Варіант 1.

№1. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо

$$y = y(t) = 2^{\cos^2 t}$$
$$x = x(t) = 2^{\sin^2 t}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-2^{\cos^2 t} \cdot \cancel{2\cos t \sin t \ln 2}}{2^{\sin^2 t} \cdot \cancel{2\sin t \cos t \ln 2}} = -2^{\cos^2 t - \sin^2 t} = -2^{\cos 2t};$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(-2^{\cos 2t})'t}{x'(t)};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{+2^{\cos 2t} \cancel{\ln 2} \cdot 2 \cancel{\sin 2t}}{2^{\sin^2 t} \cancel{\ln 2} \cancel{\sin 2t}} = 2 \cdot 2^{\cos 2t - \sin^2 t}.$$

№2. Виразіть d^2y через диференціали u, якщо $y = \cos 2u$ та $u = u(x)$.

$$dy = -\sin 2u \cdot 2 \cdot du;$$

$$d^2y = -2\cos 2u \cdot 2du \cdot du - 2\sin 2u\, d^2u =$$
$$= -2(\cos 2u \cdot 2du^2 + \sin 2u\, d^2u).$$

№3. Розкладіть в околі точки $x_0=0$ з точністю до x^3 функцію $f(x)=\operatorname{arctg}x-\sin(\cos x-1)$.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}-\sin\left(1-\frac{x^2}{2!}-1\right)+o(x^3)=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}-\sin\left(-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}-\left(-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+o(x^3).$$

№4. Дослідіть характер опуклості функції $f(x)=x^2\ln x$ на множині $A=(0;+\infty)$

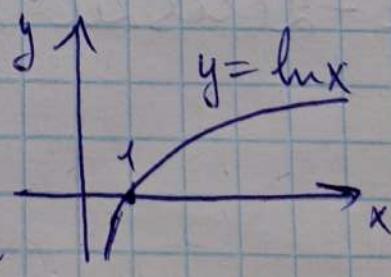
$(x>0)$

$f''(x)>0$ $\cup$

$f''(x)<0$ $\cap$

$$f'(x)=2x\ln x+x$$

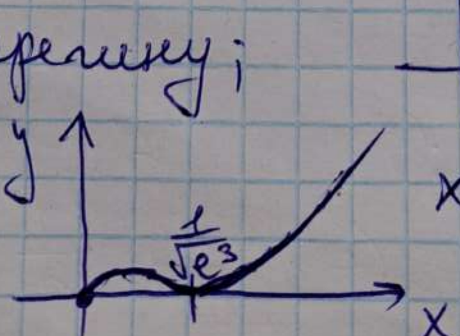
$$f''(x)=2\ln x+2+1=3+2\ln x$$



$f''(x)=0$ — т. перегину;

$\ln x=-\frac{3}{2}$,

$x=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$



$x>1$ — опукл. вниз

Варіант 2.

№ 1. Знайдіть $\frac{d^2y}{dx^2}$, де $y = y(x)$ задана спів-відношенням

$$x^2 - \operatorname{arctg} y = y + \operatorname{arctg} x;$$

$$2x - \frac{1}{1+y^2} \cdot y'(x) = y'(x) + \frac{1}{1+x^2};$$

$$2x - \frac{1}{1+x^2} = y'(x)\left(1 + \frac{1}{1+y^2}\right);$$

$$y'(x) = \frac{2x - \frac{1}{1+x^2}}{1 + \frac{1}{1+y^2}};$$

$$y''(x) = \left(\frac{(2x+2x^3-1)(1+y^2)}{(1+x^2)(2+y^2)}\right)' =$$

підставити $y'(x)$.

$$= \frac{\left((2+6x^2)(1+y^2) + (2x+2x^3-1)2y \cdot y'(x)\right)(1+x^2)(2+y^2)}{\left((1+x^2)(2+y^2)\right)^2}$$

№2. Знайдіть n-ту похідну функції

$$f(x)=\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1-x+x}{x(1-x)}=\frac{1}{x(1-x)}$$

$$f(x)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}+\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

№3. Розкладіть в околі точки $x_0=0$ з точністю до x^3 функцію $f(x)=(\cos x)^{tg(\sin x)}=e^{\ln\cos x\cdot tg\sin x}$

1) $$tg(\sin x)=tg\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+o(x^3)=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3}{3}+o(x^3)=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{(6x-x^3)^3}{216\cdot 3}+o(x^3)=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{\cancel{216}x^3}{\cancel{216}\cdot 3}+o(x^3)=$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{2x^3}{2\cdot 3}+o(x^3)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^3);$$

2) $$\ln(\cos x)=\ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)+o(x^3)=$$

$$=-\frac{x^2}{2}-\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3}+o(x^3)=-\frac{x^2}{2}+o(x^3);$$

3) $$\left(x+\frac{x^3}{6}\right)\left(-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)=-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+o(x^3)=$$

$$=-\frac{x^3}{2}+o(x^3);$$

4) $$e^{\left(-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)}=1-\frac{x^3}{2}+o(x^3);$$

$$f(x)=1-\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

№ 4. Дослідити характер опуклості функції

$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ на множині $A = R$ $(x \in R)$.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2};$$

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)(x^2+1)^2+(x^2+2x-1)\cdot 2\cdot 2x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{\overset{-}{-2(x+1)}(x^2+1)^2+4x\overset{+}{(x-1)^2}(x^2+1)}{\underset{+}{(x^2+1)^4}};\ <0$$

$f''(x) < 0$ – опукла вгору $\cap$.

x	$(-\infty; +\infty)$
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	$\cap$

Варіант 3.

№1. Знайдіть $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо

$$y = y(t) = t^2 - 5t + 1$$
$$x = x(t) = \ln t - t^3$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t-5}{\frac{1}{t} - 3t^2} = \frac{2t-5}{\frac{1-3t^3}{t}} =$$
$$= \frac{2t^2-5t}{1-3t^3};$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{2t^2-5t}{1-3t^3}}{\frac{1-3t^3}{t}} = \frac{d^2y}{dx^2} =$$
$$= \frac{2t^3-5t^2}{(1-3t^3)^2}.$$

№2. Знайдіть $\frac{dy}{dx}$ як похідну оберненої функції, де $y = \operatorname{arcctg} x$.

$$x = \operatorname{ctg} y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -\sin^2(\operatorname{arcctg} x) =$$
$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = -\frac{1}{1+x^2}.$$

№3. Розкладіть в околі точки $x_0=0$ з точністю до x^5 функцію $f(x)=\ln(1-x)+e^{\sqrt{1+x^5}-1}$.

1) $\ln(1+(-x)) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+o(x^5)$;

2) $\sqrt{1+x^5}=(1+x^5)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x^5}{2}+o(x^5)$;

3) $e^{1+\frac{x^5}{2}-1}+o(x^5)=e^{\frac{x^5}{2}}+o(x^5)=1+\frac{x^5}{2}+o(x^5)\neq$

~~$=1+\frac{x^5}{2}+o(x^5)$;~~

$f(x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+1+\frac{x^5}{2}+o(x^5)=$
$=1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^5}{10}+o(x^5)$.

№4. Побудуйте графік функції $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1) $x>0$, $D_f=(0;+\infty)$

2) $\begin{cases} f(x)\neq f(-x) \\ f(-x)\neq -f(x) \end{cases}$ – ні парна, ні непарна

3) $x=1$
$f(x)=0$ $(1;0)$

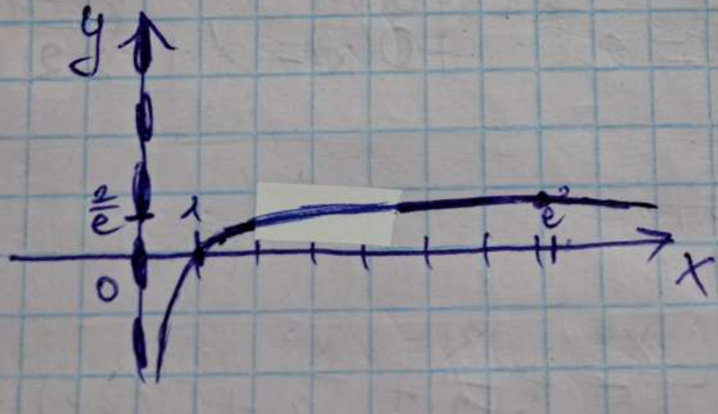
4) асимптоти: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\frac{-\infty}{+\infty} \Rightarrow x=0$ верт. ас.

5) extr: $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} =$

$= \dfrac{\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{x}\cdot x}$;

$f'(x)=0$, $x=e^2$, $f(e^2)=\frac{2}{e}$;

$\left(e^2; \frac{2}{e}\right)$ – локальний max.



Варіант 4.

№ 2. Знайдіть шосту (6) пох. ф-ї $y=\sin^2 3x$.

$$y=\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\cos 6x}{2}$$

$$y^{(n)}=-\frac{1}{2}\cdot 6^n\left(\cos 6x+\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$y^{(6)}=-\frac{1}{2}\cdot 6^6(\cos 6x+3\pi)=-\frac{1}{2}\cdot 6^6(\cos 6x+\pi)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 6^6(-\cos 6x)=\frac{1}{2}\cdot 6^6\cos 6x.$$

№ 3. Розкладіть в околі точки $x_0=0$ з точністю до x^3 функцію $f(x)=\sin(\cos x)+e^{x\ln(1-x)}$.

1) $\sin\cos x=\sin\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+o(x^3)=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-$

$-\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3}+o(x^3)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{(2-x^2)^3}{3\cdot 8}+o(x^5)=$

$=1-\frac{x^2}{2}-\frac{(8-12x^2)}{24}+o(x^5)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{2}=\frac{2}{3};$

$$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$

2) $x\ln(1+(-x))=x\left(-x-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)=-x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$

3) $e^{\left(-x^2-\frac{x^3}{2}\right)}+o(x^3)=1-x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3);$

$$f(x)=\frac{5}{3}-x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

$y=\sin^2 3x.$

$x+\frac{\pi}{4})=$

точністю

$)-$

$(x^5)=$

$+\frac{x^2}{2}=\frac{2}{3}$

№4. Довести нерівність:

$$\underbrace{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}}_{\varphi(x)} \le \underbrace{\sqrt{1+x}}_{\psi(x)}, \quad x \ge 0;$$

1) $\varphi(0)=1, \quad \psi(0)=1;$

2) $\varphi'(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}, \quad \psi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}},$

$\varphi'(0)=\frac{1}{2}, \quad \psi'(0)=\frac{1}{2};$

3) $\varphi''(x)=-\frac{1}{4}, \quad \psi''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}},$

$\varphi''(0)=-\frac{1}{4}, \quad \psi''(0)=-\frac{1}{4};$

4) $\varphi'''(x)=0, \quad \psi'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}>0$

$$\varphi'''(x) < \psi''(x)$$

$$\varphi(x) < \psi(x).$$

Варіант 5.

№1. Знайдіть $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо

$y = y(t) = (t-1)e^t$

$x = x(t) = t \cdot e^t$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{e^t + (t-1)e^t}{e^t + te^t} =$$

$$= \frac{e^t + te^t - e^t}{e^t + te^t} = 1 - \frac{1}{1+t};$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{t}{1+t}}{e^t(1+t)} = \frac{t}{e^t(1+t)^2}.$$

№2. Знайдіть $\frac{dy}{dx}$ як похідну оберненої ф., де $y = \operatorname{arctg} x$

$x = \operatorname{tg} y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

№3. Розкладіть в околі точки $x_0 = 0$ з точністю до x^5 функцію $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos x - 1)$.

1) $\cos x - 1 = \cancel{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - \cancel{1} =$
$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$;

2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

№4. Побудуйте графік функції
$f(x) = (x-3)\sqrt{x}$

1) $x \geq 0$, $D_f = [0; +\infty)$.

2) $f(-x) = (-x-3)\sqrt{-x} = -(x+3)\sqrt{-x}$

$\begin{cases} f(x) \neq f(-x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$ — ні парна, ні непарна.

3) асимптоти: $\lim\limits_{x \to 0}((x-3)\sqrt{x}) = 0$ - немає верт. ас.

$\lim\limits_{x \to \infty}((x-3)\sqrt{x}) = \infty$ - немає гориз. ас.

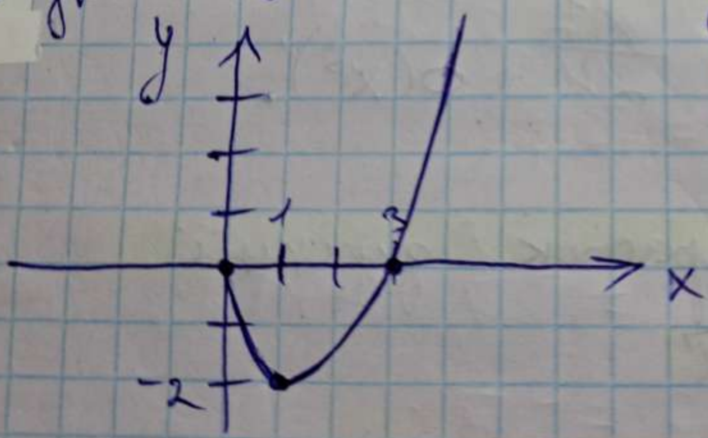
4) extr: $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{(x-3)}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$, $x = 1$ - лок. min

x	$[0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	min	$+$

5) $f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} - (x-3)\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0$

– опуклість $\downarrow$



6) т. перет. з Oy:

$\left[\begin{array}{ll} x=3 & (3;0) \\ x=0 & (0;0) \end{array}\right.$

Варіант 6.

№ 2. Знайти n-ту пох. ф-ї $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}};$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+2}} = \frac{1}{x}\left(\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}\right);$$

$$f(x)^{(n)} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}\right)^2.$$

№ 3. Розкладіть в околі точки $x_0 = 0$ з точн

№4. Побудуйте графік функції

$f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$. 1) ОДЗ: $1-e^{-x^2} \geq 0$

$e^{-x^2} \leq 1$

2) $x \in R$, $D_f = R$.

3) парна

4) асимптоти: $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{1-e^{-x^2}} = 1$

немає верт. ас. $(\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0)$

$y = 1$ – горизонт. ас.

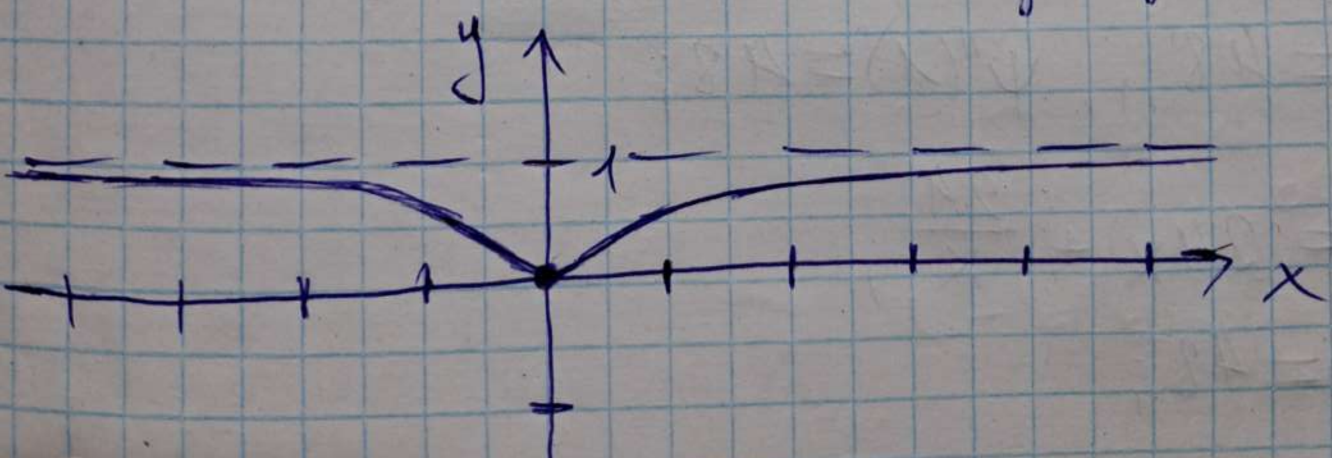
5) extr: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{x^2}}} \cdot (-e^{-x^2})(-x)$

$f'(x) = 0$, $\varnothing$

екстремумів немає.

6) $f(x) - f(0) = \sqrt{1-e^{-x^2}} \geq 0$

в т. $x = 0$ – лок. min за озн. екстр.



№ 4. Довести нерівність при $x>1$:

$$\underbrace{x^4+8x+12x^2\ln x}_{\varphi(x)} > \underbrace{8x^3+1}_{\psi(x)};$$

1) $\varphi(1)=9, \quad \psi(1)=9;$

2) $\varphi'(x)=4x^3+8+12\left(2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}\right)=$
$=4x^3+8+24x\ln x+12x,$

$\psi'(x)=24x^2,$

$\varphi'(1)=24, \quad \psi'(1)=24;$

3) $\varphi''(x)=12x^2+12+24\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=$
$=12x^2+12+24\ln x+24,$

$\psi''(x)=48x,$

$\varphi''(1)=48, \quad \psi''(1)=48;$

4) $\varphi'''(x)=24x+\frac{24}{x},$

$\psi'''(x)=48;$

$\varphi'''(1)=48, \quad \psi'''(1)=48;$

5) $\varphi^{(4)}(x) = 24 + 24(-1)\frac{1}{x^2}$,

$\psi^{(4)}(x) = 0$;

$\varphi^{(4)}(1) = 0$, $\psi^{(4)}(x) = 0$;

6) $\varphi^{(5)}(x) = -24\cdot(-2)\frac{1}{x^3}$,

$\psi^{(5)}(x) = 0$,

$\varphi^{(5)}(1) = 48$, $\psi^{(5)}(1) = 0$

$\varphi^{(5)}(1) > \psi^{(5)}(1)$,

$\underline{\varphi(x) > \psi(x)}$.

№ 2. Знайти n-ту похідну функції $y = \frac{e^x}{x}$.

$y = e^x \cdot \frac{1}{x}$

$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

$(e^x)^{(n)} = e^x$.

$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!\, e^x}{x^{n+1}}$.

Варіант 11.

№1. Обчисліть за озн. ліву та праву похідні функції $f: R \to R$ у точці $x_0 = 0$, якщо:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0; \\ \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0 - 0} f'(x) = f'_-(x_0) \\ &\lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = f'_+(x_0) \end{aligned}}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0, \\ -\cos x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-0} 2x = 0 \quad ;$$

$$\lim_{x \to 0+0} (-\cos x) = -1 \quad .$$

№ 2. Дослідіть ф-ю $f: R \to R$ на диференц. на мн. D_f, якщо $f(x)=e^{-|x|}$.

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ e^{x}, & x<0 \end{cases}, \quad x_0=0$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=f'_-(x_0)=\lim_{x\to 0-0} e^{x}=1$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to 0+0} e^{-x}=1$$

$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ – диференційовна.

№ 3. Обчисліть $f^{(31)}(3)$, якщо $f(x)=\ln(x^2-4x+4)$.

$$\left(\ln(x)\right)^{(n)}=\frac{1}{x}\left(\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+2}};$$

$$f^{(31)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x^2-4x+4)^{n+2}}=\frac{-(31!)}{(x^2-4x+4)^{33}};$$

$$f^{(31)}(3)=\frac{-(31!)}{(9-12+4)^{33}}=\frac{-(31!)}{1}=-(31!).$$

№ 4. Дослідіть ф-ю $f: R \to R$ на екстремуми на мн. D_f, якщо

$f(x) = x^3 \ln x$ $\qquad$ $D_f = (0; +\infty)$

$f'(x) = 3x^2 \ln x + \frac{x^3}{x} = 3x^2 \ln x + x^2$; $\quad f'(x) = 0$;

$x^2(3 \ln x + 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \ln x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ – точка розриву;} \\ x = e^{-\frac{1}{3}} \text{ – точка лок. min.} \end{array}\right.$

x	$\left(0; \frac{1}{e^3}\right)$	$\frac{1}{e^3}$	$\left(\frac{1}{e^3}; +\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$