4. Наближені методи розв'язання систем нелінійних рівнянь

Постановка задачі

Розв'яжемо систему нелінійних рівнянь:

$$\overline{F}(\overline{x}) = \overline{0},$$

де $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $\overline{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$.

Розглянемо основні наближені методи розв'язання систем нелінійних рівнянь:
1) метод простої ітерації;
2) метод Ньютона;
3) модифікований метод Ньютона.

Метод простої ітерації

Метод грунтується на зведенні системи нелінійних рівнянь до вигляду $\overline{x} = \overline{\Phi}(\overline{x})$, де $\overline{\Phi}(\overline{x}) = \overline{x} - C^{-1}\overline{F}(\overline{x})$, де C – невироджена матриця. Початкове наближення обирається довільне. Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{\Phi}(\overline{x}^k). \tag{24}$$

Достатня умова збіжності. Нехай відображення $\overline{\Phi}(\overline{x})$ визначено і неперервно диференційоване в деякій області G і є стискаючим з коефіцієнтом q; $\overline{x}^0 \in G$; $||\overline{\Phi}'(\overline{x}^0)|| \leqslant q$, $0 < q < 1$, де

$$\Phi'(\overline{x}) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_n} \\ .... & .... & ... & .... \\ \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} -$$

матриця Якобі, тоді ітераційний процес (24) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна:

$$||\overline{x}^k - \overline{x}^*|| \leqslant \frac{q^k}{1-q}||\overline{x}^1 - \overline{x}^0||.$$

Умова припинення: $||\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k|| \leqslant \varepsilon$.

Приклад. Знайти розв'язок системи методом простої ітерації з точністю $\varepsilon < 0,2$.

$$\begin{cases} 2x - \sin\dfrac{x-y}{2} = 0; \\ 2y - \cos\dfrac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Зведемо систему до вигляду $\overline{x} = \overline{\Phi}(\overline{x})$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}; \\ y = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}; \end{cases}$$

Оберемо початкове наближення: $x^0 = y^0 = 0$. Перевіримо збіжність в околі $(0;0)^T$:

$$A = \Phi'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} & -\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x+y}{2} & -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x-y}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_0 = A(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$||A_0||_1 = \frac{1}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{є збіжність.}$$

Ітерація 1.

$$x^1 = \frac{1}{2}\sin\frac{x^0 - y^0}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{0-0}{2} = 0;$$

$$y^1 = \frac{1}{2}\cos\frac{x^0 + y^0}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{0+0}{2} = 0,5.$$

Перевіримо умову припинення:

$$||(0;0,5)^T - (0;0)^T||_\infty = ||(0;0,5)^T||_\infty = 0,5 > \varepsilon.$$

Ітерація 2:

$$x^2 = \frac{1}{2}\sin\frac{x^1 - y^1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{0 - 0,5}{2} \approx -0,12;$$

$$y^2 = \frac{1}{2}\cos\frac{x^1 + y^1}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{0 + 0,5}{2} \approx 0,48.$$

Перевіримо умову припинення:

$||(-0,12; 0,48)^T - (0; 0,5)^T|| = ||(-0,12; -0,02)^T||_\infty = 0,12 < \varepsilon$

Отже, розв'язок системи з точністю $0,2$: $(-0,12; 0,48)^T$.

Метод релаксації

Якщо в методі простої ітерації $C \equiv \tau \equiv const$, то отримаємо метод релаксації. Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \tau\overline{F}(\overline{x}^k).$$

Достатня умова збіжності. Якщо $\tau < \dfrac{2}{\max\limits_{\overline{x}} ||F'(\overline{x})||}$, де $F'(\overline{x})$ – матриця Якобі, то ітераційний процес методу релаксації збігається.

Умова припинення: $||\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k|| \leqslant \varepsilon$.

Метод Ньютона

Розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона зводиться до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Алгоритм методу Ньютона. Обираємо початкове наближення $\overline{x}^0$. На кожній ітерації обчислюється матриця Якобі:

$$A_k = \overline{F'}(\overline{x_k}); \qquad \overline{F'}(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^{k} - \overline{z}^{k},$$

де z_k знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A_k \overline{z}^{k} = \overline{F}(\overline{x}^{k}).$$

Умова припинення: $||\overline{z}^{k}|| \leqslant \varepsilon$.

Для того, щоб метод Ньютона збігався, потрібно щоб виконувались умови таких теорем.

Теорема 1. *(про збіжність методу Ньютона)*

Нехай $\delta_a = \{\overline{x} : \|\overline{x} - \overline{x}^*\| < a\}$ та при деяких $a,\ a_1,\ a_2$: $0 < a$, $0 \leqslant a_1, a_2 < \infty$ виконуються умови:

1) $\|(\overline{F}'(\overline{x}))^{-1}\| \leqslant a_1,\ x \in \delta_a$,

2) $\|\overline{F}(\overline{x}_1) - \overline{F}(\overline{x}_2) - \overline{F}'(\overline{x}_2)(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)\| \leqslant a_2 \|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\|^2$, при чому $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \delta_a$.

3) $\overline{x}^0 \in \delta_b,\ b = \min(a, c^{-1}),\ c = a_1 a_2$.

Тоді ітераційний процес методу Ньютона для системи нелінійних рівнянь збігається та має місце оцінка точності:

$$\|\overline{x}^n - \overline{x}^*\| \leqslant c^{-1}(c\|\overline{x}^0 - \overline{x}^*\|)^{2^n}.$$

Теорема 2. *(про збіжність методу Ньютона)*

Якщо в області $G \subset R^n$ фунції $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^2(G)$, $|\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}| \leqslant L$, в точці $\overline{x}^0 \in G$ матриця $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{i,j=1}^{n}$ – невироджена, $\|\left(\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{i,j=1}^{n}\right)^{-1}\| \leqslant M$, $|f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)| \leqslant \delta$ та виконується умова

$$h = M^2 L \delta n^2 \leqslant 1/2,$$

тоді система заданих нелінійних рівнянь має розв'язок в області $\|\overline{x} - \overline{x}^0\|_1 \leqslant \dfrac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}\delta$ та має місце оцінка:

$$\|\overline{x}^n - \overline{x}^*\|_1 \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n - 1}\delta.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом Ньютона з точністю $0,2$.

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2} = 0; \\ y - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Покладемо початкове наближення $x^0 = (0;0)^T$. Умови теореми 2 виконуються. Знайдемо матрицю Якобі:

$$A_k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2_{i,j=1} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x^k - y^k}{2} & \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x^k - y^k}{2} \\ \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x^k + y^k}{2} & 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x^k + y^k}{2} \end{pmatrix};$$

Ітерація 1.

$A_0 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

$$\overline{F^0} = \begin{pmatrix} f_1(x^0, y^0) \\ f_2(x^0, y^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 - 0,5\sin\dfrac{x^0 - y^0}{2} \\ y^0 - 0,5\cos\dfrac{x^0 + y^0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix};$$

Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A_0\overline{z}^0 = \overline{F^0}$:

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$z_2^0 = -0,5; \quad z_1^0 = -0,25z_2^0/0,75 = -0,25(-0,5)/0,75 = 0,17;$

$\overline{x}^1 = \overline{x}^0 - \overline{z}^0 = (0;0)^T - (0,17;-0,5)^T = (-0,17;0,5)^T.$

Перевіримо умову припинення:
$||\overline{z}^0||_\infty = ||(0,17;-0,5)^T||_\infty = 0,5 > \varepsilon.$

Умова не виконалась, переходимо до другої ітерації.

Ітерація 2.

$A_1 = \begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,04 & 1,04 \end{pmatrix};$

$$\overline{F}^1 = \begin{pmatrix} -0,17 - 0,5\sin\dfrac{-0,17-0,5}{2} \\ 0,5 - 0,5\cos\dfrac{-0,17+0,5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,007 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,04 & 1,04 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,007 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \overline{z}^1 = \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0,007 \end{pmatrix};$$

$$\overline{x}^2 = \overline{x}^1 - \overline{z}^1 = \begin{pmatrix} -0,17 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0,007 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,16 \\ 0,49 \end{pmatrix};$$

Перевіримо умову припинення:
$||\overline{z}^1||_\infty = 0,007 \leqslant \varepsilon.$

Отже, розв'язок системи з точністю $0,2$: $(-0,16; 0,49)^T$.

Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес модифікованого методу Ньютона має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^k).$$

Обирається початкове наближення x^0, для якого обчислюється матриця Якобі: $A_0 = \overline{F'}(\overline{x_0})$.
Умова припинення методу: $||\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k|| \leqslant \varepsilon$.

Приклад. Знайти розв'язок системи модифікованим методом Ньютона з точністю $0,2$.

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2} = 0; \\[2ex] y - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Покладемо початкове наближення $\overline{x}^0 = (0;0)^T$. Умови теореми 2 виконуються. Знайдемо матрицю Якобі:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x^k - y^k}{2} & \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x^k - y^k}{2} \\ \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x^k + y^k}{2} & 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x^k + y^k}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4}\cos\frac{0-0}{2} & \frac{1}{4}\cos\frac{0-0}{2} \\ \frac{1}{4}\sin\frac{0+0}{2} & 1 + \frac{1}{4}\sin\frac{0+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1,33 & -0,33 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ітерація 1.

$$\overline{F}^0 = \begin{pmatrix} x^0 - 0,5\sin\dfrac{x^0 - y^0}{2} \\ y^0 - 0,5\cos\dfrac{x^0 + y^0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix};$$

$\overline{x}^1 = \overline{x}^0 - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^0) = (-0,17; 0,5)^T;$

Перевіримо умову припинення:

$||\overline{x}^1 - \overline{x}^0|| = ||(-0,17; 0,5)^T - (0;0)^T||_\infty = 0,5 > \varepsilon.$

Ітерація 2.

$$\overline{F}^1 = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,007 \end{pmatrix};$$

$\overline{x}^2 = \overline{x}^1 - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^1) = (-0,17; 0,49)^T;$

$||\overline{x}^2 - \overline{x}^1|| = ||(-0,17; 0,49)^T - (-0,17; 0,5)^T||_\infty = 0,01 \leqslant \varepsilon.$

Отже, розв'язок системи з точністю $0,2$: $(-0,17; 0,49)^T$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Проробити дві ітерації методом простої ітерації для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin(x - 0,6) - y = 1,6; \\ 3x - \cos y = 0,9. \end{cases}$$

За початкове наближення обрати точку $x_0 = 1,25,\ y_0 = 0$.

2. Проробити дві ітерації методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin(2x - y) - 1,2x = 0,4; \\ 0,8x^2 + 1,5y^2 = 1. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.

3. Проробити дві ітерації модифікованим методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.

4. Проробити дві ітерації методу простої ітерації для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin(x - y) - xy = -1; \\ x^2 - y^2 = 0,75. \end{cases}$$

Перевірити умову збіжності.

5. Проробити дві ітерації методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin x + 2y = 1,6; \\ \cos(y - 1) - x = 1. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.

6. Проробити дві ітерації модифікованим методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} xy - y^2 = 1; \\ x^2 y + y = 5. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.

7. Проробити дві ітерації методу простої ітерації для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 6y + 20 \lg x = -16; \\ 2x + y - 10 \lg y = 4. \end{cases}$$

Перевірити умову збіжності.

8. Проробити дві ітерації методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 + 1,5y^2 + z^2 - 5 = 0; \\ 6xyz - x + 5y + 3z = 0; \\ 5xz - yz - 1 = 0. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.