Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №2
з курсу
«Управління динамічними системами»
на тему

«Аналітичне конструювання регуляторів. Побудова фазових портретів»

Виконав:
студент групи ІПС-21
факультету комп’ютерних наук та кібернетики
Міцкевич Костянтин Олександрович

Київ 2023

Зміст

Умова задачі згідно з варіантом

- Дослідити на стійкість задану систему. Визначити вигляд точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).

- Розв’язати задачу модального керування (непарні варіанти); або задачу аналітичного конструювання регуляторів (парні варіанти), обравши одне керування з знайдених можливих. Визначити вигляд отриманої точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).

- Зобразити фазові портрети особливих точок розімкненої системи та побудованої замкненої системи за допомогою програмних пакетів (бажано **Sage**). Траєкторії, сепаратриси, ізокліни (де треба) – різний колір та товщина.

Варіант №10

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

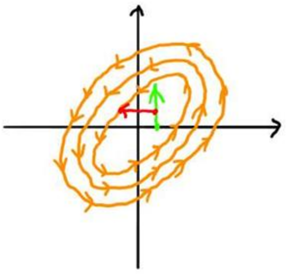
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Представлення розв’язку аналітично (в зошиті)

I. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow$ т. спокою - центр



Вектор швидкості:

$(x_0, y_0) = (1, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2 \end{matrix}}$

$(x_1, y_1) = (1, 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \dot{x} = -1 \\ \dot{y} = 1 \end{matrix}}$

II. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, $u \in R^2$, $u = C \cdot x$, $\dot{x} = Ax + Bu$,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\dot{x} = (A + BC)x$, $B \cdot C = \begin{pmatrix} c_1 & 2 \cdot c_2 \\ 0 & 10 \cdot c_2 \end{pmatrix}$

$$A + BC = \begin{pmatrix} 1 + c_1 & -1 + 2 \cdot c_2 \\ 2 & -1 + 10 \cdot c_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A + BC - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 + c_1 - \lambda & -1 + 2 \cdot c_2 \\ 2 & -1 + 10 \cdot c_2 - \lambda \end{vmatrix} =$$

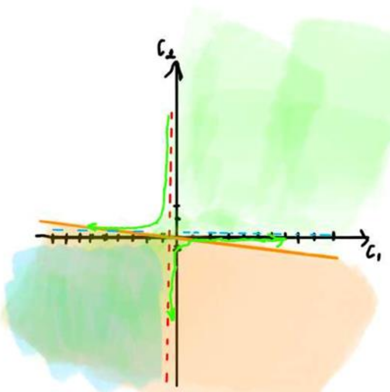
$$= ((1 + c_1) - \lambda) \cdot ((-1 + 10c_2) - \lambda) - 2 \cdot (-1 + 2c_2) =$$

$$= \lambda^2 - \lambda(c_1 + 10c_2) + 10c_1 \cdot c_2 - c_1 + 6c_2 + 1$$

$$H = \begin{pmatrix} -(c_1 + 10c_2) & 1 \\ 0 & 1 + 6c_2 - c_1 + 10c_1 \cdot c_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -(c_1 + 10c_2) > 0 \\ -(c_1 + 10c_2) \cdot (1 + 6c_2 - c_1 + 10c_1 \cdot c_2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(c_1 + 10c_2) > 0 \\ 1 + 6c_2 - c_1 + 10c_1 \cdot c_2 > 0 \end{cases}$$

$c_2 = -\frac{1}{10} c_1$



Нехай тепер $c_1=-5$ і $c_2=0$, тоді: $u_1=-5x$, $u_2=0$

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - 5x = -4x - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases} \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1 - \lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda = -3$ $\Rightarrow$ отже точка спокою
стійкий вузол

Власні вектори:

$\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = -\frac{a_2}{2} \\ a_2 \in R \end{matrix} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

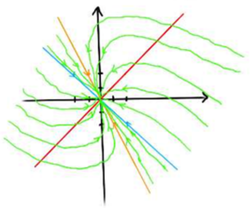
$\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_1 = -b_2 \\ b_1 \in R \end{matrix} \Rightarrow b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Тоді: $y = \frac{a_2}{a_1}x = -2x$ і $y = \frac{b_2}{b_1} = -x$,

ізокліна $y' = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{-4x - y} = 0 \Rightarrow y = 2x$$



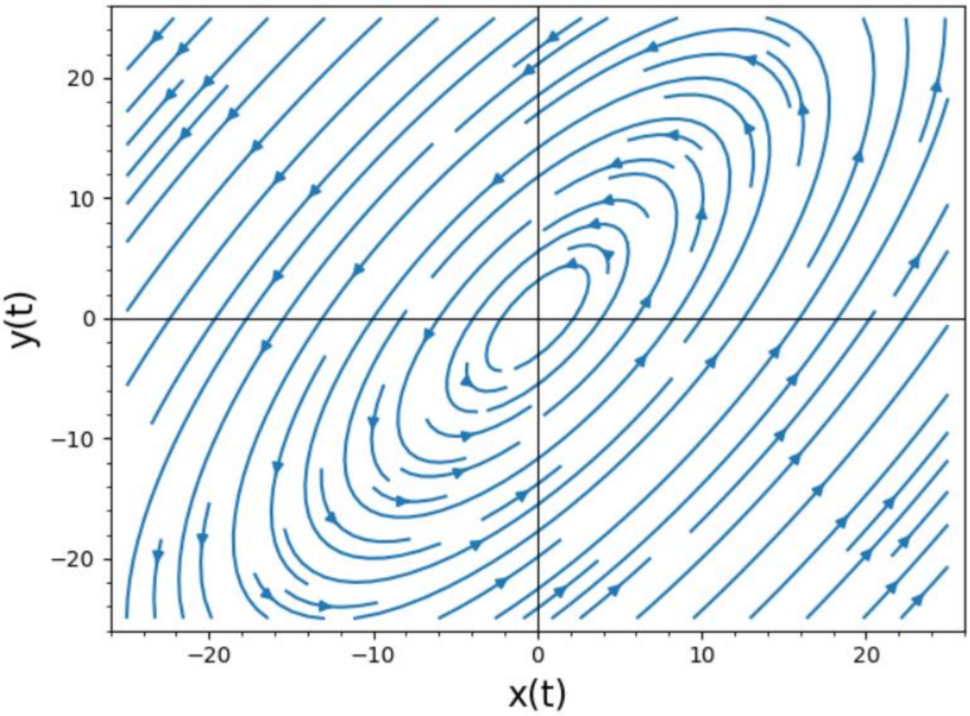
Оскільки власне число $\lambda_1 = -2$ менше за модулем за $\lambda_2 = -3$, то інтегральні криві прилягають своєю опуклістю до $y = -2x$

Код програми для розімкненої та замкненої систем (Sage)

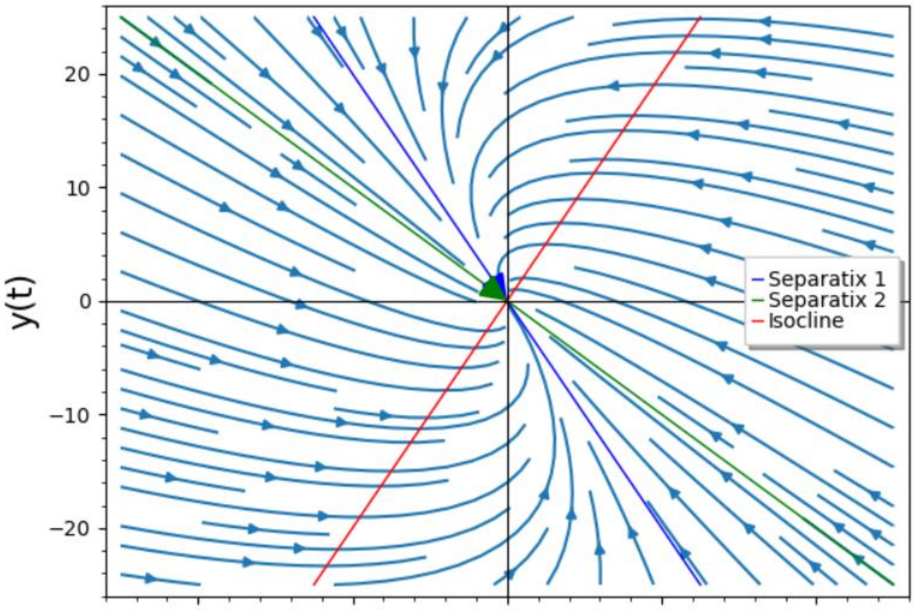
```
#розімкнена система
x, y = var('x y')
f(x, y) = x - y
g(x, y) = 2*x - y
s = streamline_plot((f, g), (x, -25, 25), (y, -25, 25), axes_labels = ["x(t)", "y(t)"])
show(s, xmin=-25, xmax=25, ymin=-25, ymax=25)

#замкнена система
f1(x, y) = -4*x - y
g1(x, y) = 2*x - y
s1 = streamline_plot((f1, g1), (x, -25, 25), (y, -25, 25), plot_points=1000, axes_labels = ["x(t)", "y(t)"])
s1 += line([(-12.5, 25), (12.5, -25)], rgbcolor='blue', thickness=1, legend_label = "Separatix 1")  #Separatix: y = -2x
s1 += line([(-25, 25), (25, -25)], rgbcolor='green', thickness=1, legend_label = "Separatix 2")   #Separatix: y = -x
s1 += line([(12.5, 25), (-12.5, -25)], rgbcolor='red', thickness=1, legend_label = "Isocline")   #Isocline: y = 2x
s1 += arrow2d((-1, 2), (0, 0), rgbcolor='blue', thickness=0.5)   # y = -2x direction
s1 += arrow2d((-1, 1), (0, 0), rgbcolor='green', thickness=0.5)   # y = -x direction

show(s1, xmin=-25, xmax=25, ymin=-25, ymax=25)
```

Screen з відповідними результатами роботи програми для розімкненої системи (Sage)

Screen **з**



відповідними результатами роботи програми для замкненої системи (Sage)



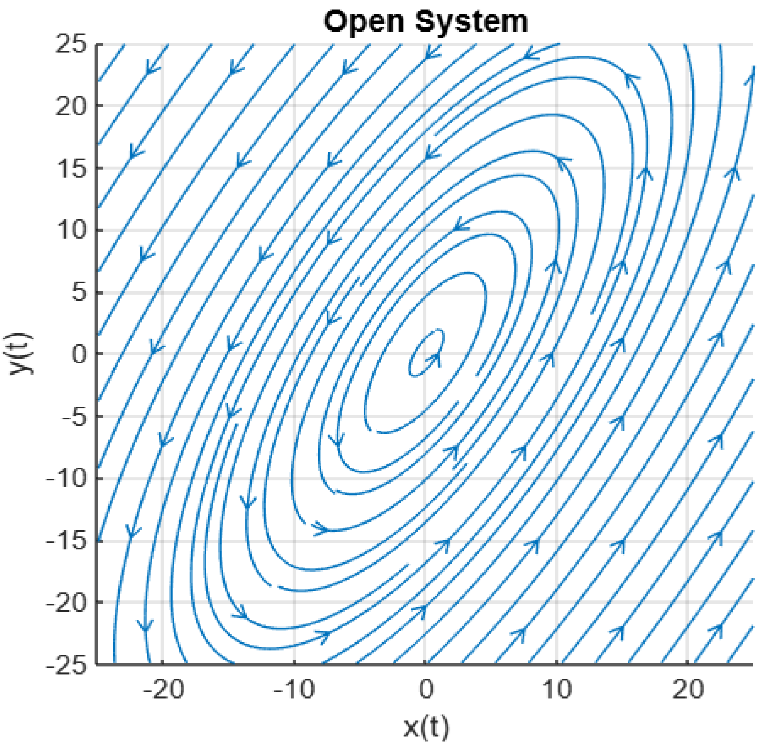
Код

програми для розімкненої та замкненої систем (MatLab)

```
[x, y] = meshgrid(-25:0.5:25, -25:0.5:25);
% --- Open System ---
f = x - y;
g = 2*x - y;
figure;
streamslice(x, y, f, g);
xlabel('x(t)');
ylabel('y(t)');
```

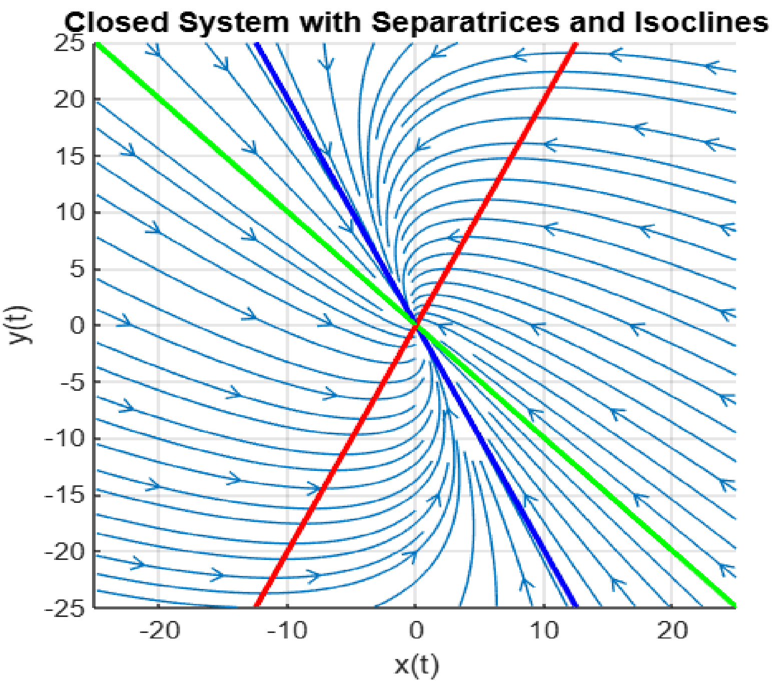
```
title('Open System');
axis equal;
xlim([-25 25]);
ylim([-25 25]);
grid on;
% --- Closed System ---
f1 = @(x, y) -4*x - y;
g1 = @(x, y) 2*x - y;
u1 = f1(x, y);
v1 = g1(x, y);
figure;
streamslice(x, y, u1, v1);
hold on;
% Separatrix 1: y = -2x
x_line1 = linspace(-12.5, 12.5, 100);
y_line1 = -2*x_line1;
plot(x_line1, y_line1, 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Separatrix 1');
% Separatrix 2: y = -x
x_line2 = linspace(-25, 25, 100);
y_line2 = -x_line2;
plot(x_line2, y_line2, 'g', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Separatrix 2');
% Isocline: y = 2x
x_line3 = linspace(-12.5, 12.5, 100);
y_line3 = 2*x_line3;
plot(x_line3, y_line3, 'r', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Isocline');
quiver(-1, 2, 1, -2, 'Color', 'b', 'LineWidth', 1, 'MaxHeadSize', 2); % y = -2x direction
quiver(-1, 1, 1, -1, 'Color', 'g', 'LineWidth', 1, 'MaxHeadSize', 2); % y = -x direction
xlabel('x(t)');
ylabel('y(t)');
title('Closed System with Separatrices and Isoclines');
legend('Location', 'best');
axis equal;
xlim([-25 25]);
ylim([-25 25]);
grid on;
hold off;
```

Screen з відповідними результатами роботи програми для розімкненої системи (MatLab)

Screen 

з

відповідними результатами роботи програми для замкненої системи (MatLab)

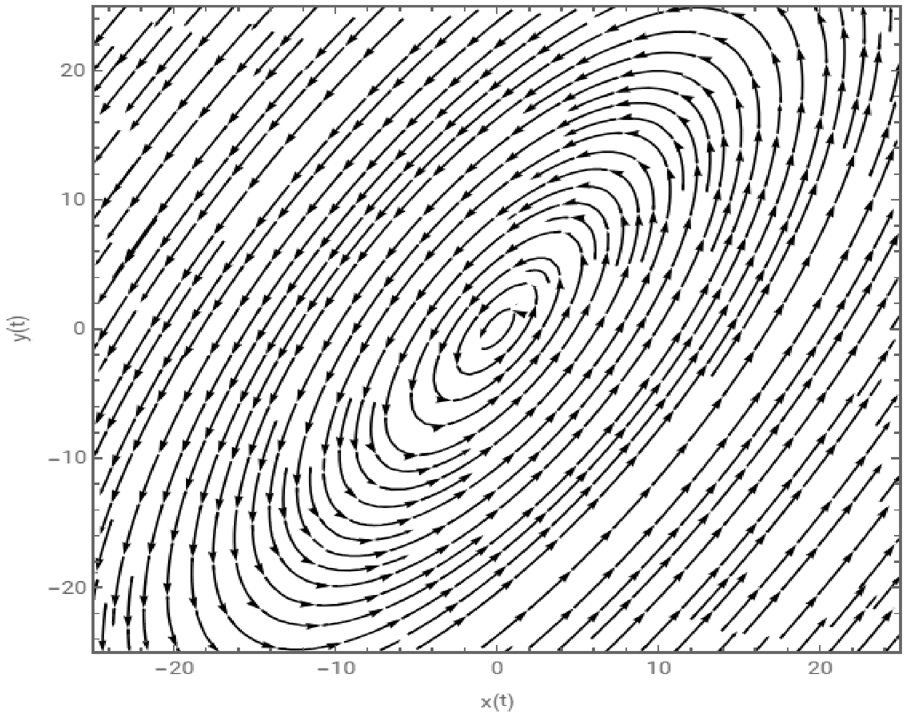


Код програми для розімкненої та замкненої систем (Mathematica)

```
(* Open System *)
f[x_, y_] := x - y
g[x_, y_] := 2*x - y

StreamPlot[{f[x, y], g[x, y]}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25},
 AxesLabel -> {"x(t)", "y(t)"},
 PlotRange -> {{-25, 25}, {-25, 25}},
 Frame -> True, FrameLabel -> {"x(t)", "y(t)"},
 StreamPoints -> Fine,
 StreamStyle -> Black,
```

```
 StreamColorFunction -> None
]

(* Closed System *)
f1[x_, y_] := -4*x - y
g1[x_, y_] := 2*x - y

Show[
  StreamPlot[{f1[x, y], g1[x, y]}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25},
    AxesLabel -> {"x(t)", "y(t)"},
    PlotRange -> {{-25, 25}, {-25, 25}},
    Frame -> True,
    FrameLabel -> {"x(t)", "y(t)"},
    StreamPoints -> Fine,
    StreamStyle -> Black,
   StreamColorFunction -> None
  ],
  Graphics[{
    (* Separatrix 1: y = -2x *)
    Blue, Line[{{-12.5, 25}, {12.5, -25}}],
    (* Separatrix 2: y = -x *)
    Green, Line[{{-25, 25}, {25, -25}}],
    (* Isocline: y = 2x *)
    Red, Line[{{12.5, 25}, {-12.5, -25}}],
    (* Direction arrow for y = -2x *)
    Blue, Arrow[{{-1, 2}, {0, 0}}],
    (* Direction arrow for y = -x *)
    Green, Arrow[{{-1, 1}, {0, 0}}]
  }]
]
```

Screen з відповідними результатами роботи програми для розімкненої системи (Mathematica)

Screen  **з**

відповідними результатами роботи програми для замкненої системи (Mathematica)