер, що $k=m$. Доведемо це від супротивного. Припустимо, що $k \neq m$ і, для визначеності, покладемо, що $k>m$. Визначимо підпростори:

$$L=\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle, M=\langle b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n \rangle.$$

Тоді

$$\dim(L \cap M)=\dim L+\dim M-\dim(L+M),$$

але

$$\dim L+\dim M=k+n-m=n+(k-m)>n, \ \dim(L+M) \leq n,$$

а тому

$$\dim(L \cap M)>0.$$

Тобто, існує ненульовий вектор $a \in L \cap M$ ($a \neq \theta$).

Оскільки $a \in L$, то вектор a лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$a=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_k a_k,$$

тобто, в базисі простору $Б_1$ вектор a задається такими координатами:

$$a=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0).$$

А тому

$$f(a)=\lambda_1 \alpha_1^2+\lambda_2 \alpha_2^2+\ldots+\lambda_k \alpha_k^2.$$

Оскільки $a \neq \theta$, то серед координат $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ існує принаймні одна ненульова і, враховуючи, що $\lambda_i>0 \ \forall \ i=\overline{1,k}$, одержуємо, що $f(a)>0$. Оскільки $a \in M$, то вектор a лінійно виражається через вектори $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n$:

$$a=\beta_{m+1} b_{m+1}+\beta_{m+2} b_{m+2}+\ldots+\beta_n b_n.$$

Тобто, в базисі $Б_2$ вектору a відповідають такі координати:

$$a=(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m}, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots, \beta_n).$$

Тоді

$$f(a)=-\gamma_{m+1} \beta_{m+1}^2-\gamma_{m+2} \beta_{m+2}^2-\ldots-\gamma_{m+p} \beta_{m+p}^2+0 \beta_{m+p+1}^2+\ldots+0 \beta_n^2 \leq 0,$$

оскільки $\gamma_j>0 \ \forall \ j=\overline{m+1, m+p}$. Приходимо до суперечності:

$$f(a)>0 \text{ і } f(a) \leq 0.$$

Отже, $k=m$ і, оскільки, за доведеним, $k+s=m+p$, то $s=p$.

Зауваження. Під *рангом квадратичної функції* розуміється ранг її полярної білінійної функції. Ранг білінійної функції дорівнює рангу її матриці в будь-якому базисі. Якщо квадратична функція зводиться до канонічного вигляду, то знаходиться базис, у якому квадратичній функції відповідає діагональна матриця і канонічна квадратична форма. На діагоналі матриці стоять коефіцієнти при квадратах змінних у квадратичній формі. Звідси випливає, що ранг квадратичної функції співпадає з числом ненульових коефіцієнтів у канонічній квадратичній формі, яка відповідає цій квадратичній функції.

4.11. Додатні квадратичні функції

Означення. Квадратична функція $f(x)$ на векторному просторі V над полем R називається *додатною*, якщо для $\forall x \in V$ $f(x) \geq 0$, причому $f(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = \theta$.

Нехай $g(x, y)$ - полярна симетрична білінійна функція, що породжує додатну квадратичну функцію $f(x)$, тоді $g(x, y)$ задає на просторі V скалярний добуток.

Дійсно, перевіримо виконання умов скалярного добутку:

1. $\forall x, y \in V$ $g(x, y) = g(y, x)$.

Це випливає з симетричності білінійної функції $g(x, y)$.

2. $\forall x, y, z \in V$ $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$.
3. $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in R$ $g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)$.

Виконання цих умов випливає з лінійності функції $g(x, y)$ за першим аргументом.

4. $\forall x \in V$ $g(x, x) \geq 0$, $g(x, x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = \theta$.

Умова виконується, оскільки $f(x) = g(x, x)$- додатна квадратична функція.

4.12. Критерій Сильвестера

Будемо казати, що матриця A з дійсними елементами задовольняє *умову Сильвестера*, якщо всі її кутові мінори додатні.

Тобто, якщо n - порядок матриці, а $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ - всі кутові мінори матриці, то $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

Теорема ***(критерій Сильвестера).*** Квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі додатна тоді і тільки тоді, коли в деякому базисі простору її матриця задовольняє умову Сильвестера.

Доведення. Необхідність. Нехай $f(x)$ - додатна квадратична функція на скінченновимірному просторі V. Покажемо, що в будь-якому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору матриця квадратичної функції

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

задовольняє умову Сильвестера.

Доведемо це індукцією за розмірністю n простору.

Нехай спочатку $\dim V = 1$, ненульовий вектор a_1 утворює базис V. Тоді в цьому базисі квадратична функція $f(x)$ задається квадратичною формою:

$$f(x) = \alpha_{11}x_1^2.$$

Припустимо, що $x \in V, x \neq \theta$. Тоді $x = x_1 a_1$ для деякого $x_1 \in R$, причому $x_1 \neq 0$; $f(x) = \alpha_{11}x_1^2$ і, оскільки $f(x)$ - додатна квадратична функція, то $f(x) > 0$. Але $x_1^2 > 0$, тому

$$\alpha_{11} = \Delta_1 > 0.$$

Припустимо тепер, що твердження виконується для всіх просторів розмірності менше n $(n > 1)$, тобто, будь-яка квадратична функція в будь-якому базисі такого простору задається матрицею, яка задовольняє умову Сильвестера. І нехай $\dim V = n$, $f(x)$ - деяка квадратична функція на V, $a_1, a_2, \ldots, a_n$- фіксований базис простору, в якому функції $f(x)$ відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0,$ де $\Delta_1,\ \Delta_2, \ldots, \Delta_n$- всі кутові мінори матриці A. У цьому базисі квадратична функція задається такою квадратичною формою:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_i x_j .$$

Цю квадратичну форму можна переписати так:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{ij}\, x_i x_j + \alpha_{nn}x_n^2 + 2\alpha_{1n}x_1 x_n + 2\alpha_{2n}x_2 x_n + \ldots + 2\alpha_{n-1,n}x_{n-1}x_n .$$

Визначимо підпростір $L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\rangle,$ і нехай

$$h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_i x_j \ .$$

Тоді $h(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$- квадратична форма від змінних $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, яка при фіксованому базисі $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ підпростору L задає на цьому підпросторі деяку квадратичну функцію $f_1(x)$, причому $\forall x \in L \ f_1(x) = f(x)$. Тому, оскільки функція $f(x)$ додатна, то і функція $f_1(x)$ додатна. Але

$$\dim L = n - 1 < n\,,$$

тому, за припущенням індукції, матриця квадратичної функції $f_1(x)$ на підпросторі L у базисі $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ задовольняє умову Сильвестера. Ця матриця співпадає з матрицею кутового мінору Δ_{n-1} матриці A, звідси $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0$.

Залишається показати, що $\Delta_n > 0$. Зводимо квадратичну функцію $f(x)$ до канонічного вигляду. При цьому знаходимо базис простору $b_1, b_2, \dots, b_n$, у якому функції $f(x)$ відповідає діагональна матриця:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 \ 0 \dots 0 \\ 0 \ \lambda_2 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \ 0 \dots \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що

$$\forall j = \overline{1, n} \ \lambda_j = f(b_j),$$

і, оскільки

$$\forall \, j = \overline{1, n} \ b_j \neq \theta,$$

то

$$\forall \, j = \overline{1, n} \ \lambda_j = f(b_j) > 0\,.$$

Якщо F - матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \dots, b_n$, то

$$D = F^{\mathrm{T}} A F \ ,$$

причому $\det F \neq 0$. Тоді

$$\det D = \det F^{\mathrm{T}} \det A \ \det F = (\det F)^2 \det A\,,$$

і, оскільки

$$(\det F)^2 > 0\,,$$

а

$$\det D = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n > 0\,,$$

то

$$\det A = \Delta_n > 0\,.$$

Достатність. Припустимо, що $f(x)$- квадратична функція на скінченновимірному векторному просторі V, і в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору її матриця A задовольняє умову Сильвестера. Тоді ця матриця задовольняє і умову Якобі, а тому існує базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ простору, в якому функція $f(x)$ задається канонічною квадратичною формою:

$$f(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2,$$

де $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$- всі кутові мінори матриці A. За умовою теореми, всі коефіцієнти цієї квадратичної форми додатні. Припустимо, що $x \in V$ - довільний вектор, який у базисі $b_1, b_2, \ldots, b_n$ задається такими координатами: $x = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тоді

$$f(x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2 \geq 0.$$

Якщо $x \neq \theta$, то серед координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є ненульові, а тому $f(x) > 0$, тобто, функція f додатна.

Зауваження. В процесі доведення останньої теореми фактично було показано, що матриця додатної квадратичної функції на скінченновимірному просторі в будь-якому базисі задовольняє умову Сильвестера.

4.13. Застосування теорії симетричних матриць до теорії квадратичних функцій

Нехай A- симетрична матриця з дійсними елементами порядку n. За теоремою про будову симетричної матриці існують діагональна матриця D та ортогональна матриця Q, такі, що $D = Q^{\mathrm{T}} A Q = Q^{-1} A Q$. Причому, якщо

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 \; 0 \ldots 0 \\ 0 \; \lambda_2 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 \; 0 \ldots \; \lambda_n \end{pmatrix},$$

то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$- усі власні числа матриці A, з урахуванням їх кратностей. Нехай тепер V- векторний простір розмірності n над полем R, $a_1, a_2, \ldots, a_n$- деякий фіксований базис простору, $f(x)$- квадратична функція на просторі V, якій у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідає матриця A. Припустимо також, що $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - такий базис простору V, що матриця Q є матрицею переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$. У просторі V можна ввести скалярний добуток, відповідний базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$, таким чином. Для векторів $x, y \in V$, які в базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ задаються такими координатами: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, покладемо

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .$$

Тоді при такому скалярному добутку базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ортонормований і, оскільки матриця переходу Q від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ортогональна, то базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ також ортонормований. У цьому базисі квадратичній функції $f(x)$ відповідає така матриця:

$$Q^{\mathrm{T}} A Q = Q^{-1} A Q = D = \begin{pmatrix} \lambda_1\, 0 \ldots 0 \\ 0\, \lambda_2 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\, 0 \ldots \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Це означає, що в цьому базисі квадратична функція задається канонічною квадратичною формою:

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 ,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - усі власні числа матриці A.

4.14. Алгоритм зведення квадратичної функції до канонічного вигляду ортогональним перетворенням змінних

Припустимо, що квадратична функція $f(x)$ у початковому базисі задається квадратичною формою від n змінних $x_1, x_2, \ldots x_n$.

1. Складається матриця A квадратичної функції $f(x)$. Матриця A симетрична.
2. Знаходяться всі власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матриці A.
3. Для матриці A знаходиться ортонормований базис простору $b_1, b_2, \ldots, b_n$, який складається з власних векторів матриці.
4. Координати векторів $b_1, b_2, \ldots, b_n$ записуються в стовпчики матриці Q. Ця матриця ортогональна і є матрицею переходу від початкового базису до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
5. У базисі $b_1, b_2, \ldots, b_n$ квадратична функція задається канонічною квадратичною формою:
$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 .$$
6. Для початкових та заключних змінних виконується рівність:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

4.15. Класифікація поверхонь другого порядку

Нехай R^3- простір усіх тривимірних векторів з дійсними координатами. В просторі зафіксовано деяку декартову прямокутну систему координат, якій відповідає ортонормований базис простору e_1, e_2, e_3. Вважаємо, що усі вектори простору задаються координатами в цьому базисі, тобто, якщо $x \in R^3$ і $x = (x_1, x_2, x_3)$, то

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, координати яких задовольняють *загальному рівнянню поверхні другого порядку*:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0,$$

де коефіцієнти $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не дорівнюють нулю одночасно. *Задача класифікації поверхонь другого порядку* полягає в тому, що визначається тип поверхні, яка задається даним рівнянням.

Для розв'язання задачі знаходиться така декартова прямокутна система координат, у якій поверхня задається канонічним рівнянням. Як відомо, початок такої системи координат співпадає з центром поверхні, а вісі координат - з вісями поверхні.

Позначимо:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Ця сума є квадратичною формою від змінних x_1, x_2, x_3. Зводимо її до канонічного вигляду ортогональним перетворенням змінних. Це означає, що знайдеться такий ортонормований базис простору e_1^1, e_2^1, e_3^1, в якому квадратична форма має канонічний вигляд:

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 .$$

Новому базису відповідає нова декартова прямокутна система координат. Якщо Q- матриця переходу від базису e_1, e_2, e_3 до базису e_1^1, e_2^1, e_3^1, то для змінних виконується
рівність

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

У рівнянні поверхні другого порядку зробимо заміну змінних за цією формулою. В новій системі координат поверхня задається рівнянням:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + c = 0.$$

Ортогональне перетворення змінних означає, що зроблено поворот системи координат на деякий кут у деякій площині. Далі аналіз розбивається на три випадки, в залежності від числа квадратів, що залишились:

1. Залишилось три квадрати.
2. Залишилось два квадрати.
3. Залишився один квадрат.

Розглянемо випадок 1. Залишається три квадрати, тобто $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\left(\lambda_1 y_1^2 + k_1 y_1\right) + \left(\lambda_2 y_2^2 + k_2 y_2\right) + \left(\lambda_3 y_3^2 + k_3 y_3\right) + c = 0;$$

$$\lambda_1\left(y_1^2 + \frac{k_1}{\lambda_1} y_1\right) + \lambda_2\left(y_2^2 + \frac{k_2}{\lambda_2} y_2\right) + \lambda_3\left(y_3^2 + \frac{k_3}{\lambda_3} y_3\right) + c = 0.$$

Виділяємо повні квадрати:

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{k_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_2 + \frac{k_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(y_3 + \frac{k_3}{2\lambda_3}\right)^2 = c_1.$$

Зробимо заміну змінних:

$$z_1 = y_1 + \frac{k_1}{2\lambda_1}, z_2 = y_2 + \frac{k_2}{2\lambda_2}, z_3 = y_3 + \frac{k_3}{2\lambda_3}.$$

Ця заміна означає, що виконується паралельне перенесення системи координат y_1, y_2, y_3 таким чином, що початок координат переноситься в точку з координатами:

$$y_1 = -\frac{k_1}{2\lambda_1}, y_2 = -\frac{k_2}{2\lambda_2}, y_3 = -\frac{k_3}{2\lambda_3}.$$

У новій системі координат поверхня задається рівнянням

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = c_1.$$

Далі можливі такі варіанти:

1) Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знаку. Можна вважати, що $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$. Тоді:

а) Якщо $c_1 > 0$, то рівняння перепишеться у вигляді:

$$\frac{z_1^2}{c_1 / \lambda_1} + \frac{z_2^2}{c_1 / \lambda_2} + \frac{z_3^2}{c_1 / \lambda_3} = 1;$$

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_2}}\right)^2} + \frac{z_3^2}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_3}}\right)^2} = 1.$$

Одержується рівняння еліпсоїда.

б) Якщо $c_1 < 0$, то рівняння розв’язків не має, тобто, задає порожню множину.

в) Якщо $c_1 = 0$, то рівняння задає єдину точку з координатами:

$$z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ z_3 = 0.$$

2) Якщо знаки чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ різні, то можна вважати, що $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$.

Тоді:

а) Якщо $c_1 > 0$, то перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_2}}\right)^2} - \frac{z_3^2}{\left(\sqrt{-\frac{c_1}{\lambda_3}}\right)^2} = 1.$$

Одержується рівняння однопорожненого гіперболоїда.

б) Якщо $c_1 < 0$, то перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{-\frac{c_1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{-\frac{c_1}{\lambda_2}}\right)^2} - \frac{z_3^2}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_3}}\right)^2} = -1.$$

Одержується рівняння двопорожненого гіперболоїда.

в) Якщо $c_1 = 0$, то перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}\right)^2} - \frac{z_3^2}{\left(\sqrt{-\frac{1}{\lambda_3}}\right)^2} = 0.$$

Одержується рівняння конуса.

Розглянемо випадок 2. Залишається два квадрати. Припустимо, що $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{k_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_2 + \frac{k_2}{2\lambda_2}\right)^2 + k_3 y_3 = c_1.$$

1) Припустимо спочатку, що $k_3 = 0$. Зробимо заміну змінних:

$$z_1 = y_1 + \frac{k_1}{2\lambda_1},\ z_2 = y_2 + \frac{k_2}{2\lambda_2},\ z_3 = y_3.$$

Заміна означає, що виконується паралельне перенесення системи координат y_1, y_2, y_3 таким чином, що початок координат переноситься в точку з координатами:

$$y_1 = -\frac{k_1}{2\lambda_1}, y_2 = -\frac{k_2}{2\lambda_2}, y_3 = 0.$$

У новій системі координат поверхня задається таким рівнянням:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = c_1.$$

Припустимо спочатку, що числа λ_1, λ_2 одного знаку. Можна вважати, що $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Тоді:

а) Якщо $c_1 > 0$, то переписуємо рівняння у вигляді:

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_2}}\right)^2} = 1.$$

Одержуємо рівняння еліптичного циліндра.

б) Якщо $c_1 < 0$, то рівняння розв'язків не має, тобто задає порожню множину.

в) Якщо $c_1 = 0$, то

$$z_1 = 0$$
$$z_2 = 0.$$

Система двох рівностей задає пряму – вісь координат $O z_3$.

Припустимо тепер, що знаки чисел λ_1, λ_2 протилежні. Можна вважати, що $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Тоді:

а) Якщо $c_1 \neq 0$, то можна вважати, що $c_1 > 0$. Рівняння перепишемо у вигляді:

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}\right)^2} - \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{-\frac{c_1}{\lambda_2}}\right)^2} = 1.$$

Одержується рівняння гіперболічного циліндра.

б) Якщо $c_1 = 0$, то одержуємо рівняння

$$z_1 = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\, z_2.$$

Таке рівняння задає пару площин .

2) Припустимо тепер, що $k_3 \neq 0$. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{k_1}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_2+\frac{k_2}{2\lambda_2}\right)^2=-k_3\left(y_3-\frac{c_1}{k_3}\right).$$

Зробимо заміну змінних:

$$z_1=y_1+\frac{k_1}{2\lambda_1},\ z_2=y_2+\frac{k_2}{2\lambda_2},\ z_3=y_3-\frac{c_1}{\lambda_3}.$$

Заміна означає, що виконується паралельне перенесення системи координат y_1, y_2, y_3 таким чином, що початок координат переноситься в точку з координатами:

$$y_1=-\frac{k_1}{2\lambda_1}, y_2=-\frac{k_2}{2\lambda_2}, y_3=\frac{c_1}{\lambda_3}.$$

У новій системі координат поверхня задається таким рівнянням:

$$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2=-k_3 z_3.$$

Можливі такі варіанти:

а) Якщо числа λ_1, λ_2 одного знаку, то можна вважати, що $\lambda_1>0, \lambda_2>0$. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2}+\frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}\right)^2}=2\left(-\frac{k_3}{2}\right)z_3.$$

Одержується рівняння еліптичного параболоїда.

б) Якщо знаки чисел λ_1, λ_2 протилежні, то вважаємо $\lambda_1>0, \lambda_2<0$ і одержуємо рівняння:

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^2}-\frac{z_2^2}{\left(\sqrt{-\frac{1}{\lambda_2}}\right)^2}=2\left(-\frac{k_3}{2}\right)z_3.$$

Одержуємо рівняння гіперболічного параболоїда.

Розглянемо випадок 3. Залишається один квадрат. Вважаємо, що $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=0$. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{k_1}{2\lambda_1}\right)^2+k_2y_2+k_3y_3=c_1.$$

Далі можливі три варіанти, в залежності від наявності змінних y_2, y_3.

1) Нехай $k_2=0,\ k_3=0$. Зробимо заміну змінних:

$$z_1=y_1+\frac{k_1}{2\lambda_1}, z_2=y_2, z_3=y_3.$$

Заміна означає, що виконується паралельне перенесення системи координат y_1, y_2, y_3 таким чином, що початок координат переноситься в точку з координатами:

$$y_1 = -\frac{k_1}{2\lambda_1}, y_2 = 0,\ y_3 = 0.$$

У новій системі координат поверхня задається таким рівнянням:

$$\lambda_1 z_1^2 = c_1.$$

Вважаємо, що $\lambda_1 > 0$. Тоді:

а) Якщо $c_1 > 0$, то рівняння перепишемо у вигляді:

$$z_1 = \pm\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_1}}.$$

Рівняння задає пару площин.

б) Якщо $c_1 < 0$, рівняння розв'язків не має, тобто задає порожню множину.

в) Якщо $c_1 = 0,$ то рівняння можна переписати у вигляді:

$$z_1 = 0.$$

Одержуємо рівняння однієї площини.

2) Нехай $k_2 \neq 0$, $k_3 = 0$. Перепишемо рівняння таким чином:

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{k_1}{2k_1}\right)^2 = -k_2\left(y_2 - \frac{c_1}{k_2}\right).$$

Зробимо заміну змінних:

$$z_1 = y_1 + \frac{k_1}{2\lambda_1},\ z_2 = y_2 - \frac{c_1}{k_2},\ z_3 = y_3.$$

Заміна означає, що виконується паралельне перенесення системи координат y_1, y_2, y_3 таким чином, що початок координат переноситься в точку з координатами:

$$y_1 = -\frac{k_1}{2\lambda_1}, y_2 = \frac{c_1}{k_2},\ y_3 = 0.$$

У новій системі координат поверхня задається таким рівнянням:

$$\lambda_1 z_1^2 = -k_2 z_2,$$

або

$$z_1^2 = 2\left(-\frac{k_2}{2\lambda_1}\right)z_2.$$

Одержується рівняння параболічного циліндра.

3) Нехай $k_2 \neq 0,\ k_3 \neq 0$. Зробимо заміну змінних:

$$y_1 = z_1,\ y_2 = \frac{k_2 z_2 + k_3 z_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}},\ y_3 = \frac{k_3 z_2 - k_2 z_3}{\sqrt{k_2^2 + k_3^2}}.$$

Така заміна означає поворот системи координат у деякій площині на деякий кут.

У новій системі координат одержується рівняння типу, який розглядається в попередньому випадку.

ЛІТЕРАТУРА.

1. И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 336 с.
2. Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
3. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры.– М.: Наука, 1965. – 431 с.
4. В.С. Чарін. Лінійна алгебра. Підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів. – К.: Техніка, 2004. – 416 с.