Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук і кібернетики

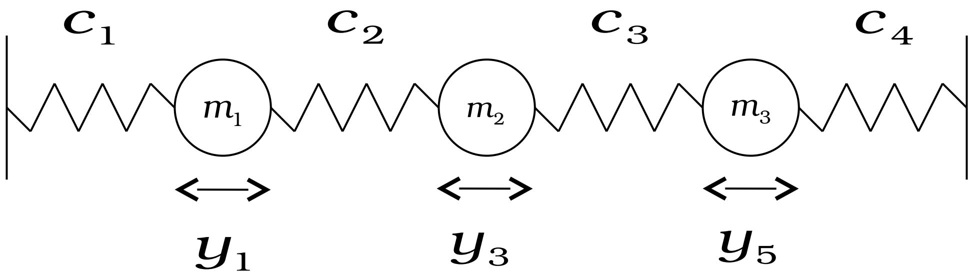
Звіт
з лабораторної роботи №3
з моделювання складних систем
Варіант 4

Виконав:
Студент групи ІПС-31
Міцкевич Костянтин Олександрович

Київ
2025

Мета лабораторної роботи

Для математичної моделі коливання трьох мас m_1, m_2, m_3, які поєднані між собою пружинами з відповідними жорсткостями c_1, c_2, c_3, c_4, і відомої функції спостереження координат моделі $\bar{y}(t),\ t\in[t_0,t_k]$ потрібно оцінити частину невідомих параметрів моделі з використанням функції чутливості.



Постановка задачі

Математична модель коливання трьох мас описується наступною системою

$$\frac{dy}{dt}=\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(c_2+c_1)}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & \frac{-(c_2+c_3)}{m_2} & 0 & \frac{c_3}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c_3}{m_3} & 0 & \frac{-(c_4+c_3)}{m_3} & 0 \end{matrix} * \ y=Ay$$

Показник якості ідентифікації параметрів невідомих параметрів β має вигляд

$$I(\beta)=\int_{t_0}^{t_k}(\bar{y}(t)-y(t))^T(\bar{y}(t)-y(t))dt.$$

Якщо представити вектор невідомих параметрів $\beta=\beta_0+\Delta\beta$, де β_0 – початкове наближення вектора параметрів,

$$\Delta\beta=\left(\int_{t_0}^{t_k}U^T(t)U(t)dt\right)^{-1}\int_{t_0}^{t_k}U^T(t)(\bar{y}(t)-y(t))dt.$$

Матриці чутливості U(t) визначається з наступної матричної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dU(t)}{dt}=\frac{\partial(Ay)}{\partial y^T}U(t)+\frac{\partial(Ay)}{\partial\beta^T},$$
$$U(t_0)=0,\ \beta=\beta_0.$$

В даному випадку $\frac{\partial(Ay)}{\partial y^T}=A$.

Спостереження стану моделі проведені на інтервалі часу $t_0=0$, $t_k=50$, $\Delta t=0.2$.

Для чисельного інтегрування застосувати метод Рунге-Кутта 4-го порядку:

$$\frac{dy}{dt}=f(y,t),\ y(t_0)=y_0,$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),\text{ де}$$

$$k_1=hf(y_n,t_n)$$

$$k_2=hf(y_n+\frac{1}{2}k_1,t_n+\frac{1}{2}h)$$

$$k_3=hf(y_n+\frac{1}{2}k_2,t_n+\frac{1}{2}h).$$

$$k_4=hf(y_n+k_3,t_n+h)$$

$$t_{n+1}=t_n+h$$

Вектор оцінюваних параметрів $\beta = (m_2, c_2, m_3)^T$, початкове наближення $\beta_0 = (21, 0.15, 11)^T$, відомі параметри, $c_1 = 0.14$, $c_2 = 0.3$, $c_4 = 0.15$, $m_1 = 12$ ім'я файлу з спостережуваними даними y4.txt.

Хід роботи

<u>Мова реалізації</u>: Python
<u>Використані бібліотеки</u>: numpy (для роботи з масивами та матрицями); **matplotlib** (для візуалізації результатів); **time, datetime** (для вимірювання часу виконання); **os** (для роботи з файлами)
Опис функцій:
- **read_file(file_name)** — зчитує дані з текстового файлу і повертає їх у вигляді numpy-масиву (транспонований для зручності).
- **finite_diff(y_vec_func, b_vec, b_values, delta)** — обчислює чисельні похідні (градієнти) для функції чутливості методом скінченних різниць.
- **get_u_matr(a_matr, b_matr, u_matr, h)** — інтегрує матрицю чутливості U(t) методом Рунге-Кутта 4-го порядку.
- **get_y(a_matr, y_cur, h)** — інтегрує стан системи y(t) методом Рунге-Кутта 4-го порядку.
- **init_matr(params)** — формує матрицю системи A на основі поточних параметрів моделі.
- **get_model_solution(params, y0, t_points, h)** — обчислює чисельний розв’язок моделі за заданими параметрами та початковим станом.
- **approximate(y_matr, params, beta_symbols, beta_values, eps, h)** — ідентифікація невідомих параметрів за методом функції чутливості; виводить лог виконання з кольорами та показник якості.
- **plot_results(measured_data, model_solution, t_points)** — будує графіки для порівняння виміряних даних та моделі.

Асимптотичні оцінки:
- finite_diff: обчислює числову похідну методом кінцевих різниць.
  Часова складність: O(n · m)
  Просторова складність: O(n · m)
- get_u_matr та get_y: інтегрують матрицю чутливості та стан системи методом Рунге-Кутта 4-го порядку.
  Часова складність: O(1)
  Просторова складність: O(1)
- approximate: основна функція ідентифікації параметрів. Внутрішній цикл виконує числову диференціацію та матричні обчислення для всіх точок даних.
  Часова складність: O(k · T · n · m)
  Просторова складність: O(n · m)
- main: виконує читання даних, виклик approximate та побудову графіків. Загальна складність визначається складністю функції approximate.

1. Початкові параметри
Перед початком ідентифікації задаємо відомі та початкові наближення для невідомих параметрів:

```
Початкові параметри:
  c1: 0.14
  c2: 0.3
  c4: 0.12
  m1: 12
  m2: 21
  c3: 0.15
  m3: 11
```

2. Початок ідентифікації

```
--- Початок ідентифікації параметрів ---
Цільова точність: 1e-06
```

3.1. Процес ітерацій

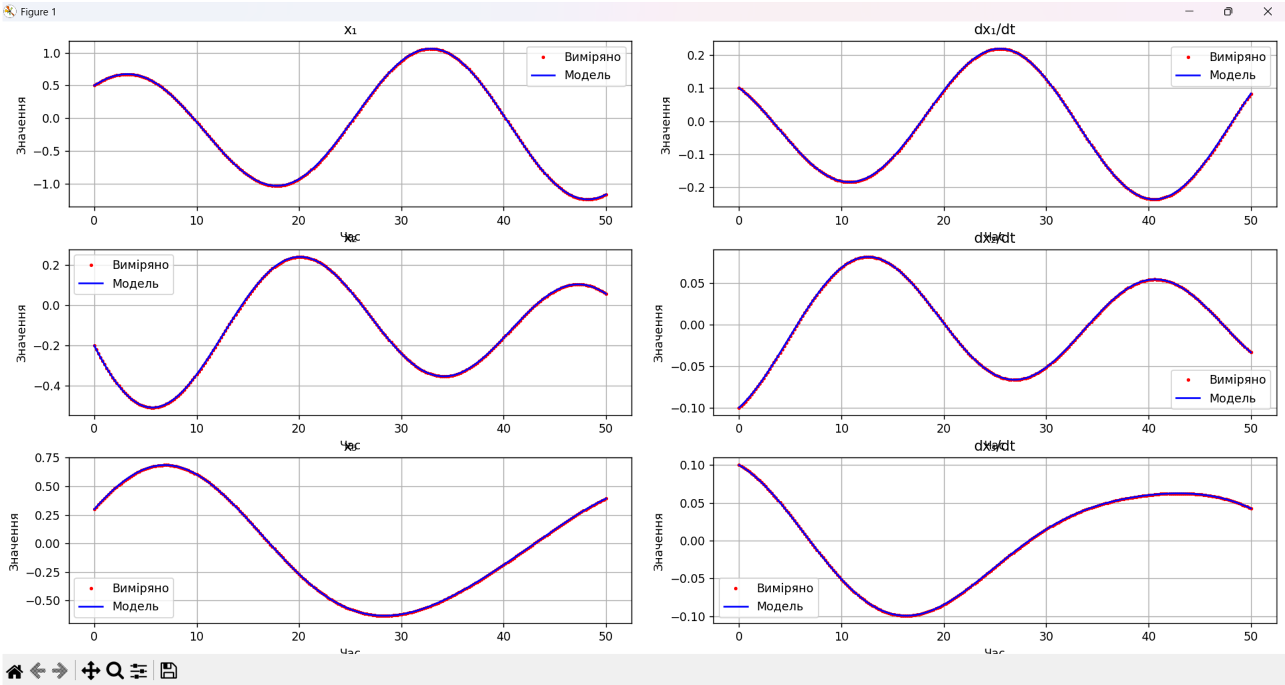
```
Ітерація 1: m2=26.7646, c3=0.2120, m3=16.9910 | Якість=6.533214e+00
Ітерація 2: m2=27.4924, c3=0.1933, m3=17.6421 | Якість=7.915258e-01
Ітерація 3: m2=27.9918, c3=0.1999, m3=17.9958 | Якість=5.924050e-03
Ітерація 4: m2=28.0000, c3=0.2000, m3=18.0001 | Якість=2.001944e-06
Ітерація 5: m2=28.0000, c3=0.2000, m3=18.0000 | Якість=1.128093e-08

--- Ідентифікацію завершено ---
Кількість ітерацій: 5
Час виконання: 0.10 с
Показник якості: 1.128093e-08

Визначені параметри:
  m2 = 27.999972
  c3 = 0.200000
  m3 = 17.999969
```

3.2 Аналіз ітерацій:
- Збіжність алгоритму:
  - Алгоритм зійшовся за 5 ітерацій.
  - Показник якості зменшився з 6.533 до 1.13e-8, що свідчить про високу точність ідентифікації.
- Динаміка показника якості по ітераціях:
  - Ітерація 1: 6.533 → значне покращення
  - Ітерація 2: 0.792
  - Ітерація 3: 0.00592
  - Ітерація 4: 2.00e-6
  - Ітерація 5: 1.13e-8 (фінальне значення)
- Час виконання:
  - 0.10 секунди, що демонструє високу швидкодію алгоритму.

- Висновок:

Алгоритм ідентифікації параметрів показав швидку та стабільну збіжність, дозволяючи точно оцінити невідомі параметри системи.

4.1. Вивід графіків



4.2. Аналіз графіків

1. Положення x_1: Синусоїдальні коливання з амплітудою ±1.0. Модель (синя лінія) ідеально збігається з виміряними даними (червоні точки).
2. Швидкість dx_1/dt: Періодичний рух з амплітудою ±0.2. Відхилення між моделлю та вимірами відсутнє.
3. Положення x_2: Коливання з амплітудою від −0.5 до 0.2 і фазовим зсувом відносно x_1. Модель точно відтворює спостереження.
4. Швидкість dx_2/dt: Амплітуда близько ±0.08, рух плавний, повне співпадіння моделі та вимірів.
5. Положення x_3: Коливання зі складною формою, амплітуда ±0.6. Модель і виміри повністю узгоджуються, підтверджуючи правильність параметрів m_3 і c_3.
6. Швидкість dx_3/dt: Плавний рух з амплітудою до ±0.1. Ідеальне співпадіння моделі та вимірів.

Висновок

У ході роботи було здійснено ідентифікацію невідомих параметрів математичної моделі коливання трьох мас, з'єднаних пружинами. За допомогою методу чутливості та чисельного інтегрування методом Рунге–Кутта 4-го порядку вдалося оцінити параметри m_2, c_3 та m_3 з високою точністю.

Результати ідентифікації показали швидку збіжність алгоритму: за 5 ітерацій показник якості зменшився до 1.13e-8, а розв'язок моделі ідеально відповідає виміряним даним для всіх мас та їх швидкостей. Графічний аналіз підтвердив коректність моделювання та точність відтворення динаміки системи.