МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

М. О. Хмельницький

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ 2

Практичні заняття

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітніми програмами «Системи, технології та математичні методи кібербезпеки»
та «Системи технічного захисту інформації» спеціальності 125 Кібербезпека

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент	Терещенко І.М., канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. ММАД
Відповідальний редактор	Смирнов С.А., канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 24.06.2022 р.)
за поданням Вченої ради НН ФТІ
(протокол № 7 від 20.06.2022 р.)

Навчальний посібник розроблено для більш детального ознайомлення студентів з практичними прийомами лінійної алгебри та аналітичної геометрії, а також для використання на практичних заняттях і для самостійної роботи студентів. У навчальному посібнику докладно викладено матеріал для практичного опрацювання та поглиблення знань та навичок з базових тем дисципліни: визначники та їх застосування, квадратичні образи в просторі, лінійні та білінійні функції, евклідові простори, лінійні оператори, жорданова нормальна форма лінійних операторів, спряжені, самоспряжені та ортогональні оператори. Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра, які навчаються за спеціальністю 125 Кібербезпека.

Реєстр. №НП XX/XX-XXX. Обсяг 4.1 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

Практичне заняття №1. Визначники n-го порядку

1.1.А. Знайти число інверсій у перестановці: a) $(5,1,4,3,6,2)$, b) $(1,3,\dots,2n-1,2n,\dots,4,2)$.
1.2.А. Підібрати числа α та β так, щоб перестановка $(\alpha,7,6,1,\beta,5,3)$ була непарною.
1.3.А. Нехай задано дві підстановки $\varphi = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ та $\psi = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Зобразити ці підстановки у вигляді добутку незалежних циклів та визначити їх парність. Знайти підстановки φ^{-1} та ψ^{-1}, добутки $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, $\varphi\psi^{-1}$, $\psi^{-1}\varphi$ та визначити їх парність.
1.4.А. Які з добутків: a) $a_{34}a_{12}a_{45}a_{23}a_{51}$, b) $a_{61}a_{52}a_{33}a_{41}a_{26}a_{15}a_{77}$, c) $a_{21}a_{32}\dots a_{n,n-1}a_{1n}$ є членами визначника деякого порядку? Знайти для таких добутків порядок визначника та знак члена.
1.5.А. Знайти такі i, j та k, щоб добуток $a_{i7}a_{63}a_{4j}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ був членом відповідного визначника та входив до нього зі знаком «мінус».
1.6.А. Знайти коефіцієнти біля x^5, x^4 та x^3 в многочлені $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$.
1.7.А. Користуючись лише означенням визначника, обчислити:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

1.8.А. Подати у вигляді многочлена від t визначники:

a) $\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & t & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & t & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix}$.

1.1.Д. Знайти число інверсій у перестановці:
a) $(3,7,5,2,8,1,4)$, b) $(4,8,12,16,20,1,5,9,13,17,3,7,11,15,19,2,6,10,14,18)$.
1.2.Д. Підібрати числа α та β так, щоб перестановка $(11,5,7,\alpha,1,2,9,8,4,3,\beta)$ була парною.
1.3.Д. Нехай задано дві підстановки $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ та $\psi = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Зобразити ці підстановки у вигляді добутку незалежних циклів та визначити їх парність. Знайти підстановки φ^{-1} та ψ^{-1}, добутки $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, $\varphi\psi^{-1}$, $\psi^{-1}\varphi$ та визначити їх парність.
1.4.Д. Які з добутків: a) $a_{13}a_{21}a_{32}a_{47}a_{54}a_{65}a_{76}$, b) $a_{18}a_{82}a_{46}a_{63}a_{35}a_{71}a_{84}a_{27}$, c) $a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n}a_{n1}$ є членами визначника деякого порядку? Знайти для таких добутків порядок визначника та знак члена.
1.5.Д. Знайти такі i, j та k, щоб добуток $a_{21}a_{32}a_{1j}a_{i6}a_{45}a_{78}a_{8k}a_{64}$ був членом відповідного визначника та входив до нього зі знаком «мінус».
1.6.Д. Знайти вільний член многочлена $f(x)$ з завдання 1.6.А.
1.7.Д. Користуючись лише означенням визначника, обчислити:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & 0 & 0 & 0 \\ m & n & 0 & 0 & 0 \\ p & q & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$.

1.1.+. Знайти множину всіх тих чисел, які можуть дорівнювати числу інверсій у перестановці на множині з n елементів.
1.2.+. Записати всі перестановки з чисел 1, 2, 3, 4, 5, в яких є: a) 4, b) 7, c) 9, d) 11 інверсій.
1.3.+. Знайти число інверсій у перестановці $(1,3n,4,3n-3,\dots,3n-2,3,3n-1,3n-4,\dots,2)$.

1.1.A. Знайти число інверсій у перестановці: a) $(5,1,4,3,6,2)$, b) $(1,3,\ldots,2n-1,2n,\ldots,4,2)$.

► a) $\underset{I_{\to}=4+0+2+1+1+0=8}{(5,1,4,3,6,2)}$ $\qquad \underset{I_{\leftarrow}=0+1+1+2+0+4=8}{(5,\ 1,\ 4,\ 3,\ 6,\ 2)} \quad \Longrightarrow \quad I=8,$ перестановка парна. □

► b) $(1,3,\ldots,2n-1,2n,\ldots,4,2)=(\underbrace{1,3,\ldots,2n-1}_{A},\underbrace{2n,\ldots,4,2}_{B})=(A,B) \quad \Longrightarrow$

$I=I(A,A)+I(A,B)+I(B,B),$

$I(A,A)=0+0+\ldots+0=0,$

$I(A,B)=0+1+\ldots+(n-1)=\dfrac{n^2-n}{2},$

$I(B,B)=(n-1)+\ldots+1+0=\dfrac{n^2-n}{2}, \quad \Longrightarrow$

$I=I(A,A)+I(A,B)+I(B,B)=0+\dfrac{n^2-n}{2}+\dfrac{n^2-n}{2}=n^2-n,$ перестановка парна. □

1.2.A. Підібрати числа α та β так, щоб перестановка $(\alpha,7,6,1,\beta,5,3)$ була непарною.

► $\alpha,\beta\in\{2,4\}$

Нехай $\alpha=2,\ \beta=4 \quad \Longrightarrow \quad \underset{I_{\to}=1+5+4+0+1+1+0=12}{(2,7,6,1,4,5,3)} \quad \Longrightarrow$ перестановка парна.

Отже, $\alpha=2,\ \beta=4$ не задовольняє умову задачі.

Оскільки транспозиція змінює парність перестановки, то при $\alpha=4,\ \beta=2$ отримаємо непарну перестановку. Інших варіантів немає. □

1.3.A. Нехай задано дві підстановки $\varphi=\begin{pmatrix}7&2&5&1&4&6&3\\5&6&1&2&3&7&4\end{pmatrix}$ та $\psi=\begin{pmatrix}3&7&1&4&2&5&6\\2&4&7&6&1&5&3\end{pmatrix}$. Зобразити ці підстановки у вигляді добутку незалежних циклів та визначити їх парність. Знайти підстановки φ^{-1} та ψ^{-1}, добутки $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, $\varphi\psi^{-1}$, $\psi^{-1}\varphi$ та визначити їх парність.

► Нехай $\varphi\colon A\to B$ деяке відображення. Результат застосування відображення φ до елемента $x\in A$ будемо позначати через $\varphi(x)$. Якщо $\psi\colon B\to C$ деяке інше відображення, то відображення, яке виходить в результаті послідовного застосування спочатку відображення φ, а після відображення ψ, будемо позначати через $\varphi\circ\psi$ або $\psi\varphi$ (читається «ψ після φ»). Таким чином, елемент $\psi(\varphi(x))=(\psi\varphi)(x)=(\varphi\circ\psi)(x)$ є результатом застосування до елемента $x\in A$ послідовно перетворень φ та ψ.

$$\varphi=\begin{pmatrix}7&2&5&1&4&6&3\\5&6&1&2&3&7&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&6&7&5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3&4\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$\sigma(\varphi)=\sigma\begin{pmatrix}1&2&6&7&5\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}3&4\end{pmatrix}=6+3=9 \quad \Longrightarrow \quad \varphi$ — непарна підстановка.

$$\psi=\begin{pmatrix}3&7&1&4&2&5&6\\2&4&7&6&1&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7&4&6&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7&4&6&3&2\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$\sigma(\psi)=\sigma\begin{pmatrix}1&7&4&6&3&2\end{pmatrix}=7 \quad \Longrightarrow \quad \psi$ — непарна підстановка.

$$\varphi\circ\psi=\begin{pmatrix}7&2&5&1&4&6&3\\5&6&1&2&3&7&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3&7&1&4&2&5&6\\2&4&7&6&1&5&3\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \varphi & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 6 & 4 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ \psi & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 5 \end{array} \right| =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$\sigma(\varphi \circ \psi) = \sigma\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix} = 5 + 3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad \varphi \circ \psi$ — парна підстановка.

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$\sigma(\varphi^{-1}) = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = 6 + 3 = 9 \quad \Longrightarrow \quad \varphi^{-1}$ — непарна підстановка.

□

1.4.А. Які з добутків: a) $a_{34}a_{12}a_{45}a_{23}a_{51}$, b) $a_{61}a_{52}a_{33}a_{41}a_{26}a_{15}a_{77}$, c) $a_{21}a_{32}\dots a_{n,n-1}a_{1n}$ є членами визначника деякого порядку? Знайти для таких добутків порядок визначника та знак члена.

► a) Якщо добуток $a_{34}a_{12}a_{45}a_{23}a_{51}$ є членом деякого визначника, то цей визначник порядку $n = 5$.

Для того, щоб визначити, чи є цей добуток дійсно членом деякого визначника порядку $n = 5$, складемо матрицю 2×5 з перших та других індексів множників цього добутку.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки і перший, і другий рядок матриці φ є перестановкою, то матриця φ визначає підстановку.

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\varphi) = 5 + 1 = 6 \quad \Longrightarrow \quad \varphi$ — парна.

Отже, добуток $a_{34}a_{12}a_{45}a_{23}a_{51}$ є членом деякого визначника порядку $n = 5$ і входить до нього зі знаком «плюс». □

► b) $a_{61}a_{52}a_{33}a_{41}a_{26}a_{15}a_{77} \quad \Longrightarrow \quad n = 7.$

$\varphi = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \varphi$ — не підстановка. □

► c) $a_{21}a_{32}\dots a_{n,n-1}a_{1n} \quad \Longrightarrow \quad n = n.$

$\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \varphi$ — підстановка.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\varphi) = n + 1.$$

Отже, добуток $a_{21}a_{32}\dots a_{n,n-1}a_{1n}$ є членом деякого визначника порядку n і входить до нього зі знаком $(-1)^{n+1}$. □

1.5.А. Знайти такі i, j та k, щоб добуток $a_{i7}a_{63}a_{4j}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ був членом відповідного визначника та входив до нього зі знаком «мінус».

► $\varphi = \begin{pmatrix} i & 6 & 4 & 5 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & j & 5 & k & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} i = 1, \\ j, k \in \{2, 6\}. \end{cases}$

$$\begin{cases} i = 1, \\ j = 2, \\ k = 6. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 5 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\sigma(\varphi) = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} = 5 + 3 = 8. \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} i = 1, \\ j = 6, \\ k = 2. \end{cases}$$ □

1.6.А. Знайти коефіцієнти біля x^5, x^4 та x^3 в многочлені $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$.

► Міркування, з яких випливає розв'язок задачі.

1) Означення визначника (в частині, що кожен доданок є добутком елементів, взятих по одному з кожного рядка та кожного стовпчика).
2) Степінь (як многочлена) кожного елемента визначника є 0 або 1.

Нехай $f(x) = \sum\limits_{k \geqslant 0} c_k x^k$.

$c_5 = 0$, оскільки $f(x)$ є визначником 4-го порядку і набрати 5-тий степінь неможливо.

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}.$$

$$c_4 x^4 = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{smallmatrix}\right)} (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{smallmatrix}\right)} a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4} = (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{smallmatrix}\right)} a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4} =$$

$$= (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{smallmatrix}\right)} x \cdot a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4} = (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & i_3 & i_4 \end{smallmatrix}\right)} x \cdot x \cdot a_{3i_3}a_{4i_4} = (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & i_4 \end{smallmatrix}\right)} x \cdot x \cdot x \cdot a_{4i_4} =$$

$$= (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)} x \cdot x \cdot x \cdot 2\,x = 2\,x^4.$$

$$c_3 x^3 = (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)} 1 \cdot x \cdot x \cdot 2\,x \; + \; (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)} 3 \cdot x \cdot x \cdot x = -5\,x^3.$$ □

1.7.А. Користуючись лише означенням визначника, обчислити:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

► a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{i_1 i_2 i_3 i_4}} a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4} = \sum (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{i_1 i_2\,3\,4}} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdot 3\cdot 4 =$

$= (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4}} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ + \ (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{2\,1\,3\,4}} 3\cdot(-1)\cdot 3\cdot 4 = 24 - (-36) = 60.$ □

► b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{i_1 i_2 i_3 i_4}} a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4} = (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4}} 4\cdot 5\cdot 7\cdot(-2) +$

$+ (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{1\,2\,4\,3}} 4\cdot 5\cdot(-5)\cdot 3 + (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{2\,1\,3\,4}} 3\cdot(-1)\cdot 7\cdot(-2) + (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,3\,4}{2\,1\,4\,3}} 3\cdot(-1)\cdot(-5)\cdot 3 =$

$= (-280) - (-300) - 42 + 45 = 23.$ □

► c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \sum_{\binom{1\,2\,\dots\,n}{i_1 i_2 \dots i_n}} (-1)^{\sigma\binom{1\,2\,\dots\,n}{i_1 i_2 \dots i_n}} a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n} =$

$= (-1)^{\sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}} 2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2 =$

$= (-1)^{0+(n-2)+(n-3)+\ldots+1+0} 2^n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 2^n.$ □

1.8.А. Подати у вигляді многочлена від t визначники:

a) $\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & t & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & t & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix}$.

► a) $\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix} = (-1)^n(t^n - a_1a_2\dots a_n).$ □

► b) $\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & t & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & t & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix} = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0.$ □

Практичне заняття №2. Властивості та застосування визначників

2.1.А. Як зміниться визначник n-го порядку, якщо: a) його останній стовпець поставити на перше місце, а решта стовпців зсунути вправо, зберігаючи їх порядок, b) до кожного стовпця, починаючи з останнього, додати попередній стовпець, c) до кожного його стовпчика додати попередній, при цьому попереднім до першого стовпчика вважається останній, d) у всіх його елементів змінити знак на протилежний, e) кожний його елемент замінити елементом, симетричним відносно побічної діагоналі?

2.2.А. Не розкриваючи визначник: a) розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x & 4 \\ 4 & 9 & x^2 & 16 \\ 8 & -27 & x^3 & 64 \end{vmatrix} = 0$,

b) довести, що визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$ ділиться на 13.

2.3.А. Розкласти визначник $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ за третім рядком.

2.4.А. Обчислити визначники:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.5.А. Обчислити ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 3 & 13 & 18 \end{pmatrix}$ методом оточуючих мінорів.

2.6.А. Знайти зв'язок між визначником матриці A порядку n та визначником (блочної) матриці $\begin{pmatrix} 5A & 4A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}$ порядку $2n$.

2.7.А. Обчислити $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

2.8.А. Користуючись формулою $\det(AB) = \det A \det B$, обчислити:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

2.9.А. Довести, що циркулянт

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\dots f(\varepsilon_{n-1}),$$

де $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$, а $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ — всі корені n-го степеня з одиниці.

2.10.А. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$ методом виділення лінійних множників.

2.11.А. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$ методом рекурентних співвідношень, якщо: a) $a = 7$, $b = 5$, $c = 2$, b) $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha\beta$, $c = 1$.

2.1.Д. Як зміниться визначник n-го порядку, якщо: a) його рядки записати в зворотньому порядку, b) до кожного стовпця, починаючи з другого, додати попередній стовпець, c) від кожного його стовпчика відняти попередній, при цьому попереднім до першого стовпчика вважається останній, d) кожний його елемент a_{ij} помножити на c^{i-j}, де $c \neq 0$, e) кожний його елемент замінити на симетричний відносно «центра» визначника f) його повернути на $\dfrac{\pi}{2}$ навколо «центра» (проти годинникової стрілки)?

2.2.Д. Не розкриваючи визначник, розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ x+1 & -1 & -2 & x+2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \\ 3 & x^2-5 & 6-x^2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$

2.3.Д. Розкласти визначник $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ за другим стовпчиком.

2.4.Д. Обчислити визначники:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}.$$

2.5.Д. Обчислити ранг матриці $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ методом оточуючих мінорів.

2.6.Д. Знайти зв'язок між визначником матриці A порядку n та визначником (блочної) матриці $\begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & 5A \end{pmatrix}$ порядку $2n$.

2.7.Д. Обчислити $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

2.8.Д. Користуючись формулою $\det(AB) = \det A \det B$, обчислити

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{vmatrix}.$$

2.9.Д. Обчислити $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$.

2.10.Д. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$ методом виділення лінійних множників.
2.11.Д. Обчислити визначник з прикладу 2.11.А. методом рекурентних співвідношень, якщо: a) $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, b) $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, c) $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$.
2.1.+. Довести, що визначник кососиметричної матриці непарного степеня дорівнює нулю.
2.2.+. Користуючись формулою $\det(AB) = \det A \det B$, довести другу групу властивостей визначника.
2.3.+. Обчислити визначник з прикладу 2.11.А. методом рекурентних співвідношень, якщо: a) $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha$, $c = \beta$, b) $a = \alpha\beta$, $b = \alpha$, $c = \beta$.

2.1.А. Як зміниться визначник n-го порядку, якщо: a) його останній стовпець поставити на перше місце, а решта стовпців зсунути вправо, зберігаючи їх порядок, b) до кожного стовпця, починаючи з останнього, додати попередній стовпець, c) до кожного його стовпчика додати попередній, при цьому попереднім до першого стовпчика вважається останній, d) у всіх його елементів змінити знак на протилежний, e) кожний його елемент замінити елементом, симетричним відносно побічної діагоналі?

▶ a) Нехай $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix}$ — заданий визначник, в якому позначені номери стовпців.

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & n & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 2 & n & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \dots = (-1)^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\Delta \quad \Longrightarrow \quad \Delta_a = (-1)^{n-1}\Delta. \qquad \square$$

▶ b) Нехай $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$ — заданий визначник, в якому позначені номери стовпців.

$$(-1)$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & 2+1 & 3+2 & \dots & (n-1)+(n-2) & n+(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3+2 & \dots & (n-1)+(n-2) & n+(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1)+(n-2) & n+(n-1) \end{vmatrix} = \dots =$$

$$(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n+(n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} = \Delta \quad \Longrightarrow$$

$$\Delta_b = \Delta. \qquad \square$$

▶ c) Нехай $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$ — заданий визначник, в якому позначені номери стовпців.

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1+n & 2+1 & 3+2 & \dots & (n-1)+(n-2) & n+(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2+1 & 3+2 & \dots & (n-1)+(n-2) & n+(n-1) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} n & 2+1 & 3+2 & \dots & (n-1)+(n-2) & n+(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$(-1)$$

$$= \Delta_b + \begin{vmatrix} n & 2+1 & 3+2 & \dots & (n-1)+(n-2) & n+(n-1) \end{vmatrix} =$$

$$(-1)$$

$$= \Delta_b + \begin{vmatrix} n & 2+1 & 3+2 & \dots & (n-1)+(n-2) & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)$$

$$= \Delta_b + \begin{vmatrix} n & 2+1 & 3+2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= \Delta_b + \begin{vmatrix} n & \overset{\downarrow\,(-1)}{2+1} & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_b + \begin{vmatrix} n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \Delta_b + \Delta_a = \Delta + (-1)^{n-1}\Delta \quad \Longrightarrow$$

$$\Delta_c = \Delta + (-1)^{n-1}\Delta = \begin{cases} 2\,\Delta, & \text{якщо} \quad n \in 2\,\mathbb{N} - 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \in 2\,\mathbb{N}. \end{cases} \qquad \square$$

▶ d) Нехай $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$ — заданий визначник, в якому позначені номери стовпців.

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & -n \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & -n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & \dots & -(n-1) & -n \end{vmatrix} = \dots = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & -n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} = (-1)^n\Delta \quad \Longrightarrow \quad \Delta_d = (-1)^n\Delta. \qquad \square$$

▶ e) Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^{1,1} & a^{1,2} & \dots & a^{1,n} \\ a^{2,1} & a^{2,2} & \dots & a^{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n,1} & a^{n,2} & \dots & a^{n,n} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} a^{1,i_1} a^{2,i_2} \dots a^{n,i_n}$$

— заданий визначник, в якому елемент $a^{i,j}$ стоїть в i-му рядку та j-му стовпці.

1-й спосіб.

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} a^{n,n} & a^{n-1,n} & \dots & a^{1,n} \\ a^{n,n-1} & a^{n-1,n-1} & \dots & a^{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n,1} & a^{n-1,1} & \dots & a^{1,1} \end{vmatrix} = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} n+1-i_1 & n+1-i_2 & \dots & n+1-i_n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{smallmatrix}\right)} a^{1,i_1} a^{2,i_2} \dots a^{n,i_n}.$$

$$\sigma\begin{pmatrix} n+1-i_1 & n+1-i_2 & \dots & n+1-i_n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ n+1-i_1 & n+1-i_2 & \dots & n+1-i_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n+1-i_n & n+1-i_{n-1} & \dots & n+1-i_2 & n+1-i_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} k > l, \\ n+1-i_k > n+1-i_l, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} k > l, \\ i_l > i_k, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\sigma\begin{pmatrix} n+1-i_1 & n+1-i_2 & \dots & n+1-i_n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Delta_e = \sum (-1)^{\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)} a^{1,i_1} a^{2,i_2} \dots a^{n,i_n} = \Delta.$$

2-й спосіб.

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} a^{n,n} & a^{n-1,n} & \dots & a^{1,n} \\ a^{n,n-1} & a^{n-1,n-1} & \dots & a^{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n,1} & a^{n-1,1} & \dots & a^{1,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^{n,n} & a^{n-1,n} & \dots & a^{1,n} \\ a^{n,n-1} & a^{n-1,n-1} & \dots & a^{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n,1} & a^{n-1,1} & \dots & a^{1,1} \end{vmatrix}^T =$$

$$= \begin{vmatrix} a^{n,n} & a^{n,n-1} & \dots & a^{n,1} \\ a^{n-1,n} & a^{n-1,n-1} & \dots & a^{n-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{1,n} & a^{1,n-1} & \dots & a^{1,1} \end{vmatrix} = (-1)^k \begin{vmatrix} a^{n,1} & a^{n,2} & \dots & a^{n,n} \\ a^{n-1,1} & a^{n-1,2} & \dots & a^{n-1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{1,1} & a^{1,2} & \dots & a^{1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2k} \begin{vmatrix} a^{1,1} & a^{1,2} & \dots & a^{1,n} \\ a^{2,1} & a^{2,2} & \dots & a^{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n,1} & a^{n,2} & \dots & a^{n,n} \end{vmatrix} = \Delta \quad \Longrightarrow \quad \Delta_e = \Delta.$$ □

2.2.А. Не розкриваючи визначник: a) розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x & 4 \\ 4 & 9 & x^2 & 16 \\ 8 & -27 & x^3 & 64 \end{vmatrix} = 0$,

b) довести, що визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$ ділиться на 13.

► a) Вочевидь, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$ є коренями заданого рівняння. Інших коренів рівняння не має, оскільки ліва частина рівняння є многочленом 3-го степеня. □

► b) Ознака подільності на 13:

$N = 10\,a + b \,\vdots\, 13 \quad \Longleftrightarrow \quad a + 4\,b \,\vdots\, 13.$

Легко перевірити, що числа 1131, 1105, 1248 та 2093 діляться на 13. Тоді визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1131 \\ 1 & 1 & 0 & 1105 \\ 1 & 2 & 4 & 1248 \\ 2 & 0 & 9 & 2093 \end{vmatrix},$$

вочевидь, ділиться на 13. □

2.3.А. Розкласти визначник $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ за третім рядком.

► $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + c \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} +$

$+d \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8\,a + 15\,b + 12\,c - 19\,d.$ □

2.4.A. Обчислити визначники:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

▶ a)
$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)\ (-3)\ (-1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ -11 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)\ (-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -3 & -11 \\ 4 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -10 & -3 & -11 \\ 4 & -5 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -11 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 52. \quad \square$$

▶ b)
$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (-1) \end{matrix} = \begin{matrix} (-1) \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & \boxed{1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5. \quad \square$$

2.5.A. Обчислити ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 3 & 13 & 18 \end{pmatrix}$ методом оточуючих мінорів.

▶ $a_{11} = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad r \geqslant 1.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad r \geqslant 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 18 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$r = 2.$ $\square$

2.6.A. Знайти зв'язок між визначником матриці A порядку n та визначником (блочної) матриці $\begin{pmatrix} 5A & 4A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}$ порядку $2n$.

▶ Нехай $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тоді, наприклад, $\begin{pmatrix} 5A & 4A \\ 2A & 3A \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} A & -2A \\ 2A & 3A \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 5a & 5b & 4a & 4b \\ 5c & 5d & 4c & 4d \\ 2a & 2b & 3a & 3b \\ 2c & 2d & 3c & 3d \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ (-2) \\ (-2) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} a & b & -2a & -2b \\ c & d & -2c & -2d \\ 2a & 2b & 3a & 3b \\ 2c & 2d & 3c & 3d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 5A & 4A \\ 2A & 3A \end{vmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \\ (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} A & -2A \\ 2A & 3A \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \longleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} A & -2A \\ 0 & 7A \end{vmatrix} = |A| \cdot |7A| = 7^n |A|^2. \qquad \square$$

2.7.А. Обчислити $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

► Нехай $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -34 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\ A^{-1}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -42, \ A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -15, \ A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 58,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 24, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -38,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 22, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -32,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-34} \begin{pmatrix} -42 & -15 & 58 \\ 24 & 11 & -38 \\ 22 & 3 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{17} & \frac{15}{34} & -\frac{29}{17} \\ -\frac{12}{17} & -\frac{11}{34} & \frac{19}{17} \\ -\frac{11}{17} & -\frac{3}{34} & \frac{16}{17} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

2.8.А. Користуючись формулою $\det(AB) = \det A \det B$, обчислити:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

► a) $\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta^T = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

Відповідь: $\Delta = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. $\square$

► b) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} 1+x_1y_1, & \text{якщо } n=1, \\ (x_2-x_1)(y_2-y_1), & \text{якщо } n=2, \\ 0, & \text{якщо } n \geqslant 3. \end{cases}$$ □

2.9.А. Довести, що циркулянт

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\dots f(\varepsilon_{n-1}),$$

де $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$, а $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ — всі корені n-го степеня з одиниці.

► Розглянемо на прикладі визначника порядку 3.

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_0^2 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0+a_1\varepsilon_0+a_2\varepsilon_0^2 & a_0+a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_1^2 & a_0+a_1\varepsilon_2+a_2\varepsilon_2^2 \\ a_2+a_0\varepsilon_0+a_1\varepsilon_0^2 & a_2+a_0\varepsilon_1+a_1\varepsilon_1^2 & a_2+a_0\varepsilon_2+a_1\varepsilon_2^2 \\ a_1+a_2\varepsilon_0+a_0\varepsilon_0^2 & a_1+a_2\varepsilon_1+a_0\varepsilon_1^2 & a_1+a_2\varepsilon_2+a_0\varepsilon_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0+a_1\varepsilon_0+a_2\varepsilon_0^2 & a_0+a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_1^2 & a_0+a_1\varepsilon_2+a_2\varepsilon_2^2 \\ a_2\varepsilon_0^3+a_0\varepsilon_0+a_1\varepsilon_0^2 & a_2\varepsilon_1^3+a_0\varepsilon_1+a_1\varepsilon_1^2 & a_2\varepsilon_2^3+a_0\varepsilon_2+a_1\varepsilon_2^2 \\ a_1\varepsilon_0^3+a_2\varepsilon_0^4+a_0\varepsilon_0^2 & a_1\varepsilon_1^3+a_2\varepsilon_1^4+a_0\varepsilon_1^2 & a_1\varepsilon_2^2+a_2\varepsilon_2^4+a_0\varepsilon_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_0+a_1\varepsilon_0+a_2\varepsilon_0^2 & a_0+a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_1^2 & a_0+a_1\varepsilon_2+a_2\varepsilon_2^2 \\ (a_0+a_1\varepsilon_0+a_2\varepsilon_0^2)\varepsilon_0 & (a_0+a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_1^2)\varepsilon_1 & (a_0+a_1\varepsilon_2+a_2\varepsilon_2^2)\varepsilon_2 \\ (a_0+a_1\varepsilon_0+a_2\varepsilon_0^2)\varepsilon_0^2 & (a_0+a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_1^2)\varepsilon_1^2 & (a_0+a_1\varepsilon_2+a_2\varepsilon_2^2)\varepsilon_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_0)\varepsilon_0 & f(\varepsilon_1)\varepsilon_1 & f(\varepsilon_2)\varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_0)\varepsilon_0^2 & f(\varepsilon_1)\varepsilon_1^2 & f(\varepsilon_2)\varepsilon_2^2 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_0^2 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_0^2 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2).$$ □

2.10.А. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$ методом виділення лінійних множників.

► Нехай $\Delta(x,z)=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+z&1\\1&1&1&1-z\end{vmatrix}$.

$$\Delta(-x,z)=\begin{vmatrix}1-x&1&1&1\\1&1+x&1&1\\1&1&1+z&1\\1&1&1&1-z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+z&1\\1&1&1&1-z\end{vmatrix}=\Delta(x,z),$$

аналогічно $\Delta(x,-z)=\Delta(x,z)$. Крім того, $\Delta(0,z)=\Delta(x,0)=0$.

$$\begin{cases}\Delta(-x,z)=\Delta(x,z),\\ \Delta(0,z)=0,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad \Delta(x,z)\;\vdots\;x^2.\quad \text{Аналогічно}\ \ \Delta(x,z)\;\vdots\;z^2.$$

$$\gcd(x,z)=1\quad\Longrightarrow\quad\Delta(x,z)\;\vdots\;x^2z^2,\quad \Delta(x,z)=f(x,z)\,x^2z^2.$$

$$\deg f(x,z)=0\quad\Longrightarrow\quad f(x,z)=A,\quad \Delta(x,z)=A\,x^2z^2.$$

При розкритті визначника $\Delta(x,z)$, коефіцієнт при x^2z^2 дорівнює 1, а тому $A=1$ і $\Delta(x,z)=x^2z^2$. □

2.11.А. Обчислити визначник $\begin{vmatrix}a&b&0&\dots&0\\c&a&b&\dots&0\\0&c&a&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&a\end{vmatrix}$ методом рекурентних співвідношень, якщо: a) $a=7$, $b=5$, $c=2$, b) $a=\alpha+\beta$, $b=\alpha\beta$, $c=1$.

► a) $\Delta_n=\begin{vmatrix}7&5&0&\dots&0\\2&7&5&\dots&0\\0&2&7&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&7\end{vmatrix}=$

$$=7\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&5&\dots&0\\2&7&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&7\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&5&\dots&0\\0&7&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&7\end{vmatrix}=7\,\Delta_{n-1}-10\,\Delta_{n-2}.$$

$k^2-7\,k+10=0$ — характеристичний многочлен, корені якого $k_1=2$, $k_2=5$. $\Longrightarrow$

$$\Delta_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 5^n\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}\Delta_1=2\,C_1+5\,C_2=7,\\ \Delta_2=4\,C_1+25\,C_2=39,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}C_1=-\dfrac{2}{3},\\ C_2=\dfrac{5}{3},\end{cases}\quad\Longrightarrow$$

$$\Delta_n=\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}.$$ □

► b) $\Delta_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&0&\dots&0\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&\dots&0\\0&1&\alpha+\beta&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&\alpha+\beta\end{vmatrix}=(\alpha+\beta)\,\Delta_{n-1}-\alpha\beta\,\Delta_{n-2}.$

$k^2 - (\alpha + \beta)\,k + \alpha\beta = 0$ — характеристичний многочлен, корені якого $k_1 = \alpha$, $k_2 = \beta$.

$$\alpha \neq \beta \quad \Longrightarrow \quad \Delta_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

$$\alpha = \beta \quad \Longrightarrow \quad \Delta_n = C_1 \cdot \alpha^n + C_2 \cdot n\,\alpha^n \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \Delta_1 = \alpha\, C_1 + \alpha\, C_2 = 2\,\alpha, \\ \Delta_2 = \alpha^2\, C_1 + 2\,\alpha^2\, C_2 = 3\,\alpha^2, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$C_1 = C_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Delta_n = (n+1)\,\alpha^n. \qquad \square$$

Практичне заняття №3. Поверхні другого порядку

3.1.А. Визначити тип ліній перетину поверхонь: a) $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$, b) $2x^2 - y^2 - z^2 = 1$, c) $2x^2 + y^2 = 2z$, d) $2x^2 - y^2 = 2z$, площинами $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$.

3.2.А. Визначити тип поверхні в залежності від параметра λ:

$a)\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,$	$b)\ \lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1,$	$c)\ \lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,$
$d)\ x^2 + y^2 - z^2 = \lambda,$	$e)\ x^2 - y^2 - z^2 = \lambda,$	$f)\ x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1,$
$g)\ x^2 + y^2 = \lambda z,$	$h)\ \lambda x^2 + y^2 = z,$	$i)\ \lambda(x^2 + y^2) = z,$
$j)\ x^2 + y^2 = \lambda,$	$k)\ x^2 - y^2 = \lambda,$	$l)\ x^2 + \lambda y^2 = \lambda z^2 + 1.$

3.3.А. Скласти рівняння і визначити тип поверхні, яка утворилася при обертанні гіперболи $x^2 - y^2 = 1$ навколо вісі: a) Ox, b) Oy.

3.4.А. Скласти рівняння прямолінійних твірних поверхні $4x^2 - z^2 = y$, які проходять через точку $M(1, 3, -1)$.

3.5.А. Скласти рівняння циліндра, який проектує коло $\gamma\colon \begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16, \end{cases}$ на площини: a) Oxy, b) Oxz, c) Oyz, d) $\pi\colon 2x - y + z - 10 = 0$.

3.6.А. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат, твірні якого є дотичними до сфери $S\colon (x-5)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16$.

3.7.А. Визначити, при яких значеннях λ площина $\pi\colon x + \lambda z - 1 = 0$ перетинає поверхню $\gamma\colon x^2 + y^2 - z^2 = -1$ по: a) еліпсу, b) гіперболі.

3.8.А. Скласти рівняння дотичної до еліпсоїда площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ еліпсоїда.

3.1.Д. Скласти рівняння циліндра, який проектує коло $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 36, \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25, \end{cases}$ на площини: a) Oxy, b) Oxz, c) Oyz, d) $2x - y + z - 10 = 0$.

3.2.Д. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат і напрямною:

a) $\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \\ z = c, \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = c. \end{cases}$

3.3.Д. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці $M_0(1, 1, 1)$, твірні якого є дотичними до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

3.4.Д. Скласти рівняння і визначити тип поверхні, яка утворилася при обертанні кола $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ навколо вісі: a) Ox, b) Oy.

3.5.Д. Скласти рівняння сфери, центр якої лежить на прямій $\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0, \end{cases}$ і яка дотикається до площин $x + 2y - 2z - 2 = 0$ та $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

3.6.Д. Скласти рівняння прямолінійних твірних поверхні $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{36} = 1$, які проходять через точку $M(4, 1, -3)$, та визначити кут між ними.

3.7.Д. Визначити, при яких значеннях λ площина $x + \lambda y - 2 = 0$ перетинає поверхню $3x^2 + 2z^2 = 6y$ по: a) еліпсу, b) параболі.

3.8.Д. Скласти рівняння дотичної площини до: a) конуса, b) однопорожнинного гіперболоїда, c) двопорожнинного гіперболоїда, d) еліптичного параболоїда, e) гіперболічного параболоїда в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить до цієї поверхні другого порядку.

3.1.+. Чи в будь-яку трикутну піраміду можна вписати сферу?

3.2.+. Чи навколо будь-якої трикутної піраміди можна описати сферу?

3.3.+. Скласти рівняння сфери, вписаної в трикутну піраміду, що утворена площинами $3x - 2y + 6z - 18 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3.1.A. Визначити тип ліній перетину поверхонь: a) $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$, b) $2x^2 - y^2 - z^2 = 1$, c) $2x^2 + y^2 = 2z$, d) $2x^2 - y^2 = 2z$, площинами $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$.

►

	$2x^2 + y^2 - z^2 = 1$	$2x^2 - y^2 - z^2 = 1$	$2x^2 + y^2 = 2z$	$2x^2 - y^2 = 2z$
$x = 0$				
$x = \pm 1$				
$y = 0$				
$y = \pm 1$				
$z = 0$				
$z = 1$				
$z = -1$				

<table>
<tr><th></th><th>$2x^2 + y^2 - z^2 = 1$</th><th>$2x^2 - y^2 - z^2 = 1$</th><th>$2x^2 + y^2 = 2z$</th><th>$2x^2 - y^2 = 2z$</th></tr>
<tr><td>$x = 0$</td><td>$y^2 - z^2 = 1$
гіпербола</td><td>$y^2 + z^2 = -1$
$\varnothing$</td><td>$y^2 = 2z$
парабола</td><td>$-y^2 = 2z$
парабола</td></tr>
<tr><td>$x = \pm 1$</td><td>$y^2 - z^2 = -1$
гіпербола</td><td>$y^2 + z^2 = 1$
коло</td><td>$y^2 = 2(z-1)$
парабола</td><td>$-y^2 = 2(z-1)$
парабола</td></tr>
<tr><td>$y = 0$</td><td>$2x^2 - z^2 = 1$
гіпербола</td><td>$2x^2 - z^2 = 1$
гіпербола</td><td>$x^2 = z$
парабола</td><td>$x^2 = z$
парабола</td></tr>
<tr><td>$y = \pm 1$</td><td>$2x^2 - z^2 = 0$
пара $\times$ прямих</td><td>$2x^2 - z^2 = 2$
гіпербола</td><td>$x^2 = z - \frac{1}{2}$
парабола</td><td>$x^2 = z + \frac{1}{2}$
парабола</td></tr>
<tr><td>$z = 0$</td><td>$2x^2 + y^2 = 1$
еліпс</td><td>$2x^2 - y^2 = 1$
гіпербола</td><td>$2x^2 + y^2 = 0$
точка</td><td>$2x^2 - y^2 = 0$
пара $\times$ прямих</td></tr>
<tr><td>$z = 1$</td><td rowspan="2">$2x^2 + y^2 = 2$
еліпс</td><td rowspan="2">$2x^2 - y^2 = 2$
гіпербола</td><td>$2x^2 + y^2 = 2$
еліпс</td><td>$2x^2 - y^2 = 2$
гіпербола</td></tr>
<tr><td>$z = -1$</td><td>$2x^2 + y^2 = -2$
$\varnothing$</td><td>$2x^2 - y^2 = -2$
гіпербола</td></tr>
</table>

□

3.2.А. Визначити тип поверхні в залежності від параметра λ:

$a)$ $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,$	$b)$ $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1,$	$c)$ $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,$
$d)$ $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda,$	$e)$ $x^2 - y^2 - z^2 = \lambda,$	$f)$ $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1,$
$g)$ $x^2 + y^2 = \lambda z,$	$h)$ $\lambda x^2 + y^2 = z,$	$i)$ $\lambda(x^2 + y^2) = z,$
$j)$ $x^2 + y^2 = \lambda,$	$k)$ $x^2 - y^2 = \lambda,$	$l)$ $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z^2 + 1.$

►

	$\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$x^2 - y^2 - z^2 = \lambda$	$\lambda x^2 + y^2 = z$	$x^2 - y^2 = \lambda$
$\lambda < 0$				
$\lambda = 0$				
$\lambda > 0$				

	$\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$	$x^2 - y^2 - z^2 = \lambda$	$\lambda x^2 + y^2 = z$	$x^2 - y^2 = \lambda$
$\lambda < 0$	однопорожнинний гіперболоїд	однопорожнинний гіперболоїд	гіперболічний параболоїд	гіперболічний циліндр
$\lambda = 0$	круговий циліндр	круговий конус	параболічний циліндр	пара площин, що перетинаються
$\lambda > 0$	еліпсоїд обертання	двопорожнинний гіперболоїд	еліптичний параболоїд	гіперболічний циліндр

□

3.3.А. Скласти рівняння і визначити тип поверхні, яка утворилася при обертанні гіперболи $x^2 - y^2 = 1$ навколо вісі: a) Ox, b) Oy.

► Гіпербола задається системою $\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ де $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1$.

a) Якщо Ox — вісь обертання, то $F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ — рівняння поверхні обертання.

$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = x^2 - (\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 - 1 = x^2 - y^2 - z^2 - 1 \quad \Longrightarrow$

$x^2 - y^2 - z^2 = 1$ — двопорожнинний гіперболоїд.

b) Якщо Oy — вісь обертання, то $F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$ — рівняння поверхні обертання.

$F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = (\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2 - y^2 - 1 = x^2 + z^2 - y^2 - 1 \quad \Longrightarrow$

$x^2 - y^2 + z^2 = 1$ — однопорожнинний гіперболоїд. □

3.4.А. Скласти рівняння прямолінійних твірних поверхні $4x^2 - z^2 = y$, які проходять через точку $M(1, 3, -1)$.

► $4x^2 - z^2 = y \implies (2x - z)\cdot(2x + z) = 1\cdot y \implies$

1-й випадок.

$$l_1\colon \begin{cases} \lambda(2x - z) = \mu, \\ \mu(2x + z) = \lambda y, \end{cases} \quad M(1,3,-1) \implies 3\lambda = \mu \implies l_1\colon \begin{cases} 2x - z - 3 = 0, \\ 6x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

2-й випадок.

$$l_2\colon \begin{cases} \lambda(2x - z) = \mu y, \\ \mu(2x + z) = \lambda, \end{cases} \quad M(1,3,-1) \implies \lambda = \mu \implies l_2\colon \begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ 2x + z - 1 = 0. \end{cases} \qquad \square$$

3.5.A. Скласти рівняння циліндра, який проектує коло $\gamma\colon \begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16, \end{cases}$ на площини: a) Oxy, b) Oxz, c) Oyz, d) $\pi\colon 2x - y + z - 10 = 0$.

► a) Вочевидь, кожне рівняння заданої системи визначає сферу: перше — з центром в точці $C_1(0,-2,1)$ і радіусом $R_1 = 5$, друге — з центром в точці $C_2(0,0,0)$ і радіусом $R_2 = 4$. Оскільки $|C_1C_2| = \sqrt{5}$ й усі нерівності трикутника

$$|C_1C_2| < R_1 + R_2, \quad R_1 < |C_1C_2| + R_2, \quad R_2 < R_1 + |C_1C_2|$$

задовольняються, то дві сфери дійсно перетинаються по колу

$$\gamma\colon \begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16, \end{cases} \iff \gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ 4y - 2z = 4. \end{cases} \tag{1}$$

Шляхом виключення з системи (1) змінної z отримуємо рівняння–наслідок, яке є рівнянням циліндра, що проектує коло γ на площину Oxy.

$$(1) \implies x^2 + y^2 + (2y - 2)^2 = 16 \iff x^2 + 5y^2 - 8y - 12 = 0.$$

Останнє рівняння на площині Oxy визначає еліпс $x^2 + 5(y - \frac{4}{5})^2 = \frac{76}{5}$ з центром в точці $A(0, \frac{4}{5})$ та півосями $a = \sqrt{\frac{76}{5}}$ та $b = \sqrt{\frac{76}{25}}$. Зокрема, з цього рівняння випливає обмеження на змінну y:

$$\frac{4 - \sqrt{76}}{5} \leqslant y \leqslant \frac{4 + \sqrt{76}}{5}, \tag{2}$$

яке буде використано в пункті c). $\square$

► b) Аналогічно до пункту a) маємо:

$$(1) \implies x^2 + (\tfrac{1}{2}z + 1)^2 + z^2 = 16 \iff x^2 + \tfrac{5}{4}z^2 + z - 15 = 0.$$

З аналогічних до пункту a) міркувань маємо обмеження на змінну z:

$$\frac{-2 - 2\sqrt{76}}{5} \leqslant z \leqslant \frac{-2 + 2\sqrt{76}}{5}, \tag{3}$$

яке також буде використано в пункті c). $\square$

► c) Аналогічно до пунктів a) та b) маємо:

$$(1) \implies 4y - 2z = 4 \iff 2y - z - 2 = 0.$$

Оскільки коло γ є обмеженою (в певному сенсі) фігурою, а рівняння циліндра, який проектує задане коло на площину Oyz, визначає необмежену площину, то на змінні y та z необхідно накласти обмеження, які визначаються нерівностями (2) та (3). $\square$

▶ d) Через кожну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ напрямної γ проведемо твірні l, перпендикулярні до площини π. Якщо $\boldsymbol{n} = (2, -1, 1)$ — вектор нормалі до площини π, то

$$l\colon \begin{cases} x = x_0 + 2\,t, \\ y = y_0 - t, \\ z = z_0 + t. \end{cases} \quad \text{Крім того,} \quad M_0 \in \gamma \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_0^2 + (y_0 + 2)^2 + (z_0 - 1)^2 = 25, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 16. \end{cases}$$

Виключаючи з системи останніх двох систем змінні x_0, y_0, z_0, t, отримаємо рівняння шуканої циліндричної поверхні.

$$\begin{cases} x = x_0 + 2\,t, \\ y = y_0 - t, \\ z = z_0 + t, \\ x_0^2 + (y_0 + 2)^2 + (z_0 - 1)^2 = 25, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 16, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = x - 2\,t, \\ y_0 = y + t, \\ z_0 = z - t, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 16, \\ 4y_0 - 2z_0 = 4, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} (x - 2\,t)^2 + (y + t)^2 + (z - t)^2 = 16, \\ 4(y + t) - 2(z - t) = 4, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} (x - 2\,t)^2 + (y + t)^2 + (z - t)^2 = 16, \\ t = \dfrac{-2\,y + z + 2}{3}, \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$(x - 2\,\frac{-2\,y + z + 2}{3})^2 + (y + \frac{-2\,y + z + 2}{3})^2 + (z - \frac{-2\,y + z + 2}{3})^2 = 16 \quad \Longrightarrow$$

$$3\,x^2 + 7\,y^2 + 3\,z^2 + 8\,x\,y - 4\,x\,z - 2\,y\,z - 8\,x - 12\,y + 4\,z - 40 = 0. \qquad \square$$

3.6.A. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат, твірні якого є дотичними до сфери $S\colon (x - 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 16$.

▶ Вочевидь, точка $C(5, -1, 0)$ — центр сфери S, а $R = 4$ — її радіус. Оскільки

$$|OC| = \sqrt{26} > R,$$

то задача побудови конуса K з вершиною в точці $O(0, 0, 0)$, твірні якого є дотичними до сфери S, є коректною. Кожна точка $M(x, y, z)$ конуса K лежить на деякій твірній

$$l\colon \begin{cases} x = m\,t, \\ y = n\,t, \\ z = p\,t, \end{cases} \tag{4}$$

яка дотикається до сфери S в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$M_0 \in l \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = m\,t_0, \\ y_0 = n\,t_0, \\ z_0 = p\,t_0. \end{cases} \qquad M_0 \in S \quad \Longrightarrow \quad (x_0 - 5)^2 + (y_0 + 1)^2 + z_0^2 = 16.$$

$$l \text{ — дотична до } S \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} M_0 \in l, \\ M_0 \in S, \end{cases} \quad \text{має два розв'язки, які збігаються.}$$

$$\begin{cases} M_0 \in l, \\ M_0 \in S, \end{cases} \implies (m\,t_0 - 5)^2 + (n\,t_0 + 1)^2 + (p\,t_0)^2 = 16 \implies$$

$$(m^2 + n^2 + p^2)\,t_0^2 + 2\,(-5\,m + n)\,t_0 + 10 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (-5\,m + n)^2 - 10\,(m^2 + n^2 + p^2) = 15\,m^2 - 10\,mn - 9\,n^2 - 10\,p^2.$$

Отже, з того, що два розв'язки системи $\begin{cases} M_0 \in l, \\ M_0 \in S, \end{cases}$ збігаються, випливає, що $\dfrac{D}{4} = 0$, тобто

$$15\,m^2 - 10\,mn - 9\,n^2 - 10\,p^2 = 0.$$

Підставляючи в останнє співвідношення параметри m, n, p з рівняння (4) та виключаючи t шляхом множення обох частин на t^2 (значенню $t = 0$ відповідає вершина O конуса K, а тому можна вважати, що $t \neq 0$), отримуємо рівняння конуса K:

$$15\,x^2 - 10\,xy - 9\,y^2 - 10\,z^2 = 0. \qquad \square$$

3.7.A. Визначити, при яких значеннях λ площина $\pi\colon x + \lambda\,z - 1 = 0$ перетинає поверхню $\gamma\colon x^2 + y^2 - z^2 = -1$ по: a) еліпсу, b) гіперболі.

► Спроектуємо криву $\pi \cap \gamma$ перетину площини π з поверхнею γ на площину Oyz. Для цього необхідно виключити змінну x з системи

$$\begin{cases} x + \lambda\,z - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - z^2 = -1, \end{cases} \implies (1 - \lambda\,z)^2 + y^2 - z^2 = -1 \implies$$

$$(\lambda^2 - 1)\,z^2 - 2\,\lambda\,z + y^2 + 2 = 0.$$

$$\lambda \in \{-1, 1\} \implies y^2 = \mp 2\,z - 2 \implies \pi \cap \gamma \text{ — парабола.}$$

$$\lambda \notin \{-1, 1\} \implies (\lambda^2 - 1)\left(z^2 - 2\,z\,\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2}\right) - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} + y^2 + 2 = 0 \implies$$

$$(\lambda^2 - 1)\left(z - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda^2 - 1}.$$

$$\lambda \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \implies (z \pm \sqrt{2})^2 + y^2 = 0 \implies \pi \cap \gamma \text{ — точка.}$$

$$\lambda \notin \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\} \implies \frac{(z - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1})^2}{\frac{2 - \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2}} + \frac{y^2}{\frac{2 - \lambda^2}{\lambda^2 - 1}} = 1.$$

$$\frac{2 - \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2} \cdot \frac{2 - \lambda^2}{\lambda^2 - 1} < 0 \iff \lambda \in (-1, 1) \implies \pi \cap \gamma \text{ — гіпербола.}$$

$$\frac{2 - \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2} > 0, \quad \frac{2 - \lambda^2}{\lambda^2 - 1} > 0 \iff \lambda \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \implies \pi \cap \gamma \text{ — еліпс.}$$

$$\frac{2 - \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)^2} < 0, \quad \frac{2 - \lambda^2}{\lambda^2 - 1} < 0 \iff \lambda \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\infty, \sqrt{2}) \implies \pi \cap \gamma = \varnothing. \qquad \square$$

3.8.А. Скласти рівняння дотичної до еліпсоїда площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ еліпсоїда.

► Рівняння дотичної до еліпсоїда

$$\gamma\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в точці $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$ площини π будемо шукати у вигляді

$$\pi\colon A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0. \tag{5}$$

Враховуючи, що $M_0 \in \gamma$, рівняння еліпсоїда можна записати у вигляді

$$\gamma\colon \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} + \frac{y^2 - y_0^2}{b^2} + \frac{z^2 - z_0^2}{c^2} = 0.$$

Площина $\pi_x\colon x = x_0$ перетинає площину π по прямій $l_x\colon \begin{cases} B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0, \\ x = x_0, \end{cases}$ яка є дотичною до кривої $\gamma_x\colon \begin{cases} \dfrac{y^2 - y_0^2}{b^2} + \dfrac{z^2 - z_0^2}{c^2} = 0, \\ x = x_0, \end{cases}$ в площині π_x. Оскільки пряма l_x дотикається до кривої (другого порядку) γ_x в точці M_0, то система $\begin{cases} \gamma_x, \\ l_x, \end{cases}$ повинна мати два однакових розв'язки. Дослідимо, при якому співвідношенні $B : C$ це відбувається.

$$\begin{cases} \dfrac{y^2 - y_0^2}{b^2} + \dfrac{z^2 - z_0^2}{c^2} = 0, \\ B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0, \\ x = x_0, \end{cases} \implies (y - y_0)\left(\frac{y + y_0}{b^2} - \frac{B}{C}\cdot\frac{z + z_0}{c^2}\right) = 0 \implies$$

$$\left[\begin{array}{l} y - y_0 = 0, \\ \dfrac{y + y_0}{b^2} - \dfrac{B}{C}\cdot\dfrac{z + z_0}{c^2} = 0. \end{array}\right.$$

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ є розв'язком кожного з рівнянь сукупності, а тому

$$\frac{B}{C} = \frac{y_0}{z_0}\cdot\frac{c^2}{b^2}. \tag{6}$$

Провівши аналогічні міркування щодо площин $\pi_y\colon y = y_0$ та $\pi_z\colon z = z_0$, отримаємо відповідні співвідношення

$$\frac{A}{C} = \frac{x_0}{z_0}\cdot\frac{c^2}{a^2} \quad \text{та} \quad \frac{A}{B} = \frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{b^2}{a^2}. \tag{7}$$

Підставивши значення

$$A = \frac{x_0}{a^2}, \quad B = \frac{y_0}{b^2} \quad \text{та} \quad C = \frac{z_0}{c^2},$$

які, вочевидь, задовольняють співвідношення (6) та (7), у рівняння (5) та врахувавши, що $M_0 \in \gamma$, отримаємо рівняння дотичної до еліпсоїда γ площини

$$\pi\colon \frac{x_0\,x}{a^2} + \frac{y_0\,y}{b^2} + \frac{z_0\,z}{c^2} = 1. \qquad \square$$

Практичне заняття №4. Лінійні та білінійні функції

4.1.А. Довести, що композиція лінійних відображень є лінійним відображенням.
4.2.А. З'ясувати, чи буде лінійною визначена на звичайному тривимірному просторі W_3 функція: a) $\varphi\colon \boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$, b) $\varphi\colon \boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b})$, де $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ — ненульові фіксовані вектори. В разі лінійності функції, знайти її ядро та координатний рядок в базисі $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.
4.3.А. Довести, що ядро лінійної функції $f\colon L \to P$ є підпростором простору (L, P).
4.4.А. Чи може ненульова лінійна функція на комплексному векторному просторі набувати лише дійсних значень?
4.5.А. Знайти максимальну лінійно незалежну підсистему системи лінійних функцій $\varphi_1 = 5\,x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3 + 4\,x_4$, $\varphi_2 = 2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 + 5\,x_4$, $\varphi_3 = 4\,x_1 - 3\,x_2 - 5\,x_3 - 7\,x_4$, $\varphi_4 = x_1 + 7\,x_3 + 11\,x_4$ і виразити через неї решту функцій системи.
4.6.А. З'ясувати, які з відображень: a) $\varphi_1(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$, b) $\varphi_2(A, B) = \operatorname{tr}(AB - BA)$, c) $\varphi_3(A, B) = AB$, d) $\varphi_4(A, B) = \operatorname{tr}(A + B)$, e) $\varphi_5(A, B) = \operatorname{tr}(AB^T)$ є білінійними функціями на просторі $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. В разі білінійності функції, знайти її матрицю в базисі з матричних одиниць E_{ij}.
4.7.А. Білінійна функція φ на просторі $\mathbb{R}^3$ в природному базисі задана матрицею $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, якщо $\boldsymbol{x} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{y} = (1, 1, -1)$. Знайти симетричну складову φ_s функції φ та її ядро $\ker \varphi_s$. Знайти матриці функцій φ та φ_s в базисі $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, якщо $\boldsymbol{z} = (2, 1, -1)$.
4.8.А. Дві білінійні функції називаються еквівалентними, якщо вони визначають одну й ту ж білінійну функцію в деяких двох базисах одного простору. Не виконуючи обчислень з'ясувати, чи еквівалентні білінійні функції:
a) $\varphi(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1$,
$\psi(x, y) = x_1y_2 + 2x_2y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$,
b) $\varphi(x, y) = x_1y_1 + ix_1y_2$,
$\psi(x, y) = 2x_1y_1 + (1 + i)x_1y_2 + (1 - i)x_2y_1 - ix_2y_2$,
c) $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 7x_3y_1 + 8x_3y_2 + 10x_3y_3$,
$\psi(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + 5x_3y_3$.
4.9.А. Методами Лагранжа та Якобі знайти канонічний вигляд симетричної білінійної форми φ та невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, якщо:
a) $\varphi = 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3$,
b) $\varphi = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3$.
4.1.Д. З'ясувати, чи буде лінійною визначена на звичайному тривимірному просторі W_3 функція: a) $\varphi\colon \boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$, b) $\varphi\colon \boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$, c) $\varphi\colon \boldsymbol{v} \mapsto \cos(\widehat{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}})$, де $\boldsymbol{a}$ — ненульовий фіксований вектор. В разі лінійності функції, знайти її ядро та зображення в базисі $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.
4.2.Д. Довести, що для кожного цілого числа $k \geqslant 0$ відображення: a) $\mu^k\colon f \mapsto f(k)$, b) $\nu^k\colon f \mapsto f^{(k)}(0)$, c) $\tau^k\colon f \mapsto \int\limits_0^k f(x)\,dx$ є лінійною функцією на просторі $\mathbb{R}_n[x]$. Знайти ядра цих функцій.
4.3.Д. Знайти максимальну лінійно незалежну підсистему системи лінійних функцій $\varphi_1 = 8\,x_1 + 7\,x_2 + 4\,x_3 + 5\,x_4$, $\varphi_2 = 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 4\,x_4$, $\varphi_3 = 2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 - 3\,x_4$, $\varphi_4 = x_1 - x_2 - x_3 + 7\,x_4$, $\varphi_5 = 5\,x_2 + 4\,x_3 - 17\,x_4$ і виразити через неї решту функцій системи.
4.4.Д. З'ясувати, чи буде білінійною визначена на звичайному тривимірному просторі W_3 функція: a) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}^2|$, b) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})$, де $\boldsymbol{a} \in W_3$ — деякий фіксований вектор, c) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{x}]_e^T[\boldsymbol{y}]_e$. Якщо так, то знайти її зображення в базисі $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, а в разі симетричності — й ядро.
4.5.Д. З'ясувати, які з наступних функцій: a) $f(z, w) = \operatorname{Re}(zw)$, b) $f(z, w) = \operatorname{Re}(z\overline{w})$, c) $f(z, w) = |zw|$, d) $f(z, w) = |z\overline{w}|$, e) $f(z, w) = \operatorname{Im}(zw)$, f) $f(z, w) = \operatorname{Im}(z\overline{w})$ будуть білінійними

функціями на $\mathbb{C}$ як на векторному просторі над $\mathbb{R}$. Якщо так, то знайти її зображення в базисі $(1, i)$, а в разі симетричності — й ядро.

4.6.Д. Білінійна функція φ на просторі $\mathbb{R}^3$ в природньому базисі задана матрицею $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, якщо $\boldsymbol{x} = (1, 2, -3)$, $\boldsymbol{y} = (2, 0, 1)$. Знайти симетричну складову φ_s функції φ та її ядро $\ker \varphi_s$. Знайти матриці функцій φ та φ_s в базисі $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, якщо $\boldsymbol{z} = (1, 1, -1)$.

4.7.Д. Методами Лагранжа та Якобі знайти канонічний вигляд квадратичної функції φ та невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, якщо:

a) $\varphi = 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$,

b) $\varphi = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 + 4x_3^2 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4 - x_4^2$.

Вказівка до методу Якобі: змінити порядок векторів у базисі.

4.8.Д. Методом Якобі знайти канонічний вигляд квадратичної функції φ та невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, якщо:

a) $\varphi = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$,

b) $\varphi = x_1^2 + 4x_2^2 + 11x_3^2 + 24x_4^2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 16x_3x_4$.

4.9.Д. Методом Лагранжа знайти канонічний вигляд квадратичної функції φ та невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, якщо:

a) $\varphi = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$,

b) $\varphi = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4$.

4.1.+. Чи вичерпуються всі лінійні функції на просторі $\mathbb{R}_n[x]$ функціями вигляду $\varphi_a \colon f(x) \to f(a)$?

4.2.+. Нехай $L = \mathbb{R}_n[x]$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — попарно різні дійсні числа, а функції $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L^*$ визначені правилом $\varphi_i(f) = f(a_i)$. Довести, що функції $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ утворюють базис простору L^*. Знайти базис простору L, спряжений до базису $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

4.3.+. Знайти розмірність простору: a) симетричних, b) кососиметричних білінійних функцій від n змінних.

4.4.+. Нехай φ та ψ — дві невироджені білінійні форми на просторі L. Довести, що існує невироджений лінійний оператор $\mathcal{A} \colon L \to L$ такий, що $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$.

4.1.А. Довести, що композиція лінійних відображень є лінійним відображенням.

► Нехай (L,P), (V,P), (W,P) — векторні простори, а $f\colon L\to V$, $g\colon V\to W$ — лінійні відображення цих просторів. Тоді $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L$, $\forall\ \lambda,\mu\in P$

$$g(f(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}))=g(\lambda f(\boldsymbol{x})+\mu f(\boldsymbol{y}))=\lambda g(f(\boldsymbol{x}))+\mu g(f(\boldsymbol{y})). \qquad \square$$

4.2.А. З'ясувати, чи буде лінійною визначена на звичайному тривимірному просторі W_3 функція: a) $\varphi\colon \boldsymbol{v}\mapsto(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$, b) $\varphi\colon \boldsymbol{v}\mapsto(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$, де $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ — ненульові фіксовані вектори. В разі лінійності функції, знайти її ядро та координатний рядок в базисі $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$.

► a) Ні, оскільки, наприклад, $\varphi(\lambda\boldsymbol{v})=(\lambda\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{v})=\lambda^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=\lambda^2\varphi(\boldsymbol{v})\neq\lambda\varphi(\boldsymbol{v})$. $\square$

► b) Так, як композиція лінійних відображень. Геометрично ядром буде множина всіх векторів, компланарних з векторами $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$, оскільки $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$.

Якщо $\boldsymbol{a}=(x_a,y_a,z_a)$, $\boldsymbol{b}=(x_b,y_b,z_b)$, $\boldsymbol{v}=(x_v,y_v,z_v)$, то

$$\varphi(\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_v & y_v & z_v\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}y_a & z_a\\ y_b & z_b\end{vmatrix}x_v+\begin{vmatrix}x_a & z_a\\ x_b & z_b\end{vmatrix}y_v-\begin{vmatrix}x_a & y_a\\ x_b & y_b\end{vmatrix}z_v, \text{ і}$$

$$[\varphi]_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})}=\left(-\begin{vmatrix}y_a & z_a\\ y_b & z_b\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_a & z_a\\ x_b & z_b\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_a & y_a\\ x_b & y_b\end{vmatrix}\right). \qquad \square$$

4.3.А. Довести, що ядро лінійної функції $f\colon L\to P$ є підпростором простору (L,P).

► $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\ker f$, $\forall\ \lambda,\mu\in P$ $\quad f(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})=\lambda f(\boldsymbol{x})+\mu f(\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{0}+\mu\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, а тому $\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}\in\ker f$. $\square$

4.4.А. Чи може ненульова лінійна функція на комплексному векторному просторі набувати лише дійсних значень?

► Ні. Припустимо, що може. Тоді $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\ \ \forall\ \boldsymbol{x}\in L\setminus\ker f\ \ f(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda f(\boldsymbol{x})\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. $\square$

4.5.А. Знайти максимальну лінійно незалежну підсистему системи лінійних функцій $\varphi_1=5\,x_1-3\,x_2+2\,x_3+4\,x_4$, $\varphi_2=2\,x_1-x_2+3\,x_3+5\,x_4$, $\varphi_3=4\,x_1-3\,x_2-5\,x_3-7\,x_4$, $\varphi_4=x_1+7\,x_3+11\,x_4$ і виразити через неї решту функцій системи.

► Нехай $F=(\boldsymbol{f}^1=x_1,\boldsymbol{f}^2=x_2,\boldsymbol{f}^3=x_3,\boldsymbol{f}^4=x_4)\in\mathcal{B}(L^*)$. Тоді $[\varphi_1]_F=(5,-3,2,4)$, $[\varphi_2]_F=(2,-1,3,5)$, $[\varphi_3]_F=(4,-3,-5,-7)$, $[\varphi_4]_F=(1,0,7,11)$.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4\end{array}\\ \begin{pmatrix}5 & 2 & 4 & 1\\ -3 & -1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -5 & 7\\ 4 & 5 & -7 & 11\end{pmatrix}\end{array}\ (2)\ (3)\ (5)\ \cdot(-1)\ \to$$

$$\to\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & 1\\ 3 & \boxed{1} & 3 & 0\\ -7 & 0 & -14 & 7\\ -11 & 0 & -22 & 11\end{pmatrix}\end{array}\ (3)\ (-7)\ (-11)\ \cdot(-1)\ \to\begin{array}{cc}\begin{array}{cccc}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4\end{array} & \\ \begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 2 & -1\\ 0 & \boxed{1} & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \\ \\ \end{array}\end{array}.$$

Таким чином, $(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathcal{B}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ і $\varphi_3=2\,\varphi_1-3\,\varphi_2$, $\varphi_4=-\varphi_1+3\,\varphi_2$. $\square$

4.6.А. З'ясувати, які з відображень: a) $\varphi_1(A,B) = \operatorname{tr}(AB)$, b) $\varphi_2(A,B) = \operatorname{tr}(AB - BA)$, c) $\varphi_3(A,B) = AB$, d) $\varphi_4(A,B) = \operatorname{tr}(A+B)$, e) $\varphi_5(A,B) = \operatorname{tr}(AB^T)$ є білінійними функціями на просторі $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. В разі білінійності функції, знайти її матрицю в базисі з матричних одиниць E_{ij}.

► За властивостями сліду, транспонування та добутку матриць та за задачею 4.1.А. білінійними є відображення $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ та φ_5, проте лише φ_1, φ_2 та φ_5 є білінійними функціями. Відображення φ_3 не є функцією, а функція φ_4 не є білінійною.

З властивостей сліду матриці випливає, що функція φ_2 є тотожно рівною нулю, а тому її матриця в будь-якому базисі є нульовою розмірності $n^2 \times n^2$.

$$E_{ij}^T = E_{ji}, \quad E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & \text{якщо} \quad j = k, \\ O, & \text{якщо} \quad j \neq k, \end{cases} \qquad \operatorname{tr} E_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i = j, \\ 0, & \text{якщо} \quad i \neq j, \end{cases} \qquad \Longrightarrow$$

$$\operatorname{tr}(E_{ij}E_{kl}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad j = k \quad \text{і} \quad i = l, \\ 0, & \text{якщо} \quad j \neq k \quad \text{або} \quad i \neq l, \end{cases}$$

$$\operatorname{tr}(E_{ij}E_{kl}^T) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i = k \quad \text{і} \quad j = l, \\ 0, & \text{якщо} \quad i \neq k \quad \text{або} \quad j \neq l. \end{cases}$$

Нехай $n = 2$ і $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \in \mathcal{B}(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}))$. Тоді матриця білінійної функції φ в базисі E буде

$$A_E^{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi(E_{11}, E_{11}) & \varphi(E_{11}, E_{12}) & \varphi(E_{11}, E_{21}) & \varphi(E_{11}, E_{22}) \\ \varphi(E_{12}, E_{11}) & \varphi(E_{12}, E_{12}) & \varphi(E_{12}, E_{21}) & \varphi(E_{12}, E_{22}) \\ \varphi(E_{21}, E_{11}) & \varphi(E_{21}, E_{12}) & \varphi(E_{21}, E_{21}) & \varphi(E_{21}, E_{22}) \\ \varphi(E_{22}, E_{11}) & \varphi(E_{22}, E_{12}) & \varphi(E_{22}, E_{21}) & \varphi(E_{22}, E_{22}) \end{pmatrix}.$$

Для функцій φ_1 та φ_5 їхні матриці при $n = 2$ будуть відповідно

$$A_E^{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad A_E^{\varphi_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

4.7.А. Білінійна функція φ на просторі $\mathbb{R}^3$ в природному базисі задана матрицею $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, якщо $\boldsymbol{x} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{y} = (1, 1, -1)$. Знайти симетричну складову φ_s функції φ та її ядро $\ker \varphi_s$. Знайти матриці функцій φ та φ_s в базисі $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, якщо $\boldsymbol{z} = (2, 1, -1)$.

► $$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [\boldsymbol{x}]_e^T A_e [\boldsymbol{y}]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -9.$$

Матриця симетричної складової φ_s функції φ в природному базисі

$$A_e^s = \frac{1}{2}(A_e + A_e^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ядро $\ker \varphi_s$ є множиною розв'язків СЛОР $(A_e^s|0)$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 0\\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2)\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 6 & 0\\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ (-1)\ \cdot(1/6) \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (2) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} y_1 = -y_3,\\ y_2 = -y_3,\\ y_3 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ФСР $\boldsymbol{f} = (-1, -1, 1)$, а отже, $\ker \varphi_s = L\langle\, \boldsymbol{f}\, \rangle$.

Матриця переходу від природного базису до базису $F = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3 \end{array},$$ а отже, матриці функцій φ та φ_s в базисі F

$$A_F = S^T A_e S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -15\\ 9 & 0 & 3\\ 13 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$ та

$$A_F^s = S^T A_e^s S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

відповідно. □

4.8.А. Дві білінійні функції називаються еквівалентними, якщо вони визначають одну й ту ж білінійну функцію в деяких двох базисах одного простору. Не виконуючи обчислень з'ясувати, чи еквівалентні білінійні функції:

a) $\varphi(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1$,
$\psi(x, y) = x_1y_2 + 2x_2y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$,

b) $\varphi(x, y) = x_1y_1 + ix_1y_2$,
$\psi(x, y) = 2x_1y_1 + (1 + i)x_1y_2 + (1 - i)x_2y_1 - ix_2y_2$,

c) $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 7x_3y_1 + 8x_3y_2 + 10x_3y_3$,
$\psi(x, y) = 2x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + 5x_3y_3$.

► a) Ні. b) Ні. c) Ні.

Для пояснення відповідей на питання складемо матриці цих білінійних форм і вкажемо властивість, яка не змінюється при переході до нового базису.

a) $A^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3\\ -2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ φ — кососиметрична, а ψ — ні.

b) $A^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & i\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^\psi = \begin{pmatrix} 2 & 1+i\\ 1-i & -i \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ φ — вироджена, а ψ — ні ($\det A^\psi = -2 - 2\,i$).

c) $A^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, $A^\psi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ ψ — симетрична, а φ — ні. □

4.9.А. Методами Лагранжа та Якобі знайти канонічний вигляд симетричної білінійної форми φ та невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, якщо:

a) $\varphi = 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3$,

b) $\varphi = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3$.

► а) Матриця симетричної білінійної форми φ в природному базисі $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Квадратична функція, асоційована з симетричною білінійною формою φ, має в природному базисі таку ж саму матрицю A_f. За методом Лагранжа

$$\varphi = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_3^2 = 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3) + 3x_3^2 =$$

$$= 2(x_1^2 + 2\,x_1(-\frac{1}{2}\,x_2) + 2\,x_1(\frac{1}{2}\,x_3) + \frac{1}{4}\,x_2^2 + \frac{1}{4}\,x_3^2 + 2(-\frac{1}{2}\,x_2)(\frac{1}{2}\,x_3)) - \frac{1}{2}\,x_2^2 - \frac{1}{2}\,x_3^2 + x_2x_3 + 3x_3^2 =$$

$$= 2(x_1 - \frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_3)^2 - \frac{1}{2}\,x_2^2 + x_2x_3 + \frac{5}{2}\,x_3^2 = \left| \begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}\,y_2 - \frac{1}{2}\,y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= 2\,y_1^2 - \frac{1}{2}\,y_2^2 + y_2y_3 + \frac{5}{2}\,y_3^2 = 2\,y_1^2 - \frac{1}{2}\,(y_2^2 + 2\,y_2(-y_3) + y_3^2) + \frac{1}{2}\,y_3^2 + \frac{5}{2}\,y_3^2 =$$

$$= 2\,y_1^2 - \frac{1}{2}\,(y_2 - y_3)^2 + 3\,y_3^2 = \left| \begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 + z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 2\,z_1^2 - \frac{1}{2}\,z_2^2 + 3\,z_3^2.$$

Матриця переходу від початкового до кінцевого базису

$$S = T_1T_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{1}{2}\,z_2, \\ x_2 = z_2 + z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

Матриця квадратичної функції в кінцевому базисі

$$A_b = S^T A_f S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

За методом Якобі головні мінори матриці A_f $\quad \Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$,
$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$, тому квадратична форма зводиться до вигляду

$$\varphi = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\,y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\,y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2}\,y_3^2 = 2\,y_1^2 - \frac{1}{2}\,y_2^2 + 3\,y_3^2.$$

За методом Якобі φ-ортогональний базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ шукається у вигляді

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1, \quad \boldsymbol{e}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2, \quad \boldsymbol{e}_3 = \mu_1 \boldsymbol{f}_1 + \mu_2 \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3.$$

Маємо, що $0 = \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_2) = \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)\lambda_1 + \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = 2\,\lambda_1 - 1$, тобто $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$. Аналогічно

$$0 = \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{e}_3) = \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)\mu_1 + \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)\mu_2 + \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_3) = 2\,\mu_1 - \mu_2 + 1,$$

$$0 = \varphi(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_3) = \varphi(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1)\mu_1 + \varphi(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)\mu_2 + \varphi(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = -\mu_1 + 0\,\mu_2 + 0,$$

звідки отримуємо СЛР $\begin{cases} 2\,\mu_1 - \mu_2 = -1, \\ -\mu_1 = 0, \end{cases}$ розв'язки якої $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$. Таким чином,

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1, \\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2, \\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3. \end{cases} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}\,y_2, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases} \qquad \square$$

► b) Матриця симетричної білінійної форми φ в природному базисі $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Квадратична функція, асоційована з симетричною білінійною формою φ, має в природному базисі таку ж саму матрицю A_f. За методом Лагранжа

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3 + 4\,x_2x_3 = (x_1^2 - 2\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 4\,x_2x_3 =$$

$$= (x_1^2 + 2\,x_1(-x_2) + 2\,x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2\,(-x_2)\,x_3) - x_2^2 - x_3^2 + 2\,x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 4\,x_2x_3 =$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 6\,x_2x_3 = \left| \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= y_1^2 + 6\,y_2y_3 = \left| \begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 + z_3, \\ y_3 = z_2 - z_3, \end{cases} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = z_1^2 + 6\,z_2^2 - 6\,z_3^2.$$

Матриця переходу від початкового до кінцевого базису

$$S = T_1T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = z_1 + 2\,z_3, \\ x_2 = z_2 + z_3, \\ x_3 = z_2 - z_3. \end{cases}$$

Матриця квадратичної функції в кінцевому базисі

$$A_b = S^T A_f S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Оскільки головний мінор матриці A_f $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, то метод Якобі безпосередньо застосувати не можна. Зробимо заміну змінних $x_1 = y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_1$. Тоді матриця квадратичної форми φ в новому базисі

$$A_b = S_0^T A_f S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

За методом Якобі головні мінори матриці A_b $\quad \Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9$, тому квадратична форма зводиться до вигляду

$$\varphi = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\,z_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\,z_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2}\,z_3^2 = z_1^2 - 3\,z_2^2 + 3\,z_3^2.$$

За методом Якобі φ-ортогональний базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ шукається у вигляді

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{e}_2 = \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{e}_3 = \mu_1\boldsymbol{b}_1 + \mu_2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3.$$

Маємо, що $0 = \varphi(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{e}_2) = \varphi(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)\lambda_1 + \varphi(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \lambda_1 + 2$, тобто $\lambda_1 = -2$. Аналогічно

$$0 = \varphi(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{e}_3) = \varphi(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)\mu_1 + \varphi(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)\mu_2 + \varphi(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3) = \mu_1 + 2\,\mu_2 + 1,$$

$$0 = \varphi(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{e}_3) = \varphi(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1)\mu_1 + \varphi(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)\mu_2 + \varphi(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = 2\,\mu_1 + \mu_2 - 1,$$

звідки отримуємо СЛР $\begin{cases} \mu_1 + 2\,\mu_2 = -1, \\ 2\,\mu_1 + \mu_2 = 1, \end{cases}$ розв'язки якої $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$. Таким чином,

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{e}_2 = -2\,\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3. \end{cases} \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \begin{cases} y_1 = z_1 - 2\,z_2 + z_3, \\ y_2 = z_2 - z_3, \\ y_3 = z_3. \end{cases}$$

Оскільки $S = S_0 S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, то остаточно маємо

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_3, \\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f}_2 - 2\,\boldsymbol{f}_3, \\ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3. \end{cases} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{звідки } \begin{cases} x_1 = z_3, \\ x_2 = z_2 - z_3, \\ x_3 = z_1 - 2\,z_2 + z_3. \end{cases}$$ □

Практичне заняття №5. Квадратичні функції та евклідові простори

5.1.А. Знайти кількість класів еквівалентних між собою квадратичних функцій від n змінних над полями a) комплексних $\mathbb{C}$, b) дійсних $\mathbb{R}$ чисел.
5.2.А. Які з квадратичних функцій $\varphi = x_1^2 - x_2x_3$, $\psi = x_1x_2 - x_3^2$, $\xi = x_1x_2 + x_3^2$ та $\tau = -x_1^2 - x_2x_3$ еквівалентні над полями a) комплексних $\mathbb{C}$, b) дійсних $\mathbb{R}$ чисел?
5.3.А. З'ясувати, чи будуть еквівалентними над полями $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ квадратичні функції:
a) $\varphi = 2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$ та $\psi = 2x_1^2+3x_2^2+6x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$,
b) $\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$ та $\psi = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$.
5.4.А. З'ясувати, для яких значень параметра λ квадратична функція φ буде додатньо визначеною, якщо: a) $\varphi = x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$, b) $\varphi = 2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$.
5.5.А. Знайти нормальний вигляд квадратичної функції φ та невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, якщо: a) $\varphi = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$, b) $\varphi = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 11x_2x_3$.
5.6.А. Які з визначених на звичайному тривимірному просторі W_3 функцій φ є скалярними добутками, якщо: a) $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|$, b) $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\cos^3\widehat{\boldsymbol{xy}}$, c) $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, де $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — звичайний скалярний добуток, d) $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$, e) $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2\,x_2y_2 + 3\,x_3y_3$, f) $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$, g) $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, h) $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$.
5.7.А. Довести, що функція $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ визначає скалярний добуток на просторі $\mathbb{R}[x]$ многочленів над полем дійсних чисел. Знайти матрицю цього скалярного добутку, обмеженого на підпростір $\mathbb{R}_2[x]$ з базисом $1, x, x^2$, якщо $a = -1$, $b = 1$.
5.8.А. Знайти базис ортогонального доповнення до підпростору U, породженого векторами
$\boldsymbol{a}_1 = (1,3,0,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,7,-1,2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,4,-1,0)$.
5.9.А. Знайти систему рівнянь, яка визначає ортогональне доповнення $U^\perp$, якщо підпростір U евклідового простору $\mathbb{E}_4$ задається СЛОР

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 + x_4 = 0, \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_4 = 0, \\ 3\,x_1 + x_2 + 9\,x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

5.10.А. Знайти ортонормований базис підпростору, породженого векторами
$\boldsymbol{a}_1 = (1,1,-1,-2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (-2,1,5,11)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,3,3,7)$, $\boldsymbol{a}_4 = (3,-3,-3,-9)$.
5.11.А. Знайти ортогональну проекцію $\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x}$ та ортогональну складову $\mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на підпростір U, якщо $\boldsymbol{x} = (4,-1,-3,4)$, а підпростір U породжується векторами $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,2,-1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,0,3)$. Знайти кут між вектором $\boldsymbol{x}$ та підпростором U. За допомогою визначника Грама знайти відстань $\rho(\boldsymbol{x},U)$.
5.1.Д. Знайти симетричну білінійну функцію, асоційовану з квадратичною функцією $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, якщо $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -x_1y_1 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$.
5.2.Д. Знайти необхідні та достатні умови того, щоб дійсна квадратична функція $f(\boldsymbol{x})$ була еквівалентна функції $g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$.
5.3.Д. З'ясувати, чи будуть еквівалентними над полями $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ квадратичні функції:
$\varphi = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$ та $\psi = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.
5.4.Д. Для яких значень параметра λ квадратична функція φ буде додатньо визначеною, якщо: a) $\varphi = x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$, b) $\varphi = 2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$?
5.5.Д. Знайти нормальний вигляд квадратичної функції φ та невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, якщо $\varphi = -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.
5.6.Д. Нехай $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ та $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — два різних скалярних добутки на просторі $(L,\mathbb{R})$. З'ясувати, для яких $a,b \in \mathbb{R}$ функція $a\,\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + b\,\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ також є скалярним добутком на $(L,\mathbb{R})$.
5.7.Д. З'ясувати, які з функцій: a) $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$, b) $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(AB^T)$ є скалярними добутками на просторі $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
5.8.Д. Довести правило паралелограма: $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2)$.

5.9.Д. В евклідовому просторі з задачі 5.7.А. знайти кути трикутника, утвореного векторами $1, x$ та $1+x$.
5.10.Д. Знайти кут між мимобіжними діагоналями двох сусідних граней куба.
5.11.Д. Знайти базис ортогонального доповнення до підпростору U, породженого векторами: a) $\boldsymbol{a}_1 = (1,0,2,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,1,-2,1)$, b) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,-1,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2,1,1,3)$.
5.12.Д. Знайти систему рівнянь, яка визначає ортогональне доповнення $U^\perp$, якщо підпростір U евклідового простору $\mathbb{E}_4$ задається СЛОР

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 + 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 + 23x_4 = 0. \end{cases}$$

5.13.Д. Знайти ортонормований базис підпростору, породженого векторами:
a) $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,3,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (7,4,3,-3)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,1,-6,0)$, $\boldsymbol{a}_4 = (5,7,7,8)$,
b) $\boldsymbol{a}_1 = (2,3,-4,-6)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,8,-2,-16)$, $\boldsymbol{a}_3 = (12,5,-14,5)$, $\boldsymbol{a}_4 = (3,11,4,-8)$.
5.14.Д. Знайти ортогональну проекцію $\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x}$ та ортогональну складову $\mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на підпростір U, якщо: a) $\boldsymbol{x} = (5,2,-2,2)$, а підпростір U породжується векторами $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,1,3,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,2,8,1)$, b) $\boldsymbol{x} = (8,5,-3,6)$, а підпростір U задається СЛОР

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайти кут між вектором $\boldsymbol{x}$ та підпростором U. За допомогою визначника Грама знайти відстань $\rho(\boldsymbol{x}, U)$.
5.15.Д. Знайти відстань між площинами π_1 та π_2 в просторі $\mathbb{E}_4$, якщо в ортонормованому базисі вони задані рівняннями $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_0 + \lambda\boldsymbol{a}_1 + \mu\boldsymbol{a}_2$ та $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0 + \lambda\boldsymbol{b}_1 + \mu\boldsymbol{b}_2$ відповідно, де $\boldsymbol{a}_0 = (4,5,3,2)$, $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,2,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,-2,1,2)$, $\boldsymbol{b}_0 = (1,-2,1,-3)$, $\boldsymbol{b}_1 = (2,0,2,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (1,-2,0,-1)$.
5.1.+. Довести, що в додатньо визначеній квадратичній формі всі коефіцієнти при квадратах є додатніми. Чи буде ця умова достатньою для додатньої визначеності квадратичної функції?
5.2.+. Нехай $l_1, \ldots, l_p, l_{p+1}, \ldots, l_{p+q}$ — дійсні лінійні функції від n змінних. Довести, що для квадратичної форми $\varphi = l_1^2 + \ldots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \ldots - l_{p+q}^2$ додатній індекс інерції $\leqslant p$, а від'ємний індекс $\leqslant q$.
5.3.+. Звести квадратичну функцію $\sum\limits_{i<j}^{n} (j-i)x_i x_j$ до нормального вигляду.
5.4.+. При яких $n \in \mathbb{N}$ функція $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,x^n dx$ визначає скалярний добуток на просторі $\mathbb{R}[x]$ многочленів над полем дійсних чисел.
5.5.+. Довести, що проекції вершин n-вимірного куба на його діагональ ділять її на n рівних частин.
5.6.+. Довести, що для довільних підпросторів U та V евклідового простору виконуються рівності: a) $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$, b) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

5.1.А. Знайти кількість класів еквівалентних між собою квадратичних функцій від n змінних над полями a) комплексних $\mathbb{C}$, b) дійсних $\mathbb{R}$ чисел.

► a) $n+1$, b) $C_{n+2}^2 = (n+1)(n+2)/2$.

Над полем P існує стільки класів еквівалентних між собою квадратичних функцій, скільки існує над полем P нормальних форм.

a) Над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ нормальна форма квадратичної функції від n змінних визначається своїм рангом r, причому $0 \leqslant r \leqslant n$. Отже, над полем $\mathbb{C}$ буде стільки класів еквівалентних між собою квадратичних функцій, скількох значень може набувати ранг r, тобто $n+1$ клас.

b) Над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ нормальна форма квадратичної функції від n змінних визначається сигнатурою (p, q), де p та q — додатній та від'ємний індекси інерції відповідно. Таким чином, над полем $\mathbb{R}$ буде стільки класів еквівалентних між собою квадратичних функцій, скількома способами можна подати число n у вигляді суми трьох впорядкованих доданків $(p, q, n-p-q)$. В комбінаториці це є задачею розподілу n однакових предметів по 3 ящиках — так звані комбінації з повтореннями. Для підрахунку цієї кількості подамо число n у вигляді суми $n+2$ доданків: n одиниць та двох нулів, при цьому одиниці, що стоять зліва від першого нуля, в сумі дають число p, а одиниці, які стоять між нулями, в сумі дають число q. Таким чином, кількість способів, якими можна подати число n у вигляді суми трьох впорядкованих доданків $(p, q, n-p-q)$, буде такою самою, як і кількість способів, якими можна поставити два нулі на $n+2$ місця. Отже, над полем $\mathbb{R}$ буде $C_{n+2}^2 = (n+1)(n+2)/2$ класів еквівалентних між собою квадратичних функцій від n змінних. □

5.2.А. Які з квадратичних функцій $\varphi = x_1^2 - x_2x_3$, $\psi = x_1x_2 - x_3^2$, $\xi = x_1x_2 + x_3^2$ та $\tau = -x_1^2 - x_2x_3$ еквівалентні над полями a) комплексних $\mathbb{C}$, b) дійсних $\mathbb{R}$ чисел?

► Зведемо ці функції до канонічного вигляду над полем $\mathbb{R}$ і знайдемо їх сігнатуру та ранг.

$$\varphi = x_1^2 - x_2x_3 = \left| \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3, \end{cases} \right| = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, \text{ отже } p = 2,\ q = 1,\ r = p + q = 3.$$

$$\psi = x_1x_2 - x_3^2 = \left| \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \right| = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, \text{ отже } p = 1,\ q = 2,\ r = p + q = 3.$$

$$\xi = x_1x_2 + x_3^2 = \left| \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \right| = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, \text{ отже } p = 2,\ q = 1,\ r = p + q = 3.$$

$$\tau = -x_1^2 - x_2x_3 = \left| \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3, \end{cases} \right| = -y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, \text{ отже } p = 1,\ q = 2,\ r = p + q = 3.$$

Таким чином, a) над полем $\mathbb{C}$ всі квадратичні функції φ, ψ, ξ та τ еквівалентні між собою, b) а над полем $\mathbb{R}$ функція φ еквівалентна до ξ, а ψ — до τ. □

5.3.А. З'ясувати, чи будуть еквівалентними над полями $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ квадратичні функції:
a) $\varphi = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$ та $\psi = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$,
b) $\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$ та $\psi = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$.

► Зведемо ці функції до канонічного вигляду над полем $\mathbb{R}$ і знайдемо їх сігнатуру та ранг.

a) Для функції φ її матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, головні мінори $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 0$, а тому за методом Якобі канонічна форма $\varphi = 2y_1^2 + y_2^2$ і $p = 2$, $q = 0$, $r = 2$.

Для функції ψ її матриця $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, головні мінори $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 0$, а тому за методом Якобі канонічна форма $\psi = 2y_1^2 + y_2^2$ і $p = 2$, $q = 0$, $r = 2$.

Отже, квадратичні функції φ та ψ є еквівалентними над полями $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$.

b) Для функції φ її матриця $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, головні мінори $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = -4$, $\Delta_4 = 0$, а тому канонічну форму за методом Якобі одразу знайти не можна. Після заміні змінних $x_1 = y_4$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_2$, $x_4 = y_1$ матриця квадратичної функції φ $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ і головні мінори $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = -2$, $\Delta_3 = -4$, $\Delta_4 = 0$, а тому за методом Якобі канонічна форма $\varphi = -2\,z_1^2 + z_2^2 + 2\,z_3^2$ і $p = 2$, $q = 1$, $r = 3$.

Для функції ψ її канонічну форму знайдемо методом Лагранжа (в якості легкої вправи знайдіть матрицю функції ψ, її головні мінори, та переконайтеся, що метод Якобі безпосередньо застосувати тут не можна):

$$\psi = x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4 = (x_1^2 + 2\,x_1(\frac{1}{2}\,x_2) + \frac{1}{4}\,x_2^2) - \frac{1}{4}\,x_2^2 + x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}\,x_2)^2 - \frac{1}{4}\,x_2^2 + x_3x_4 =$$

$$= \left| \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}\,y_2, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4, \end{cases} \right| = y_1^2 - \frac{1}{4}\,y_2^2 + y_3y_4 = \left| \begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3 + z_4, \\ y_4 = z_3 - z_4, \end{cases} \right| = z_1^2 - \frac{1}{4}\,z_2^2 + z_3^2 - z_4^2,$$

звідки $p = 2$, $q = 2$, $r = 4$.

Отже, функції φ та ψ не є еквівалентними ні над полем $\mathbb{R}$, ні над полем $\mathbb{C}$. □

5.4.A. З'ясувати, для яких значень параметра λ квадратична функція φ буде додатньо визначеною, якщо: a) $\varphi = x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$, b) $\varphi = 2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$.

► Для розв'язання задачі необхідно скористатися критерієм Сильвестра.

a) Для функції φ її матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, і головні мінори мають задовольняти співвідношення:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 > 0, \\ \Delta_2 = 4 - \lambda^2 > 0, \\ \Delta_3 = -\lambda^2 + 30\,\lambda - 105 > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda \in (-2; 2), \\ \lambda \in (15 - \sqrt{120}; 15 + \sqrt{120}), \end{cases} \iff \lambda \in \emptyset,$$

а отже, за критерієм Сильвестра ні при якому значенні параметра λ квадратична функція φ не буде додатньо визначеною.

b) Для функції φ її матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, і головні мінори мають задовольняти співвідношення:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = 2 - \lambda^2 > 0, \\ \Delta_3 = 5 - 3\,\lambda^2 > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), \\ \lambda \in (-\sqrt{5/3}; \sqrt{5/3}), \end{cases} \iff \lambda \in (-\sqrt{5/3}; \sqrt{5/3}),$$

а отже, за критерієм Сильвестра при $\lambda \in (-\sqrt{5/3}; \sqrt{5/3})$ квадратична функція φ буде додатньо визначеною. □

5.5.A. Знайти нормальний вигляд квадратичної функції φ та невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, якщо: a) $\varphi = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$, b) $\varphi = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 11x_2x_3$.

► a) Для функції φ її матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, головні мінори $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = -36$, а тому за методом Якобі канонічна форма $\varphi = y_1^2 + 4\,y_2^2 - 9\,y_3^2$.

За методом Якобі φ-ортогональний базис $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ шукається у вигляді

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{f}_1, \quad \boldsymbol{b}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2, \quad \boldsymbol{b}_3 = \mu_1 \boldsymbol{f}_1 + \mu_2 \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3.$$

Маємо, що $0 = \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{b}_2) = \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)\lambda_1 + \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = \lambda_1 + 1$, тобто $\lambda_1 = -1$. Аналогічно

$$0 = \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{b}_3) = \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)\mu_1 + \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)\mu_2 + \varphi(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_3) = \mu_1 + \mu_2 - 2,$$

$$0 = \varphi(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{b}_3) = \varphi(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1)\mu_1 + \varphi(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)\mu_2 + \varphi(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = \mu_1 + 5\,\mu_2 + 0,$$

звідки отримуємо СЛР $\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 2, \\ \mu_1 + 5\,\mu_2 = 0, \end{cases}$ розв'язки якої $\mu_1 = \dfrac{5}{2}$, $\mu_2 = -\dfrac{1}{2}$. Таким чином,

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{f}_1, \\ \boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2, \\ \boldsymbol{b}_3 = \frac{5}{2}\,\boldsymbol{f}_1 - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3, \end{cases} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{5}{2}\,y_3, \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}\,y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Перетворимо тепер канонічну форму на нормальну:

$$\varphi = y_1^2 + 4\,y_2^2 - 9\,y_3^2 = y_1^2 + (2\,y_2)^2 - (3\,y_3)^2 = \left| \begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = \frac{1}{2}\,z_2, \\ y_3 = \frac{1}{3}\,z_3, \end{cases} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right| = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

Оскільки $S = T_1 T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, то остаточно маємо

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1, \\ \boldsymbol{e}_2 = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{f}_1 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{f}_2, \\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{5}{6}\,\boldsymbol{f}_1 - \frac{1}{6}\,\boldsymbol{f}_2 + \frac{1}{3}\,\boldsymbol{f}_3, \end{cases} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = z_1 - \frac{1}{2}\,z_2 + \frac{5}{6}\,z_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}\,z_2 - \frac{1}{6}\,z_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}\,z_3. \end{cases}$$ □

► b) Канонічну форму функції φ знайдемо методом Лагранжа (в якості легкої вправи знайдіть матрицю функції φ, її головні мінори, та переконайтеся, що метод Якобі безпосередньо застосувати тут не можна):

$$\varphi = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 11x_2x_3 =$$
$$= (x_1^2 + 2\,x_1(-3\,x_2) + 2\,x_1(2\,x_3) + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 2\,(-3\,x_2)(2\,x_3)) + x_2x_3 =$$
$$= (x_1 - 3\,x_2 + 2\,x_3)^2 + x_2x_3 = \left| \begin{cases} x_1 = y_1 + 3\,y_2 - 2\,y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \qquad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$
$$= y_1^2 + y_2y_3 = \left| \begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 + z_3, \\ y_3 = z_2 - z_3, \end{cases} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

Вочевидь, канонічна форма функції φ збігається з її нормальною формою, а невироджене лінійне перетворення, яке приводить до цього вигляду, визначається матрицею

$$S = T_1T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ і є } \begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 5\,z_3, \\ x_2 = z_2 + z_3, \\ x_3 = z_2 - z_3. \end{cases} \qquad \square$$

5.6.A. Які з визначених на звичайному тривимірному просторі W_3 функцій φ є скалярними добутками, якщо: a) $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|$, b) $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\,\cos^3\widehat{\boldsymbol{xy}}$, c) $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, де $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — звичайний скалярний добуток, d) $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$, e) $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2\,x_2y_2 + 3\,x_3y_3$, f) $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$, g) $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, h) $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$.

►

$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ при $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$	$\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) =$ $= \varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$	білінійність	скалярний добуток
$\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$	так	так	ні **(1)**	*ні*
$\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\,\cos^3\widehat{\boldsymbol{xy}}$	так	так	ні **(2)**	*ні*
$2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	так	так	так	**так**
$x_1y_1 + x_2y_2$	ні **(3), (4)**	так	так	*ні*
$x_1y_1 + 2\,x_2y_2 + 3\,x_3y_3$	так **(3)**	так	так	**так**
$x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$	ні **(3), (5)**	так	так	*ні*
$x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$	ні **(3), (6)**	так	так	*ні*
$x_1y_1 + x_2y_3 - x_3y_2$	ні **(3), (7)**	ні **(8), (9)**	так	*ні*

(1): $\varphi(-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |-\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq -\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ при $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ і $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$.

(2): $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{z}| = 1,\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{xz}} = \widehat{\boldsymbol{zy}} = \dfrac{\pi}{3}$,

$$1 = \varphi(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) \neq \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

(3): за критерієм Сильвестра.

(4): $\boldsymbol{x}=(0,0,1)\neq\mathbf{0}$, але $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$.

(5): $\boldsymbol{x}=(0,0,1)\neq\mathbf{0}$, але $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=-1<0$.

(6): $\boldsymbol{x}=(1,1,-1)\neq\mathbf{0}$, але $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=-1<0$.

(7): $\boldsymbol{x}=(0,1,1)\neq\mathbf{0}$, але $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$.

(8): матриця $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ функції φ не є симетричною.

(9): $\boldsymbol{x}=(1,1,-1)$, $\boldsymbol{y}=(1,1,1)$ $\implies$ $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=3\neq-1=\varphi(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$. □

5.7.А. Довести, що функція $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ визначає скалярний добуток на просторі $\mathbb{R}[x]$ многочленів над полем дійсних чисел. Знайти матрицю цього скалярного добутку, обмеженого на підпростір $\mathbb{R}_2[x]$ з базисом $1,x,x^2$, якщо $a=-1$, $b=1$.

► Те, що функція $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ визначає скалярний добуток на просторі $\mathbb{R}[x]$ многочленів над полем дійсних чисел, випливає з властивостей визначеного інтеграла. Дійсно:

1) $(f,f)=\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx\geqslant 0$ і $(f,f)=0\iff f(x)\equiv 0$ (додатня визначеність),

2) $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\int\limits_a^b g(x)\,f(x)\,dx=(g,f)$ (симетричність),

3) $(\lambda f+\mu g,h)=\int\limits_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))h(x)\,dx=\lambda\int\limits_a^b f(x)\,h(x)\,dx+\mu\int\limits_a^b g(x)\,h(x)\,dx=$

$=\lambda(f,h)+\mu(g,h)$ при $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

(лінійність по першому аргументу, і як наслідок з симетричності, білінійність).

Оскільки

$$(x^m,x^n)=\int\limits_{-1}^{1}x^m\,x^n\,dx=\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\Bigg|_{-1}^{1}=\begin{cases}\dfrac{2}{m+n+1}, & \text{якщо } m+n \text{ — парне},\\ 0, & \text{якщо } m+n \text{ — непарне},\end{cases}$$

то матриця цього скалярного добутку, обмеженого на підпростір $\mathbb{R}_2[x]$ з базисом $1,x,x^2$ при $a=-1$, $b=1$, буде

$$A=\begin{pmatrix}(1,1)&(1,x)&(1,x^2)\\(x,1)&(x,x)&(x,x^2)\\(x^2,1)&(x^2,x)&(x^2,x^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$ □

5.8.А. Знайти базис ортогонального доповнення до підпростору U, породженого векторами $\boldsymbol{a}_1=(1,3,0,2)$, $\boldsymbol{a}_2=(3,7,-1,2)$, $\boldsymbol{a}_3=(2,4,-1,0)$.

► Базис ортогонального доповнення $U^\perp=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{E}_4\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_1)=0,\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_2)=0,\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_3)=0\}$ є ФСР СЛОР:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_1)=0,\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_2)=0,\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_3)=0,\end{cases}\iff\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&0&2&0\\3&7&-1&2&0\\2&4&-1&0&0\end{array}\right)\iff\begin{cases}x_1=-3\,x_2-2\,x_4,\\x_3=-2\,x_2-4\,x_4,\\x_2,\,x_4\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Отже, $U^\perp = L\langle\, \boldsymbol{f}_1=(-3,1,-2,0),\ \boldsymbol{f}_2=(-2,0,-4,1)\,\rangle.$ □

5.9.А. Знайти систему рівнянь, яка визначає ортогональне доповнення $U^\perp$, якщо підпростір U евклідового простору $\mathbb{E}_4$ задається СЛОР

$$\begin{cases}2\,x_1+x_2+3\,x_3+x_4=0,\\3\,x_1+2\,x_2+2\,x_4=0,\\3\,x_1+x_2+9\,x_3+x_4=0.\end{cases}$$

► Базис підпростору U є ФСР СЛОР

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&3&1&0\\3&2&0&2&0\\3&1&9&1&0\end{array}\right)\iff\begin{cases}x_1=-6\,x_3,\\x_2=9\,x_3-x_4,\\x_3,\,x_4\in\mathbb{R}.\end{cases}\qquad U=L\langle\,\boldsymbol{f}_1=(-6,9,1,0),\ \boldsymbol{f}_2=(0,-1,0,1)\,\rangle.$$

Оскільки $U^\perp=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{E}_4 \mid (\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}_1)=0,\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}_2)=0\}$, то СЛР, яка визначає $U^\perp$:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}_1)=0,\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}_2)=0,\end{cases}\iff\begin{cases}-6\,x_1+9\,x_2+x_3=0,\\-x_2+x_4=0.\end{cases}$$ □

5.10.А. Знайти ортонормований базис підпростору, породженого векторами
$\boldsymbol{a}_1=(1,1,-1,-2)$, $\boldsymbol{a}_2=(-2,1,5,11)$, $\boldsymbol{a}_3=(0,3,3,7)$, $\boldsymbol{a}_4=(3,-3,-3,-9)$.

► Для знаходження ортонормованого базису підпростору, необхідно спочатку знайти довільний базис цього підпростору, потім його ортогоналізувати, а після пронормувати. Базисом підпростору, породженого СВ, буде базис цієї СВ. Отже, спочатку шукаємо базис СВ $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$:

$$\begin{array}{cccc}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3&\boldsymbol{a}_4\\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}1&-2&0&3\\1&1&3&-3\\-1&5&3&-3\\-2&11&7&-9\end{pmatrix}}\end{array}\ \begin{matrix}(-1)&(2)\end{matrix}\ \to\ \begin{array}{cccc}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3&\boldsymbol{a}_4\\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}\boxed{1}&-2&0&3\\0&3&3&-6\\0&3&3&0\\0&7&7&-3\end{pmatrix}}\end{array}\ \begin{matrix}(-1)&(-7/3)&\cdot(1/3)\end{matrix}\ \to$$

$$\to\ \begin{array}{cccc}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3&\boldsymbol{a}_4\\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}\boxed{1}&-2&0&3\\0&0&0&-6\\0&1&\boxed{1}&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}}\end{array}\ \begin{matrix}(-2)&\cdot(-1/3)\end{matrix}\ \to\ \begin{array}{ccccc}\boldsymbol{a}_1&\boldsymbol{a}_2&\boldsymbol{a}_3&\boldsymbol{a}_4&\\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix}\boxed{1}&-2&0&0\\0&0&0&0\\0&1&\boxed{1}&0\\0&0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}}&\begin{matrix}\boldsymbol{a}_1\\ \\ \boldsymbol{a}_3\\ \boldsymbol{a}_4\end{matrix}\end{array}$$

Таким чином, СВ $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\in\mathcal{B}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$. Згідно з процесом ортогоналізації Грама–Шмідта ортогональна СВ $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ шукається у вигляді

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\quad \boldsymbol{b}_2=\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{b}_3=\mu_1\boldsymbol{b}_1+\mu_2\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_4.$$

Коефіцієнти λ_1,μ_1,μ_2 шукаються з умови, що СВ $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ є ортогональною.

Отже, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1=(1,1,-1,-2)$.

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=0\quad\Longrightarrow\quad\lambda_1(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)+(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_3)=0\quad\Longrightarrow$$

$$\lambda_1 = -\frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} = -\frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 7}{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = -\frac{-14}{7} = 2.$$

Отже, $\boldsymbol{b}_2 = 2\,\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_3 = (2, 5, 1, 3)$.

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mu_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) + \mu_2(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_4) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{оскільки } (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0,$$

$$\mu_1 = -\frac{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_4)}{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)} = -\frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot (-9)}{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = -\frac{21}{7} = -3.$$

$$(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mu_1(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1) + \mu_2(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_4) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{оскільки } (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1) = 0,$$

$$\mu_2 = -\frac{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_4)}{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)} = -\frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-9)}{2^2 + 5^2 + 1^2 + 3^2} = -\frac{-39}{39} = 1.$$

Отже, $\boldsymbol{b}_3 = -3\,\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_4 = (2, -1, 1, 0)$.

Тепер пронормуємо СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, -1, -2) = \Big(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}\Big),$$
$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{39}}(2, 5, 1, 3) = \Big(\frac{2}{\sqrt{39}}, \frac{5}{\sqrt{39}}, \frac{1}{\sqrt{39}}, \frac{3}{\sqrt{39}}\Big),$$
$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1, 0) = \Big(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\Big).$$

Отже, СВ $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ є ортонормованим базисом підпростору, породженого СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$. $\square$

5.11.А. Знайти ортогональну проекцію $\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x}$ та ортогональну складову $\mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на підпростір U, якщо $\boldsymbol{x} = (4, -1, -3, 4)$, а підпростір U породжується векторами $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 2, -1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 0, 3)$. Знайти кут між вектором $\boldsymbol{x}$ та підпростором U. За допомогою визначника Грама знайти відстань $\rho(\boldsymbol{x}, U)$.

► Знайдемо базис підпростору $U = L\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (-1)\ \ (2) \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Отже, СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \in \mathcal{B}(U)$. Вектор $\boldsymbol{x}$ можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x} + \mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x},$$

оскільки $\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x} \in U = L\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ і $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ такі, що $\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2$.

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in U,\ \mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x} \in U^{\perp} \quad\Longrightarrow\quad (\boldsymbol{a}_1, \mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}_2, \mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}) = 0 \quad\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{a}_1, \mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2), \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{a}_2, \mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}) = \lambda_1(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2), \end{cases} \quad\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\,\lambda_1 + 4\,\lambda_2 = 4, \\ 4\,\lambda_1 + 10\,\lambda_2 = -8, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = -2. \end{cases}$$

Таким чином, $\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x} = 3\,\boldsymbol{a}_1 - 2\,\boldsymbol{a}_2 = (1,-1,-1,5)$, а $\mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x} = (3,0,-2,-1)$. В якості перевірки можна знайти скалярний добуток: $(\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x}, \mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}) = 0$ — отже, розклад вектора $\boldsymbol{x}$ на ортогональну проекцію $\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x}$ та ортогональну складову $\mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}$ знайдено вірно.

Знайдемо косинус кута між вектором $\boldsymbol{x}$ та підпростором U:

$$\cos\angle(\boldsymbol{x}, U) = \cos\angle(\boldsymbol{x}, \mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{x}, \mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\,\mathrm{pr}_U\,\boldsymbol{x}\|} = \frac{28}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Знайдемо матриці Грама $G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x})$, $G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ та їх визначники:

$$G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{x} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}^T \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{x} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & -8 \\ 4 & -8 & 42 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}) = 336,$$

$$G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 24.$$

Тоді відстань між вектором $\boldsymbol{x}$ та підпростором U

$$\rho(\boldsymbol{x}, U) = \sqrt{\frac{\det G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x})}{\det G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}} = \sqrt{\frac{336}{24}} = \sqrt{14}.$$

З іншого боку, $\rho(\boldsymbol{x}, U) = \|\,\mathrm{ort}_U\,\boldsymbol{x}\| = \sqrt{14}$, що підтверджує знайдений вище результат. $\square$

Практичне заняття №6. Лінійні оператори та власні вектори

6.1.А. Які з визначених на звичайному тривимірному просторі W_3 функцій φ є лінійними операторами, якщо: a) $\varphi(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{x}$, b) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{x}$, c) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}$, d) $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}$, де $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ — деякі ненульові фіксовані вектори. Якщо перетворення лінійне, знайти його ядро, образ та матрицю в базисі $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.
6.2.А. Поле $\mathbb{C}$ розглядається як двовимірний векторний простір над полем $\mathbb{R}$. Знайти в базисі $(1, i)$ матрицю лінійного оператора множення на число $a + b\,i$, де $a, b \in \mathbb{R}$.
6.3.А. Який вигляд має матриця лінійного оператора $\varphi\colon L_n \to L_n$ в базисі, першими k векторами якої є: a) базис ядра $\ker\varphi$, b) базис образу $\operatorname{Im}\varphi$?
6.4.А. Знайти базис ядра та базис образу лінійного відображення, яке задано матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
6.5.А. Довести, що існує єдиний лінійний оператор $\varphi\colon L_3 \to L_3$, для якого $\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$, де $i = \overline{1,3}$, якщо: a) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,2)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,0,1)$. Знайти матрицю φ в базисі $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ та в природньому базисі. Скільки існує таких операторів φ, якщо: b) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (3,0,3)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,-2,0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,2,3)$, c) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (3,1,3)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,-2,0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,2,3)$?
6.6.А. Лінійний оператор φ в базисі $\boldsymbol{a}_1 = (1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1)$ має матрицю $[\varphi]_{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор ψ в базисі $\boldsymbol{b}_1 = (-1,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,-1)$ має матрицю $[\psi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти матриці лінійних операторів $2\,\varphi + \psi^{-1}$ та $\varphi\psi^{-1} - \psi\varphi$ в базисі: a) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, b) $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, c) в якому задані координати всіх векторів.
6.7.А. Нехай $\varphi\colon L \to M$ та $\psi\colon M \to L$ — такі лінійні відображення, що $\psi\varphi = \varepsilon\colon L \to L$. Чи випливає звідси, що $\varphi\psi = \varepsilon\colon M \to M$?
6.8.А. Довести, що кожен власний вектор $\boldsymbol{b}$ лінійного оператора φ є власним вектором і оператора ψ, якщо: a) $\psi = c\,\varphi$, b) $\psi = \varphi - c\,\varepsilon$, c) $\psi = \varphi^n$, d) $\psi = f(\varphi)$, де $c \in P$, $n \in \mathbb{Z}$, $f(t) \in P[t]$. Знайти власне число μ оператора ψ, яке відповідає власному вектору $\boldsymbol{b}$, якщо $\varphi(\boldsymbol{b}) = \lambda\,\boldsymbol{b}$.
6.9.А. Довести, що лінійна оболонка системи власних векторів лінійного оператора φ є φ-інваріантним підпростором. Знайти кількість φ-інваріантних підпросторів лінійного оператора φ з простим спектром.
6.10.А. Описати φ-інваріантні підпростори, якщо лінійний оператор φ в деякому базисі задається матрицею:
a) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
6.11.А. Які з матриць $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ є подібними?
6.12.А. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора φ, заданого в деякому базисі своєю матрицею:
a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&4&-2\\2&-1&0&1\\2&-1&-1&2\end{pmatrix}$, l) $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&4&2\end{pmatrix}$, m) $\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\3&0&5&-3\\4&-1&3&-1\end{pmatrix}$, n) $\begin{pmatrix}-3&3&-2&2\\-4&4&-2&2\\-4&3&-1&2\\-4&3&-2&3\end{pmatrix}$.

Чи можна звести оператор φ до діагонального виду? Якщо так, то знайти матрицю переходу до базису, в якому матриця оператора φ має діагональний вид. Що можна сказати про φ-інваріантні підпростори?

6.1.Д. Які з визначених на просторі $\mathbb{R}_n[x]$ функцій φ є лінійними операторами, якщо: a) $\varphi\colon f(x)\mapsto f(ax+b)$, де $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, b) $\varphi\colon f(x)\mapsto f(x+1)-f(x)$, c) $\varphi\colon f(x)\mapsto \frac{f(x+1)-f(x)}{x}$, d) $\varphi\colon f(x)\mapsto f'(x)$, e) $\varphi\colon f(x)\mapsto xf'(x)$, f) $\varphi\colon f(x)\mapsto f(x^2)$, g) $\varphi\colon f(x)\mapsto (x-1)f'(x+1)$. Якщо перетворення лінійне, знайти його ядро, образ та матрицю в базисі $1,x,\ldots,x^n$.

6.2.Д. Як зміниться матриця лінійного відображення $\varphi\colon L\to M$, якщо до базисів векторів L та M застосувати елементарні перетворення?

6.3.Д. Знайти матрицю, базис ядра та базис образу лінійних відображень:

a) $(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3-x_1)$,

b) $(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3-x_4,x_4-x_1)$,

c) $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_1,x_1+x_2+x_3)$.

6.4.Д. Знайти матрицю, базис ядра та базис образу лінійних відображень $\varphi\colon X\mapsto\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}X$ та $\psi\colon X\mapsto X\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ простору $M_2(\mathbb{R})$ в базисі з матричних одиниць E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}.

6.5.Д. Знайти матрицю лінійного оператора $\varphi(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}$ простору W_3 у базисі $\boldsymbol{f}_1=(1,0,1)$, $\boldsymbol{f}_2=(2,0,-1)$, $\boldsymbol{f}_3=(1,1,0)$, якщо $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$.

6.6.Д. Лінійний оператор φ в базисі $\boldsymbol{a}_1=(1,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(2,5)$ має матрицю $[\varphi]_{\boldsymbol{a}}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$, а лінійний оператор ψ в базисі $\boldsymbol{b}_1=(1,-3)$, $\boldsymbol{b}_2=(-2,5)$ має матрицю $[\psi]_{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$. Знайти матриці лінійних операторів $2\varphi-\psi^{-1}$ та $\varphi\psi^{-1}+\psi\varphi$ в базисі: a) $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$, b) $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$, c) в якому задані координати всіх векторів.

6.7.Д. Нехай $L=U\oplus V$, а $\varphi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}$ та $\psi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ — відповідно оператори проектування на U та відбиття від U паралельно V.

a) Довести, що $L=\ker\varphi\oplus\operatorname{Im}\varphi$.

b) Довести, що лінійний оператор $\varepsilon-\varphi$ є оператором проектування, та знайти зв'язок між образами та ядрами операторів φ та $\varepsilon-\varphi$.

c) Довести, що лінійний оператор $\dfrac{1}{2}(\varepsilon-\psi)$ є оператором проектування.

6.8.Д. a) Довести, що лінійний оператор φ є ідемпотентом (тобто $\varphi^2=\varphi$) тоді й лише тоді, коли він є оператором проектування. b) Довести, що лінійний оператор ψ є інволюцією (тобто $\psi^2=\varepsilon$) тоді й лише тоді, коли він є оператором відбиття.

6.9.Д. Довести, що для довільного лінійного оператора φ виконуються включення:

a) $\operatorname{Im}\varphi\supset\operatorname{Im}\varphi^2\supset\operatorname{Im}\varphi^3\supset\ldots$, b) $\ker\varphi\subset\ker\varphi^2\subset\ker\varphi^3\subset\ldots$.

6.10.Д. Доробити приклади з номеру 6.12.A.

6.11.Д. Довести, що образ $\operatorname{Im}\varphi$ та ядро $\ker\varphi$ лінійного оператора φ є φ-інваріантними підпросторами.

6.12.Д. Знайти власні числа та власні вектори оператора диференціювання в просторі: a) многочленів $\mathbb{R}_n[x]$, b) $L(\cos x,\sin x)$, c) всіх диференційовних дійсних функцій.

6.1.+. Знайти кількість лінійних відображень $\varphi\colon\mathbb{Z}_p^m\to\mathbb{Z}_p^n$.

6.2.+. Нехай U та V — нетривіальні підпростори просторів L та M відповідно. Чи буде утворювати підпростір простору $\hom(L,M)$ множина всіх тих лінійних відображень $\varphi\colon L\to M$

a) які мають одне й те ж ядро U, b) ядро яких містить даний підпростір U, c) ядро яких міститься в даному підпросторі U, d) які мають один і той же образ V, e) образ яких містить даний підпростір V, f) образ яких міститься в даному підпросторі V? У разі позитивної відповіді знайти розмірність цього підпростору (розмірності просторів U, L, V, M відомі).

6.3.+. Довести, що в просторі $\mathbb{R}_n[x]$ оператор $\varphi\colon f(x) \mapsto f(x+1)$ є многочленом від оператора диференціювання.

6.4.+. Білінійна функція φ на просторі $\mathbb{R}^3$ в природньому базисі задана матрицею $A_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор $\mathcal{B}$ — матрицею $B_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти матриці білінійних форм $\psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$ та $\psi_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}, \mathcal{B}(\boldsymbol{y}))$ в природньому базисі.

6.5.+. Довести, що $\chi_{A^{-1}}(t) = (-t)^n \cdot \dfrac{1}{\det A} \cdot \chi_A(\dfrac{1}{t})$.

6.6.+. Довести, що число 1 є власним числом стохастичної матриці (матриця, сума елементів якої по рядках або по стовпцях дорівнює 1), та знайти власний вектор, який відповідає цьому власному числу.

6.7.+. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора $X \mapsto X^T$ простору $M_n(\mathbb{R})$.

6.1.А. Які з визначених на звичайному тривимірному просторі W_3 функцій φ є лінійними операторами, якщо: a) $\varphi(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{x}$, b) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{x}$, c) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b}$, d) $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}$, де $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ — деякі ненульові фіксовані вектори. Якщо перетворення лінійне, знайти його ядро, образ та матрицю в базисі $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

► a) Не є лінійним оператором, оскільки, наприклад,
$\varphi(\lambda\boldsymbol{x}) = |\lambda\boldsymbol{x}|\,(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda|\lambda|\,|\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{x} \neq \lambda|\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{x} = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$ при $\lambda \neq \pm 1, 0$. □

► b) Не є лінійним оператором, оскільки, наприклад,
$\varphi(\lambda\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{x} \neq \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{x} = \lambda\varphi(\boldsymbol{x})$ при $\lambda \neq 1, 0$. □

► c) Є лінійним оператором, оскільки $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$, $\forall\ \lambda, \mu \in P$
$\varphi(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} + \mu(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = \lambda\,\varphi(\boldsymbol{x}) + \mu\,\varphi(\boldsymbol{y})$.

$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0} \implies (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0$, а отже ядро $\ker\varphi$ складається з усіх векторів $\boldsymbol{x}$, які ортогональні до $\boldsymbol{a}$. Оскільки $\varphi(\boldsymbol{x}) \parallel \boldsymbol{b}$ для будь-якого $\boldsymbol{x} \in L$, то образ $\operatorname{Im}\varphi = L\langle\boldsymbol{b}\rangle$.

Нагадаємо, що матриця $[\varphi]_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})}$ лінійного оператора φ в базисі $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ є матрицею переходу від СВ $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ до СВ $(\varphi(\boldsymbol{i}), \varphi(\boldsymbol{j}), \varphi(\boldsymbol{k}))$. Нехай $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тоді

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{i}) &= (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = a_1\boldsymbol{b} = (a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3),\\ \varphi(\boldsymbol{j}) &= (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = a_2\boldsymbol{b} = (a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3),\\ \varphi(\boldsymbol{k}) &= (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = a_3\boldsymbol{b} = (a_3b_1, a_3b_2, a_3b_3) \end{aligned} \implies [\varphi]_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \varphi(\boldsymbol{i}) & \varphi(\boldsymbol{j}) & \varphi(\boldsymbol{k}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k} \end{array} \end{array} \quad \square$$

► d) Є лінійним оператором, оскільки $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$, $\forall\ \lambda, \mu \in P$
$\varphi(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{a}) = \lambda\,\varphi(\boldsymbol{x}) + \mu\,\varphi(\boldsymbol{y})$.

З властивостей векторного добутку випливає, що $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ при $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ тоді й лише тоді, коли $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{a}$, а отже ядро $\ker\varphi = L\langle\boldsymbol{a}\rangle$. Оскільки $\varphi(\boldsymbol{x}) \perp \boldsymbol{a}$ для будь-якого $\boldsymbol{x} \in L$, то образ $\operatorname{Im}\varphi$ складається з усіх векторів, ортогональних до $\boldsymbol{a}$.

Нехай $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Тоді

$$\varphi(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 0\\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (0, -a_3, a_2), \qquad \varphi(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 1 & 0\\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_3, 0, -a_1),$$

$$\varphi(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 0 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (-a_2, a_1, 0) \implies [\varphi]_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \varphi(\boldsymbol{i}) & \varphi(\boldsymbol{j}) & \varphi(\boldsymbol{k}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2\\ -a_3 & 0 & a_1\\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k} \end{array} \end{array} \quad \square$$

6.2.А. Поле $\mathbb{C}$ розглядається як двовимірний векторний простір над полем $\mathbb{R}$. Знайти в базисі $(1, i)$ матрицю лінійного оператора множення на число $a + b\,i$, де $a, b \in \mathbb{R}$.

► Нехай $\varphi(z) = (a + b\,i) \cdot z$ для будь-якого $z \in \mathbb{C}$. Оператор $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ дійсно буде лінійним, оскільки $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\varphi(\lambda\,z_1 + \mu\,z_2) = (a + b\,i) \cdot (\lambda\,z_1 + \mu\,z_2) = \lambda\,(a + b\,i) \cdot z_1 + \mu\,(a + b\,i) \cdot z_2 = \lambda\,\varphi(z_1) + \mu\,\varphi(z_2)$.

Тоді:

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= (a + b\,i) \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot i = (a, b),\\ \varphi(i) &= (a + b\,i) \cdot i = a \cdot i + b \cdot i^2 = -b \cdot 1 + a \cdot i = (-b, a) \end{aligned} \implies [\varphi]_{(1,i)} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \varphi(1) & \varphi(i) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1\\ i \end{array} \end{array} \quad \square$$

6.3.А. Який вигляд має матриця лінійного оператора $\varphi\colon L_n \to L_n$ в базисі, першими k векторами якої є: а) базис ядра $\ker\varphi$, b) базис образу $\operatorname{Im}\varphi$?

► а) Нехай $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{B}(L)$ і $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k) \in \mathcal{B}(\ker\varphi)$. Тоді:

$$[\varphi]_{\boldsymbol{e}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_k) & \varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{e}_k \\ \boldsymbol{e}_{k+1} \\ \dots \\ \boldsymbol{e}_n \end{array},$$

де $*$ позначає будь-яке число. □

► b) Нехай $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{B}(L)$ і $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k) \in \mathcal{B}(\operatorname{Im}\varphi)$. Тоді:

$$[\varphi]_{\boldsymbol{e}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_k) & \varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & \dots & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{e}_k \\ \boldsymbol{e}_{k+1} \\ \dots \\ \boldsymbol{e}_n \end{array},$$

де $*$ позначає будь-яке число. □

6.4.А. Знайти базис ядра та базис образу лінійного відображення, яке задано матрицею $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

► Перш за все, як це випливає з алгебраїчного змісту матриці лінійного відображення, встановимо, що відображення $\varphi\colon L_4 \to V_3$. Таким чином, матриця лінійного відображення:

$$[\varphi]_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2) & \varphi(\boldsymbol{e}_3) & \varphi(\boldsymbol{e}_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \boldsymbol{f}_3 \end{array},$$

де $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) \in \mathcal{B}(L_4)$, а $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) \in \mathcal{B}(V_3)$.

Оскільки $\ker\varphi = \{\boldsymbol{x} \in L_4 \mid \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ і $[\varphi(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{f}} = [\varphi]_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{e}}$, то множина $\ker\varphi$ є множиною розв'язків СЛОР:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} x_1 = -5\,x_2 - 4\,x_3, \\ x_4 = -3\,x_2 - 3\,x_3, \\ x_2,\, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{Отже, } \ker\varphi = L\langle\, \boldsymbol{b}_1 = (-5, 1, 0, -3),\ \boldsymbol{b}_2 = (-4, 0, 1, -3)\,\rangle.$$

Оскільки $\forall\, \boldsymbol{y} \in \operatorname{Im}\varphi\ \ \exists\, \boldsymbol{x} \in L_4$ такий, що $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$, а $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) \in \mathcal{B}(L_4)$, то $\operatorname{Im}\varphi = L\langle\, \varphi(\boldsymbol{e}_1),\ \varphi(\boldsymbol{e}_2),\ \varphi(\boldsymbol{e}_3),\ \varphi(\boldsymbol{e}_4)\,\rangle$. Отже, базис $\operatorname{Im}\varphi$ збігається з базисом СВ

$(\,\varphi(\boldsymbol{e}_1),\ \varphi(\boldsymbol{e}_2),\ \varphi(\boldsymbol{e}_3),\ \varphi(\boldsymbol{e}_4)\,)$. Використовуючи тіж самі ЕПр, що і для СЛОР, отримаємо:

$$\begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2) & \varphi(\boldsymbol{e}_3) & \varphi(\boldsymbol{e}_4) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2) & \varphi(\boldsymbol{e}_3) & \varphi(\boldsymbol{e}_4) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \varphi(\boldsymbol{e}_1) \\ \varphi(\boldsymbol{e}_4) \\ \end{array},$$

звідки випливає, що СВ $(\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_4)) \in \mathcal{B}(\operatorname{Im}\varphi)$. □

6.5.А. Довести, що існує єдиний лінійний оператор $\varphi\colon L_3 \to L_3$, для якого $\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$, де $i = \overline{1,3}$, якщо: a) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,2)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,0,1)$. Знайти матрицю φ в базисі $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ та в природньому базисі. Скільки існує таких операторів φ, якщо: b) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (3,0,3)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,-2,0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,2,3)$, c) $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{b}_1 = (3,1,3)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,-2,0)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1,2,3)$?

► Для того, щоб однозначно визначити лінійний оператор $\varphi\colon L \to L$ (тобто, щоб існував і до того ж єдиний лінійний оператор), достатньо задати *ЛИШЕ* образи $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ векторів деякого базису $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ простору L. Якщо образи $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ векторів деякого базису $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ простору L можна задати неоднозначно, то буде існувати стільки лінійних операторів φ, скількома способами ці образи $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ можна визначити. Якщо крім образів векторів деякого базису простору задаються образи $\varphi(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{a}_s)$ ще деяких векторів $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$, то (для того, щоб оператор φ існував) ці образи $\varphi(\boldsymbol{a}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{a}_s)$ мають бути узгодженими з образами $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ векторів базису, тобто координатні стовпчики вектора в базисі і образу цього вектора в СВ з образів базису мають бути рівними $[\varphi(\boldsymbol{a}_i)]_{(\varphi(\boldsymbol{e}_1),\ldots,\varphi(\boldsymbol{e}_n))} = [\boldsymbol{a}_i]_{(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)}$ для всіх $i = \overline{1,s}$.

a) СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ є ЛНЗ (бо, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$) і $\#(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \dim L$, а тому $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \in \mathcal{B}(L)$. Таким чином, існує єдиний лінійний оператор $\varphi\colon L_3 \to L_3$, для якого $\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$, де $i = \overline{1,3}$.

Нехай $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — природній базис простору L, в якому задані координати всіх векторів.

Тоді матриці $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}$ та $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{array}$ є матрицями переходу від СВ $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ до СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ та СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ відповідно, причому матриця A як матриця переходу від базису до базису є оборотною. Матриця $[\varphi]_{\boldsymbol{a}}$ лінійного оператора φ в базисі $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ за означенням є матрицею переходу від СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ до СВ $(\varphi(\boldsymbol{a}_1), \varphi(\boldsymbol{a}_2), \varphi(\boldsymbol{a}_3))$,

тобто $[\varphi]_{\boldsymbol{a}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді $[\varphi]_{\boldsymbol{e}} = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} [\varphi]_{\boldsymbol{a}} T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{e}} = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} [\varphi]_{\boldsymbol{a}} T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = A(A^{-1}B)A^{-1} = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

► b) Оскільки $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$, то СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ є ЛЗ, а тому не утворює базис простору L. СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ можна доповнити деяким вектором $\boldsymbol{a}_3'$ до базису всього простору $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3') \in \mathcal{B}(L)$. Яким би не був вектор $\boldsymbol{a}_3'$, координатні стовпчики $[\boldsymbol{a}_3]_{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3')} = (1;-1;0)^T$ та $[\varphi(\boldsymbol{a}_3)]_{(\varphi(\boldsymbol{a}_1),\varphi(\boldsymbol{a}_2),\varphi(\boldsymbol{a}_3'))} = [\boldsymbol{b}_3]_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\varphi(\boldsymbol{a}_3'))} = (1;-1;0)^T$ є рівними (оскільки й $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$), а тому, існує стільки лінійних операторів φ, скількома способами можна вибрати образ $\varphi(\boldsymbol{a}'_3)$ вектора $\boldsymbol{a}'_3$. Таким чином, існує безліч лінійних операторів φ, для яких $\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$, де $i = \overline{1,3}$. $\square$

► c) Оскільки $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$, то СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ є ЛЗ, а тому не утворює базис простору L. СВ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ можна доповнити деяким вектором $\boldsymbol{a}'_3$ до базису всього простору $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}'_3) \in \mathcal{B}(L)$. Яким би не був вектор $\boldsymbol{a}'_3$, координатні стовпчики $[\boldsymbol{a}_3]_{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}'_3)} = (1;-1;0)^T$ та $[\varphi(\boldsymbol{a}_3)]_{(\varphi(\boldsymbol{a}_1),\varphi(\boldsymbol{a}_2),\varphi(\boldsymbol{a}'_3))} = [\boldsymbol{b}_3]_{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\varphi(\boldsymbol{a}'_3))}$ не будуть рівними (оскільки $\boldsymbol{b}_3 \neq \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$), а тому, не існує жодного лінійного оператора φ, для якого $\varphi(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$, де $i = \overline{1,3}$. $\square$

6.6.A. Лінійний оператор φ в базисі $\boldsymbol{a}_1 = (1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1)$ має матрицю $[\varphi]_{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор ψ в базисі $\boldsymbol{b}_1 = (-1,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,-1)$ має матрицю $[\psi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти матриці лінійних операторів $2\varphi + \psi^{-1}$ та $\varphi\psi^{-1} - \psi\varphi$ в базисі: a) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, b) $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, c) в якому задані координати всіх векторів.

► Нехай $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ — природній базис простору L, в якому задані координати всіх векторів. Тоді матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ є матрицями переходу від базису $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ до базисів $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ та $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ відповідно. Тоді

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{e}} = T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{a}} = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}} = T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ і}$$

$$T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}} = T^{-1}_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) $[2\varphi + \psi^{-1}]_{\boldsymbol{a}} = 2[\varphi]_{\boldsymbol{a}} + [\psi]^{-1}_{\boldsymbol{a}} = 2[\varphi]_{\boldsymbol{a}} + (T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\psi]_{\boldsymbol{b}} T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}})^{-1} = 2[\varphi]_{\boldsymbol{a}} + T^{-1}_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}[\psi]^{-1}_{\boldsymbol{b}} T^{-1}_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}} =$

$$= 2[\varphi]_{\boldsymbol{a}} + T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\psi]^{-1}_{\boldsymbol{b}} T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$[\varphi\psi^{-1} - \psi\varphi]_{\boldsymbol{a}} = [\varphi]_{\boldsymbol{a}} T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\psi]^{-1}_{\boldsymbol{b}} T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}} - T_{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}}[\psi]_{\boldsymbol{b}} T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}}[\varphi]_{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

b) $[2\varphi + \psi^{-1}]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $[\varphi\psi^{-1} - \psi\varphi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$.

c) $[2\varphi + \psi^{-1}]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $[\varphi\psi^{-1} - \psi\varphi]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

6.7.A. Нехай $\varphi\colon L \to M$ та $\psi\colon M \to L$ — такі лінійні відображення, що $\psi\varphi = \varepsilon\colon L \to L$. Чи випливає звідси, що $\varphi\psi = \varepsilon\colon M \to M$?

► Ні.

Нехай $M = L \oplus L$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{0}$, $\psi(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$ для будь-яких $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$. Тоді $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$

$$\psi\varphi(\boldsymbol{x}) = \psi(\varphi(\boldsymbol{x})) = \psi(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{x} \quad \Longrightarrow \quad \psi\varphi = \varepsilon,$$

$$\varphi\psi(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) = \varphi(\psi(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y})) = \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{0} \quad \Longrightarrow \quad \varphi\psi \neq \varepsilon.$$ $\square$

6.8.A. Довести, що кожен власний вектор $\boldsymbol{b}$ лінійного оператора φ є власним вектором і оператора ψ, якщо: a) $\psi = c\varphi$, b) $\psi = \varphi - c\varepsilon$, c) $\psi = \varphi^n$, d) $\psi = f(\varphi)$, де $c \in P$, $n \in \mathbb{Z}$,

$f(t) \in P[t]$. Знайти власне число μ оператора ψ, яке відповідає власному вектору $\boldsymbol{b}$, якщо $\varphi(\boldsymbol{b}) = \lambda\,\boldsymbol{b}$.

► a) $\psi(\boldsymbol{b}) = (c\,\varphi)(\boldsymbol{b}) = c\,\varphi(\boldsymbol{b}) = c\,\lambda\,\boldsymbol{b} \quad \Longrightarrow \quad \mu = c\,\lambda.$ □

► b) $\psi(\boldsymbol{b}) = (\varphi - c\,\varepsilon)(\boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{b}) - c\,\varepsilon(\boldsymbol{b}) = \lambda\,\boldsymbol{b} - c\,\boldsymbol{b} = (\lambda - c)\,\boldsymbol{b} \quad \Longrightarrow \quad \mu = \lambda - c.$ □

► c) $\psi(\boldsymbol{b}) = \varphi^n(\boldsymbol{b}) = \varphi^{n-1}(\varphi(\boldsymbol{b})) = \varphi^{n-1}(\lambda\,\boldsymbol{b}) = \lambda\,\varphi^{n-1}(\boldsymbol{b}) = \lambda^n\,\boldsymbol{b} \quad \Longrightarrow \quad \mu = \lambda^n.$ □

► d) $\psi(\boldsymbol{b}) = f(\varphi)(\boldsymbol{b}) = f(\lambda)\,\boldsymbol{b} \quad \Longrightarrow \quad \mu = f(\lambda).$ □

6.9.A. Довести, що лінійна оболонка системи власних векторів лінійного оператора φ є φ-інваріантним підпростором. Знайти кількість φ-інваріантних підпросторів лінійного оператора φ з простим спектром.

► Нехай $\varphi\colon L_n \to L_n$, $\varphi(\boldsymbol{b}_i) = \lambda_i\,\boldsymbol{b}_i$ для $i = \overline{1,s}$, і нехай $U = L\langle\,\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s\rangle$.
$\forall\,\boldsymbol{x} \in U \quad \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_s\boldsymbol{b}_s \quad \Longrightarrow$
$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_s\boldsymbol{b}_s) = x_1\varphi(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_s\varphi(\boldsymbol{b}_s) = x_1\lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_s\lambda_s\boldsymbol{b}_s \in U,$
що й треба було довести.

Зауважимо, по-перше, що при попарно різних власних значеннях $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ підпростір U містить лише власні вектори, які колінеарні до власних векторів $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$.

По-друге, зауважимо, що якщо всім власним векторам $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ відповідає одне й теж власне число λ, то будь-який вектор $\boldsymbol{x} \in U$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, є власним з власним числом λ. Дійсно,
$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_s\boldsymbol{b}_s) = x_1\varphi(\boldsymbol{b}_1) + \ldots + x_s\varphi(\boldsymbol{b}_s) = x_1\lambda\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_s\lambda\boldsymbol{b}_s =$
$= \lambda(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_s\boldsymbol{b}_s) = \lambda\boldsymbol{x}.$
Тоді в цьому випадку будь-який підпростір $V \subset U$ є φ-інваріантним, тобто $\varphi(V) \subset V$.

Надалі нехай φ — лінійний оператор з простим спектром, тобто має n різних власних чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, яким відповідають власні вектори $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Тоді, як випливає з першого зауваження, φ-інваріантний підпростір U розмірності s може породжуватися лише деякими s векторами з множини $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, а тому існує всього 2^n φ-інваріантних підпросторів ($C_n^0 = 1$ простір $\{\boldsymbol{0}\}$ розмірності 0, $C_n^1 = n$ просторів $\langle\boldsymbol{b}_1\rangle, \ldots, \langle\boldsymbol{b}_n\rangle$ розмірності 1, …, $C_n^n = 1$ простір L розмірності n). □

6.10.A. Описати φ-інваріантні підпростори, якщо лінійний оператор φ в деякому базисі задається матрицею:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

► Нехай $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4) \in \mathcal{B}(L)$ і $\varphi\colon L \to L$. Простір L завжди містить два тривіальні φ-інваріантні підпростори $\{\boldsymbol{0}\}$ розмірності 0 та сам простір L розмірності 4. Інших підпросторів розмірності 0 та 4 не існує. Тому надалі будемо описувати φ-інваріантні підпростори U лише розмірностей 1, 2 та 3. Позначимо через $\#U_d$ кількість φ-інваріантних підпросторів U розмірності d, де $d = \overline{1,3}$.

$$\text{a)}\quad [\varphi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{b}_1) & \varphi(\boldsymbol{b}_2) & \varphi(\boldsymbol{b}_3) & \varphi(\boldsymbol{b}_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{b}_4 \end{array}$$

$\dim U = 1 \quad \Longrightarrow \quad U = \langle\boldsymbol{b}_i\rangle,\ \ i = \overline{1,4}, \quad \#U_1 = C_4^1 = 4.$

$\dim U = 2 \quad \Longrightarrow \quad U = \langle\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j\rangle,\ \ i,j = \overline{1,4},\ \ i < j, \quad \#U_2 = C_4^2 = 6.$

$$\dim U = 3 \quad\Longrightarrow\quad U = \langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_k\rangle,\ \ i,j,k=\overline{1,4},\ \ i<j<k, \quad \#U_3 = C_4^3 = 4. \qquad \square$$

► b) Якщо
$$[\varphi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{b}_1) & \varphi(\boldsymbol{b}_2) & \varphi(\boldsymbol{b}_3) & \varphi(\boldsymbol{b}_4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{b}_4 \end{array} \end{array}$$

$$\dim U = 1 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} U = \langle \lambda\,\boldsymbol{b}_1 + \mu\,\boldsymbol{b}_2\rangle,\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_3\rangle, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_4\rangle, \end{array}\right. \qquad \#U_1 = \infty.$$

$$\dim U = 2 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\rangle, \\ U = \langle \lambda\,\boldsymbol{b}_1 + \mu\,\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\rangle,\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \\ U = \langle \lambda\,\boldsymbol{b}_1 + \mu\,\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4\rangle,\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\rangle, \end{array}\right. \qquad \#U_2 = \infty.$$

$$\dim U = 3 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\rangle, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4\rangle, \\ U = \langle \lambda\,\boldsymbol{b}_1 + \mu\,\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\rangle,\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \end{array}\right. \qquad \#U_3 = \infty. \qquad \square$$

► c) Якщо
$$[\varphi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{b}_1) & \varphi(\boldsymbol{b}_2) & \varphi(\boldsymbol{b}_3) & \varphi(\boldsymbol{b}_4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{b}_4 \end{array} \end{array}$$

$$\dim U = 1 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} U = \langle \boldsymbol{b}_1\rangle, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_2\rangle, \end{array}\right. \qquad \#U_1 = 2.$$

$$\dim U = 2 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\rangle, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\rangle, \end{array}\right. \qquad \#U_2 = 2.$$

$$\dim U = 3 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\rangle, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\rangle, \end{array}\right. \qquad \#U_3 = 2. \qquad \square$$

► d) Якщо
$$[\varphi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(\boldsymbol{b}_1) & \varphi(\boldsymbol{b}_2) & \varphi(\boldsymbol{b}_3) & \varphi(\boldsymbol{b}_4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{b}_4 \end{array} \end{array}$$

$$\dim U = 1 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} U = \langle \boldsymbol{b}_1\rangle, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_2\rangle, \end{array}\right. \qquad \#U_1 = 2.$$

$$\dim U = 2 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\rangle, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\rangle, \end{array}\right. \qquad \#U_2 = 2.$$

$$\dim U = 3 \quad\Longrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\rangle, \\ U = \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4\rangle, \end{array}\right. \qquad \#U_3 = 2. \qquad \square$$

6.11.А. Які з матриць $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ є подібними?

► Нагадаємо, що дві матриці називаються подібними, якщо вони є матрицями одного й того ж лінійного оператора в різних базисах.

Перша та друга матриці є подібними, оскільки одну з іншої можна отримати шляхом застосування 1ЕП до перших двох векторів базису простору. Третя матриця не є подібною до перших двох, оскільки вони мають різний спектр. □

6.12.А. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора φ, заданого в деякому базисі своєю матрицею:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$,

k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, l) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, m) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, n) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Чи можна звести оператор φ до діагонального виду? Якщо так, то знайти матрицю переходу до базису, в якому матриця оператора φ має діагональний вид. Що можна сказати про φ-інваріантні підпростори?

► Будемо вважати, що всі лінійні оператори задані над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

a) Якщо $[\varphi]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, то характеристичне рівняння

$$\chi_\varphi(t) = \det([\varphi]_{\boldsymbol{e}} - tE) = \begin{vmatrix} 1-t & -3 & 0 \\ -1 & -2-t & 3 \\ -1 & -4 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)\cdot(-2-t)\cdot(4-t) + (-3)\cdot 3\cdot(-1) +$$

$$+0\cdot(-1)\cdot(-4) - (-1)\cdot(-2-t)\cdot 0 - (-4)\cdot 3\cdot(1-t) - (4-t)\cdot(-1)\cdot(-3) =$$

$$= (1-t)\cdot(-2-t)\cdot(4-t) + 9 - 9t = (1-t)\cdot(t^2 - 2t - 8 + 9) = (1-t)^3.$$

Таким чином, $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ — корені характеристичного рівняння $\chi_\varphi(t)$, тобто $t = 1$ — власне число лінійного оператора φ кратності 3, а отже, оператор φ не є оператором з простим спектром.

Власні вектори, які відповідають власному числу t, шукають з СЛОР $([\varphi]_{\boldsymbol{e}} - tE \mid 0)$. Отже, при $t = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 3x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b} = (3, 0, 1).$$

Таким чином, розмірність власного підпростору $\dim V_{t=1}(\varphi) = 1 \neq 3$, а отже, оператор φ до діагонального виду звести не можна. Окрім тривіальних φ-інваріантних підпросторів розмірностей 0 та 3, оператор φ буде мати щонайменше один одновимірний φ-інваріантний підпростір $V_{t=1}(\varphi) = L\langle \boldsymbol{b}\rangle$ (насправді, як це випливає з жорданової нормальної форми, оператор φ буде мати ще один двовимірний φ-інваріантний підпростір). $\square$

► b) Якщо $[\varphi]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, то характеристичне рівняння

$$\chi_\varphi(t) = \det([\varphi]_{\boldsymbol{e}} - tE) = \begin{vmatrix} 3-t & -3 & 2 \\ 6 & -6-t & 4 \\ 4 & -4 & 3-t \end{vmatrix} \xleftarrow{(-2)} = \begin{vmatrix} 3-t & -3 & 2 \\ 2t & -t & 0 \\ 4 & -4 & 3-t \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} t\begin{vmatrix} 3-t & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 3-t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} -3-t & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3-t \end{vmatrix} = -t\begin{vmatrix} -3-t & 2 \\ -4 & 3-t \end{vmatrix} = -t(1-t)(-1-t).$$

Таким чином, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$ — корені характеристичного рівняння $\chi_\varphi(t)$, а отже, оператор φ є оператором з простим спектром.

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$.

При $t_1 = 0$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 0 \\ 6 & -6 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (1,1,0).$$

При $t_2 = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 0 \\ 6 & -7 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_2 = 2\,x_1, \\ x_3 = 2\,x_1, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_2 = (1,2,2).$$

При $t_3 = -1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 2\,x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_3 = (1,2,1).$$

Оскільки φ є оператором з простим спектром, то його можна звести до діагонального виду, тобто існує базис з власних векторів $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \in \mathcal{B}(L)$ з матрицею переходу $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$ до цього базису, в якому матриця $[\varphi]_{\boldsymbol{b}}$ оператора φ є діагональною:

$$[\varphi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки скористаємося формулою $[\varphi]_{\boldsymbol{b}} = T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}[\varphi]_{\boldsymbol{e}}T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$, записаною у вигляді $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}[\varphi]_{\boldsymbol{b}} = [\varphi]_{\boldsymbol{e}}T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$ (щоб не шукати $T^{-1}_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$). Дійсно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з задачею 6.9.A, простір L має $2^3 = 8$ φ-інваріантних підпросторів, серед яких три одновимірні $\langle \boldsymbol{b}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{b}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{b}_3 \rangle$ та три двовимірні $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$. □

► c) Якщо $[\varphi]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, то характеристичне рівняння

$$\chi_\varphi(t) = \det([\varphi]_{\boldsymbol{e}} - tE) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 & 2 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \\ (-1) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2-t & -2+t & 0 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t) \begin{array}{c} \begin{matrix} (1) & \longrightarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -t & 2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} \end{array} = (2-t) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-t & 2 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)^2.$$

Таким чином, $t_1 = 1$, $t_2 = t_3 = 2$ — корені характеристичного рівняння $\chi_\varphi(t)$, а отже, оператор φ не є оператором з простим спектром.

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 1$ кратності 1 та $t_2 = 2$ кратності 2.

При $t_1 = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = -2\,x_3, \\ x_2 = -2\,x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (-2, -2, 1).$$

При $t_2 = 2$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \begin{matrix} \boldsymbol{b}_2 = (1, 1, 0), \\ \boldsymbol{b}_3 = (-1, 0, 1). \end{matrix}$$

Оператор φ не є оператором з простим спектром, проте його можна звести до діагонального виду, оскільки для кожного власного числа розмірність відповідного власного простору збігається з кратністю цього власного числа. Таким чином, маємо:

$$[\varphi]_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

що підтверджується перевіркою за формулою $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}[\varphi]_{\boldsymbol{b}} = [\varphi]_{\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з задачею 6.9.A, простір L, крім тривіальних φ-інваріантних підпросторів, має одновимірні $\langle \boldsymbol{b}_1 \rangle$ та $\langle \lambda \boldsymbol{b}_2 + \mu \boldsymbol{b}_3 \rangle$ та двовимірні $\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ та $\langle \boldsymbol{b}_1, \lambda \boldsymbol{b}_2 + \mu \boldsymbol{b}_3 \rangle$, де $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. □

Практичне заняття №7. ЖНФ та функції від матриць

7.1.А. Знайти жорданову нормальну форму $J(A)$ та матрицю переходу T до жорданового базису для матриці A:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \\ 1 & -18 & 0 & -5 \\ 0 & 21 & -3 & 4 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} -4 & 9 & -4 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповіді: a) $J_4(-2)$, b) $J_2(-2) \oplus J_1(-2) \oplus J_1(-2)$, c) $J_3(-2) \oplus J_1(-2)$, d) $J_2(-2) \oplus J_2(-2)$, e) $J_3(-2) \oplus J_1(3)$, f) $J_2(-2) \oplus J_1(-2) \oplus J_1(3)$.

7.2.А. З'ясувати, чи є серед матриць A, B та C подібні, якщо

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7.3.А. Визначити ЖНФ матриці A та її мінімальний многочлен, якщо характеристичний многочлен $\chi_A(t) = (-1-t)^3(2-t)^2$, а ранг $r(A+E) = 4$ і $r(A-2E) = 3$.

7.4.А. Навести приклад двох матриць, які мають однакові характеристичні та однакові мінімальні многочлени, але не є подібними.

7.5.А. Знайти мінімальний многочлен a) нульового оператора, b) оператора проектування.

7.6.А. Розв'язати рівняння $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

7.7.А. Для яких значень p існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}^n$?

7.8.А. Використовуючи ЖНФ обчислити:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{100}$, b) $\exp \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, c) $\exp \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, d) $\ln \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

7.9.А. Довести, що $f(A) = g(A)$, якщо $f(t) = t^3 + t$, $g(t) = 4t^2 - 6$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

7.1.Д. З'ясувати, чи є серед матриць A, B та C подібні, якщо:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 12 & -6 \\ -10 & 18 & -10 \\ -12 & 24 & -14 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 16 & 12 \\ 4 & -28 & -20 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -12 & 8 & 20 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -219 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 59 & -63 & 52 \\ -147 & 159 & -132 \\ -244 & 263 & -218 \end{pmatrix}$.

7.2.Д. Знайти жорданову нормальну форму $J(A)$ та матрицю переходу T до жорданового базису для матриці A:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 47 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 47 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, l) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

m) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, n) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, o) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ 15 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, p) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

q) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, r) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, s) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7.3.Д. Знайти мінімальний многочлен діагональної матриці.

7.4.Д. Довести, що певний степінь мінімального многочлена ділиться на характеристичний многочлен цієї матриці.

7.5.Д. Знайти мінімальний многочлен матриці: a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

7.6.Д. Використовуючи ЖНФ обчислити:

a) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}$, b) $\exp\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\sin\begin{pmatrix} \pi-1 & 1 \\ -1 & \pi+1 \end{pmatrix}$, d) $\sqrt{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}$.

7.7.Д. Знайти мінімальний многочлен a) тотожнього оператора, b) оператора відбиття, c) нільпотентного оператора.

7.8.Д. Довести, що $f(A) = g(A)$, якщо $f(t) = t^4 + 1$, $g(t) = 2t^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

7.1.A. Знайти жорданову нормальну форму $J(A)$ та матрицю переходу T до жорданового базису для матриці A:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \\ 1 & -18 & 0 & -5 \\ 0 & 21 & -3 & 4 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} -4 & 9 & -4 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

► a) $A = [\varphi]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \implies \chi_A(t) = \begin{vmatrix} -2-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-t & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2-t \end{vmatrix} =$

$= (-2-t)^4 \implies t = -2$ — корінь кратності 4.

Матриця лінійного оператора $\psi_{-2} = \varphi - (-2)\,\varepsilon$

$$B_{-2} = A - (-2)\,E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(B_{-2}) = 3 \implies \operatorname{def}(B_{-2}) = 4 - r(B_{-2}) = 1.$$

Звідси випливає, що власному числу $t = -2$ відповідає одна жорданова клітина розмірності 4. Тоді ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A) = J_4(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{b}_3 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_{-2}} \mathbf{0}.$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ та матрицю переходу $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.

1-й спосіб (універсальний). Вектор $\boldsymbol{b}_1$ утворює базис простору $\ker\psi_{-2} = V_{-2}(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 0, 0).$$

Вектор $\boldsymbol{b}_2$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{b}_1$.

$$\begin{array}{c} \hphantom{0\;1\;0\;0\;-1\;} \boldsymbol{b}_1 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_2 = 1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

За вектор $\boldsymbol{b}_2$ можна взяти довільний прообраз вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_{-2}, наприклад, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 1, 0, 0)$.

Вектор $\boldsymbol{b}_3$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_2$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_3) = \boldsymbol{b}_2$.

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{b}_2\\ \left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&0&0\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \iff \begin{cases}x_2=0,\\x_3=1,\\x_4=0,\\x_1\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

За вектор $\boldsymbol{b}_3$ можна взяти довільний прообраз вектора $\boldsymbol{b}_2$ при дії оператора ψ_{-2}, наприклад, $\boldsymbol{b}_3=(0,0,1,0)$.

Вектор $\boldsymbol{b}_4$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_3$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_4)=\boldsymbol{b}_3$.

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{b}_3\\ \left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right) \iff \begin{cases}x_2=0,\\x_3=1,\\x_4=1,\\x_1\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

За вектор $\boldsymbol{b}_4$ можна взяти довільний прообраз вектора $\boldsymbol{b}_3$ при дії оператора ψ_{-2}, наприклад, $\boldsymbol{b}_4=(0,0,1,1)$.

Таким чином, маємо матрицю переходу $T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Перевірка здійснюється за формулою $TJ(A)=AT$:

$$TJ(A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&-1\\0&0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$AT=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&-1\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&-1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

2-й спосіб (для оператора з єдиним власним числом).

$$[\psi_{-2}^2]_{\boldsymbol{e}}=B_{-2}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$[\psi_{-2}^3]_{\boldsymbol{e}}=B_{-2}^3=\begin{array}{cc}\begin{array}{cccc}\psi_{-2}^3(\boldsymbol{e}_1)&\psi_{-2}^3(\boldsymbol{e}_2)&\psi_{-2}^3(\boldsymbol{e}_3)&\psi_{-2}^3(\boldsymbol{e}_4)\end{array}&\\ \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\boldsymbol{e}_3\\\boldsymbol{e}_4\end{array}\end{array}.$$

Оскільки $\psi_{-2}^3(\boldsymbol{b}_4)=\boldsymbol{b}_1$, то, як це випливає з матриці оператора ψ_{-2}^3, можна покласти $\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)$, а $\boldsymbol{b}_1=(1,0,0,0)$. Тоді $\boldsymbol{b}_3=\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_4)=(0,-1,1,0)$ і $\boldsymbol{b}_2=\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_3)=$ $=(-1,1,0,0)$. Таким чином, маємо матрицю переходу $T=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Перевірка здійснюється за формулою $TJ(A)=AT$:

$$TJ(A)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-1&0\\0&-2&3&-1\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$AT=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&-1\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&-1&0\\0&-2&3&-1\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Жордановий базис, як це випливає з 1-го та 2-го способу знаходження, шукається неоднозначно. □

► b) $A=[\varphi]_{\boldsymbol{e}}=\begin{pmatrix}-2&3&1&-2\\0&-5&-1&2\\0&3&-1&-2\\0&-3&-1&0\end{pmatrix}\implies \chi_A(t)=\begin{vmatrix}-2-t&3&1&-2\\0&-5-t&-1&2\\0&3&-1-t&-2\\0&-3&-1&-t\end{vmatrix}=$

$$=(-2-t)\begin{vmatrix}-5-t&-1&2\\3&-1-t&-2\\-3&-1&-t\end{vmatrix}\ (1)=(-2-t)\begin{vmatrix}-2-t&-2-t&0\\3&-1-t&-2\\0&-2-t&-2-t\end{vmatrix}=$$

$$=(-2-t)^3\begin{vmatrix}1&1&0\\3&-1-t&-2\\0&1&1\end{vmatrix}\ (2)=(-2-t)^3\begin{vmatrix}1&1&0\\3&1-t&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(-2-t)^4\implies$$

$t=-2$ — корінь кратності 4.

Матриця лінійного оператора $\psi_{-2}=\varphi-(-2)\,\varepsilon$

$$B_{-2}=A-(-2)\,E=\begin{pmatrix}0&3&1&-2\\0&-3&-1&2\\0&3&1&-2\\0&-3&-1&2\end{pmatrix}\implies r(B_{-2})=1\implies \operatorname{def}(B_{-2})=4-r(B_{-2})=3.$$

Звідси випливає, що власному числу $t=-2$ відповідають три жорданові клітини, сумарна розмірність яких дорівнює 4 — кратності власного числа $t=-2$. Це можливо лише коли ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A)=J_2(-2)\oplus J_1(-2)\oplus J_1(-2)=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix},\qquad \begin{aligned}\boldsymbol{b}_2\xrightarrow{\psi_{-2}}\boldsymbol{b}_1&\xrightarrow{\psi_{-2}}\mathbf{0},\\ \boldsymbol{b}_3&\xrightarrow{\psi_{-2}}\mathbf{0},\\ \boldsymbol{b}_4&\xrightarrow{\psi_{-2}}\mathbf{0}.\end{aligned}$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)$ та матрицю переходу $T=T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.

Зауважимо, що СВ $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)$ утворює базис простору $\ker\psi_{-2}=V_{-2}(\varphi)$, проте не всі вектори в цій СВ є рівноправними. Так, вектор $\boldsymbol{b}_1$ має прообраз, а вектори $\boldsymbol{b}_3$ та $\boldsymbol{b}_4$ — ні.

1-й спосіб (універсальний). Знайдемо $\ker\psi_{-2}=V_{-2}(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&3&1&-2&0\\0&-3&-1&2&0\\0&3&1&-2&0\\0&-3&-1&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}0&3&1&-2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\iff\begin{cases}x_3=-3\,x_2+2\,x_4,\\x_1,x_2,x_4\in\mathbb{R}.\end{cases}\tag{8}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд $\boldsymbol{f}=(\alpha,\beta,-3\,\beta+2\,\gamma,\gamma)$.

Оскільки вектор $\boldsymbol{b}_2$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{b}_1$, то $\boldsymbol{b}_1$ шукається з умови сумісності СЛР (9), а $\boldsymbol{b}_2$ — як її частинний розв'язок.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 1 & -2 & \alpha \\ 0 & -3 & -1 & 2 & \beta \\ 0 & 3 & 1 & -2 & -3\beta+2\gamma \\ 0 & -3 & -1 & 2 & \gamma \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 1 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha-3\beta+2\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+\gamma \end{array}\right). \tag{9}$$

СЛР (9) є сумісною тоді й лише тоді, коли

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0, \\ -\alpha-3\beta+2\gamma=0, \\ \alpha+\gamma=0, \end{cases} \iff \begin{cases} \beta=-\alpha, \\ \gamma=-\alpha, \\ \alpha\in\mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{v}=\begin{array}{c} \alpha\ \ \beta\ \ \gamma \\ (1,-1,-1). \end{array}$$

Таким чином, за вектор $\boldsymbol{b}_1$ можна взяти вектор $\boldsymbol{f}$ при $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=-1$, тобто $\boldsymbol{b}_1=(1,-1,1,-1)$. За вектор $\boldsymbol{b}_2$ можна взяти довільний прообраз вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто довільний частинний розв'язок СЛР (9) при $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=-1$, наприклад, $\boldsymbol{b}_2=(0,0,1,0)$. В якості векторів $\boldsymbol{b}_3$ та $\boldsymbol{b}_4$ можна взяти довільні частинні розв'язки СЛОР (8) такі, щоб СВ $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)$ утворювала ФСР СЛОР (8), наприклад, $\boldsymbol{b}_3=(1,0,0,0)$, $\boldsymbol{b}_4=(0,0,2,1)$.

Таким чином, $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перевірка здійснюється за формулою $TJ(A)=AT$:

$$TJ(A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$AT=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2-й спосіб (для оператора з єдиним власним числом).

$$[\psi_{-2}]_{\boldsymbol{e}}=B_{-2}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_1) & \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_2) & \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_3) & \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_4 \end{array}.$$

Оскільки $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{b}_1$ і всі стовпчики в матриці оператора ψ_{-2} пропорційні, то можна покласти $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)$, а $\boldsymbol{b}_1=(1,-1,1,-1)$. Вектори $\boldsymbol{b}_3$ та $\boldsymbol{b}_4$ шукаємо таким же чином, як і в 1-му способі, тобто як такі частинні розв'язки СЛОР (8), щоб СВ $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)$ утворювала ФСР СЛОР (8), наприклад, $\boldsymbol{b}_3=(1,0,0,0)$, $\boldsymbol{b}_4=(0,0,2,1)$. Отже, маємо таку ж саму матрицю переходу T, як і в 1-му способі. □

► c) $A=[\varphi]_{\boldsymbol{e}}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \\ 1 & -18 & 0 & -5 \\ 0 & 21 & -3 & 4 \end{pmatrix} \implies \chi_A(t)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & (2) & (1) \end{array} \\ \begin{vmatrix} -3-t & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -9-t & 1 & -2 \\ 1 & -18 & -t & -5 \\ 0 & 21 & -3 & 4-t \end{vmatrix} \end{array} =$

$$= \begin{vmatrix} -2-t & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -9-t & 1 & -2 \\ -4-2t & -18 & -t & -5 \\ -2-t & 21 & -3 & 4-t \end{vmatrix} = (-2-t) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -9-t & 1 & -2 \\ 2 & -18 & -t & -5 \\ 1 & 21 & -3 & 4-t \end{vmatrix} \begin{array}{l} (-2) \; (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= (-2-t) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -9-t & 1 & -2 \\ 0 & -26 & -t & -7 \\ 0 & 17 & -3 & 3-t \end{vmatrix} = (-2-t) \begin{vmatrix} -9-t & 1 & -2 \\ -26 & -t & -7 \\ 17 & -3 & 3-t \end{vmatrix} \; \begin{array}{l} (-1) \; (-4) \end{array} =$$

$$= (-2-t) \begin{vmatrix} -2-t & 1 & -2 \\ 2+t & -t & -7 \\ 8+4t & -3 & 3-t \end{vmatrix} = (-2-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -t & -7 \\ -4 & -3 & 3-t \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1) \; (4) \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$= (-2-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1-t & -9 \\ 0 & 1 & -5-t \end{vmatrix} = (-2-t)^2 \begin{vmatrix} 1-t & -9 \\ 1 & -5-t \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ (-3) \end{array} =$$

$$= (-2-t)^2 \begin{vmatrix} -2-t & 6+3t \\ 1 & -5-t \end{vmatrix} = (-2-t)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5-t \end{vmatrix} = (-2-t)^4 \implies$$

$t = -2$ — корінь кратності 4.

Матриця лінійного оператора $\psi_{-2} = \varphi - (-2)\,\varepsilon$

$$B_{-2} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 1 & -18 & 2 & -5 \\ 0 & 21 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 2 & -4 \\ 0 & 21 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (-2) \; (3) \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(B_{-2}) = 2 \implies \operatorname{def}(B_{-2}) = 4 - r(B_{-2}) = 2.$$

Звідси випливає, що власному числу $t = -2$ відповідають дві жорданові клітини, сумарна розмірність яких дорівнює 4 — кратності власного числа $t = -2$. Для ЖНФ матриці A можливі два варіанти: $J(A) = J_3(-2) \oplus J_1(-2)$ або $J(A) = J_2(-2) \oplus J_2(-2)$.

Кількість жорданових клітин розмірності k, які відповідають власному числу λ,

$$N(J_k(\lambda)) = r(B_\lambda^{k-1}) - 2r(B_\lambda^k) + r(B_\lambda^{k+1}). \tag{10}$$

$$B_{-2}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 1 & -18 & 2 & -5 \\ 0 & 21 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 1 & -18 & 2 & -5 \\ 0 & 21 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 1 & -3 \\ 1 & -11 & 1 & -3 \\ 1 & -11 & 1 & -3 \\ -3 & 33 & -3 & 9 \end{pmatrix} \implies$$

$r(B_{-2}^2) = 1$, $r(B_{-2}^0) = r(E) = 4 \implies N(J_1(-2)) = r(B_{-2}^0) - 2r(B_{-2}) + r(B_{-2}^2) = 1.$

Таким чином, ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A) = J_3(-2) \oplus J_1(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{b}_3 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{b}_4 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{0}. \end{array}$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ та матрицю переходу $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.

Зауважимо, що СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_4)$ утворює базис простору $\ker\psi_{-2} = V_{-2}(\varphi)$, проте вектори в цій СВ не є рівноправними. Так, вектор $\boldsymbol{b}_1$ має прообраз, а вектор $\boldsymbol{b}_4$ — ні.

1-й спосіб (універсальний). Знайдемо $\ker\psi_{-2} = V_{-2}(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -18 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 21 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 4\,x_2 + x_4, \\ x_3 = 7\,x_2 + 2\,x_4, \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{11}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд $\boldsymbol{f} = (4\,\alpha + \beta, \alpha, 7\,\alpha + 2\,\beta, \beta)$.

Оскільки вектор $\boldsymbol{b}_2$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{b}_1$, то $\boldsymbol{b}_1$ шукається з умови сумісності СЛР (12), а $\boldsymbol{b}_2$ — як її частинний розв'язок.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 0 & 1 & 4\,\alpha + \beta \\ 0 & -7 & 1 & -2 & \alpha \\ 1 & -18 & 2 & -5 & 7\,\alpha + 2\,\beta \\ 0 & 21 & -3 & 6 & \beta \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & -1 & -4\,\alpha - \beta \\ 0 & -7 & 1 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9\,\alpha + 3\,\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\,\alpha + \beta \end{array}\right). \tag{12}$$

СЛР (12) є сумісною тоді й лише тоді, коли

$$\begin{cases} 9\,\alpha + 3\,\beta = 0, \\ 3\,\alpha + \beta = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -3\,\alpha, \\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР:} \quad \boldsymbol{v} = \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ (1, -3). \end{array}$$

Таким чином, за вектор $\boldsymbol{b}_1$ можна взяти вектор $\boldsymbol{f}$ при $\alpha = 1$, $\beta = -3$, тобто $\boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 1, -3)$. При $\alpha = 1$, $\beta = -3$ СЛР (12) має загальний розв'язок

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 4\,x_2 + x_4, \\ x_3 = 1 + 7\,x_2 + 2\,x_4, \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

частинний розв'язок якого при $x_2 = x_4 = 0$ можна взяти за вектор $\boldsymbol{b}_2$, тобто $\boldsymbol{b}_2 = (-1, 0, 1, 0)$.

Вектор $\boldsymbol{b}_3$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_2$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_3) = \boldsymbol{b}_2$.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{b}_2 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -18 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 21 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 1 + 4\,x_2 + x_4, \\ x_3 = 7\,x_2 + 2\,x_4, \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

За вектор $\boldsymbol{b}_3$ можна взяти довільний прообраз вектора $\boldsymbol{b}_2$ при дії оператора ψ_{-2}, наприклад, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 0, 0, 0)$. В якості вектора $\boldsymbol{b}_4$ можна взяти довільний частинний розв'язок СЛОР (11) такий, щоб СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_4)$ утворювала ФСР СЛОР (11), наприклад, $\boldsymbol{b}_4 = (1, 0, 2, 1)$.

Таким чином, $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перевірка здійснюється за формулою $TJ(A) = AT$:

$$TJ(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 6 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$AT = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \\ 1 & -18 & 0 & -5 \\ 0 & 21 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 6 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2-й спосіб (для оператора з єдиним власним числом).

$$[\psi^2_{-2}]_{\boldsymbol{e}} = B^2_{-2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \psi^2_{-2}(\boldsymbol{e}_1) & \psi^2_{-2}(\boldsymbol{e}_2) & \psi^2_{-2}(\boldsymbol{e}_3) & \psi^2_{-2}(\boldsymbol{e}_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -11 & 1 & -3 \\ 1 & -11 & 1 & -3 \\ 1 & -11 & 1 & -3 \\ -3 & 33 & -3 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_4 \end{array}.$$

Оскільки $\psi^2_{-2}(\boldsymbol{b}_3) = \boldsymbol{b}_1$ і всі стовпчики в матриці оператора ψ^2_{-2} пропорційні, то можна покласти $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)$, а $\boldsymbol{b}_1 = (1,1,1,-3)$. Вектор $\boldsymbol{b}_2 = \psi_{-2}(\boldsymbol{b}_3) = (-1,0,1,0)$, а вектор $\boldsymbol{b}_4$ шукаємо таким же чином, як і в 1-му способі, тобто як такий частинний розв'язок СЛОР (11), що СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_4)$ утворює ФСР СЛОР (11), наприклад, $\boldsymbol{b}_4 = (1,0,2,1)$. Отже, маємо таку ж саму матрицю переходу T, як і в 1-му способі. □

► d) $A = [\varphi]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -4 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \implies \chi_A(t) = \begin{vmatrix} -4-t & 9 & -4 & 10 \\ 0 & -2-t & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -t & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -2-t \end{vmatrix} =$

$$= (-2-t) \begin{vmatrix} -4-t & -4 & 10 \\ 1 & -t & -5 \\ 0 & 0 & -2-t \end{vmatrix} = (-2-t)^2 \begin{vmatrix} -4-t & -4 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = (-2-t)^4 \implies$$

$t = -2$ — корінь кратності 4.

Матриця лінійного оператора $\psi_{-2} = \varphi - (-2)\,\varepsilon$

$$B_{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(B_{-2}) = 2 \implies \operatorname{def}(B_{-2}) = 4 - r(B_{-2}) = 2.$$

Звідси випливає, що власному числу $t = -2$ відповідають дві жорданові клітини, сумарна розмірність яких дорівнює 4 — кратності власного числа $t = -2$. Для ЖНФ матриці A можливі два варіанти: $J(A) = J_3(-2) \oplus J_1(-2)$ або $J(A) = J_2(-2) \oplus J_2(-2)$.

$$B^2_{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 9 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$r(B^2_{-2}) = 0$, $r(B^0_{-2}) = r(E) = 4 \implies N(J_1(-2)) = r(B^0_{-2}) - 2r(B_{-2}) + r(B^2_{-2}) = 0.$

Таким чином, ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A) = J_2(-2) \oplus J_2(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{b}_4 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{b}_3 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{0}. \end{array}$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ та матрицю переходу $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.

Зауважимо, що вектори $\boldsymbol{b}_1$ та $\boldsymbol{b}_3$, які утворюють базис простору $\ker\psi_{-2} = V_{-2}(\varphi)$, є рівноправними, оскільки їм відповідають ланцюжки однакової довжини.

1-й спосіб (універсальний). Знайдемо $\ker\psi_{-2} = V_{-2}(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 9 & -4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = -2\,x_3 + 5\,x_4, \\ x_2 = 0, \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{13}$$

ФСР СЛОР (13) можна взяти в якості векторів $\boldsymbol{b}_1$ та $\boldsymbol{b}_3$, наприклад, $\boldsymbol{b}_1 = (-2, 0, 1, 0)$ і $\boldsymbol{b}_3 = (5, 0, 0, 1)$. При дії оператора ψ_{-2} вектори $\boldsymbol{b}_2$ та $\boldsymbol{b}_4$ є прообразами векторів $\boldsymbol{b}_1$ та $\boldsymbol{b}_3$ відповідно, а тому знайдемо їх як частинні розв'язки систем лінійних рівнянь

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_3 \\ \left(\begin{array}{cccc|c|c} -2 & 9 & -4 & 10 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 2 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ загальні розв'язки яких}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2\,x_3 + 5\,x_4, \\ x_2 = 0, \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x_1 = -7 - 2\,x_3 + 5\,x_4, \\ x_2 = -1, \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{відповідно.}$$

Таким чином, при $x_3 = x_4 = 0$ отримаємо частинні розв'язки $\boldsymbol{b}_2 = (1, 0, 0, 0)$ та $\boldsymbol{b}_4 = (-7, -1, 0, 0)$ відповідно.

Таким чином, $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Перевірка здійснюється за формулою $TJ(A) = AT$:

$$TJ(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -10 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AT = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -4 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -10 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-й спосіб (для оператора з єдиним власним числом).

$$[\psi_{-2}]_{\boldsymbol{e}} = B_{-2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_1) & \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_2) & \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_3) & \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 9 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_4 \end{array}.$$

Оскільки $\dim \operatorname{Im}\psi_{-2} = 2$, то в якості векторів $\boldsymbol{b}_1$ та $\boldsymbol{b}_3$ можна взяти довільні два непропорційні стовпчики матриці оператора ψ_{-2}, наприклад, $\boldsymbol{b}_1 = \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_1) = (-2, 0, 1, 0)$ та $\boldsymbol{b}_3 = \psi_{-2}(\boldsymbol{e}_2) = (9, 0, -7, -1)$. Тоді за вектори $\boldsymbol{b}_2$ та $\boldsymbol{b}_4$ можна взяти вектори $\boldsymbol{e}_1$ та $\boldsymbol{e}_2$ відповідно, тобто $\boldsymbol{b}_2 = (1, 0, 0, 0)$ та $\boldsymbol{b}_4 = (0, 1, 0, 0)$.

Таким чином, $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Перевірка здійснюється за формулою $TJ(A) = AT$:

$$TJ(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$AT = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -4 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

► е) $A = [\varphi]_e = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 8 & -1 & 4 \end{pmatrix} \implies \chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 5 & -2 & 2 \\ -1 & -5-t & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2-t & 5 \\ 1 & 8 & -1 & 4-t \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} -t & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -5-t & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2-t & 3-t \\ 1 & 8 & -1 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t) \begin{vmatrix} -t & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -5-t & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2-t & 1 \\ 1 & 8 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-t) \begin{vmatrix} -t & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -5-t & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1-t & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3-t) \begin{vmatrix} -t & 5 & -2 \\ -1 & -5-t & 1 \\ -1 & -4 & -1-t \end{vmatrix} =$$

$$= (3-t) \begin{vmatrix} -2-t & 5 & -2 \\ 0 & -5-t & 1 \\ -2-t & -4 & -1-t \end{vmatrix} = (-2-t)(3-t) \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -5-t & 1 \\ 1 & -4 & -1-t \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-t)(3-t) \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -5-t & 1 \\ 0 & -9 & 1-t \end{vmatrix} = (-2-t)(3-t) \begin{vmatrix} -5-t & 1 \\ -9 & 1-t \end{vmatrix} = (-2-t)^3(3-t) \implies$$

$t_1 = -2$ — корінь кратності 3, а $t_2 = 3$ — корінь кратності 1.

Матриця лінійного оператора $\psi_{-2} = \varphi - (-2)\,\varepsilon$

$$B_{-2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 8 & -1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$r(B_{-2}) = 3 \implies \operatorname{def}(B_{-2}) = 4 - r(B_{-2}) = 1.$

Звідси випливає, що власному числу $t = -2$ відповідає одна жорданова клітина розмірності 3, що дорівнює кратності власного числа $t = -2$. Таким чином, ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A) = J_3(-2) \oplus J_1(3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{b}_3 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_{-2}} \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{b}_4 \xrightarrow{\psi_3} \boldsymbol{0}. \end{array}$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ та матрицю переходу $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.
Вектор $\boldsymbol{b}_1$ утворює базис простору $\ker \psi_{-2} = V_{-2}(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 1, 0).$$

Вектор $\boldsymbol{b}_2$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{b}_1$.

$$\begin{array}{c} \hfill \boldsymbol{b}_1 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 2 + x_3, \\ x_2 = -1, \\ x_4 = 1, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

За вектор $\boldsymbol{b}_2$ можна взяти довільний прообраз вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_{-2}, наприклад, $\boldsymbol{b}_2 = (2, -1, 0, 1)$.
Вектор $\boldsymbol{b}_3$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_2$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_3) = \boldsymbol{b}_2$.

$$\begin{array}{c} \hfill \boldsymbol{b}_2 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 1 + x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

За вектор $\boldsymbol{b}_3$ можна взяти довільний прообраз вектора $\boldsymbol{b}_2$ при дії оператора ψ_{-2}, наприклад, $\boldsymbol{b}_3 = (1, 0, 0, 0)$.
Вектор $\boldsymbol{b}_4$ утворює базис простору $\ker \psi_3 = V_3(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 5 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -8 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = x_4, \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_4 = (0, 0, 1, 1).$$

Таким чином, $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перевірка здійснюється за формулою $TJ(A) = AT$:

$$TJ(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$AT = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 8 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

$$
\blacktriangleright \text{ f) } A=\begin{pmatrix}-3&0&1&-1\\1&-2&-1&1\\0&-5&-2&5\\1&-5&-1&4\end{pmatrix}\implies \chi_A(t)=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}&&(1)&\end{array}\\ \begin{vmatrix}-3-t&0&1&-1\\1&-2-t&-1&1\\0&-5&-2-t&5\\1&-5&-1&4-t\end{vmatrix}\end{array}=
$$

$$
=\begin{vmatrix}-3-t&0&1&0\\1&-2-t&-1&0\\0&-5&-2-t&3-t\\1&-5&-1&3-t\end{vmatrix}=(3-t)\begin{vmatrix}-3-t&0&1&0\\1&-2-t&-1&0\\0&-5&-2-t&1\\1&-5&-1&1\end{vmatrix}\begin{array}{c}(1)\\ \\ \\(-1)\end{array}=
$$

$$
=(3-t)\begin{vmatrix}-3-t&0&1&0\\-2-t&-2-t&0&0\\-1&0&-1-t&0\\1&-5&-1&1\end{vmatrix}=(-2-t)(3-t)\begin{vmatrix}-3-t&0&1\\1&1&0\\-1&0&-1-t\end{vmatrix}=
$$

$$
=(-2-t)(3-t)\begin{vmatrix}-3-t&1\\-1&-1-t\end{vmatrix}=(-2-t)^3(3-t)\implies
$$

$t_1=-2$ — корінь кратності 3, а $t_2=3$ — корінь кратності 1.

Матриця лінійного оператора $\psi_{-2}=\varphi-(-2)\,\varepsilon$

$$
B_{-2}=\begin{pmatrix}-1&0&1&-1\\1&0&-1&1\\0&-5&0&5\\1&-5&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\implies
$$

$r(B_{-2})=2\implies \operatorname{def}(B_{-2})=4-r(B_{-2})=2.$

Звідси випливає, що власному числу $t=-2$ відповідають дві жорданові клітини, сумарна розмірність яких дорівнює 3 — кратності власного числа $t=-2$. Таким чином, ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$
J(A)=J_2(-2)\oplus J_1(-2)\oplus J_1(3)=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix},\qquad \begin{array}{r}\boldsymbol{b}_2\xrightarrow{\psi_{-2}}\boldsymbol{b}_1\xrightarrow{\psi_{-2}}\mathbf{0},\\ \boldsymbol{b}_3\xrightarrow{\psi_{-2}}\mathbf{0},\\ \boldsymbol{b}_4\xrightarrow{\psi_{3}}\mathbf{0}.\end{array}
$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)$ та матрицю переходу $T=T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.

Зауважимо, що СВ $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3)$ утворює базис простору $\ker\psi_{-2}=V_{-2}(\varphi)$, проте вектори в цій СВ не є рівноправними. Так, вектор $\boldsymbol{b}_1$ має прообраз, а вектор $\boldsymbol{b}_3$ — ні.

Знайдемо $\ker\psi_{-2}=V_{-2}(\varphi)$.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0&1&-1&0\\1&0&-1&1&0\\0&-5&0&5&0\\1&-5&-1&6&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\iff\begin{cases}x_1=x_3-x_4,\\x_2=x_4,\\x_3,x_4\in\mathbb{R}.\end{cases}\tag{14}
$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд $\boldsymbol{f}=(\alpha-\beta,\beta,\alpha,\beta)$.

Оскільки вектор $\boldsymbol{b}_2$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_{-2}, тобто $\psi_{-2}(\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{b}_1$, то $\boldsymbol{b}_1$ шукається з умови сумісності СЛР (15), а $\boldsymbol{b}_2$ — як її частинний розв'язок.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & \alpha-\beta \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \beta \\ 0 & -5 & 0 & 5 & \alpha \\ 1 & -5 & -1 & 6 & \beta \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\alpha/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right). \tag{15}$$

СЛР (15) є сумісною тоді й лише тоді, коли $\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$ ФСР: $\boldsymbol{v} = \begin{array}{c} \alpha \ \beta \\ (0,1). \end{array}$

Таким чином, за вектор $\boldsymbol{b}_1$ можна взяти вектор $\boldsymbol{f}$ при $\alpha = 0$, $\beta = 1$, тобто $\boldsymbol{b}_1 = (-1,1,0,1)$. При $\alpha = 0$, $\beta = 1$ СЛР (15) має загальний розв'язок

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 - x_4, \\ x_2 = x_4, \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

частинний розв'язок якого при $x_3 = x_4 = 0$ можна взяти за вектор $\boldsymbol{b}_2$, тобто $\boldsymbol{b}_2 = (1,0,0,0)$.

В якості вектора $\boldsymbol{b}_3$ можна взяти довільний частинний розв'язок СЛОР (14) такий, щоб СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3)$ утворювала ФСР СЛОР (14), наприклад, $\boldsymbol{b}_3 = (1,0,1,0)$.

Вектор $\boldsymbol{b}_4$ утворює базис простору $\ker \psi_3 = V_3(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = x_4, \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_4 = (0,0,1,1).$$

Таким чином, $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перевірка здійснюється за формулою $TJ(A) = AT$:

$$TJ(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$AT = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

7.2.А. З'ясувати, чи є серед матриць A, B та C подібні, якщо
$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

► Дві матриці є подібними, якщо вони мають однакову ЖНФ.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 & -1 \\ -3 & -1-t & 3 \\ -2 & -2 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t)^3, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad r(A_2) = 1,$$

$$d(A_2) = 2 \quad \Longrightarrow \quad J(A) = J_2(2) \oplus J_1(2).$$

$$\chi_B(t)=\begin{vmatrix}5-t & 5 & -2\\ -2 & -1-t & 1\\ -1 & -1 & 2-t\end{vmatrix}=(2-t)^3,\quad B_2=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ -2 & -3 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad r(B_2)=2,$$

$d(B_2)=1 \quad\Longrightarrow\quad J(B)=J_3(2).$

$$\chi_C(t)=\begin{vmatrix}6-t & 0 & 8\\ 3 & 2-t & 6\\ -2 & 0 & -2-t\end{vmatrix}=(2-t)^3,\quad C_2=\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 3 & 0 & 6\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix},\quad r(C_2)=1,$$

$d(C_2)=2 \quad\Longrightarrow\quad J(C)=J_2(2)\oplus J_1(2).$

Таким чином, матриці A та C подібні, а матриця B не є подібною до них. □

7.3.А. Визначити ЖНФ матриці A та її мінімальний многочлен, якщо характеристичний многочлен $\chi_A(t)=(-1-t)^3(2-t)^2$, а ранг $r(A+E)=4$ і $r(A-2E)=3$.

► $n=k_1+k_2=5$,

$$\left.\begin{array}{lll} t_1=-1,\quad k_1=3, & \operatorname{def}B_{-1}=n-r(B_{-1})=1 & \Longrightarrow\ J_3(-1)\\ t_2=2,\quad k_2=2, & \operatorname{def}B_2=n-r(B_2)=2 & \Longrightarrow\ J_1(2)\oplus J_1(2)\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad J(A)=J_3(-1)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2),\quad m_A(t)=(t+1)^3(t-2).$$ □

7.4.А. Навести приклад двох матриць, які мають однакові характеристичні та однакові мінімальні многочлени, але не є подібними.

►

$$\left.\begin{array}{lll} A=J_2(\lambda)\oplus J_2(\lambda) & \Longrightarrow & \chi_A(t)=(\lambda-t)^4,\quad m_A(t)=(t-\lambda)^2\\ B=J_2(\lambda)\oplus J_1(\lambda)\oplus J_1(\lambda) & \Longrightarrow & \chi_B(t)=(\lambda-t)^4,\quad m_B(t)=(t-\lambda)^2\end{array}\right\}\Longrightarrow A\not\sim B.$$ □

7.5.А. Знайти мінімальний многочлен a) нульового оператора, b) оператора проектування.

► Нехай (L,P) — векторний простір, $\dim_P L=n$.

a) Для довільного базису $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{B}(L)$ матриця $[\theta]_{\boldsymbol{e}}=O$ нульового оператора θ є нульовою і $O=J_1(0)\oplus\ldots\oplus J_1(0)$, а тому мінімальний многочлен $m_\theta(t)=t$.

b) Нехай $L=U\oplus V$, $\dim_P U=k$, $\dim_P V=n-k$, $\varphi\colon L\to L$, $\forall\,\boldsymbol{x}\in L\ \ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}\in U$, $\boldsymbol{v}\in V$, $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}$.

Якщо $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k;\boldsymbol{e}_{k+1},\dots,\boldsymbol{e}_n)\in\mathcal{B}(L=U\oplus V)$, то

$$[\varphi]_{\boldsymbol{e}}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}\varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_k) & \varphi(\boldsymbol{e}_{k+1}) & \varphi(\boldsymbol{e}_{k+2}) & \dots & \varphi(\boldsymbol{e}_n)\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \dots\\ \boldsymbol{e}_k\\ \boldsymbol{e}_{k+1}\\ \boldsymbol{e}_{k+2}\\ \dots\\ \boldsymbol{e}_n\end{array},$$

а тому $J([\varphi]_{\boldsymbol{e}})=J_1(1)\oplus\ldots\oplus J_1(1)\oplus J_1(0)\oplus\ldots\oplus J_1(0)$ і $m_\varphi(t)=(t-1)t$. □

7.6.А. Розв'язати рівняння $X^2=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$.

► Нехай $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Тоді $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 6-t & 2 \\ 3 & 7-t \end{vmatrix} = t^2 - 13\,t + 36 = (t-4)(t-9)$.

ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A) = J_1(4) \oplus J_1(9) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_4} \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_9} \mathbf{0}. \end{array}$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ та матрицю переходу $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.
Вектор $\boldsymbol{b}_1$ утворює базис простору $\ker\psi_4 = V_4(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (-1, 1).$$

Вектор $\boldsymbol{b}_2$ утворює базис простору $\ker\psi_9 = V_9(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}\,x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_2 = (2, 3).$$

Таким чином, $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, причому $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}} = T^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язком матричного рівня $X^2 = A$ є матриця

$$X = \pm\sqrt{A} = \pm\sqrt{T\,J(A)\,T^{-1}} = T\left(\pm\sqrt{J(A)}\right)T^{-1} = T\left(\pm\sqrt{J_1(4) \oplus J_1(9)}\right)T^{-1} =$$

$$= T\left((\pm\sqrt{J_1(4)}\,) \oplus (\pm\sqrt{J_1(9)}\,)\right)T^{-1} = T\begin{pmatrix} \pm\sqrt{4} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{9} \end{pmatrix}T^{-1} = T\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}T^{-1}.$$

Таким чином, матричне рівняння $X^2 = A$ має чотири розв'язки:

$$X_{1,2} = \pm T\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}T^{-1} = \pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix},$$

$$X_{3,4} = \pm T\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}T^{-1} = \pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

7.7.А. Для яких значень p існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}^n$?

► Нехай $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$. Тоді

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-p-t & p \\ p & 1-p-t \end{vmatrix} = t^2 - 2\,(1-p)t + (1-2\,p) = (t-1)(t-1+2\,p).$$

ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису (навіть у випадку, коли $p = 0$):

$$J(A) = J_1(1) \oplus J_1(1-2\,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\,p \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_1} \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_{1-2\,p}} \mathbf{0}. \end{array}$$

Нехай $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$ — матриця переходу до жорданового базису $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ (для кожного $p \in \mathbb{R}$ такий базис завжди існує, проте шукати його в цій задачі не є обов'язковим). Тоді

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty}\left(T\,J(A)\,T^{-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} T\,(J(A))^n\,T^{-1} = T\,\lim_{n\to\infty}(J(A))^n\,T^{-1} =$$

$$= T \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2\,p \end{pmatrix}^n T^{-1} = T \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (1-2\,p)^n \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} 1^n & 0 \\ 0 & \lim\limits_{n\to\infty} (1-2\,p)^n \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lim\limits_{n\to\infty} (1-2\,p)^n \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Таким чином, існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$ рівносильно існуванню границі $\lim\limits_{n\to\infty} (1-2\,p)^n$. Остання існує, вочевидь, тоді й лише тоді, коли $-1 < 1-2\,p \leqslant 1 \iff 0 \leqslant p < 1$. □

7.8.А. Використовуючи ЖНФ обчислити:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{100}$, b) $\exp \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, c) $\exp \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, d) $\ln \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

► a) Нехай $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Тоді $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 2 \\ -3 & 5-t \end{vmatrix} = t^2 - 5\,t + 6 = (t-2)(t-3)$.

ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A) = J_1(2) \oplus J_1(3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_2} \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_3} \mathbf{0}. \end{matrix}$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ та матрицю переходу $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.
Вектор $\boldsymbol{b}_1$ утворює базис простору $\ker \psi_2 = V_2(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (1, 1).$$

Вектор $\boldsymbol{b}_2$ утворює базис простору $\ker \psi_3 = V_3(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}\,x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_2 = (2, 3).$$

Таким чином, $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, причому $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}} = T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$A^{100} = \left(T\,J(A)\,T^{-1}\right)^{100} = T\,\left(J(A)\right)^{100}\,T^{-1} = T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{100} T^{-1} = T \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 2 \cdot 3^{100} - 2^{101} \\ 3 \cdot 2^{100} - 3^{101} & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix}.$$ □

► b) Нехай $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$. Тоді $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -2 \\ 6 & -3-t \end{vmatrix} = t^2 - t = (t-1)\,t$.

ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A) = J_1(1) \oplus J_1(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_1} \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_0} \mathbf{0}. \end{matrix}$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ та матрицю переходу $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.
Вектор $\boldsymbol{b}_1$ утворює базис простору $\ker \psi_1 = V_1(\varphi)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & \big| & 0 \\ 6 & -4 & \big| & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}\, x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (2, 3).$$

Вектор $\boldsymbol{b}_2$ утворює базис простору $\ker \psi_0 = V_0(\varphi)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & \big| & 0 \\ 6 & -3 & \big| & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\, x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_2 = (1, 2).$$

Таким чином, $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, причому $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}} = T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Тоді

$$\exp A = \exp\left(T\, J(A)\, T^{-1}\right) = T \cdot \exp J(A) \cdot T^{-1} = T \cdot \exp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,e - 3 & 2 - 2\,e \\ 6\,e - 6 & 4 - 3\,e \end{pmatrix}. \qquad \square$$

► c) Нехай $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. Тоді $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 4-t & 2 & -5 \\ 6 & 4-t & -9 \\ 5 & 3 & -7-t \end{vmatrix} = t^2\,(t-1) \implies$

$t_1 = 0$ — корінь кратності 2, а $t_2 = 1$ — корінь кратності 1.

Матриця лінійного оператора $\psi_0 = \varphi - 0\,\varepsilon$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(B_0) = 2 \implies \operatorname{def}(B_0) = 3 - r(B_0) = 1.$$

Звідси випливає, що власному числу $t = 0$ відповідає одна жорданова клітина розмірності 2, що дорівнює кратності власного числа $t = 0$. Таким чином, ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A) = J_2(0) \oplus J_1(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_0} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_0} \boldsymbol{0}, \\ \qquad\ \ \boldsymbol{b}_3 \xrightarrow{\psi_1} \boldsymbol{0}. \end{array}$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ та матрицю переходу $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.

Вектор $\boldsymbol{b}_1$ утворює базис простору $\ker \psi_0 = V_0(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -9 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_2 = 3\,x_1, \\ x_3 = 2\,x_1, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (1, 3, 2).$$

Вектор $\boldsymbol{b}_2$ є прообразом вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_0, тобто $\psi_0(\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{b}_1$.

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\quad \boldsymbol{b}_1 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -5 & 1 \\ 6 & 4 & -9 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 2 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_2 = 3 + 3\,x_1, \\ x_3 = 1 + 2\,x_1, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

За вектор $\boldsymbol{b}_2$ можна взяти довільний прообраз вектора $\boldsymbol{b}_1$ при дії оператора ψ_0, наприклад, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 3, 1)$.

Вектор $\boldsymbol{b}_3$ утворює базис простору $\ker \psi_1 = V_1(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & -5 & 0\\ 6 & 3 & -9 & 0\\ 5 & 3 & -8 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \iff \begin{cases}x_1 = x_3,\\ x_2 = x_3,\\ x_3 \in \mathbb{R}.\end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_3 = (1,1,1).$$

Таким чином, $T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, причому $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}} = T^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(J_2(\lambda)) = \begin{pmatrix}f(\lambda) & f'(\lambda)\\ 0 & f(\lambda)\end{pmatrix}\\ (e^x)' = e^x\end{array}\right\} \implies \exp J_2(\lambda) = \begin{pmatrix}e^\lambda & e^\lambda\\ 0 & e^\lambda\end{pmatrix} \implies$$

$$\exp A = \exp\left(T\,J(A)\,T^{-1}\right) = T\cdot\exp J(A)\cdot T^{-1} = T\cdot\exp\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot T^{-1} =$$

$$= T\begin{pmatrix}e^0 & e^0 & 0\\ 0 & e^0 & 0\\ 0 & 0 & e^1\end{pmatrix}T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3e-1 & e & -3e+1\\ 3e & e+3 & -3e-3\\ 3e-1 & e+1 & -3e\end{pmatrix}. \qquad \square$$

► d) Нехай $A = \begin{pmatrix}4 & -15 & 6\\ 1 & -4 & 2\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}$. Тоді $\chi_A(t) = \begin{vmatrix}4-t & -15 & 6\\ 1 & -4-t & 2\\ 1 & -5 & 3-t\end{vmatrix} = (1-t)^3 \implies$ $t = 1$ — корінь кратності 3.

Матриця лінійного оператора $\psi_1 = \varphi - \varepsilon$

$$B_1 = \begin{pmatrix}3 & -15 & 6\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \implies r(B_1) = 1 \implies \operatorname{def}(B_1) = 3 - r(B_1) = 2.$$

Звідси випливає, що власному числу $t = 1$ відповідають дві жорданові клітини, сумарна розмірність яких дорівнює 3 — кратності власного числа $t = 1$. Таким чином, ЖНФ матриці A і діаграма жорданового базису:

$$J(A) = J_2(1) \oplus J_1(1) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{r} \boldsymbol{b}_2 \xrightarrow{\psi_1} \boldsymbol{b}_1 \xrightarrow{\psi_1} \boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{b}_3 \xrightarrow{\psi_1} \boldsymbol{0}.\end{array}$$

Знайдемо жордановий базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ та матрицю переходу $T = T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}}$.

Зауважимо, що СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3)$ утворює базис простору $\ker\psi_1 = V_1(\varphi)$, проте вектори в цій СВ не є рівноправними. Так, вектор $\boldsymbol{b}_1$ має прообраз, а вектор $\boldsymbol{b}_3$ — ні.

Оператор φ є оператором з єдиним власним числом, а тому жордановий базис знайдемо в 2-й спосіб.

$$[\psi_1]_{\boldsymbol{e}} = B_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\psi_1(\boldsymbol{e}_1) & \psi_1(\boldsymbol{e}_2) & \psi_1(\boldsymbol{e}_3)\end{array}\\ \begin{pmatrix}3 & -15 & 6\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{array}.$$

Оскільки $\psi_1(\boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{b}_1$ і всі стовпчики в матриці оператора ψ_1 пропорційні, то можна покласти $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, а $\boldsymbol{b}_1 = (3,1,1)$.

Знайдемо тепер $\ker\psi_1 = V_1(\varphi)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -15 & 6 & 0\\ 1 & -5 & 2 & 0\\ 1 & -5 & 2 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 5\,x_2 - 2\,x_3,\\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}.\end{cases} \tag{16}$$

За вектор $\boldsymbol{b}_3$ можна взяти довільний частинний розв'язок СЛОР (16), не пропорційний до вектора $\boldsymbol{b}_1$, наприклад, $\boldsymbol{b}_3 = (5, 1, 0)$.

Таким чином, $T = \begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, причому $T_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{e}} = T^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -5 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned} & f(J_2(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda)\\ 0 & f(\lambda)\end{pmatrix}\\ & (\ln x)' = \frac{1}{x}\end{aligned}\right\} \implies \ln J_2(\lambda) = \begin{pmatrix}\ln\lambda & 1/\lambda\\ 0 & \ln\lambda\end{pmatrix} \implies$$

$$\ln A = \ln\big(T\,J(A)\,T^{-1}\big) = T\cdot\ln J(A)\cdot T^{-1} = T\cdot\ln\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot T^{-1} =$$

$$= T\begin{pmatrix}\ln 1 & 1/1 & 0\\ 0 & \ln 1 & 0\\ 0 & 0 & \ln 1\end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -5 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -15 & 6\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}. \quad \square$$

7.9.А. Довести, що $f(A) = g(A)$, якщо $f(t) = t^3 + t$, $g(t) = 4t^2 - 6$, $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

► $f(A) = g(A) \iff h(A) = O$, де $h(t) = f(t) - g(t) \iff h(t) \vdots m_A(t)$.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix}1-t & 1\\ -2 & 4-t\end{vmatrix} = t^2 - 5\,t + 6 = (t-2)(t-3) \implies m_A(t) = \chi_A(t).$$

$$h(t) = t^3 - 4\,t^2 + t + 6 = (t+1)(t-2)(t-3) \implies h(t) \vdots m_A(t) \implies f(A) = g(A). \quad \square$$

Практичне заняття №8. Спряжені, самоспряжені та ортогональні оператори

8.1.А. Нехай $\mathbb{E} = U \oplus U^{\perp}$. Знайти спряжений до $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ лінійний оператор φ^*, якщо: a) φ — оператор ортогонального проектування на підпростір U, b) φ — оператор ортогонального відбиття від U.
8.2.А. Нехай A — матриця лінійного оператора $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ в деякому (не обов'язково ортонормованому) базисі $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, а A^* — матриця спряженого оператора φ^* в цьому ж базисі. Довести, що $A^* = G^{-1}A^TG$, де G — матриця Грама базису $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$.
8.3.А. Нехай A — матриця лінійного оператора евклідового простору в деякому базисі, а G — матриця Грама цього базису. Знайти матрицю A^* спряженого оператора в цьому базисі, якщо: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
8.4.А. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормований базис простору $\mathbb{E}$, а A — матриця лінійного оператора φ в деякому базисі $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Знайти (двома способами) матрицю A^* спряженого оператора φ^* в базисі $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, якщо $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
8.5.А. Знайти необхідну та достатню умову на матрицю A (див. 8.2.А.) для того, щоб оператор φ був самоспряженим.
8.6.А. Нехай A — матриця лінійного оператора φ евклідового простору в деякому базисі, а G — матриця Грама цього базису. Визначити, чи є оператор φ самоспряженим, якщо: a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
8.7.А. Знайти власні числа та ортонормований базис з власних векторів самоспряженого оператора, заданого в деякому ортонормованому базисі матрицею $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
8.8.А. З'ясувати, чи буде перетворення $\varphi\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}$ звичайного тривимірного евклідового простору ортогональним, якщо $\boldsymbol{a}$ — деякий фіксований вектор.
8.9.А. Для ортогонального перетворення, заданого в ортонормованому базисі матрицею A, знайти канонічний вигляд його матриці та канонічний ортонормований базис, якщо:
a) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
8.10.А. Показати, що одна з квадратичних функцій є додатньо визначеною. Знайти базис, в якому додатньо визначена функція має нормальний вигляд, а інша квадратична функція — канонічний вигляд, а також знайти ці вигляди, якщо $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$, $g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.
8.11.А. Звести до канонічного вигляду та визначити тип поверхні в залежності від числа k: a) $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 2x + 4y - 2z = k$, b) $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz + 3x + 3y - 3z = k$.
8.1.Д. Довести властивості спряжених та самоспряжених лінійних операторів (див. лекцію).
8.2.Д. Знайти лінійний оператор φ^*, спряжений до оператора $\varphi\colon W_3 \to W_3$, заданого в звичайному тривимірному просторі W_3, якщо: a) φ — поворот навколо вісі, яка визначається вектором $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, на кут $\dfrac{2\pi}{3}$, b) $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}$, c) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, де $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{b}$ — деякі фіксовані ненульові вектори.
8.3.Д. Нехай A — матриця лінійного оператора евклідового простору в деякому базисі, а G — матриця Грама цього базису. Знайти матрицю A^* спряженого оператора в цьому базисі, якщо: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

8.4.Д. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормований базис простору $\mathbb{E}$, а A — матриця лінійного оператора φ в деякому базисі $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Знайти (двома способами) матрицю A^* спряженого оператора φ^* в базисі $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, якщо: a) $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.5.Д. Нехай A — матриця лінійного оператора φ евклідового простору в деякому базисі, а G — матриця Грама цього базису. Визначити, чи є оператор φ самоспряженим, якщо: a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8.6.Д. Знайти власні числа та ортонормований базис з власних векторів самоспряженого оператора, заданого в деякому ортонормованому базисі матрицею:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & 16 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.7.Д. З'ясувати, чи буде перетворення $\varphi\colon f(x) \mapsto x^n f(\frac{1}{x})$ простору $\mathbb{R}_n[x]$, $n \in \mathbb{N}$, ортогональним, якщо скалярний добуток задається співвідношенням:

a) $(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n, a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$,

b) $(f(x), g(x)) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

8.8.Д. Для ортогонального перетворення, заданого в ортонормованому базисі матрицею A, знайти канонічний вигляд його матриці та канонічний ортонормований базис, якщо:

a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, b) $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

h) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, j) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8.9.Д. Показати, що одна з квадратичних функцій є додатньо визначеною. Знайти базис, в якому додатньо визначена функція має нормальний вигляд, а інша квадратична функція — канонічний вигляд, а також знайти ці вигляди, якщо:

a) $f = -4x_1x_2$, $g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$, b) $f = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$, $g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2$,

c) $f = 21x_1^2 - 18x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 28x_1x_3 + 6x_2x_3$, $g = 11x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,

d) $f = 14x_1^2 - 4x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 26x_2x_3$, $g = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

8.10.Д. Звести до канонічного вигляду та визначити тип кривої:

a) $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$,

b) $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$,

c) $15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$.

8.11.Д. Звести до канонічного вигляду та визначити тип поверхні:

a) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$,

b) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xz + 2yz + 2x + 2y + 5z + 7 = 0$,
c) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4xy - 6xz - 2x + 4y + 6z + 2 = 0$.
8.1.+. Нехай $\mathbb{E} = U \oplus V$. Довести, що: а) оператор, спряжений проектуванню на підпростір U паралельно V, є проектуванням на $V^\perp$ паралельно $U^\perp$, b) оператор, спряжений відбиттю від U паралельно V, є відбиттям від $V^\perp$ паралельно $U^\perp$.

8.1.A. Нехай $\mathbb{E} = U \oplus U^{\perp}$. Знайти спряжений до $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ лінійний оператор φ^*, якщо: a) φ — оператор ортогонального проектування на підпростір U, b) φ — оператор ортогонального відбиття від U.

► Нехай $\mathbb{E} = U \oplus U^{\perp}$. Тоді існує ортонормований базис $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{E})$ такий, що $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k) \in \mathcal{B}(U)$ і $(\boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \in \mathcal{B}(U^{\perp})$. Дійсно, такий базис можна отримати, застосувавши спочатку процес ортогоналізації Грама–Шмідта до довільного базису, узгодженого з підпростором U, а потім його пронормувавши. Оскільки матриці операторів проектування та відбиття в довільному базисі, узгодженому з підпростором U, є діагональними, то ці оператори є самоспряженими. □

8.2.A. Нехай A — матриця лінійного оператора $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ в деякому (не обов'язково ортонормованому) базисі $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$, а A^* — матриця спряженого оператора φ^* в цьому ж базисі. Довести, що $A^* = G^{-1}A^T G$, де G — матриця Грама базису $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$.

► Нехай СВ $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — деякий ортонормований базис $\mathbb{E}$, а $S = S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$ — матриця переходу від базису $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ до базису $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$. Зауважимо, що добуток $S^T S = G$ — матриці Грама базису $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$. Тоді

$$A^* = S^{-1}[\varphi^*]_{\boldsymbol{e}}S = S^{-1}[\varphi]_{\boldsymbol{e}}^T S = S^{-1}(SAS^{-1})^T S = S^{-1}(S^{-1})^T A^T S^T S = G^{-1}A^T G. \qquad \square$$

8.3.A. Нехай A — матриця лінійного оператора евклідового простору в деякому базисі, а G — матриця Грама цього базису. Знайти матрицю A^* спряженого оператора в цьому базисі, якщо: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

► a) $A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

8.4.A. Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормований базис простору $\mathbb{E}$, а A — матриця лінійного оператора φ в деякому базисі $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Знайти (двома способами) матрицю A^* спряженого оператора φ^* в базисі $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, якщо $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{f}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

► *1-й спосіб.*

$S = S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ до базису $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$. Тоді

$$[\varphi]_{\boldsymbol{e}} = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$[\varphi^*]_{\boldsymbol{e}} = [\varphi]_{\boldsymbol{e}}^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^* = S^{-1}[\varphi^*]_{\boldsymbol{e}}S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2-й спосіб.

$G = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) \\ (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ — матриця Грама базису $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$. Тоді

$$A^* = G^{-1}A^TG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

8.5.A. Знайти необхідну та достатню умову на матрицю A (див. 8.2.A.) для того, щоб оператор φ був самоспряженим.

► $GA = A^TG$. □

8.6.A. Нехай A — матриця лінійного оператора φ евклідового простору в деякому базисі, а G — матриця Грама цього базису. Визначити, чи є оператор φ самоспряженим, якщо: a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

► *1-й спосіб.*

a) $A^* = G^{-1}A^TG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \neq A$, отже, оператор φ не є самоспряженим.

b) $A^* = G^{-1}A^TG = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$, отже, оператор φ є самоспряженим. □

► *2-й спосіб.* Скористаємось результатом задачі 8.5.A.

a) $\left. \begin{aligned} GA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ A^TG &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Longrightarrow$ оператор φ не є самоспряженим.

b) $\left. \begin{aligned} GA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ A^TG &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Longrightarrow$ оператор φ є самоспряженим. □

8.7.A. Знайти власні числа та ортонормований базис з власних векторів самоспряженого оператора, заданого в деякому ортонормованому базисі матрицею $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

► Нехай $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — ортонормований базис, а $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ — матриця самоспряженого оператора φ в цьому базисі. Тоді $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 2 \\ 2 & 3-t & 2 \\ 2 & 2 & 3-t \end{vmatrix} =$

(-1)

$$= \begin{vmatrix} 7-t & 7-t & 7-t \\ 2 & 3-t & 2 \\ 2 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = (7-t) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-t & 2 \\ 2 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = (7-t) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 2 & 0 & 1-t \end{vmatrix} =$$

$= (1-t)^2(7-t) \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 1$ — корінь кратності 2, а $t_2 = 7$ — корінь кратності 1.
Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 1$ та $t_2 = 7$.
При $t_1 = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3, \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \begin{array}{l} \boldsymbol{b}_1 = (-1, 1, 0), \\ \boldsymbol{b}_2 = (-1, 0, 1). \end{array}$$

При $t_2 = 7$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_3 = (1, 1, 1).$$

СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ утворює базис з власних векторів самоспряженого оператора, проте цей базис не є ортонормованим. Оскільки вектор $\boldsymbol{b}_3$ відповідає іншому власному числу, ніж вектори $\boldsymbol{b}_1$ та $\boldsymbol{b}_2$, то достатньо ортогоналізувати лише систему з перших двох векторів базису. Таким чином, ортогональний базис $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ будемо шукати у вигляді

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{c}_2 = \lambda\, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{b}_2, \quad \boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3.$$

Коефіцієнт λ шукається з умови, що СВ $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ є ортогональною.

Отже, $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1 = (-1, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1) + (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0 \quad \Longrightarrow \\ &\lambda = -\frac{(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{b}_2)}{(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1)} = -\frac{(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, $\boldsymbol{c}_2 = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{b}_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, а $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3 = (1, 1, 1)$.

Тепер пронормуємо СВ $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= \frac{\boldsymbol{c}_1}{\|\boldsymbol{c}_1\|} = \frac{\boldsymbol{c}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big), \\ \boldsymbol{f}_2 &= \frac{\boldsymbol{c}_2}{\|\boldsymbol{c}_2\|} = \frac{\boldsymbol{c}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big), \\ \boldsymbol{f}_3 &= \frac{\boldsymbol{c}_3}{\|\boldsymbol{c}_3\|} = \frac{\boldsymbol{c}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big). \end{aligned}$$

Отже, СВ $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ є ортонормованим базисом простору, в якому матриця самоспряженого оператора φ є діагональною. Таким чином, маємо:

$$[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

що підтверджується перевіркою за формулою $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = [\varphi]_{\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$:

$$T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & 7\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & 7\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 7\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$[\varphi]_{\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & 7\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & 7\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 7\sqrt{2} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

8.8.A. З'ясувати, чи буде перетворення $\varphi\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a}$ звичайного тривимірного евклідового простору ортогональним, якщо $\boldsymbol{a}$ — деякий фіксований вектор.

► Ні, оскільки $\ker\varphi \neq \{\boldsymbol{0}\}$, а будь-який ортогональний оператор є невиродженим. □

8.9.A. Для ортогонального перетворення, заданого в ортонормованому базисі матрицею A, знайти канонічний вигляд його матриці та канонічний ортонормований базис, якщо:

$$\text{a) } A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ b) } A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

► a) $$\chi_A(t) = \frac{1}{16}\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1-2t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-2t & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-2t & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-2t \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} =$$

$$= \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 2-2t & 2-2t & 0 & 0 \\ 1 & 1-2t & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-2t & -1 \\ 0 & 0 & -2+2t & 2-2t \end{vmatrix} = \frac{(1-t)^2}{4}\begin{array}{c} (-1) \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-2t & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-2t & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \frac{(1-t)^2}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2t & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(1-t)^2}{4}\begin{vmatrix} -2t & -2 \\ -2 & -2t \end{vmatrix} = (1-t)^3(-1-t).$$

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 1$ та $t_2 = -1$.
При $t_1 = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + x_4, \\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \begin{array}{r} \boldsymbol{b}_1 = (1,1,1,-1), \\ \boldsymbol{b}_2 = (1,1,-1,1), \\ \boldsymbol{b}_3 = (1,-1,1,1). \end{array}$$

При $t_2 = -1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_2 = -x_1, \\ x_3 = -x_1, \\ x_4 = -x_1, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_4 = (-1,1,1,1).$$

СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ утворює ортогональний базис з власних векторів ортогонального оператора, проте цей базис не є нормованим. Пронормуємо СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}} = \frac{1}{2}(1,1,1,-1),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}} = \frac{1}{2}(1,1,-1,1),$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}} = \frac{1}{2}(1,-1,1,1),$$
$$\boldsymbol{f}_4 = \frac{\boldsymbol{b}_4}{\|\boldsymbol{b}_4\|} = \frac{\boldsymbol{b}_4}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_4)}} = \frac{1}{2}(-1,1,1,1).$$

Отже, СВ $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4)$ є ортонормованим базисом простору, в якому матриця ортогонального оператора φ є діагональною. Таким чином, маємо:

$$[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

що підтверджується перевіркою за формулою $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = [\varphi]_{\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$:

$$T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[\varphi]_{\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

► b) $$\chi_A(t) = \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 1-2t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-2t & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1-2t & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1-2t \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 2-2t & 2-2t & 0 & 0 \\ 1 & 1-2t & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1-2t & 1 \\ 0 & 0 & 2+2t & -2-2t \end{vmatrix} = \frac{(t-1)(t+1)}{4} \begin{array}{c} (-1) \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-2t & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1-2t & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \frac{(t-1)(t+1)}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2t & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(t-1)(t+1)}{4}\begin{vmatrix} -2t & -2 \\ 2 & -2t \end{vmatrix} = (t-1)(t+1)(t^2+1).$$

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 1$ та $t_2 = -1$.
При $t_1 = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (1, 1, 0, 0).$$

При $t_2 = -1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -x_4, \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_2 = (0, 0, -1, 1).$$

Для комплексних власних чисел $t_3 = i$, $t_4 = -i$ *дійсних* власних векторів не існує. Знайдемо власний вектор, який відповідає власному числу $t_3 = i$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1-2i & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-2i & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1-2i & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1-2i & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = -ix_4, \\ x_2 = ix_4, \\ x_3 = x_4, \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ФСР: $\boldsymbol{f} = (-i, i, 1, 1) = \boldsymbol{b}_3 + i\boldsymbol{b}_4$, де $\boldsymbol{b}_3 = (0, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{b}_4 = (-1, 1, 0, 0)$.

Нагадаємо, що для дійсних матриці A, векторів $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ і скалярів λ та μ з рівності

$$A(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (\lambda + i\mu)(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x} - \mu\boldsymbol{y}) + i(\mu\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y})$$

випливають співвідношення

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} - \mu\boldsymbol{y}, \qquad A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}.$$

В нашому випадку $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_4$. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ ортогональна, а отже утворює базис простору. Проте цей базис не є нормованим. Пронормуємо СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 1),$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1),$$
$$\boldsymbol{f}_4 = \frac{\boldsymbol{b}_4}{\|\boldsymbol{b}_4\|} = \frac{\boldsymbol{b}_4}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_4)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0).$$

Отже, СВ $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4)$ є ортонормованим базисом простору, в якому матриця ортогонального оператора φ є канонічною. Таким чином, маємо:

$$[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

що підтверджується перевіркою за формулою $T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = [\varphi]_{\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}$:

$$T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}[\varphi]_{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[\varphi]_{\boldsymbol{e}} T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

8.10.А. Показати, що одна з квадратичних функцій є додатньо визначеною. Знайти базис, в якому додатньо визначена функція має нормальний вигляд, а інша квадратична функція — канонічний вигляд, а також знайти ці вигляди, якщо $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$, $g = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

► Нехай $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — базис, в якому задані функції f та g. Тоді

$[f]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, головні мінори $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -19$, $\Delta_3 = -6$, а тому, за критерієм Сильвестра, функція f не є додатньо визначеною.

$[g]_{\boldsymbol{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 17 & -7 \\ -1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, головні мінори $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 13$, $\Delta_3 = 1$, а тому, за критерієм Сильвестра, функція g є додатньо визначеною з канонічною формою $g = y_1^2 + 13\,y_2^2 + \dfrac{1}{13}\,y_3^2$ в базисі $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. За методом Якобі g-ортогональний базис $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ шукається у вигляді

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{a}_2 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{a}_3 = \mu_1 \boldsymbol{e}_1 + \mu_2 \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Маємо, що $0 = g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2) = g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)\lambda_1 + \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \lambda_1 + 2$, тобто $\lambda_1 = -2$. Аналогічно

$$0 = g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_3) = g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)\mu_1 + g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\mu_2 + g(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = \mu_1 + 2\,\mu_2 - 1,$$

$$0 = g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_3) = g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)\mu_1 + g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)\mu_2 + g(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 2\,\mu_1 + 17\,\mu_2 - 7,$$

звідки отримуємо СЛР $\begin{cases} \mu_1 + 2\,\mu_2 = 1, \\ 2\,\mu_1 + 17\,\mu_2 = 7, \end{cases}$ розв'язки якої $\mu_1 = \dfrac{3}{13}$, $\mu_2 = \dfrac{5}{13}$. Таким чином,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{a}_2 = -2\,\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{a}_3 = \frac{3}{13}\,\boldsymbol{e}_1 + \frac{5}{13}\,\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \end{cases} \qquad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{13} \\ 0 & 1 & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = y_1 - 2\,y_2 + \frac{3}{13}\,y_3, \\ x_2 = y_2 + \frac{5}{13}\,y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Перетворимо тепер канонічну форму на нормальну:

$$g = y_1^2 + 13\,y_2^2 + \frac{1}{13}\,y_3^2 = y_1^2 + (\sqrt{13}\,y_2)^2 + (\frac{1}{\sqrt{13}}\,y_3)^2 = \left| \begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\,z_2, \\ y_3 = \sqrt{13}\,z_3, \end{cases} \right.$$

$$\left. T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix} \right| = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

Таким чином, маємо g-ортонормований базис $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ з матрицею переходу до нього від базису $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$

$$S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} = T_1 T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{13} \\ 0 & 1 & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{5}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix}. \text{ Тоді}$$

$$[f]_{\boldsymbol{b}} = S_0^T [f]_{\boldsymbol{e}} S_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{5}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{5}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{5}{\sqrt{13}} & \sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{19}{\sqrt{13}} & -\frac{30}{\sqrt{13}} \\ -1 & \frac{5}{\sqrt{13}} & \frac{12}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{13} & -\frac{30}{13} \\ 0 & -\frac{30}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix} \quad \text{і}$$

$$f = z_1^2 - \frac{19}{13}\,z_2^2 + \frac{6}{13}\,z_3^2 - \frac{60}{13}\,z_2 z_3.$$

$$\chi_{[f]}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{13}-t & -\frac{30}{13} \\ 0 & -\frac{30}{13} & \frac{6}{13}-t \end{vmatrix} = (1-t)\begin{vmatrix} -\frac{19}{13}-t & -\frac{30}{13} \\ -\frac{30}{13} & \frac{6}{13}-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(-3-t).$$

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ та $t_3 = -3$.

При $t_1 = 1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{32}{13} & -\frac{30}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{30}{13} & -\frac{7}{13} & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{c}_1 = (1,0,0).$$

При $t_2 = 2$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{45}{13} & -\frac{30}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{30}{13} & -\frac{20}{13} & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{c}_2 = (0,-2,3).$$

При $t_3 = -3$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{13} & -\frac{30}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{30}{13} & \frac{45}{13} & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{c}_3 = (0,3,2).$$

СВ $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ є g-ортогональною, оскільки матриця $[f]_{\boldsymbol{b}}$ є матрицею з простим спектром. Пронормуємо СВ $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{c}_1}{\|\boldsymbol{c}_1\|} = \frac{\boldsymbol{c}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1)}} = (1,0,0),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{c}_2}{\|\boldsymbol{c}_2\|} = \frac{\boldsymbol{c}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(0,-2,3) = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right),$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{c}_3}{\|\boldsymbol{c}_3\|} = \frac{\boldsymbol{c}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(0,3,2) = \left(0, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

Отже, СВ $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ є g-ортонормованим базисом простору, в якому матриця самоспряженого оператора f є діагональною. Таким чином, маємо:

$$[f]_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad f = u_1^2 + 2\,u_2^2 - 3\,u_3^2, \quad S_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}, \quad g = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

$$S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{b}} S_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{5}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + u_2, \\ x_2 = u_2 + u_3, \\ x_3 = 3\,u_2 + 2\,u_3, \end{cases} \quad \text{що підтверджується перевіркою:}$$

$$[f]_{\boldsymbol{f}} = S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}^T [f]_{\boldsymbol{e}} S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$[g]_{\boldsymbol{f}} = S^T_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}}[g]_{\boldsymbol{e}}S_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&3&2\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1&2&-1\\2&17&-7\\-1&-7&3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \qquad \square$$

8.11.А. Звести до канонічного вигляду та визначити тип поверхні в залежності від числа k: а) $4y^2-3z^2+4xy-4xz+8yz+2x+4y-2z=k$, b) $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz+3x+3y-3z=k$.

► а) $A = \begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{a}=(1,2,-1)$, $\quad \xi = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\quad \gamma\colon \xi^T A\,\xi + 2\,\boldsymbol{a}\,\xi = k.$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix}-t&2&-2\\2&4-t&4\\-2&4&-3-t\end{vmatrix} = (1-t)(6-t)(-6-t).$$

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1=1$, $t_2=6$ та $t_3=-6$.

При $t_1=1$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&-2&0\\2&3&4&0\\-2&4&-4&0\end{array}\right) \iff \begin{cases}x_1=-2\,x_3,\\x_2=0,\\x_3\in\mathbb{R}.\end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1=(2,0,-1).$$

При $t_2=6$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-6&2&-2&0\\2&-2&4&0\\-2&4&-9&0\end{array}\right) \iff \begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\,x_3,\\x_1=\frac{5}{2}\,x_3,\\x_3\in\mathbb{R}.\end{cases} \qquad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_2=(1,5,2).$$

При $t_3=-6$ вектор $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2 = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&0&-1\\1&5&2\end{vmatrix} = (5,-5,10).$

СВ $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ є ортогональною (оскільки матриця A є матрицею з простим спектром). Пронормуємо СВ $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1)}} = \frac{1}{\sqrt5}(2,0,-1) = \Big(\frac{2}{\sqrt5},0,-\frac{1}{\sqrt5}\Big),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{30}}(1,5,2) = \Big(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\Big),$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_3)}} = \frac{1}{\sqrt6}(1,-1,2) = \Big(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\Big).$$

Таким чином, маємо:

$$A' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&6&0\\0&0&-6\end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\sqrt6&1&\sqrt5\\0&5&-\sqrt5\\-\sqrt6&2&2\sqrt5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}S = \Big(\frac{3}{\sqrt5},\frac{9}{\sqrt{30}},-\frac{3}{\sqrt6}\Big),$$

$$\gamma\colon (x')^2+6\,(y')^2-6\,(z')^2+2\,\frac{3}{\sqrt5}\,x'+2\,\frac{9}{\sqrt{30}}\,y'-2\,\frac{3}{\sqrt6}\,z' = k \qquad \Longrightarrow$$
$$\gamma\colon (x'+\frac{3}{\sqrt5})^2+6\,(y'+\frac{3}{2\sqrt{30}})^2-6\,(z'+\frac{1}{2\sqrt6})^2 = k+\frac{9}{5}+\frac{9}{20}-\frac{1}{4}.$$

Після заміни $\xi'=\xi''+\beta'$, де $\beta' = \Big(-\frac{3}{\sqrt5},-\frac{3}{2\sqrt{30}},-\frac{1}{2\sqrt6}\Big)^T$, отримаємо рівняння поверхні

$$\gamma\colon (x'')^2 + 6\,(y'')^2 - 6\,(z'')^2 = k + 2.$$

Таким чином, поверхня γ являє собою:
— двопорожнинний гіперболоїд при $k < -2$,
— конус при $k = -2$,
— однопорожнинний гіперболоїд при $k > -2$. $\square$

► b) Для зручності подальших обчислень будемо розглядати рівняння:

$\gamma\colon 2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z^2 - 2\,xy + 2\,xz + 2\,yz + 6\,x + 6\,y - 6\,z = 2\,k.$ Тоді

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = (3, 3, -3), \quad \xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \gamma\colon \xi^T A\,\xi + 2\,\boldsymbol{a}\,\xi = 2\,k.$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 & 1 \\ -1 & 2-t & 1 \\ 1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \; (-1) = \begin{vmatrix} 3-t & t-3 & 0 \\ -1 & 2-t & 1 \\ 0 & 3-t & 3-t \end{vmatrix} =$$

$$= (3-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; (-1) = (3-t)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -t(3-t)^2.$$

Знайдемо власні вектори, які відповідають власним числам $t_1 = 0$ та $t_2 = t_3 = 3$.

При $t_1 = 0$ маємо таку СЛОР:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \text{ФСР: } \boldsymbol{b}_1 = (1, 1, -1).$$

Оскільки $t_1 \neq t_2 = t_3 \neq 0$, то вектор $\boldsymbol{b}_2 = (1, 1, 2)$ (останній рядок матриці $A - t_1 E$), а вектор $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -3, 0).$

СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ є ортогональною (за побудовою). Пронормуємо СВ $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2) = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big),$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big).$$

Таким чином, маємо:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}S = \Big(3\sqrt{3}, 0, 0\Big) \implies$$
$$\gamma\colon 3\,(y')^2 + 3\,(z')^2 + 6\,\sqrt{3}\,x' = 2\,k.$$

Отже, поверхня γ при будь-якому k являє собою еліптичний параболоїд (обертання). $\square$