Кр. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\cdot(\sqrt{n^2+1}-n) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n\cdot(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{2n\cdot(\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2})}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$= \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)} = \frac{2}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}+1} = \frac{2}{2} = 1$

3. $\lim x_n$, якщо $x_1 \in (1,2)$

$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \quad n \geq 1$

Припустимо, що $x_n \to a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = a^2 - 2a + 2 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2$

Покажемо, що $x_n \in (1,2)$. Для $x_1 \in (1,2)$ – правильно.

Нехай $x_n \in (1,2) \Rightarrow x_{n+1} = (x_n-1)^2 + 1 > 1$, бо ~~x~~

$x_n - 1 < 1$, а $(x_n-1)^2 < 1$, $1 < x_{n+1} < 2$ справджується.

Доведення спадання послідовності:

$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 3x_n + 2 = (x_n-1)(x_n-2) < 0 \Rightarrow$ за т. Вейєрштраса

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

$$2.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=$$: за т. Штольца

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p+C_p^1n^{p-1}+C_p^2n^{p-2}+C_p^3n^{p-3}+\ldots+1}{\cancel{n^{p+1}}+C_{p+1}^1n^p+C_{p+1}^2n^{p-1}+C_{p+1}^3n^{p-2}+\ldots+1-\cancel{n^{p+1}}}= \Bigg|:n^p$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+C_p^1\frac{1}{n}+C_p^2\frac{1}{n^2}+C_p^3\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^p}}{C_{p+1}^1+C_{p+1}^2\frac{1}{n}+C_{p+1}^3\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^p}}=\frac{1}{C_{p+1}^1}=\frac{1}{p+1}$$

4. $f: [0;+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^n\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)\right)}{n}$$

1) Якщо $x \in [0;2)$, то $x^n < 2^n$, звідси

$$f(x) = \lim \frac{\ln 2^n + \ln\left(1+\underbrace{\left(\frac{x^n}{2^n}\right)}_{\to 0}\right)}{n} = \frac{\cancel{n}\ln 2 + \ln 1}{\cancel{n}} =$$

$$= \ln 2 \cdot 1 = \ln 2$$

2) Якщо $x = 2$, то $x^n = 2^n$, маємо

$$f(x) = \lim \frac{\ln(2^n + 2^n)}{n} = \frac{\ln 2^{n+1}}{n} = \frac{(n+1)\ln 2}{n} =$$

$$= \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)\cdot \ln 2 = \ln 2$$

3) Якщо $x > 2$, то $x^n > 2^n$, отримаємо

$$f(x) = \lim \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} = \frac{\ln x^n + \ln\left(\frac{2^n}{x^n} + 1\right)}{n} =$$

$$= \frac{\cancel{n}\ln x + \ln\left(\frac{2^n}{x^n}^{\to 0} + 1\right)}{\cancel{n}} = \ln x$$