1. Порівняйте значення інтегралів

Теорема 6. *(Інтеграл Рімана з нерівними функціями)*

Якщо $\{f,g\}\subset R[a,b]$ і $\forall x\in[a,b]\ f(x)\leq g(x)\ \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Доведення теореми. $\forall P_{[a,b]}\quad \forall \xi_p\quad S_p(f,\xi_p)\leq S_p(g,\xi_p)$ і в цій нерівності переходячи до границі при $\|P\|\to 0$, одержимо **(3)**.

Приклад:

$\int_{0.5}^{1} x^2 \ln x\,dx$ та $\int_{1}^{2} x^2 \ln x\,dx.$

$f(x) = x^2 \cdot \ln x$

$I_1 = \int_{0,5}^{1} x^2 \cdot \ln x\,dx$; $I_2 = \int_{1}^{2} x^2 \cdot \ln x\,dx$

Оскільки для $\forall x \in [\frac{1}{2};1]$ $f(x) < 0$, то $I_1 < 0$, Тоді и $\forall x \in [1;2]$ $f(x) > 0$, то $I_2 > 0$. $\Rightarrow I_1 < I_2$

2. Побудувати суму Рімана

Множина точок $P = P_{[a,b]} = \{x_k | k=\overline{0,n}\}$, де $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$ називається ***розбиттям сегмента $[a,b]$***. Множина точок $\xi_p = \{\xi_k | k=\overline{1,n}\} : \forall k = \overline{1,n}\ \ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ називається ***сукупністю проміжних точок***, д що відповідає розбиттю P. Величина $\|P\| = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} (x_{k+1} - x_k)$ називається ***діаметром (нормою) розбиття***.

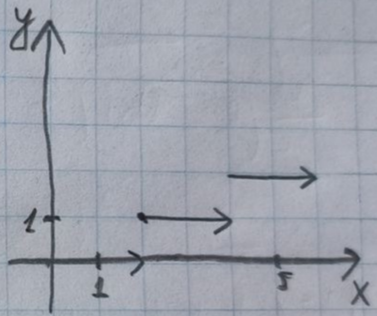
Нехай $[a,b] \xrightarrow{f} R$. Сума $S_p(f,\xi_p) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ називається ***інтегральною сумою Рімана***, де P - розбиття, а ξ_p - сукупність проміжних точок.

Число $I \in R$ називається ***інтегралом Рімана*** функції $[a,b] \xrightarrow{f} R$ на сегменті $[a,b]$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall P = P_{[a,b]} \forall \xi_p : \|P\| < \delta\ \Rightarrow\ |I - S_p(f,\xi_p)| < \varepsilon$.

Приклад (x_k – інфінум):

4. Побудуйте інтегральну суму Рімана для функції $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$ по розбиттю відрізка [1,5] на 4n сегментів однакової довжини.

$f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$, $x \in [1, 5]$



$\Delta x = \frac{5-1}{4n} = \frac{1}{n}$

$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$; $k = \overline{0, 5n-1}$

$x_k = 1 + \frac{k}{n}$, $\xi_k = 1 + \frac{k}{n}$

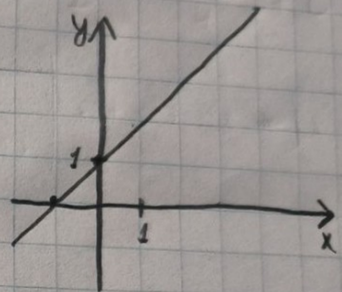
$$\sum_{k=0}^{4n-1} \left[\frac{x_k}{2}\right] \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{4n-1} \left[\frac{1+\frac{k}{n}}{2}\right] = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} 0 + \sum_{k=n}^{3n-1} 1 + \sum_{k=3n}^{4n-1} 2\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot (2n + 2n) = 4$$

Приклад (xk – середина)

1. Знайти суму Рімана для функції $f(x) = 1 + x$, $x \in [-1, 4]$ з розбиттям сегмента на n рівних проміжків і ξ лежить в середині проміжка.

$f(x) = 1 + x$, $x = [-1, 4]$



$\Delta x = \frac{4+1}{n} = \frac{5}{n}$

$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$

$x_k = \left(-1 + \frac{5k}{n}\right) + \frac{5}{2n}$ – середина проміжка ~~відрізка~~ $[x_k, x_{k+1}]$

$\xi_k = -1 + \frac{10k+5}{2n}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + x_k)\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{10k+5}{2n} \cdot \frac{5}{n} = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} 50k + 25 =$$

$$= \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{25 + 50n - 50}{2} \cdot n = \frac{n}{4n^2} \cdot (50n - 25) = 12{,}5 - \frac{25}{4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 12{,}5$$

3. Інтеграл Римана та Суми Дарбу

Нехай $[a,b]\xrightarrow{f} R$ - обмежена функція, $P = P_{[a,b]}$ - деяке розбиття сегмента, позначимо значення $M_k = \sup\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, $k=\overline{0,n-1}$.

<u>Верхньою та нижньою інтегральними сумами Дарбу</u>, відповідними розбиттю P для функції $[a,b]\xrightarrow{f} R$, називаються відповідно суми:

$$\overline{S_p}(f)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \text{ , } \underline{S_p}(f)=\sum_{k=1}^{n-1} m_k \Delta x_k \text{ , де } \Delta x_k = x_{k+1}-x_k \text{ , } k=\overline{0,n-1}.$$

<u>Теорема 2.</u> *(Еквівалентність інтегралів Рімана та Дарбу).*

$$f\in R[a,b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\|P\|\to 0} S_p(f,\xi_p)=I \text{, при цьому } I=\int_a^b f(x)dx .$$

Приклад:

4. Знайдіть за допомогою інтеграла Рімана та інтегральних сум Дарбу:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot \operatorname{arctg}\frac{k^2}{n^4}.$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot \operatorname{arctg}\frac{k^2}{n^4} \to \lim_{n\to\infty} n\cdot\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\left(\frac{k^2}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1 \ln(1+x)\cdot x^2\,dx$$

1

$$\text{①}\ \int_0^1 \ln(1+x)\cdot x^2\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln(1+x) & dv=x^2 \\ du=\frac{dx}{1+x} & v=\frac{x^3}{3}\end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{x^3}{3}\cdot\ln(x+1)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{1+x}dx= \left| \begin{array}{r|l} x^3 & x+1 \\ -\underline{x^3+x^2} & x^2-x+1 \\ -x^2 & \\ -\underline{-x^2-x} & \\ x & \\ -\underline{x+1} & \\ -1 & \end{array}\right| =$$

$$=\frac{\ln 2}{3}-\frac{1}{3}\left(\int_0^1(x^2-x+1)\,dx-\int_0^1\frac{dx}{x+1}\right)=\frac{\ln 2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right.$$

$$=\frac{\ln 2}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{\ln 2}{3}=\frac{2\cdot\ln 2}{3}-\frac{5}{18}$$

4. Знайти границі

Інтеграл Рімана як складна функція верхньої та нижньої меж інтегрування.

Нехай $f \in C[a,b]$, $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\varphi} R$, $E_\varphi \subset D_f$, $a_0 = \varphi(x_0)$, і φ диференційована в кожній точці $[\alpha,\beta]$. Розглянемо функцію $[a,b] \xrightarrow{F} R$, де $F(t) = \int\limits_{a_0}^{t} f(y)dy$, вона має похідну $F'(t) = f(t)$ $\forall t \in [a,b]$. Оскільки $E_\varphi \subset D_f$, то визначимо композицію $(F \circ \varphi)$ $[\alpha,\beta] \xrightarrow{F\circ\varphi} R$, де $(F \circ \varphi)(x) = \int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)dy$. Тоді, за правилом диференціювання складної функції, ми маємо: $\forall x \in [\alpha,\beta]$:

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x). \tag{7}$$

Аналогічно, для $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\psi} R$, $E_\psi \subset D_f$, $b_1 = \psi(x_1)$, то для функції $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\Phi\circ\varphi} R$, де $\Phi(t) = \int\limits_{t}^{b_1} f(y)dy$, $(\Phi \circ \psi)(x) = \int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x_1)} f(y)dy \Rightarrow$

$$(\Phi \circ \psi)'(x) = -\Phi'(\psi(x))\psi'(x) = -f(\psi(x))\varphi'(x). \tag{8}$$

Знак мінус виник внаслідок зміни меж інтегрування в $\int\limits_{\psi(x)}^{\psi(x_1)} f(y)dy$.

З чого остаточно ми маємо правило диференціювання складної функції меж інтегрування.

<u>Теорема 6.</u> *(Диференціювання складної функції меж інтегрування)*

Якщо $[a,b] \xrightarrow{f} R$, $f \in C[a,b]$, $[\alpha,\beta] \xrightarrow{\psi,\varphi} R$, $E_\varphi \subset [a,b]$, $E_\psi \subset [a,b]$, φ,ψ диференційовані $\forall x \in [\alpha,\beta]$, тоді має місце формула:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(y)dy = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x). \tag{8}$$

Приклади:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x\int_0^x e^{t^2}dt\right):\left(e^{x^2}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\int_0^x e^{t^2}dt + 2x\cdot e^{x^2}}{2x\cdot e^{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x\cdot e^{x^2}} + 1 = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^{x^2}}}{\cancel{e^{x^2}} + \cancel{e^{x^2}}\cdot 2x^2} + 1 = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+2x^2} + 1 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{\sqrt{t}}dt\right)^2 : \left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}dt\right) \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2x\cdot e^{x} - \frac{e^{\sqrt[4]{x}}}{2\sqrt{x}}}{e^{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x\cdot e^{x}\cdot 2\sqrt{x} - e^{\sqrt[4]{x}}}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty} 4x^{\frac{3}{2}} - e^{\sqrt[4]{x} - x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 4x\sqrt{x} - \frac{1}{e^{x-\sqrt[4]{x}}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{\sin x}^{x} e^{t}\cdot\ln(1+t)\,dt = \left[\frac{0}{0}\right] = e^{x}\cdot\ln(1+x) - e^{\sin x}\cdot\ln(1+\sin x)\cdot\cos$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

5. Оцінка інтеграла:

<u>Теорема 1.</u> *(Перша теорема про середнє).*

Якщо $\{f, g\} \subset R[a,b]$ і $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \geq 0 \left(g(x) \leq 0\right)$, то має місце рівність:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx, \qquad \textbf{(1)}$$

де $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \leq \mu \leq M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Доведення. За теоремою з попередньої теми: $fg \in R[a,b]$. Нехай $g(x) \geq 0$, $m \leq f(x) \leq M$,помножимо обидві частини нерівності на $g(x) \geq 0 \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow m\int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq M\int_a^b g(x)dx$ (*), де $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Якщо $\int_a^b g(x)dx = 0$, то усе очевидно, а μ може бути будь_яким числом з $[m, M]$. Нехай тепер $\int_a^b g(x)dx > 0$ і поділимо на нього нерівність (*) , позначимо $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ і дістанемо формулу (1),, для якої $m \leq \mu \leq M$. Аналогічно доводиться для $g \leq 0$.

<u>Наслідок 1.</u> *(Для неперервної функції).*

Якщо в умовах теореми про середнє $f \in C[a,b]$, то формула **(1)** набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx, \qquad \textbf{(2)}$$

де $\xi \in [a,b]$.

Це очевидний наслідок теореми Коші про проміжні значення (неперервна функція набуває всіх проміжних значень між числами. $f(a)$ та $f(b)$.

Приклад:

4. Оцініть ...

$$\int_0^1 e^{-x^n} dx, n > 1$$

$$\int_0^1 e^{-x^n} dx = \int_0^1 \frac{dx}{e^{x^n}}, \quad n > 1$$

НЕХАЙ $f(x) = e^{-x^n}$, ОСКІЛЬКИ $f \in C[0,1]$, ТО ПОКЛАВШИ $g(x) = 1$, ОТРИМАЄМО:

$$\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_0^1 g(x) dx, \quad \text{ДЕ } \xi \in [0,1] \Rightarrow$$

$$e^{-\xi^n}(1-0) \Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \frac{1}{e} \leq I \leq 1$$

6. Найти інтеграл Рімана

Теорема 2. *(Рівність інтегралів Рімана та Ньютона-Лейбніца).*

Якщо інтеграли Рімана та Ньютона-Лейбніца функції $[a,b]\xrightarrow{f}R$ існують одночасно, то вони рівні один одному.

Доведення. Нехай I - інтеграл Рімана $\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \left|I-\int\limits_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon\ \Rightarrow\ I=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема доведена.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{x\,dx}{\sin^2 x}=\left|\begin{matrix}u=x & dv=\frac{dx}{\sin^2x}\\ du=dx & v=-\cot x\end{matrix}\right|=-\cot x\cdot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx\\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt2}{2}=t\\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\sqrt3}{2}\end{matrix}\right|=-\frac{\sqrt3}{3}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{dt}{t}=-\frac{\sqrt3\pi}{9}+\frac{\pi}{4}+\ln t\Big|_{\frac{\sqrt2}{2}}^{\frac{\sqrt3}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt3\pi}{9}+\ln\frac{\sqrt3}{2}-\ln\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt3\pi}{9}+\ln\frac{\sqrt3}{\sqrt2}$$

$$\int_0^{\ln 2}xe^{-x}dx=\left|\begin{matrix}u=x & dv=e^{-x}\\ du=dx & v=-e^{-x}\end{matrix}\right|=-e^{-x}\cdot x\Big|_0^{\ln2}+\int_0^{\ln2}e^{-x}=$$

$$=-\frac{\ln2}{2}+\left(-e^{-x}\Big|_0^{\ln2}\right)=-\frac{\ln2}{2}+\left(-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{\ln2}{2}+\frac{1}{2}$$

7. Теорія

7.1 Теорема Лебега

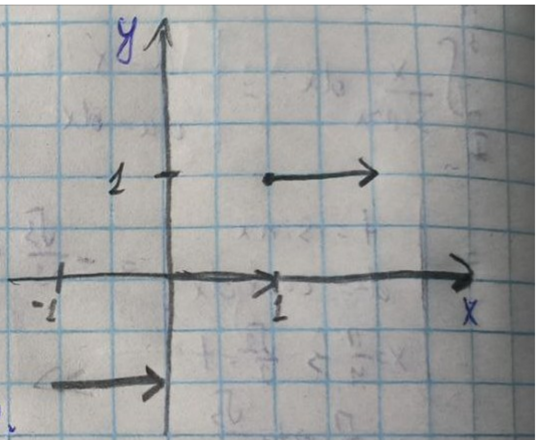
3. Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – неперервна на $[a,b]\setminus\{c\}$, де $c\in(a,b)$. Чи є функція f інтегровною за Ріманом на відрізку $[a,b]$, якщо вона має усувний розрив у точці c? Відповідь обґрунтуйте.

Так. Оскільки множина точок розриву такої функції буде скінченою, а отже матиме ~~нуле~~ жорданову міру 0. А за теоремою Лебега вона буде інтегрована.

3. Чи є інтегровною за Ріманом функція $f(x)=[x]$ на відрізку $[-1,1]$? Відповідь обґрунтуйте.

$f(x)=[x]$, $[a,b]=[-1,1]$

$E=\{0,1\}$ – множина точок розриву функції $f(x)$ на сегменті $[a,b]$. Оскільки множина точок є скінченою, то має жорданову міру 0. Тобто за теоремою Лебега є інтегрованою на цьому проміжку.



7.2 Інші твердження

3. Чи вірно, що функція $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли існує таке число $I\in\mathbb{R}$, що для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ та існує розбиття $P=P([a,b])$ із набором проміжних точок ξ_p та діаметром $\|P\|<\delta$, для яких

$$|I-S_p(f;\xi_p)|<\varepsilon?$$

Число $I\in R$ називається ***інтегралом Рімана*** функції $[a,b]\xrightarrow{f}R$ на сегменті $[a,b]$, якщо $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall P=P_{[a,b]}\,\forall\xi_p:\|P\|<\delta\ \Rightarrow\ |I-S_p(f,\xi_p)|<\varepsilon$.

3. Які з наведених сум за означенням є інтегральними сумами Рімана для інтегровної функції f по рівномірному розбиттю деякого відрізка?

1) $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$; 2) $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\pi\right)\cdot\frac{\pi}{n}$; 3) $\sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{\frac{k}{n}+\frac{k+1}{n}}{2}\right)\cdot\frac{1}{n}$

1) Так
2) Так
3) Ні

8. Площа, об’єми, довжини

8.1 Теорія площа

Площа плоскої фігури в декартових прямокутних координатах. Нехай $f(x)$ — неперервна невід'ємна на $[a,b]$ функція. *Площа* S множини $\Phi = \{(x,y)\,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ (криволінійної трапеції) дорівнює

$$S \overset{def}{=} S\big([a,b]\big) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Якщо $f(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$ і за абсолютною величиною він дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції $-S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Площа, обмежена кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$, ординатами $x = a$, $x = b$ за умови $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx. \tag{5}$$

Випадок параметричної функції. Нехай функція $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. При цьому функції $x(t), y(t)$ неперервно–диференційовні та $x^2(t) + y^2(t) \neq 0\ \forall t \in [\alpha,\beta]$, а також крива є замкненою: $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$. Тоді:

$$S(\Phi) = \int_\alpha^\beta x(t)\cdot y'(t)\,dt. \tag{6}$$

Площа плоскої фігури в полярних координатах. *Криволінійним сектором* називається плоска фігура, що обмежена неперервною кривою і променями, які виходять з полюса O і утворюють з полярною віссю кути φ_1 та φ_2: $\Phi = \Big\{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\Big\}$. Тоді:

$$S \overset{def}{=} S\big([\varphi_1,\varphi_2]\big) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\,d\varphi. \tag{7}$$

8.2 Теорія довжина дуг

Довжина дуги кривої. Нехай $f \in C^{(1)}\big([a,b]\big)$ та крива задана рівнянням $L = f(x)$ у прямокутних координатах. *Довжина дуги AB кривої L*, що міститься між вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$, визначається формулою

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx. \tag{8}$$

Якщо крива γ задана у полярних координатах: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, де $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi. \tag{9}$$

Якщо крива γ задана параметрично, тобто $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, і при цьому $\{\varphi,\psi\} \subset C^{(1)}\big([t_1,t_2]\big)$, то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\cdot\varphi'(t)\,dt. \tag{10}$$

8.3 Теорія об'єм

Обчислення об'ємів. Якщо тіло T має об'єм і $S = S(x)$, $x \in [a,b]$, де $S \in C([a,b])$ — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис у точці x, то величина цього об'єму обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{11}$$

Якщо криволінійна трапеція $\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, де $f \in C([a,b])$, обертається навколо вісі Ox, то *об'єм* утвореного *тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{12}$$

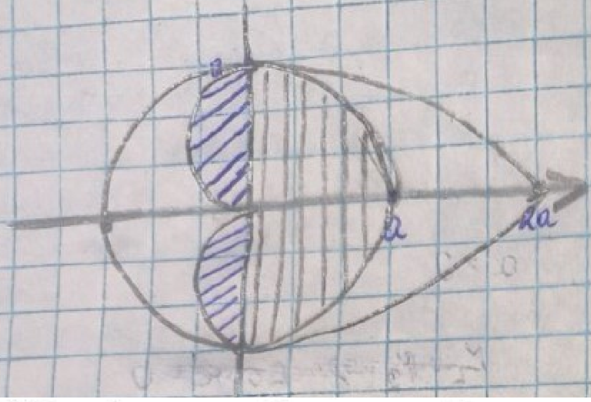
Також за умови, що f є однозначною функцією, об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції Φ навколо вісі Oy, обчислюється за формулою:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx. \tag{13}$$

8.4 Приклади. Площа в полярних координатах.

5. Знайдіть площу фігури, обмеженої кривими Γ_1: $r = a(1 + \cos\varphi)$ та Γ_2: $r = a$, де $a > 0$.

$r = a\cdot(1+\cos\varphi)$; $r = a$, $a>0$



$S = S_1 + S_2$

$S \overset{def}{=} \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)\,d\varphi$

4. Обчисліть площу фігури, що обмежена $r = 1+\cos\varphi$ та $r = \sqrt{3}\sin\varphi$.

1. $S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\cdot a^2\cdot d\varphi = a^2\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi$

$= a^2\left(\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + 2\cdot\sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2\varphi\,d(\varphi)\right) \boxed{=}$ (1)

(1) $\int\cos^2\varphi\,d\varphi = \int\frac{1}{2}d\varphi + \int\frac{\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}$

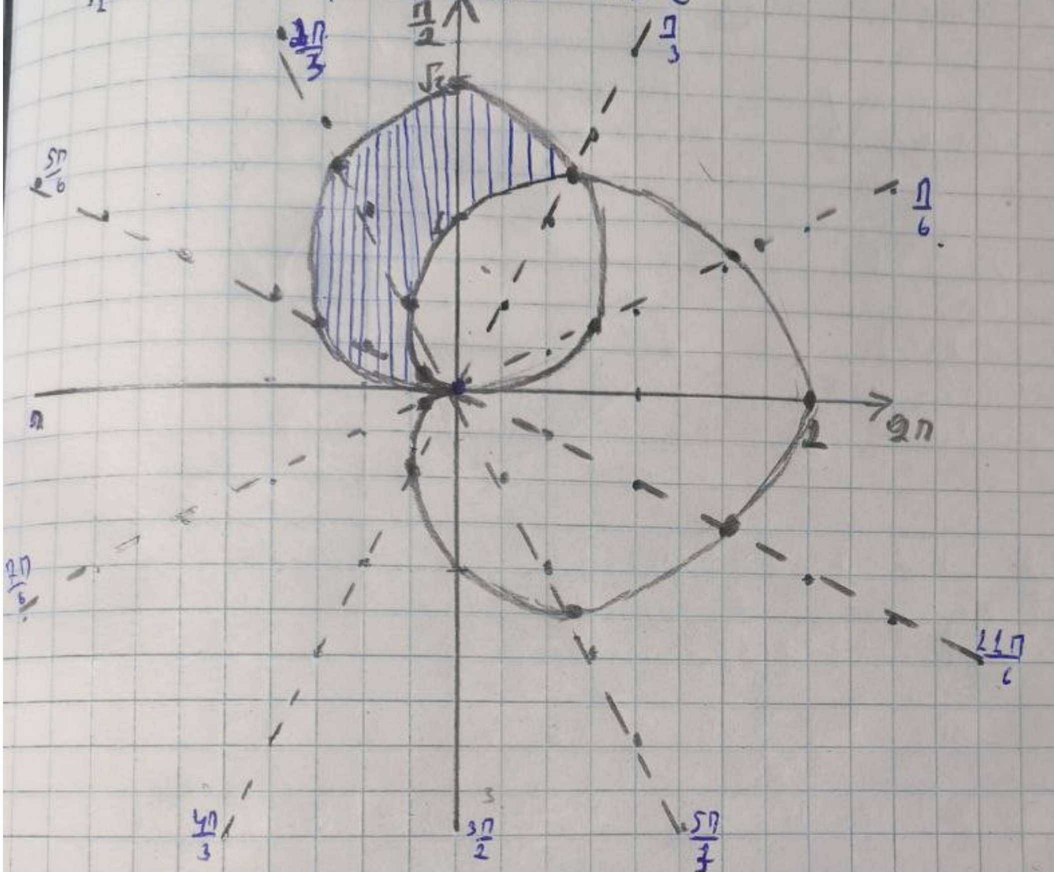
$\boxed{=}\ a^2\left(\frac{\pi}{2} + 2 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2\varphi\,d(\varphi)\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2} + 2 + \frac{\varphi}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$

$= a^2\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}a^2 + 2a^2$

2. $S_2 = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\,d\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi a^2$

$S = a^2\cdot\left(\frac{7}{4}\pi + 2\right)$

$r_1 = 1+\cos\varphi,\quad r_2 = \sqrt{3}\cdot\sin\varphi$



$r_1 = r_2 \Rightarrow \quad \cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi = -1$

$2\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right) = -1 \Rightarrow \cos\varphi\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \sin\varphi\cdot\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \varphi_1 = -\pi + 2k\pi$

$\varphi_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$\varphi \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right] \Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sqrt{3}\cdot\sin\varphi)^2 - (1+\cos\varphi)\,d\varphi =$

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3\sin^2\varphi - 1 + 2\cos\varphi - \cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int(4\sin^2\varphi - 2 - 2\cos\varphi)\,d\varphi =$

$= \frac{1}{2}\int\left(\cancel{\frac{4}{2}} - \frac{4\cos2\varphi}{\cancel{4}2} \cancel{-2} - 2\cos\varphi\right)d\varphi = -\frac{\sin2\varphi}{2} - \sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$

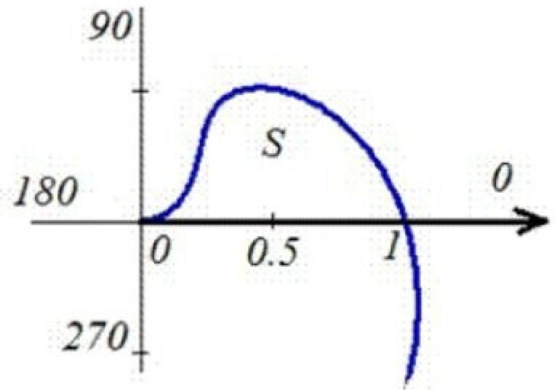
$= 0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$

5. Знайдіть площу фігури, обмеженої кривою $\varphi = \sin(\pi r)$, де $0 \le r \le 1$.

Приклад 2424.2 **Знайти площу фігури, обмеженої полярними кривими** *f=sin(p*r), r є[0;1].*

Обчислення: Запишемо підінтегральну функцію: r^2.

Запишемо межі інтегрування: При зростанні r від 0 до $1/2$ кут f зростає з 0 до 1, при зростанні r від $1/2$ до 1 кут f спадає з 1 до 0, тому величина інтеграла в межах $r \in [0;1]$ має знак «мінус».



Знаходимо площу фігури, попередньо перейшовши до нової змінної під інтегралом:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2 d\phi = \left\{ \begin{array}{c} \phi = \sin(\pi \cdot r) \\ d\phi = \pi\cos(\pi \cdot r)dr \end{array} \right\} \Bigg|_0^1 = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 r^2 \cos(\pi \cdot r)dr =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} r^2 = u, & \cos(\pi r)dr = dv \\ 2rdr = du, & \frac{1}{\pi}\sin(\pi r) = v \end{array} \right\} = -\frac{\pi}{2\pi} r^2 \sin(\pi \cdot r)\Big|_0^1 + \frac{2\pi}{2\pi}\int_0^1 r\sin(\pi \cdot r)dr =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} r = u, & \sin(\pi \cdot r)dr = dv \\ dr = du; & -\frac{1}{\pi}\cos(\pi \cdot r) = v \end{array} \right\} = -0 + 0 - \frac{r}{\pi}\cos(\pi \cdot r)\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi \cdot r)dr =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos(\pi) + 0 + \frac{\sin(\pi \cdot r)}{\pi^2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

Перед інтегралом (після заміни змінних) поставили знак «мінус», оскільки інтеграл є від'ємним на цьому проміжку, а площа повинна бути більшою нуля.

8.5 Площа в декартових координатах