ПРОВОТАР(Підар) і його ДЗ

1. Знайти $f(x) = \mu_y(g(y) = x)$.

1) $g(y) = y + 1$.

Знаходимо послідовно значення:
$f(0) = \mu_y(y + 1 = 0)$ = не визначена
$f(1) = \mu_y(y + 1 = 1) = 0$
$f(2) = \mu_y(y + 1 = 2) = 1$
……………………………………

Отже,
$f(x) = \begin{cases} x - 1, x > 0 \\ \text{невизначенна}, x = 0 \end{cases}$ $x – 1, x > 0$;
$f(x)$ = не визначена, $x = 0$;

2) $g(y) = y - 1$.
Знаходимо послідовно значення:
$f(0) = \mu_y(y - 1 = 0)$ = не визначена
$f(1) = \mu_y(y - 1 = 1)$ = не визначена
$f(2) = \mu_y(y - 1 = 2)$ = не визначена
……………………………………

Отже, $f(x)$ не визначена в жодній точці

3) $g(y) = 2y + 1$.
Знаходимо послідовно значення
$f(0) = \mu_y(2y + 1 = 0)$ = не визначена
$f(1) = \mu_y(2y + 1 = 1) = 0$
$f(2) = \mu_y(2y + 1 = 2)$ = не визначена
$f(3) = \mu_y(2y + 1 = 3) = 1$
……………………………………
Отже,

$f(x) = \begin{cases} x - 1, x - \text{непарне} \\ \text{невизначенна}, x - \text{парне} \end{cases}$

Функція - є ПРФ

Далі будемо використовувати інші визначення ПРФ, РФ та ЧРФ. А саме:

a) функцію, яку можна обчислити всюди визначеним алгоритмом будемо називати рекурсивною;

b) функцію, яку можна обчислити всюди визначеним алгоритмом, без використання оператора while … do будемо називати примітивно рекурсивною;

c) функцію, яку можна обчислити алгоритмом лише з використання оператора while … do будемо називати частково рекурсивною.

Потрібно написати алгоритм на мові псевдо Паскаль:

1) f(x) = x!

```
function f(x):
        begin
                if x = 0 then f = 1
                else f := f(x-1)*x;
```

Також можна використати теорему про добуток рекурсивних функцій:

$$f(x) = \prod_{i=0}^{x} g(i)$$

2. Функція max(x, y) є ПРФ.

В теоремі 2.3 розглянуто типовий випадок, коли умова має вигляд $\alpha_i = 0$. Так як умови вигляду

$$\alpha_i = \beta_i,\ \alpha_i \le \beta_i,\ \alpha_i < \beta_i$$

рівносильні, відповідно, умовам

$$|\alpha_i - \beta_i| = 0,\ \ \alpha_i \dot{-} \beta_i = 0,\ \ \overline{sg}(\beta_i \dot{-} \alpha_i) = 0,$$

то теорема 3 залишається справедливою і в тому разі, коли в кусковій схемі рівності $\alpha_i = 0$ замінюються іншими умовами, де α_i, β_i – ПР функції.

max(□,□)= $\begin{matrix} x, x \ge y \Leftrightarrow y \dot{-} x = 0 \\ y, x < y \Leftrightarrow nsg(y \dot{-} x) = 0 \end{matrix}$

Отже, за теоремою про кускову функцію є ПРФ

3. Функція f(x) = [$\sqrt{x}$] є ПРФ.

Алгоритм обчислення цієї функції:

```
function f(x):
        begin
            if (x = 0) then f := 1
            else
                for i = 0 to x:
                 if (i²-.x) = 0 v ((i+1)² -. x>0)
                 then f:= i
        end.
```

Лекція 3

1. Чи може фунція g(x) = u_y(f(y) = x), де f(y) – всюди визначена функція, бути невизначеною в жодній точці?

g(x) = u_y(f(y) = x)
Оскільки функція f(y) всюди визначена, то вона і визначення в точці 0. Нехай

$f(0) = b$. Тоді $g(b) = u_x(f(y) = b) = 0$

2. Відношення ($x = y \lor x > y+1$) є ПР. Довести:

```
function f(x, y)
        begin:
                if (y = 0) then y = x
                else f = f(x, y – 1) + 1
        end
```

$P(y) =$ “$y = 0$” $\Rightarrow P = \begin{matrix} 0, y = 0 \\ 1, y \neq 0 \end{matrix}$

Найпростіші функції предикати “x=n”, “x=y”, “x<y”, “x>y” – ПР

$P(x) =$ “$x = n$” $\Rightarrow P = \begin{matrix} 0, x = n \\ 1, x \neq n \end{matrix}$

$P(x, y) = (x = y \lor x > y+1)$

$Q(x, y) =$ “$x > y+1$” $\Rightarrow W(x, y) =$ “$f(x) > g(x)$”

```
function W(x, y)
        begin:
                s = f(x)
                r = g(x)
                if (s > r) then W = 0
                else W = 1
        end
```

P_1 і $P_2 \Rightarrow P_1 \lor P_2$ – ПР предикат

$P_1 \lor P_2 = P_1(x, y) \lor P_2(x, y)$

```
function P(x, y)
        begin
                s = P1(x, y) + P2(x, y)
                if (s = 0) then P = 0
                if (s = 1) then P = 0
                else P = 1
        end
```

$P_1(x, y) =$ “$x = y$” і $P_2(x, y) =$ “$x > y+1$”

3. Нехай $g(x, y) = x \dot{-} y$. Тоді функція

$f(x) = u_y(g(x, y) = 0)$ є примітивно рекурсивною. Довести.

1. $g(x, y)$ – ПРФ
2. $\forall x \, \exists y$: $g(x, y) = 0$
3. $a(x) = x$ – ПРФ

$\forall$ x $u_y(g(x, y) = 0) <= a(x) => f(x)$ – ПРФ

$g(x, y) = x \dot{-} y$
Знаходимо послідовно значення:
$f(0) = \mu_y(0 \dot{-} y = 0) = 0$
$f(1) = \mu_y(1 \dot{-} y = 0) = 1$
$f(2) = \mu_y(2 \dot{-} y = 0) = 2$
…
f(x) = x – ПРФ, оскільки

```
function f(x)
        begin
                f:= x
        end
```

ЛЕКЦІЯ 4

1. $l(n)<=n$, $r(n) <= n$. Довести
Якщо $c(x, y) = n$, то $l(n) = x$
$x <= (x+y)(x+y+1)/2 + x = n$
Якщо $c(x, y) = n$, то $r(n) = y$
$y <= (x+y)(x+y+1)/2 + x = n$

$y <= (x^2 + 2xy + x + y^2 + y)/2 + x = n$
$y <= (x^2 + 2xy + 3x +)/2 + y(y + 1)/2 = n$
$y <= y(y+1)/2$, оскільки $y <= y^2$

2. c(a, b, d) = c(c(a, b), d) - бієкція
c(a, b, d) → N
Нехай (a, b, d) != (e, f, g), а c(a, b, d) = c(e, f, g), тобто хоча б одна координата різна
Тоді виконується: c(c(a, b), d) = c(c(e, f), g) →
c(a, b) = c(e, f) і d = g – оскільки нумераційна функція Кантора бієктивна →
a = e, f = b → суперечність. Довели ін'єктивність.

Доведемо сюр'єктивність:
∀n∃(a, b, d): c(a, b, d) = n
c(a, b, d) = c(c(a, b), d) = n → за визначеням
c(a, b) = l(n), d = r(n) → a = l(l(n)), b = r(l(n)), d = r(n)
c(l(l(n)), l(r(n)), r(n)) = n - сюр'єктивна
Тобто c(a, b, d) = c(c(a, b), d) - бієкція

3. Якщо ПР функція f(x) монотонно зростає, то множина M всіх значень цієї функції є ПР множиною. Довести.

f(x): x < y => f(x) < f(y)
M = {f(x), x є N}
X_M - ПРФ?

```
function X_M(x)
    begin
        X_M = 1
    for i = 0 to x
        if f(i) = x then X_M = 0
    end
```
Оскільки f(x) є зростаючою, то для будь-якого i>x виконується f(i)>x. Це означає, що немає сенсу перевіряти f(i) для i>x, оскільки f(i) вже точно більше за x.

ЛЕКЦІЯ 5

1. Розв'язати систему:
1)
$\Gamma(x, 0) = 1$
$\Gamma(x, 1) = 2$→ числа 1+R, 1+2R, 1+3R мають бути взаємно прості. Звідси R = 2, а
$\Gamma(x, 2) = 3$

числа рівні: 3, 5, 7.

Тепер потрібно знайти число L, таке що: $\begin{matrix} rest(L,3) = 1 \\ rest(L,5) = 2 \\ rest(L,7) = 3 \end{matrix} \rightarrow$ L = 52.

Тоді x = C(L, R) = C(52, 2) = 1537

2)

$\begin{matrix} \Gamma(x,0) = 1 \\ \Gamma(x,1) = 1 \\ \Gamma(x,2) = 2 \\ \Gamma(x,3) = 2 \end{matrix} \rightarrow$ числа 1+R, 1+2R, 1+3R, 1+4R мають бути взаємно прості. Звідси R = 4, а числа рівні: 5, 9, 13, 17.

Тепер потрібно знайти число L, таке що: $\begin{matrix} rest(L,5) = 1 \\ rest(L,9) = 1 \\ rest(L,13) = 2 \\ rest(L,17) = 2 \end{matrix} \rightarrow$ L = 7516.

Тоді x = C(L, R) = C(7516, 4) = 28271437

2. Обчислити за допомогою приведеного алгоритму значення функції f(x, y) = x + y в точці (0, 1). Ця функція задається рекурсивною схемою:

$$f(x, 0) = x$$
$$f(x, y) = f(x, y) + 1$$

В загальному випадку ця рекурсивна схема має вигляд:

$$f(x, 0) = g(x)$$
$$f(x, y+1) = h(x, y, f(x, y))$$

де g(x) = x; h(x, y, z) = z+1

Для i = 0, j = 1 обчислюємо:

Г(0, 1) = rest(l(0), 1 + (1 + 1)*r(0)) = rest(0, 1) = 0

Г(0, 0) = rest(l(0), 1 + (0 + 1)*r(0)) = rest(0, 1) = 0

Для i = 0, j = 1 обчислюємо:

Г(1, 1) = rest(l(1), 1 + (1 + 1)*r(1)) = rest(1, 1) = 0

Г(1, 0) = rest(l(1), 1 + (0 + 1)*r(1)) = rest(1, 1) = 0

….

Для i = 19, j = 1 обчислюємо:

Г(19, 1) = rest(l(19), 1 + (1 + 1)*r(19)) = rest(4, 3) = 1

Г(19, 0) = rest(l(19), 1 + (0 + 1)*r(19)) = rest(4, 2) = 0

Отже f(0, 1) = Г(19, 1) = 1

3. Показати, що графік РФ є РМ.

Нехай f(x) є РФ. За означенням для ∀ x ∃ y: f(x) = y.

Тобто G_f = {<x, f(x)> | ∀ x є N: y = f(x)}

Тоді множина M = {C(x, y) | ∀ x є N: ∃ y = f(x)} має бути РМ, тобто для неї має існувати характеристична функція, яка дає відповідь на питання чи C(x, y) є M.

Запишемо характеристичну функцію:

function X_m(x)

```
begin
        if r(x) = f(l(x)) then X_m = 0
        else X_m = 1
end
```

ЛЕКЦІЯ 6

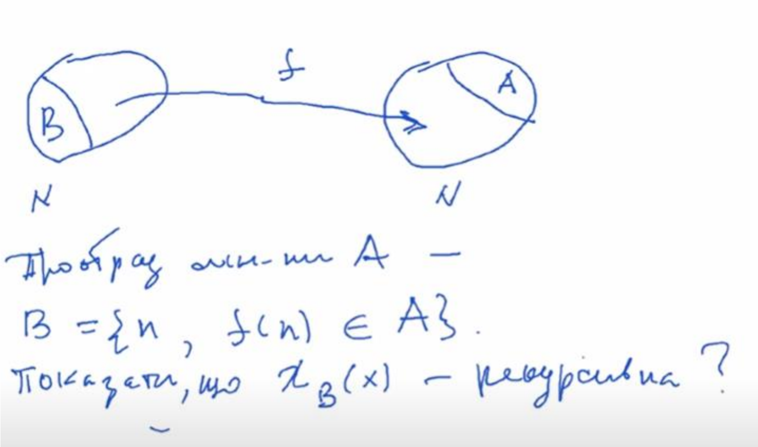
1. Показати, що множина значень M функції f(x, y) = x+y є РП множинною

```
function Xa(n)
        begin
                i = 0
                while f(l(i), r(i)) = n)
                        i = i+1
```

Xa = 0

end

2. Показати, що повний прообраз рекурсивної множини A відносно рекурсивної функції f є рекурсивною множиною.



function $X_b(x)$

begin

if $X_a(f(x)) = 0$ then $X_b = 0$

else Xb = 1

end

3. Показати, що графік ПР функції f(x) є ПР множиною

$G_f = \{<0, f(0)>, <1, f(1)>, \ldots, <(n, f(n)>\}$

$M_f = \{C(0, f(0)), C(1, f(1)), \ldots, C((n, f(n))\}$- покажемо, що M_f є ПРМ

function X_m

begin

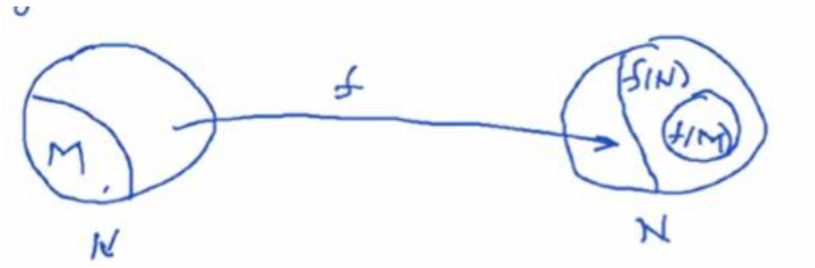
if $r(x) = f(l(x))$ then $X_m = 0$

else $X_m = 1$

end

ЛЕКЦІЯ 7

1. Показати, що образ РП множини A відносно ЧР функції f є РП множиною.



f – ЧРФ, M – РПМ => M - Множина значень a(x)
f(M) є f(N), Gf = {<f1(i), f2(i)>, i = 1, 2, …}
function X(y)
    begin
        i = 0
        j = 0
        while $f_2(i)$!= y do
            i = i+1
        while a(j) != $f_1(i)$ do
            j = j+1
        X = 0
    end

2. Показати, що множина
$M = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle\ \exists\, y\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0\}$ є РП множиною, де f – ЧР функція
function $X_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$G_f = \{\langle f_1(i), f_2(i), \ldots, f_n(i), f_{n+1}(i), f_{n+2}(i)\rangle, i = 1, 2, \ldots,n\}$
$f_1(i) \mathrel{!}= x_1$ & $f_2(i) \mathrel{!}= x_2$ & … & $f_n(i) \mathrel{!}= x_n$ & $f_{n+2}(i) \mathrel{!}= 0$ еквівалентно
$\langle f_1(i), f_2(i), \ldots, f_n(i), f_{n+1}(i), f_{n+2}(i)\rangle = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, f_{n+1}(i), 0\rangle$ =>
$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ є M і $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, f_{n+1}(i)) = 0$
function
    begin
        i = 0
        while ($f_1(i) \mathrel{!}= x_1$ v $f_2(i) \mathrel{!}= x_2$ v … v $f_n(i) \mathrel{!}= x_n$ v $f_{n+2}(i) \mathrel{!}= 0$)
            i = i+1
        $X_m = 0$
    end

3. Показати, що повний прообраз РП множини A відносно ЧР функції f є РП множиною.

$f^{-1}(M)$ – РПМ, якщо f – ЧРФ, M – РПМ

$$f^{-1}(M) = \{ x, f(x) \in M \}$$

M – РПМ => співпадає з множиною значень функції a(x)
Нехай Gf = <f_1(x), f_2(x)> - графік f(x)
x є f^{-1}(M) <=> x є області визначення f і f(x) є M
f_1(i), i = 0, 1, 2, … - область визначення: f(i) = x
f_2(i), i = 0, 1, 2, … - область значень: f(i) = a(j) => f(x) є M

```
function X(x)
        begin
                i = 0
                j = 0
                while f2(i) != x do
                        i = i+1
                while a(j) != f1(i) do
                        j = j+1
                X = 0
        end
```

ЛЕКЦІЯ 7

1. Для кожної ЧРФ $f(x)$ існує ПРФ $g(a, b, z)$ така, що рівняння $g(a, b, z) = 0$ має розв'язок <=> <a, b> є G_f

G_f - РПМ => $C(G_f)$ – РПМ => існує ПРФ $h(a, x)$ така, що рівняння $h(a, x) = 0$ має розв'язок <=> $a = C(G_f)$.
Покладемо $g(a, b, z) = h(C(a, b), z)$
Тоді $g(a, b, z) = 0$ <=> $h(C(a, b), z) = 0$ <=> $C(a, b)$ є $C(G_f)$ <=> (a, b) є (G_f)

ЛЕКЦІЯ 8

1. Функція $D(x_0, x_1, x_2) = D(x_0, c(x_1, x_2))$ є рекурсивною функцією універсальною для класу 3-місних ПРФ

$D^3(x_0, x_1, x_2) = D^2(x_0, c(x_1, x_2))$
а) D^3 – рекурсивна
б) $g(x_1, x_2)$ – ПРФ
$g(x_1, x_2) = D^3(n, x_1, x_2)$ для деяких n

а) $D^3(n, x_1, x_2) = D^2(n, c(x_1, x_2)) <=$ ПРФ, тому одержимо з функції $D^2(n, y)$ за операцією суперпозиції. Тоді
б) $g(x_1, x_2)$ – довільне ПРФ
Розглянемо функцію $f(x) = g(l(x), r(x))$ – ПРФ, оскільки $l(x)$, $r(x)$ і g – ПРФ, тому

$f(x) = D(x_0, x)$ для деякого x_0. Тоді виконується рівність:
$f(c(x_1, x_2)) = g(l(c(x_1, x_2)), r(c(x_1, x_2))) = g(x_1, x_2) => D(x_0, c(x_1, x_2))$

2. D(24, 2)
Нумерація:
1. $N(S(x)) = 1$, $N(q(x)) = 3$
2. $N(S(x) + q(x)) = 2*3*5^3$; $N(S(q(x))) = 4*3*5^3$; $N(q(S(x))) = 4*3^3*5$;
$N(S^*(x)) = 8*3 = 24$; $N(q^*(x)) = ?$

$D(24, x) = S^*(x) => S^*(x) = x$
$f(x) = x => D(24, 2) = f(2) = 2$
- Найти йобаний алгоритм до цьої памойки

ЛЕКЦІЯ 9

1. Множина всіх РПМ є зліченою. Довести

Отже множина всіх РПМ це бієкція між РПМ і N:{РПМ} <-> N

а) Маємо, що множина рекурсивно перелічима <=> вона співпадає з множиною значень деякої примітивно рекурсивної функції

б) Всі примітивно рекурсивні функції можна занумерувати

1-рівень: s(x) q(x)

2-рівень: s(x) + q(x), s(q(x)), q(s(x)), s*(x), q*(x)

…

Якщо ми ці функції занумеруємо починаючи з 0, то одержимо бієктивне відображення в множину натуральних чисел.

Доведемо:

Ін’єктивність:

A — РПМ. Кожній РПМ ми будемо ставити у відповідність перше натуральне число ^{f}-> n таке, що область значень функції з номером n співпадає з A. Відображення f – ін’єктивне, тому що якщо всі різні РПМ, то відповідні функції з областями значень, які рівні цим множинами, то і номери будуть різні.

Сюр’єктивність:

∀ n ∃ РПМ, яка є областю значень функції з номером n.

2. Довести, що функція, універсальна для одномісних ПРФ, приймає кожне значення нескінчену кількість разів. (D(n, x))

а) Нехай b – довільне натуральне число. Розглянемо функцію:

f(x) = b => f(x) = D(n, x) = b

б)

$f_0(x) = \begin{matrix} b, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{matrix}$, $f_1(x) = \begin{matrix} b, x = 1 \\ 0, x \neq 1 \end{matrix}$, $f_2(x) = \begin{matrix} b, x = 2 \\ 0, x \neq 2 \end{matrix}$, …

$f_0(0)$ =D(n_0, 0) = b – оскільки функція ПР, то для деякого n_0 ця рівність виконується

$f_1(1)$ =D(n_0, 1) = b

$f_2(2)$ =D(n_0, 2) = b

…

Таким чином ця функція буде приймати значення b в нескінченій кількості точок, оскільки ця послідовність нескінчена.