Група – №ПІ-11

Варіант – №26

№1

Правильні: b), e) h), i), k);

№2

$A = \{\varnothing, \{h, j\}\}$ $\quad B(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{h, j\}, \{\varnothing, \{h, j\}\}\}$

№3

$A = \{1, 2, 4, 6\}$ $\quad B = \{2, 6, 7\}$

$A \cap B = \{2, 6\}$ $\quad A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$; $B \setminus A = \{7\}$;

$A \setminus B = \{1, 4\}$ $\quad A \nabla B = \{7, 1, 4\}$.

№4

1) Нек[ай] $\forall x \in (B(A \cap C)) \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \;\&\; x \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in B(A) \;\&\; x \in B(C) \Rightarrow x \in B(A) \cap B(C)$.

2) $\forall x \in (B(A) \cap B(C)) \Rightarrow x \in B(A) \;\&\; x \in B(C) \Rightarrow x \in A \;\&\; x \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (B(A \cap C))$. □

№5

а) $A \cup (A \cap B) = A$

1) $\forall x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A \vee x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \vee x \in A \;\&\; x \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in A$.

2) $\forall x \in A \Rightarrow$ (оскільки $x \in A \Rightarrow x \in A \cup X$, де $\forall X$) $x \in A \cup (A \cap B)$ □

б) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B$

1) $\forall x \in (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) \Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap B \cap C \vee$
$\vee\, x \in A \cap B \cap D \Rightarrow x \in ((A \cap B) \cap C) \vee x \in (A \cap B \cap D) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in ((A \cap B) \cap C \cap D) \Rightarrow x \in A \cap B$.

2) $\forall x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cap B \cup X \cup Y$ Нехай $X = A \cap B \cap C$, $Y = A \cap B \cap D \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) = A \cap B.$

№6.

Доведення: Нехай $\exists$ множина $X = \{x, y\}$, $\exists Y = \{y\}$, тоді $X \setminus Y = \{y\}$. Але оскільки $X \cup Y = \{x, y\}$, $X \cap Y = \{x\}$, тоді $X \cup Y \neq \{y\}$ і $X \cap Y \neq \{y\}$, отже різницю не можна виразити через $\cup$ та $\cap$ $\square$

№7.

а) $R_1, R_4\ R_5$ в) R_2 д) R_1, R_3 є) R_4

б) R_3 г) R_4, R_2 е) R_5

№8

Необхідність:

1) $\forall (x,y) \in (A \setminus B) \times C \Rightarrow x \in (A \setminus B), y \in C \Rightarrow x \in A, x \notin B, y \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y) \in (A \times C), (x,y) \notin (B, C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$

Достатність:

2) $\forall (x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) \Rightarrow (x,y) \in (A \times C), (x,y) \notin (B \times C) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \in A, y \in C) \ \& \ (x \notin B \times C \vee y \notin B \times C) \Rightarrow$ 2.1) 2.2)

2.1) $x \in A, y \in C, y \notin C \Rightarrow$ неправда

2.2) $x \in A, y \in C, x \notin B \Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \ \& \ (x,y) \notin (C \times B) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (A \setminus B) \ \& \ y \in C \Rightarrow (x,y) \in (A \setminus B) \times C$ $\square$.

№9.

Для $\forall Q$:

Нехай $\forall (x,y) \in R_1 \circ Q \Rightarrow (x,z) \in R_1\ (z,y) \in Q \xrightarrow{R_1 \subseteq R_2} (x,z) \in R_2$ &
& $(z,y) \in Q \Rightarrow (x,y) \in R_2 \circ Q$ $\square$.

№11

Нехай R^+ - транзитивне замикання R на M.

Якщо aRb, тоді $\exists a_1, a_2 \ldots a_k$: $a_1 = a, a_k = b$ і $a_1 R a_2$, $a_2 R a_3$, $a_3 R a_4$, … $a_{k-1} R a_k \Rightarrow a_1 R^{k-1} a_k$, тоді

$(a, b) \in R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k \cup \ldots$

Нехай $(a,b) \in R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k \cup \ldots$, тоді $aR^k b$ і існує $x_1 = a$, $x_{k+1} = b$ $\Rightarrow x_i R x_{i+1}$. Звідси випливає aRb □.

№10.

Необхідність: $\forall (x,y) \in R_1 \circ R_2 \Rightarrow (xz) \in R_1 \;\&\; (zy) \in R_2 \xRightarrow{\text{симетрія}}$ $\Rightarrow (zx) \in R_1 \;\&\; (yz) \in R_2 \Rightarrow (yz) \in R_2 \; (zx) \in R_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (yx) \in R_2 \circ R_1 \xRightarrow{\text{симетрія}} (x,y) \in R_2 \circ R_1$

Достатність: (Нехай $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$)

$\forall (x,y) \in R_1 \circ R_2 \Rightarrow (x,y) \in R_2 \circ R_1 \Rightarrow (yx) \in R_1 R_2 \rightarrow$ вона симетрична □.

№12.

Нехай $\forall (x z_1) \in f \circ g \;\&\; (x z_2) \in f \circ g \Rightarrow \exists y_1 : (x y_1) \in f \;\&$ $\&\; (y_1 z_1) \in g$; $\exists y_2 : (x, y_2) \in f \;\&\; (y_2 z_2) \in g \Rightarrow$ $\Rightarrow (x y_1) \in f \;\&\; (x y_2) \in f \;\&\; (y_2 z_2) \in g \xRightarrow{f\text{-функціональне}} y_1 = y_2 \;\&$ $\&\; (y_1 z_1) \in g \;\&\; (y_2 z_2) \in g \Rightarrow (y_1 z_1) \in g \;\&\; (y_1, z_2) \in g \Rightarrow$ $\xRightarrow{g\text{-функціон.}} z_1 = z_2$. Отже, $f \circ g$ також функціональне

№13.

⊳ Нехай $f \subseteq A \times B$ - сюр'єкція, тоді: $\forall y \in B \; \exists x : (x,y) \in f$.

$\forall (x,y) \in f^{-1} \circ f \Rightarrow (xz) \in f^{-1} \;\&\; (zy) \in f \Rightarrow (zx) \in f \;\&\; (zy) \in f \Rightarrow$ $\xRightarrow{f\text{-сюр'єктне}} x = y \Rightarrow (xx) \in f^{-1} \circ f \;\&\; (yy) \in f^{-1} \circ f$, тоді $i_B \subseteq f^{-1} \circ f$

⊲) Нехай $i_B \subseteq f^{-1} \circ f \Rightarrow (xx) \in f^{-1} \circ f \Rightarrow (xz) \in f^{-1} \;\&$ $\&\; (zx) \in f \Rightarrow (zx) \in f$, тобто $\exists! z \Rightarrow f \subseteq A \times B$ - сюр'єкція

№14.

а) $C_4 \; C_3 \; C_1$

б) $C_4 \; C_5 \; C_2$

в) $C_4 \; C_3 \; C_5$

г) $C_4 \; C_5$

д) $C_4 \; C_5$

№15.

$\forall R$ - відношення еквівалентності

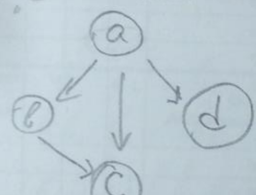
б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$, тоді $\exists z \in [x], z \in [y] \Rightarrow$
$\Rightarrow xRz, yRz \xRightarrow{R\text{-симетричне}} xRz, zRy \Rightarrow xRy$

в) $[x] = [y]$, тоді нехай $v \in [x] \Rightarrow xRv, xRy \xRightarrow{R\text{-симетрія}}$
$yRx, xRv \Rightarrow yRv \Rightarrow v \in [y] = [x] = [y]$.

Тоді $(xRy) = ([x]_R \cap [y]_R) = ([x] = [y])$ □

№16.

$A = \{a, b, c, d\}$. Нехай на множині A задано відношення ділиться націло і a ділить b, b ділить c, a ділить c, a ділить d. Таким чином „a" - мінімальний елемент, а елементи „c" і „d" - максимальні.



№17.

Нехай задано відношення ділиться націло на множині $A = \{2, 4, 56\}$. Таким чином 2 - мінімальний, але найменшого елемента немає.

№18

Доведемо транзитивність: $\forall (x,y), (y,z) \in R \cap Q \Rightarrow (x,y)(yz) \in R$
& $(x,y)(yz) \in Q \xRightarrow{R \text{ та } Q \text{ транзитивні}} (xz) \in R$ & $(xz) \in Q \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,z) \in R \cap Q$.

Рефлексивність: $\forall (x,y) \in R \cap Q \Rightarrow (x,y) \in R$ & $(x,y) \in Q \xRightarrow{R;Q\text{-рефлек.}}$
$\Rightarrow (xx) \in R$ & $(xx) \in Q \Rightarrow (x,x) \in R \cap Q$ (для $(yy) \in R \cap Q$ так само)

Антисиметрія: $\forall (x,y)$ & $(yx) \in R \cap Q \Rightarrow ((xy)$ & $(yx) \in R)$ &
& $((xy)$ & $(yx) \in Q) \xRightarrow{R \text{ та } Q \text{ антисиметричні}} x = y$. □

Отже, $R \cap Q$ також віднош. часткового порядку.

N19.

Відношення $\leq$: нехай $(a,b) \leq (c,d)$, $a \leq c$ & $b \leq d$

N20.

$\mathbb{J}$ - ірраціональні, $\mathbb{R}$ - дійсні, $\mathbb{Q}$ - раціональні

$\mathbb{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - континуум, бо $\mathbb{R}$ - континуум і $\mathbb{Q}$ - зліченна множина. (З кожного континууму можна вилучити злічену множину.

N21

Нехай існує відрізок $[0;1]$ і числа $a_0, a_1, a_2 \dots a_k$ належать йому. Тоді деякі прямій належать дійсні числа, назвемо їх $b_0, b_1, b_2 \dots b_k$. Встановимо відповідність між парами $(a_0 b_0), (a_1 b_1) (a_2 b_2) \dots (a_k b_k)$. Таким чином отримана відповідність бієктивна

N22

Нехай $a_1, a_2 \dots a_k$ і $b_1, b_2 \dots b_k \in \mathbb{R}$ і числа $a_1 a_2 \dots a_k$ належать $[0,1]$, а $0, b_1, b_2 \dots b_k, 1 \in (0,1)$. Встановимо відповідність: $(0,a_1), (b_1,a_2), (b_2 a_3) \dots (b_k a_{k-1}) (1\ a_k)$.

N23.

Доведемо $f(A) \neq \beta(A)$ від протилежного: припустимо, що $f(A) = \beta(A)$, тоді $f(A) = A \times \beta(A) = \beta(A)$, але $A \times \beta(A) \neq \beta(A)$, тому $f(A) \neq \beta(A)$.

Доведемо $|f(A)| < |\beta(A)|$: з теореми Кантора маємо, що $|A| < |\beta(A)|$, крім того $|f(A)| \leq |A|$, звідси маємо, що $|f(A)| < |\beta(A)|$ ▫.

N24.

Нехай $\exists f: [0;1] \to \mathbb{R}$ - це бієкція з $[0;1]$ на $\mathbb{R}^{[0;1]}$

Розглянемо $g(x) = (f(x))(x) + 1$, $x \in [0;1] \Rightarrow f \in \mathbb{R}^{[0;1]}$

тоді $\exists x_0 \in [0;1]: g = f(x_0) \Rightarrow g(x_0) = f(x_0))(x_0) + 1$

Оскільки потужність всіх функцій дійсного аргументу з однією точкою розриву більша за континуум, тоді і потужність всіх ф-й дійсного аргументу більша □.

№25

а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$

б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

в) $\varnothing \cap \{\varnothing\} = \varnothing$

г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$

д) $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$.

е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$.

№26

Поставимо у відповідність кожній підмножині A_i двійковий вектор, довжиною $n (a_{i_1} \dots a_{i_n})$, де $a_i = 1$, якщо $a_i \in A_i$, та $a_i = 0$, якщо $a_i \notin A_i$. Тоді число різних двійкових кортежів довжини n — це 2^n, тоді $2^n = 2^{|A|}$, тобто $|B(A)| = 2^{|A|}$ $\square$.

№27

$N = \{1, 2, 3 \dots\}$, $Z = \{0, 1, -1, 2, -2 \dots\}$ Встановимо відповідність між такими парами чисел: $(1;0), (2;1), (3;-1), (4;2), (5;-2) \dots$ і т.д. Це відповідність взаємооднозначна

№28

Нехай $A, B, C, D \dots$ - континуальні

$A \cup B \leftrightarrow (0,1) \cup (1,2) \leftrightarrow$ За лемою про об'єднання $\leftrightarrow$
$(0,1) \cup \{1\} \cup (1,2) \leftrightarrow (0;2) \leftrightarrow (0;1) \Rightarrow A \cup B$ - континуум

$A \cup B \cup C \leftrightarrow (0;1) \cup (1;2) \leftrightarrow (0;1) \cup \{1\} \cup (1;2) \leftrightarrow (0;2) \leftrightarrow (1;2)$

і так далі для $A \cup B \cup C \cup D \cup \dots$ де кількість об'єднань злічена.

так

№29.

а) Якщо $A=B$, тоді $A \sim B$.

Нехай $A = B = (0;1)$, тоді $|\beta(A)| = |\mathbb{R}|$, $|\beta(B)| = |\mathbb{R}|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta(A) = \beta(B) \Rightarrow A \sim B$. □.

б) Ні, тому що:

Нехай $A = (0;1)$, $B(1;2)$, тоді $|\beta(A)| = |\mathbb{R}|$, $|\beta(B)| = |\mathbb{R}|$,

тоді $A \sim B$, але $(0;1) \neq (1;2) \Rightarrow A \neq B$.

№30

Нехай A і B - зліченні, $A = \{a_1, a_2, a_3 \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3 \dots\}$.

Тоді $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \dots\}$ таким чином, множина встановлених пар зліченна, очевидно, що $A \times B$ - зліченна □.