6. Інтерполяція

Постановка задачі

Нехай функція $f(x) \in C[a,b]$. Задача інтерполяції полягає у відшуканні невідомих значень функції $f(x)$ за її відомими значеннями $f(x_k)$ в точках $x_k \in [a;b]$, $k = \overline{0,n}$, які називають ***вузлами інтерполяції***. На підставі теореми Вейерштрасса розв'язок шукаємо у вигляді полінома $P_n(x)$, що відповідає ***інтерполяційним умовам***:

$$f(x_k) = P_n(x_k), \quad k = \overline{0,n}.$$

Тоді для знаходження наближеного значення функції в довільній точці $\tilde{x}$:

$$f(\tilde{x}) \approx P_n(\tilde{x}).$$

Через $(n+1)$ вузол інтерполяції можна побудувати єдиний поліном не вище n-го степеня. Інтерполяційний поліном можна побудувати у вигляді:
1) поліному Лагранжа;
2) поліному Ньютона.

Інтерполяційний поліном Лагранжа

Формула для побудови поліному у формі Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)} f(x_k),$$

для зручності її можна переписати в іншому вигляді:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \tag{25}$$

де $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$.

Приклад. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для функції $f(x) = 3^x$, $x \in [-1; 1]$. Використати три вузли. Знайти наближене значення функції в точці 0,5.

Розв'язок. Оскільки необхідно використати 3 вузли, то степінь інтерполяційного поліному буде не вище 2: $n = 2$. Вимоги на вибір вузлів інтерполяції немає, тому візьмемо довільні вузли, наприклад, рівновіддалені з кроком h:

$h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-(-1)}{2} = 1.$

Знайдемо значення функції у вузлах інтерполяції:

k	x_k	$f(x_k)$
0	-1	$1/3$
1	0	1
2	1	3

Застосуємо формулу поліному Лагранжа:

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \\ + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{3}\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + \\ + 1\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 3\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1.$$

Знайдемо наближене значення в точці 0,5:

$L_2(0,5) = \dfrac{2}{3}(0,5)^2 + \dfrac{4}{3}0,5 + 1 = \dfrac{11}{6} \approx 1,833.$

Отже, $f(x) \approx \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 1$; $f(0,5) \approx 1,833$.

Інтерполяційний поліном Ньютона

Розділеною різницею першого порядку називається величина:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i};$$

другого порядку:

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}};$$

(k+1) порядку:

$$f(x_i, ..., x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1}, ..., x_{i+k+1}) - f(x_i, ..., x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}.$$

Таблиця розділених ріниць має вигляд:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & f(x_0;x_1) & f(x_0;x_1;x_2) & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots;x_n) \\
x_1 & f(x_1) & f(x_1;x_2) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & \\
x_2 & f(x_2) & f(x_2;x_3) & f(x_1;x_2;x_3) & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & f(x_{n-1};x_n) & & & \\
x_n & f(x_n) & & & &
\end{array}$$

На підставі цієї таблиці, використовучи перший її рядок, можемо записати ***інтерполянт Ньютона вперед***:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ ... + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}),$$

чи скориставшись останнім рядком, дістанемо ***інтерполяційну формулу Ньютона назад***:

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}; x_n)(x - x_n) + \cdots$$
$$\cdots + f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1).$$

Обирають ту чи іншу формули Ньютона, в залежності від того, де знаходиться точка x (в якій потрібно обчислити значення функції). Якщо ближче до точки x_0, то інтерполяційну формулу Ньютона вперед. Якщо ближче до x_n, то інтерполяційну формулу Ньютона назад.

Для практичного застосування найчастише використовують інтерполяційні поліноми Ньютона, оскільки для його обчислення можна застосовувати схему Горнера.

За точністю зручно слідкувати таким чином: якщо доданки $f(x_o; x_1; \ldots; x_k)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$ в інтерполяційній формулі спадають достатньо швидко, то можна очікувати на гарну точність.

Вузли інтерполяції називаються ***рівновіддаленими***, якщо $x_i - x_{i-1} = h = const$, $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$.

Нехай $f(x_i) = y_i$. Величина $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ називається ***скінченою різницею першого порядку***.

Величина $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ називається ***скінченою різницею другого порядку***.

Величина $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ називається ***скінченою різницею k-го порядку***.

Таблиця скінчених різниць:

$$\begin{array}{llllllll}
y_0 & \Delta y_0 & \Delta^2 y_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta^n y_0 \\
y_1 & \Delta y_1 & \Delta^2 y_1 & \cdots & \cdots & \Delta^{n-1} y_1 & \\
y_2 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_2 & \cdots & \Delta^{n-2} y_{n-2} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \Delta y_{n-1} & & & & & \\
y_n & & & & & &
\end{array}$$

Має місце рівність: $\Delta^k y_i = k! h^k f(x_i; \ldots; x_k)$.

Покладемо $x = x_0 + th$, $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тоді ***інтерполяційні формули Ньютона для рівновіддалених вузлів*** набувають вигляду:

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \cdots (t-n+1),$$

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} t(t+1) \cdots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t+1) \cdots (t+n-1).$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона для функції $f(x) = 3^x$, $x \in [-1; 1]$. Використати три вузли.

Розв'язок. Оскільки необхідно використати 3 вузли, то степінь інтерполяційного поліному буде не вище 2: $n = 2$. Вимоги на вибір вузлів інтерполяції немає, тому візьмемо довільні вузли, наприклад, рівновіддалені з кроком h:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1.$$

Знайдемо значення функції у вузлах і розділені різниці:

k	x_k	$f(x_k)$	р. р. I п.	р. р. II п.
0	-1	$\boxed{1/3}$		
			$\dfrac{1-1/3}{1-0}=\boxed{2/3}$	
1	0	1		$\dfrac{2-2/3}{1-(-1)}=\boxed{2/3}$
			$\dfrac{3-1}{0-(-1)}=2$	
2	1	3		

В таблиці виділені розділені різниці, які необхідні для застосування інтерполяційної формули Ньютона:

$$P_2(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x+1)+\frac{2}{3}(x+1)x=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+1.$$

Отже, $f(x)\approx\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+1.$

Зауваження. За $(n+1)$ вузлом можна побудувати інтерполяційний поліном не вище n-го степеня, тобто степінь може бути нижчим. Для визначення степеня інтерполяційного поліному зручно використовувати розділені різниці.

Приклад. Визначити степінь інтерполяційного многочлена для функції, заданої таблично:

x_i	-1	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	-4	-2	5	16	31	50

Розв'язок.

x	$f(x)$	р.р. I п.	р.р. II п.	р.р. III п.
-1	$\boxed{-4}$			
1	-2	$\boxed{1}$		
2	5	7	$\boxed{2}$	
3	16	11	2	$\boxed{0}$
4	31	15	2	0
5	50	19	2	0

Для знаходження степеня інтерполяційного поліному будувати сам поліном не потрібно, просто знайшли розділені різниці. Оскільки всі розділені різниці 3-го порядку є нулями, то степінь інтерполяційного поліному буде 2. Отже, $n = 2$.

Приклад. Знайти суму скінченного ряду за допомогою інтерполяції:

$$S(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1).$$

Розв'язок. Для розв'язання задачі використаємо формулу інтерполяційного поліному Ньютона. Запишемо вузли, значення функції та знайдемо розділені різниці перших членів ряду:

n	$S(n)$	р.р.I п.	р.р.II п.	р.р.III п.
1	$\boxed{1}$			
		$\boxed{3}$		
2	4		$\boxed{1}$	
		5		$\boxed{0}$
3	9		1	
		7		0
4	16		1	
		9		
5	25			

Оскільки розділені різниці 3-го порядку є нулями, то степінь інтерполяційного поліному буде 2: $n = 2$. В таблиці виділені розділені різниці, необхідні для застосування інтерполяційної формули Ньютона:
$P_2(n) = 1 + 3(n - 1) + 1(n - 1)(n - 2) = n^2$.

Отже, $S(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Похибка інтерполяції

Для оцінки похибки інтерполяції можна використати оцінку залишкового члену у формі Лагранжа:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|, \tag{26}$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, а також у формі Ньютона:

$$|f(x) - L_n(x)| = \omega(x) f(x, x_0, x_1, ..., x_n).$$

Для рівновіддалених вузлів оцінку для залишкового члену для інтерполяційної формули Ньютона вперед подамо у вигляді:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n), \quad t = \frac{x - x_0}{h}$$

та для інтерполяційної формули назад:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t+1)(t+2)\cdots(t+n), \quad t = \frac{x - x_n}{h}$$

Зауваження. Існує зв'язок між розділеною різницею $(n+1)$ порядку та $(n+1)$ похідною:

$$f(x, x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Приклад. Оцінити похибку обчислення функції $f(x) = 3^x$ в точці 0,5, за допомогою інтерполяційного поліному, побудованому за вузлами -1; 0; 1.

Розв'язок. Оскільки 3 вузли, то $n = 2$. Знайдемо оцінку похибки:

$M_3 = \max\limits_{x \in [-1;1]} |(3^x)'''(x)| = 3 \ln^3 3 \approx 3,978;$

$|f(0,5) - P_2(0,5)| \leqslant \dfrac{M_3}{3!} |(0,5 - x_0)(0,5 - x_1)(0,5 - x_2)| =$

$= \dfrac{3,978}{6} |(0,5 + 1)(0,5 - 0)(0,5 - 1)| \approx 0,25.$

Отже, $|f(0,5) - P_2(0,5)| \leqslant 0,25.$

Приклад. З якою точністю ε можна обчислити $3^{0,5}$ за відомими значеннями 3^{-1}, 3^0, 3^1 ?

Розв'язок. За умовою не треба будувати поліном, лише визначити похибку, скористаємось формулою:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|.$$

Відомі значення: 3^{-1}, 3^0, 3^1, значить функція має вигляд: $f(x) = 3^x$, вузли інтерполяції: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Оскіль-

ки 3 вузла, то $n = 2$. Застосовуємо формулу похибки:
$M_3 = \max\limits_{x \in [-1;1]} |3^x \ln^3 3| = 3 \ln^3 3$;
$|3^{0,5} - L_2(0,5)| \leqslant \dfrac{M_3}{3!}|(0,5 - x_0)(0,5 - x_1)(0,5 - x_2)| =$
$= \dfrac{3\ln^3 3}{6}|(0,5+1)(0,5-0)(0,5-1)| \approx 0,2486.$

Отже, значення $3^{0,5}$ можна обчислити з точністю 0,2486.

Оптимальний вибір вузлів

Для зменшення похибки інтерполяції необхідно в якості вузлів взяти нулі поліному Чебишова 1 роду. Для їх визначення використовують рекурентні співвідношення:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$$

чи в явному вигляді

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2}, \quad |x| \geqslant 1,$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leqslant 1.$$

Позначимо $\overline{T_n}(x) = 2^{1-n}T_n(x), \quad |x| \leqslant 1.$

Лема 1. Серед усіх поліномів $P_n(x)$ степеня n із старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1 багаточлен $\overline{T_n}(x)$ найменш відхиляється від нуля на проміжку $[-1, 1]$ та

$$||P_n(x)||_{C[-1,1]} \geqslant ||\overline{T_n}(x)||_{C[-1,1]} = 2^{1-n}$$

Лема 2. Система багаточленів Чебишова$T_n(x)$ є ортогональною на проміжку $[-1;1]$ з ваговою функцією $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(T_k(x), T_m(x))_{L_{2,\rho}[a,b]} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x)T_m(x)dx =$$

$$= \begin{cases} = 0, \text{ якщо } k \neq m \\ \neq 0, \text{ якщо } k = m \end{cases}$$

Нулі полінома Чебишова $x \in [-1, 1]$: $x_k = \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ $k = \overline{0, n-1}$; екстремуми: $x_k = \cos \dfrac{\pi k}{n}$, $\quad k = \overline{0, n}$.

Поліноми Чебишова 1 роду на проміжку [a;b]

За допомогою заміни $x = \frac{1}{2}((b-a)z + (b+a))$ переведемо проміжок $[-1, 1]$ в $[a, b]$. Тоді поліноми Чебишова запишуться таким чином:

$$T_n^{[a;b]}(x) = T_n^{[-1;1]}\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right)$$

Його нулі: $x_k = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2} \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $\quad k = \overline{0, n-1}$

Відповідно поліном із старшим коефіцієнтом 1 набуває вигляду:

$$\overline{T_n}^{[a;b]}(x) = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n} T_n^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right),$$

а його відхилення від нуля подамо у вигляді:

$$||\overline{T_n}^{[a;b]}(x)||_{C[a,b]} = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n}.$$

Для побудови інтерполяційного поліному n-го степеня P_n необхідно в якості вузлів взяти $(n+1)$ корінь поліному Чебишова $(n+1)$-го степеня:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0, n}.$$

При використанні цих вузлів похибка має вигляд:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний поліном за 3 вузлами, які є нулям поліному Чебишова для функції $f(x) = 3^x$, $x \in [-1; 1]$. Обчислити значення в 0,5. Оцінити похибку.

Розв'язок. Оскільки необхідно використати 3 вузли, то степінь інтерполяційного поліному буде не вище 2: $n = 2$. Знайдемо вузли, які є нулями поліному Чебишова:

$x_0 = \cos\dfrac{(2\cdot 0+1)\pi}{2\cdot(2+1)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866;$

$x_1 = \cos\dfrac{(2\cdot 1+1)\pi}{2\cdot(2+1)} = 0;$

$x_2 = \cos\dfrac{(2\cdot 2+1)\pi}{2\cdot(2+1)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,866.$

Знайдемо значення функції у вузлах і розділені різниці:

k	x_k	$f(x_k)$	р.р.I п.	р.р.II п.
0	0.866	$\boxed{2.489}$		
			$\boxed{1.719}$	
1	0	1		$\boxed{0.583}$
			0.709	
2	-0.866	0.386		

В таблиці виділені розділені різниці, необхідні для застосування формули Ньютона за чебишовськими вузлами:
$P_2^{\text{ч}}(x) = 2,489 + 1.719(x-0,866) + 0,583(x-0,866)x \approx$
$\approx 0,583x^2 + 1,214x + 1.$
Знайдемо наближене значення в точці 0,5:
$P_2^{\text{ч}}(0,5) \approx 0,583\cdot 0,5^2 + 1,214\cdot 0,5 + 1 \approx 1,753.$
Оцінимо похибку знайденого значення:

$$|f(0,5) - P_2^{\text{ч}}(0,5)| \leqslant \frac{M_3}{3!}\frac{(1-(-1))^3}{2^{2\cdot 2+1}} \approx 0,166.$$

Отже, $P_2^{\text{ч}}(x) = 0,583x^2 + 1,214x + 1$; $P_2^{\text{ч}}(0,5) \approx 1,753$; $|f(0,5) - P_2^{\text{ч}}(0,5)| \leqslant 0,166.$

Приклад. Скільки чебишовських вузлів інтерполяції необхідно взяти, щоб похибка інтерполяції на проміжку $[0;1]$ для функції $f(x) = \ln(1+x)$ не перевищувала $\varepsilon = 10^{-4}$?
Розв'язок. За умовою не треба будувати поліном, лише визначити похибку. В нас чебишовські вузли, тому похибка:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Знайдемо $(n+1)$ похідну:

$f(x) = \ln(1+x);\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x};\quad f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2};$
$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3};\ \ldots;\quad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}};$
$M_{n+1} = \max\limits_{x\in[0;1]} |f^{(n+1)}(x)| = \dfrac{n!}{(1+0)^{n+1}}.$
Використаємо похибку для чебишовських вузлів:
$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \dfrac{n!}{(n+1)!}\dfrac{(1-0)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)2^{2n+1}}.$

Підберемо n, для якого похибка буде менша за задане ε, почнемо з $n = 4$:
$n = 4$: $\quad |f(x) - L_4(x)| \leqslant \dfrac{1}{5\cdot 2^9} \approx 0,0004 > \varepsilon$ – не виконується;
$n = 5$: $\quad |f(x) - L_5(x)| \leqslant \dfrac{1}{6\cdot 2^{11}} \approx 0,00008$ – виконується.

Оскільки $n = 5$, то необхідно взяти 6 вузлів.

Приклад. На проміжку $[0;1]$ побудувати многочлен Чебишова 4 степеня з 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від нуля.

Розв'язок. Побудуємо многочлен Чебишова 4 степеня на проміжку $[-1;1]$:

$T_0(x) = 1;$

$T_1(x) = x;$

$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1;$

$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x;$

$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3-3x) - (2x^2-1) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$

Скористаємося формулою побудови поліномів Чебишова з коефіцієнтом 1 при старшому степені:

$\overline{T_4}^{[0;1]}(x) = (1-0)^4 \cdot 2^{1-2\cdot 4} T_4^{[-1;1]}\left(\dfrac{2x-(1+0)}{1-0}\right) = \dfrac{1}{2^7}\times$
$\times T_4^{[-1;1]}(2x-1) = \dfrac{1}{2^7}\Big(8(2x-1)^4 - 8(2x-1)^2 + 1\Big) = x^4 - 2x^3 +$
$+\dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{128}.$

Знайдемо відхилення від нуля:

$||\overline{T_4}^{[0;1]}(x)|| = (1-0)^4 \cdot 2^{1-2\cdot 4} = \dfrac{1}{128}$.

Отже, шуканий многочлен: $x^4 - 2x^3 + \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{128}$, його відхилення від нуля: $\dfrac{1}{128}$.

Інтерполяційний поліном Ерміта

Нехай функція $f(x) \in C^{\alpha}[a,b]$ задана своїми значеннями та значеннями своїх похідних до відповідного порядку в кожному вузлі $f^{(j)}(x_i),\ i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,k_i-1}$.

Потрібно побудувати $H_m(x)$, що відповідає інтерполяційним умовам:

$$H_m(x_i) = f(x_i),\ H'_m(x_i) = f'(x_i),\ H''_m(x_i) = f''(x_i),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H_m^{(k_i-1)}(x_i) = f^{(k_i-1)}(x_i),\ i = \overline{0,n},$$

$x_i \neq x_j$, якщо $i \neq j$. Ці умови називають інтерполяціними умовами Ерміта. Числа k_i називають кратністю вузла x_i та $m = \sum\limits_{i=0}^{n} k_i - 1$. Інтерполяціний поліном $H_m(x)$ – єдиний та визначається за формулою:

$$H_m(x) = f(x_1) + f(x_1;x_1)(x-x_1) + f(x_1;x_1;x_1)(x-x_1)^2 + \cdots$$
$$+ \cdots + f(\underbrace{x_1;\ldots;x_1}_{k_1};x_2)(x-x_1)^{k_1} +$$
$$+ f(\underbrace{x_1;\ldots;x_1}_{k_1};x_2;x_2)(x-x_1)^{k_1}(x-x^2) + \cdots +$$
$$+ f(\underbrace{x_1;\cdots;x_1}_{k_1};\cdots;\underbrace{x_n;\cdots;x_n}_{k_n})(x-x_1)^{k_1}\cdots$$
$$\cdots(x-x_{n-1})^{k_{n-1}}(x-x_n)^{k_n-1}.$$

Для побудови інтерполянта Ерміта використовують таблицю розділених різниць:

$$
\begin{array}{ccccc}
f(x_i) & \text{р.р.I п.} & \text{р.р.II п.} & \text{...} & \text{р.р. } n \text{ п.} \\
f(x_1) & & & & \\
 & \dfrac{f'(x_1)}{1!} & & & \\
f(x_1) & & \dfrac{f''(x_1)}{2!} & & \\
 & \dfrac{f'(x_1)}{1!} & & \dots & \\
f(x_1) & & \dfrac{f''(x_1)}{2!} & & \\
 & \dfrac{f'(x_1)}{1!} & & \dots & \\
\dots & & \dots & & f(\underbrace{x_1;\dots;}_{k_1}\dots;\underbrace{x_n;\dots;x_n}_{k_n}) \\
 & \dots & & & \\
f(x_1) & & & & \\
 & f(x_1;x_2) & & & \\
f(x_2) & & & & \\
 & \dots & \dfrac{f''(x_n)}{2!} & & \\
\dots & & & & \\
 & \dfrac{f'(x_n)}{1!} & & & \\
f(x_n) & & & &
\end{array}
$$

Якщо $k_i \equiv 1 \ \forall i$, то інтерполянт Ерміта співпадає з інтерполяційним поліномом Лагранжа: $H_m(x) = L_n(x)$.

Оцінка залишкового члену матиме вигляд:

$$|f(x) - H_m(x)| \leqslant \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|(x-x_0)^{k_0}...(x-x_n)^{k_n}|.$$

Приклад. Побудувати многочлен, що інтерполює дані:
$x_0 = -1$; $f_0 = 0$; $f_0' = 2$;

$x_1 = 0$; $f_1 = 2$; $f_1' = 4$; $f_1'' = -4$;

$x_2 = 1$; $f_2 = -1$; $f_2' = -14$.

Розв'язок. Оскільки в постановці задачі крім значень вузлів є ще їх похідні, то необхідно будувати інтерполяційний поліном Ерміта H_m, де $m = 2+3+2-1 = 6$. Знайдемо розділені різниці кратних вузлів:

$f(-1;-1) = \frac{f'(-1)}{1!} = 2; \quad f(0;0) = \frac{f'(0)}{1!} = 4;$

$f(1;1) = \frac{f'(1)}{1!} = -14; \quad f(0;0;0) = \frac{f''(0)}{2!} = -2.$

Використаємо обчисленні значення в таблиці розділених різниць:

x	$f(x)$	I	II	III	IV	V	VI
-1	0						
-1	0	$\boxed{2}$					
0	2	2	0				
0	2	$\boxed{4}$	2	2			
0	2	$\boxed{4}$	$\boxed{-2}$	-4	-6		
1	-1	-3	-7	-5	-0,5	11/4	
1	-1	$\boxed{-14}$	-11	-4	1	3/4	-1

Інтерполяційний поліном у формі Ньютона має вигляд:
$H_6(x) = 0 + 2(x+1) + 0(x+1)^2 + 2(x+1)^2 x - 6(x+1)^2 x^2 +$
$+\frac{11}{4}(x+1)^2 x^3 - (x+1)^2 x^3 (x-1) = 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2.$

Оцінка точності інтерполяційного процесу

Нехай $f(x) \in C^{(n+1)}$. Постає питання, про величину залишкового члену$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ інтерполяційної формули у точці $x \neq x_i,\ i = \overline{0,n}$. Не зменшуючи загальності, покладемо, що вузли інтерполяції розташовані рівномірно

$$x_i = x_0 + ih,\ h = const,\ i = \overline{0,n}.$$

Оцінка для залишкового члену має вигляд:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

Введемо нову змінну $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тоді $\omega_{n+1}(x)$ набуває вигляду:

$$\omega_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x_0 + th) = h^{n+1}t(t-1)\cdots(t-n).$$

Розглянемо функцію $\varphi(t) = t(t-1)\cdots(t-n)$,

$$\varphi(t+1) = (t+1)t(t-1)\cdots(t+1-n).$$

Мають місце такі властивості:

Функція $\varphi(t)$ є парною чи непарною відносно точки $t = \dfrac{n}{2}$ залежно від непарності чи парності n, це випливає із співвідношення

$$\varphi(t) = (-1)^{n+1}\varphi(n-t),$$

$$\varphi(t+1) = \frac{t+1}{t-n}\varphi(t).$$

Якщо розбити $[0,n]$ на частини

$$[0,1],\ [1,2],\ \ldots,\ [n-1,n],$$

то на кожному з цих відрізків значення $\varphi(t)$ знаходяться множенням відповідного значення на попередньому відрізку на $\dfrac{t+1}{t-n}$. Цей множник завжди від'ємний при $t \in (0,1)$, тому знаки $\varphi(t)$ завжди чергуються при переході від інтервалу до інтервалу.

$$\left|\frac{t+1}{t-n}\right| < 1,\ t \in [0, \frac{n-1}{2}].$$

Таким чином, екстремальні значення $\varphi(t)$ за абсолютною величиною спадатимуть до середини відрізка $[0,n]$ і потім в силу симетрії знову зростати. За межами відрізку $[0,n]$ функція $\varphi(t)$ швидко зростає за абсолюною величиною. Таким же чином поводить себе функція

$$\omega_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x_0 + th) = h^{n+1}\varphi(t).$$

Отже, можна дістати таких висновків:

1) При екстраполюванні слід чекати великої похибки.

2) При інтерполюванні для значень x, які лежать не близько до вузлів інтерполювання, точність буде більшою для середніх відрізків і меншою для крайніх.

3) Вигідно вибирати вузли так, щоб точка x попадала ближче до центру даної конфігурації вузлів, що забезпечить більшу точність.

Збіжність процесу інтерполяції

Введемо вузли інтерполяції:

$$x_0^0$$

$$x_0^1,\ x_1^1$$

$$x_0^2,\ x_1^2,\ x_2^2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_0^n,\ x_1^n,\ \cdots\ x_n^n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Побудуємо інтерполяційні поліноми для функції $f(x) \in C[a,b]$, що задана у цих вузлах

$$x_0^0\ -\ L_0(x)$$

$$x_0^1,\ x_1^1\ -\ L_1(x)$$

$$x_0^2,\ x_1^2,\ x_2^2\ -\ L_2(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_0^n,\ x_1^n,\ \cdots\ x_n^n\ -\ L_n(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Інтерполяційний процес ***збігається в точці*** $x \in [a,b]$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 = .$$

Визначення. Інтерполяційний процес ***збігається рівномірно на відрізку*** $[a,b]$ для заданої послідовності вузлів,

якщо
$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a,b]}|R_n(x)|=0.$$

Властивість збіжності інтерполяційного процесу залежить від вузлів інтерполяції та від гладкості функції, що інтерполюємо.

Теорема Фабера. Для будь-якої послідовності вузлів інтерполяції знайдеться функція (яку інтерполюємо) для якої інтерполяційний процес рівномірно не збігається на заданому відрізку інтерполяції.

Теорема Марцинкевича. Якщо функція $f(x)\in C[a,b]$, то знайдеться така послідовність вузлів інтерполяції, для якої інтерполяційний процес збігається.

Застосування інтерполяції

За допомогою інтерполяції можна знаходити невідомі x^* за відомими значеннями y^*.

1) Пряма інтерполяція

Нехай функція $y=f(x)\in C[a,b]$, що задана таблично $(x_i,y_i),\ i=\overline{0,n}$, немонотонна. Для знаходження x^* застосовуємо такий алгоритм:

За заданою таблицею $(x_i,y_i),\ i=\overline{0,n}$ будуємо інтерполяційний поліном $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$ та розв'язують нелінійне рівняння
$$L_n(x)=y^*.$$

На підставі теореми про середнє:
$$f(x)-f(x^*)=f'(\xi)(x-x^*)$$
одержимо $x-x^*=\dfrac{f(x)-f(x^*)}{f'(\xi)}$. Отже, похибка інтерполяції має вигляд:
$$|x-x^*|\leqslant\frac{M_{n+1}|\omega(x^*)|}{m_1(n+1)!},$$
де $m_1=\min\limits_x|f'(x)|;\quad M_{n+1}=\max\limits_x|f^{n+1}(x)|.$

2) Обернена інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a,b]$, що задана таблично (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$, монотонна. Для знаходження x^* застосовуємо такий алгоритм:

Будуємо за таблицею (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$ таку таблицю: (y_i, x_i), $i = \overline{0,n}$. На підставі останньої таблиці інтерполянт набуває вигляду:

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\omega_{n+1}(y)}{(y - y_i)\omega'_{n+1}(y_i)},$$

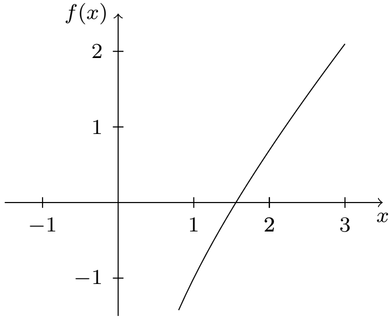
де $\omega_{n+1}(y) = (y - y_0)(y - y_1)\cdots(y - y_n)$ та $L(y^*) \approx x^*$. Залишковий член в цьому випадку утворюється із залишкового члена формули Ньютона, якщо в останньому поміняти місцями x та y, а похідну $f'(x)$ замінити на похідну від оберненої функції. Похибка інтерполяції має вигляд:

$$|x - x^*| \leqslant \frac{\widetilde{M}_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(y^*)|; \quad \widetilde{M}_{n+1} = \max_y \left| \frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}} x(y) \right|.$$

Зауваження. За допомогою інтерполяції можна знаходити корені нелінійних рівнянь, для цього знаходять x^* при $y^* = 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\ln x + x - 2 = 0$, використавши інтерполяційний многочлен 2 степеня. Оцінити похибку.

Розв'язок. Для знаходження кореня спочатку досліджуємо рівняння на кількість коренів та відокремлюємо проміжок, який містить єдиний корінь.



$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(2) = 0.6931 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^* \in [1;2]$$

Для того щоб побудувати інтерполяційний поліном 2 степеня необхідно використати 3 вузла. Застосуємо пряму інтерполяцію, побудуємо інтерполяційний поліном Ньютона:

k	x_k	$f(x_k)$	р.р.I п.	р.р.II п.
0	1	$\boxed{-1}$		
			$\boxed{1,8109}$	
1	1.5	-0,0945		$\boxed{-0,2356}$
			1,5754	
2	2	0,6931		

$P_2(x) = -1 + 1,8109(x-1) - 0,2356(x-1)(x-1,5) =$
$= -0,2356x^2 + 2,3999x - 3,1643;$
Для розв'язання нелінійного рівняння $\ln x + x - 2 = 0$ замінимо праву частину знайденим наближенням (за умовою $y^* = 0$):
$-0,2356x^2 + 2,3999x - 3,1643 = 0;$
$x_1 = 8,63 \notin [1;2]; \quad x_2 = 1,5563.$
Корінь нелінійного рівняння $x^* \approx 1,5563$. Знайдемо оцінку похибки.
$f(x) = \ln x + x - 2;$

$$m_1 = \min_{x\in[1;2]} |f'(x)| = \min_{x\in[1;2]} |\frac{1}{x} + 1| = \frac{3}{2};$$

$$M_3 = \max_{x\in[1;2]} |f'''(x)| = \max_{x\in[1;2]} |\frac{2}{x^3}| = 2;$$

$$|x - 1,5563| \leqslant \frac{M_3|(1,5563 - x_0)(1,5563 - x_1)(1,5563 - x_2)|}{m_1 3!} =$$

$$= \frac{2\cdot 2}{3\cdot 6}\big|(1,5563-1)(1,5563-1.5)(1,5563-2)\big| \approx 0,0031.$$

Отже, корінь рівняння дорівнює 1,5563 з точністю 0,0031.

Розв'язок 2. Розв'яжемо задачу іншим способом. Оскільки $f(x)$ – монотонна, то можна застосувати обернену інтерполяцію, поміняємо місцями x та y. Отримаємо таку таблицю розділених різниць:

k	y_k	x_k	р.р. I п.	р.р. II п.
0	-1	$\boxed{1}$		
			$\boxed{0,5522}$	
1	-0,0945	1.5		$\boxed{0,0488}$
			0,6348	
2	0,6931	2		

$L_2(y) = 1 + 0,5522(y-1) + 0,0488(y-1)(y-1.5) = 0,0488y^2+$
$+0,6056y + 1,5568.$
Необхідно знайти x^*, для якого $y^* = 0$:
$L_2(0) = 0,0488 \cdot 0^2 + 0,6056 \cdot 0 + 1,5568 = 1,5568.$
Отже, корінь нелінійного рівняння $x^* \approx 1,5568$. Знайдемо оцінку похибки, для чого знайдемо $\widetilde{M}_3$ (максимум третьої похідної оберненої функції).

$$\widetilde{f}'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+1/x} = \frac{x}{x+1};$$

$$\widetilde{f}''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x}{(1+x^3)};$$

$$\widetilde{f}'''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right) = \frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x}{(1+x^3)}\right)' = \frac{x-2x^2}{(1+x)^5} = g(x).$$

Для знаходження максимума знайдемо екстремуми:

$$g'(x) = \frac{1-8x+6x^2}{(1+x)^6} = 0; \quad x_1 = 1,1937;\ x_2 = 0,1396 \notin [1;2];$$

$$\left.\begin{array}{l} g(1,1937) = -0,0326 \\ g(1) = -0,03125 \\ g(2) = -0,0247 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \widetilde{M}_3 = 0,0326;$$

$$|x - 1,5568| \leqslant \frac{\widetilde{M}_3}{3!}|\omega(y^*)| = \frac{0,0326}{6}|(0+1)(0+0,0945)\times$$
$$\times(0-0,6931)| \approx 0,00036.$$

Отже, корінь рівняння дорівнює 1,5568 з точністю 0,00036.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Визначити степінь інтерполяційного многочлена для функції, заданої таблично $x_0 = 0$; $y_0 = 5,2$; $x_1 = 1$; $y_1 = 8$; $x_2 = 2$; $y_2 = 10,4$; $x_3 = 3$; $y_3 = 12,4$; $x_4 = 4$; $y_4 = 14$; $x_5 = 5$; $y_5 = 15,2$.

2. За допомогою інтерполяції знайти суму скінченого ряду чисел: $S(n) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 2n$.

3. За допомогою інтерполяції знайти суму скінченого ряду чисел: $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + n^2$.

4. Побудувати інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа, наближено обчислити значення функції $y = \sin(\pi x)$ при $x = 1/3$ та оцінити похибку. Для побудови використати три вузла $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/2$.

5. Побудувати інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа, наближено обчислити значення функції $y = \cos(\pi x)$ при $x = 1/3$ та оцінити похибку. Для побудови використати три вузла $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

6. За допомогою інтерполяції (Ньютона) обчислити $e^{0,15}$ та оцінити похибку, якщо

x	0	0,1	0,2
y	1	1,10517	1,22140

7. За допомогою інтерполяції (Лагранжа) обчислити $e^{0,15}$ та оцінити похибку, якщо

x	0	0,1	0,2
y	1	1,10517	1,22140

8. Яка точність обчислення значення $\ln 100,5$ за допомогою інтерполяції за відомими значення $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$, $\ln 104$.

9. Оцінити похибку інтерполяції функції $f(x) = \ln x$ на проміжку $[1; 2]$ многочленом 4го степеня, побудованим за вузлами Чебишова.

10. Оцінити похибку інтерполяції функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi/3]$ многочленом 3-го степеня, побудованим за вузлами Чебишова.

11. Скільки чебишовських вузлів інтерполяції необхідно вибрати, щоб похибка інтерполяції для функції $f(x) = e^x$ на проміжку [-1; 0] не перевищувала $\varepsilon = 10^{-4}$.

12. Скільки чебишовських вузлів інтерполяції необхідно вибрати, щоб похибка інтерполяції для функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ не перевищувала $\varepsilon = 10^{-4}$.

13. Побудувати інтерполяційний многочлен Ерміта, який задовольняє умовам: $x_0 = 0$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 1$, $x_1 = 1$, $f(1) = 0$, $x_2 = 2$, $f(2) = 1$, $f'(2) = 2$, $f''(2) = 1$, $x_3 = 3$, $f(3) = 5$.

14. Побудувати поліном, який інтерполює функцію, задану таблично: $x_0 = 0$; $y_0 = -1$; $y'_0 = 1$; $x_1 = 1$; $y_1 = 0$; $y'_1 = 2$; $y''_1 = 2$; $y'''_1 = -6$.

15. Функція задається таблично: $x_0 = 0$; $y_0 = 4$; $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $x_2 = 3$; $y_2 = 3$. Знайти значення функції в точці $y = 2$.

16. За допомогою інтерполяції знайти наближений розв‘язок нелінійного рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – функція, задана таблично: $x_0 = 2$; $y_0 = 6$; $x_1 = 3$; $y_1 = 4$; $x_2 = 5$; $y_2 = 3$; $x_3 = 7$; $y_3 = -1$; $x_4 = 8$; $y_4 = -3$.

17. За допомогою інтерполяції знайти наближений розв'язок нелінійного рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – функція, задана таблично: $x_0 = -1$; $y_0 = 3/4$; $x_1 = 0$; $y_1 = -1/4$; $x_2 = 1$; $y_2 = 3/4$.

18. На проміжку [1; 2] побудувати многочлен Чебишова 3го степеня з коефіцієнтом 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від 0.

19. На проміжку [-1; 0] побудувати многочлен Чебишова 3го степеня з коефіцієнтом 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від 0.

20. На проміжку [-1; 2] побудувати многочлен Чебишова 2го степеня з коефіцієнтом 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від 0.