Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №5

Чисельні методи в інформатиці

“Сплайн”

Варіант №4

Виконав студент групи ІПС-31
Міцкевич Костянтин Олександрович

Київ — 2025

Постановка задачі

1. Побудувати кубічний сплайн для функції $x^6+2*x^5+3*x^4-3$ на проміжку [3..7] за точками x = 3, 5, 7. Спробувати доповнити систему рівнянь значенням справжньої похідної (другої для кубічного сплайну) функції на краях замість нуля.

2. Побудувати кусково-лінійну та кусково-квадратичну інтерполяцію для цієї ж функції за тими ж точками.

Теоретичні відомості та обгрунтування

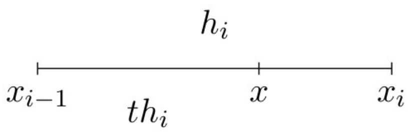
<u>Кусково-лінійна інтерполяція:</u>

Якщо побудувати поліном першого степеня $L_1^i(x)$ на кожному проміжку $[x_{i-1}; x_i]$, $i=\overline{1,n}$, то отримаємо кусково-лінійну інтерполяцію на $[x_0; x_n]$.
Розглянемо поліном першого степеня за вузлами x_{i-1} та x_i:

$$L_1^i(x)=\frac{f(x_{i-1})(x_i-x)+f(x_i)(x-x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

Оцінимо похибку інтерполяції, врахуємо, що:

$$h_i=x_i-x_{i-1},\quad i=\overline{1,n},\quad M_2^i=\max_{x\epsilon[x_{i-1},x_i]}|f''(x)|$$



t є [0; 1]

$$x-x_{i-1}=t*h_i;$$
$$x-x_i=x-(x_{i-1}-h_i)=x-x_{i-1}-h_i=t*h_i-h_i=h_i(t-1);$$
$$|f(x)-L_1^i(x)|\leq\frac{M_i^2}{2!}|(x-x_{i-1})(x-x_i)|\leq\frac{M_i^2}{2}|t*h_i*h_i*(t-1)|=\frac{M_i^2}{2}|h_i^2*t(t-1)|=\frac{M_i^2}{2}|h_i^2*g(t)|$$

Для оцінки зверху знайдемо екстремуми g(t) = t(t − 1):

$$g'(t)=2t-1,\quad t=\frac{1}{2},\quad g(0)=0,\quad g(1)=0,\quad g(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$$

Врахуємо, що $h=\max_{i\leq i\leq n}h_i$, $M_2=\max_{x\epsilon[x_0;x_n]}|f''(x)|$, тоді похибка кусково лінійної інтерполяції:

$$|f(x)-L_1^i(x)|\leq\frac{M_2^i}{2}|h_i^2*g(t)|\leq\frac{M_2}{2!}\left|h^2(-\frac{1}{4})\right|\leq\frac{M_2h^2}{8}$$

Отже, для оцінки похибки при наближенні функції за допомогою кусково лінійної інтерполяції використовують формулу:

$$|f(x)-L_1(x)|\leq\frac{M_2h^2}{8}$$

Введемо систему функцій:

$$\phi_i(x)=\begin{cases} 0, & x\le x_{i-1} \\ \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1}\le x\le x_i \\ \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}. & x_i\le x\le x_{i+1} \\ 0, & x\ge x_{i+1}\end{cases} \qquad i=\overline{1,n-1}$$

$$\phi_0(x)=\begin{cases} \dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x_0\le x\le x_1 \\ 0, & x\ge x_1\end{cases}$$

$$\phi_n(x)=\begin{cases} \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1}\le x\le x_n \\ 0, & x\le x_{n-1}\end{cases}$$

Тоді для кусково-лінійної інтерполяції зручно використовувати формулу:

$$\phi_1(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\phi_i(x)$$

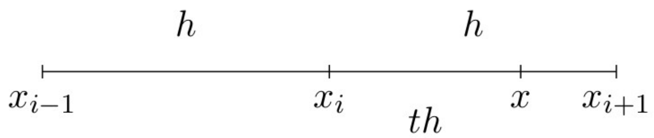
Теорема. Для f(x) $\in C^2[a, b]$, що задана своїми значеннями $f(x_i), i=\overline{0,n}$ має місце оцінка: $\left\|f^{(k)}(x)-\phi_1^{(k)}(x)\right\|_{C[a,b]}\le 2M_2*|h|^{2-k}, \quad k=0,1,$ де $|h|=max_{i=\overline{1,n}} h_i, \quad h_i=x_i-x_{i-1}$

Кусково-квадратична інтерполяція:

Покладемо сталий крок $h = x_i - x_{i-1}$, $\forall i$: $i=\overline{1,n}$ Якщо побудувати поліном 2-го степеня за вузлами x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, то отримаємо кусково-квадратичну інтерполяцію на $[x_0; x_n]$:

$$L_2^i(x)=f(x_{i-1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2}-f(x_i)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h^2}+f(x_{i+1})\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2}$$

Оцінимо похибку інтерполяції, врахуємо, що:



t є [0; 1]

$$x-x_i=t*h; \quad x-x_{i-1}=x-(x_i-h)=th+h=h(t+1);$$
$$x-x_{i+1}=x-(x_i+h)=th-h=h(t-1);$$
$$M_3^i=\max_{x\epsilon[x_{i-1};x_{i+1}]}|f'''(x)|; \quad M_3=\max_{x\epsilon[x_0;x_n]}|f'''(x)|;$$
$$|f(x)-L_2^i(x)|\le\frac{M_3^i}{3!}|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{x+1})|\le\frac{M_3^i}{6}|h(t+1)thh(t-1)|=\frac{M_3^i}{6}|h^3(t^3-t)|=\frac{M_3^i}{6}|h^3g(t)|$$

Для оцінки зверху знайдемо екстремуми функції g(t):

$$g(t)=t^3-t; \quad g'(t)=3t^2-1=0; \quad t_1=\frac{-1}{\sqrt{3}}\notin[0,1]; \quad t_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$g(0)=0; \quad g(1)=0; \quad g(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{-2}{3\sqrt{3}}$$

Похибка кусково-квадратичної інтерполяції:

$$\left|f(x)-L_2^i(x)\right|\leq\frac{M_3^i}{6}\left|h^3 g(t)\right|\leq\frac{M_3}{6}\left|h^3\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}}\right)\right|\leq\frac{M_3}{9\sqrt{3}}h^3$$

$$\left|f(x)-L_2(x)\right|\leq\frac{M_3}{9\sqrt{3}}h^3$$

<u>Інтерполяційний природній кубічний сплайн:</u>

Інтерполяційним природнім кубічним сплайном називається поліном, для якого виконуються умови:

1) s(x) – поліном степеня 3 для $x\in[x_{i-1},x_i],\ \ i=\overline{1,n};$

2) $s(x)\in C^2_{[a,b]}$

3) $s(x_i)=f(x_i),\ \ i=\overline{1,n};$

4) s''(a) = s''(b) = 0 – умова природності.

Зауваження. Для побудови інтерполяційного кубічного сплайну можна замість умови 4) використовувати інші умови, але тоді сплайн не буде природнім: s''(a) =A; s''(b) = B або s'(a) =A; s'(b) = B бо умови періодичності: s(a) = s(b), s'(a) = s'(b), s''(a) = s''(b).

Розглянемо формули для побудови інтерполяційного природного кубічного сплайну s_i на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$:

$$s_i=a_i+b_i(x-x_i)+\frac{c_i}{2}(x-x_i)^2+\frac{d_i}{6}(x-x_i)^3,\quad c_0=c_n=0$$

де c_i знаходяться з тридіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$h_i c_{i-1}+2c_i(h_i+h_{i+1})+h_{i+1}c_{i+1}=6\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right)$$

решта коефіцієнтів знаходяться за формулами:

$$a_i=f_i;\quad b_i=\frac{h_i}{2}c_i-\frac{h_i^2}{6}d_i+\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i};\quad d_i=\frac{c_i-c_{i-1}}{h_i}$$

Хід роботи

Побудову кубічного природнього сплайну розпочнемо з пошуку значеннь функції в точках x_i, а також обрахуємо h_i:

```
▸ Вхідні дані
i Функція: f(x) = x⁶ + 2x⁵ + 3x⁴ - 3
  Вузлові точки x: [3.000000, 5.000000, 7.000000]
  Значення функції y: [1455.000000, 23747.000000, 158463.000000]
|
  f(x[0]) = f(3.00): 1455.000000
  f(x[1]) = f(5.00): 23747.000000
  f(x[2]) = f(7.00): 158463.000000

────────────────────────────────────────────────────────────
ЕТАП 1: Обчислення кроків h_i
────────────────────────────────────────────────────────────

i Обчислюємо відстані між сусідніми вузлами
  h[1] = x[1] - x[0] = 5.0 - 3.0 = 2.000000
  h[2] = x[2] - x[1] = 7.0 - 5.0 = 2.000000
✓ Обчислено 2 значень h_i
```

Наступним кроком побудуємо систему для знаходження усіх c_i. Оскільки в нас 3 точки і $c_1 = c_3 = 0$, то у нас буде лише одне рівняння для знаходження c_2:

```
ЕТАП 2: Формування системи рівнянь для c_i
────────────────────────────────────────────────────────────

i Будуємо тридіагональну систему Ac = B

▸ Рівняння 0:
  2.0000·c[0] + 8.0000·c[1] + 2.0000·c[2]
  6·((158463.00-23747.00)/2.00 - (23747.00-1455.00)/2.00) = 337272.000000

▸ Розв'язання системи методом Гауса
✓ Систему успішно розв'язано

────────────────────────────────────────────────────────────
ЕТАП 3: Знайдені коефіцієнти c_i
────────────────────────────────────────────────────────────

  c[0]: 0.00000000
  c[1]: 42159.00000000
  c[2]: 0.00000000
```

Далі знайдемо коефіцієнти a_i, b_i, d_i за допомогою

$$a_i = f_i; \quad b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}; \quad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i} \quad :$$

```
────────────────────────────────────────────────────────────
ЕТАП 4: Обчислення решти коефіцієнтів (a, b, d)
────────────────────────────────────────────────────────────


▸ Інтервал [3.00, 5.00]
  a[1] = y[1] = 23747.000000
  d[1] = (c[1] - c[0]) / h[1] = (42159.000000 - 0.000000) / 2.000000 = 21079.500000
  b[1] = h[1]/2·c[1] - h[1]²/6·d[1] + (y[1]-y[0])/h[1] = 39252.000000

▸ Інтервал [5.00, 7.00]
  a[2] = y[2] = 158463.000000
  d[2] = (c[2] - c[1]) / h[2] = (0.000000 - 42159.000000) / 2.000000 = -21079.500000
  b[2] = h[2]/2·c[2] - h[2]²/6·d[2] + (y[2]-y[1])/h[2] = 81411.000000
✓ Всі коефіцієнти обчислено

────────────────────────────────────────────────────────────
ПІДСУМКОВА ТАБЛИЦЯ КОЕФІЦІЄНТІВ
────────────────────────────────────────────────────────────


     i       |     x_i      |     y_i      |     a_i      |     b_i      |     c_i      |     d_i
─────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────
     0       |     3.00     |   1455.00    |    0.0000    |    0.0000    |    0.0000    |    0.0000
     1       |     5.00     |   23747.00   |  23747.0000  |  39252.0000  |  42159.0000  |  21079.5000
     2       |     7.00     |  158463.00   | 158463.0000  |  81411.0000  |    0.0000    | -21079.5000
```

Маючі усі потрібні коефієнти можемо побудувати кубічний природній сплайн:

```
────────────────────────────────────────────────────────────
КУБІЧНІ МНОГОЧЛЕНИ СПЛАЙНА
────────────────────────────────────────────────────────────

i Представлення у формі: s_i(x) = p₃·x³ + p₂·x² + p₁·x + p₀

  Інтервал [3.00, 5.00]:
  s_1(x) = 3513.250000·x³ -31619.250000·x² +91950.750000·x -84681.750000

  Інтервал [5.00, 7.00]:
  s_2(x) = -3513.250000·x³ +73778.250000·x² -435036.750000·x +793630.750000
✓ Природний сплайн успішно побудовано!
```

Тепер спробуємо побудувати кубічний сплайн замінивши $c_1 = c_3 = 0$ на значення других похідних на границях:

```
i Друга похідна функції: f''(x) = 30x⁴ + 40x³ + 36x²

▸ Обчислення граничних умов
  f''(x[0]) = f''(3.00) = 30·3.00⁴ + 40·3.00³ + 36·3.00² = 3834.000000
  f''(x[n]) = f''(7.00) = 30·7.00⁴ + 40·7.00³ + 36·7.00² = 87514.000000

▸ Вхідні дані
i Функція: f(x) = x⁶ + 2x⁵ + 3x⁴ - 3
  Вузлові точки x: [3.000000, 5.000000, 7.000000]
  Значення функції y: [1455.000000, 23747.000000, 158463.000000]

  f(x[0]) = f(3.00): 1455.000000
  f(x[1]) = f(5.00): 23747.000000
  f(x[2]) = f(7.00): 158463.000000
```

За попереднім прикладом шукаємо h_i та будуємо систему для знаходження c_2:

```
────────────────────────────────────────
ЕТАП 1: Обчислення кроків h_i
────────────────────────────────────────

i Обчислюємо відстані між сусідніми вузлами
  h[1] = x[1] - x[0] = 5.0 - 3.0 = 2.000000
  h[2] = x[2] - x[1] = 7.0 - 5.0 = 2.000000
✓ Обчислено 2 значень h_i

────────────────────────────────────────
ЕТАП 2: Формування системи рівнянь для c_i
────────────────────────────────────────

i Будуємо тридіагональну систему Ac = B

▸ Рівняння 0:
  2.0000·c[0] + 8.0000·c[1] + 2.0000·c[2]
  6·((158463.00-23747.00)/2.00 - (23747.00-1455.00)/2.00) = 337272.000000
i Застосовано граничну умову на початку: s''(x[0]) = 3834.000000
  B[0] = B[0] - h[1]·d2_start = 329604.000000
i Застосовано граничну умову в кінці: s''(x[n]) = 87514.000000
  B[n-1] = B[n-1] - h[n]·d2_end = 154576.000000

▸ Розв'язання системи методом Гауса
✓ Систему успішно розв'язано

────────────────────────────────────────
ЕТАП 3: Знайдені коефіцієнти c_i
────────────────────────────────────────

  c[0]: 3834.00000000
  c[1]: 19322.00000000
  c[2]: 87514.00000000
```

Далі знайдемо коефіцієнти a_i, b_i, d_i:

```
ЕТАП 4: Обчислення решти коефіцієнтів (a, b, d)

▸ Інтервал [3.00, 5.00]
  a[1] = y[1] = 23747.000000
  d[1] = (c[1] - c[0]) / h[1] = (19322.000000 - 3834.000000) / 2.000000 = 7744.000000
  b[1] = h[1]/2·c[1] - h[1]²/6·d[1] + (y[1]-y[0])/h[1] = 25305.333333

▸ Інтервал [5.00, 7.00]
  a[2] = y[2] = 158463.000000
  d[2] = (c[2] - c[1]) / h[2] = (87514.000000 - 19322.000000) / 2.000000 = 34096.000000
  b[2] = h[2]/2·c[2] - h[2]²/6·d[2] + (y[2]-y[1])/h[2] = 132141.333333
✓ Всі коефіцієнти обчислено

ПІДСУМКОВА ТАБЛИЦЯ КОЕФІЦІЄНТІВ
```

i	x_i	y_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	3.00	1455.00	0.0000	0.0000	3834.0000	0.0000
1	5.00	23747.00	23747.0000	25305.3333	19322.0000	7744.0000
2	7.00	158463.00	158463.0000	132141.3333	87514.0000	34096.0000

Знову ж таки маючі усі потрібні коефієнти можемо побудувати кубічний сплайн:

```
КУБІЧНІ МНОГОЧЛЕНИ СПЛАЙНА

i Представлення у формі: s_i(x) = p₃·x³ + p₂·x² + p₁·x + p₀

  Інтервал [3.00, 5.00]:
  s_1(x) = 1290.666667·x³ -9699.000000·x² +25495.333333·x -22588.000000

  Інтервал [5.00, 7.00]:
  s_2(x) = 5682.666667·x³ -75579.000000·x² +354895.333333·x -571588.000000
✓ Сплайн з граничними умовами успішно побудовано!
```

Тепер можемо перейти до побудови кусково-лінійної та кусково-квадратичної інтерполяції. Формули для їх знаходження:

$$L_1^i(x)=\frac{f(x_{i-1})(x_i-x)+f(x_i)(x-x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

$$L_2^i(x)=f(x_{i-1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2}-f(x_i)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h^2}+f(x_{i+1})\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2}$$

Починаємо пошук кусково-лінійної інтерполяції:

```
────────────────────────────────────────────────────────────
КУСКОВО-ЛІНІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ
────────────────────────────────────────────────────────────

i Формула: L1^i(x) = (f_{i-1}·(x_i - x) + f_i·(x - x_{i-1})) / (x_i - x_{i-1})
i Спрощена форма: L1^i(x) = a·x + b

‣ Інтервал [3.00, 5.00]
[Крок 1/2] Обчислення коефіцієнта a (кутовий коефіцієнт)
  a = (f_1 - f_0) / (x_1 - x_0) = (23747.000000 - 1455.000000) / (5.00 - 3.00) = 11146.000000
[Крок 2/2] Обчислення коефіцієнта b (вільний член)
  b = (f_0·x_1 - f_1·x_0) / (x_1 - x_0) = -31983.000000
  b = (1455.000000·5.00 - 23747.000000·3.00) / 2.00 = -31983.000000
  Результат: L1^1(x) = 11146.000000·x -31983.000000

‣ Інтервал [5.00, 7.00]
[Крок 1/2] Обчислення коефіцієнта a (кутовий коефіцієнт)
  a = (f_2 - f_1) / (x_2 - x_1) = (158463.000000 - 23747.000000) / (7.00 - 5.00) = 67358.000000
[Крок 2/2] Обчислення коефіцієнта b (вільний член)
  b = (f_1·x_2 - f_2·x_1) / (x_2 - x_1) = -313043.000000
  b = (23747.000000·7.00 - 158463.000000·5.00) / 2.00 = -313043.000000
  Результат: L1^2(x) = 67358.000000·x -313043.000000
✓ Кусково-лінійну інтерполяцію виконано!
```

І нарешті знайдемо кусково-квадратичну інтерполяцію:

```
────────────────────────────────────────────────────────────
КУСКОВО-КВАДРАТИЧНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ
────────────────────────────────────────────────────────────

i Крок інтерполяції: h = 2.00
i Формула Лагранжа для трьох точок:
i L2^i(x) = f_{i-1}·(x-x_i)·(x-x_{i+1})/(2h²) - f_i·(x-x_{i-1})·(x-x_{i+1})/h² + f_{i+1}·(x-x_{i-1})·(x-x_i)/(2h²)

‣ Інтервал [3.00, 7.00] (охоплює 3 вузли)
[Крок 1/4] Розкриття першого терма
  term1 = f_0·(x-5.00)·(x-7.00)/(2h²) = 181.87500000·[(x-5.00)·(x-7.00)]
[Крок 2/4] Розкриття другого терма
  term2 = -f_1·(x-3.00)·(x-7.00)/h² = -5936.75000000·[(x-3.00)·(x-7.00)]
[Крок 3/4] Розкриття третього терма
  term3 = f_2·(x-3.00)·(x-5.00)/(2h²) = 19807.87500000·[(x-3.00)·(x-5.00)]
[Крок 4/4] Сумування та спрощення
  Спрощений поліном: L2^1(x) = 14053.000000·x² -101278.000000·x +178812.000000
i Розподіл коефіцієнтів:
    a₂ (при x²) = 14053.00000000
    a₁ (при x¹) = -101278.00000000
    a₀ (вільний) = 178812.00000000
✓ Кусково-квадратичну інтерполяцію виконано!
```