

Варіант № 1 (15 балів)

1. Нехай задано дійсний векторний простір квадратних матриць другого порядку $M_2(\mathbb{R})$.
(3 бал.) Перевірити що система $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ утворює базис і знайти координати матриці $A = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ в цьому базисі.
(2 бал.) Знайти матрицю переходу T від стандартного базису $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ до базису B . Зробити перевірку.
2. Нехай задано векторні підпростори U і V , які натягнуті на вектори (a_1, a_2, a_3) і (b_1, b_2, b_3) відповідно, де $a_1 = (1, -2, 3)$, $a_2 = (2, -1, 4)$, $a_3 = (1, 1, 0)$; $b_1 = (-2, 1, 3)$, $b_2 = (-1, 0, 2)$, $b_3 = (1, 1, -3)$.
(1. бал.) Знайдіть базиси підпросторів.
(2 бал.) Визначити, чи вектор $x = (1, 4, 1)$ належить сумі підпросторів $U + V$.
(2 бал.) Знайти базис перетину підпросторів $U \cap V$.
3. (1. бал.) Побудуйте матрицю лінійного оператора $\varphi(x)$ в базисі e_1, e_2 лінійного простору, якщо φ вектори $x_1 = e_1 - e_2$ та $x_2 = e_1 + e_2$ переводить, відповідно в вектори $y_1 = e_1 + 2e_2$ та $y_2 = -e_1 + 3e_2$ знайдіть образ вектора $z = -2e_1 + e_2$ під дією оператора φ
(2. бал.) Знайдіть $\text{Im } \varphi$ та $\text{def } \varphi$.
(2. бал.) Побудуйте матрицю оператора $\varphi(x)$ в базисі $B(y_1, y_2)$.

Варіант № 2 (15 балів)

1. Нехай $R_2(x)$ простір многочленів з дійсними коефіцієнтами порядку не вище 2.
(3. бал.) Перевірити що система $B\{-2x^2 + 3x - 1, x^2 - 2x + 4, -x^2 + 5x - 2\}$ утворює базис і знайти координати вектора $f(x) = x^2 + 2x + 4$ в цьому базисі B .
(2 бал.) Знайти матрицю переходу T від стандартного базису $E\{1, x, x^2\}$ до базису B . Зробити перевірку.
2. Нехай в просторі R^4 задано підпростори U і V , які натягнуті на вектори (a_1, a_2, a_3) і (b_1, b_2, b_3) відповідно, де $a_1 = (1, 1, -1, -1), a_2 = (3, -1, 1, -2), a_3 = (2, -2, 2, -1);$
 $b_1 = (2, 1, 2, -3), b_2 = (1, 2, 3, -3), b_3 = (1, -1, -1, 0);$
(1. бал.) Знайдіть базиси підпросторів.
(2. бал.) Доведіть, що $R^4 = U \oplus V$
(2. бал.) Знайдіть проекцію вектора $x = (0, 2, 0, -1)$ на підпростір U паралельно підпростору V
3. (1. бал.) Покажіть, що відображення $\varphi(x)$, яке полягає у множенні всіх матриць лінійного простору $M_2(R)$ зліва на матрицю $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ лінійним оператором простору $M_2(R)$.
(2. бал.) знайдіть матрицю цього лінійного оператора в стандартному базисі $E=(E_1, E_2, E_3, E_4)$.
(2. бал.) Знайдіть базис ядра цього відображення.

Варіант № 3 (15 балів)

1. Нехай $R_2(x)$ – простір многочленів з дійсними коефіцієнтами порядку не вище 2.
(3. бал.) Знайдіть базис та розмірність лінійної оболонки $L\{-x^2 - 2x + 3, 3x^2 + 4x - 1, 2x^2 + 2x + 2\}$ векторів лінійного простору $R_2(x)$.
(2. бал.) Чи належить вектор $f(x) = x^2 + 3$ цій лінійній оболонці? Якщо так – знайдіть координати цього вектора в базисі L .
2. Нехай в просторі R^4 задано підпростори U і V , які натягнуті на вектори (a_1, a_2, a_3) і (b_1, b_2, b_3) відповідно, де $a_1 = (1, 1, -1, -1)$, $a_2 = (3, -1, 1, -2)$, $a_3 = (2, -2, 2, -1)$;
 $b_1 = (2, 1, 2, -3)$, $b_2 = (1, 2, 3, -3)$, $b_3 = (1, -1, -1, 0)$;
(1. бал.) Знайдіть базиси підпросторів.
(2. бал.) Доведіть, що $R^4 = U \oplus V$
(2. бал.) Знайдіть проекцію вектора $x = (0, 2, 0, -1)$ на підпростір V паралельно підпростору U .
3. (1. бал.) Покажіть, що відображення $\varphi(x)$, яке полягає у множенні всіх матриць лінійного простору $M_2(R)$ справа на матрицю $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ є лінійним оператором простору $M_2(R)$ та
(2. бал.) знайдіть матрицю цього лінійного оператора в стандартному базисі $E = (E_1, E_2, E_3, E_4)$
(2. бал.) Знайдіть $\text{def } \varphi$ та $\text{rank } \varphi$

Варіант № 4 (15 балів)

1. Нехай $R_2(x)$ простір многочленів з дійсними коефіцієнтами порядку не вище 2.
(3. бал.) Перевірити що система
 $B\{-2x^2 + 3x - 1, x^2 - 2x + 4, -x^2 + 5x - 2\}$ утворює базис і знайти координати вектора $f(x) = x^2 + 2x + 4$ в цьому базисі В.
(2 бал.) Знайти матрицю переходу Т від стандартного базису $E\{1, x, x^2\}$ до базису В. Зробити перевірку
2. Нехай задано векторні підпростори U і V , які натягнуті на вектори (a_1, a_2, a_3) і (b_1, b_2, b_3) відповідно, де $a_1 = (1, -2, 3), a_2 = (2, -1, 4), a_3 = (1, 1, 0);$
 $b_1 = (-2, 1, 3), b_2 = (-1, 0, 2), b_3 = (1, 1, -3).$
(1. бал.) Знайдіть базиси підпросторів.
(2 бал.) Визначити, чи вектор $x = (1, 2, 1)$ належить сумі підпросторів $U + V$.
(2 бал.) Знайти базис перетину підпросторів $U \cap V$.
3. (1. бал.) Побудуйте матрицю лінійного оператора $\varphi(x)$ в базисі e_1, e_2 лінійного простору, якщо φ вектори $x_1 = e_1 - e_2$ та $x_2 = e_1 + e_2$ переводить, відповідно в вектори $y_1 = e_1 + 2e_2$ та $y_2 = -e_1 + 3e_2$ знайдіть образ вектора $z = 2e_1 - e_2$ під дією оператора φ
(2. бал.) Знайдіть $\text{Im } \varphi$ та $\text{def } \varphi$.
(2. бал.) Побудуйте матрицю оператора $\varphi(x)$ в базисі В (y_1, y_2) .