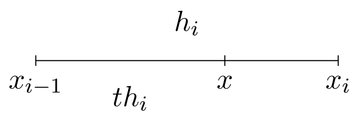
7. Сплайни

Кусково-лінійна інтерполяція

Якщо побудувати поліном першого степеня $L_1^i(x)$ на кожному проміжку $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1; n}$, то отримаємо кусково-лінійну інтерполяцію на $[x_0; x_n]$.
Розглянемо поліном першого степеня за вузлами x_{i-1} та x_i:

$$L_1^i(x) = \frac{f(x_{i-1})(x_i - x) + f(x_i)(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Оцінимо похибку інтерполяції, врахуємо, що:
$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1; n}, \quad M_2^i = \max\limits_{x \in [x_{i-1}; x_i]} |f''(x)|;$



$t \in [0; 1]$

$x - x_{i-1} = th_i;$
$x - x_i = x - (x_{i-1} + h_i) = x - x_{i-1} - h_i = th_i - h_i = h_i(t-1);$
$|f(x) - L_1^i(x)| \leqslant \dfrac{M_2^i}{2!}|(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leqslant \dfrac{M_2^i}{2}\big|th_ih_i(t-1)\big| =$
$= \dfrac{M_2^i}{2}\big|h_i^2 t(t-1)\big| = \dfrac{M_2^i}{2}\big|h_i^2 g(t)\big|.$
Для оцінки зверху знайдемо екстремуми $g(t) = t(t-1)$:
$g'(t) = 2t - 1 = 0; \quad t = \dfrac{1}{2}; \quad g(0) = 0; \quad g(1) = 0; \quad g(\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{4}.$
Врахуємо, що $h = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i$, $M_2 = \max\limits_{x \in [x_0; x_n]} |f''(x)|$, тоді похибка кусково лінійної інтерполяції:
$|f(x) - L_1^i(x)| \leqslant \dfrac{M_2^i}{2!}\big|h_i^2 g(t)\big| \leqslant \dfrac{M_2}{2!}\big|h^2(-\dfrac{1}{4})\big| \leqslant \dfrac{M_2 h^2}{8}.$

Отже, для оцінки похибки при наближенні функції за допомогою кусково-лінійної інтерполяції використовують формулу:

$$|f(x) - L_1(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Введемо систему функцій:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{i-1}; \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i; \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \\ 0, & x \geqslant x_{i+1}; \end{cases} \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ 0, & x \geqslant x_1, \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n \\ 0, & x \leqslant x_{n-1} \end{cases}$$

Тоді для кусково-лінійної інтерполяції зручно використовувати формулу:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x).$$

Теорема. Для $f(x) \in C^2[a, b]$, що задана своїми значеннями $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ має місце оцінка:

$$\|f^{(k)}(x) - \Phi_1^{(k)}(x)\|_{C[a,b]} \leqslant 2M_2|h|^{2-k}, \quad k = 0, 1,$$

де $|h| = \max_{i=\overline{1,n}} h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Побудова таблиць

Постановка задачі: потрібно побудувати таблицю значень функції таким чином, щоб похибка при інтерполяції багаточленом степеня n не перевищувала величину ε. Зазвичай такі таблиці будуються, щоб вони дозволяли лінійну чи квадратичну інтерполяцію.

Розглянемо побудову таблиць для лінійної інтерполяції у випадку рівновідалених вузлів. Залишковий член має вигляд:

$$R_1(x) = f''(\xi)h^2\frac{t(t-1)}{2}, \quad x = x_0 + th, \quad |R_1(x)| < \varepsilon,$$

де $\max_{t\in[0,1]} |\dfrac{t(t-1)}{2}|$ досягається при $t = 1/2$ та дорівнює $1/8$.

Таким чином, для побудови таблиці значень функції для лінійної інтерполяції із точністю ε достатньо виконання умови:

$$\max |f''(\xi)|\frac{h^2}{8} \leqslant \varepsilon.$$

Одержимо для h таку оцінку:

$$0 < h \leqslant \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2 h^2}}, \quad M_2 = \max |f''(x)|.$$

Приклад. З яким кроком h потрібно розбити відрізок $[0; 1]$, щоб кусково-лінійною інтерполяцією знайти наближене значення функції

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$$

для $x \in [0; 1]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язок. За умовою необхідно знайти крок, для цього скористаємося похибкою кусково-лінійної інтерполяції:

$$|f(x) - L_1(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{8} \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad h \leqslant \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}.$$

Для знаходження кроку не вистачає M_2:

$$f''(x) = (\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2})' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}(-2x) = \frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2};$$

точки екстремуму:

$$(\frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2})' = 0; \quad \frac{-4}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} + \frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}(-2x) = 0;$$

$$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}(-4 + 8x^2) = 0; \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \notin [0; 1]; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$f''(0) = 0;\ f''(1) = \frac{-4}{\sqrt{\pi}}e^{-1} \approx -0,83;\ f''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{-4}{\sqrt{2e\pi}} \approx -0,97;$$

$M_2 = \dfrac{4}{\sqrt{2e\pi}}$.

Знайдемо крок:

$h \leqslant \sqrt{\dfrac{8\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\dfrac{8 \cdot 10^{-4}\sqrt{2e\pi}}{4}} \approx 0,029.$

Для зручності покладемо крок $h = 0,025$, тоді
$n = (b - a)/h = (1 - 0)/0,025 = 40.$

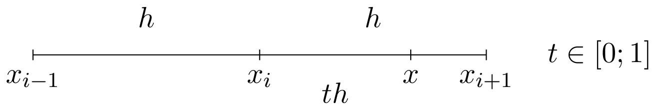
Отже, щоб досягнути заданої точності необхідно розбити відрізок з кроком 0,025 на 40 частин.

Кусково-квадратична інтерполяція

Покладемо сталий крок $h = x_i - x_{i-1}$, $\forall i$: $i = \overline{1,n}$. Якщо побудувати поліном 2-го степеня за вузлами x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, то отримаємо кусково-квадратичну інтерполяцію на $[x_0; x_n]$:

$$L_2^i(x) = f(x_{i-1})\frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2h^2} - f(x_i)\frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{h^2} +$$
$$+ f(x_{i+1})\frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2h^2}.$$

Оцінимо похибку інтерполяції, врахуємо, що:



$x - x_i = th$; $\quad x - x_{i-1} = x - (x_i - h) = th + h = h(t + 1)$;
$x - x_{i+1} = x - (x_i + h) = th - h = h(t - 1)$;
$M_3^i = \max\limits_{x \in [x_{i-1}; x_{i+1}]} |f'''(x)|$; $\quad M_3 = \max\limits_{x \in [x_0; x_n]} |f'''(x)|$;

$$|f(x) - L_2^i(x)| \leqslant \frac{M_3^i}{3!}|(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})| \quad \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M_3^i}{6}\big|h(t + 1)thh(t - 1)\big| = \frac{M_3^i}{6}\big|h^3(t^3 - t)\big| = \frac{M_3^i}{6}\big|h^3 g(t)\big|.$$

Для оцінки зверху знайдемо екстремуми функції $g(t)$:

$g(t) = t^3 - t$; $g'(t) = 3t^2 - 1 = 0$; $\quad t_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \notin [0; 1]$; $t_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

$$g(0) = 0; \quad g(1) = 0; \quad g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{1}{\sqrt{3}})^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}};$$

Похибка кусково-квадратичної інтерполяції:

$$|f(x) - L_2^i(x)| \leqslant \frac{M_3^i}{6}\left|h^3 g(t)\right| \leqslant \frac{M_3}{6}\left|h^3(-\frac{2}{3\sqrt{3}})\right| \leqslant \frac{M_3}{9\sqrt{3}}h^3;$$

$$|f(x) - L_2(x)| \leqslant \frac{M_3}{9\sqrt{3}}h^3.$$

Кусково-кубічна ермітова інтерполяція

Нехай на деякому проміжку $[a, b]$ задається сітка вузлів: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Функція $f(x)$ задана своїми значеннями $f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, n}$. Функція $s(x)$ називається ***сплайном степеня*** m ***дефекту*** k якщо:

1) $s(x)$ – поліном степеня m для кожного $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$;

2) $s(x) \in C^{m-k}_{[a;b]}$;

3) $s(x_i) = f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, n}$.

Нехай функція $f(x) \in C[a, b]$ задана своїми значеннями $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ у вузлах $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ та значеннями своїх похідних $f'(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Припустимо постановка нашої задачі полягає у побудуві ермітова кубічногго сплайну $\Phi_3(x)$, що відповідає інтерполяційним умовам:

$$\Phi_3(x_i) = f(x_i), \;\; \Phi_3'(x_i) = f'(x_i), \;\; i = \overline{0, n}.$$

Для розв'язання цієї задачі, представимо шуканий сплайн у вигляді:

$$\Phi_3(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i \varphi_i^0(x) + y_i' \varphi_i^1(x)).$$

З інтерполяційних умов випливає, що

$$\varphi_i^0(x_j) = \delta_{ij}, \;\; (\varphi_i^0)'(x_j) = 0, \;\; i, j = \overline{0, n},$$

$$\varphi_i^1(x_j) = 0, \;\; (\varphi_i^1)'(x_j) = \delta_{ij}, \;\; i, j = \overline{0, n}$$

Функції $\varphi_i^0(x)$, $\varphi_i^1(x)$ є поліномами 3-го степеня на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, на інших відрізках дорівнюють нулю.

Нехай $h_i = h$. Позначимо $s = \dfrac{x - x_i}{h}$. Тоді маємо, що

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \ \Rightarrow \ s \in [-1, 0],$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \ \Rightarrow \ s \in [0, 1].$$

Позначимо $\varphi_1^0(s) = \varphi_i^0(x), \ x \in [x_i, x_{i+1}], \ s \in [0,1]$. Побудуємо цю функцію. $\varphi_1^0(s)$ відповідає таким інтерполяційним умовам з кратними вузлами:

$$\varphi_1^0(0) = 1, \quad \varphi_1^0(1) = 0, \quad (\varphi_1^0)'(0) = (\varphi_1^0)'(1) = 0.$$

Побудуємо таблицю розділених різниць

s	$\varphi(s)$	р.р.I п.	р.р.II п.	р.р.III п.
0	1			
		0	-1	
0	1			2
		-1	1	
1	0			
		0		
1	0			

Отже, $\varphi_1^0(s) = 1 + 0 \cdot s - 1 \cdot s^2 + 2s^2(s-1) = 2s^3 - 3s^2 + 1$.

Аналогічно до викладеного вище знаходимо:

2) $\varphi_2^0(s) = \varphi_i^0(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad s \in [-1, 0],$
$\varphi_2^0(s) = -2s^3 + 3s^2 + 1;$

3) $\varphi_1^1(s) = \varphi_i^1(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad s \in [0, 1],$
$\varphi_1^1(s) = s(s-1)^2;$

4) $\varphi_2^1(s) = \varphi_i^1(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad s \in [-1, 0],$
$\varphi_2^1(s) = s(s+1)^2.$

Отже,

$$\varphi_i^0(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{i-1}; \\ -2s^3 + 3s^2 + 1, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i; \\ 2s^3 - 3s^2 + 1, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \\ 0, & x \geqslant x_{i+1}; \end{cases},$$

$$\varphi_i^1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{i-1}; \\ s(s+1)^2, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i; \\ s(s-1)^2, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \\ 0, & x \geqslant x_{i+1}; \end{cases},$$

де $s = \dfrac{x - x_i}{h}$. Якщо сітка нерівномірна, то в формулах замість h буде h_{i-1} та h_i.

Оцінимо $\|f(x) - \Phi_(x)\|_{C[a,b]}$. Нехай $f(x) \in C^4[a,b]$. Розглянемо $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$f(x) - \Phi_3(x) = \frac{f^{(4)}}{4!}(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2.$$

Максимум функції $(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2$ досягається в точці $\overline{x} = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Отже одержимо

$$|f(x) - \Phi_3(x)| \leqslant \frac{M_4}{4!}(\frac{h^2}{4})^2 = \frac{M_4 h^4}{384}.$$

Теорема. Якщо функція $f(x) \in C^4[a,b]$ задана в точках x_i, $i = \overline{0,n}$, своїми значеннями $y_i = f(x_i)$, $y_i' = f'(x_i)$, то для кусково-кубічної ермітової інтерполяції

$$\Phi_3(x) = \sum_{i=0}^{n}(y_i \varphi_i^0 + y_i' \varphi_i^1(x))$$

має місце оцінка

$$\|f(x) - \Phi_3(x)\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{M_4 h^4}{384}, \quad \|f'(x) - \Phi_3'(x)\|_{C[a,b]} \leqslant M M_4 h^3,$$

де M - стала, що не залежить від h.

Інтерполяційний природній кубічний сплайн

Інтерполяційним природнім кубічним сплайном називається поліном, для якого виконуються умови:

1) $s(x)$ – поліном степеня 3 для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$;
2) $s(x) \in C^2_{[a;b]}$;
3) $s(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$;

4) $s''(a) = s''(b) = 0$ – умова природності.

Зауваження. Для побудови інтерполяційного кубічного сплайну можна замість умови 4) використовувати інші умови, але тоді сплайн не буде природнім: $s''(a) = A$; $s''(b) = B$ або $s'(a) = A$; $s'(b) = B$, або умови періодичності: $s(a) = s(b)$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$.

Розглянемо формули для побудови інтерполяційного природного кубічного сплайну s_i на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$:

$$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,$$

де c_i знаходяться з тридіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$h_i c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),$$

$$c_0 = c_n = 0;$$

решта коефіцієнтів знаходяться за формулами:

$$a_i = f_i; \qquad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}; \qquad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}.$$

Приклад. Визначити, чи є кубічним сплайном функція:

$$s(x) = \begin{cases} 2 - 4x + x^3, & 0 < x \leqslant 1; \\ -1 - (x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, & 1 < x \leqslant 2; \\ 2(x-2) - (x-2)^3, & 2 < x \leqslant 3; \\ 1 - (x-3) - 3(x-3)^2 + 3(x-3)^3, & 3 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

Якщо так, то визначити дефект та перевірити його природність.

Розв'язок. $s(x)$ – поліноми третього степеня, перевіримо умову неперервно-диференційованості, для цього складемо таблицю значень:

x_i	$s(x_i - 0)$	$s(x_i + 0)$
1	-1	-1
2	0	0
3	1	1

Знайдемо першу похідну і таблицю значень:

$$s'(x) = \begin{cases} -4 + 3x^2, & 0 < x \leqslant 1; \\ -1 + 6(x-1) - 3(x-1)^2, & 1 < x \leqslant 2; \\ 2 - 3(x-2)^2, & 2 < x \leqslant 3; \\ -1 - 6(x-3) + 9(x-3)^2, & 3 < x \leqslant 4; \end{cases}$$

x_i	$s'(x_i - 0)$	$s'(x_i - 0)$
1	-1	-1
2	2	2
3	-1	-1

Знайдемо другу похідну і таблицю значень:

$$s''(x) = \begin{cases} 6x, & 0 < x \leqslant 1; \\ 6 - 6(x-1), & 1 < x \leqslant 2; \\ -6(x-2), & 2 < x \leqslant 3; \\ -6 + 18(x-3), & 3 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

x_i	$s'(x_i - 0)$	$s'(x_i - 0)$
1	6	6
2	0	0
3	-6	-6

$s(x)$ – двічі неперервно-диференційована, $s(x) \in C^2_{[0;3]} \equiv C^{3-1}_{[0;3]}$, значить $k = 1$, дефект сплайна – 1.

Перевіримо умову природності: $s''(a) = s''(b) = 0$.

$s''(x) = 6x, \qquad 0 < x \leqslant 1\ ; \quad s''(0) = 0;$

$s''(x) = -6 + 18(x-3), \qquad 3 < x \leqslant 4; \quad s''(4) \neq 0.$

Отже, $s(x)$ – кубічний сплайн з дефектом 1, але умова природності не виконується.

Приклад. Побудувати кубічний природній сплайн за табличною функцією:

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0,5	2	1,5

Розв'язок. Знайдемо крок: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, $i = \overline{1,2}$. Знайдемо коефіцієнти c:

$$h_i c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right);$$

$c_0 = c_3 = 0;$

$$\begin{cases} h_1c_0 + 2c_1(h_1+h_2) + h_2c_2 = 6(\dfrac{f_2-f_1}{h_2} - \dfrac{f_1-f_0}{h_1}); \\ h_2c_1 + 2c_2(h_2+h_3) + h_3c_3 = 6(\dfrac{f_3-f_2}{h_3} - \dfrac{f_2-f_1}{h_2}); \\ c_0 = c_3 = 0; \end{cases}$$

Підставимо відомі значення:

$$\begin{cases} 4c_1 + c_2 = 6(2-0,5-(0,5-0)) = 6; \\ c_1 + 4c_2 = 6(1,5-2-(2-0,5)) = -12; \end{cases}$$

$c_1 = 2,4;$ $\quad c_2 = -3,6.$

Знайдемо інші коефіцієнти:

$d_i = \dfrac{c_i - c_{i-1}}{h_i};$

$d_1 = c_1 - c_0 = 2,4 - 0 = 2,4;$

$d_2 = c_2 - c_1 = -3,6 - 2,4 = -6;$

$d_3 = c_3 - c_2 = 0 - (-3,6) = 3,6;$

$b_i = \dfrac{h_i}{2}c_i - \dfrac{h_i^2}{6}d_i + \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i};$

$b_1 = \dfrac{c_1}{2} - \dfrac{d_1}{6} + f_1 - f_0 = \dfrac{2,4}{2} - \dfrac{2,4}{6} + 0,5 - 0 = 1,3\ ;$

$b_2 = \dfrac{c_2}{2} - \dfrac{d_2}{6} + f_2 - f_1 = \dfrac{-3,6}{2} - \dfrac{-6}{6} + 2 - 0,5 = 0,7;$

$b_3 = \dfrac{c_3}{3} - \dfrac{d_3}{6} + f_3 - f_2 = \dfrac{0}{2} - \dfrac{3,6}{6} + 1,5 - 2 = -1,1;$

$a_i = f_i;$ $\quad a_1 = 0.5;$ $\quad a_2 = 2;$ $\quad a_3 = 1,5.$

i	x_i	y_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0	0				
1	1	0,5	0,5	1,3	2,4	2,4
2	2	2	2	0,7	-3,6	-6
3	3	1,5	1,5	-1,1	0	3,6

За отриманими значеннями побудуємо сплайни:

$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + \dfrac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \dfrac{d_i}{6}(x - x_i)^3;$

$s_1 = a_1 + b_1(x - x_1) + \dfrac{c_1}{2}(x - x_1)^2 + \dfrac{d_1}{6}(x - x_1)^3 = 0,5 + 1,3\times$

$\times(x-1) + \dfrac{2,4}{2}(x-1)^2 + \dfrac{2,4}{6}(x-1)^3 = 0,1x + 0,4x^3;$

$$s_2 = a_2 + b_2(x - x_2) + \frac{c_2}{2}(x - x_2)^2 + \frac{d_2}{6}(x - x_2)^3 = 2 + 0,7\times$$
$$\times(x-2) + \frac{-3,6}{2}(x-2)^2 + \frac{-6}{6}(x-2)^3 = 1,4 - 4,1x + 4,2x^2 - x^3;$$
$$s_3 = a_3 + b_3(x - x_3) + \frac{c_3}{2}(x - x_3)^2 + \frac{d_3}{6}(x - x_3)^3 = 1,5 - 1,1\times$$
$$\times(x-3) + \frac{0}{2}(x-3)^2 + \frac{3,6}{6}(x-3)^3 = -11,4 + 15,1x - 5,4x^2 + 0,6x^3.$$

Отже, отримали сплайн:

$$s(x) = \begin{cases} 0,1x + 0,4x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1,4 - 4,1x + 4,2x^2 - x^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ -11,4 + 15,1x - 5,4x^2 + 0,6x^3, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. З яким кроком h потрібно розбити відрізок [100; 104], щоб кусковою інтерполяцією першого степеня знайти наближене значення функції $f(x) = \ln x$ з точністю $0,001$?

2. З яким кроком h потрібно розбити відрізок [-1; 1], щоб кусковою-квадратичною інтерполяцією знайти наближене значення функції $f(x) = 3^x$ з точністю $0,001$?

3. Визначити, чи є кубічним сплайном (якщо так, то якого дефекту) функція:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 4x + x^3, \quad x \in [0; 1] \\ -1 - (x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, \quad x \in [1; 2] \\ 2(x-2) - (x-2)^3, \quad x \in [2; 3]. \end{cases}$$

4. Побудувати кусково-лінійний інтерполяційний поліном для даних, поданих у таблиці. Обчислити значення в точці 0,5.

x_k	-3	0	2
$f(x_k)$	1	-3	2

5. Побудувати інтерполяційний кубічний природний сплайн для даних, поданих у таблиці. Обчислити значення в точці 0,5.

x_k	-2	1	2
$f(x_k)$	1	3	0