Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

**Лабораторна робота №3**

Чисельні методи в інформатиці

“Наближені методи розв’язання систем
нелінійних рівнянь. Наближені методи розв’язання задач
на власні значення.”

Варіант №4

Виконав студент групи ІПС-31
Міцкевич Костянтин Олександрович

Київ — 2025

# *Постановка задачі:*

Зайти найменше власне значення степеневим методом та наближення до всіх власних значень методом обертань Якобі (або виконати 3-4 ітерації):

```
Вихідна матриця A:
  [  3,   0,   1,   1]
  [  0,   4,   1,   2]
  [  1,   1,   2,   0]
  [  1,   2,   0,   3]
```

Розв’язати (або виконати 5 ітерацій) модифікованим методом Ньютона:

```
Система нелінійних рівнянь:
f₁(x₁, x₂) = sin(x₁ - x₂) - x₁x₂ + 1 = 0
f₂(x₁, x₂) = x₁² - x₂² - 0.75 = 0
```

# *Теоретичні відомості та обґрунтування*

<u>Степеневий метод:</u>

Нехай $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$. Будемо також шукати максимальне власне значення $\lambda_1$. Початкове наближення $\bar{x}^0$ обираємо довільним, але $\bar{x}^0 \neq 0$. Ітераційний процес має вигляд:

$$\bar{x}^{k+1} = A\bar{x}^k; \quad \bar{\lambda}_1^{k+1} = \frac{x_m^{k+1}}{x_m^k}; \quad \forall \; m : 1 \le m \le n$$

**Умова припинення**: $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \le \varepsilon$

**Зауваження**. Якщо $A = A^T > 0$, то можна знайти мінімальне власне значення: $\lambda(A) = \lambda(A) - \lambda(B)$, де $B = \lambda_{max}(A)E - A$, а $E$ – одинична матриця.

**Зауваження**. Якщо скористатися властивістю норм: $\lambda_{max}(A) <= ||A||_\infty$, то можна уникнути знаходження $\lambda_{max}(A)$: $\lambda_{min}(A) = ||A||_\infty - \lambda_{max}(B)$, де $B = ||A||_\infty E - A$.

<u>Метод обертань (Якобі):</u>

Метод Якобі використовують, якщо матриця $A$ є симетричною, тобто $A = A^T$ . Тоді за допомогою ортогональних перетворень матриця $A$ зводиться до діагонального вигляду, елементи діагоналі якої будуть відповідати наближеним власним значенням вихідної матриці.

Покладемо $A_0 = A$. Ітераційний процес має вигляд:

$A_{k+1} = U_k A_k U_k^T$ , де $U_k$ – матриця обертань:

$$U_k = \begin{array}{ccccccc} & & i\_k & & j_k & & \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \cos\phi_k & \ldots & \sin\phi_k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -\sin\phi_k & \ldots & \cos\phi_k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{array}$$

$\phi_k = \frac{1}{2} arctg \frac{2 a^k_{i_k j_k}}{a^k_{i_k i_k} - a^k_{j_k j_k}}$ $i_k$ та $j_k$ – номери рядочка та стовпчика в матриці $A_k$:

$a^k_{i_k j_k} = \max_{i \neq j} |a^k_{kj}|, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{2+1,n}$

Умова припинення: $t(A_{k+1}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}^2 \leq \varepsilon$

Після виконання цієї умови діагональні елементи матриці $A_{k+1}$ є наближеними власними значеннями з точністю ε: $\lambda_i \approx a^{k+1}_{ii}, \quad i = \overline{1,n}$,

при чому швидкість збіжності: $t(A_{k+1}) <= qt(A_k)$; $q = 1 - \frac{2}{n(n-1)}$

Власним векторам $\lambda_i$ ,$i = \overline{1,n}$, відповідають власні вектори ($u_{1i}$ , ..., $u_{ii}$, ..., $u_{ni}$) T , які є стовпцями матриці U:

$$U = \prod_{k=1}^{n} U_k = \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1i} & \ldots & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i1} & \ldots & u_{ii} & \ldots & u_{¿} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & \ldots & u_{ni} & \ldots & u_{nn} \end{matrix}$$

Зауваження. Можна використовувати ітераційний процес вигляду: $A_{k+1} = U^t_k A_k U_k$, але тоді матриця обертань буде:

$$U_k = \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \cos\phi_k & \ldots & -\sin\phi_k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \sin\phi_k & \ldots & \cos\phi_k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{matrix}$$

## Модифікований метод Ньютона:

Ітераційний процес модифікованого методу Ньютона має вигляд:
$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - A_0 \bar{F}(\bar{x}^k)$

Обирається початкове наближення $x^0$, для якого обчислюється матриця Якобі:

$$A_0=\bar{F}'(\bar{x}_0) \text{ , де } \bar{F}'(\bar{x}_0)=\begin{matrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_n} \end{matrix}$$

Умова припинення методу: $\|\bar{x}^{k+1}-\bar{x}^k\|\le\varepsilon$.

# ***Хід роботи***

***Мова програмування*** – Python;

***Використані бібліотеки:*** numpy (робота з масивами, складні обрахунки)

<u>Наближені методи розв’язання задач</u>

<u>на власні значення:</u>

Починаємо роботу з ініціалізацію матриці, обчислення $\|A\|_\infty$ та пошуку B = $\|A\|_\infty$ - A

```
================================================================================
ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ МАТРИЦІ
================================================================================

Вихідна матриця A:
  [  3,   0,   1,   1]
  [  0,   4,   1,   2]
  [  1,   1,   2,   0]
  [  1,   2,   0,   3]

================================================================================
1. СТЕПЕНЕВИЙ МЕТОД (знаходження мінімального власного значення)
================================================================================

Крок 1: Обчислення ||A||_∞ (максимум сум модулів елементів рядків)
  Рядок 0: |3| + |0| + |1| + |1| = 5
  Рядок 1: |0| + |4| + |1| + |2| = 7
  Рядок 2: |1| + |1| + |2| + |0| = 4
  Рядок 3: |1| + |2| + |0| + |3| = 6

||A||_∞ = max(5, 7, 4, 6) = 7

Крок 2: Обчислення матриці B = ||A||_∞ * E - A
B = 7 * E - A

Матриця B:
  [   4.0,    0.0,   -1.0,   -1.0]
  [   0.0,    3.0,   -1.0,   -2.0]
  [  -1.0,   -1.0,    5.0,    0.0]
  [  -1.0,   -2.0,    0.0,    4.0]
```

Наступним кроком ініціалізуємо початкове наближення $x^0 = [1, 1, 1, 1]$ та застосовуємо степеневий метод до матриці B:

```
================================================================================
Крок 3: Застосування степеневого методу до матриці B
Знаходимо λ_max(B)
================================================================================

Початковий вектор x^0 = [1. 1. 1. 1.]

--- Ітерація 1 ---
x̄^1 = A * x̄^0
x̄^1 = [2. 0. 3. 1.]
m = 2 (індекс максимального за модулем елемента)
λ^1 = x^1_2 / x^0_2 = 3.000000 / 1.000000 = 3.000000
|λ^1 - λ^0| = |3.000000 - 0.000000| = 3.000000e+00

--- Ітерація 2 ---
x̄^2 = A * x̄^1
x̄^2 = [ 4. -5. 13.  2.]
m = 2 (індекс максимального за модулем елемента)
λ^2 = x^2_2 / x^1_2 = 13.000000 / 3.000000 = 4.333333
|λ^2 - λ^1| = |4.333333 - 3.000000| = 1.333333e+00

--- Ітерація 3 ---
x̄^3 = A * x̄^2
x̄^3 = [  1. -32.  66.  14.]
m = 2 (індекс максимального за модулем елемента)
λ^3 = x^3_2 / x^2_2 = 66.000000 / 13.000000 = 5.076923
|λ^3 - λ^2| = |5.076923 - 4.333333| = 7.435897e-01

--- Ітерація 4 ---
x̄^4 = A * x̄^3
x̄^4 = [ -76. -190.  361.  119.]
m = 2 (індекс максимального за модулем елемента)
λ^4 = x^4_2 / x^3_2 = 361.000000 / 66.000000 = 5.469697
|λ^4 - λ^3| = |5.469697 - 5.076923| = 3.927739e-01

--- Ітерація 5 ---
x̄^5 = A * x̄^4
x̄^5 = [ -784. -1169.  2071.   932.]
m = 2 (індекс максимального за модулем елемента)
λ^5 = x^5_2 / x^4_2 = 2071.000000 / 361.000000 = 5.736842
|λ^5 - λ^4| = |5.736842 - 5.469697| = 2.671451e-01

... (проміжні ітерації 6-1000) ...
```

Обмежуємо вивід 4 ітераціями. Решту не виводимо. Ітераційний процес завершився на 45 кроці.

```
... (проміжні ітерації 6-1000) ...

--- Ітерація 45 ---
x̃^45 = A * x̃^44
x̃^45 = [-4.98955134e+35 -5.30491976e+35  6.62852774e+35  6.11007958e+35]
m = 2 (індекс максимального за модулем елемента)
λ^45 = x^45_2 / x^44_2 = 662852774055775677879550157688668160.000000 / 101151720815983968565925194951032832.000000 = 6.553055
|λ^45 - λ^44| = |6.553055 - 6.553054| = 8.280851e-07

Умова припинення виконана: |λ^45 - λ^44| = 8.280851e-07 <= ε = 1e-06
```

Тепер можемо знайти мінімальне власне число за формулою $\lambda_{min}(A) = \|A\|_\infty - \lambda_{max}(B)$:

```
================================================================================
Крок 4: Обчислення мінімального власного значення
================================================================================

λ_min(A) = ||A||_∞ - λ_max(B)
λ_min(A) = 7.000000 - 6.553055 = 0.446945

Результат:
λ_min(A) = 0.446945
Власний вектор (нормалізований): [-0.43053671 -0.457749    0.57196029  0.52722426]
```

За допомогою степеневого методу ми знайшли найменше власне число матриці: $\lambda_{min}(A) = 0.446945$

Далі застосуємо  метод обертань Якобі для знаходження всіх власних значень, проте обмежимось лише 5 ітераціями. Кожна ітерація міститиме наступні кроки:

1) Пошук максимального позадіагонального елемента
2) Обчислення кута обертання φ
3) Формування матриці обертання $U_1$
4) Обчислення $A_2 = U_1^T * A_1 * U_1$
5) Перевірка умови припинення

Крок 1:

```
================================================================================
2. МЕТОД ОБЕРТАНЬ ЯКОБІ (знаходження всіх власних значень)
================================================================================

Початкова матриця A_0 = A

================================================================================
Ітерація 1
================================================================================

Крок 1: Пошук максимального позадіагонального елемента
max|a_ij| = |a_13| = 2.000000 (елемент на позиції [1][3])

Крок 2: Обчислення кута обертання φ
φ = (1/2) * arctan(2*a_13 / (a_11 - a_33))
φ = (1/2) * arctan(2*2.000000 / (4.000000 - 3.000000))
φ = (1/2) * arctan(4.000000 / 1.000000)
φ = (1/2) * arctan(4.000000)
φ = (1/2) * 1.325818 = 0.662909 рад (37.98°)

Крок 3: Формування матриці обертання U_1
cos(φ) = 0.788205, sin(φ) = 0.615412
U_1 (елементи на позиціях [1][1], [3][3], [1][3], [3][1]):
  [ 1.0000,  0.0000,  0.0000,  0.0000]
  [ 0.0000,  0.7882,  0.0000, -0.6154]
  [ 0.0000,  0.0000,  1.0000,  0.0000]
  [ 0.0000,  0.6154,  0.0000,  0.7882]

Крок 4: Обчислення A_2 = U_1^T * A_1 * U_1
Матриця A_2:
  [ 3.0000,  0.6154,  1.0000,  0.7882]
  [ 0.6154,  5.5616,  0.7882, -0.0000]
  [ 1.0000,  0.7882,  2.0000, -0.6154]
  [ 0.7882, -0.0000, -0.6154,  1.4384]

Крок 5: Перевірка умови припинення
t(A_2) = Σ(a_ij)² = 6.000000e+00
t(A_2) > ε = 1e-06
```

Ітерації 2-5:

```
================================================================================
Ітерація 2
================================================================================

Крок 1: Пошук максимального позадіагонального елемента
max|a_ij| = |a_02| = 1.000000 (елемент на позиції [0][2])

Крок 2: Обчислення кута обертання ϕ
ϕ = (1/2) * arctan(2*a_02 / (a_00 - a_22))
ϕ = (1/2) * arctan(2*1.000000 / (3.000000 - 2.000000))
ϕ = (1/2) * arctan(2.000000 / 1.000000)
ϕ = (1/2) * arctan(2.000000)
ϕ = (1/2) * 1.107149 = 0.553574 рад (31.72°)

Крок 3: Формування матриці обертання U_2
cos(ϕ) = 0.850651, sin(ϕ) = 0.525731
U_2 (елементи на позиціях [0][0], [2][2], [0][2], [2][0]):
  [ 0.8507,  0.0000, -0.5257,  0.0000]
  [ 0.0000,  1.0000,  0.0000,  0.0000]
  [ 0.5257,  0.0000,  0.8507,  0.0000]
  [ 0.0000,  0.0000,  0.0000,  1.0000]

Крок 4: Обчислення A_3 = U_2^T * A_2 * U_2
Матриця A_3:
  [ 3.6180,  0.9379,  0.0000,  0.3469]
  [ 0.9379,  5.5616,  0.3469, -0.0000]
  [-0.0000,  0.3469,  1.3820, -0.9379]
  [ 0.3469, -0.0000, -0.9379,  1.4384]

Крок 5: Перевірка умови припинення
t(A_3) = Σ(a_ij)² = 4.000000e+00
t(A_3) > ε = 1e-06
```

```
================================================================================
Ітерація 3
================================================================================

Крок 1: Пошук максимального позадіагонального елемента
max|a_ij| = |a_01| = 0.937885 (елемент на позиції [0][1])

Крок 2: Обчислення кута обертання ϕ
ϕ = (1/2) * arctan(2*a_01 / (a_00 - a_11))
ϕ = (1/2) * arctan(2*0.937885 / (3.618034 - 5.561553))
ϕ = (1/2) * arctan(1.875770 / -1.943519)
ϕ = (1/2) * arctan(-0.965141)
ϕ = (1/2) * -0.767661 = -0.383831 рад (-21.99°)

Крок 3: Формування матриці обертання U_3
cos(ϕ) = 0.927237, sin(ϕ) = -0.374475
U_3 (елементи на позиціях [0][0], [1][1], [0][1], [1][0]):
  [ 0.9272,  0.3745,  0.0000,  0.0000]
  [-0.3745,  0.9272,  0.0000,  0.0000]
  [ 0.0000,  0.0000,  1.0000,  0.0000]
  [ 0.0000,  0.0000,  0.0000,  1.0000]

Крок 4: Обчислення A_4 = U_3^T * A_3 * U_3
Матриця A_4:
  [ 3.2393,  0.0000, -0.1299,  0.3217]
  [ 0.0000,  5.9403,  0.3217,  0.1299]
  [-0.1299,  0.3217,  1.3820, -0.9379]
  [ 0.3217,  0.1299, -0.9379,  1.4384]

Крок 5: Перевірка умови припинення
t(A_4) = Σ(a_ij)² = 2.240743e+00
t(A_4) > ε = 1e-06
```

```
================================================================================
Ітерація 4
================================================================================

Крок 1: Пошук максимального позадіагонального елемента
max|a_ij| = |a_23| = 0.937885 (елемент на позиції [2][3])

Крок 2: Обчислення кута обертання ϕ
ϕ = (1/2) * arctan(2*a_23 / (a_22 - a_33))
ϕ = (1/2) * arctan(2*-0.937885 / (1.381966 - 1.438447))
ϕ = (1/2) * arctan(-1.875770 / -0.056481)
ϕ = (1/2) * arctan(33.210534)
ϕ = (1/2) * 1.540694 = 0.770347 рад (44.14°)

Крок 3: Формування матриці обертання U_4
cos(ϕ) = 0.717669, sin(ϕ) = 0.696384
U_4 (елементи на позиціях [2][2], [3][3], [2][3], [3][2]):
  [ 1.0000,  0.0000,  0.0000,  0.0000]
  [ 0.0000,  1.0000,  0.0000,  0.0000]
  [ 0.0000,  0.0000,  0.7177, -0.6964]
  [ 0.0000,  0.0000,  0.6964,  0.7177]

Крок 4: Обчислення A_5 = U_4^T * A_4 * U_4
Матриця A_5:
  [ 3.2393,  0.0000,  0.1308,  0.3214]
  [ 0.0000,  5.9403,  0.3214, -0.1308]
  [ 0.1308,  0.3214,  0.4719, -0.0000]
  [ 0.3214, -0.1308, -0.0000,  2.3485]

Крок 5: Перевірка умови припинення
t(A_5) = Σ(a_ij)² = 4.814868e-01
t(A_5) > ε = 1e-06
```

```
================================================================================
Ітерація 5
================================================================================

Крок 1: Пошук максимального позадіагонального елемента
max|a_ij| = |a_03| = 0.321351 (елемент на позиції [0][3])

Крок 2: Обчислення кута обертання ϕ
ϕ = (1/2) * arctan(2*a_03 / (a_00 - a_33))
ϕ = (1/2) * arctan(2*0.321351 / (3.239258 - 2.348517))
ϕ = (1/2) * arctan(0.642703 / 0.890742)
ϕ = (1/2) * arctan(0.721536)
ϕ = (1/2) * 0.625034 = 0.312517 рад (17.91°)

Крок 3: Формування матриці обертання U_5
cos(ϕ) = 0.951563, sin(ϕ) = 0.307455
U_5 (елементи на позиціях [0][0], [3][3], [0][3], [3][0]):
  [ 0.9516,  0.0000,  0.0000, -0.3075]
  [ 0.0000,  1.0000,  0.0000,  0.0000]
  [ 0.0000,  0.0000,  1.0000,  0.0000]
  [ 0.3075,  0.0000,  0.0000,  0.9516]

Крок 4: Обчислення A_6 = U_5^T * A_5 * U_5
Матриця A_6:
  [ 3.3431, -0.0402,  0.1245,  0.0000]
  [-0.0402,  5.9403,  0.3214, -0.1245]
  [ 0.1245,  0.3214,  0.4719, -0.0402]
  [ 0.0000, -0.1245, -0.0402,  2.2447]

Крок 5: Перевірка умови припинення
t(A_6) = Σ(a_ij)² = 2.749535e-01
t(A_6) > ε = 1e-06
```

Збіжініcть з`явиться опісля 12 ітерацій. Порівняємо результати двох методів з бібліотечною реалізацією:

```
Умова припинення виконана на ітерації 12

================================================================================
РЕЗУЛЬТАТИ
================================================================================

Власні значення (метод Якобі):
  λ_1 = 0.446943
  λ_2 = 2.240970
  λ_3 = 3.348218
  λ_4 = 5.963869

Власні вектори (стовпці матриці U):
  [-0.4305,  0.1257,  0.8483,  0.2814]
  [-0.4577, -0.2980, -0.4271,  0.7206]
  [ 0.5720, -0.7151,  0.3124,  0.2528]
  [ 0.5272,  0.6197, -0.0170,  0.5812]
```

```
================================================================================
ПЕРЕВІРКА (numpy.linalg.eig)
================================================================================

Власні значення (numpy):
  λ_1 = 0.446943
  λ_2 = 2.240970
  λ_3 = 3.348218
  λ_4 = 5.963869

Порівняння мінімального власного значення:
  Степеневий метод: λ_min = 0.446945
  Метод Якобі:      λ_min = 0.446943
  NumPy:            λ_min = 0.446943

================================================================================
```

## Наближені методи розв’язання систем нелінійних рівнянь:

Для розв’язку системи будемо використовувати модифікований метод Ньютона. Ініціалізуємо систему та оберемо початкове наближення

```
================================================================================
МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА
================================================================================

Система нелінійних рівнянь:
f₁(x₁, x₂) = sin(x₁ - x₂) - x₁x₂ + 1 = 0
f₂(x₁, x₂) = x₁² - x₂² - 0.75 = 0

Початкове наближення: x̄⁰ = (1.000000, 0.500000)
```

Тепер можемо перейти до наступного кроку. Знайдемо матрицю Якобі та її значення в точці $x^0$:

```
================================================================================
ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЦІ A₀ = (F'(x̄⁰))⁻¹
================================================================================

Матриця Якобі F'(x̄⁰) в точці x̄⁰ = (1.000000, 0.500000):
F'(x̄⁰) = | ∂f₁/∂x₁   ∂f₁/∂x₂ |
         | ∂f₂/∂x₁   ∂f₂/∂x₂ |

∂f₁/∂x₁ = cos(x₁ - x₂) - x₂ = cos(1.000000 - 0.500000) - 0.500000 = 0.377583
∂f₁/∂x₂ = -cos(x₁ - x₂) - x₁ = -cos(1.000000 - 0.500000) - 1.000000 = -1.877583
∂f₂/∂x₁ = 2x₁ = 2×1.000000 = 2.000000
∂f₂/∂x₂ = -2x₂ = -2×0.500000 = -1.000000

F'(x̄⁰) =
  [ 0.377583, -1.877583]
  [ 2.000000, -1.000000]

Обернена матриця A₀ = (F'(x̄⁰))⁻¹:
  [-0.296070,  0.555895]
  [-0.592139,  0.111791]
```

Тепер можемо розпочинати ітераційний процесом. Як і в минулому завдання виводити будем лише перші 5 ітерацій:

```
================================================================================

Формула: x̄^(k+1) = x̄^k - A₀F(x̄^k)
Умова припинення: ||x̄^(k+1) - x̄^k||₁ ≤ ε = 1e-06

================================================================================
Ітерація k = 0
================================================================================

Поточне наближення: x̄^0 = (1.000000, 0.500000)

Обчислення F(x̄^0):
f₁(x̄^0) = sin(1.000000 - 0.500000) - 1.000000×0.500000 + 1
       = sin(0.500000) - 0.500000 + 1
       = 0.979426
f₂(x̄^0) = (1.000000)² - (0.500000)² - 0.75
       = 1.000000 - 0.250000 - 0.75
       = 0.000000

F(x̄^0) = [0.979426, 0.000000]ᵀ
||F(x̄^0)||₁ = 9.794255e-01

Обчислення приросту Δx̄^0 = A₀F(x̄^0):
Δx̄^0 = [-0.296070,  0.555895] × [ 0.979426]
         [-0.592139,  0.111791]   [ 0.000000]

Δx₁ = -0.296070×0.979426 + 0.555895×0.000000 = -0.289978
Δx₂ = -0.592139×0.979426 + 0.111791×0.000000 = -0.579957

Нове наближення:
x̄^1 = x̄^0 - Δx̄^0
x₁^1 = 1.000000 - -0.289978 = 1.289978
x₂^1 = 0.500000 - -0.579957 = 1.079957

x̄^1 = (1.289978, 1.079957)

Оцінка точності:
||x̄^1 - x̄^0||₁ = |0.289978| + |0.579957| = 8.699348e-01
||F(x̄^1)||₁ = 4.369015e-01
```

# Ітерації 2-5:

```
================================================================================
Ітерація k = 1
================================================================================

Поточне наближення: x̄^1 = (1.289978, 1.079957)

Обчислення F(x̄^1):
f₁(x̄^1) = sin(1.289978 - 1.079957) - 1.289978×1.079957 + 1
       = sin(0.210022) - 1.393120 + 1
       = -0.184639
f₂(x̄^1) = (1.289978)² - (1.079957)² - 0.75
       = 1.664044 - 1.166306 - 0.75
       = -0.252262

F(x̄^1) = [-0.184639, -0.252262]ᵀ
||F(x̄^1)||₁ = 4.369015e-01

Обчислення приросту Δx̄^1 = A₀F(x̄^1):
Δx̄^1 = [-0.296070,  0.555895] × [-0.184639]
         [-0.592139,  0.111791]   [-0.252262]

Δx₁ = -0.296070×-0.184639 + 0.555895×-0.252262 = -0.085565
Δx₂ = -0.592139×-0.184639 + 0.111791×-0.252262 = 0.081132

Нове наближення:
x̄^2 = x̄^1 - Δx̄^1
x₁^2 = 1.289978 - -0.085565 = 1.375544
x₂^2 = 1.079957 - 0.081132 = 0.998825

x̄^2 = (1.375544, 0.998825)

Оцінка точності:
||x̄^2 - x̄^1||₁ = |0.085565| + |-0.081132| = 1.666969e-01
||F(x̄^2)||₁ = 1.505248e-01
```

```
================================================================================
Ітерація k = 2
================================================================================

Поточне наближення: x̄^2 = (1.375544, 0.998825)

Обчислення F(x̄^2):
f₁(x̄^2) = sin(1.375544 - 0.998825) - 1.375544×0.998825 + 1
       = sin(0.376719) - 1.373927 + 1
       = -0.006056
f₂(x̄^2) = (1.375544)² - (0.998825)² - 0.75
       = 1.892120 - 0.997651 - 0.75
       = 0.144469

F(x̄^2) = [-0.006056, 0.144469]ᵀ
||F(x̄^2)||₁ = 1.505248e-01

Обчислення приросту Δx̄^2 = A₀F(x̄^2):
Δx̄^2 = [-0.296070,  0.555895] × [-0.006056]
         [-0.592139,  0.111791]   [ 0.144469]

Δx₁ = -0.296070×-0.006056 + 0.555895×0.144469 = 0.082103
Δx₂ = -0.592139×-0.006056 + 0.111791×0.144469 = 0.019736

Нове наближення:
x̄^3 = x̄^2 - Δx̄^2
x₁^3 = 1.375544 - 0.082103 = 1.293441
x₂^3 = 0.998825 - 0.019736 = 0.979089

x̄^3 = (1.293441, 0.979089)

Оцінка точності:
||x̄^3 - x̄^2||₁ = |-0.082103| + |-0.019736| = 1.018388e-01
||F(x̄^3)||₁ = 7.843221e-02
```

```
================================================================================
Ітерація k = 3
================================================================================

Поточне наближення: x̄^3 = (1.293441, 0.979089)

Обчислення F(x̄^3):
f₁(x̄^3) = sin(1.293441 - 0.979089) - 1.293441×0.979089 + 1
       = sin(0.314352) - 1.266393 + 1
       = 0.042807
f₂(x̄^3) = (1.293441)² - (0.979089)² - 0.75
       = 1.672990 - 0.958615 - 0.75
       = -0.035625

F(x̄^3) = [0.042807, -0.035625]ᵀ
||F(x̄^3)||₁ = 7.843221e-02

Обчислення приросту Δx̄^3 = A₀F(x̄^3):
Δx̄^3 = [-0.296070,  0.555895] × [ 0.042807]
         [-0.592139,  0.111791]   [-0.035625]

Δx₁ = -0.296070×0.042807 + 0.555895×-0.035625 = -0.032478
Δx₂ = -0.592139×0.042807 + 0.111791×-0.035625 = -0.029330

Нове наближення:
x̄^4 = x̄^3 - Δx̄^3
x₁^4 = 1.293441 - -0.032478 = 1.325919
x₂^4 = 0.979089 - -0.029330 = 1.008419

x̄^4 = (1.325919, 1.008419)

Оцінка точності:
||x̄^4 - x̄^3||₁ = |0.032478| + |0.029330| = 6.180808e-02
||F(x̄^4)||₁ = 3.373811e-02
```

```
================================================================================
Ітерація k = 4
================================================================================

Поточне наближення: x̄^4 = (1.325919, 1.008419)

Обчислення F(x̄^4):
f₁(x̄^4) = sin(1.325919 - 1.008419) - 1.325919×1.008419 + 1
       = sin(0.317500) - 1.337082 + 1
       = -0.024889
f₂(x̄^4) = (1.325919)² - (1.008419)² - 0.75
       = 1.758060 - 1.016909 - 0.75
       = -0.008849

F(x̄^4) = [-0.024889, -0.008849]ᵀ
||F(x̄^4)||₁ = 3.373811e-02

Обчислення приросту Δx̄^4 = A₀F(x̄^4):
Δx̄^4 = [-0.296070,  0.555895] × [-0.024889]
         [-0.592139,  0.111791]   [-0.008849]

Δx₁ = -0.296070×-0.024889 + 0.555895×-0.008849 = 0.002450
Δx₂ = -0.592139×-0.024889 + 0.111791×-0.008849 = 0.013749

Нове наближення:
x̄^5 = x̄^4 - Δx̄^4
x₁^5 = 1.325919 - 0.002450 = 1.323469
x₂^5 = 1.008419 - 0.013749 = 0.994670

x̄^5 = (1.323469, 0.994670)

Оцінка точності:
||x̄^5 - x̄^4||₁ = |-0.002450| + |-0.013749| = 1.619898e-02
||F(x̄^5)||₁ = 1.869155e-02
```

Протягом ітераційного процесу було виконано 18 ітерацій. Збіжінсть була досягнута саме на ньому:

```
================================================================================
Ітерація k = 17
================================================================================

Поточне наближення: x̄^17 = (1.321049, 0.997582)

Обчислення F(x̄^17):
f₁(x̄^17) = sin(1.321049 - 0.997582) - 1.321049×0.997582 + 1
       = sin(0.323466) - 1.317855 + 1
       = -0.000000
f₂(x̄^17) = (1.321049)² - (0.997582)² - 0.75
       = 1.745170 - 0.995171 - 0.75
       = -0.000001

F(x̄^17) = [-0.000000, -0.000001]ᵀ
||F(x̄^17)||₁ = 9.182611e-07

Обчислення приросту Δx̄^17 = A₀F(x̄^17):
Δx̄^17 = [-0.296070,  0.555895] × [-0.000000]
         [-0.592139,  0.111791]   [-0.000001]

Δx₁ = -0.296070×-0.000000 + 0.555895×-0.000001 = -0.000000
Δx₂ = -0.592139×-0.000000 + 0.111791×-0.000001 = -0.000000

Нове наближення:
x̄^18 = x̄^17 - Δx̄^17
x₁^18 = 1.321049 - -0.000000 = 1.321049
x₂^18 = 0.997582 - -0.000000 = 0.997583

x̄^18 = (1.321049, 0.997583)

Оцінка точності:
||x̄^18 - x̄^17||₁ = |0.000000| + |0.000000| = 5.289943e-07
||F(x̄^18)||₁ = 4.575105e-07

================================================================================
ЗБІЖНІСТЬ ДОСЯГНУТА на ітерації k = 17
================================================================================
||x̄^18 - x̄^17||₁ = 5.289943e-07 ≤ ε = 1e-06
```

Отже, маємо наступний результат:

```
================================================================================
ФІНАЛЬНИЙ РЕЗУЛЬТАТ
================================================================================

Розв'язок знайдено за 18 ітерацій:
x₁* = 1.3210487814
x₂* = 0.9975824513

Перевірка (підстановка в систему):
f₁(x̄*) = sin(x₁ - x₂) - x₁x₂ + 1 = -5.406272e-08
f₂(x̄*) = x₁² - x₂² - 0.75 = -8.641983e-07
||F(x̄*)||₁ = 9.182611e-07

================================================================================
```