МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

М. О. Хмельницький

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ 1

Практичні заняття

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами «Системи, технології та математичні методи кібербезпеки»
та «Системи технічного захисту інформації» спеціальності 125 Кібербезпека

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент Терещенко І.М., канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ММАД

Відповідальний редактор Смирнов С.А., канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 24.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради НН ФТІ
(протокол № 7 від 20.06.2022 р.)

Навчальний посібник розроблено для більш детального ознайомлення студентів з практичними прийомами лінійної алгебри та аналітичної геометрії, а також для використання на практичних заняттях і для самостійної роботи студентів. У навчальному посібнику докладно викладено матеріал для практичного опрацювання та поглиблення знань та навичок з базових тем дисципліни: системи лінійних рівнянь, матриці, визначники другого та третього порядків, векторна алгебра, лінійні образи на площині та в просторі, квадратичні образи на площині, основні алгебраїчні структури, векторні простори, лінійна залежність та незалежність систем векторів, ранг систем векторів та матриць, комплексні числа, многочлени та основна теорема алгебри (многочленів). Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра, які навчаються за спеціальністю 125 Кібербезпека.

Реєстр. №НП XX/XX-XXX. Обсяг 4.1 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

Практичне заняття №1. Визначники 2-го та 3-го порядків

1.1.А. Користуючись формулами Крамера, розв'язати СЛР.

a) $\begin{cases} 3\,x - 5\,y = 4, \\ 4\,x + y = 13, \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos\alpha\ x - \sin\alpha\ y = \cos\beta, \\ \sin\alpha\ x + \cos\alpha\ y = \sin\beta, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\,x + 3\,y + 5\,z = 10, \\ 3\,x + 7\,y + 4\,z = 3, \\ x + 2\,y + 2\,z = 3, \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\,x + y = 5, \\ x + 3\,z = 16, \\ 5\,y - z = 10, \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3\,x - 2\,y + 4\,z = 11, \\ 2\,x + y - z = 3, \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4\,x + 4\,y + 5\,z = 3, \\ 3\,x + 3\,y + 4\,z = 2. \end{cases}$

1.2.А. Дослідити СЛР на сумісність та визначеність.

a) $(a - b)\,x = b - c$, b) $\sin\alpha\ x = 1 + \cos\alpha$,

c) $\begin{cases} a\,x + 4\,y = 2, \\ 9\,x + a\,y = 3, \end{cases}$ d) $\begin{cases} a\,x + 4\,y + z = 0, \\ 2\,y + 3\,z - 1 = 0, \\ 3\,x - b\,z + 2 = 0. \end{cases}$

1.3.А. Використовуючи лише: a) ЕПр, b) ЕПс, c) ЕПр і ЕПс, зробити в матриці A якомога більшу кількість нулів, а після цього (не зменшуючи кількість нулів) якомога більшу кількість одиниць, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.4.А. Не розкриваючи визначників, довести рівності.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},$ c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = 4\,x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

1.5.А. Не розкриваючи визначників, довести їх рівність нулю.

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix},$ b) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix},$ c) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix},$ де α, β, γ — корені рівняння $x^3 + p\,x + q = 0$.

1.6.А. Обчислити визначники шляхом: a) зведення їх до трикутного вигляду, b) розкладу за елементами 1-го рядка, c) розкладу за елементами 1-го стовпчика.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix},$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix},$ 3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$

1.1.Д. Обчислити за означенням визначники.

a) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2\,t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2\,t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix},$ b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\ \cos\beta & \sin\alpha\ \sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\ \cos\beta & \cos\alpha\ \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

1.2.Д. Користуючись формулами Крамера, розв'язати СЛР.

a) $\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha\ x + y = \sin(\alpha+\beta), \\ x - \operatorname{tg}\alpha\ y = \cos(\alpha+\beta), \end{cases}$ де $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
b) $\begin{cases} 2\,x + y - 5\,z = -1, \\ x + 2\,y - 4\,z = 1, \\ x - y - z = -2, \end{cases}$
c) $\begin{cases} 7\,x + 3\,y - 6\,z = -1, \\ 7\,x + 9\,y - 9\,z = 5, \\ 2\,x - 4\,y + 9\,z = 28. \end{cases}$

1.3.Д. Дослідити на сумісність та визначеність СЛР $\begin{cases} a\,x - 9\,y = 6, \\ 10\,x + b\,y = 10. \end{cases}$

1.4.Д. Обчислити визначники шляхом: a) зведення їх до трикутного вигляду, b) розкладу за елементами 1-го рядка, c) розкладу за елементами 1-го стовпчика.

1) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

1.5.Д. Не розкриваючи визначників, довести рівності.

a) $$\begin{vmatrix} 0.(123) & 0.1(23) & 0.12(3) \\ \dfrac{30}{37} & \dfrac{10}{11} & 1 \\ 1 & \dfrac{37}{55} & -0.37 \end{vmatrix} = \frac{1}{450}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

b) $$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

1.1.+. При якій умові виконується рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}?$$

1.2.+. Довести, що визначник

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

ділиться на $x+y$ і на $x^2 - x\,y + y^2$.
1.3.+. Знайти всі можливі значення, які може приймати визначник 3-го порядка, за умови, що всі його елементи рівні ± 1.
1.4.+. Знайти всі можливі значення, які може приймати визначник 3-го порядка, за умови, що всі його елементи рівні 1 або 0.
1.5.+. Придумати визначник 3-го порядку, значення якого було б відмінно від нуля і не залежало б від одного з його елементів. Для якої максимальної кількості елементів визначника 3-го порядку таке можливо?

1.1.А. Користуючись формулами Крамера, розв'язати СЛР.

a) $\begin{cases} 3\,x - 5\,y = 4, \\ 4\,x + y = 13, \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos\alpha\ x - \sin\alpha\ y = \cos\beta, \\ \sin\alpha\ x + \cos\alpha\ y = \sin\beta, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\,x + 3\,y + 5\,z = 10, \\ 3\,x + 7\,y + 4\,z = 3, \\ x + 2\,y + 2\,z = 3, \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\,x + y = 5, \\ x + 3\,z = 16, \\ 5\,y - z = 10, \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3\,x - 2\,y + 4\,z = 11, \\ 2\,x + y - z = 3, \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4\,x + 4\,y + 5\,z = 3, \\ 3\,x + 3\,y + 4\,z = 2. \end{cases}$

► a) Запишемо СЛР у вигляді розширеної матриці.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 4 \\ 4 & 1 & 13 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - (-5)\cdot 4 = 23 \neq 0 \quad \Longrightarrow$$

СЛР має розв'язок, і до того ж єдиний.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 69,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 23. \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{69}{23} = 3,\ \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{23}{23} = 1. \quad \square$$

► b) $\left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\beta \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos(\beta-\alpha), \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} = \sin(\beta-\alpha). \quad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\cos(\beta-\alpha)}{1} = \cos(\beta-\alpha), \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{1} = \sin(\beta-\alpha). \qquad \square$$

► c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} 2\cdot 7\cdot 2 + 3\cdot 4\cdot 1 + 5\cdot 3\cdot 2\ - \\ -1\cdot 7\cdot 5 - 2\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 3 \end{array} = 1 \neq 0,$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 10 & 3 & 5 & 10 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right| = \begin{array}{c} 10\cdot 7\cdot 2 + 3\cdot 4\cdot 3 + 5\cdot 3\cdot 2\ - \\ -3\cdot 7\cdot 5 - 2\cdot 4\cdot 10 - 2\cdot 3\cdot 3 \end{array} = 3,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 3, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2. \qquad \square$$

► d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29 \neq 0,$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -87, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -145 \quad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 3, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 5. \qquad \square$$

► e) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 11-4\,z \\ 2 & 1 & 3+z \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11-4\,z & -2 \\ 3+z & 1 \end{vmatrix} = 17-2\,z, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 11-4\,z \\ 2 & 3+z \end{vmatrix} = -13+11\,z \quad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{17-2\,z}{7}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-13+11\,z}{7}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = \dfrac{17}{7} - \dfrac{2}{7}\,z, \\ y = -\dfrac{13}{7} + \dfrac{11}{7}\,z, \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$ □

► f) $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 3-5\,z \\ 3 & 3 & 2-4\,z \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3-5\,z & 4 \\ 2-4\,z & 3 \end{vmatrix} = 1+z, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 3-5\,z \\ 3 & 2-4\,z \end{vmatrix} = -1-z \quad \Longrightarrow$$

Оскільки $\Delta = 0$, то для того, щоб СЛР мала розв'язок, необхідно виконання умови

$$\Delta_x = \Delta_y = 0,$$

при якій одне з рівнянь (наприклад, друге) з СЛР може бути виключено.

Умова $\Delta_x = \Delta_y = 0$ виконується тоді й лише тоді, коли параметр набуває значення $z = -1$. Таким чином, отримуємо СЛР

$\begin{cases} 4\,x + 4\,y = 8, \end{cases}$ розв'язком якої є $\begin{cases} x = 2 - y, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Отже, $\quad x = 2 - y, \quad y \in \mathbb{R}, \quad z = -1.$

Відповідь: $\begin{cases} x = 2 - y, \\ z = -1, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$ □

1.2.A. Дослідити СЛР на сумісність та визначеність.

a) $(a-b)\,x = b - c,$

b) $\sin\alpha\ x = 1 + \cos\alpha,$

c) $\begin{cases} a\,x + 4\,y = 2, \\ 9\,x + a\,y = 3, \end{cases}$

d) $\begin{cases} a\,x + 4\,y + z = 0, \\ 2\,y + 3\,z - 1 = 0, \\ 3\,x - b\,z + 2 = 0. \end{cases}$

► a) *Відповідь*:

$x = \dfrac{b-c}{a-b}$, якщо $a \neq b$,
$x \in \varnothing$, якщо $a = b \neq c$,
$x \in \mathbb{R}$, якщо $a = b = c$.

□

► b) *Відповідь*:

$x = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, якщо $\alpha \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$,
$x \in \varnothing$, якщо $\alpha = 2\,n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$,
$x \in \mathbb{R}$, якщо $\alpha = (2\,n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

□

► c) $\left(\begin{array}{cc|c} a & 4 & 2 \\ 9 & a & 3 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 4 \\ 9 & a \end{vmatrix} = a^2 - 36, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2\,a - 12, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3\,a - 18.$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{a+6}, \\ y = \dfrac{3}{a+6}, \end{cases} \qquad \text{якщо} \quad a \neq \pm 6,$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\,y, \\ y \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{якщо} \quad a = 6,$$

$$(x, y) \in \varnothing, \qquad \text{якщо} \quad a = -6.$$

□

► d) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -b & -2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -b \end{vmatrix} = 30 - 2\,ab, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -b \end{vmatrix} = -20 + 4\,b,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -b \end{vmatrix} = -3 + 6\,a - ab, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 4\,a.$$

$$\begin{cases} a = 3, \\ b = 5, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right).$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x = \dfrac{-10 + 2\,b}{15 - ab}, \\ y = \dfrac{-3 + 6\,a - ab}{30 - 2\,ab}, \\ z = \dfrac{6 - 2\,a}{15 - ab}, \end{cases} \qquad \text{якщо} \quad ab \neq 15,$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3}\,z, \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\,z, \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{якщо} \quad \begin{cases} a = 3, \\ b = 5, \end{cases}$$

$$(x, y) \in \varnothing, \qquad \text{якщо} \quad \begin{cases} ab = 15, \\ a \neq 3, b \neq 5. \end{cases}$$

□

1.3.A. Використовуючи лише: a) ЕПр, b) ЕПс, c) ЕПр і ЕПс, зробити в матриці A якомога більшу кількість нулів, а після цього (не зменшуючи кількість нулів) якомога більшу кількість одиниць, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

► a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-4) \; (-5) \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -10 \\ 0 & -9 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \\ (-1) \; (2/9) \\ \longleftarrow \end{matrix} \to$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/9 \\ 0 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1/9) \;\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/9 \\ 0 & 1 & 10/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

$$\blacktriangleright\ \text{c)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ЕПр з прикладу а)}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (-\frac{7}{9}) & (-\frac{10}{9}) & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/9 \\ 0 & 1 & 10/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

1.4.A. Не розкриваючи визначників, довести рівності.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},$ c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = 4\,x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

$$\blacktriangleright\ \text{a)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (-2) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (-3) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (2) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (4) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & * & * \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} \end{array} = 0. \qquad \square$$

$$\blacktriangleright\ \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (-2)\ (-1) \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}. \qquad \square$$

$$\blacktriangleright\ \text{c)}\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \cdot(\frac{1}{2}) \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} \end{array} = 2 \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 1 \\ 2+x & 2-x & 2 \\ 3-x & 3+x & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \cdot(\frac{1}{2}) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1+x & 1 \\ 4 & 2-x & 2 \\ 6 & 3+x & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 4 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (-1) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 3 & 3+x & 1 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= 4 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \cdot(\frac{1}{x}) & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & -x & 2 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 4\,x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \square$$

1.5.A. Не розкриваючи визначників, довести їх рівність нулю.

a) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix},$ b) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix},$ c) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix},$ де α, β, γ — корені рівняння $x^3 + p\,x + q = 0$.

► a) $$\begin{vmatrix} a+b & c & 1\\ b+c & a & 1\\ c+a & b & 1\end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} * & & * \end{array}\\ \begin{vmatrix} a+b+c & c & 1\\ b+c+a & a & 1\\ c+a+b & b & 1\end{vmatrix}\end{array} = 0.$$ □

► b) $$\begin{array}{c} (-1) \\ \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3\\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3\end{vmatrix}\end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & * & * \end{array}\\ \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1(y_2-y_1) & x_1(y_3-y_1)\\ 1+x_2y_1 & x_2(y_2-y_1) & x_2(y_3-y_1)\\ 1+x_3y_1 & x_3(y_2-y_1) & x_3(y_3-y_1)\end{vmatrix}\end{array} = 0.$$ □

► c) $$x^3 + A\,x^2 + p\,x + q = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -A,\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = p,\\ \alpha\beta\gamma = -q.\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma\\ \beta & \gamma & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta\end{vmatrix} = 0.$$ □

1.6.A. Обчислити визначники шляхом: a) зведення їх до трикутного вигляду, b) розкладу за елементами 1-го рядка, c) розкладу за елементами 1-го стовпчика.

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}, \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}, \qquad 3)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4\\ 4 & 1 & -2\\ 5 & 2 & -3\end{vmatrix}.$$

► a) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix} (-5)\ (-2)\\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3\\ 0 & -17 & -13\\ 0 & -7 & -3\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ (-1)\\ (-1)\end{matrix} =$$

$$= -(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3\\ 0 & 7 & 3\\ 0 & 17 & 13\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ (-17/7)\\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3\\ 0 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 40/7\end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot \frac{40}{7} = 40.$$ □

► b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 40.$$ □

► c) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 40.$$ □

Відповідь: $$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix} = 40,\quad 2)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix} = -3,\quad 3)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4\\ 4 & 1 & -2\\ 5 & 2 & -3\end{vmatrix} = -5.$$

Практичне заняття №2. Метод Гаусса

2.1.А. Не розкриваючи визначників, довести рівності.

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

2.2.А. Дослідити на сумісність та визначеність та розв'язати методом Гаусса СЛР.

a) $\begin{cases} x + 2\,y + 3\,z = 5, \\ x + 3\,y + 4\,z = 6, \\ 2\,x - y - z = 1, \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4\,x + 2\,y + 3\,z = -2, \\ 2\,x + 8\,y - z = 8, \\ 9\,x + y + 8\,z = 0, \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2\,x + 3\,y - z = 2, \\ x - y + 3\,z = 3, \\ 3\,x + 7\,y - 5\,z = 1, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 = 1, \\ 2\,x_1 + x_2 + 7\,x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - 7\,x_2 + 2\,x_3 + 4\,x_4 = -2, \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 - x_5 = 7, \\ x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 - x_4 + 2\,x_5 = -6, \\ 7\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 + 4\,x_5 = -4. \end{cases}$

2.3.А. Знайти многочлен $f(x)$ другого степеня з дійсними коефіцієнтами, для якого $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.

2.1.Д. Знайти многочлен $f(x)$ третього степеня з дійсними коефіцієнтами, для якого $f(-2) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 13$, $f(2) = 33$.

2.2.Д. Дослідити на сумісність та визначеність та розв'язати методом Гаусса СЛР.

a) $\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 5, \\ 3\,x_1 + 7\,x_2 - x_3 + 3\,x_4 = 2, \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + 4\,x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2\,x_3 - x_4 = 1, \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 + 5\,x_3 - x_4 = 3, \\ 2\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 - 3\,x_4 = 1, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 24\,x_1 + 14\,x_2 + 30\,x_3 + 40\,x_4 + 41\,x_5 = 28, \\ 36\,x_1 + 21\,x_2 + 45\,x_3 + 61\,x_4 + 62\,x_5 = 43, \\ 48\,x_1 + 28\,x_2 + 60\,x_3 + 82\,x_4 + 83\,x_5 = 58, \\ 60\,x_1 + 35\,x_2 + 75\,x_3 + 99\,x_4 + 102\,x_5 = 69. \end{cases}$

2.3.Д. Не розкриваючи визначників, довести рівності.

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a\,b + b\,c + c\,a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

2.1.+. Знайти многочлен $f(x)$ четвертого степеня з дійсними коефіцієнтами, для якого $f(1) = -3$, $f'(1) = -3$, $f''(1) = 12$, $f'''(1) = 42$, $f(-1) = 3$.

2.2.+. Дослідити та розв'язати СЛР методом Гаусса залежно від значень параметрів λ та μ.

a) $\begin{cases} (1+\lambda)\,x + y + z = 1, \\ x + (1+\lambda)\,y + z = \lambda, \\ x + y + (1+\lambda)\,z = \lambda^2, \end{cases}$ b) $\begin{cases} (1+\lambda)\,x + y + z = \lambda^2 + 3\,\lambda, \\ x + (1+\lambda)\,y + z = \lambda^3 + 3\,\lambda^2, \\ x + y + (1+\lambda)\,z = \lambda^4 + 3\,\lambda^3, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda\,x + y + z = 4, \\ x + \mu\,y + z = 3, \\ x + 2\,\mu\,y + z = 4, \end{cases}$ d) $\begin{cases} \lambda\,x + \mu\,y + z = 1, \\ x + \lambda\,\mu\,y + z = \mu, \\ x + \mu\,y + \lambda\,z = 1. \end{cases}$

2.1.А. Не розкриваючи визначників, довести рівності.

a) $\begin{vmatrix}1&a&b\,c\\1&b&c\,a\\1&c&a\,b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

► a) *1-й спосіб.* Міркування, з яких випливає розв'язок задачі.

1) Між двома визначниками стоїть знак рівності, і вони відрізняються один від одного лише третім стовпчиком.

2) Серед трьох ЕП лише третє не змінює коефіцієнт перед визначником.

3) В третьому стовпчику другого визначника маємо отримати квадрати змінних a, b, c.

$$\begin{array}{l} \qquad\quad (a+b+c) \qquad\qquad\qquad -(ab+bc+ca) \\ \begin{vmatrix}1&a&b\,c\\1&b&c\,a\\1&c&a\,b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&a&a^2+ab+ac+bc\\1&b&ba+b^2+bc+ca\\1&c&ca+cb+c^2+ab\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}.\end{array}$$

2-й спосіб. Якщо $ab\,c \neq 0$, то

$$\begin{array}{l} \qquad\quad (\tfrac{1}{abc}) \\ \begin{vmatrix}1&a&b\,c\\1&b&c\,a\\1&c&a\,b\end{vmatrix} = ab\,c \begin{vmatrix}1&a&1/a\\1&b&1/b\\1&c&1/c\end{vmatrix} \begin{array}{c}(a)\\(b)\\(c)\end{array} = \begin{vmatrix}a&a^2&1\\b&b^2&1\\c&c^2&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}.\end{array}$$

Необхідно також розглянути випадки, коли $ab\,c = 0$. □

► b) Рівність доводиться методом виділення лінійних множників. При цьому визначник розглядається як многочлен від однієї або декількох змінних, які входять в нього. Перетворюючи визначник, доводять, що він ділиться на декілька лінійних множників, а отже (якщо ці множники попарно взаємно прості), й на їхній добуток[1]. Порівнюючи окремі члени визначника з членами добутку лінійних множників, знаходять частку від ділення визначника на цей добуток і тим самим знаходять розклад визначника.

$$\Delta = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix} \begin{array}{c}(-1)\\ \longleftarrow \\ \end{array} = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\0&b-a&b^2-a^2\\1&c&c^2\end{vmatrix} \implies \Delta \,\vdots\, (b-a),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix} \begin{array}{c}(-1)\\ \\ \longleftarrow\end{array} = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\0&c-a&c^2-a^2\end{vmatrix} \implies \Delta \,\vdots\, (c-a),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix} \begin{array}{c}\\ (-1) \\ \longleftarrow\end{array} = \begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\0&c-b&c^2-b^2\end{vmatrix} \implies \Delta \,\vdots\, (c-b).$$

З попарної взаємної простоти лінійних множників $b-a$, $c-a$ та $c-b$ випливає, що визначник Δ ділиться на їхній добуток, тобто

$$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)\cdot\delta(a,b,c),$$

де $\delta(a,b,c)$ — деякий многочлен. Проте $\delta(a,b,c)$ не залежить від жодної зі змінних a, b, c, оскільки відносно кожної з них Δ та $(b-a)(c-a)(c-b)$ є многочленами степеня 2. Таким

[1] Наприклад, $12\,\vdots\,2$, $12\,\vdots\,3$, НСД$(2,3)=1 \Rightarrow 12\,\vdots\,(2\cdot 3)$, проте $12\,\vdots\,2$, $12\,\vdots\,4 \not\Rightarrow 12\,\vdots\,(2\cdot 4)$.

чином,

$$\Delta = A \cdot (b-a)(c-a)(c-b),$$

де A — деяке число.

Якщо розкривати визначник Δ, то, вочевидь, коефіцієнт біля доданку $b\,c^2$ дорівнює 1. Коефіцієнт біля доданку $b\,c^2$ в правій частині останньої рівності дорівнює A. Таким чином, $A = 1$, і рівність доведено. $\square$

2.2.A. Дослідити на сумісність та визначеність та розв'язати методом Гаусса СЛР.

$$\text{a)} \begin{cases} x+2\,y+3\,z=5, \\ x+3\,y+4\,z=6, \\ 2\,x-y-z=1, \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 4\,x+2\,y+3\,z=-2, \\ 2\,x+8\,y-z=8, \\ 9\,x+y+8\,z=0, \end{cases} \qquad \text{c)} \begin{cases} 2\,x+3\,y-z=2, \\ x-y+3\,z=3, \\ 3\,x+7\,y-5\,z=1, \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x_1-2\,x_2+3\,x_3+x_4=1, \\ 2\,x_1+x_2+7\,x_3-x_4=5, \\ x_1-7\,x_2+2\,x_3+4\,x_4=-2, \end{cases} \qquad \text{e)} \begin{cases} 2\,x_1+4\,x_2-x_3+2\,x_4-x_5=7, \\ x_1-2\,x_2+2\,x_3-x_4+2\,x_5=-6, \\ 7\,x_1+2\,x_2+4\,x_3+x_4+4\,x_5=-4. \end{cases}$$

► a) Запишемо СЛР у вигляді розширеної матриці та шляхом ЕПр останню зведемо до ступінчастого вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1)\ (-2) \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (5) \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

Матрицю звели до ступінчастого вигляду, при цьому $r = R = n = 3$. Отже, СЛР є сумісною та визначеною. Зворотнім ходом методу Гаусса зведемо матрицю СЛР до одиничної.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-2) \\ \cdot(-1/2) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = 2. \end{cases}$ $\square$

► b) На місці $(1,1)$ елемент 1 можна отримати принципово трьома способами: 1ЕПр, 2ЕПр та 3ЕПр. В цьому прикладі за допомогою 1ЕПр зробити 1 на місці $(1,1)$ неможливо, оскільки в 1-му стовпчику немає жодного елемента ± 1. За допомогою 2ЕПр на місці $(1,1)$ зробити 1 можна, проте тоді в 1-му рядку з'являться дроби. Використаємо 3ЕПр.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 9 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)\ (-4) \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 14 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & -5 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 14 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{array}\right).$$

Матрицю звели до ступінчастого вигляду, при цьому $r = 2 < R = 3$. Отже, СЛР є несумісною.

Відповідь: $\varnothing$. $\square$

► c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & -5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2)\ (-3) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -4 \\ 0 & 10 & -14 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \end{array} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

Матрицю звели до ступінчастого вигляду, при цьому $r = R = 2 < n = 3$. Отже, СЛР є сумісною та невизначеною. Останній рядок неінформативний, тому надалі його можна не записувати.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (1/5)\ \cdot(1/5) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8/5 & 11/5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -4/5 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} x + \dfrac{8}{5}\, z = \dfrac{11}{5}, \\ y - \dfrac{7}{5}\, z = -\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = \dfrac{11}{5} - \dfrac{8}{5}\, z, \\ y = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{7}{5}\, z, \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$ $\square$

► d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & -1 & 5 \\ 1 & -7 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2)\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

Матрицю звели до ступінчастого вигляду, при цьому $r = R = 2 < n = 4$. Отже, СЛР є сумісною та невизначеною. В якості другої базисної змінної (за першу природно взяти x_1) оберемо змінну x_3, оскільки на місці $(2, 3)$ стоїть 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-3) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -17 & 0 & 10 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right), \begin{cases} x_1 - 17\, x_2 + 10\, x_4 = -8, \\ 5\, x_2 + x_3 - 3\, x_4 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = -8 + 17\, x_2 - 10\, x_4, \\ x_3 = 3 - 5\, x_2 + 3\, x_4, \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$ $\square$

► e) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2)\ (-7) \\ \\ \end{array} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 8 & -5 & 4 & -5 & 19 \\ 0 & 16 & -10 & 8 & -10 & 38 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 8 & -5 & 4 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

Матрицю звели до ступінчастого вигляду, при цьому $r = R = 2 < n = 5$. Отже, СЛР є сумісною та невизначеною. В якості другої базисної змінної (за першу природно взяти x_1) оберемо змінну x_3 (або x_5), оскільки дробів уникнути не вдасться, а дріб із знаменником 5 має всього один десятковий знак після коми.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 8 & -5 & 4 & -5 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longleftarrow \\ (2/5)\ \cdot(-1/5) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1.2 & 0 & 0.6 & 0 & 1.6 \\ 0 & -1.6 & 1 & -0.8 & 1 & -3.8 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} x_1 + 1.2\,x_2 + 0.6\,x_4 = 1.6, \\ -1.6\,x_2 + x_3 - 0.8\,x_4 + x_5 = -3.8. \end{cases} \qquad \textit{Відповідь:}\ \begin{cases} x_1 = 1.6 - 1.2\,x_2 - 0.6\,x_4, \\ x_3 = -3.8 + 1.6\,x_2 + 0.8\,x_4 - x_5, \\ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \square$$

2.3.А. Знайти многочлен $f(x)$ другого степеня з дійсними коефіцієнтами, для якого $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.

► Нехай $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. Тоді

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c = 8, \\ f(-1) = a - b + c = 2, \\ f(2) = 4\,a + 2\,b + c = 14. \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1)\ (-4) \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -3 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longleftarrow \\ (-1)\ (1/2) \\ \longleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1/2) \\ \cdot(-1/3) \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longleftarrow \\ \\ (-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} a = 1, \\ b = 3, \\ c = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $f(x) = x^2 + 3\,x + 4$. $\square$

Практичне заняття №3. Системи лінійних однорідних рівнянь

3.1.А. Розв'язати методом Гаусса СЛОР та знайти їх ФСР.

a) $\begin{cases} 3\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0, \\ 6\,x_1 - 4\,x_2 + 3\,x_3 = 0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2\,x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4\,x_2 + 9\,x_3 - x_4 = 0, \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 - x_5 - 7\,x_6 = 0, \\ x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 - x_4 + 2\,x_5 + 6\,x_6 = 0, \\ 7\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 + 4\,x_5 + 4\,x_6 = 0. \end{cases}$

3.2.А. Дослідити та розв'язати СЛР методом Гаусса залежно від значень параметра λ.

a) $\begin{cases} \lambda\,x + y + z = 1, \\ x + \lambda\,y + z = 1, \\ x + y + \lambda\,z = 1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} (\lambda+3)\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = \lambda, \\ \lambda\,x_1 + (\lambda-1)\,x_2 + x_3 = 2\,\lambda, \\ 3\,(\lambda+1)\,x_1 + \lambda\,x_2 + (\lambda+3)\,x_3 = 5, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda\,x + \lambda\,y + (\lambda+1)\,z = \lambda, \\ \lambda\,x + \lambda\,y + (\lambda-1)\,z = \lambda, \\ (\lambda+1)\,x + \lambda\,y + (2\,\lambda+3)\,z = 1. \end{cases}$

3.1.Д. Розв'язати методом Гаусса СЛОР та знайти їх ФСР.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0, \\ 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 2\,x_4 + 3\,x_5 = 0, \\ 5\,x_1 + 7\,x_2 + x_3 + 3\,x_4 + 4\,x_5 = 0, \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + 2\,x_3 + x_4 + 5\,x_5 = 0, \\ 7\,x_1 + 10\,x_2 + x_3 + 6\,x_4 + 5\,x_5 = 0. \end{cases}$

3.2.Д. Дослідити та розв'язати СЛР методом Гаусса залежно від значень параметра λ.

a) $\begin{cases} \lambda\,x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda\,x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda\,x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda\,x_4 = 1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} (5-\lambda)\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 = 1, \\ -2\,x_1 + (2-\lambda)\,x_2 - 2\,x_3 = 2, \\ -x_1 - 2\,x_2 + (5-\lambda)\,x_3 = 1. \end{cases}$

3.1.+.

Розв'язати методом Гаусса та знайти ФСР СЛОР. Як зміниться розв'язок, якщо з СЛОР вилучити перше та останнє рівняння?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0, \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$$

3.2.+. З'ясувати, чи утворюють рядки кожної з матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ ФСР СЛОР $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 - 3\,x_5 = 0, \\ x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 + 6\,x_5 = 0, \\ 5\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 + 3\,x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3.3.+. Знайти СЛОР, кожний вектор з множини розв'язків якої є ЛК векторів:
a) $\overrightarrow{a_1} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{a_3} = (2,3,2,3)$;
b) $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,1,-1,1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,1,0,0,3)$, $\overrightarrow{a_3} = (3,1,1,-1,7)$.

3.1.А. Розв'язати методом Гаусса СЛОР та знайти їх ФСР.

a) $\begin{cases} 3\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0, \\ 6\,x_1 - 4\,x_2 + 3\,x_3 = 0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2\,x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4\,x_2 + 9\,x_3 - x_4 = 0, \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 - x_5 - 7\,x_6 = 0, \\ x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 - x_4 + 2\,x_5 + 6\,x_6 = 0, \\ 7\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 + 4\,x_5 + 4\,x_6 = 0. \end{cases}$

► a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) (-3) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot(1/2) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ -1.5\,x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = 1.5\,x_1, \\ x_3 = 0, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{f} = (1, 1.5, 0) \ \ (\text{або } \boldsymbol{f} = (2, 3, 0)). \quad \square$$

► b) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) (-1)\ (-2) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) (-2) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \begin{cases} x_1 - 7\,x_3 + 3\,x_4 = 0, \\ x_2 + 4\,x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 7\,x_3 - 3\,x_4, \\ x_2 = -4\,x_3 + x_4, \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Знайдемо ФСР двома способами.

1-й спосіб. Нехай (x_1, x_2, x_3, x_4) — довільний розв'язок заданої СЛР. Тоді

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7\,x_3 - 3\,x_4, -4\,x_3 + x_4, x_3, x_4) = (7\,x_3, -4\,x_3, x_3, 0) + (-3\,x_4, x_4, 0, x_4) =$$

$$= x_3\,(7, -4, 1, 0) + x_4\,(-3, 1, 0, 1). \quad \text{Отже, ФСР: } \begin{array}{l} \boldsymbol{f}_1 = (7, -4, 1, 0), \\ \boldsymbol{f}_2 = (-3, 1, 0, 1). \end{array}$$

2-й спосіб. Скористаємось правилом, що до ФСР СЛОР входить стільки розв'язків, скільки є вільних змінних в розв'язку СЛОР; при цьому для знаходження однієї з усіх можливих ФСР СЛОР кожній вільній змінній по черзі надають значення 1, а решті вільних невідомих — значення 0.

$$\text{Таким чином, ФСР: } \begin{array}{rcccccc} & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \boldsymbol{f}_1 = & (& 7, & -4, & 1, & 0 &), \\ \boldsymbol{f}_2 = & (& -3, & 1, & 0, & 1 &). \end{array}$$

Надалі усюди ФСР СЛОР будемо шукати в 2-й спосіб (з можливою заміною 1 на інше ціле число для усунення дробів в координатах векторів). $\square$

► c) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) (-1) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) (1/2)\ \cdot(-1/2) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2\,x_2 + x_5 = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_4 = -x_1 - x_3, \\ x_5 = -2\,x_2, \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{Таким чином, ФСР: } \begin{array}{rccccccc} & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \boldsymbol{f}_1 = & (& 1, & 0, & 0, & -1, & 0 &), \\ \boldsymbol{f}_2 = & (& 0, & 1, & 0, & 0, & -2 &), \\ \boldsymbol{f}_3 = & (& 0, & 0, & 1, & -1, & 0 &). \end{array} \qquad \square$$

► d) $\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & -1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \; (-2) \; (-7) \to$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 4 & -5 & -19 & 0 \\ 0 & 16 & -10 & 8 & -10 & -38 & 0 \end{array}\right) \; (0.4) \; (-2) \; \cdot(-0.2) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1.2 & 0 & 0.6 & 0 & -1.6 & 0 \\ 0 & -1.6 & 1 & -0.8 & 1 & 3.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} x_1 + 1.2\,x_2 + 0.6\,x_4 - 1.6\,x_6 = 0, \\ -1.6\,x_2 + x_3 - 0.8\,x_4 + x_5 + 3.8\,x_6 = 0, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -1.2\,x_2 - 0.6\,x_4 + 1.6\,x_6, \\ x_3 = 1.6\,x_2 + 0.8\,x_4 - x_5 - 3.8\,x_6, \\ x_2, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Таким чином, ФСР:

$$\begin{array}{rcccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \boldsymbol{f}_1 = & (-1.2, & 1, & 1.6, & 0, & 0, & 0\,), \\ \boldsymbol{f}_2 = & (-0.6, & 0, & 0.8, & 1, & 0, & 0\,), \\ \boldsymbol{f}_3 = & (\;\;0, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0\,), \\ \boldsymbol{f}_4 = & (\;1.6, & 0, & -3.8, & 0, & 0, & 1\,). \end{array}$$

□

3.2.А. Дослідити та розв'язати СЛР методом Гаусса залежно від значень параметра λ.

a) $\begin{cases} \lambda\,x + y + z = 1, \\ x + \lambda\,y + z = 1, \\ x + y + \lambda\,z = 1, \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\lambda+3)\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = \lambda, \\ \lambda\,x_1 + (\lambda-1)\,x_2 + x_3 = 2\,\lambda, \\ 3\,(\lambda+1)\,x_1 + \lambda\,x_2 + (\lambda+3)\,x_3 = 5, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda\,x + \lambda\,y + (\lambda+1)\,z = \lambda, \\ \lambda\,x + \lambda\,y + (\lambda-1)\,z = \lambda, \\ (\lambda+1)\,x + \lambda\,y + (2\,\lambda+3)\,z = 1. \end{cases}$

► a) $\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) \; (-1) \; (-\lambda) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 1-\lambda \end{array}\right)$. Можливі три випадки.

1-й випадок. Нехай $\lambda \neq 1$ і $\lambda \neq -2$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 1-\lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(\frac{1}{\lambda-1}) \\ \cdot(\frac{1}{(1-\lambda)(2+\lambda)}) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2+\lambda} \end{array}\right).$$

$r = R = n = 3 \quad \Longrightarrow \quad$ СЛР є сумісною і визначеною.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2+\lambda} \end{array}\right) (-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2+\lambda} \end{array}\right) \; (-\lambda-1) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2+\lambda} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2+\lambda} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2+\lambda} \end{array}\right), \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2+\lambda}, \\ y = \dfrac{1}{2+\lambda}, \\ z = \dfrac{1}{2+\lambda}. \end{cases}$$

2-й випадок. Нехай $\lambda = 1$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 1-\lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$r = R = 1 < n = 3 \quad \Longrightarrow \quad$ СЛР є сумісною і невизначеною. $\quad \begin{cases} x = 1 - y - z, \\ y, z \in \mathbb{R}. \end{cases}$

3-й випадок. Нехай $\lambda = -2$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & 1-\lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

$r = 2 < R = 3 \quad \Longrightarrow \quad$ СЛР є несумісною. $\square$

► b) $\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\,\lambda \\ 3\,(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1) \\ (-1) \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\,\lambda \\ \lambda & 0 & \lambda & 5-3\,\lambda \end{array}\right).$

1-й випадок. Нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\,\lambda \\ \lambda & 0 & \lambda & 5-3\,\lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \text{СЛР є несумісною.}$$

2-й випадок. Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\,\lambda \\ \lambda & 0 & \lambda & 5-3\,\lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(1/\lambda) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5-3\,\lambda}{\lambda} \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\,\lambda \\ \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1) \quad (-2) \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5-3\,\lambda}{\lambda} \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 0 & \frac{(\lambda-1)(2\,\lambda+5)}{\lambda} \\ \lambda+1 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2+6\,\lambda-10}{\lambda} \end{array}\right).$$

Підвипадок 2.a) Нехай $\lambda = 1$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5-3\,\lambda}{\lambda} \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 0 & \frac{(\lambda-1)(2\,\lambda+5)}{\lambda} \\ \lambda+1 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2+6\,\lambda-10}{\lambda} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = 2 - x, \\ y = -3 - 2\,x, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Підвипадок 2.b) Нехай $\lambda \neq 0$ і $\lambda \neq 1$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5-3\,\lambda}{\lambda} \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 0 & \frac{(\lambda-1)(2\,\lambda+5)}{\lambda} \\ \lambda+1 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2+6\,\lambda-10}{\lambda} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(\frac{1}{\lambda-1}) \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5-3\,\lambda}{\lambda} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{2\,\lambda+5}{\lambda} \\ \lambda+1 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2+6\,\lambda-10}{\lambda} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{5-3\lambda}{\lambda} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{2\lambda+5}{\lambda} \\ \lambda & 0 & 0 & \frac{\lambda^2+4\lambda-15}{\lambda} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(1/\lambda) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2+4\lambda-15}{\lambda^2} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{2\lambda+5}{\lambda} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{5-3\lambda}{\lambda} \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2+4\lambda-15}{\lambda^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2} \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\lambda^2+4\lambda-15}{\lambda^2}, \\ y = \dfrac{\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2}, \\ z = \dfrac{-4\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2}. \end{cases}$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda^2+4\lambda-15}{\lambda^2}, \\ y = \dfrac{\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2}, \\ z = \dfrac{-4\lambda^2+\lambda+15}{\lambda^2}, \end{cases} \qquad \text{якщо} \quad \lambda \neq 0 \ \text{ і } \ \lambda \neq 1,$$

$$\begin{cases} z = 2 - x, \\ y = -3 - 2x, \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{якщо} \quad \lambda = 1$$

$$(x, y) \in \varnothing, \qquad \text{якщо} \quad \lambda = 0.$$

□

► c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 & \lambda \\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+4 & 1-\lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \left(\frac{1-\lambda}{2}\right) \ \left(\frac{-\lambda-4}{2}\right) \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-\lambda) \\ \\ \cdot(-1/2) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

1-й випадок. Нехай $\lambda = 0$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1, \\ z = 0, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2-й випадок. Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot(1/\lambda) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 0. \end{cases}$$

□

Практичне заняття №4. Операції над матрицями

4.1.А. Обчислити $3A-4B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-3&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$.

4.2.А. Обчислити вирази:

a) $\begin{pmatrix}3&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&5&2\\4&6&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&7\\2&4&-3\\5&6&4\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix}3&-2&2\\4&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-3&1\end{pmatrix}^T$, f) $\begin{pmatrix}4&-1\\5&-2\end{pmatrix}^5$, g) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$.

4.3.А. Знайти матриці, обернені до заданих: a) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

4.4.А. Розв'язати рівняння $AX=B$ та $YA=B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$.

4.5.А. Обчислити $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-5x+3$, $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$.

4.6.А. Знайти всі матриці, переставні з матрицею $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

4.7.А. Обчислити $\begin{pmatrix}17&-6\\35&-12\end{pmatrix}^5$, якщо $\begin{pmatrix}17&-6\\35&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}$.

4.1.Д. Обчислити $2\cos\alpha\ A-B+\sin\alpha\ C$, якщо $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\operatorname{tg}\alpha\\\sin\alpha&\sec\alpha\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha&\sin\alpha\\\sin 2\alpha&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$.

4.2.Д. Обчислити вирази:

a) $\begin{pmatrix}-2&7&4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\-5\\1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&1\\-3&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\-4&5\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\\7&4\end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&-1&2\\3&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}70&34&-107\\52&26&-68\\101&50&-140\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27&-18&10\\-46&31&-17\\3&2&1\end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\\7&4\end{pmatrix}^T$,

f) $\begin{pmatrix}1&-2\\3&-4\end{pmatrix}^3$, g) $\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}^n$, h) $\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n$, i) $\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}^n$.

4.3.Д. Знайти матриці, обернені до заданих: a) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}3&4\\5&7\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$.

4.4.Д. Розв'язати рівняння $AX=B$ та $YA=B$, якщо:

a) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$, b) $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$.

4.5.Д. Обчислити $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-x-1$, $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

4.6.Д. Знайти всі матриці, переставні з матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.7.Д. Обчислити: a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$.

4.1.+. Розбити матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ на блоки та знайти:

a) їх суму, b) їх добуток.

4.2.+. Розв'язати матричні рівняння:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, c) $XY - YX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.1.А. Обчислити $3A - 4B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

► $3A - 4B = 3A + (-4)B = 3\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot(-3) & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-4)\cdot 1 & (-4)\cdot 2 & (-4)\cdot -1 \\ (-4)\cdot 0 & (-4)\cdot(-2) & (-4)\cdot 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -9 & 8 & -9 \end{pmatrix}$. □

4.2.А. Обчислити вирази:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$, f) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

► a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + (-2)\cdot 5 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$. □

► b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 5 & 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + (-1)\cdot 6 & 1\cdot 7 + 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 5\cdot 2 + 2\cdot 5 & 0\cdot 3 + 5\cdot 4 + 2\cdot 6 & 0\cdot 7 + 5\cdot(-3) + 2\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 6\cdot 2 + 3\cdot 5 & 4\cdot 3 + 6\cdot 4 + 3\cdot 6 & 4\cdot 7 + 6\cdot(-3) + 3\cdot 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 20 & 32 & -7 \\ 31 & 54 & 22 \end{pmatrix}$. □

► c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 & 2\cdot 2 + 3\cdot(-2) & 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 \\ (-1)\cdot 1 + 4\cdot 0 & (-1)\cdot 2 + 4\cdot(-2) & (-1)\cdot(-1) + 4\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot(-2) & 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ -1 & -10 & 13 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. □

► d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + (-2)\cdot 2 & 3\cdot 4 + (-2)\cdot 5 \\ 5\cdot 3 + (-4)\cdot 2 & 5\cdot 4 + (-4)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. □

► e) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 + 2\cdot 1 & 3\cdot 0 + (-2)\cdot(-3) + 2\cdot 1 \\ 4\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 4\cdot 0 + 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. □

► f) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. A^5 — ?

$A^5 = (A^2)^2 A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 4 + (-1)\cdot 5 & 4\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2) \\ 5\cdot 4 + (-2)\cdot 5 & 5\cdot(-1) + (-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\cdot 11 + (-2)\cdot 10 & 11\cdot(-2) + (-2)\cdot(-1) \\ 10\cdot 11 + (-1)\cdot 10 & 10\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 101 & -20 \\ 100 & -19 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 101 & -20 \\ 100 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101\cdot 4 + (-20)\cdot 5 & 101\cdot(-1) + (-20)\cdot(-2) \\ 100\cdot 4 + (-19)\cdot 5 & 100\cdot(-1) + (-19)\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

► g) Розв'яжемо задачу методом математичної індукції по $n \in \mathbb{Z}$. Розглянемо три випадки: *1)* $n \in \mathbb{N}$, *2)* $n = 0$, *3)* $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) База індукції: $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Припущення: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Крок індукції: $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $A^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0 \quad \Longrightarrow \quad m = -n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow$

$$A^n = A^{-m} = (A^m)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

4.3.A. Знайти матриці, обернені до заданих: a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

► a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Для матриці A існує обернена A^{-1}.

1-й спосіб. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$$\begin{array}{ll} A_{11} = (-1)^{1+1}\,|4| = 4, & A_{21} = (-1)^{2+1}\,|2| = -2, \\ A_{12} = (-1)^{1+2}\,|3| = -3, & A_{22} = (-1)^{2+2}\,|1| = 1, \end{array} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-й спосіб.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-3) \\ \longleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1/2) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (3/2) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1/2) \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (3/2) & 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

► b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Longrightarrow$ Для матриці A існує обернена A^{-1}.

1-й спосіб.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

2-й спосіб.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ (-2) \ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \ (-3) \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \ (-1) \ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Перевірка. $\quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-5) + 0 \cdot 6 & 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 6 & (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

4.4.A. Розв'язати рівняння $AX = B$ та $YA = B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

► *1-й спосіб.* Нагадаємо, що $X = A^{-1}B$, а $Y = BA^{-1}$. Оскільки $\det A = 1 \neq 0$, то матриця A є оборотною і $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Тоді

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -19 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2-й спосіб.

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-2) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (3)\ \cdot(-1) \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 14 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) = (E \mid A^{-1}B) \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ \hline 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)} \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ \hline -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ \hline -8 & 19 \\ 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 11 & -19 \\ -4 & 7 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} E \\ \hline BA^{-1} \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} 11 & -19 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

4.5.А. Обчислити $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

► $f(A) = A^2 - 5A + 3E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 15 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

4.6.А. Знайти всі матриці, переставні з матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

► Матриця X називається переставною з матрицею A, якщо $AX = XA$. З останнього співвідношення випливає, що матриця X є матрицею 2×2, і її можна подати у вигляді $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$AX = XA \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a+2c = a+3b, \\ b+2d = 2a+4b, \\ 3a+4c = c+3d, \\ 3b+4d = 2c+4d, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} b = 2c/3, \\ d = a+c, \\ a, c \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} a & 2c/3 \\ c & a+c \end{pmatrix}, \text{ де } a, c \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

4.7.А. Обчислити $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$, якщо $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

► Нехай $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ і $D = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. За умовою $A = BCD$. Легко помітити, що $DB = E$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$

$$A^n = (BCD)^n = \underbrace{(BCD) \cdot (BCD) \cdot \ldots \cdot (BCD)}_{n} = BC(DB)C(D \cdot \ldots \cdot B)CD = BC^nD.$$

Також легко бачити, що для будь-якої діагональної матриці $F = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ і для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ має місце співвідношення $F^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{pmatrix}$. Отже,

$$A^5 = (BCD)^5 = BC^5D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 3^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 243 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 729 \\ 160 & 1701 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,197 & -1\,266 \\ 7\,385 & -2\,922 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Практичне заняття №5. Вектори в ПДСК

5.1.А. За даними векторами $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ на площині побудувати такі вектори: a) $2\,\boldsymbol{a}$, b) $\dfrac{2}{3}\,\boldsymbol{b}$, c) $-\boldsymbol{a}$, d) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, e) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, f) $2\,\boldsymbol{a}-\dfrac{2}{3}\,\boldsymbol{b}$.

5.2.А. У паралелограмі $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей, а точки M, N, P, Q — відповідно середини сторін AB, BC, CD, DA. Побудувати вектори: a) $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, b) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{NP}$.

5.3.А. На трьох некомпланарних векторах $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ та $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ побудовано паралелепіпед. Вказати діагональ паралелепіпеда, яка відповідає вектору: a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, b) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

5.4.А. Точки X, Y, Z — середини різних сторін $\triangle ABC$. Довести, що $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{CZ}=\mathbf{0}$.

5.5.А. Дано тетраедр $OABC$. Виразити через вектори $a=\overrightarrow{OA}$, $b=\overrightarrow{OB}$, $c=\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$, якщо E — середина ребра OA, а F — середина ребра BC.

5.6.А. На стороні AD паралелограма $ABCD$ побудовано вектор $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, а на діагоналі AC — вектор $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Довести, що вектори $\overrightarrow{KM}$ та $\overrightarrow{MB}$ колінеарні, і знайти відношення $|\overrightarrow{KM}|:|\overrightarrow{MB}|$.

5.7.А. Задано довжини векторів: $|\boldsymbol{a}|=13$, $|\boldsymbol{b}|=19$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=24$. Обчислити $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

5.8.А. Три сили $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$ та $\overrightarrow{R}$ прикладені в одній точці і мають взаємно перпендикулярні напрямки. Визначити модуль їх рівнодіючої сили, якщо $|\overrightarrow{P}|=10$ Н, $|\overrightarrow{Q}|=11$ Н, $|\overrightarrow{R}|=2$ Н.

5.9.А. Нехай в просторі задано ПДСК. Довести, що вектори $\boldsymbol{a}=(4,1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2,-5)$, $\boldsymbol{c}=(-1,1,1)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\boldsymbol{d}=(4,4,-5)$ в цьому базисі.

5.10.А. Знайти центр мас: a) однорідного стержня, кінці якого розміщені в точках $A(4,-4)$ та $B(0,2)$, b) трикутника з однорідного дроту з вершинами $A(-4,-1)$, $B(18,3)$, $C(2,11)$, c) суцільної однорідної трикутної пластини з вершинами $A(-4,-1)$, $B(18,3)$, $C(2,11)$, d) суцільної однорідної чотирикутної пластини, послідовні вершини якої розміщені в точках $A(-1,1)$, $B(2,5)$, $C(5,6)$, $D(5,-1)$, e) суцільної однорідної прямокутної пластини, послідовні вершини якої розміщені в точках $A(0,0)$, $B(0,10)$, $C(20,10)$, $D(20,0)$, з якої вирізали квадрат з довжиною сторони 2, центр якого розміщується в точці $K(15,7)$.

5.1.Д. У паралелограмі $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей, а точки M, N, P, Q — відповідно середини сторін AB, BC, CD, DA. Побудувати вектори: a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ}$, b) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}$, c) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{PD}$, d) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{NP}$.

5.2.Д. На трьох некомпланарних векторах $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ та $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ побудовано паралелепіпед. Вказати діагональ паралелепіпеда, яка відповідає вектору: a) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, b) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

5.3.Д. Довести, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом тоді й лише тоді, коли для довільної точки O у просторі має місце співвідношення $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

5.4.Д. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$. Виразити через вектори $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{AB}$ та $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AE}$ вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CF}$.

5.5.Д. Задано довжини векторів: $|\boldsymbol{a}|=11$, $|\boldsymbol{b}|=23$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=24$. Обчислити $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

5.6.Д. Вектори $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, причому їх довжини $|\boldsymbol{a}|=3$ і $|\boldsymbol{b}|=5$. Обчислити $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ і $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

5.7.Д. Яку умову мають задовольняти вектори $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, щоб вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ділив навпіл кут між ними?

5.8.Д. Яку умову мають задовольняти вектори $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, щоб $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$?

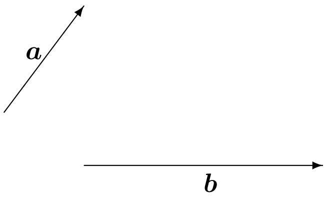
5.9.Д. На площині трикутника ABC знайти таку точку, щоб сума векторів, які сполучають цю точку з вершинами трикутника, дорівнювала нулю.

5.10.Д. Нехай в просторі задано ПДСК. Перевірити, чи утворюють базис простору вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, якщо: a) $\boldsymbol{a}=(2,-1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2,-1)$, $\boldsymbol{c}=(-1,-1,2)$, b) $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(0,1,1)$, $\boldsymbol{c}=(-1,0,1)$, c) $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,-1)$, $\boldsymbol{c}=(1,-1,1)$. У разі позитивної відповіді знайти координати вектора $\boldsymbol{d}=(4,4,-5)$ в цьому базисі.

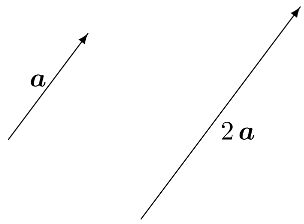
5.1.A. За даними векторами $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ на площині побудувати такі вектори: a) $2\,\boldsymbol{a}$, b) $\dfrac{2}{3}\,\boldsymbol{b}$, c) $-\boldsymbol{a}$, d) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, e) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, f) $2\,\boldsymbol{a}-\dfrac{2}{3}\,\boldsymbol{b}$.

▶

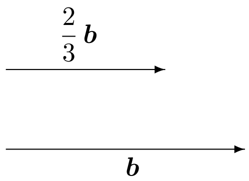
Умова:



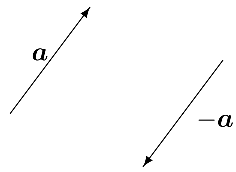
a)



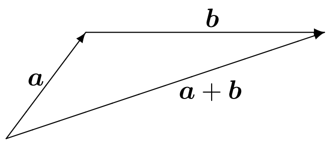
b)



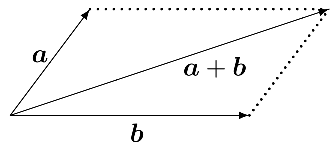
c)



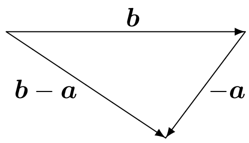
d) Правило трикутника



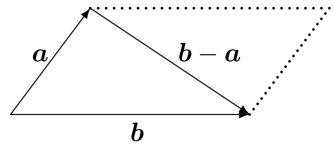
d) Правило паралелограма



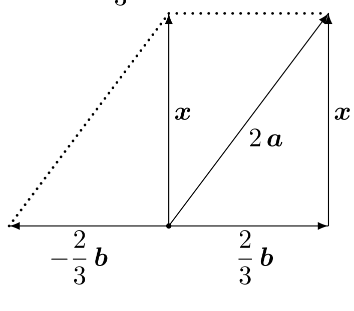
e) Правило трикутника



e) Правило паралелограма



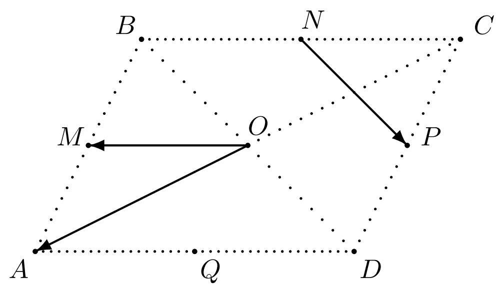
f) $\boldsymbol{x} = 2\,\boldsymbol{a} - \dfrac{2}{3}\,\boldsymbol{b}$



□

5.2.A. У паралелограмі $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей, а точки M, N, P, Q — відповідно середини сторін AB, BC, CD, DA. Побудувати вектори: a) $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, b) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{NP}$.

▶

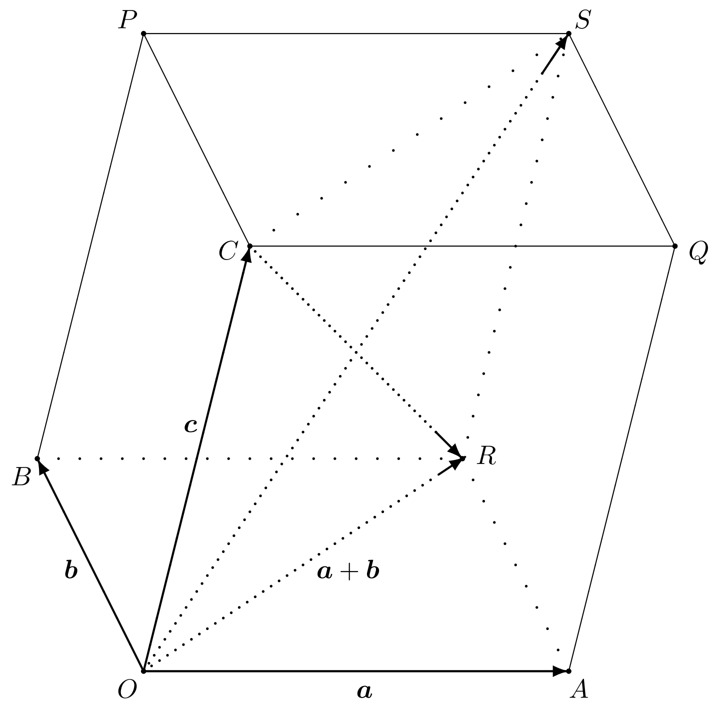


a) $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AM}$ або $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$.

b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DA}$ або $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PM}$. □

5.3.A. На трьох некомпланарних векторах $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ та $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ побудовано паралелепіпед. Вказати діагональ паралелепіпеда, яка відповідає вектору: a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$.

▶



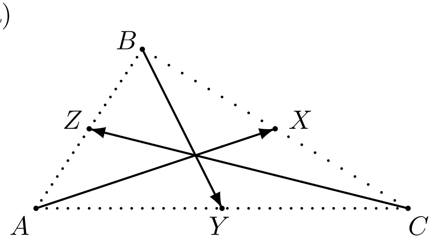
a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OR} + \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OS}$.

b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OR} - \boldsymbol{c} = \overrightarrow{CR}$. □

5.4.A. Точки X, Y, Z — середини різних сторін $\triangle ABC$. Довести, що $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \mathbf{0}$.

► Можливо три принципових випадки: a) жоден з векторів $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BY}$, $\overrightarrow{CZ}$ неколінеарний до жодної зі сторін $\triangle ABC$; b) лише один вектор, наприклад $\overrightarrow{AX}$, неколінеарний до жодної зі сторін $\triangle ABC$; c) кожен з векторів колінеарний до деякої сторони $\triangle ABC$, наприклад $\overrightarrow{AX} \parallel AB$, $\overrightarrow{BY} \parallel BC$, $\overrightarrow{CZ} \parallel CA$.

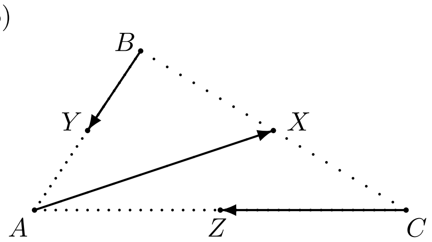
a)



$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CY}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AZ}) =$$

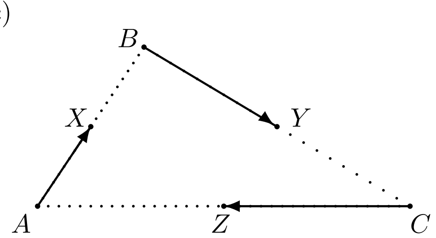
$$= (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \mathbf{0}.$$

b)



$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{XY} = \mathbf{0}.$$

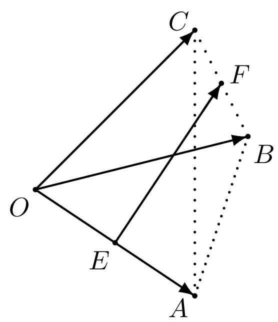
c)



$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \mathbf{0}. \qquad \square$$

5.5.A. Дано тетраедр $OABC$. Виразити через вектори $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, $c = \overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$, якщо E — середина ребра OA, а F — середина ребра BC.

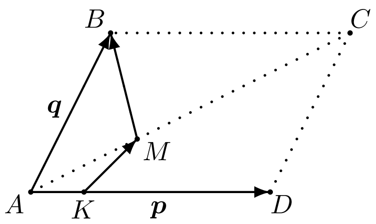
►



$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{c}. \qquad \square$$

5.6.А. На стороні AD паралелограма $ABCD$ побудовано вектор $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, а на діагоналі AC — вектор $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Довести, що вектори $\overrightarrow{KM}$ та $\overrightarrow{MB}$ колінеарні, і знайти відношення $|\overrightarrow{KM}| : |\overrightarrow{MB}|$.

►



Вектори $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{AD}$ та $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{AB}$ неколінеарні, а тому утворюють базис.

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\,\boldsymbol{p}, \quad \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\,\boldsymbol{p} + \frac{1}{6}\,\boldsymbol{q}.$$

$$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = (\frac{1}{6}\,\boldsymbol{p} + \frac{1}{6}\,\boldsymbol{q}) - \frac{1}{5}\,\boldsymbol{p} = -\frac{1}{30}\,\boldsymbol{p} + \frac{1}{6}\,\boldsymbol{q}.$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \boldsymbol{q} - (\frac{1}{6}\,\boldsymbol{p} + \frac{1}{6}\,\boldsymbol{q}) = -\frac{1}{6}\,\boldsymbol{p} + \frac{5}{6}\,\boldsymbol{q}.$$

Таким чином, $\overrightarrow{MB} = 5 \cdot \overrightarrow{KM}$ (що й доводить колінеарність цих векторів), а отже $|\overrightarrow{KM}| : |\overrightarrow{MB}| = 1 : 5$. $\square$

5.7.А. Задано довжини векторів: $|\boldsymbol{a}| = 13$, $|\boldsymbol{b}| = 19$, $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 24$. Обчислити $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$.

► Оскільки сума $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ та різниця $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ двох векторів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ є діагоналями паралелограма, побудованого на цих векторах, то $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2\,(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$, звідки

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2\,(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2) - |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = 484, \text{ а отже } |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = 22. \qquad \square$$

5.8.А. Три сили $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$ та $\overrightarrow{R}$ прикладені в одній точці і мають взаємно перпендикулярні напрямки. Визначити модуль їх рівнодіючої сили, якщо $|\overrightarrow{P}| = 10$ Н, $|\overrightarrow{Q}| = 11$ Н, $|\overrightarrow{R}| = 2$ Н.

► Нехай $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{R}$ — рівнодіюча взаємно перпендикулярних сил $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$ та $\overrightarrow{R}$.

$$|\overrightarrow{F}|^2 = |\overrightarrow{P}|^2 + |\overrightarrow{Q}|^2 + |\overrightarrow{R}|^2 = 225 \quad \Longrightarrow \quad |\overrightarrow{F}| = 15. \qquad \square$$

5.9.А. Нехай в просторі задано ПДСК. Довести, що вектори $\boldsymbol{a} = (4, 1, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, -5)$, $\boldsymbol{c} = (-1, 1, 1)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\boldsymbol{d} = (4, 4, -5)$ в цьому базисі.

► Оскільки вектор $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, то він утворює базис на прямій. Вектор $\boldsymbol{b}$ неколінеарний до $\boldsymbol{a}$, тому вектори $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ утворюють базис на площині. Отже, для того, щоб довести, що вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ утворюють базис простору, необхідно показати, вони некомпланарні. Припустимо, що це не так. Тоді існують $x, y \in \mathbb{R}$ такі, що $x\,\boldsymbol{a} + y\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$. Таким чином, отримуємо СЛР

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a} & \quad \boldsymbol{b} & \quad \boldsymbol{c} \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \end{array} \; (-4) \; \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \; (-3/7) \; \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 29/7 \end{array}\right),$$

яка є несумісною. Отримали суперечність, отже вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарні, а тому утворюють базис простору.

Для знаходження координат вектора $\boldsymbol{d}$ в базисі $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ необхідно розв'язати СЛР

$$x\,\boldsymbol{a} + y\,\boldsymbol{b} + z\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}, \quad \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \end{array} \atop \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -5 & 1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-4) \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-2) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -9 & -10 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (2)\ (-3)\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -17 & -16 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 29 & 29 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-9/29)\ (17/29)\ \cdot(1/29) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. □

5.10.А. Знайти центр мас: a) однорідного стержня, кінці якого розміщені в точках $A(4,-4)$ та $B(0,2)$, b) трикутника з однорідного дроту з вершинами $A(-4,-1)$, $B(18,3)$, $C(2,11)$, c) суцільної однорідної трикутної пластини з вершинами $A(-4,-1)$, $B(18,3)$, $C(2,11)$, d) суцільної однорідної чотирикутної пластини, послідовні вершини якої розміщені в точках $A(-1,1)$, $B(2,5)$, $C(5,6)$, $D(5,-1)$, e) суцільної однорідної прямокутної пластини, послідовні вершини якої розміщені в точках $A(0,0)$, $B(0,10)$, $C(20,10)$, $D(20,0)$, з якої вирізали квадрат з довжиною сторони 2, центр якого розміщується в точці $K(15,7)$.

►

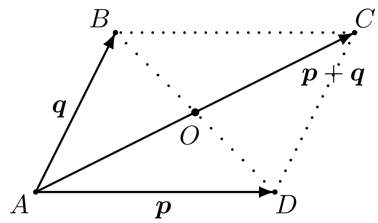
□

Практичне заняття №6. Добутки векторів

6.1.А. Яку умову мають задовольняти вектори $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$, щоб вектор $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ ділив навпіл кут між векторами $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$?
6.2.А. Задано дві координати вектора $x_a = 4$, $y_a = -12$. Визначити третю координату z_a та напрямні косинуси вектора $\boldsymbol{a}$, якщо $|\boldsymbol{a}| = 13$.
6.3.А. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути: a) $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$, b) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 135°$.
6.4.А. Дано вершини паралелограма $ABCD$: $A(2,2,2)$, $B(6,5,0)$, $C(0,3,8)$. Знайти координати вершини D.
6.5.А. Кут між векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ дорівнює $120°$, $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 4$. Знайти скалярні добутки: a) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, b) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$, c) $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$, d) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.
6.6.А. Дано вершини чотирикутника $ABCD$: $A(1,-2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$, $D(-5,-5,3)$. Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.
6.7.А.Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(1,0,6)$, $B(4,5,-2)$, $C(7,3,4)$.
6.8.А. Дано: $|\boldsymbol{a}| = 10$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ і $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 12$. Обчислити $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.
6.9.А. У тетраедрі з вершинами в точках $A(2,2,1)$, $B(3,1,2)$, $C(3,3,2)$, $D(4,5,-3)$ обчислити висоту DH.
6.10.А. З'ясувати, правою чи лівою є трійка векторів: a) $\boldsymbol{a} = (1,-1,2)$, $\boldsymbol{b} = (-2,1,1)$, $\boldsymbol{c} = (1,-2,2)$, b) $\boldsymbol{a} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{b} = (2,1,1)$, $\boldsymbol{c} = (1,1,2)$, c) $\boldsymbol{a} = (-1,2,0)$, $\boldsymbol{b} = (3,-7,2)$, $\boldsymbol{c} = (2,-5,2)$.
6.1.Д. Яку умову мають задовольняти вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, щоб вектор $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ ділив навпіл кут між векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$?
6.2.Д. Знайти точку M, яка розташована від точки $A(-4,0,1)$ на відстані 9, знаючи напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{OM}$: $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$.
6.3.Д. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути: a) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 30°$, b) $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 150°$.
6.4.Д. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(-2,5)$, $B(2,7)$ і точку перетину його діагоналей $M(2,1)$. Визначити дві інші його вершини.
6.5.Д. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$, якщо $|\boldsymbol{m}| = 4\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{n}| = 6$ і $(\widehat{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}) = \frac{\pi}{4}$.
6.6.Д. Обчислити внутрішні кути трикутника ABC, якщо $A(1,2,1)$, $B(3,-1,7)$, $C(7,4,-2)$.
6.7.Д.Знайти висоту BD трикутника ABC, якщо $A(3,1,4)$, $B(7,-4,4)$, $C(3,5,1)$.
6.8.Д. Дано: $(\widehat{a,b}) = \frac{2\pi}{3}$, $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$. Обчислити: a) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$, b) $|(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$.
6.9.Д. Об'єм піраміди $V = 2$, три її вершини лежать у точках $A(2,1,3)$, $B(3,3,2)$, $C(1,2,4)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на вісі Oz.
6.10.Д. Довести, що вектори $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ та $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ компланарні при будь-яких векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.
6.1.+. Довести, що $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.
6.2.+. Довести, що $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.
6.3.+. Довести, що $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$.

6.1.А. Яку умову мають задовольняти вектори $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$, щоб вектор $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ ділив навпіл кут між векторами $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$?

▶



Припустимо, що $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ ділить навпіл кут між $\boldsymbol{p}$ та $\boldsymbol{q}$. Тоді:

1-й спосіб. $\angle BAC = \angle CAD = \angle BCA$. Звідси випливає, що $\triangle ABC$ рівнобедрений ($AB = BC$), тобто $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}|$.

2-й спосіб. в $\triangle ABD$ $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DO}{BO}$. Проте, у будь-якому паралелограмі діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, отже $DO = BO$. Звідси випливає, що $AD = AB$, тобто $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}|$.

І навпаки, якщо $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}|$, то паралелограм $ABCD$ перетворюється на ромб, а у будь-якого ромба його діагоналі є бісектрисами кутів між його сторонами.

Відповідь: вектор $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ ділить навпіл кут між векторами $\boldsymbol{p}$ і $\boldsymbol{q}$ тоді й лише тоді, коли $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}|$. □

6.2.А. Задано дві координати вектора $x_a = 4$, $y_a = -12$. Визначити третю координату z_a та напрямні косинуси вектора $\boldsymbol{a}$, якщо $|\boldsymbol{a}| = 13$.

▶ $\boldsymbol{a} = (4, -12, z_a) \implies |\boldsymbol{a}|^2 = 4^2 + (-12)^2 + z_a^2 = 169 \implies z_a^2 = 9 \implies z_a = \pm 3.$

Напрямні косинуси: $\cos\alpha = \dfrac{4}{13}$, $\cos\beta = -\dfrac{12}{13}$, $\cos\gamma = \pm\dfrac{3}{13}$. □

6.3.А. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути: a) $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$, b) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 135°$.

▶ Напрямні косинуси задовольняють співвідношення

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

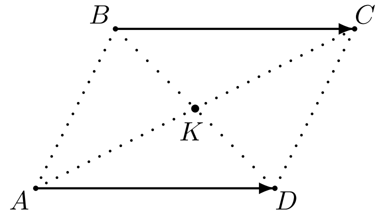
a) $\cos^2 60° + \cos^2 120° + \cos^2 45° = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \implies$ так, може.

b) $\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 135° = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} \neq 1 \implies$

ні, не може. □

6.4.А. Дано вершини паралелограма $ABCD$: $A(2,2,2)$, $B(6,5,0)$, $C(0,3,8)$. Знайти координати вершини D.

▶



Нехай $D(x, y, z)$.

1-й спосіб. $\overrightarrow{AD} = (x-2, y-2, z-2)$, $\overrightarrow{BC} = (0-6, 3-5, 8-0) = (-6, -2, 8)$.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x-2=-6, \\ y-2=-2, \\ z-2=8, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad D(-4, 0, 10).$$

2-й спосіб. Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Нехай $K(a, b, c)$ — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$.

$$K \text{ — середина відрізка } AC \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{2+0}{2}, \\ b = \dfrac{2+3}{2}, \\ c = \dfrac{2+8}{2}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad K(1, 2.5, 5).$$

$$K \text{ — середина відрізка } BD \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1 = \dfrac{6+x}{2}, \\ 2.5 = \dfrac{5+y}{2}, \\ 5 = \dfrac{0+z}{2}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad D(-4, 0, 10). \qquad \square$$

6.5.A. Кут між векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ дорівнює $120°$, $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 4$. Знайти скалярні добутки: a) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, b) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$, c) $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$, d) $(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$.

► a) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \widehat{\boldsymbol{ab}} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 120° = -6.$ $\square$

► b) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}| \cos \widehat{\boldsymbol{aa}} = |\boldsymbol{a}|^2 = 3^2 = 9.$ $\square$

► c) $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \widehat{\boldsymbol{bb}} = |\boldsymbol{b}|^2 = 4^2 = 16.$ $\square$

► d) $(\boldsymbol{a} + 2\,\boldsymbol{b}, 3\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, 3\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + (2\,\boldsymbol{b}, 3\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, 3\,\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b}) + (2\,\boldsymbol{b}, 3\,\boldsymbol{a}) + (2\,\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{b}) =$

$= 3\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 6\,(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - 2\,(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 3\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 6\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 2\,(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) =$

$= 3\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 5\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 2\,(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 3 \cdot 9 + 5 \cdot (-6) - 2 \cdot 16 = -35.$ $\square$

6.6.A. Дано вершини чотирикутника $ABCD$: $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5, -5, 3)$. Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

► Діагоналі чотирикутника $ABCD$ визначаються векторами $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BD}$.

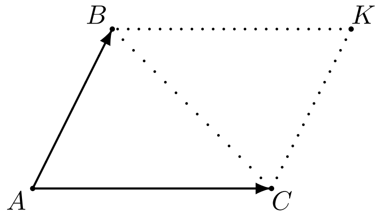
$\overrightarrow{AC} = (-4-1, 1-(-2), 1-2) = (-5, 3, -1),$

$\overrightarrow{BD} = (-5-1, -5-4, 3-0) = (-6, -9, 3),$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-9) + (-1) \cdot 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}.$ $\square$

6.7.A.Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(1, 0, 6)$, $B(4, 5, -2)$, $C(7, 3, 4)$.

►



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\, S_{ABKC} = \frac{1}{2}\, |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-1, 5-0, -2-6) = (3, 5, -8), \qquad \overrightarrow{AC} = (7-1, 3-0, 4-6) = (6, 3, -2).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 5 & -8 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 14\,\boldsymbol{i} - 42\,\boldsymbol{j} - 21\,\boldsymbol{k}.$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = 7\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = 49.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 49 = \frac{49}{2}.$$ □

6.8.А. Дано: $|\boldsymbol{a}| = 10$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ і $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 12$. Обчислити $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.

► $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \widehat{\boldsymbol{ab}}$.

$$\sin \widehat{\boldsymbol{ab}} = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \widehat{\boldsymbol{ab}}}.$$

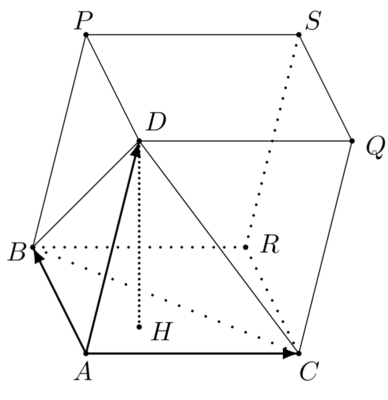
$$\widehat{\boldsymbol{ab}} \in [0, \pi] \quad \Longrightarrow \quad \sin \widehat{\boldsymbol{ab}} \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin \widehat{\boldsymbol{ab}} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{\boldsymbol{ab}}}.$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \widehat{\boldsymbol{ab}} \quad \Longrightarrow \quad \cos \widehat{\boldsymbol{ab}} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} \quad \Longrightarrow \quad \sin \widehat{\boldsymbol{ab}} = \sqrt{1 - \left(\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}\right)^2}.$$

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sqrt{1 - \left(\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}\right)^2} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2} = \sqrt{10^2 \cdot 2^2 - 12^2} = 16.$$ □

6.9.А. У тетраедрі з вершинами в точках $A(2, 2, 1)$, $B(3, 1, 2)$, $C(3, 3, 2)$, $D(4, 5, -3)$ обчислити висоту DH.

►



Добудуємо тетраедр $ABCD$ до паралелепіпеда $ABRCDPSQ$. Тоді висота DH тетраедра $ABCD$ є також й висотою паралелепіпеда $ABRCDPSQ$.

$$V_{\text{пар}} = S_{ABRC} \cdot DH \quad \Longrightarrow \quad DH = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{ABRC}}.$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1), \quad \overrightarrow{AD} = (2, 3, -4).$$

$$V_{\text{пар}} = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = |\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}| = |-12| = 12.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,\boldsymbol{i} + 0\,\boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}.$$

$$S_{ABRC} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$DH = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{ABRC}} = \frac{12}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$ □

6.10.А. З'ясувати, правою чи лівою є трійка векторів: a) $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (1, -2, 2)$, b) $\boldsymbol{a} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, 1)$, $\boldsymbol{c} = (1, 1, 2)$, c) $\boldsymbol{a} = (-1, 2, 0)$, $\boldsymbol{b} = (3, -7, 2)$, $\boldsymbol{c} = (2, -5, 2)$.

► a) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — права трійка. □

► b) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — ліва трійка. □

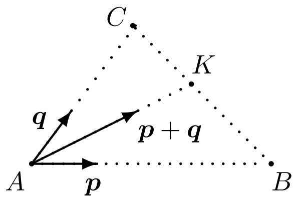
► c) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — компланарні вектори. □

Практичне заняття №7. Пряма на площині

7.1.А. Трикутник ABC задано своїми вершинами: $A(-6;-9)$, $B(0;3)$, $C(2;-5)$. Знайти: a) напрямний вектор бісектриси AK внутрішнього кута A, b) точку K перетину бісектриси AK зі стороною BC, c) рівняння бісектриси AK. Записати канонічне, параметричне, загальне, нормальне, з кутовим коефіцієнтом та у відрізках на осях рівняння бісектриси AK. Знайти відхилення точки C від прямої AK.
7.2.А. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(4;3)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 3 кв. од.
7.3.А. З'ясувати, чи перетинає пряма $2x+3y+5=0$ відрізок, обмежений точками $A(-1;3)$ та $B(2;-5)$. Якщо так, то знайти точку їх перетину.
7.4.А. Знайти точку Q, симетричну до точки $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.
7.5.А. Дві медіани трикутника лежать на прямих $3x-2y+2=0$ та $3x+5y-12=0$. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(-4;2)$.
7.6.А. Дві висоти трикутника лежать на прямих $7x-2y-1=0$ та $2x-7y-6=0$. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(3;-4)$.
7.7.А. Дві бісектриси трикутника лежать на прямих $x+y-2=0$ та $x-3y-6=0$. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(2;-4)$.
7.1.Д. Трикутник ABC задано своїми вершинами: $A(-4;2)$, $B(2;0)$, $C(2;-4)$. Знайти: a) координати точки K — середини відрізка AC, b) точку перетину медіан трикутника ABC, c) рівняння медіани BK. Записати канонічне, параметричне, загальне, нормальне, з кутовим коефіцієнтом та у відрізках на осях рівняння медіани BK. Знайти відхилення точки A від прямої BK.
7.2.Д. Через точку $A(2;-1)$ провести пряму, відрізок якої між осями координат ділився б у цій точці навпіл.
7.3.Д. З'ясувати, чи перетинає пряма $3x+2y-10=0$ відрізок, обмежений точками $A(1;1)$ та $B(2;2)$. Якщо так, то знайти точку їх перетину.
7.4.Д. Знайти точку Q, симетричну до точки $P(8;-9)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(3;-4)$ та $B(-1;-2)$.
7.5.Д. Дві медіани трикутника лежать на прямих $x+y-3=0$ та $2x+3y-1=0$. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(1;1)$.
7.6.Д. Знайти координати вершини C трикутника ABC, якщо $A(-10;2)$, $B(6;4)$ і $K(5;2)$ — точка перетину висот.
7.7.Д. Дві бісектриси трикутника лежать на прямих $x-1=0$ та $x-y-1=0$. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(4;-1)$.
7.1.+. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(2;-1)$, а висота та бісектриса, проведені з різних вершин, лежать на прямих $3x-4y+27=0$ та $x+2y-5=0$ відповідно.
7.2.+. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(4;-1)$, а висота та медіана, проведені з однієї вершини, лежать на прямих $2x-3y+12=0$ та $2x+3y=0$ відповідно.
7.3.+. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(2;-7)$, а висота та медіана, проведені з різних вершин, лежать на прямих $3x+y+11=0$ та $x+2y+7=0$ відповідно.
7.4.+. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(4;3)$, а бісектриса та медіана, проведені з однієї вершини, лежать на прямих $x+2y-5=0$ та $4x+13y-10=0$ відповідно.
7.5.+. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(3;-1)$, а бісектриса та медіана, проведені з різних вершин, лежать на прямих $x-4y+10=0$ та $6x+10y-59=0$ відповідно.

7.1.А. Трикутник ABC задано своїми вершинами: $A(-6;-9)$, $B(0;3)$, $C(2;-5)$. Знайти: a) напрямний вектор бісектриси AK внутрішнього кута A, b) точку K перетину бісектриси AK зі стороною BC, c) рівняння бісектриси AK. Записати канонічне, параметричне, загальне, нормальне, з кутовим коефіцієнтом та у відрізках на осях рівняння бісектриси AK. Знайти відхилення точки C від прямої AK.

►



a) За задачею 6.1.А вектор $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ визначає бісектрису кута між векторами $\boldsymbol{p}$ та $\boldsymbol{q}$ тоді й лише тоді, коли $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}|$. Вектори $\overrightarrow{AB} = (6, 12)$ та $\overrightarrow{AC} = (8, 4)$, які визначають сторони AB та AC, вочевидь, мають різну довжину: $|\overrightarrow{AB}| = 6\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{5}$. Тоді за вектори $\boldsymbol{p}$ та $\boldsymbol{q}$ можна взяти орти векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ відповідно.

$$\boldsymbol{p} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), \quad \boldsymbol{q} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} = (\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}),$$

а отже, за напрямний вектор бісектриси AK можна взяти вектор $\boldsymbol{s} = (1, 1)$.

b) Точку K не можна знаходити як точку перетину прямих AK та BC, оскільки рівняння прямої AK необхідно (а отже, й дозволяється) знайти лише в наступному пункті. З того, що AK є бісектрисою, випливає, що

$$\lambda = \frac{AB}{AC} = \frac{BK}{CK} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_K = \frac{2 \cdot x_B + 3 \cdot x_C}{2+3} = 1.2, \quad y_K = \frac{2 \cdot y_B + 3 \cdot y_C}{2+3} = -1.8,$$

отже, $K(1.2, -1.8)$.

c) Канонічне рівняння прямої AK, що проходить через точку $A(-6, -9)$, з напрямним вектором $\boldsymbol{s} = (1, 1)$:

$$AK\colon \frac{x-(-6)}{1} = \frac{y-(-9)}{1}. \quad \Longrightarrow$$

$AK\colon \begin{cases} x = -6 + t, \\ y = -9 + t. \end{cases}$ — параметричне рівняння прямої AK.

$AK\colon x - y - 3 = 0$ — загальне рівняння прямої AK.

$AK\colon \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$ — нормальне рівняння прямої AK.

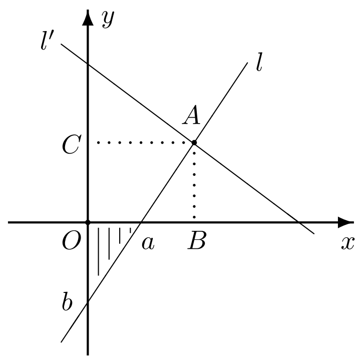
$AK\colon y = x - 3$ — рівняння прямої AK з кутовим коефіцієнтом.

$AK\colon \frac{x}{3} + \frac{y}{-3} = 1$ — рівняння прямої AK у відрізках на осях.

$\delta(C, AK) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-5) - \frac{3}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ — відхилення точки C від прямої AK. Оскільки $\delta(C, AK) > 0$, то точка C та початок координат точка O знаходяться в різних півплощинах відносно прямої AK. □

7.2.А. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(4; 3)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 3 кв. од.

►



Нехай l — шукана пряма. Оскільки l має відтинати трикутник від координатного кута, то її рівняння будемо шукати у відрізках на осях:

$l\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, де a та b — відрізки, які відтинає пряма l від осей Ox та Oy відповідно.

$A(4,3) \in l \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{4}{a} + \dfrac{3}{b} = 1.$

□

7.3.А. З'ясувати, чи перетинає пряма $2x + 3y + 5 = 0$ відрізок, обмежений точками $A(-1;3)$ та $B(2;-5)$. Якщо так, то знайти точку їх перетину.

▶

□

7.4.А. Знайти точку Q, симетричну до точки $P(-5;13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

▶

□

7.5.А. Дві медіани трикутника лежать на прямих $3x - 2y + 2 = 0$ та $3x + 5y - 12 = 0$. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(-4;2)$.

▶

□

7.6.А. Дві висоти трикутника лежать на прямих $7x - 2y - 1 = 0$ та $2x - 7y - 6 = 0$. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(3;-4)$.

▶

□

7.7.А. Дві бісектриси трикутника лежать на прямих $x + y - 2 = 0$ та $x - 3y - 6 = 0$. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо одна з його вершин розміщується в точці $A(2;-4)$.

▶

□

Практичне заняття №8. Пряма та площина в просторі

8.1.А. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_0(1;1;1)$ та $M_1(2;3;-1)$ паралельно вектору $a=(0;-1;2)$. Записати рівняння площини у відрізках на осях. Чи перетинає площина відрізок, обмежений точками $A(2;4;3)$ та $B(-4;-2;-15)$? Якщо так, то знайти точку їх перетину (не будуючи рівняння прямої AB). Знайти відхилення точки A від площини. Знайти точку C, симетричну точці B відносно площини.
8.2.А. Написати рівняння площин, що ділять навпіл двогранні кути між площинами $\pi_1\colon x-2y+5z-11=0$ та $\pi_2\colon 2x+5y+z-5=0$.
8.3.А. Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої, заданої перетином двох площин $\pi_1\colon 2x-y+2z-4=0$ та $\pi_2\colon x+2y-z-1=0$. Написати рівняння площини, яка проектує задану пряму на площину $\pi_3\colon 4x+3y+z-9=0$, та знайти цю проекцію.
8.4.А. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до прямих $x=-7+3t$, $y=-4+4t$, $z=-3-2t$ та $x=21+6t$, $y=-5-4t$, $z=2-t$. Знайти відстань між цими прямими.
8.5.А. Довести, що прямі $x=-1+2t$, $y=1-3t$, $z=1+4t$ та $x=7+3t$, $y=2+2t$, $z=1-2t$ лежать в одній площині та перетинаються. Знайти рівняння спільної площини та точку перетину цих прямих.
8.6.А. Знайти відстань від точки $P(2;3;-1)$ до прямої $x=1+t$, $y=2+t$, $z=13+4t$. Знайти точку, симетричну точці P відносно заданої прямої.
8.1.Д. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_0(-9;2;-4)$ та $M_1(3;4;-8)$ паралельно вектору $a=(3;1;0)$. Записати рівняння площини у відрізках на осях. Чи перетинає площина відрізок, обмежений точками $A(-1;5;-1)$ та $B(3;9;-5)$? Якщо так, то знайти точку їх перетину (не будуючи рівняння прямої AB). Знайти відхилення точки A від площини. Знайти точку C, симетричну точці B відносно площини.
8.2.Д. Написати рівняння площин, що ділять навпіл двогранні кути між площинами $3x+y-z-1=0$ та $x-3y+z-3=0$.
8.3.Д. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $x+2y-z=0$ та $2x-y+z-3=0$, і перпендикулярно до площини, що проходить через точки $A(1;1;1)$, $B(0;0;1)$, $C(2;0;0)$. Задачу розв'язати без та з використанням рівняння прямої.
8.4.Д. Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої, заданої перетином двох площин $2x-y+z+2=0$ та $x+2y-3z-5=0$. Написати рівняння площини, яка проектує задану пряму на площину $5x-y+z-1=0$, та знайти цю проекцію.
8.5.Д. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до прямих $x=-4+2t$, $y=4-t$, $z=-1-2t$ та $x=-5+4t$, $y=5-3t$, $z=5-5t$. Знайти відстань між цими прямими.
8.6.Д. Довести, що прямі $x=2+3t$, $y=-1+2t$, $z=3-2t$ та $x=1-6t$, $y=2-4t$, $z=-3+4t$ лежать в одній площині, та знайти рівняння цієї площини.
8.7.Д. Знайти точку Q, симетричну точці $P(2;-5;7)$ відносно прямої, $M_1(5;4;6)$ $M_2(-2,-17,-8)$.
8.1.+. На площині $2x-3y+3z-17=0$ знайти точку P, сума відстаней якої до точок $A(3;-4;7)$ та $B(-5;-14;17)$ була б найменшою.

8.1.А. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_0(1;1;1)$ та $M_1(2;3;-1)$ паралельно вектору $a = (0;-1;2)$. Записати рівняння площини у відрізках на осях. Чи перетинає площина відрізок, обмежений точками $A(2;4;3)$ та $B(-4;-2;-15)$? Якщо так, то знайти точку їх перетину (не будуючи рівняння прямої AB). Знайти відхилення точки A від площини. Знайти точку C, симетричну точці B відносно площини.

► $\overrightarrow{M_0M_1} = (1,2,-2)$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \pi\colon 2\,(x-1) - 2\,(y-1) - (z-1) = 0 \quad\Longrightarrow$$

$\pi\colon 2\,x - 2\,y - z + 1 = 0$ — загальне рівняння площини.

$\pi\colon \dfrac{x}{-0.5} + \dfrac{y}{0.5} + \dfrac{z}{1} = 1$ — рівняння площини у відрізках на осях.

Нехай $M(x,y,z)$ — довільна точка, і $\pi(M) = 0$ — умова належності точки M до площини π, де $\pi(M) = 2\,x - 2\,y - z + 1$. Тоді відхилення точки M від площини π $\delta(M,\pi) = \mu\cdot\pi(M)$, де $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = -\dfrac{1}{3}$ — нормуючий множник, значення якого наразі знати не потрібно.

$$\pi(A) = 2\cdot2 - 2\cdot4 - 3 + 1 = -6, \quad \pi(B) = 2\cdot(-4) - 2\cdot(-2) - (-15) + 1 = 12 \quad\Longrightarrow$$

$$\delta(A,\pi)\cdot\delta(B,\pi) = \mu^2\,\pi(A)\,\pi(B) = \mu^2\cdot(-6)\cdot12 = -72\,\mu^2 < 0 \quad\Longrightarrow$$

Точки A та B лежать в різних півпросторах відносно площини π, отже відрізок AB перетинає площину π в деякій точці $K(x_K, y_K, z_K)$.

$$\frac{AK}{KB} = \frac{|\delta(A,\pi)|}{|\delta(B,\pi)|} = \frac{|\pi(A)|}{|\pi(B)|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad x_K = \frac{2\,x_A + x_B}{2+1} = \frac{2\cdot2+(-4)}{3} = 0,$$

$$y_K = \frac{2\,y_A + y_B}{2+1} = \frac{2\cdot4+(-2)}{3} = 2, \qquad z_K = \frac{2\,z_A + z_B}{2+1} = \frac{2\cdot3+(-15)}{3} = -3 \quad\Longrightarrow$$

$K(0,2,-3)$.

Відхилення $\delta(A,\pi) = \mu\cdot\pi(A) = -\dfrac{1}{3}\cdot(-6) = 2 > 0 \quad\Longrightarrow$ точка A та початок координат точка O лежать в різних півпросторах відносно площини π.

Оскільки $BC \perp \pi$, то вектор нормалі $\boldsymbol{n} = (2,-2,-1)$ до площини π буде напрямним для прямої BC.

$$BC\colon \frac{x-(-4)}{2} = \frac{y-(-2)}{-2} = \frac{z-(-15)}{-1} \quad\Longrightarrow\quad BC\colon \begin{cases} x = -4 + 2\,t, \\ y = -2 - 2\,t, \\ z = -15 - t. \end{cases}$$

$$\text{Нехай}\ \ L = BC \cap \pi \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x = -4 + 2\,t, \\ y = -2 - 2\,t, \\ z = -15 - t, \\ 2\,x - 2\,y - z + 1 = 0. \end{cases} \quad\Longrightarrow$$

$$2\,(-4+2\,t) - 2\,(-2-2\,t) - (-15-t) + 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = -\frac{4}{3} \quad\Longrightarrow\quad L(-\frac{20}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{41}{3}).$$

Точка L — середина відрізка $BC \quad \Longrightarrow \quad C(-\frac{28}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{37}{3}).$ $\square$

8.2.А. Написати рівняння площин, що ділять навпіл двогранні кути між площинами $\pi_1\colon x-2y+5z-11=0$ та $\pi_2\colon 2x+5y+z-5=0$.

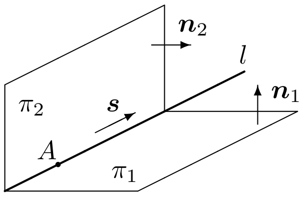
▶ Точки, які належать до бісектральної площини рівновіддалені від заданих площин.

$$\left|\frac{x-2y+5z-11}{\sqrt{30}}\right| = \left|\frac{2x+5y+z-5}{\sqrt{30}}\right| \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-2y+5z-11}{\sqrt{30}} = \dfrac{2x+5y+z-5}{\sqrt{30}}, \\ \dfrac{x-2y+5z-11}{\sqrt{30}} = -\dfrac{2x+5y+z-5}{\sqrt{30}}, \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-2y+5z-11 = 2x+5y+z-5, \\ x-2y+5z-11 = -(2x+5y+z-5), \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x+7y-4z+6=0, \\ 3x+3y+6z-16=0. \end{array}\right. \quad \square$$

8.3.А. Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої, заданої перетином двох площин $\pi_1\colon 2x-y+2z-4=0$ та $\pi_2\colon x+2y-z-1=0$. Написати рівняння площини, яка проектує задану пряму на площину $\pi_3\colon 4x+3y+z-9=0$, та знайти цю проекцію.

▶



$$l = \pi_1 \cap \pi_2 \quad \Longrightarrow \quad l\colon \begin{cases} 2x-y+2z-4=0, \\ x+2y-z-1=0. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1.8-0.6z, \\ y=-0.4+0.8z, \\ z\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Точка $A(3,-2,-2)$ відповідає частковому розв'язку останньої системи, і є точкою, через яку проходить пряма l. Напрямний вектор прямої l

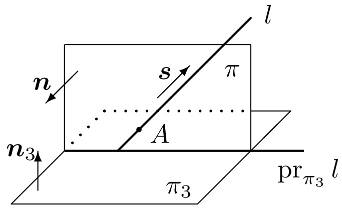
$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\,\boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k},$$

де $\boldsymbol{n}_1 = (2,-1,2)$ та $\boldsymbol{n}_2 = (1,2,-1)$ — напрямні вектори площин π_1 та π_2 відповідно. Тоді[2]

$$l\colon \frac{x-3}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+2}{5} \qquad \text{або} \qquad l\colon \begin{cases} x = 3-3\,t, \\ y=-2+4\,t, \\ z=-2+5\,t. \end{cases}$$

[2]Насправді, останню систему можна було одразу подати у вигляді канонічного та параметричного рівняння прямої l:

$$l\colon \frac{x-1.8}{-0.6} = \frac{y+0.4}{0.8} = \frac{z}{1} \qquad \text{та} \qquad l\colon \begin{cases} x = 1.8-0.6t, \\ y=-0.4+0.8t, \\ z=t. \end{cases}$$



Площина π, яка проектує пряму l на площину π_3, проходить через точку $A(3,-2,-2)$ і має вектор нормалі

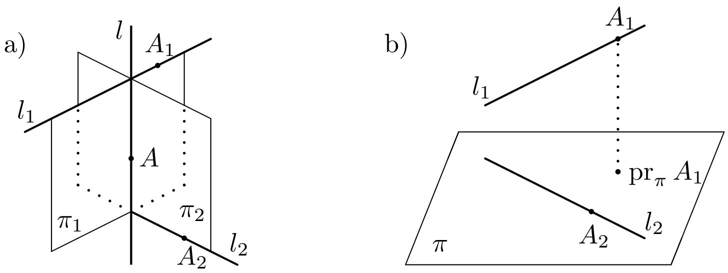
$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11\,\boldsymbol{i} + 23\,\boldsymbol{j} - 25\,\boldsymbol{k}, \quad \Longrightarrow$$

$$\pi\colon\ -11\,(x-3) + 23\,(y+2) - 25\,(z+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \pi\colon\ -11\,x + 23\,y - 25\,z + 29 = 0.$$

$$\mathrm{pr}_{\pi_3} l = \pi \cap \pi_3\colon \begin{cases} -11x + 23y - 25z + 29 = 0, \\ 4x + 3y + z - 9 = 0. \end{cases} \qquad \square$$

8.4.А. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до прямих $x = -7 + 3t$, $y = -4 + 4t$, $z = -3 - 2t$ та $x = 21 + 6t$, $y = -5 - 4t$, $z = 2 - t$. Знайти відстань між цими прямими.

►



$$l_1\colon \begin{cases} x = -7 + 3\,t, \\ y = -4 + 4\,t, \\ z = -3 - 2\,t, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A_1(-7,-4,-3), \qquad \boldsymbol{s}_1 = (3,4,-2).$$

$$l_2\colon \begin{cases} x = 21 + 6\,t, \\ y = -5 - 4\,t, \\ z = 2 - t, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A_2(21,-5,2), \qquad \boldsymbol{s}_2 = (6,-4,-1).$$

$$\text{a)}\quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12\,\boldsymbol{i} - 9\,\boldsymbol{j} - 36\,\boldsymbol{k} \quad \text{або} \quad \boldsymbol{s} = (4,3,12).$$

Знайти хоч одну точку A на прямій l наразі неможливо. Тому пряму l будемо шукати як перетин площин π_1 та π_2, які проходять через прямі l, l_1 та l, l_2 відповідно.

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 3 & 12 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -54\,\boldsymbol{i}+44\,\boldsymbol{j}+7\,\boldsymbol{k} \quad \Longrightarrow \quad \pi_1\colon -54\,(x+7)+44\,(y+4)+7\,(z+3) = 0.$$

$$\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 3 & 12 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 45\,\boldsymbol{i}+76\,\boldsymbol{j}-34\,\boldsymbol{k} \quad \Longrightarrow \quad \pi_2\colon 45\,(x-21)+76\,(y+5)-34\,(z-2) = 0.$$

$$l = \pi_1 \cap \pi_2 \quad \Longrightarrow \quad l\colon \begin{cases} -54\,x + 44\,y + 7\,z - 181 = 0, \\ 45\,x + 76\,y - 34\,z - 497 = 0. \end{cases}$$

b) $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} \quad \Longrightarrow \quad \pi\colon 4\,(x-21) + 3\,(y+5) + 12\,(z-2) = 0 \quad \Longrightarrow$

$\pi\colon 4\,x + 3\,y + 12\,z - 93 = 0$ — загальне рівняння площини π.

$$d(l_1, l_2) = |\delta(A_1, \pi)| = \left| \frac{4\cdot(-7) + 3\cdot(-4) + 12\cdot(-3) - 93}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} \right| = \frac{169}{13} = 13. \qquad \square$$

8.5.А. Довести, що прямі $x = -1 + 2t$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + 4t$ та $x = 7 + 3t$, $y = 2 + 2t$, $z = 1 - 2t$ лежать в одній площині та перетинаються. Знайти рівняння спільної площини та точку перетину цих прямих.

▶

$$l_1\colon \begin{cases} x = -1 + 2\,t, \\ y = 1 - 3\,t, \\ z = 1 + 4\,t, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A_1(-1, 1, 1), \qquad \boldsymbol{s}_1 = (2, -3, 4).$$

$$l_2\colon \begin{cases} x = 7 + 3\,t, \\ y = 2 + 2\,t, \\ z = 1 - 2\,t, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A_2(7, 2, 1), \qquad \boldsymbol{s}_2 = (3, 2, -2).$$

$\overrightarrow{A_1A_2} = (8, 1, 0)$.

$$(\overrightarrow{A_1A_2}, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\,\pi\colon l_1, l_2 \subset \pi.$$

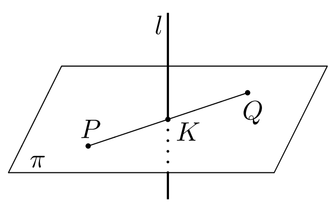
$\boldsymbol{s}_1 \nparallel \boldsymbol{s}_2 \quad \Longrightarrow \quad \exists A \in \pi\colon A = l_1 \cap l_2.$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A = l_1 \cap l_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 + 2\,t = 7 + 3\,t', \\ y = 1 - 3\,t = 2 + 2\,t', \\ z = 1 + 4\,t = 1 - 2\,t', \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} t = 1, \\ t' = -2, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A(1, -2, 5). \quad \square$$

8.6.А. Знайти відстань від точки $P(2; 3; -1)$ до прямої $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 13 + 4t$. Знайти точку, симетричну точці P відносно заданої прямої.

▶



$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} = (1, 1, 4) \quad \Longrightarrow \quad \pi\colon 1\cdot(x-2) + 1\cdot(y-3) + 4\cdot(z+1) = 0 \quad \Longrightarrow$

$\pi\colon x+y+4\,z-1=0.$

$$K=l\cap\pi \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=1+t,\\ y=2+t,\\ z=13+4\,t,\\ x+y+4\,z-1=0. \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad K(-2,-1,1) \quad\Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{PK}=(-4,-4,2) \quad \text{i} \quad d(P,l)=|\overrightarrow{PK}|=6, \qquad Q(-6,-5,3).$$ □

Практичне заняття №9. Криві другого порядку

9.1.А. Визначити довжину та скласти рівняння спільної хорди двох кіл: $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ та $3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$.
9.2.А. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 17 = 0$, проведених з точки $P(0; 5)$. Обчислити відстань від центра кола до хорди, яка з'єднує точки дотику.
9.3.А. Нехай задана парабола $\gamma\colon y^2 = x$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(-3; -1)$ і a) дотикається до параболи γ, b) перетинає параболу γ в одній точці.
9.4.А. Задано рівняння еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Знайти: a) довжину осей, b) координати фокусів, c) ексцентриситет, d) рівняння директрис та відстань між ними, e) дотичні до еліпса в точках, відстань яких до правого фокуса в чотири рази більша за відстань до лівого.
9.5.А. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2+4y^2 = 10$, паралельних прямій $3x+2y+7 = 0$.
9.6.А. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично щодо початку координат, якщо рівняння асимптот $y = \pm\dfrac{5}{12}x$ і відстань між вершинами 48. Знайти точки на гіперболі, відстань яких до правого фокуса дорівнює відстані до лівої директриси.
9.7.А. На гіперболі $x^2 - 4y^2 = 80$ задано точку $M(10; -\sqrt{5})$. Скласти рівняння дотичної до гіперболи в точці M та рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M.
9.8.А. Через фокус параболи $y^2 = 4x$ проведено хорду, перпендикулярну до її осі. Знайти рівняння цієї хорди, її довжину, рівняння дотичних до параболи в точках перетину параболи з хордою та відстань від цих точок до директриси.
9.9.А. Які криві визначаються рівняннями:

a) $4x^2+3y^2-8x+12y-32 = 0$,	b) $2y^2 - x - 12y + 14 = 0$,	c) $4x^2 + y^2 = 0$,
d) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$,	e) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$,	f) $x^2 + xy = 0$,
g) $9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0$,	h) $y^2 - 16 = 0$,	i) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$,
j) $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$,	k) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 1 = 0$,	l) $xy = 6$.

9.1.Д. Визначити довжину та скласти рівняння спільної хорди двох кіл: $x^2+y^2-10x-10y = 0$ та $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$.
9.2.Д. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$, проведених з точки $P(-2; -1)$. Обчислити відстань від центра кола до хорди, яка з'єднує точки дотику.
9.3.Д. Задано рівняння еліпса $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Знайти: a) довжину осей, b) координати фокусів, c) ексцентриситет, d) рівняння директрис та відстань між ними, e) дотичні до еліпса в точках, відстань яких до правого фокуса дорівнює 14.
9.4.Д. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярних до прямої $2x - 2y - 13 = 0$.
9.5.Д. Довести, що рівняння $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ визначає гіперболу. Знайти координати центра гіперболи, її осі, ексцентриситет, рівняння асимптот, директрис та дотичних до гіперболи в точках, фокальні радіуси яких відносяться як 2 : 3.
9.6.Д. Через лівий фокус гіперболи $25x^2 - 144y^2 = 3600$ проведено перпендикуляр до її дійсної осі. Знайти точки перетину цього перпендикуляра з гіперболою, відстань між ними, та скласти рівняння дотичних до гіперболи в цих точках.
9.7.Д. Проведено спільну хорду до параболи $y^2 = 18x$ і кола $x^2 + y^2 + 12x - 64 = 0$. Знайти рівняння цієї хорди, її довжину, рівняння дотичних до параболи в точках перетину параболи з хордою та відстань від цих точок до директриси параболи.
9.1.+. З точки $P(-16; 9)$ проведено дотичні до еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12$. Обчислити відстань від точки P до хорди еліпса, яка сполучає точки дотику.
9.2.+. Довести, що добуток відстаней кожної точки гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$ до її асимптот є величина стала і дорівнює 5.76.
9.3.+. Визначити траєкторію точки $M(x; y)$, яка при переміщенні залишається вдвічі ближчою до прямої $x = 1$, ніж до точки $F(4; 0)$.
9.4.+. Знайти площу чотирикутника з вершинами у точках перетину параболи $y = 4 - x^2$ з віссю Ox і прямою $y = 3x$.

9.1.A. Визначити довжину та скласти рівняння спільної хорди двох кіл: $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ та $3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$.

► $\gamma_1 \colon x^2 + y^2 + 3\,x - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1 \colon (x + \dfrac{3}{2})^2 + (y - \dfrac{1}{2})^2 = \dfrac{5}{2} \quad \Longrightarrow$

γ_1 —коло з центром в точці $C_1(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2})$ та радіусом $R_1 = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \approx 1.58$.

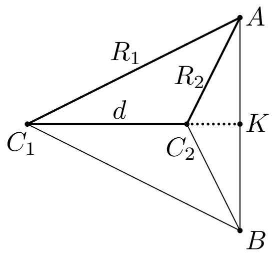
$\gamma_2 \colon 3\,x^2 + 3\,y^2 + 2\,x + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_2 \colon (x + \dfrac{1}{3})^2 + (y + \dfrac{1}{6})^2 = \dfrac{5}{36} \quad \Longrightarrow$

γ_2 —коло з центром в точці $C_2(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6})$ та радіусом $R_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{6} \approx 0.37$.

$d = |C_1C_2| = \sqrt{(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2})^2 + (-\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2})^2} = \dfrac{\sqrt{65}}{6} \approx 1.34.$

$d < R_1 \quad \Longrightarrow \quad$ центр C_2 кола γ_2 знаходиться всередині кола γ_1.

$d + R_2 > R_1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$.



З прямокутних трикутників C_1AK та C_2AK випливає, що довжина спільної хорди двох кіл γ_1 та γ_2 є $|AB| = \sqrt{\dfrac{5}{13}} \approx 0.62$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3\,x - y = 0, \\ 3\,x^2 + 3\,y^2 + 2\,x + y = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad l\colon\ -7\,x + 4\,y = 0 \quad \Longrightarrow \quad AB\colon y = \frac{7}{4}\,x.$$

Дійсно, точки A та B задовольняють кожне з рівнянь кіл γ_1 та γ_2, а отже, вони задовольняють й рівняння-наслідок l. Оскільки рівняння l є рівнянням 1-го степеня, то воно визначає деяку пряму, яка проходить через точки A та B. А оскільки через дві точки проходить лише одна пряма, то $AB = l$. □

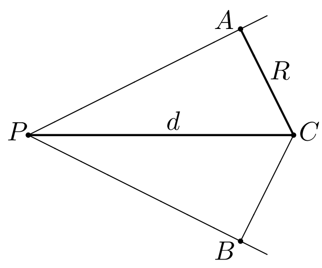
9.2.A. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 17 = 0$, проведених з точки $P(0; 5)$. Обчислити відстань від центра кола до хорди, яка з'єднує точки дотику.

► $\gamma\colon x^2 + y^2 + 6\,x - 8\,y + 17 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma\colon (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 8 \quad \Longrightarrow$

γ —коло з центром в точці $C(-3, 4)$ та радіусом $R = 2\,\sqrt{2} \approx 2.82$.

$d = |PC| = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{10} \approx 3.16$.

$d > R \quad \Longrightarrow \quad$ точка P знаходиться ззовні кола γ, а отже через точку P можна провести дотичну до кола γ (навіть дві дотичних).



Рівняння дотичної будемо шукати у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через точку $P(0,5)$.

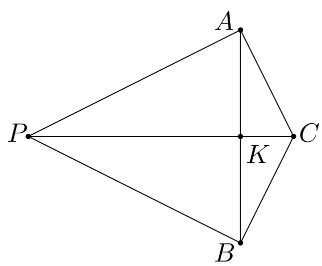
$l\colon y-5=k\,(x-0)$ або $l\colon y=k\,x+5.$

Для того, щоб пряма l була дотичною до кола γ наступна система повинна мати ДВА ОДНАКОВИХ розв'язки, тобто пряма l повинна перетинати коло γ в деякій точці двічі.

$$\begin{cases} y=k\,x+5, \\ x^2+y^2+6\,x-8\,y+17=0, \end{cases} \implies x^2+(k\,x+5)^2+6\,x-8\,(k\,x+5)+17=0 \implies$$

$$(k^2+1)\,x^2+2\,(k+3)\,x+2=0 \implies \frac{D}{4}=(k+3)^2-(k^2+1)\cdot 2=-k^2+6\,k+7.$$

$$\begin{cases} k^2+1\neq 0, \\ D=0, \end{cases} \implies \frac{D}{4}=0 \implies \left[\begin{array}{l} k_1=-1, \\ k_2=7, \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} l_1\colon y=-x+5, \\ l_2\colon y=7\,x+5. \end{array}\right.$$

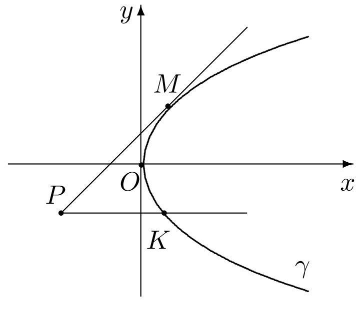


В прямокутному $\triangle PAC$ $\quad(\angle A=\dfrac{\pi}{2})$

$$\cos\angle C=\frac{|CK|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|PC|} \implies |CK|=\frac{|AC|^2}{|PC|}=\frac{8}{\sqrt{10}}.$$ □

9.3.A. Нехай задана парабола $\gamma\colon y^2=x$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(-3;-1)$ і a) дотикається до параболи γ, b) перетинає параболу γ в одній точці.

▶



Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через точку $P(-3,-1)$:

$l\colon y+1=k\,(x+3)$ або $l\colon y=k\,x+(3\,k-1)$.

$$\begin{cases} y=k\,x+(3\,k-1), \\ y^2=x, \end{cases} \implies (k\,x+(3\,k-1))^2=x \implies$$

$$k^2\,x^2+(6\,k^2-2\,k-1)\,x+(9\,k^2-6\,k+1)=0 \implies D=-12\,k^2+4\,k+1.$$

a) $$\begin{cases} k^2\neq 0, \\ D=0, \end{cases} \implies \left[\begin{array}{l} k_1=\dfrac{1}{2}, \\ k_2=-\dfrac{1}{6}, \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} l_1\colon y=\dfrac{1}{2}\,x+\dfrac{1}{2}, \\ l_2\colon y=-\dfrac{1}{6}\,x-\dfrac{3}{2}, \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} M_1(1,1), \\ M_2(9,-3). \end{array}\right.$$

b) $k^2=0 \implies k=0 \implies l\colon y=-1 \implies K(1,-1)$. □

9.4.А. Задано рівняння еліпса $9x^2+25y^2=225$. Знайти: a) довжину осей, b) координати фокусів, c) ексцентриситет, d) рівняння директрис та відстань між ними, e) дотичні до еліпса в точках, відстань яких до правого фокуса в чотири рази більша за відстань до лівого.

► $\gamma\colon 9\,x^2+25\,y^2=225 \implies \gamma\colon \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \implies a=5, \quad b=3, \quad c=\sqrt{a^2-b^2}=4.$

a) $2\,a=10, \quad 2\,b=6.$

b) $F_1(-4,0), \quad F_2(4,0).$

c) $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}.$

d) $d\colon x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon} \implies d_1\colon x=-\dfrac{25}{4}, \quad d_2\colon x=\dfrac{25}{4}, \quad \rho(d_1,d_2)=\dfrac{25}{2}.$

e) Рівняння дотичної: $l\colon \dfrac{x\,x_0}{a^2}+\dfrac{y\,y_0}{b^2}=1$, де $M(x_0,y_0)\in\gamma\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

$r_2=4\,r_1, \quad r_{1,2}=a\pm\varepsilon\,x \implies 5-\dfrac{4}{5}\,x=4\,(5+\dfrac{4}{5}\,x) \implies x=-\dfrac{15}{4} \implies$

$$\left[\begin{array}{l} M_1(-\dfrac{15}{4},\dfrac{3\sqrt{7}}{4}), \\ M_2(-\dfrac{15}{4},-\dfrac{3\sqrt{7}}{4}), \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} l_1\colon\ -\dfrac{15\,x}{25\cdot 4}+\dfrac{3\sqrt{7}\,y}{9\cdot 4}=1, \\ l_2\colon\ -\dfrac{15\,x}{25\cdot 4}-\dfrac{3\sqrt{7}\,y}{9\cdot 4}=1, \end{array}\right. \implies$$

$$\left[\begin{array}{l} l_1\colon\ -9\,x+5\sqrt{7}\,y=60, \\ l_2\colon\ -9\,x-5\sqrt{7}\,y=60. \end{array}\right.$$ □

9.5.А. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2+4y^2=10$, паралельних прямій $3x+2y+7=0$.

► За умовою задачі дотична $l\colon x_0x+4\,y_0y=10$ до еліпса $\gamma\colon x^2+4\,y^2=10$, яка проходить через точку $M(x_0,y_0)\in\gamma$, паралельна до прямої $l'\colon 3\,x+2\,y+7=0$. З умови паралельності прямих $l\parallel l'$ та належності точки $M(x_0,y_0)\in\gamma$ маємо наступну систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{3}=\dfrac{4\,y_0}{2}, \\ x_0^2+4\,y_0^2=10, \end{cases} \implies \left[\begin{array}{l} M_1(-3,-\dfrac{1}{2}), \\ M_2(3,\dfrac{1}{2}), \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} l_1\colon\ -3\,x-2\,y=10, \\ l_2\colon 3\,x+2\,y=10. \end{array}\right.$$ □

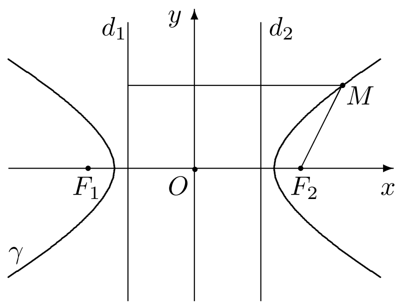
9.6.А. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично щодо початку координат, якщо рівняння асимптот $y = \pm\dfrac{5}{12}x$ і відстань між вершинами 48. Знайти точки на гіперболі, відстань яких до правого фокуса дорівнює відстані до лівої директриси.

► З умови задачі відомо, що $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{12}$, $2\,a = 48$. $\Longrightarrow$

$a = 24$, $b = 10$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = 26$, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{13}{12}$, $r_2 = |a - \varepsilon x| = |24 - \dfrac{13}{12}\,x|$,

$d_1 \colon x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, тобто $d_1 \colon x = -\dfrac{288}{13}$, $\rho_1 = |x + \dfrac{288}{13}|$.

$\gamma\colon \dfrac{x^2}{24^2} - \dfrac{y^2}{10^2} = 1.$



$$r_2 = \rho_1 \quad\Longrightarrow\quad |24 - \frac{13}{12}\,x| = |x + \frac{288}{13}| \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 24 - \dfrac{13}{12}\,x = x + \dfrac{288}{13}, \\ -24 + \dfrac{13}{12}\,x = x + \dfrac{288}{13}, \end{array}\right. \quad\Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{288}{325} \quad\Longrightarrow\quad \varnothing, \\ x = \dfrac{600}{13} \quad\Longrightarrow\quad M_1(\dfrac{600}{13}, -\dfrac{20\sqrt{114}}{13}), \quad M_2(\dfrac{600}{13}, \dfrac{20\sqrt{114}}{13}). \end{array}\right.$$ □

9.7.А. На гіперболі $x^2 - 4y^2 = 80$ задано точку $M(10; -\sqrt{5})$. Скласти рівняння дотичної до гіперболи в точці M та рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M.

► $\gamma\colon x^2 - 4y^2 = 80$, $M(10; -\sqrt{5}) \in \gamma$

Дотична $l\colon x_0\,x - 4\,y_0\,y = 80$, $l\colon 10\,x + 4\sqrt{5}\,y = 80$, або $l\colon 5\,x + 2\sqrt{5}\,y = 40$.

$\gamma\colon \dfrac{x^2}{80} - \dfrac{y^2}{20} = 1 \quad\Longrightarrow\quad a^2 = 80, \quad b^2 = 20 \quad\Longrightarrow\quad c = \sqrt{a^2+b^2} = 10 \quad\Longrightarrow$

$F_1(-10,0) \quad\Longrightarrow\quad F_1M\colon \dfrac{x-(-10)}{10-(-10)} = \dfrac{y-0}{-\sqrt{5}-0} \quad\Longrightarrow\quad F_1M\colon x + 4\sqrt{5}\,y + 10 = 0.$

$F_2(10,0) \quad\Longrightarrow\quad F_2M\colon \dfrac{x-10}{10-10} = \dfrac{y-0}{-\sqrt{5}-0} \quad\Longrightarrow\quad F_2M\colon x = 10.$ □

9.8.А. Через фокус параболи $y^2 = 4x$ проведено хорду, перпендикулярну до її осі. Знайти рівняння цієї хорди, її довжину, рівняння дотичних до параболи в точках перетину параболи з хордою та відстань від цих точок до директриси.

► $\gamma\colon y^2 = 2\,p\,x$, де p — відстань від фокуса $F(\dfrac{p}{2}, 0)$ до директриси $d\colon x = -\dfrac{p}{2}$.

$\gamma\colon y^2 = 4\,x \quad\Longrightarrow\quad p = 2 \quad\Longrightarrow\quad F(1,0), \quad d\colon x = -1.$

$A(1,2), \quad B(1,-2) \quad \Longrightarrow \quad AB\colon x=1, \quad |AB|=4.$

$$l\colon y_0\, y = p\,(x+x_0) \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} l_A\colon 2\,y = 2\,(x-1), \\ l_B\colon -2\,y = 2\,(x-1), \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} l_A\colon x-y-1=0, \\ l_B\colon x+y-1=0. \end{array} \right.$$

$\rho(A,d)=\rho(B,d)=\rho(F,d)=p=2.$ $\square$

9.9.А. Які криві визначаються рівняннями:

a) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$, b) $2y^2-x-12y+14=0$, c) $4x^2+y^2=0$,
d) $x^2-y^2-4x+6y-5=0$, e) $x^2+y^2+2x+2=0$, f) $x^2+xy=0$,
g) $9x^2-4y^2-36x+8y-4=0$, h) $y^2-16=0$, i) $x^2-3xy+2y^2=0$,
j) $x^2+4y^2-6x-8y+25=0$, k) $x^2-4xy+4y^2+1=0$, l) $xy=6$.

► b) $2y^2-x-12y+14=0 \quad \Longrightarrow \quad 2(y-3)^2=x+4$ — парабола з вершиною в точці $A(-4,3)$ і $p=\dfrac{1}{4}$. $\square$

► e) $x^2+y^2+2x+2=0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)^2+y^2+1=0$ — $\varnothing$ (уявне коло). $\square$

► h) $y^2-16=0 \quad \Longrightarrow \quad (y-4)(y+4)=0$ — пара паралельних прямих. $\square$

► k) $x^2-4xy+4y^2+1=0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2y)^2+1=0$ — $\varnothing$ (пара уявних паралельних прямих). $\square$

Практичне заняття №10. Основні алгебраїчні структури

10.1.А. За допомогою алгоритму Евкліда знайти НСД цілих чисел a та b та його лінійне зображення, якщо: a) $a = 27$, $b = 19$, b) $a = 2464$, $b = 1085$.
10.2.А. Довести, що: a) $a - 5\,b \,\vdots\, 17 \iff 2\,a + 7\,b \,\vdots\, 17$, b) $2^{11\cdot 31} \equiv 2 \pmod{11 \cdot 31}$.
10.3.А. Знайти остачу від ділення $2^{100} + 5^{200}$ на 29.
10.4.А. Знайти: a) останню цифру, b) дві останні цифри чисел $a = 9^{9^9}$ та $b = 2^{341}$.
10.5.А. Розв'язати лінійну конгруенцію $51\,x \equiv 69 \pmod{123}$ двома способами: a) способом рівносильних перетворень, b) користуючись лінійним зображенням НСД.
10.6.А. Які з аксіом абелевої групи виконуються на множині $\mathbb{Z}$ відносно операцій: a) додавання, b) віднімання, c) множення, d) знаходження НСД, e) піднесення до степеня?
10.7.А. Нехай M — непорожня множина, а $\mathfrak{B} = 2^M$ — її булеан. З'ясувати, відносно яких з операцій: a) перетин $\cap$, b) об'єднання $\cup$, c) різниця $\setminus$, d) симетрична різниця $\triangle$, заданих на $\mathfrak{B}$, булеан $\mathfrak{B}$ множини M утворює групу. Чи буде ця група абелевою?
10.8.А. Нехай M — непорожня множина, а $\mathfrak{B} = 2^M$ — її булеан. З'ясувати, чи утворює кільце, область цілісності або поле алгебраїчна система $(\mathfrak{B}, \triangle, \cap)$.
10.9.А. Довести, що $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ утворює поле.
10.10.А. Довести, що в кільці $\mathbb{Z}_m$: a) $\overline{x} \,|\, \overline{1} \iff \gcd(x, m) = 1$, b) $\overline{x} \,|\, \overline{0} \iff \gcd(x, m) = d \neq 1$.
10.11.А. Побудувати таблицю Келі мультиплікативної групи $\mathbb{Z}_m^*$ кільця $\mathbb{Z}_m$, якщо: a) $m = 5$, b) $m = 6$.
10.12.А. Довести, що множина $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ відносно звичайних операцій додавання та множення утворює поле.
10.1.Д. За допомогою алгоритму Евкліда знайти НСД цілих чисел a та b та його лінійне зображення, якщо: a) $a = 67$, $b = 41$, b) $a = 6251$, $b = 777$.
10.2.Д. Довести, що: a) $10\,a + 7\,b \,\vdots\, 19$, якщо $a - 5\,b \,\vdots\, 19$, b) $18\,a + 5\,b \,\vdots\, 19$, якщо $11\,a + 2\,b \,\vdots\, 19$.
10.3.Д. Довести, що $26^{30} \equiv 1 \pmod{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31}$.
10.4.Д. Знайти остачу від ділення: a) $3^{79821} + 5$ на 17, b) $23^{100} + 51^{200}$ на 19, c) $7^{9^{9^9}}$ на 100.
10.5.Д. Розв'язати: a) способом рівносильних перетворень, b) користуючись лінійним зображенням НСД лінійні конгруенції: 1) $20\,x \equiv 14 \pmod{52}$, 2) $440\,x \equiv 56 \pmod{696}$.
10.6.Д. Які з аксіом абелевої групи виконуються на множині $\mathbb{Q}$ відносно операцій: a) додавання, b) віднімання, c) множення, d) ділення, e) знаходження НСД, f) піднесення до степеня?
10.7.Д. Нехай M — непорожня множина, а $\mathfrak{B} = 2^M$ — її булеан. З'ясувати, чи утворює кільце, область цілісності або поле алгебраїчна система $(\mathfrak{B}, \triangle, \cup)$.
10.8.Д. Довести, що кільце $\mathbb{Z}_m$ є полем тоді й лише тоді, коли m є простим числом.
10.9.Д. Побудувати таблицю Келі мультиплікативної групи $\mathbb{Z}_m^*$ кільця $\mathbb{Z}_m$, якщо: a) $m = 10$, b) $m = 11$.
10.10.Д. Довести, що множина всіх раціональних функцій від однієї змінної з дійсними коефіцієнтами (тобто множина всіх дробів виду $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ та $g(x)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами, причому $g(x)$ тотожно не дорівнює нулю) відносно звичайних операцій додавання та множення утворює поле.
10.1.+. Довести, що рівняння: a) $2^x + 7^y = 19^z$, b) $24^x + 36^y = 61^z$ не мають розв'язків у натуральних числах x, y, z.
10.2.+. Для перевезення зерна є мішки по 60 і 80 кг. Скільки таких мішків потрібно для перевезення 440 кг зерна?
10.3.+. Довести, що кільце, в якому для кожного елемента x виконується співвідношення $x^2 = x$ є комутативним.
10.4.+. Довести, що множина $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ з операцією $*$, заданою співвідношенням $a * b = ab - a - b + 2$, утворює групу.
10.5.+. Знайти всі ізоморфізми поля $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ на себе. Чи ізоморфні поля $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ та $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$?

10.1.A. За допомогою алгоритму Евкліда знайти НСД цілих чисел a та b та його лінійне зображення, якщо: a) $a = 27$, $b = 19$, b) $a = 2464$, $b = 1085$.

► a)

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & & & & & & a = & 27 & \multicolumn{1}{|r}{19} & = b \\ \cline{9-9}
 & & & & & & & \underline{19} & \multicolumn{1}{|l}{1} & \\
 & & & & b = & 19 & \multicolumn{2}{|r}{8} & = r_1 & \\ \cline{7-8}
 & & & & & \underline{16} & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & \\
 & & r_1 = & 8 & \multicolumn{2}{|r}{3} & = r_2 & & & \\ \cline{5-6}
 & & & \underline{6} & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & & & \\
 r_2 = & 3 & \multicolumn{2}{|r}{2} & = r_3 & & & & & \\ \cline{3-4}
 & \underline{2} & \multicolumn{1}{|l}{1} & & & & & & & \\
 & 1 & = d & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
a &= 1 \cdot b + r_1 &&\Longrightarrow && r_1 = a - b \\
b &= 2 \cdot r_1 + r_2 &&\Longrightarrow && r_2 = b - 2\,r_1 \\
r_1 &= 2 \cdot r_2 + r_3 &&\Longrightarrow && r_3 = r_1 - 2\,r_2 \\
r_2 &= 1 \cdot r_3 + d &&\Longrightarrow && d = r_2 - r_3
\end{aligned}$$

$$d = r_2 - r_3 = r_2 - (r_1 - 2\,r_2) = 3\,r_2 - r_1 = 3\,(b - 2\,r_1) - r_1 = 3\,b - 7\,r_1 = 3\,b - 7\,(a - b) = 10\,b - 7\,a,$$

отже, $d = 10 \cdot b - 7 \cdot a$ — лінійне зображення НСД $(27, 19)$ і НСД $(27, 19) = 1$. □

► b)

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrl}
 & & & & & & & & & & a = & 2464 & \multicolumn{1}{|r}{1085} & = b \\ \cline{13-13}
 & & & & & & & & & & & \underline{2170} & \multicolumn{1}{|l}{2} & \\
 & & & & & & & & b = & 1085 & \multicolumn{2}{|r}{294} & = r_1 & \\ \cline{11-12}
 & & & & & & & & & \underline{882} & \multicolumn{1}{|l}{3} & & & \\
 & & & & & & r_1 = & 294 & \multicolumn{2}{|r}{203} & = r_2 & & & \\ \cline{9-10}
 & & & & & & & \underline{203} & \multicolumn{1}{|l}{1} & & & & & \\
 & & & & r_2 = & 203 & \multicolumn{2}{|r}{91} & = r_3 & & & & & \\ \cline{7-8}
 & & & & & \underline{182} & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & & & & & \\
 & & r_3 = & 91 & \multicolumn{2}{|r}{21} & = r_4 & & & & & & & \\ \cline{5-6}
 & & & \underline{84} & \multicolumn{1}{|l}{4} & & & & & & & & & \\
 r_4 = & 21 & \multicolumn{2}{|r}{7} & = d & & & & & & & & & \\ \cline{3-4}
 & \underline{21} & \multicolumn{1}{|l}{3} & & & & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
a &= 2 \cdot b + r_1 &&\Longrightarrow && r_1 = a - 2\,b \\
b &= 3 \cdot r_1 + r_2 &&\Longrightarrow && r_2 = b - 3\,r_1 \\
r_1 &= 1 \cdot r_2 + r_3 &&\Longrightarrow && r_3 = r_1 - r_2 \\
r_2 &= 2 \cdot r_3 + r_4 &&\Longrightarrow && r_4 = r_2 - 2\,r_3 \\
r_3 &= 4 \cdot r_4 + d &&\Longrightarrow && d = r_3 - 4\,r_4
\end{aligned}$$

$$d = r_3 - 4\,r_4 = r_3 - 4\,(r_2 - 2\,r_3) = 9\,r_3 - 4\,r_2 = 9\,(r_1 - r_2) - 4\,r_2 = 9\,r_1 - 13\,r_2 =$$

$$= 9\,r_1 - 13\,(b - 3\,r_1) = 48\,r_1 - 13\,b = 48\,(a - 2\,b) - 13\,b = 48\,a - 109\,b,$$

отже, $d = 48 \cdot a - 109 \cdot b$ — лінійне зображення НСД $(2464, 1085)$ і НСД $(2464, 1085) = 7$. □

10.2.A. Довести, що: a) $a - 5\,b \,\vdots\, 17 \iff 2\,a + 7\,b \,\vdots\, 17$, b) $2^{11 \cdot 31} \equiv 2 \pmod{11 \cdot 31}$.

► a) $a - 5\,b\,\vdots\,17 \quad\Longrightarrow\quad a - 5\,b \equiv 0 \pmod{17} \quad\Longrightarrow\quad a \equiv 5\,b \pmod{17} \quad\Longrightarrow$

$2 \cdot a \equiv 2 \cdot (5\,b) \pmod{17} \quad\Longrightarrow\quad 2\,a \equiv 10\,b \pmod{17};\quad 10 \equiv -7 \pmod{17} \quad\Longrightarrow$

$2\,a \equiv -7\,b \pmod{17} \quad\Longrightarrow\quad 2\,a + 7\,b \equiv 0 \pmod{17} \quad\Longrightarrow\quad 2\,a + 7\,b\,\vdots\,17.$

$2\,a + 7\,b\,\vdots\,17 \quad\Longrightarrow\quad 2\,a + 7\,b \equiv 0 \pmod{17} \quad\Longrightarrow\quad 2\,a \equiv -7\,b \pmod{17} \quad\Longrightarrow$

$9 \cdot 2\,a \equiv 9 \cdot (-7\,b) \pmod{17} \quad\Longrightarrow\quad 18\,a \equiv -63\,b \pmod{17};\quad \begin{cases} 18 \equiv 1 \pmod{17}, \\ -63 \equiv 5 \pmod{17}, \end{cases} \quad\Longrightarrow$

$a \equiv 5\,b \pmod{17} \quad\Longrightarrow\quad a - 5\,b \equiv 0 \pmod{17} \quad\Longrightarrow\quad a - 5\,b\,\vdots\,17$ □

► b) $2^{11\cdot 31} \equiv 2 \pmod{11 \cdot 31} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 2^{11\cdot 31} \equiv 2 \pmod{11}, \\ 2^{11\cdot 31} \equiv 2 \pmod{31}. \end{cases}$

$2^1 \equiv 2 \pmod{11}$
$2^2 \equiv 4 \pmod{11}$
$2^3 \equiv 8 \equiv -3 \pmod{11}$
$2^4 \equiv -6 \equiv 5 \pmod{11}$
$2^5 \equiv 10 \equiv -1 \pmod{11} \quad\Longrightarrow\quad 11 \cdot 31 = 341 = 5 \cdot 68 + 1 \quad\Longrightarrow$

$2^{11\cdot 31} = 2^{341} = 2^{5\cdot 68+1} = (2^5)^{68} \cdot 2^1 \equiv (-1)^{68} \cdot 2 = 2 \pmod{11}.$

$2^1 \equiv 2 \pmod{31}$
$2^2 \equiv 4 \pmod{31}$
$2^3 \equiv 8 \pmod{31}$
$2^4 \equiv 16 \equiv -15 \pmod{31}$
$2^5 \equiv -30 \equiv 1 \pmod{31} \quad\Longrightarrow\quad 11 \cdot 31 = 341 = 5 \cdot 68 + 1 \quad\Longrightarrow$

$2^{11\cdot 31} = 2^{341} = 2^{5\cdot 68+1} = (2^5)^{68} \cdot 2^1 \equiv 1^{68} \cdot 2 = 2 \pmod{31}.$ □

10.3.А. Знайти остачу від ділення $2^{100} + 5^{200}$ на 29.

► $2^{100} + 5^{200} \equiv (-4) + (-13) = -17 \equiv 12 \pmod{29}$

$$\begin{array}{ll} 2^1 \equiv 2 \pmod{29} & 2^8 \equiv 24 \equiv -5 \pmod{29} \\ 2^2 \equiv 4 \pmod{29} & 2^9 \equiv -10 \pmod{29} \\ 2^3 \equiv 8 \pmod{29} & 2^{10} \equiv -20 \equiv 9 \pmod{29} \\ 2^4 \equiv 16 \equiv -13 \pmod{29} & 2^{11} \equiv 18 \equiv -11 \pmod{29} \qquad \Longrightarrow \\ 2^5 \equiv -26 \equiv 3 \pmod{29} & 2^{12} \equiv -22 \equiv 7 \pmod{29} \\ 2^6 \equiv 6 \pmod{29} & 2^{13} \equiv 14 \pmod{29} \\ 2^7 \equiv 12 \pmod{29} & 2^{14} \equiv 28 \equiv -1 \pmod{29} \end{array}$$

$100 = 14 \cdot 7 + 2 \quad\Longrightarrow\quad 2^{100} = 2^{14\cdot 7+2} = (2^{14})^7 \cdot 2^2 \equiv (-1)^7 \cdot 4 = -4 \pmod{29}.$

$$\begin{array}{ll} 5^1 \equiv 5 \pmod{29} & \\ 5^2 \equiv 25 \equiv -4 \pmod{29} & \\ 5^3 \equiv -20 \equiv 9 \pmod{29} & \\ 5^4 \equiv 45 \equiv -13 \pmod{29} & \Longrightarrow \\ 5^5 \equiv -65 \equiv -7 \pmod{29} & \\ 5^6 \equiv -35 \equiv -6 \pmod{29} & \\ 5^7 \equiv -30 \equiv -1 \pmod{29} & \end{array}$$

$200 = 7 \cdot 28 + 4 \quad\Longrightarrow\quad 5^{200} = 5^{7\cdot 28+4} = (5^7)^{28} \cdot 5^4 \equiv (-1)^{28} \cdot (-13) = -13 \pmod{29}.$ □

10.4.A. Знайти: a) останню цифру, b) дві останні цифри чисел $a = 9^{9^9}$ та $b = 2^{341}$.

► a) $9^{9^9} \equiv x \pmod{10}$

$$\gcd(9^{9^9}, 10) = 1, \quad 9^1 \equiv 9 \pmod{10}, \quad 9^2 = 81 \equiv 1 \pmod{10}, \quad 9^9 \equiv 1 \pmod{2} \quad \Longrightarrow$$

$9^9 = 2\,k + 1$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$, і $9^{9^9} = 9^{\,2k+1} = (9^2)^k \cdot 9 \equiv 1^k \cdot 9 = 9 \pmod{10}$. □

► b) $2^{341} \equiv x \pmod{100}$

$$\gcd(2^{341}, 100) = 4 \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \,\vdots\, 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 4\,y \quad \Longrightarrow \quad 2^{341} \equiv 4\,y \pmod{4 \cdot 25} \quad \Longrightarrow$$

$2^{339} \equiv y \pmod{25}$, $\gcd(2^{339}, 25) = 1$ — це гарантія того, що $\exists\, n \in \mathbb{N} \mid 2^n \equiv \pm 1 \pmod{25}$

$$\begin{array}{ll}
2^1 \equiv 2 \pmod{25} & 2^6 \equiv 14 \equiv -11 \pmod{25} \\
2^2 \equiv 4 \pmod{25} & 2^7 \equiv -22 \equiv 3 \pmod{25} \\
2^3 \equiv 8 \pmod{25} & 2^8 \equiv 6 \pmod{25} \qquad\qquad \Longrightarrow \\
2^4 \equiv 16 \equiv -9 \pmod{25} & 2^9 \equiv 12 \pmod{25} \\
2^5 \equiv -18 \equiv 7 \pmod{25} & 2^{10} \equiv 24 \equiv -1 \pmod{25}
\end{array}$$

$$339 = 10 \cdot 33 + 9 \quad \Longrightarrow \quad 2^{339} = 2^{10 \cdot 33 + 9} = (2^{10})^{33} \cdot 2^9 \equiv (-1)^{33} \cdot 12 = -12 \pmod{25} \quad \Longrightarrow$$

$4 \cdot 2^{339} \equiv 4 \cdot (-12) \pmod{4 \cdot 25} \quad \Longrightarrow \quad 2^{341} \equiv -48 \equiv 52 \pmod{100}$. □

10.5.A. Розв'язати лінійну конгруенцію $51\,x \equiv 69 \pmod{123}$ двома способами: a) способом рівносильних перетворень, b) користуючись лінійним зображенням НСД.

► $51\,x \equiv 69 \pmod{123}$

$\gcd(51, 123) = 3$, $69 \,\vdots\, 3 \quad \Longrightarrow$ конгруенція має 3 розв'язки $\pmod{123} \quad \Longrightarrow$

$17\,x \equiv 23 \pmod{41}$

$\gcd(17, 41) = 1$, $23 \,\vdots\, 1 \quad \Longrightarrow$ конгруенція має 1 розв'язок $\pmod{41} \quad \Longrightarrow$

$$\text{a)} \;\; 17\,x \equiv 23 \pmod{41} \quad \Longrightarrow \quad -24\,x \equiv 64 \pmod{41}, \quad \begin{cases} \gcd(-24, 64) = 8, \\ \gcd(8, 41) = 1, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$-3\,x \equiv 8 \pmod{41} \quad \Longrightarrow \quad -3\,x \equiv -33 \pmod{41}, \quad \begin{cases} \gcd(-3, -33) = 3, \\ \gcd(3, 41) = 1, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$x \equiv 11 \pmod{41}$

b)

$$\begin{array}{rrr|rl}
 & m = & 41 & 17 & = a \\
 & & 34 & 2 & \\
a = & 17 & & 7 & = r_1 \\
 & 14 & & 2 & \\
r_1 = 7 & & & 3 & = r_2 \\
6 & & & 2 & \\
1 = d & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
m = 2 \cdot a + r_1 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = m - 2\,a \\[1em]
a = 2 \cdot r_1 + r_2 \quad \Longrightarrow \quad r_2 = a - 2\,r_1 \\[1em]
r_1 = 2 \cdot r_2 + d \quad \Longrightarrow \quad d = r_1 - 2\,r_2
\end{array}$$

$d = r_1 - 2\,r_2 = r_1 - 2\,(a - 2\,r_1) = 5\,r_1 - 2\,a = 5\,(m - 2\,a) - 2\,a = 5\,m - 12\,a,$

отже, $d = 5 \cdot m + (-12) \cdot a$.

Домножимо обидві частини конгруенції $17\,x \equiv 23 \pmod{41}$ на коефіцієнт, який стоїть біля a в лінійному зображенні НСД чисел $m = 41$ та $a = 17$:

$$(-12) \cdot 17\,x \equiv (-12) \cdot 23 \pmod{41} \quad \Longrightarrow \quad -204\,x \equiv -276 \pmod{41};$$

$$\begin{cases} -204 \equiv 1 \pmod{41}, \\ -276 \equiv 11 \pmod{41}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x \equiv 11 \pmod{41}.$$

Таким чином, $x \equiv 11 \pmod{41} \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 \equiv 11 \pmod{123}, \\ x_2 \equiv 11 + 41 = 52 \pmod{123}, \\ x_3 \equiv 52 + 41 = 93 \pmod{123}. \end{array} \right.$ □

10.6.А. Які з аксіом абелевої групи виконуються на множині $\mathbb{Z}$ відносно операцій: a) додавання, b) віднімання, c) множення, d) знаходження НСД, e) піднесення до степеня?

▶

№	$(G,*)$	$\forall\, a,b \in G$ $a*b \in G$	$\forall\, a,b,c \in G$ $(a*b)*c =$ $= a*(b*c)$	$\exists\,\theta \in G$ $\forall\, a \in G$ $\theta * a =$ $= a =$ $= a * \theta$	$\forall\, a \in G$ $\exists\, a' \in G$ $a * a' =$ $= \theta =$ $= a' * a$	$\forall\, a,b \in G$ $a*b =$ $= b*a$	Висновок
a)	$(\mathbb{Z},+)$	Так	Так	Так $\theta = 0$	Так $a' = -a$	Так	Абелева група
b)	$(\mathbb{Z},-)$	Так	Ні $(5-3)-2 \neq$ $\neq 5-(3-2)$	Ні	$-//-$	Ні $5-3 \neq$ $\neq 3-5$	
c)	$(\mathbb{Z},\cdot)$	Так	Так	Так $\theta = 1$	Ні $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$	Так	
d)	$(\mathbb{Z},\gcd)$	Так	Так	Так $\theta = 0$	Ні	Так	
e)	$(\mathbb{Z},\uparrow)$	Ні $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$	Ні $(2^3)^5 \neq 2^{3^5}$	Ні	$-//-$	Ні $2^3 \neq 3^2$	

□

10.7.А. Нехай M — непорожня множина, а $\mathfrak{B} = 2^M$ — її булеан. З'ясувати, відносно яких з операцій: a) перетин $\cap$, b) об'єднання $\cup$, c) різниця $\setminus$, d) симетрична різниця $\triangle$, заданих на $\mathfrak{B}$, булеан $\mathfrak{B}$ множини M утворює групу. Чи буде ця група абелевою?

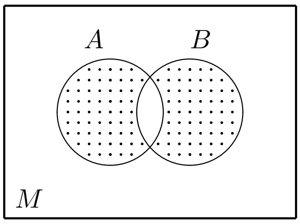
▶ $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(M) = 2^M = \{A \mid A \subset M\}, \quad |\mathfrak{B}| = 2^{|M|}$

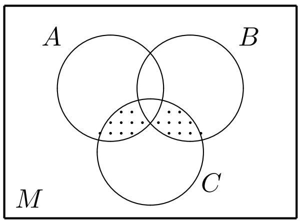
$M = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{B} = \{M = \varnothing\}, \qquad M = \{1\} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{B} = \{\varnothing,\ M = \{1\}\}$

$M = \{1,2\} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{B} = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ M = \{1,2\}\}$

$M = \{1,2,3\} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{B} = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ M = \{1,2,3\}\}$

Нагадаємо, що $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (див. мал. зліва).





№	$(G, *)$	$\forall\, a, b \in G$ $a * b \in G$	$\forall\, a, b, c \in G$ $(a * b) * c =$ $= a * (b * c)$	$\exists\, \theta \in G$ $\forall\, a \in G$ $\theta * a =$ $= a =$ $= a * \theta$	$\forall\, a \in G$ $\exists\, a' \in G$ $a * a' =$ $= \theta =$ $= a' * a$	$\forall\, a, b \in G$ $a * b =$ $= b * a$	Висновок
a)	$(\mathfrak{B}, \cap)$	Так	Так	Так $\theta = M$	Ні	Так	
b)	$(\mathfrak{B}, \cup)$	Так	Так	Так $\theta = \varnothing$	Ні	Так	
c)	$(\mathfrak{B}, \setminus)$	Так	Ні	Ні	$-//-$	Ні	
d)	$(\mathfrak{B}, \triangle)$	Так	Так	Так $\theta = \varnothing$	Так $A' = A$	Так	Абелева група

$\square$

10.8.A. Нехай M — непорожня множина, а $\mathfrak{B} = 2^M$ — її булеан. З'ясувати, чи утворює кільце, область цілісності або поле алгебраїчна система $(\mathfrak{B}, \triangle, \cap)$.

► Перевіримо аксіоми кільця.

1) $(\mathfrak{B}, \triangle)$ — абелева група — задача 10.7.A(d);
2) замкненість множення — задача 10.7.A(a);
3) асоціативність множення — задача 10.7.A(a);
4) ліва та права дистрибутивності перетину відносно симетричної різниці (множення відносно додавання): $\forall\, A, B, C \in \mathfrak{B}$
$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ та $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$ (див. мал. справа).

Отже, алгебраїчна система $(\mathfrak{B}, \triangle, \cap)$ утворює кільце.

В кільці $(\mathfrak{B}, \triangle, \cap)$ додатково виконується умови:

5) комутативність множення — задача 10.7.A(a);
6) існування одиничного елемента — задача 10.7.A(a);
7) наявність дільників нуля (за умови, що $|M| \geqslant 2$):
$a, b \in M, \; a \neq b \implies \{a\} \cap \{b\} = \varnothing$, причому $\{a\} \neq \varnothing \neq \{b\}$.

Таким чином, при $|M| \geqslant 2$ алгебраїчна система $(\mathfrak{B}, \triangle, \cap)$ утворює комутативне кільце з одиницею та з дільниками нуля (а отже, поле не утворює).

При $|M| = 1$ алгебраїчна система $(\mathfrak{B}, \triangle, \cap) \simeq (\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, а отже, за задачею 10.9.A, утворює поле. $\square$

10.9.A. Довести, що $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ утворює поле.

► $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ — комутативне кільце з одиницею. Єдиний відмінний від нуля елемент — одиниця — є оберненим сам до себе. $\square$

10.10.A. Довести, що в кільці $\mathbb{Z}_m$: a) $\overline{x} \mid \overline{1} \iff \gcd(x, m) = 1$, b) $\overline{x} \mid \overline{0} \iff \gcd(x, m) = d \neq 1$.

► a) $\overline{x} \mid \overline{1} \iff \exists\, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m : \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{1} \iff \overline{x \cdot y} = \overline{1} \iff x \cdot y \equiv 1 \pmod{m} \iff$

$\exists\, t \in \mathbb{Z} : \ x \cdot y + m \cdot t = 1 \iff \gcd(x, m) = 1.$ $\square$

► b) $\overline{x} \mid \overline{0} \implies \exists\, \overline{y} \in \mathbb{Z}_m : \begin{cases} \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{0}, \\ \overline{y} \neq \overline{0}, \end{cases} \implies \overline{x \cdot y} = \overline{0} \implies$

$x \cdot y \equiv 0 \pmod{m} \implies x \cdot y \,\vdots\, m.$

$\begin{cases} x \cdot y \,\vdots\, m, \\ \gcd(x, m) = 1, \end{cases} \implies y \,\vdots\, m \implies \begin{cases} \overline{y} = \overline{0}, \\ \overline{y} \neq \overline{0}, \end{cases} \implies \gcd(x, m) = d \neq 1.$

$\gcd(x, m) = d \neq 1 \implies \begin{cases} x = x_1 d, \\ m = m_1 d, \\ \gcd(x_1, m_1) = 1, \end{cases} \implies 1 \leqslant m_1 < m \implies \overline{m_1} \neq \overline{0} \implies$

$\overline{x} \cdot \overline{m_1} = \overline{x_1\, d} \cdot \overline{m_1} = \overline{x_1} \cdot \overline{d\, m_1} = \overline{x_1} \cdot \overline{m} = \overline{x_1} \cdot \overline{0} = \overline{0} \implies \overline{x} \mid \overline{0}.$ $\square$

10.11.A. Побудувати таблицю Келі мультиплікативної групи $\mathbb{Z}_m^*$ кільця $\mathbb{Z}_m$, якщо: a) $m = 5$, b) $m = 6$.

► a) $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\} \implies \mathbb{Z}_5^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\} \implies$

$(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\square$

► b) $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\} \implies \mathbb{Z}_6^* = \{\overline{1}, \overline{5}\} \implies$

$(\mathbb{Z}_6^*, \cdot)$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$

$\square$

10.12.A. Довести, що множина $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ відносно звичайних операцій додавання та множення утворює поле.

► $\{0, 1\} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ — поле $\implies$ можемо використати критерій підполя.

1) $a+b\sqrt{2},\ c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \quad\Longrightarrow\quad (a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}].$

2) $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \quad\Longrightarrow\quad -(a+b\sqrt{2})=(-a)+(-b)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}].$

3) $a+b\sqrt{2},\ c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \quad\Longrightarrow$

$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+dc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}].$

4) $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\setminus\{0\} \quad\Longrightarrow$

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}[\sqrt{2}],$$

при цьому $a^2-2b^2\neq 0$, бо інакше $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$. □

Практичне заняття №11. Векторні простори

11.1.А. Нехай M — непорожня множина, а $\mathfrak{B} = 2^M$ — її булеан. На множині $\mathfrak{B}$ визначено операції додавання $+$ та множення $\cdot$ на скаляри з поля $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ в наступний спосіб:

$$\forall A, B \in \mathfrak{B} \quad A + B = A \triangle B; \quad \forall A \in \mathfrak{B} \quad \overline{0} \cdot A = \varnothing,\ \overline{1} \cdot A = A.$$

Довести, що множина $\mathfrak{B}$ відносно введених операцій додавання та множення на скаляри з поля $\mathbb{Z}_2$ утворює векторний простір над полем $\mathbb{Z}_2$.
11.2.А. Перевірити, чи є векторним простором над полем $\mathbb{R}$: a) множина всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких дорівнює n, b) множина всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує n, відносно звичайних операцій додавання многочленів та множення многочленів на дійсне число.
11.3.А. Визначити, чи утворюють векторний простір над полем $\mathbb{R}$ такі множини векторів на декартовій площині відносно звичайних операцій додавання векторів і множення вектора на число: a) усі вектори, кінці яких лежать в першій чверті системи координат, b) усі вектори, кінці яких лежать в першій та третій чверті системи координат, c) усі вектори, кінці яких лежать на деякій прямій (усі вектори прикладені до початку координат точки O).
11.4.А. З ненульового векторного простору над полем $\mathbb{R}$ виключено: a) скінченну, b) нескінченну множину векторів. Чи може здобута після цього виключення множина векторів залишатись векторним простором?
11.5.А. Чи утворює векторний простір множина всіх векторів арифметичного векторного простору P^n, для яких a) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$?
11.6.А. З'ясувати, ЛЗ чи ЛНЗ є такі системи векторів: a) $\boldsymbol{a}_1 = (4; -5; 2; 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2; -2; 1; 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (6; -3; 3; 9)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4; -1; 5; 6)$, b) $\boldsymbol{a}_1 = (1; 0; 0; 5; 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0; 1; 0; 4; 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0; 0; 1; 7; 4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (2; -3; 4; 12; 11)$.
11.7.А. Нехай система векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ є ЛНЗ. З'ясувати, ЛЗ чи ЛНЗ є така система векторів: $\boldsymbol{b}_1 = 3\,\boldsymbol{a}_1 + 2\,\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{b}_2 = 2\,\boldsymbol{a}_1 + 5\,\boldsymbol{a}_2 + 3\,\boldsymbol{a}_3 + 2\,\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{b}_3 = 3\,\boldsymbol{a}_1 + 4\,\boldsymbol{a}_2 + 2\,\boldsymbol{a}_3 + 3\,\boldsymbol{a}_4$.
11.8.А. Знайти всі значення μ, при яких вектор $\boldsymbol{b}$ лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, якщо: a) $\boldsymbol{a}_1 = (2; 3; 5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3; 7; 8)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1; -6; 1)$, $\boldsymbol{b} = (7; -2; \mu)$, b) $\boldsymbol{a}_1 = (4; 4; 3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7; 2; 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4; 1; 6)$, $\boldsymbol{b} = (5; 9; \mu)$.
11.1.Д. На множині $\mathbb{R}^+$ додатних дійсних чисел визначено операцію додавання $\oplus$ та множення $\odot$ на скаляри з поля $\mathbb{R}$ в наступний спосіб:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad a \oplus b = a \cdot b; \quad \forall a \in \mathbb{R}^+\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \odot a = a^{\alpha}.$$

Довести, що множина $\mathbb{R}^+$ відносно введених операцій додавання $\oplus$ та множення $\odot$ на скаляри з поля $\mathbb{R}$ утворює векторний простір над полем $\mathbb{R}$.
11.2.Д. Перевірити, чи є векторним простором над полем $\mathbb{R}$: a) множина всіх розв'язків деякої сумісної СЛР $m \times n$ з дійсними коефіцієнтами, b) множина всіх розв'язків деякої СЛОР $m \times n$ з дійсними коефіцієнтами, відносно звичайних операцій додавання векторів та множення векторів на дійсне число, визначених в арифметичному векторному просторі $\mathbb{R}^n$.
11.3.Д. Перевірити, чи є векторним простором над полем $\mathbb{R}$: a) множина $C[a, b]$ усіх функцій $f(x)$, неперервних на відрізку $[a, b]$, з природно введеними операціями додавання функцій та множення їх на дійсне число, b) множина всіх розбіжних послідовностей дійсних чисел відносно звичайних операцій додавання та множення на дійсне число, c) множина всіх збіжних послідовностей дійсних чисел відносно звичайних операцій додавання та множення на дійсне число.
11.4.Д. Нехай W_3 — множина всіх геометричних векторів простору. Довести, що: a) нульовий вектор є ЛЗ, а один ненульовий вектор — ЛНЗ, b) два колінеарні вектори — ЛЗ, а два неколінеарні вектори — ЛНЗ, c) три компланарні вектори — ЛЗ, а три некомпланарні вектори — ЛНЗ, d) чотири вектори в просторі W_3 завжди є ЛЗ.

11.5.Д. З'ясувати, ЛЗ чи ЛНЗ є такі системи векторів: a) $a_1 = (1;2;3)$, $a_2 = (3;6;7)$, b) $a_1 = (4;-2;6)$, $a_2 = (6;-3;9)$, c) $a_1 = (2;-3;1)$, $a_2 = (3;-1;5)$, $a_3 = (1;-4;3)$, d) $a_1 = (5;4;3)$, $a_2 = (3;3;2)$, $a_3 = (8;1;3)$.
11.6.Д. Нехай система векторів a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 є ЛНЗ. З'ясувати, ЛЗ чи ЛНЗ є така система векторів: $b_1 = 3\,a_1 + 4\,a_2 - 5\,a_3 - 2\,a_4 + 4\,a_5$, $b_2 = 8\,a_1 + 7\,a_2 - 2\,a_3 + 5\,a_4 - 10\,a_5$, $b_3 = 2\,a_1 - a_2 + 8\,a_3 - a_4 + 2\,a_5$.
11.7.Д. Знайти всі значення μ, при яких вектор b лінійно виражається через вектори a_1, a_2, a_3, якщо: a) $a_1 = (3;4;2)$, $a_2 = (6;8;7)$, $a_3 = (15;20;11)$, $b = (9;12;\mu)$, b) $a_1 = (3;2;5)$, $a_2 = (2;4;7)$, $a_3 = (5;6;\mu)$, $b = (1;3;5)$, c) $a_1 = (3;2;6)$, $a_2 = (5;1;3)$, $a_3 = (7;3;9)$, $b = (\mu;2;5)$.
11.1.+. Чи може векторний простір L над деяким полем P складатися рівно з n векторів, якщо: a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$, d) $n = 4$?
11.2.+. Нехай система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ є ЛНЗ. З'ясувати, ЛЗ чи ЛНЗ є такі системи векторів: a) $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $b_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, b) $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + 2\,a_2$, $\ldots$, $b_k = a_1 + 2\,a_2 + \ldots + k\,a_k$, c) $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_2 + a_3$, $\ldots$, $b_{k-1} = a_{k-1} + a_k$, $b_k = a_k + a_1$, d) $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$, $\ldots$, $b_{k-1} = a_{k-1} - a_k$, $b_k = a_k - a_1$.
11.3.+. Нехай задано систему векторів $a_1 = (0;1;0;2;0)$, $a_2 = (7;4;1;8;3)$, $a_3 = (0;3;0;4;0)$, $a_4 = (1;9;5;7;1)$, $a_5 = (0;1;0;5;0)$. Для яких $k \in \mathbb{N}$ існують числа c_{ij} такі, що вектори $b_i = \sum\limits_{j=1}^{5} c_{ij} a_j$, де $j = \overline{1,k}$, є ЛНЗ.
11.4.+. Довести, що якщо система цілочисельних векторів ЛНЗ над полем $\mathbb{Z}_p$ для деякого $p \in \mathbb{P}$, то ця система векторів ЛНЗ й над полем $\mathbb{Q}$.
11.5.+. Для систем векторів: a) $a_1 = (0;1;1;1)$, $a_2 = (1;0;1;1)$, $a_3 = (1;1;0;1)$, $a_4 = (1;1;1;0)$, b) $a_1 = (1;0;1;1)$, $a_2 = (2;3;4;3)$, $a_3 = (1;3;1;1)$, вказати всі числа $p \in \mathbb{P}$, за модулем яких ці системи є ЛЗ.
11.6.+. Довести, що в просторі многочленів кожна скінченна система, яка складається з многочленів різних степенів і яка не містить нуля, є ЛНЗ.

11.1.A. Нехай M — непорожня множина, а $\mathfrak{B} = 2^M$ — її булеан. На множині $\mathfrak{B}$ визначено операції додавання $+$ та множення $\cdot$ на скаляри з поля $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ в наступний спосіб:

$$\forall A, B \in \mathfrak{B} \quad A + B = A \triangle B; \quad \forall A \in \mathfrak{B} \quad \overline{0} \cdot A = \emptyset,\ \overline{1} \cdot A = A.$$

Довести, що множина $\mathfrak{B}$ відносно введених операцій додавання та множення на скаляри з поля $\mathbb{Z}_2$ утворює векторний простір над полем $\mathbb{Z}_2$.

► Перевіримо аксіоми векторного простору.
1) $(\mathfrak{B}, +)$ — абелева група — задача 10.7.A(d);
2) замкненість множення на скаляр — за умовою задачі;
3) асоціативність множення на скаляр — $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$, $\forall A \in \mathfrak{B}$ $\ (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$:

$$\alpha = \overline{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (\alpha\beta)A = (\overline{0}\beta)A = \overline{0}A = \emptyset, \\ \alpha(\beta A) = \overline{0}(\beta A) = \emptyset, \end{cases}$$

$$\alpha = \overline{1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (\alpha\beta)A = (\overline{1}\beta)A = \beta A, \\ \alpha(\beta A) = \overline{1}(\beta A) = \beta A; \end{cases}$$

4) унітарність множення на скаляр — за умовою задачі;
5) дистрибутивність множення на скаляр відносно додавання елементів множини $\mathfrak{B}$ — $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_2$, $\forall A, B \in \mathfrak{B}$ $\ \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$:

$$\alpha = \overline{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha(A + B) = \overline{0}(A + B) = \emptyset, \\ \alpha A + \alpha B = \overline{0}A + \overline{0}B = \emptyset + \emptyset = \emptyset, \end{cases}$$

$$\alpha = \overline{1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha(A + B) = \overline{1}(A + B) = A + B, \\ \alpha A + \alpha B = \overline{1}A + \overline{1}B = A + B; \end{cases}$$

6) дистрибутивність множення на скаляр відносно додавання скалярів — $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$, $\forall A \in \mathfrak{B}$ $\ (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$:

$$\alpha = \beta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (\alpha + \beta)A = (\alpha + \alpha)A = \overline{0}A = \emptyset, \\ \alpha A + \beta A = (\alpha A) + (\alpha A) = \emptyset, \end{cases}$$

$$\alpha \neq \beta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (\alpha + \beta)A = \overline{1}A = A, \\ \alpha A + \beta A = A + \emptyset = \emptyset + A = A. \end{cases} \qquad \square$$

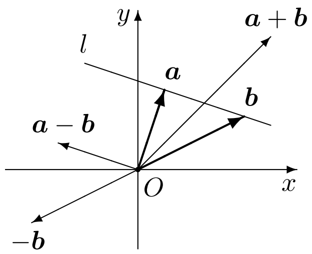
11.2.A. Перевірити, чи є векторним простором над полем $\mathbb{R}$: a) множина всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких дорівнює n, b) множина всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує n, відносно звичайних операцій додавання многочленів та множення многочленів на дійсне число.

► a) Ні, оскільки, наприклад, $(x^2 + x) + (-x^2 + x) = 2\,x$. b) Так. $\square$

11.3.A. Визначити, чи утворюють векторний простір над полем $\mathbb{R}$ такі множини векторів на декартовій площині відносно звичайних операцій додавання векторів і множення вектора на число: a) усі вектори, кінці яких лежать в першій чверті системи координат, b) усі вектори, кінці яких лежать в першій та третій чверті системи координат, c) усі вектори, кінці яких лежать на деякій прямій (усі вектори прикладені до початку координат точки O).

► Скористаємось критерієм підпростору.

№	V	$\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$	$\forall\, \boldsymbol{a} \in V$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\, \boldsymbol{a} \in V$	Висновок
a)	1-ша чверть	Так	Ні	
b)	1-ша та 3-тя чверті	Ні	Так	
c1)	пряма l, $O \notin l$	Ні	Ні	
c2)	пряма l, $O \in l$	Так	Так	Підпростір



□

11.4.A. З ненульового векторного простору над полем $\mathbb{R}$ виключено: a) скінченну, b) нескінченну множину векторів. Чи може здобута після цього виключення множина векторів залишатись векторним простором?

► a) Ні, не може, оскільки поле $\mathbb{R}$ нескінченне і для кожного виключеного вектора в просторі залишається деякий колінеарний до нього ненульовий вектор, що унеможливлює замкненість добутку вектора на скаляр.

b) Так, може. Наприклад, з площини вилучили всі вектори, які не лежать на деякій прямій (див. задачу 11.3.A(c2)). □

11.5.A. Чи утворює векторний простір множина всіх векторів арифметичного векторного простору P^n, для яких a) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$?

► a) $V = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}. \quad \Longrightarrow$

1) $\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_n+y_n) = (x_1+x_2+\ldots+x_n)+(y_1+y_2+\ldots+y_n) = 0+0 = 0 \quad \Longrightarrow$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$.

2) $\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V \ \ \forall\, \lambda \in P \qquad \lambda\, \boldsymbol{x} = \lambda\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n)$

$\lambda\, x_1 + \lambda\, x_2 + \ldots + \lambda\, x_n = \lambda\, (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda\, \boldsymbol{x} \in V.$

1) і 2) $\quad \Longrightarrow \quad V$ — підпростір P^n. □

▶ b) $V = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}. \quad \Longrightarrow$

1) $\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_n+y_n) = (x_1+x_2+\ldots+x_n)+(y_1+y_2+\ldots+y_n) = 1+1 \neq 1 \quad \Longrightarrow$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \notin V.$

2) $\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V \ \ \exists\, \lambda = 0 \in P \qquad \lambda\, \boldsymbol{x} = \lambda\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_n)$

$\lambda\, x_1 + \lambda\, x_2 + \ldots + \lambda\, x_n = \lambda\, (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \lambda \cdot 1 = 0 \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda\, \boldsymbol{x} \notin V.$

1) або 2) $\quad \Longrightarrow \quad V$ — не є підпростором P^n. □

11.6.А. З'ясувати, ЛЗ чи ЛНЗ є такі системи векторів: a) $\boldsymbol{a}_1 = (4; -5; 2; 6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2; -2; 1; 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (6; -3; 3; 9)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4; -1; 5; 6)$, b) $\boldsymbol{a}_1 = (1; 0; 0; 5; 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0; 1; 0; 4; 3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0; 0; 1; 7; 4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (2; -3; 4; 12; 11)$.

▶ Складемо ЛК векторів $\lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\, \boldsymbol{a}_3 + \lambda_4\, \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ (яка рівносильна деякій СЛОР). Якщо з ЛК випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ (тобто СЛОР є визначеною), то СВ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ є ЛНЗ; якщо ж існують $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, які не всі одночасно рівні нулю (тобто СЛОР є невизначеною), то СВ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ є ЛЗ. Таким чином, задача звелася до дослідження на визначеність/невизначеність СЛОР, векторним записом якої є ЛК СВ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$.

$$\text{a)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ -5 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 9 & 6 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-3/2) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ -5 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$r \leqslant m = 3 < 4 = n \quad \Longrightarrow \quad$ СЛОР є невизначеною, а отже, СВ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ є ЛЗ.

$$\text{b)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 12 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 11 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-5)\ (-2) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) (-4)\ (-3) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{array}\right) (-7)\ (-4) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$r = 4 = n \quad \Longrightarrow \quad$ СЛОР є визначеною, а отже, СВ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ є ЛНЗ. □

11.7.А. Нехай система векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ є ЛНЗ. З'ясувати, ЛЗ чи ЛНЗ є така система векторів: $\boldsymbol{b}_1 = 3\,\boldsymbol{a}_1 + 2\,\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{b}_2 = 2\,\boldsymbol{a}_1 + 5\,\boldsymbol{a}_2 + 3\,\boldsymbol{a}_3 + 2\,\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{b}_3 = 3\,\boldsymbol{a}_1 + 4\,\boldsymbol{a}_2 + 2\,\boldsymbol{a}_3 + 3\,\boldsymbol{a}_4$.

▶ Складемо ЛК СВ $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ та прирівняємо її до $\boldsymbol{0}$.

$$\lambda_1\,\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2+\lambda_3\,\boldsymbol{b}_3=$$

$$\begin{aligned}
&=\lambda_1\,(3\,\boldsymbol{a}_1+2\,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4)+\\
&+\lambda_2\,(2\,\boldsymbol{a}_1+5\,\boldsymbol{a}_2+3\,\boldsymbol{a}_3+2\,\boldsymbol{a}_4)+\\
&+\lambda_3\,(3\,\boldsymbol{a}_1+4\,\boldsymbol{a}_2+2\,\boldsymbol{a}_3+3\,\boldsymbol{a}_4)=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=(3\,\lambda_1+2\,\lambda_2+3\,\lambda_3)\,\boldsymbol{a}_1+\\
&+(2\,\lambda_1+5\,\lambda_2+4\,\lambda_3)\,\boldsymbol{a}_2+\\
&+(\lambda_1+3\,\lambda_2+2\,\lambda_3)\,\boldsymbol{a}_3+\\
&+(\lambda_1+2\,\lambda_2+3\,\lambda_3)\,\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Оскільки СВ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ є ЛНЗ, то з останнього співвідношення випливає, що

$$\begin{cases}3\,\lambda_1+2\,\lambda_2+3\,\lambda_3=0,\\ 2\,\lambda_1+5\,\lambda_2+4\,\lambda_3=0,\\ \lambda_1+3\,\lambda_2+2\,\lambda_3=0,\\ \lambda_1+2\,\lambda_2+3\,\lambda_3=0.\end{cases}\implies\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&3&0\\2&5&4&0\\1&3&2&0\\1&2&3&0\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ (-2)\;(-3)\;(-1)\\ \\ \end{matrix}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&-7&-3&0\\0&-1&0&0\\1&3&2&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \cdot(-1)\\ \\ (-2)\;(3)\end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&-10&0&0\\0&1&0&0\\1&5&0&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\begin{matrix}\\ (10)\;(-5)\\ \\ \\ \end{matrix}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\implies\begin{cases}\lambda_1=0,\\ \lambda_2=0,\\ \lambda_3=0.\end{cases}\implies\text{СВ }\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\text{ є ЛНЗ.}\qquad\square$$

11.8.А. Знайти всі значення μ, при яких вектор $\boldsymbol{b}$ лінійно виражається через вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, якщо: a) $\boldsymbol{a}_1=(2;3;5)$, $\boldsymbol{a}_2=(3;7;8)$, $\boldsymbol{a}_3=(1;-6;1)$, $\boldsymbol{b}=(7;-2;\mu)$, b) $\boldsymbol{a}_1=(4;4;3)$, $\boldsymbol{a}_2=(7;2;1)$, $\boldsymbol{a}_3=(4;1;6)$, $\boldsymbol{b}=(5;9;\mu)$.

► a) $\lambda_1\,\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\,\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\,\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}\implies\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3&\boldsymbol{b}\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&7\\3&7&-6&-2\\5&8&1&\mu\end{array}\right)\end{array}\begin{matrix}(6)\;(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\to$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&7\\15&25&0&40\\3&5&0&\mu-7\end{array}\right)\begin{matrix}\\ (-1/5)\\ \\ \end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&7\\15&25&0&40\\0&0&0&\mu-15\end{array}\right)\implies\mu=15.\qquad\square$$

► b) $\lambda_1\,\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\,\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\,\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}\implies\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3&\boldsymbol{b}\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}4&7&4&5\\4&2&1&9\\3&1&6&\mu\end{array}\right)\end{array}\begin{matrix}\\ (-4)\;(-6)\\ \\ \end{matrix}\to$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}-12&-1&0&-31\\4&2&1&9\\-21&-11&0&\mu-54\end{array}\right)\begin{matrix}(-11)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccc|c}-12&-1&0&-31\\4&2&1&9\\111&0&0&\mu+287\end{array}\right)\implies\mu\in\mathbb{R}.$$

$\square$

Практичне заняття №12. Базис системи векторів

12.1.А. Знайти довільний базис системи векторів і виразити через цей базис решту векторів системи, якщо: a) $\boldsymbol{a}_1 = (2;1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3;2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1;1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (2;3)$, b) $\boldsymbol{a}_1 = (2;-1;3;5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4;-3;1;3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3;-2;3;4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4;-1;15;17)$, $\boldsymbol{a}_5 = (7;-6;-7;0)$, c) $\boldsymbol{a}_1 = (1;2;3;-4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2;3;-4;1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2;-5;8;-3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (5;26;-9;-12)$, $\boldsymbol{a}_5 = (3;-4;1;2)$.
12.2.А. Знайти всі базиси системи векторів: a) $\boldsymbol{a}_1 = (1;2;0;0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1;2;3;4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3;6;0;0)$, b) $\boldsymbol{a}_1 = (1;2;3;4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2;3;4;5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3;4;5;6)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4;5;6;7)$.
12.3.А. В квадраті $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей. Знайти кількість N всіх (з точністю до порядку векторів у базисі) базисів СВ $\{\overrightarrow{XY} \mid X, Y \in \{A, B, C, D, O\}\}$.
12.4.А. Знайти який-небудь базис і розмірність векторного простору $(\mathfrak{B}, \mathbb{Z}_2)$, де $\mathfrak{B} = 2^M$ — булеан n-елементної множини M, $n \in \mathbb{N}$. З'ясувати, чи утворює підпростір цього простору множина всіх підмножин, що містять: a) парну кількість елементів, b) непарну кількість елементів.
12.5.А. Довести, що множина всіх розв'язків деякої СЛОР $m \times n$ з коефіцієнтами з поля P утворює підпростір в арифметичному векторному просторі P^n. Що буде утворювати базис цього підпростору і яка його розмірність?
12.6.А. Довести, що кожна з систем векторів $\boldsymbol{a}_1 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2,1,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,-1,-2)$ та $\boldsymbol{b}_1 = (2,1,-2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-2,1,-1)$ утворює базис. Знайти матрицю переходу між цими базисами і координати вектора $\boldsymbol{c} = (1,1,1)$ в кожному з них.
12.7.А. Як зміниться матриця переходу від одного базису до іншого, якщо до базисів застосувати деякі елементарні перетворення?
12.8.А. Знайти СЛОР, кожний вектор з множини розв'язків якої є ЛК векторів $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,3,2,3)$.
12.9.А. Перевірити, чи утворюють підпростори в арифметичному векторному просторі $\mathbb{R}^n$ такі системи векторів: a) усі вектори, в яких перша та остання координати рівні між собою, b) усі вектори, в кожного з яких координати з парними номерами рівні між собою. Якщо так, то знайти який-небудь базис та розмірність цих підпросторів.
12.1.Д. Знайти довільний базис системи векторів і виразити через цей базис решту векторів системи, якщо:

a) $a_1 = (5;2;-3;1)$, $a_2 = (4;1;-2;3)$, $a_3 = (1;1;-1;-2)$, $a_4 = (3;4;-1;2)$,
b) $a_1 = (2;3;-4;-1)$, $a_2 = (1;-2;1;3)$, $a_3 = (5;-3;-1;8)$, $a_4 = (3;8;-9;-5)$,
c) $a_1 = (4;3;-1;1;-1)$, $a_2 = (2;1;-3;2;-5)$, $a_3 = (1;-3;0;1;-2)$, $a_4 = (1;5;2;-2;6)$.
d) $a_1 = (2;3;5;-4;1)$, $a_2 = (1;-1;2;3;5)$, $a_3 = (3;7;8;-11;-3)$, $a_4 = (1;-1;1;-2;3)$,
e) $a_1 = (2;-1;3;4;-1)$, $a_2 = (1;2;-3;1;2)$, $a_3 = (5;-5;12;11;-5)$, $a_4 = (1;-3;6;3;-3)$.

12.2.Д. Знайти всі базиси системи векторів: a) $a_1 = (4;-1;3;-2)$, $a_2 = (8;-2;6;-4)$, $a_3 = (3;-1;4;-2)$, $a_4 = (6;-2;8;-4)$, b) $a_1 = (2;1;-3;1)$, $a_2 = (2;2;-6;2)$, $a_3 = (6;3;-9;3)$, $a_4 = (1;1;1;1)$, c) $a_1 = (3;2;3)$, $a_2 = (2;3;4)$, $a_3 = (3;2;3)$, $a_4 = (4;3;4)$, $a_5 = (1;1;1)$.
12.3.Д. В правильному шестикутнику $ABCDEF$ точка O — центр вписаного кола. Знайти всі базиси системи векторів $\{\overrightarrow{XY} \mid X, Y \in \{A, B, C, D, E, F, O\}\}$.
12.4.Д. У тетраедрі $ABCD$ точки K і L є серединами ребер AC і BD відповідно, а O — точка перетину медіан грані ACD. Знайти: a) координати вектора $\overrightarrow{BO}$ в базисі $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, b) координати вектора $\overrightarrow{KL}$ в базисі $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AC}$.
12.5.Д. Перевірити, чи утворюють підпростори в арифметичному векторному просторі $\mathbb{R}^n$ такі системи векторів: a) усі вектори, в кожного з яких координати з парними (непарними) номерами дорівнюють нулю, b) усі вектори, в кожного з яких усі координати рівні між собою, c) усі вектори, в кожного з яких кожна координата, починаючи з другої, відрізняється від попередньої на множник $k \in \mathbb{R}$ d) усі вектори, в кожного з яких кожна координата, починаючи з другої, дорівнює квадрату попередньої. Якщо так, то знайти який-небудь базис та розмірність цих підпросторів.
12.6.Д. Знайти СЛОР, кожний вектор з множини розв'язків якої є ЛК векторів $a_1 = (1,-1,1,-1,1)$, $a_2 = (1,1,0,0,3)$, $a_3 = (3,1,1,-1,7)$.

12.7.Д. Нехай $T = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ до базису $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$. Знайти матрицю переходу $T' = T_{\boldsymbol{a}'\to\boldsymbol{b}'}$ від базису $\boldsymbol{a}'$ до базису $\boldsymbol{b}'$, якщо:

a) $\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\quad \boldsymbol{b}' = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 - 2\boldsymbol{b}_1)$,

b) $\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\quad \boldsymbol{b}' = (\boldsymbol{b}_1, 3\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 - 2\boldsymbol{b}_1)$,

c) $\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\quad \boldsymbol{b}' = (3\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3 - 2\boldsymbol{b}_1)$,

d) $\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)$, $\quad \boldsymbol{b}' = (3\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3 - 2\boldsymbol{b}_1)$,

e) $\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a}_3, \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)$, $\quad \boldsymbol{b}' = (3\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3 - 2\boldsymbol{b}_1)$,

f) $\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_2, \frac{1}{3}\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)$, $\quad \boldsymbol{b}' = (3\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3 - 2\boldsymbol{b}_1)$.

12.8.Д. Довести, що кожна з систем векторів $a_1 = (1, -2, 3)$, $a_2 = (1, -1, 1)$, $a_3 = (2, 1, -1)$ та $b_1 = (2, 3, -2)$, $b_2 = (1, -1, 1)$, $b_3 = (-2, 1, -1)$ утворює базис. Знайти матрицю переходу між цими базисами і координати вектора $c = (1, 1, 1)$ в кожному з них.

12.1.+. Вершина D паралелограма $ABCD$ сполучена з точкою K, що лежить на стороні BC, такою, що $BK : KC = 2 : 3$. Вершина B сполучена з точкою L, що лежить на стороні CD, такою, що $CL : LD = 5 : 3$. В якому відношенні точка M перетину прямих DK і BL поділяє відрізки DK і BL?

12.2.+. Знайти який-небудь базис і розмірність підпростору всіх підмножин, які містять парну кількість елементів, векторного простору $(\mathfrak{B}, \mathbb{Z}_2)$, де $\mathfrak{B} = 2^M$ — булеан n-елементної множини M, $n \in \mathbb{N}$.

12.3.+. З'ясувати, чи утворюють рядки кожної з матриць A та B ФСР СЛОР

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 - 3\,x_5 = 0, \\ x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 + 6\,x_5 = 0, \\ 5\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 + 3\,x_4 - x_5 = 0, \end{cases} \quad \text{якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

12.1.A. Знайти довільний базис системи векторів і виразити через цей базис решту векторів системи, якщо: a) $\boldsymbol{a}_1 = (2;1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3;2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1;1)$, $\boldsymbol{a}_4 = (2;3)$, b) $\boldsymbol{a}_1 = (2;-1;3;5)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4;-3;1;3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3;-2;3;4)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4;-1;15;17)$, $\boldsymbol{a}_5 = (7;-6;-7;0)$, c) $\boldsymbol{a}_1 = (1;2;3;-4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2;3;-4;1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2;-5;8;-3)$, $\boldsymbol{a}_4 = (5;26;-9;-12)$, $\boldsymbol{a}_5 = (3;-4;1;2)$.

► a)
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ (-2) \end{matrix} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ (2) \ \cdot(-1) \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \\ \boldsymbol{a}_4 = -5\,\boldsymbol{a}_1 + 4\,\boldsymbol{a}_2. \end{cases}$$
□

► b)
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & 15 & -7 \\ 5 & 3 & 4 & 17 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ (2) \ (3) \ (5) \ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & -3 & 12 & -25 \\ 0 & -12 & -6 & 12 & -30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} (2) \ (-3) \ (-6) \ \cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ (-1/2) \ \cdot(-1/2) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & -5 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{a}_4 = 4\,\boldsymbol{a}_3 + 2\,\boldsymbol{a}_1 - 3\,\boldsymbol{a}_2, \\ \boldsymbol{a}_5 = -5\,\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1 + 5\,\boldsymbol{a}_2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \boldsymbol{a}_4 = 2\,\boldsymbol{a}_1 - 3\,\boldsymbol{a}_2 + 4\,\boldsymbol{a}_3, \\ \boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_1 + 5\,\boldsymbol{a}_2 - 5\,\boldsymbol{a}_3. \end{cases}$$
□

► c)
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4 \\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} (-2) \ (-3) \ (4) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -9 & 16 & -10 \\ 0 & -10 & 2 & -24 & -8 \\ 0 & 9 & 5 & 8 & 14 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ (2) \ (-10) \ (9) \ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 & 37 & -17 \\ 0 & 1 & 9 & -16 & 10 \\ 0 & 0 & 92 & 136 & 92 \\ 0 & 0 & -76 & 152 & -76 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \\ (23/19) \ (9/76) \ (-4/19) \ \cdot(-1/76) \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 320 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(1/320) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \\ (2) \ (-2) \ (-5) \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a}_5 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3. \qquad \square$$

12.2.A. Знайти всі базиси системи векторів: a) $\boldsymbol{a}_1 = (1; 2; 0; 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1; 2; 3; 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3; 6; 0; 0)$, b) $\boldsymbol{a}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2; 3; 4; 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3; 4; 5; 6)$, $\boldsymbol{a}_4 = (4; 5; 6; 7)$.

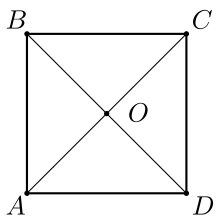
► a) Оскільки вектори $\boldsymbol{a}_1$ та $\boldsymbol{a}_2$ неколінеарні, а $\boldsymbol{a}_3 = 3\,\boldsymbol{a}_1$, то з точністю до порядку існує два базиси: $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ та $\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$. $\square$

► b) $$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (-1) \\ (-1) \\ (-1) \\ \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

В останній матриці лише два ненульових і до того ж непропорційних рядки, тому базис СВ складається з двох векторів. Другий рядок складається з самих одиниць, тому за перший вектор базису можна взяти будь-який з $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$. Оскільки перший рядок складається з ненульових елементів і кожні два стовпчики непропорційні, то за другий вектор базису можна взяти будь-який інший вектор, який не взяли за перший. Таким чином, кожні два вектори з СВ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ утворюють базис. Таких базисів з урахуванням порядку векторів у базисі буде $A_4^2 = 12$, а з точністю до порядку векторів у базисі — $C_4^2 = 6$. $\square$

12.3.A. В квадраті $ABCD$ точка O — точка перетину діагоналей. Знайти кількість N всіх (з точністю до порядку векторів у базисі) базисів СВ $\{\overrightarrow{XY} \mid X, Y \in \{A, B, C, D, O\}\}$.

►



Позначимо через $\mathfrak{M} = \{\overrightarrow{XY} \mid X, Y \in \{A, B, C, D, O\}\}$. Тоді $\#\mathfrak{M} = 25$.
На площині базис СВ складається всього з двох векторів.
$\#\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{M}\} = 25^2 = 625$.
На площині будь-які два неколінеарні вектори утворюють базис.

Напрямок	Вектори	Кількість векторів
$\vert$	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$	4
—	$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$	4
╱	$\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CO}$	6
╲	$\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DO}$	6

$N = \#\langle\,|,-\rangle\ +\ \#\langle\,|,\diagup\rangle\ +\ \#\langle\,|,\diagdown\rangle\ +\ \#\langle -,\diagup\rangle\ +\ \#\langle -,\diagdown\rangle\ +\ \#\langle\diagup,\diagdown\rangle =$

$= 4\cdot 4 + 4\cdot 6 + 4\cdot 6 + 4\cdot 6 + 4\cdot 6 + 6\cdot 6 = 148.$ $\square$

12.4.А. Знайти який-небудь базис і розмірність векторного простору $(\mathfrak{B},\mathbb{Z}_2)$, де $\mathfrak{B} = 2^M$ — булеан n-елементної множини M, $n\in\mathbb{N}$. З'ясувати, чи утворює підпростір цього простору множина всіх підмножин, що містять: a) парну кількість елементів, b) непарну кількість елементів.

► Зауважимо, що $A\cap B = \varnothing \implies A + B (= A \triangle B) = A\cup B$.
Нехай $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ і $A\subset M$. Кожному елементу $a\in M$ можна поставити у відповідність $\lambda\in\mathbb{Z}_2$ за правилом $\lambda = \begin{cases}\overline{1}, & \text{якщо } a\in A,\\ \overline{0}, & \text{якщо } a\notin A.\end{cases} \implies$

1) $\forall\, A\in\mathfrak{B}\quad \exists\,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{Z}_2\quad A = \lambda_1\{a_1\} + \lambda_2\{a_2\} + \ldots + \lambda_n\{a_n\}$,

2) $\lambda_1\{a_1\} + \lambda_2\{a_2\} + \ldots + \lambda_n\{a_n\} = \varnothing \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \overline{0}$.

Таким чином, множина всіх одноелементних підмножин множини M утворюють базис простору $(\mathfrak{B},\mathbb{Z}_2)$, при цьому $\dim_{\mathbb{Z}_2}\mathfrak{B} = \#M = n$. $\square$

► a) Нехай $\mathfrak{U} = \{A\subset M \mid \#A = 2\,k,\ k\in\mathbb{N}_0\}$. Тоді за критерієм підпростору

1) $A,B\in\mathfrak{U} \implies \#A = 2\,k,\ \#B = 2\,l,\ k,l\in\mathbb{N}_0 \implies \#(A+B) = \#(A\triangle B) =$

$= \#(A\cup B) - \#(A\cap B) = \#A + \#B - 2\cdot\#(A\cap B) = 2\,(k + l - \#(A\cap B)) \implies A + B\in\mathfrak{U}$,

2) $A\in\mathfrak{U} \implies \#A = 2\,k \implies \begin{cases}\#(\overline{1}A) = \#A = 2\,k,\\ \#(\overline{0}A) = \#\varnothing = 0,\end{cases} \implies \lambda\,A\in\mathfrak{U}$.

Таким чином, $\mathfrak{U}$ є підпростором векторного простору $(\mathfrak{B},\mathbb{Z}_2)$. $\square$

► b) Нехай $\mathfrak{V} = \{A\subset M \mid \#A = 2\,k+1,\ k\in\mathbb{N}_0\}$. Тоді за критерієм підпростору

1) $A,B\in\mathfrak{V} \implies \#A = 2\,k+1,\ \#B = 2\,l+1,\ k,l\in\mathbb{N}_0 \implies \#(A+B) = \#(A\triangle B) =$

$= \#(A\cup B) - \#(A\cap B) = \#A + \#B - 2\cdot\#(A\cap B) = 2\,(k + l + 1 - \#(A\cap B)) \implies A + B\notin\mathfrak{V}$,

2) $A\in\mathfrak{V} \implies \#A = 2\,k+1 \implies \begin{cases}\#(\overline{1}A) = \#A = 2\,k+1,\\ \#(\overline{0}A) = \#\varnothing = 0,\end{cases} \implies \overline{0}\,A\notin\mathfrak{V}$.

Таким чином, $\mathfrak{V}$ не є підпростором векторного простору $(\mathfrak{B},\mathbb{Z}_2)$. $\square$

12.5.А. Довести, що множина всіх розв'язків деякої СЛОР $m\times n$ з коефіцієнтами з поля P утворює підпростір в арифметичному векторному просторі P^n. Що буде утворювати базис цього підпростору і яка його розмірність?

► В розділі 1.9 «СЛОР» була доведена теорема:

Нехай T_0 — множина розв'язків деякої СЛОР S_0. Тоді:
1) $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2\in T_0 \implies \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2\in T_0$;
2) $\lambda\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{l}\in T_0 \implies \lambda\boldsymbol{l}\in T_0$.

За критерієм підпростору це твердження й означає, що множина T_0 всіх розв'язків деякої СЛОР $m \times n$ з коефіцієнтами з поля P утворює підпростір в арифметичному векторному просторі P^n. Базис цього підпростору утворює ФСР цієї СЛОР. $\square$

12.6.А. Довести, що кожна з систем векторів $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, -2)$ та $\boldsymbol{b}_1 = (2, 1, -2)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (-2, 1, -1)$ утворює базис. Знайти матрицю переходу між цими базисами і координати вектора $\boldsymbol{c} = (1, 1, 1)$ в кожному з них.

► Усі вектори належать векторному простору $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, тому для доведення того, що кожна з СВ утворює базис, достатньо показати, що ці СВ є ЛНЗ.

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \implies \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies$$

СЛОР є визначеною $\implies$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\implies$ СВ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ є ЛНЗ, а отже утворює базис.

$$\lambda_1 \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{b}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \implies \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies$$

СЛОР є визначеною $\implies$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\implies$ СВ $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ є ЛНЗ, а отже утворює базис.

Розглянемо базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, в якому задано координати всіх векторів. Тоді матриці

$$A = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array} \end{array} \quad \text{та} \quad B = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array} \end{array}$$

є матрицями переходу від базису $\boldsymbol{e}$ до базисів $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ відповідно.

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$[\boldsymbol{c}]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{e}} [\boldsymbol{c}]_{\boldsymbol{e}} = A^{-1} [\boldsymbol{c}]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$[\boldsymbol{c}]_{\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}} [\boldsymbol{c}]_{\boldsymbol{e}} = B^{-1} [\boldsymbol{c}]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & -4 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ -8 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

12.7.А. Як зміниться матриця переходу від одного базису до іншого, якщо до базисів застосувати деякі елементарні перетворення?

► $$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \tau_{11}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{21}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \tau_{n1}\boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{b}_2 = \tau_{12}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{22}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \tau_{n2}\boldsymbol{a}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{b}_n = \tau_{1n}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \tau_{nn}\boldsymbol{a}_n. \end{cases} \iff T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{a}_n \end{array} \end{array}$$

1ЕП $\quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) \to (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \tau_{21}\boldsymbol{a}_2 + \tau_{11}\boldsymbol{a}_1 + \dots + \tau_{n1}\boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{b}_2 = \tau_{22}\boldsymbol{a}_2 + \tau_{12}\boldsymbol{a}_1 + \dots + \tau_{n2}\boldsymbol{a}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{b}_n = \tau_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \tau_{1n}\boldsymbol{a}_1 + \dots + \tau_{nn}\boldsymbol{a}_n. \end{cases} \iff T_{\boldsymbol{a}'\to\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_n \end{matrix} \end{array}$$

2ЕП $\quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) \to (\lambda\,\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \dfrac{\tau_{11}}{\lambda}(\lambda\,\boldsymbol{a}_1) + \tau_{21}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{n1}\boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{b}_2 = \dfrac{\tau_{12}}{\lambda}(\lambda\,\boldsymbol{a}_1) + \tau_{22}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{n2}\boldsymbol{a}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{b}_n = \dfrac{\tau_{1n}}{\lambda}(\lambda\,\boldsymbol{a}_1) + \tau_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{nn}\boldsymbol{a}_n. \end{cases} \iff T_{\boldsymbol{a}'\to\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \frac{\tau_{11}}{\lambda} & \frac{\tau_{12}}{\lambda} & \dots & \frac{\tau_{1n}}{\lambda} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \lambda\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_n \end{matrix} \end{array}$$

3ЕП $\quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) \to (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 + \lambda\,\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = (\tau_{11} - \lambda\,\tau_{21})\boldsymbol{a}_1 + \tau_{21}(\boldsymbol{a}_2 + \lambda\,\boldsymbol{a}_1) + \dots + \tau_{n1}\boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{b}_2 = (\tau_{12} - \lambda\,\tau_{22})\boldsymbol{a}_1 + \tau_{22}(\boldsymbol{a}_2 + \lambda\,\boldsymbol{a}_1) + \dots + \tau_{n2}\boldsymbol{a}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{b}_n = (\tau_{1n} - \lambda\,\tau_{2n})\boldsymbol{a}_1 + \tau_{2n}(\boldsymbol{a}_2 + \lambda\,\boldsymbol{a}_1) + \dots + \tau_{nn}\boldsymbol{a}_n. \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad T_{\boldsymbol{a}'\to\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} (\tau_{11} - \lambda\,\tau_{21}) & (\tau_{12} - \lambda\,\tau_{22}) & \dots & (\tau_{1n} - \lambda\,\tau_{2n}) \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 + \lambda\,\boldsymbol{a}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_n \end{matrix} \end{array}$$

1ЕП $\quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n) \to (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_2 = \tau_{12}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{22}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{n2}\boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{b}_1 = \tau_{11}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{21}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{n1}\boldsymbol{a}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{b}_n = \tau_{1n}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{nn}\boldsymbol{a}_n. \end{cases} \iff T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}'} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \tau_{12} & \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{22} & \tau_{21} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n2} & \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_n \end{matrix} \end{array}$$

2ЕП $\quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n) \to (\lambda\,\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n)$

$$\begin{cases} \lambda\boldsymbol{b}_1 = \lambda\tau_{11}\boldsymbol{a}_1 + \lambda\tau_{21}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda\tau_{n1}\boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{b}_2 = \tau_{12}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{22}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{n2}\boldsymbol{a}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{b}_n = \tau_{1n}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{nn}\boldsymbol{a}_n. \end{cases} \iff T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}'} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \lambda\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \lambda\tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \lambda\tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{a}_n \end{matrix} \end{array}$$

3ЕП $\quad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n) \to (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 + \lambda\,\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \tau_{11}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{21}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{n1}\boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{b}_2 + \lambda\boldsymbol{b}_1 = (\tau_{12} + \lambda\tau_{11})\boldsymbol{a}_1 + (\tau_{22} + \lambda\tau_{21})\boldsymbol{a}_2 + \dots + (\tau_{n2} + \lambda\tau_{n1})\boldsymbol{a}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{b}_n = \tau_{1n}\boldsymbol{a}_1 + \tau_{2n}\boldsymbol{a}_2 + \dots + \tau_{nn}\boldsymbol{a}_n. \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2+\lambda\boldsymbol{b}_1 & \ldots & \boldsymbol{b}_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12}+\lambda\tau_{11} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22}+\lambda\tau_{21} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2}+\lambda\tau_{n1} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \ldots \\ \boldsymbol{a}_n \end{array} \end{array} \qquad \square$$

12.8.А. Знайти СЛОР, кожний вектор з множини розв'язків якої є ЛК векторів $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,3,2,3)$.

► Нехай $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$ — деяке рівняння шуканої СЛОР. Оскільки вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ є розв'язками шуканої СЛОР, то вони задовільняють й будь-яке її рівняння. Таким чином, отримуємо СЛОР відносно невідомих коефіцієнтів b_1, b_2, b_3, b_4 деякого рівняння шуканої СЛОР.

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0, \\ b_1 + b_3 = 0, \\ 2\,b_1 + 3\,b_2 + 2\,b_3 + 3\,b_4 = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_3 = -b_1, \\ b_4 = -b_2, \\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \text{ФСР:} \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{f}_1 = (1,0,-1,0), \\ \boldsymbol{f}_2 = (0,1,0,-1). \end{array}$$

Таким чином, шукана СЛОР $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$ $\square$

12.9.А. Перевірити, чи утворюють підпростори в арифметичному векторному просторі $\mathbb{R}^n$ такі системи векторів: a) усі вектори, в яких перша та остання координати рівні між собою, b) усі вектори, в кожного з яких координати з парними номерами рівні між собою. Якщо так, то знайти який-небудь базис та розмірність цих підпросторів.

► a) $V = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n\}$.

1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_n, \quad y_1 = y_n \quad \Longrightarrow \quad x_1 + y_1 = x_n + y_n \quad \Longrightarrow$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in V$,

2) $\boldsymbol{x} \in V, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_n \quad \Longrightarrow \quad \lambda\, x_1 = \lambda\, x_n \quad \Longrightarrow$

$\lambda\, \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \in V$.

1) та 2) $\Longrightarrow$ V — підпростір в арифметичному векторному просторі $\mathbb{R}^n$.

$\forall\, \boldsymbol{x} \in V \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_1) =$

$= x_1\,(1,0,\ldots,0,1) + x_2\,(0,1,\ldots,0,0) + \ldots + x_{n-1}\,(0,0,\ldots,1,0) \quad \Longrightarrow \quad \dim V = n-1.$ $\square$

► b) $V = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = x_4 = \ldots = x_{2\,[n/2]}\}$.

1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \quad \Longrightarrow \quad x_2 = x_4 = \ldots = x_{2\,[n/2]}, \quad y_2 = y_4 = \ldots = y_{2\,[n/2]} \quad \Longrightarrow$

$x_2 + y_2 = x_4 + y_4 = \ldots = x_{2\,[n/2]} + y_{2\,[n/2]} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in V$,

2) $\boldsymbol{x} \in V, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = x_4 = \ldots = x_{2\,[n/2]} \quad \Longrightarrow \quad \lambda\, x_2 = \lambda\, x_4 = \ldots = \lambda\, x_{2\,[n/2]} \quad \Longrightarrow$

$\lambda\, \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \in V$.

1) та 2) $\implies$ V — підпростір в арифметичному векторному просторі $\mathbb{R}^n$.

$n = 2\,k \implies \forall\, \boldsymbol{x} \in V \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots, x_{n-1}, x_n) =$

$= (x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (x_1, x_2, x_3, x_2 \ldots, x_{2k-1}, x_2) =$

$= x_1\,(1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0) + x_2\,(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1) + x_3\,(0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 0) +$

$+ \ldots + x_{2k-1}\,(0, 0, 0, 0, \ldots, 1, 0) \implies \dim V = k + 1.$

$n = 2\,k + 1 \implies \forall\, \boldsymbol{x} \in V \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots, x_{n-1}, x_n) =$

$= (x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots, x_{2k}, x_{2k+1}) = (x_1, x_2, x_3, x_2 \ldots, x_2, x_{2k+1}) =$

$= x_1\,(1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0) + x_2\,(0, 1, 0, 1, \ldots, 1, 0) + x_3\,(0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 0) +$

$+ \ldots + x_{2k+1}\,(0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \implies \dim V = k + 2.$ $\square$

Практичне заняття №13. Підпростори. Ранг матриці

13.1.А. Знайти розмірності, базис перетину $U \cap V$ (двома способами) та базиси підпросторів U, V та $U+V$ простору L, які включали б базис перетину, якщо:
$U = \langle \boldsymbol{u}_1 = (1,1,0,0), \boldsymbol{u}_2 = (0,1,1,0), \boldsymbol{u}_3 = (0,0,1,1), \boldsymbol{u}_4 = (1,0,0,1)\rangle$,
$V = \langle \boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,2,1,1), \boldsymbol{v}_3 = (1,2,1,2)\rangle$.

13.2.А. Довести, що для довільного підпростору U скінченновимірного векторного простору L існує підпростір V такий, що $L = U \oplus V$.

13.3.А. Довести, що арифметичний векторний простір P^n є прямою сумою своїх підпросторів U та V, де U — підпростір всіх векторів, сума координат кожного з яких дорівнює нулю, а V — підпростір усіх векторів, у кожного з яких усі координати рівні між собою.

13.4.А. Нехай $U = \langle (2,3,11,5), (1,1,5,2), (0,1,1,1)\rangle$, $V = \langle (2,1,3,2), (1,1,3,4), (5,2,6,2)\rangle$. Довести, що $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, та знайти проекцію вектора $(2,0,0,3)$ на кожен з цих підпросторів паралельно іншому підпростору.

13.5.А. Знайти ранги матриць:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 12 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

13.6.А. Знайти ранги матриць при різних значеннях параметра λ:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

13.7.А. Дослідити СЛР на сумісність та визначеність при різних значеннях параметра λ.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

13.8.А. Зобразити матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ у вигляді добутку елементарних матриць.

13.9.А. Розв'язати рівняння $AX = B$ та $YA = B$, якщо:

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.1.Д. Знайти розмірності, базис перетину $U \cap V$ (двома способами) та базиси підпросторів U, V та $U+V$ простору L, які включали б базис перетину, якщо:
a) $U = \langle u_1 = (1,1,1,1,1), u_2 = (1,-1,1,-1,1), u_3 = (2,1,-1,1,2)\rangle$,
$V = \langle v_1 = (-1,2,1,1,0), v_2 = (1,0,4,0,1)\rangle$,
b) $U = \langle u_1 = (-1,6,4,7,-2), u_2 = (-2,3,0,5,-2), u_3 = (-3,6,5,6,-5)\rangle$,
$V = \langle v_1 = (1,1,2,1,-1), v_2 = (0,2,0,1,5), v_3 = (2,0,2,1,-3)\rangle$.

13.2.Д. Довести, що дійсний простір $M_n(\mathbb{R})$ усіх квадратних матриць порядку n з дійсними елементами можна зобразити у вигляді прямої суми векторного простору $\mathcal{S}$ всіх симетричних і векторного простору $\mathcal{K}$ всіх кососиметричних матриць.

13.3.Д. Нехай $U = \langle(-1,-2,0,1), (1,1,1,1)\rangle$, $V = \langle(2,2,0,1), (1,1,-1,1)\rangle$. Довести, що $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, та знайти проекцію вектора $(4,2,4,4)$ на кожен з цих підпросторів паралельно іншому підпростору.

13.4.Д. Знайти ранги матриць:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 8 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13.5.Д. Знайти ранги матриць при різних значеннях параметра λ:

a) $\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

13.6.Д. Дослідити СЛР на сумісність та визначеність при різних значеннях параметра λ.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & 2\lambda \\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3 & 5 \end{array}\right)$$

13.7.Д. Зобразити матрицю: a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ у вигляді добутку елементарних матриць.

13.8.Д. Розв'язати рівняння $AX = B$ та $YA = B$, якщо:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

13.1.+. Нехай U та V — підпростори простору L. Довести такі твердження:

a) якщо $\dim U + \dim V > \dim L$, то $U \cap V \neq \{0\}$,

b) якщо $\dim(U+V) = \dim(U \cap V)$, то $U = V$,

c) якщо $\dim(U+V) = \dim(U \cap V) + 1$, то один з підпросторів U або V міститься в іншому.

13.2.+. Нехай $L = M_n(\mathbb{R})$, а U_1, U_2, U_3 та U_4 — підпростори відповідно симетричних, кососиметричних, верхніх трикутних, нижніх трикутних матриць. Для кожної пари U_i, U_j, $i \neq j$, цих підпросторів описати їх перетин $U_i \cap U_j$ та суму $U_i + U_j$.

13.3.+. Довести, що $r(A|B) \leqslant r(A) + r(B)$.

13.4.+. Довести, що $r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$.

13.5.+. Довести, що $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$.

13.1.А. Знайти розмірності, базис перетину $U \cap V$ (двома способами) та базиси підпросторів U, V та $U+V$ простору L, які включали б базис перетину, якщо:
$U = \langle \boldsymbol{u}_1 = (1,1,0,0), \boldsymbol{u}_2 = (0,1,1,0), \boldsymbol{u}_3 = (0,0,1,1), \boldsymbol{u}_4 = (1,0,0,1) \rangle$,
$V = \langle \boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,2,1,1), \boldsymbol{v}_3 = (1,2,1,2) \rangle$.

► Спочатку знайдемо базиси та розмірності підпросторів U, V та $U+V$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \\ \end{array} \end{array} \Longrightarrow$$

$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) \in \mathcal{B}(U), \quad \dim U = 3.$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} (-1)\ (-2) \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \end{array} \end{array} \Longrightarrow$$

$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \in \mathcal{B}(V), \quad \dim V = 3.$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & \boxed{2} \end{pmatrix} \end{array} \cdot(1/2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{array} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_3) \in \mathcal{B}(U+V), \quad \dim(U+V) = 4.$$

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \quad \Longrightarrow \quad \dim(U \cap V) = 2.$$

Знайдемо базис перетину $U \cap V$ двома способами.

1-й спосіб. $\boldsymbol{x} \in U \cap V \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x} \in U, \\ \boldsymbol{x} \in V. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{x} = -\mu_1 \boldsymbol{v}_1 - \mu_2 \boldsymbol{v}_2 - \mu_3 \boldsymbol{v}_3. \end{cases} \quad \Longrightarrow$

$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3 + \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2 + \mu_3 \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2\,\mu_1 + \mu_2, \\ \lambda_2 = -\mu_2, \\ \lambda_3 = -2\,\mu_1 + \mu_2, \\ \mu_3 = \mu_1 - \mu_2, \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР:} \begin{array}{l} \qquad\ \ \lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \lambda_3\ \ \ \mu_1\ \ \ \mu_2\ \ \ \mu_3 \\ \boldsymbol{f}_1 = (2,\ 0,\ 2,\ -1,\ 0,\ -1), \\ \boldsymbol{f}_2 = (-1, 1, -1,\ 0,\ -1,\ 1). \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = 2 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = -(-1) \cdot \boldsymbol{v}_1 - 0 \cdot \boldsymbol{v}_2 - (-1) \cdot \boldsymbol{v}_3 = (2, 2, 2, 2), \\ \boldsymbol{a}_2 = (-1) \cdot \boldsymbol{u}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + (-1) \cdot \boldsymbol{u}_3 = -0 \cdot \boldsymbol{v}_1 - (-1) \cdot \boldsymbol{v}_2 - 1 \cdot \boldsymbol{v}_3 = (-1, 0, 0, -1), \end{cases}$$

$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \in \mathcal{B}(U \cap V)$.

2-й спосіб. Знайдемо СЛОР S_u та S_v, множинами розв'язків яких є підпростори U та V відповідно (див. задачу 12.8.А). Тоді перетин $U \cap V$ є множиною розв'язків СЛОР $\begin{cases} S_u, \\ S_v. \end{cases}$ ФСР цієї СЛОР і буде базисом підпростору $U \cap V$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \quad (-1) \\ (-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = -a_4, \\ a_2 = a_4, \\ a_3 = -a_4, \\ a_4 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ФСР $\boldsymbol{f}_u = (-1, 1, -1, 1) \quad \Longrightarrow \quad U\colon \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1) \\ \\ \qquad \cdot(1/2) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = -a_3, \\ a_2 = -a_3, \\ a_4 = a_3, \\ a_3 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ФСР $\boldsymbol{f}_v = (-1, -1, 1, 1) \quad \Longrightarrow \quad V\colon \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad U \cap V\colon \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = x_3, \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ФСР: $\begin{array}{l} \boldsymbol{b}_1 = (0, 1, 1, 0), \\ \boldsymbol{b}_2 = (1, 0, 0, 1), \end{array} \qquad (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \in \mathcal{B}(U \cap V)$.

Зауваження. Базиси $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ та $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ є різними, проте вони є еквівалентними. Дійсно,

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \dfrac{1}{2}\,\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \\ \boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{a}_2, \end{cases} \qquad \text{та} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = 2\,\boldsymbol{b}_1 + 2\,\boldsymbol{b}_2, \\ \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{b}_2. \end{cases}$$

Знайдемо базис підпростору U, який містить базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ перетину $U \cap V$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{u}_3 \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{u}_3) \in \mathcal{B}(U)$.

Аналогічно шукаємо базис підпростору V, який містить базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ перетину $U \cap V$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \end{array} \Longrightarrow$$

$(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_1) \in \mathcal{B}(V)$.

Базис підпростору $U + V$, який містить базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ перетину $U \cap V$:

$(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1) \in \mathcal{B}(U + V)$. □

13.2.A. Довести, що для довільного підпростору U скінченновимірного векторного простору L існує підпростір V такий, що $L = U \oplus V$.

► Нехай $\dim L = n$, $\dim U = s = n - k$ і $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s) \in \mathcal{B}(U)$. Доповнимо ЛНЗ СВ $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s)$ векторами $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ до базису простору L. Тоді підпростір $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ буде шуканим. □

13.3.A. Довести, що арифметичний векторний простір P^n є прямою сумою своїх підпросторів U та V, де U — підпростір всіх векторів, сума координат кожного з яких дорівнює нулю, а V — підпростір усіх векторів, у кожного з яких усі координати рівні між собою.

► $U = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$,

$V = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$

$$P^n = U \oplus V \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} P^n = U + V, \\ U \cap V = \{\mathbf{0}\}, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} P^n \subset U + V, \\ U \cap V \subset \{\mathbf{0}\}. \end{cases}$$

1) $\forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P^n$

$\boldsymbol{x} = (x_1 - \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, x_2 - \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \dots, x_n - \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}) +$

$+(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \dots, \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}) \in U+V \quad \Longrightarrow \quad P^n \subset U+V$

2) $\boldsymbol{x} \in U \cap V \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x} \in U, \\ \boldsymbol{x} \in V, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0, \\ x_1 = x_2 = \ldots = x_n, \end{cases} \quad \Longrightarrow$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad U \cap V \subset \{\boldsymbol{0}\}.$ $\square$

13.4.A. Нехай $U = \langle (2,3,11,5), (1,1,5,2), (0,1,1,1) \rangle$, $V = \langle (2,1,3,2), (1,1,3,4), (5,2,6,2) \rangle$. Довести, що $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, та знайти проекцію вектора $(2,0,0,3)$ на кожен з цих підпросторів паралельно іншому підпростору.

► Знайдемо розмірності підпросторів U, V та $U+V$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \boxed{1} \\ 11 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & 1 & \boxed{1} \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} (-1)\ (-4) \to \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \Longrightarrow$$

$(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) \in \mathcal{B}(U) \quad \Longrightarrow \quad \dim U = 2.$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ \boxed{1} & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} (-2)\ (-3) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} (2)\ \cdot(-1) \to$$

$$\to \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in \mathcal{B}(V) \quad \Longrightarrow \quad \dim V = 2.$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} (-1) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} (-1)\ (-4) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 \end{pmatrix} \end{array} (-6)\ (-1)\ (2)\ \cdot(-1) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{pmatrix} \end{array} \cdot(-1/14) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{pmatrix} \end{array} (2)\ (-5) \to \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{array} \end{array} \Longrightarrow$$

$(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in \mathcal{B}(U+V) \quad \Longrightarrow \quad \dim(U+V) = 4 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{R}^4 = U + V.$

$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \quad \Longrightarrow \quad \dim(U \cap V) = 0 \quad \Longrightarrow \quad U \cap V = \{\boldsymbol{0}\}.$

Отже, $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Знайдемо координати $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ вектора $\boldsymbol{c} = (2,0,0,3)$ в базисі $(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$.

$$\alpha\,\boldsymbol{u}_2 + \beta\,\boldsymbol{u}_3 + \gamma\,\boldsymbol{v}_1 + \delta\,\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{c} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{c} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \end{array} \; (-1) \; \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \; (-1) \; (-4) \; \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \; (-6) \; (-1) \; (2) \; \cdot(-1) \quad \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \; \cdot(-1/14) \; \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \; (2) \; (-5) \; \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = -1, \\ \gamma = 1, \\ \delta = 1, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2.$$

$\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 = (-1,-2,-6,-3), \qquad \mathrm{pr}_V\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (3,2,6,6).$ $\square$

13.5.А. Знайти ранги матриць:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 12 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

► a)

$$\begin{array}{c} (-3) \\ (-5) \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ \boxed{1} & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & -39 & -26 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & \boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \; (2) \; (13) \; \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \boxed{2} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \quad r(A) = 2.$ □

► b)

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & \boxed{2} & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1)\quad(-2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & \boxed{2} & 4 & 1 & 3 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad r(A) = 3.$$ □

► c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & \boxed{-1} & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 12 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (2)\quad(4)\quad(-4) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & \boxed{-1} & 3 \\ 8 & 6 & 17 & 0 & 8 \\ 18 & 13 & 32 & 0 & 19 \\ 10 & 7 & 15 & 0 & 8 \\ -10 & -7 & -15 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (-2)\quad(-1) \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{-2} & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 10 & 7 & 15 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1)\quad(5) \\ \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{-2} & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 25 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 25 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ \boxed{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad r(A) = 4.$$ □

13.6.A. Знайти ранги матриць при різних значеннях параметра λ:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

► a)

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad r(A) = 2.$$

$$\lambda = 2 \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad r(A) = 3.$$

$$\lambda = 3 \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad r(A) = 3.$$

$$\lambda \notin \{1,2,3\} \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{array}{c} \cdot\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) \ \cdot\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) \ \cdot\left(\frac{1}{2-\lambda}\right) \\ \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \end{array} \cdot\left(\frac{1}{3-\lambda}\right) \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad r(A) = 4.$$ □

► b)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (-1) \ (-2) \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = \pm 1$ або $\lambda = \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad r(A) = 3.$

$\lambda \notin \{\pm 1, \pm 2\} \quad \Longrightarrow \quad r(A) = 4.$ □

13.7.A. Дослідити СЛР на сумісність та визначеність при різних значеннях параметра λ.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

► $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ (-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right).$

1-й випадок. $\quad \lambda = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow$

$r(A) = r(\overline{A}) = 3 < n = 4 \quad \Longrightarrow \quad$ СЛР сумісна і невизначена.

2-й випадок. $\quad \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow$

$r(A) = 2 < r(\overline{A}) = 3 \quad \Longrightarrow \quad$ СЛР є несумісною.

3-й випадок. $\quad \lambda \neq 1$ і $\lambda \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(\frac{1}{\lambda-1}) \\ \cdot(\frac{1}{\lambda}) \\ \cdot(\frac{1}{\lambda}) \\ \end{array} \to$

$\to \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{2}{\lambda} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{3}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad r(A) = r(\overline{A}) = n = 4 \quad \Longrightarrow$

СЛР сумісна і визначена. □

13.8.А. Зобразити матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ у вигляді добутку елементарних матриць.

► $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ матриця A розкладається в добуток елементарних матриць.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (-1) \\ \longleftarrow \end{array} \xrightarrow{\varphi_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot(1/2) \xrightarrow{\varphi_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \xrightarrow{\varphi_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (-3) \\ \longleftarrow \end{array} \xrightarrow{\varphi_4}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ (-1) \end{array} \xrightarrow{\varphi_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Знайдемо елементарні матриці, які відповідають оберненим ЕПр в послідовності перетворень матриці A на одиничну.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = E_1^{-1}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot(2) \xrightarrow{\varphi_2^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = E_2^{-1},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi_3^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_3^{-1}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (3) \\ \longleftarrow \end{array} \xrightarrow{\varphi_4^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = E_4^{-1},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi_5^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_5^{-1}. \qquad \Longrightarrow \quad \text{Шуканий розклад:}$$

$$A = E_1^{-1}\, E_2^{-1}\, E_3^{-1}\, E_4^{-1}\, E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Оскільки може бути декілька послідовностей ЕПр, які перетворюють матрицю A на одиничну, то відповідь є неоднозначною і необхідно виконувати перевірку.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = A. \qquad \square$$

13.9.А. Розв'язати рівняння $AX = B$ та $YA = B$, якщо:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

► a) $\det A = -1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ рівняння $AX = B$ та $YA = B$ мають єдиний розв'язок.

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (2)\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) = \left(E \mid A^{-1}B\right) \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\frac{A}{B}\right) = \begin{array}{cc} (-2) & \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ \hline 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \cdot(-1) \end{array}\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ \hline 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{array}\right) = \left(\frac{E}{BA^{-1}}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

► b) $\det A = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ рівняння $AX = B$ та $YA = B$ мають єдиний розв'язок.

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-2)\ (2) \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 5 & 8 & -19 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 & 17 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (2)\ (-4) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 21 & 32 & -87 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & -15 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 & 17 \end{array}\right) = \left(E \mid A^{-1}B\right) \quad \Longrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 21 & 32 & -87 \\ -10 & -15 & 42 \\ -4 & -6 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (-2) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ \hline 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & (2) & \\ & (-2) & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ \hline 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & (-4) \\ & & (2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 13 & -6 & -3 \\ -18 & 9 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \hline BA^{-1} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} 13 & -6 & -3 \\ -18 & 9 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Практичне заняття №14. Комплексні числа

14.1.А. Розв'язати СЛР: $\begin{cases}(1-i)z_1+(2+i)z_2=7,\\(3-2i)z_1+(1+2i)z_2=9+4i.\end{cases}$

14.2.А. Розв'язати рівняння:
a) $(2+i)z^2-(1+3i)z+(9+12i)=0$, b) $(2-i)z^2-(1-3i)z+(9-12i)=0$.

14.3.А. Знайти всі комплексні числа, спряжені та обернені до яких рівні між собою.

14.4.А. Обчислити: 1) z^{12}, 2) $\sqrt[3]{z}$, 3) $\sqrt[4]{z}$, 4) $\exp z$, 5) $\ln z$, якщо:
a) $z=i$, b) $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$, c) $z=2+\sqrt{3}+i$.

14.5.А. Подати $\sin 3\varphi$ та $\cos 3\varphi$ у вигляді многочленів від $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$.

14.6.А. Виразити $\sin^3\varphi$ через перші степені синусів та косинусів аргументів, кратних куту φ.

14.7.А. Зобразити на комплексній площині точки z, для яких: a) $|z-1+i|=2$, b) $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$, c) $-1<\operatorname{Re} i\overline{z}\leqslant 1$, d) $|z-1|+|z+1|=3$.

14.8.А. Знайти первісні корені 6-го степеня з одиниці, їх суму, добуток та многочлен, коренями якого є вони й лише вони.

14.1.Д. Розв'язати СЛР: $\begin{cases}(1+2i)z_1+(4+i)z_2=5+10i,\\(3-i)z_1+(1+i)z_2=1+i.\end{cases}$

14.2.Д. Розв'язати рівняння:
a) $(-1+i)z^2+(5-9i)z+(-12+14i)=0$, b) $(1+i)z^2-(5+9i)z+(12+14i)=0$.

14.3.Д. Знайти всі комплексні числа, які спряжені до свого квадрата.

14.4.Д. Обчислити: 1) z^{12}, 2) $\sqrt[3]{z}$, 3) $\sqrt[4]{z}$, 4) $\exp z$, 5) $\ln z$, якщо:
a) $z=\sqrt{3}-i$, b) $z=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{1-i}$, c) $z=1-(2+\sqrt{3})i$.

14.5.Д. Подати $\sin 4\varphi$ та $\cos 4\varphi$ у вигляді многочленів від $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$.

14.6.Д. Виразити $\sin^5\varphi$ та $\cos^5\varphi$ через перші степені синусів та косинусів аргументів, кратних куту φ.

14.7.Д. Зобразити на комплексній площині точки z, для яких: a) $1\leqslant|z-2i|<2$, b) $|\arg z|\leqslant\dfrac{\pi}{6}$, c) $|\operatorname{Re} i\overline{z}+\operatorname{Im}\overline{iz}|\leqslant 1$, d) $|z+2|-|z-2|=3$, e) $|z-2|=\operatorname{Re} z+2$.

14.8.Д. Знайти первісні корені: a) 5-го, b) 8-го, c) 12-го степеня з одиниці, їх суму, добуток та многочлен, коренями якого є вони й лише вони.

14.1.+. Виразити $\operatorname{tg} 4\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi$.

14.2.+. Довести, що: a) якщо $|z|<1$, то $|z^2-z+i|<3$, b) якщо $|z|\leqslant 2$, то $1\leqslant|z^2-5|\leqslant 9$.

14.3.+. Зобразити на комплексній площині точки $z=\dfrac{1+ti}{1-ti}$, де $t\in\mathbb{R}$.

14.4.+. Знайти суму та добуток всіх та всіх первісних коренів n-го степеня з одиниці.

14.5.+. Обчислити:
a) $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots$, b) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots$,
c) $1+C_n^4+C_n^8+\ldots$, d) $C_n^1+C_n^5+C_n^9+\ldots$,
e) $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi$, f) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi$,
g) $1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\ldots+n\varepsilon^{n-1}$, де ε — корінь n-го степеня з одиниці.

14.6.+. Обчислити i^i.

14.1.А. Розв'язати СЛР: $\begin{cases}(1-i)z_1+(2+i)z_2=7,\\(3-2i)z_1+(1+2i)z_2=9+4i.\end{cases}$

$$\blacktriangleright\quad \left(\begin{array}{cc|c}1-i & 2+i & 7\\ 3-2i & 1+2i & 9+4i\end{array}\right) \quad\Longrightarrow\quad \Delta=\begin{vmatrix}1-i & 2+i\\ 3-2i & 1+2i\end{vmatrix}=(1-i)(1+2i)-(3-2i)(2+i)=$$

$$=(1+2i-i-2i^2)-(6+3i-4i-2i^2)=(3+i)-(8-i)=-5+2i\neq 0.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}7 & 2+i\\ 9+4i & 1+2i\end{vmatrix}=7(1+2i)-(9+4i)(2+i)=$$

$$=(7+14i)-(18+9i+8i+4i^2)=(7+14i)-(14+17i)=-7-3i.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1-i & 7\\ 3-2i & 9+4i\end{vmatrix}=(1-i)(9+4i)-(3-2i)7=$$

$$=(9+4i-9i-4i^2)-(21-14i)=(13-5i)-(21-14i)=-8+9i.$$

$$z_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7-3i}{-5+2i}=\frac{(-7-3i)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)}=\frac{35+14i+15i+6i^2}{(-5)^2-(2i)^2}=\frac{29+29i}{25+4}=1+i.$$

$$z_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-8+9i}{-5+2i}=\frac{(-8+9i)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)}=\frac{40+16i-45i-18i^2}{(-5)^2-(2i)^2}=\frac{58-29i}{25+4}=2-i. \qquad\square$$

14.2.А. Розв'язати рівняння:

a) $(2+i)z^2-(1+3i)z+(9+12i)=0,$ b) $(2-i)z^2-(1-3i)z+(9-12i)=0.$

$\blacktriangleright$ a) $D=(1+3i)^2-4(2+i)(9+12i)=-32-126i,$

$$D=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi,\quad x,y\in\mathbb{R},\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=-32,\\2xy=-126,\end{cases}\quad\Longrightarrow$$

$$(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(-32)^2+(-126)^2\quad\Longrightarrow\quad(x^2+y^2)^2=130^2\quad\Longrightarrow$$

$$x^2+y^2=\pm130\quad\Longrightarrow\quad x^2+y^2=130\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=-32,\\x^2+y^2=130,\\2xy=-126,\end{cases}\quad\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2=49,\\y^2=81,\\2xy=-126,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x=\pm7,\\y=\pm9,\\2xy=-126,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\sqrt{D}=\pm(7-9i)\quad\Longrightarrow$$

$$z_{1,2}=\frac{(1+3i)\pm(7-9i)}{2(2+i)}\quad\Longrightarrow$$

$$z_1=\frac{(1+3i)+(7-9i)}{2(2+i)}=\frac{8-6i}{2(2+i)}=\frac{(4-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5-10i}{5}=1-2i,$$

$$z_2=\frac{(1+3i)-(7-9i)}{2(2+i)}=\frac{-6+12i}{2(2+i)}=\frac{(-3+6i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{15i}{5}=3i. \qquad\square$$

$\blacktriangleright$ b) $(2-i)z^2-(1-3i)z+(9-12i)=0\quad\Longleftarrow\quad$ a)

$$(2+i)z^2-(1+3i)z+(9+12i)=0\quad\Longrightarrow\quad\overline{(2+i)z^2-(1+3i)z+(9+12i)}=\overline{0}\quad\Longrightarrow$$

$$\overline{(2+i)}\,(\overline{z})^2-\overline{(1+3i)}\,\overline{z}+\overline{(9+12i)}=0\quad\Longrightarrow\quad(2-i)\,(\overline{z})^2-(1-3i)\,\overline{z}+(9-12i)=0.$$

Таким чином, якщо $z_1 = 1 - 2i$ та $z_2 = 3i$ — корені рівняння a), то $\overline{z_1} = 1 + 2i$ та $\overline{z_2} = -3i$ — корені рівняння b). $\square$

14.3.A. Знайти всі комплексні числа, спряжені та обернені до яких рівні між собою.

► $\overline{z} = z^{-1} \implies z\overline{z} = 1 \implies |z|^2 = 1 \implies |z| = 1.$

$$|z| = 1 \implies z = \cos\varphi + i\sin\varphi \implies \begin{cases} \overline{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \\ z^{-1} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi), \end{cases} \implies \overline{z} = z^{-1}.$$

Таким чином, множина комплексних чисел, спряжені та обернені до яких рівні між собою, збігається з множиною комплексних чисел, модуль яких дорівнює одиниці. Графічно ГМТ z, для яких $\overline{z} = z^{-1}$, являє собою коло з центром в початку координат та радіусом $r = 1$. $\square$

14.4.A. Обчислити: 1) z^{12}, 2) $\sqrt[3]{z}$, 3) $\sqrt[4]{z}$, 4) $\exp z$, 5) $\ln z$, якщо:

a) $z = i$, b) $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$, c) $z = 2 + \sqrt{3} + i$.

► a) $z = i \implies z = 0 + 1i \implies \begin{cases} \operatorname{Re} z = a = 0, \\ \operatorname{Im} z = b = 1, \end{cases} \implies |z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$

$$\implies \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} = 0, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\rho} = 1, \end{cases} \implies \varphi = \frac{\pi}{2} \implies z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

1) $z^{12} = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^{12} = \cos 6\pi + i\sin 6\pi = \cos 0 + i\sin 0 = 1.$

2) $\sqrt[3]{z} = \omega_k = \cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}, \quad k = \overline{0, 2}.$

$\omega_0 = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i,$

$\omega_1 = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i,$

$\omega_2 = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = -i.$

3) $\sqrt[4]{z} = \omega_k = \cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4}, \quad k = \overline{0, 3}.$

$\omega_0 = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8},$ $\omega_2 = \cos\dfrac{9\pi}{8} + i\sin\dfrac{9\pi}{8},$

$\omega_1 = \cos\dfrac{5\pi}{8} + i\sin\dfrac{5\pi}{8},$ $\omega_3 = \cos\dfrac{13\pi}{8} + i\sin\dfrac{13\pi}{8}.$

4) $e^z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i\sin(\operatorname{Im} z)) \implies e^i = e^{0+1i} = e^0(\cos 1 + i\sin 1) = \cos 1 + i\sin 1.$

5) $\ln z = \ln|z| + i\arg z \implies \ln i = \ln 1 + i(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k) = i(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$ $\square$

► b) $z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \implies z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \dfrac{(-1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} + \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}i$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ b = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |z| = \rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \text{явно виразити кут } \varphi \text{ через } \pi \text{ неможливо.}$$

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = -1, \\ b_1 = \sqrt{3}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |z_1| = \rho_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = 2 \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a_1}{\rho_1} = -\dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{b_1}{\rho_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

$$z_2 = 1 + i \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = 1, \\ b_2 = 1, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |z_2| = \rho_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos\varphi_2 = \dfrac{a_2}{\rho_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi_2 = \dfrac{b_2}{\rho_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$$

Зауваження. Обчислюючи тригонометричну форму комплексного числа z двома способами (безпосереднім чином та як частку двох комплексних чисел), можна отримати нові «табличні» значення тригонометричних функцій певних кутів. Так, наприклад,

$$\begin{cases} \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \\ \sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

1) $z^{12} = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})\right)^{12} = (\sqrt{2})^{12}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = -64.$

2) $\sqrt[3]{z} = \omega_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}(\cos\dfrac{\frac{5\pi}{12} + 2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{\frac{5\pi}{12} + 2\pi k}{3}), \quad k = \overline{0,2}.$

$\omega_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi}{36} + i\sin\frac{5\pi}{36}),$

$\omega_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{29\pi}{36} + i\sin\frac{29\pi}{36}),$

$\omega_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{53\pi}{36} + i\sin\frac{53\pi}{36}).$

3) $\sqrt[4]{z} = \omega_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}(\cos \dfrac{\frac{5\pi}{12} + 2\pi k}{4} + i \sin \dfrac{\frac{5\pi}{12} + 2\pi k}{4}), \quad k = \overline{0, 3}.$

$\omega_0 = \sqrt[8]{2}(\cos \frac{5\pi}{48} + i \sin \frac{5\pi}{48}), \qquad \omega_2 = \sqrt[8]{2}(\cos \frac{53\pi}{48} + i \sin \frac{53\pi}{48}),$

$\omega_1 = \sqrt[8]{2}(\cos \frac{29\pi}{48} + i \sin \frac{29\pi}{48}), \qquad \omega_3 = \sqrt[8]{2}(\cos \frac{77\pi}{48} + i \sin \frac{77\pi}{48}).$

4) $e^z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)) \quad \Longrightarrow$

$$\exp \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \exp\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} i\right) = \exp \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(\cos \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \sin \frac{\sqrt{3} + 1}{2}).$$

5) $\ln z = \ln |z| + i \arg z \quad \Longrightarrow$

$$\ln \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \ln\left(\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12})\right) = \ln \sqrt{2} + i(\frac{5\pi}{12} + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

► c) $z = 2 + \sqrt{3} + i = 2\,(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i) = 2\,(1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) =$

$= 2\,(2\cos^2 \frac{\pi}{12} + i\, 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}) = 4 \cos \frac{\pi}{12}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}).$

Зауважимо, що $\quad |z| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \\ \sin \frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}. \end{cases} \qquad \square$

14.5.А. Подати $\sin 3\varphi$ та $\cos 3\varphi$ у вигляді многочленів від $\sin \varphi$ та $\cos \varphi$.

► $z = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \Longrightarrow \quad z^3 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 =$

1) $= \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$

2) $= (\cos \varphi)^3 + 3(\cos \varphi)^2(i \sin \varphi) + 3(\cos \varphi)(i \sin \varphi)^2 + (i \sin \varphi)^3 =$

$= (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi)$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \\ \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \\ \sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi. \end{cases} \qquad \square$$

14.6.А. Виразити $\sin^3 \varphi$ через перші степені синусів та косинусів аргументів, кратних куту φ.

► $z = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \Longrightarrow \quad z^{-1} = \cos \varphi - i \sin \varphi \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{z + z^{-1}}{2}, \\ \sin \varphi = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}. \end{cases}$

$$z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad \Longrightarrow \quad z^{-n} = \cos n\varphi - i \sin n\varphi \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \cos n\varphi = \dfrac{z^n + z^{-n}}{2}, \\ \sin n\varphi = \dfrac{z^n - z^{-n}}{2i}. \end{cases}$$

$$\sin^3\varphi = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^3 = \frac{z^3 - z^{-3} - 3zz^{-1}(z - z^{-1})}{(2i)^3} = \frac{\dfrac{z^3 - z^{-3}}{2i} - 3\dfrac{z - z^{-1}}{2i}}{-4} =$$
$$= \frac{\sin 3\varphi - 3\sin\varphi}{-4} = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}. \qquad \square$$

14.7.A. Зобразити на комплексній площині точки z, для яких: a) $|z - 1 + i| = 2$, b) $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$, c) $-1 < \operatorname{Re} i\overline{z} \leqslant 1$, d) $|z - 1| + |z + 1| = 3$.

► a) $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R} \implies z - 1 + i = z - (1 - i) = (x - 1) + (y + 1)\,i \implies$

$\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = 2$ або $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Отже, ГМТ z, для яких $|z - 1 + i| = 2$, являє собою коло з центром в точці $z_0 = 1 - i$ та радіусом $r = 2$. $\square$

► b) ГМТ z, для яких $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$, являє собою промінь з видаленою вершиною в початку координат, який проходить під кутом $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ з додатнім напрямком осі Ox. $\square$

► c) $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R} \implies \overline{z} = x - yi \implies i\overline{z} = y + xi \implies$

$\operatorname{Re} i\overline{z} = y \implies -1 < y \leqslant 1$.

Отже, ГМТ z, для яких $-1 < \operatorname{Re} i\overline{z} \leqslant 1$, являє собою смугу між двома прямими, яка містить верхню межу $y = 1$ та не містить нижню межу $y = -1$. $\square$

► d) ГМТ z, для яких $|z - 1| + |z + 1| = 3$, являє собою еліпс з фокусами в точках $z_1 = -1 + 0i$ та $z_2 = 1 + 0i$, сума відстаней до яких від точки z дорівнює 3. $\square$

14.8.A. Знайти первісні корені 6-го степеня з одиниці, їх суму, добуток та многочлен, коренями якого є вони й лише вони.

► $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{6} + i\sin\dfrac{2\pi k}{6}$, де $k = \overline{0, 5}$, — корені 6-го степеня з одиниці.

ε_k — первісний корінь $\iff \gcd(k, 6) = 1 \iff \left[\begin{array}{l} k = 1, \\ k = 5. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_1 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon_5 = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} \varepsilon_1 + \varepsilon_5 = 1, \\ \varepsilon_1\varepsilon_5 = 1. \end{array}\right.$$

$f(z) = (z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_5) = z^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_5)z + \varepsilon_1\varepsilon_5 = z^2 - z + 1$. $\square$

Практичне заняття №15. Алгебра многочленів

15.1.А. Розділити з остачею многочлен $f(x)$ на двочлен $x - x_0$ і обчислити значення $f(x_0)$, якщо $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = 4$.
15.2.А. Розкласти многочлен $f(x) = 3x^4 - 19x^3 + 40x^2 - 24x - 2$ по степенях $x - 2$.
15.3.А. Визначити кратність кореня $x_0 = 2$ многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.
15.4.А. Розкласти на незвідні множники над полями $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ многочлен: a) $f(x) = x^4 - 4$, b) $f(x) = x^4 + 4$.
15.5.А. Побудувати многочлени найменшого степеня: a) з комплексними, b) з дійсними коефіцієнтами, який має подвійний корінь i та простий корінь $-1 - i$.
15.6.А. Знайти всі корені многочлена $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.
15.7.А. Довести незвідність над полем $\mathbb{Q}$ многочленів: a) $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 42$, b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
15.8.А. Знайти НСД многочленів $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ та $g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ двома способами та його лінійне зображення.
15.1.Д. Розділити з остачею многочлен $f(x)$ на двочлен $x - x_0$ і обчислити значення $f(x_0)$, якщо $f(x) = 5x^5 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3$, $x_0 = 2$.
15.2.Д. Розкласти многочлен $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ по степенях $x - 2$.
15.3.Д. Визначити кратність кореня $x_0 = -2$ многочлена $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$.
15.4.Д. Розкласти на незвідні множники над полями $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ многочлени: a) $f(x) = x^6 + 27$, b) $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$.
15.5.Д. Побудувати многочлени найменшого степеня з комплексними та дійсними коефіцієнтами, який має подвійний корінь $1 + i$ та прості корені i, 1 та $1 - i$.
15.6.Д. Знайти НСД многочленів $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ та $g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ двома способами та його лінійне зображення.
15.7.Д. Знайти всі раціональні корені многочлена $f(x) = 24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$.
15.8.Д. Довести незвідність над полем $\mathbb{Q}$ многочленів: a) $f(x) = x^5 - 12x^3 + 6x^2 + 36x - 12$, b) $f(x) = x^4 + 10x^3 + 24x^2 + 25x + 13$.
15.1.+. Довести, що многочлен $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ не має кратних коренів.
15.2.+. Знайти: a) $\gcd(x^n - 1, x^m - 1)$, b) $\gcd(x^n + 1, x^m + 1)$.
15.3.+. Довести, що якщо нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ з цілими коефіцієнтами, то: a) $p|a_0$, b) $q|a_n$, c) $p - mq|f(m)$ при довільному $m \in \mathbb{Z}$.
15.4.+. Нехай для многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ з цілими коефіцієнтами існує просте число p таке, що старший коефіцієнт a_n не ділиться на p, всі решта коефіцієнти $f(x)$ діляться на p, а вільний член a_0 не ділиться на p^2. Довести, що многочлен $f(x)$ незвідний над полем $\mathbb{Q}$. *(Ознака незвідності Ейзенштейна.)*

15.1.A. Розділити з остачею многочлен $f(x)$ на двочлен $x - x_0$ і обчислити значення $f(x_0)$, якщо $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = 4$.

▶

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 1 & -3 & 6 & -10 & 16 \\
4 & 1 & 4\cdot 1 - 3 = 1 & 4\cdot 1 + 6 = 10 & 4\cdot 10 - 10 = 30 & 4\cdot 30 + 16 = 136
\end{array}$$

або скорочено

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 1 & -3 & 6 & -10 & 16 \\
4 & 1 & 1 & 10 & 30 & \boxed{136}
\end{array}$$

Таким чином, $f(x) = (x-4)(x^3 + x^2 + 10x + 30) + 136$ і $f(x_0) = f(4) = 136$. □

15.2.A. Розкласти многочлен $f(x) = 3x^4 - 19x^3 + 40x^2 - 24x - 2$ по степенях $x - 2$.

▶

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & 3 & -19 & 40 & -24 & -2 \\
2 & 3 & -13 & 14 & 4 & \boxed{6} \\
2 & 3 & -7 & 0 & \boxed{4} & \\
2 & 3 & -1 & \boxed{-2} & & \\
2 & 3 & \boxed{5} & & & \\
2 & \boxed{3} & & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\
\Longrightarrow\ f(x) = (x-2)(3x^3 - 13x^2 + 14x + 4) + 6 \\
\Longrightarrow\ f(x) = (x-2)^2(3x^2 - 7x) + 4(x-2) + 6 \\
\Longrightarrow\ f(x) = (x-2)^3(3x-1) - 2(x-2)^2 + 4(x-2) + 6 \\
\Longrightarrow\ f(x) = (x-2)^4(3) + 5(x-2)^3 - 2(x-2)^2 + 4(x-2) + 6 \\
\Longrightarrow\ f(x) = 3(x-2)^4 + 5(x-2)^3 - 2(x-2)^2 + 4(x-2) + 6
\end{array}$$

Отже, $f(x) = 3(x-2)^4 + 5(x-2)^3 - 2(x-2)^2 + 4(x-2) + 6$. □

15.3.A. Визначити кратність кореня $x_0 = 2$ многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

▶

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & 1 & -5 & 7 & -2 & 4 & -8 \\
2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \\
2 & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} & \\
2 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & & \\
2 & 1 & 3 & \boxed{7} & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\
\Longrightarrow\ f(x) = (x-2)(x^4 - 3x^3 + x^2 + 4) \\
\Longrightarrow\ f(x) = (x-2)^2(x^3 - x^2 - x - 2) \\
\Longrightarrow\ f(x) = (x-2)^3(x^2 + x + 1) \\
\Longrightarrow\ f(x) = (x-2)^3((x-2)(x+3) + 7)
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ $x_0 = 2$ — корінь кратності $k = 3$. □

15.4.A. Розкласти на незвідні множники над полями $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ многочлен: a) $f(x) = x^4 - 4$, b) $f(x) = x^4 + 4$.

▶ a) *1-й спосіб.*

$$f(x) = x^4 - 4 = (x^2-2)(x^2+2) = \begin{cases} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2), & \text{над } \mathbb{R}, \\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2}), & \text{над } \mathbb{C}. \end{cases}$$

2-й спосіб.

$$x^4 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[4]{4+0i}, \quad 4 = 4(\cos 0 + i\sin 0), \quad \Longrightarrow$$

$$x_k = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{2\pi k}{4} + \sin\frac{2\pi k}{4}), \ \ k = \overline{0,3}. \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = \sqrt[4]{4}(\cos 0 + \sin 0) = \sqrt{2}, \\ x_1 = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}) = i\sqrt{2}, \\ x_2 = \sqrt[4]{4}(\cos\pi + \sin\pi) = -\sqrt{2}, \\ x_3 = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}) = -i\sqrt{2}. \end{cases}$$

Отже, над полем $\mathbb{C}$ $\quad f(x) = (x - \sqrt{2})(x - i\sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + i\sqrt{2}). \quad \Longrightarrow$

Над полем $\mathbb{R}$ $\quad f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2).$ □

► b) *1-й спосіб.*

$$f(x) = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) =$$

$$= ((x-1)^2 + 1)((x+1)^2 + 1) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2), & \text{над} \quad \mathbb{R}, \\ (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i), & \text{над} \quad \mathbb{C}. \end{cases}$$

2-й спосіб.

$$x^4 = -4 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[4]{-4 + 0i}, \quad -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi), \quad \Longrightarrow$$

$$x_k = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + \sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}), \;\; k = \overline{0, 3}. \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) = 1 + i, \\ x_1 = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) = -1 + i, \\ x_2 = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}) = -1 - i, \\ x_3 = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}) = 1 - i. \end{cases}$$

Отже, над полем $\mathbb{C}$ $\quad f(x) = (x - 1 - i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)(x - 1 + i). \quad \Longrightarrow$

Над полем $\mathbb{R}$ $\quad f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$ □

15.5.А. Побудувати многочлени найменшого степеня: a) з комплексними, b) з дійсними коефіцієнтами, який має подвійний корінь i та простий корінь $-1 - i$.

► a) $f(z) = (z - i)^2(z + 1 + i) \in \mathbb{C}[z].$ □

► b) $f(x) = (x - i)^2(x + i)^2(x + 1 + i)(x + 1 - i) \in \mathbb{R}[x].$ □

15.6.А. Знайти всі корені многочлена $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12.$

► Знайдемо спочатку множину A всіх раціональних коренів многочлена $f(x)$.

$$12 \,\vdots\, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \quad 6 \,\vdots\, 1, 2, 3, 6, \quad f(\frac{p}{q}) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{p}{q} \in A \subset \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\}$$

	6	19	−7	−26	12		
1	6	25	18	−8	4	$\Longrightarrow$	$f(1) = 4$
−1	6	13	−20	−6	18	$\Longrightarrow$	$f(-1) = 18$

$$\frac{f(k)}{p - kq} \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{f(1)}{p - q} = \frac{4}{p - q} \in \mathbb{Z}, \\ \frac{f(-1)}{p + q} = \frac{18}{p + q} \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -2, 4, -4, 6, -6, 12, -12, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6} \notin A, \\ 3, 4, 6, -6, 12, -12, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6} \notin A. \end{cases} \implies \frac{p}{q} \in A \subset \{2, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$$

	6	19	−7	−26	12		
1	6	25	18	−8	4	$\implies$	$f(1) = 4$
−1	6	13	−20	−6	18	$\implies$	$f(-1) = 18$
2	6	31	55	84	180	$\implies$	$f(2) = 180 \neq 0$
−3	6	1	−10	4	$\boxed{0}$	$\implies$	$f(x) = (x+3)(6x^3 + x^2 - 10x + 4)$
1/2	6	4	−8	$\boxed{0}$		$\implies$	$f(x) = (x+3)(2x-1)(3x^2 + 2x - 4)$
−1/3	6	2	−26/3			$\implies$	$f(-1/3) = -26/3 \neq 0$

$$3x^2 + 2x - 4 = 0 \quad \implies \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Відповідь: $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$. □

15.7.A. Довести незвідність над полем $\mathbb{Q}$ многочленів: a) $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 42$, b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

► a) $p = 2 \implies \begin{cases} 2 \nmid 5 \\ 2 \mid -8, 12, -6, 42 \\ 2^2 = 4 \nmid 42 \end{cases} \implies f(x)$ — незвідний над $\mathbb{Q}$. □

► b) $f(x)$ — незвідний над $\mathbb{Q} \iff f_1(y)$ — незвідний над $\mathbb{Q}$,

де $f_1(y) = f(x)$ при $y = x - c$, тобто $f_1(y)$ є розкладом многочлена $f(x)$ по степенях $x - c = y$. Дійсно,

$$\begin{cases} f(x) = g(x)h(x) \implies f_1(y) = g(y+c)h(y+c), \\ f_1(y) = g_1(y)h_1(y) \implies f(x) = g_1(x-c)h_1(x-c). \end{cases}$$

Розкладемо $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ по степенях $x - 1 = y$.

	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	$\boxed{5}$
1	1	3	6	$\boxed{10}$	
1	1	4	$\boxed{10}$		
1	1	$\boxed{5}$			
1	$\boxed{1}$				

$$\implies f(x) = f_1(y) = y^4 + 5y^3 + 10y^2 + 10y + 5 \implies p = 5 \implies$$

$\begin{cases} 5 \nmid 1 \\ 5 \mid 5, 10, 10, 5 \\ 5^2 = 25 \nmid 5 \end{cases} \implies f_1(y) = f(x)$ — незвідний над $\mathbb{Q}$. □

15.8.А. Знайти НСД многочленів $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ та $g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ двома способами та його лінійне зображення.

► *1-й спосіб.* Алгоритм Евкліда. □

► *2-й спосіб.*

$$\begin{cases} f(x) = (x^2+1)(x-1) \\ g(x) = (x^2-1)(x+2) = (x-1)(x+1)(x+2) \end{cases} \implies \quad \gcd(f,g) = x - 1$$

$$\gcd(f,g) = f\cdot u + g \cdot v, \quad \text{де} \quad \deg u < \deg \frac{g}{\gcd(f,g)}, \quad \deg v < \deg \frac{f}{\gcd(f,g)},$$

$$\text{або} \quad \frac{f}{\gcd(f,g)}\cdot u + \frac{g}{\gcd(f,g)}\cdot v = A, \quad \text{де} \quad A \in P.$$

$$(x^2+1)(ax+b) + (x^2+3x+2)(px+q) = A \quad \implies$$

$$(a+p)x^3 + (b+3p+q)x^2 + (a+2p+3q)x + (b+2q) = A \quad \implies$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & p & q \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & A \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ (-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & A \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -A \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-1)\ (-3) \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & A \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -A \end{array}\right) \cdot(-0.1) \xrightarrow{A=10} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ (-3)\ (-2)\ (3) \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \implies \begin{cases} a = 3, \\ b = 8, \\ p = -3, \\ q = 1, \end{cases} \implies \begin{cases} u(x) = 3x + 8, \\ v(x) = -3x + 1. \end{cases}$$

□