8. Чисельне інтегрування

Постановка задачі

Нехай $a \leqslant x_0 < x_1 < ... < x_n \leqslant b$. Задача чисельного інтегрування полягає в знаходженні наближеного значення інтеграла за допомогою **квадратурної формули**:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k), \tag{27}$$

де $f(x)$ – задана функція, а $\rho(x)$ – деякий ваговий множник, x_k, $k = \overline{0,n}$, – **вузли (абсциси)**, а числа c_k – **коефіцієнти** квадратурної формули.

Залишковим членом квадратурної формули будемо називати величину

$$R(f) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k).$$

Квадратурна формула має **порядок (степінь) точності p** по кроку h, якщо $R(f) = O(h^p)$, де $h = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h_i$; $i = \overline{1,n}$; $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Якщо представити інтеграл у вигляді суми N інтегралів, то отримаємо **складену квадратурну формулу**:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} c_k^{(i)} f(x_k^{(i)}).$$

Алгебраїчним степенем точності квадратурної формули називають найвищий степінь алгебраїчного полінома, для якого квадратурна формула є точною. Тобто, квадратурна формула має алгебраїчний степінь точності m, якщо

$$R(P_i) = 0 \qquad \forall P_i(x), \quad i = \overline{0,m},$$

та $\exists P_{m+1}(x): \quad R(P_{m+1}) \neq 0,$ де P_i – алгебраїчний многочлен степеня i.

Розглянемо квадратурні формули та способи їх побудови:

1) інтерполяційні квадратурні формули;
2) квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності.

Інтерполяційні квадратурні формули

Якщо в якості функції $f(x)$ розглядати інтерполяційний поліном $L_n(x)$:

$$f(x) = L_n(x) + r(x),$$

тоді наближений інтеграл шукається у вигляді:

$$\int\limits_a^b \rho(x) f(x) dx = \int\limits_a^b \rho(x) \left(L_n(x) + r(x)\right) dx = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k) + R(f),$$

де з інтерполяційного поліному Лагранжа (25) коефіцієнт знаходиться за формулою:

$$c_k = \int\limits_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx, \tag{28}$$

а з формули (26) залишковий член квадратурної формули:

$$|R(f)| \leqslant \int\limits_a^b \rho(x) \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)| dx, \tag{29}$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$.

Приклад. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу з $\rho(x) = 1$ за вузлами $a; (3a + b)/4; (a + 3b)/4; b$.
Розв'язок. Позначимо $x_0 = a$, $x_1 = (3a + b)/4$, $x_2 = (a + 3b)/4$, $x_3 = b$. Для зручності обчислень перейдемо до проміжку $[-1; 1]$, скористаємося заміною:

$$t = \frac{2x - (a+b)}{b - a}, \quad dx = \frac{b - a}{2} dt, \quad t \in [-1; 1], \quad x \in [a; b].$$

Маємо $t_0 = -1, \quad t_1 = -1/2, \quad t_2 = 1/2, \quad t_3 = 1,$

$$I = \int\limits_a^b f(x) dx = \frac{b - a}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(t) dt.$$

Інтеграл шукаємо у вигляді:
$I \approx c_0 f(a) + c_1 f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + c_2 f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + c_3 f(b)$,
невідомі коефіцієнти знайдемо з формули (28):

$$c_0 = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1/2)(x-1/2)(x-1)}{(-1+1/2)(-1-1/2)(-1-1)} dx = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{9};$$

$$c_1 = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x-1/2)(x-1)}{(-1/2+1)(-1/2-1/2)(-1/2-1)} dx = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{8}{9};$$

$$c_2 = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x+1/2)(x-1)}{(1/2+1)(1/2+1/2)(1/2-1)} dx = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{8}{9};$$

$$c_3 = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x+1/2)(x-1/2)}{(1+1)(1+1/2)(1-1/2)} dx = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{9}.$$

Отже, $I \approx \frac{b-a}{18}\left(f(a) + 8f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 8f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right)$.

Приклад. Визначити оцінку залишкового члена квадратурної формули інтерполяційного типу, побудованої за вузлами a, $(3a+b)/4$, $(a+3b)/4$, b з ваговим множником $\rho(x) = 1$.
Розв'язок. Скористаємось оцінкою залишкового члена (29):

$$|R(f)| \leqslant \int\limits_{a}^{b} \frac{M_4}{4!} \left|(x-a)(x-\frac{3a+b}{4})(x-\frac{a+3b}{4})(x-b)\right| dx =$$

$$= \frac{b-a}{2} \cdot \frac{M_4}{4!} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \left|(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1)\right| dx =$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M_4}{24} \int\limits_{-1}^{1} \left|(x^2-1)(x^2-\frac{1}{4})\right| dx = \frac{(b-a)^5 M_4}{32 \cdot 24} \cdot \frac{1}{15} =$$

$$= \frac{M_4 (b-a)^5}{11520}.$$

Отже, $|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{11520}$.

Приклад. Визначити алгебраїчний степінь точності квадратурної формули

$$I \approx \frac{b-a}{18}\left(f(a) + 8f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 8f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right).$$

Розв'язок. Квадратурні формули інтерполяційного типу мають алгебраїчний степінь точності принаймні n, в нашому випадку за 4 вузлами можна побудувати інтерполяційний поліном принаймні 3 степеня. Покажемо, що алгебраїчний степінь точності дорівнює принаймні три і перевіримо, чи не є він більшим.

$m = 0; \quad f(x) = P_0 = 1;$

$$\left.\begin{aligned} I &\approx \frac{b-a}{18}(1+8+8+1) = b-a \\ I &= \int_a^b dx = b-a \end{aligned}\right\} \Rightarrow R(P_0) = 0;$$

$m = 1; \quad f(x) = P_1 = x;$

$$\left.\begin{aligned} I &\approx \frac{b-a}{18}\left(a + 8\frac{3a+b}{4} + 8\frac{a+3b}{4} + b\right) = \frac{b^2-a^2}{2} \\ I &= \int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(P_1) = 0;$$

$m = 2; \quad f(x) = P_2 = x^2;$

$$\left.\begin{aligned} I &\approx \frac{b-a}{18}\left(a^2 + 8\left(\frac{3a+b}{4}\right)^2 + 8\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 + b^2\right) = \\ &= \frac{b^3-a^3}{3} \\ I &= \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(P_2) = 0;$$

$m = 3; \quad f(x) = P_3 = x^3;$

$$\left.\begin{aligned} &I \approx \frac{b-a}{18}\left(a^3 + 8\left(\frac{3a+b}{4}\right)^3 + 8\left(\frac{a+3b}{4}\right)^3 + b^3\right) = \\ &= \frac{b^4-a^4}{4} \\ &I = \int\limits_a^b x^3 dx = \frac{b^4-a^4}{4} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow R(P_3) = 0;$$

$m = 4; \quad f(x) = P_4 = x^4;$

$$\left.\begin{aligned} &I \approx \frac{b-a}{18}\left(a^4 + 8\left(\frac{3a+b}{4}\right)^4 + 8\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 + b^4\right) = \\ &\qquad = \frac{1}{96}\left(19b^5 + ab^4 + 2a^3b^2 - 2a^2b^3 - a^4b - 19a^5\right) \\ &I = \int\limits_a^b x^4 dx = \frac{b^5-a^5}{5} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow R(P_4) \neq 0.$$

Отже, алгебраїчний степінь точності дорівнює трьом.

Формули Ньютона-Котеса

Якщо у формулі (27) вузли $x_k,\ k = \overline{0, n}$, вибрати рівновіддаленими, то отримаємо квадратурну **формулу Ньютона-Котеса**. Оберемо крок $h = (b-a)/n$ та покладемо $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{1, n-1}$, $\rho(x) = 1$.

Зауваження. Оскільки складена формула отримується додаванням інтегралів, а при цьому абсолютні похибки додаються, то степінь точності формули Ньютона-Котеса на одному проміжку на порядок вищий, ніж у її складеного аналогу.

Зауваження. Алгебраїчний степінь точності формули Ньютона-Котеса на одиницю менший порядку точності відповідної складеної формули.

Зупинимося на деяких часткових випадках формули Ньютона-Котеса.

Формула лівих прямокутників на $[a;b]$ має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a).$$

Залишковий член квадратурної формули лівих прямокутників має вигляд:

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2}, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Порядок точності формули лівих прямокутників дорівнює 2.

Складена формула лівих прямокутників має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})),$$

тоді її залишковий член:

$$|R(f)| \leqslant \frac{nM_1h^2}{2} = \frac{M_1(b-a)h}{2}.$$

Порядок точності складеної квадратурної формули лівих прямокутників дорівнює 1.

Алгебраїчний степінь точності формули лівих прямокутників дорівнює 0.

Формула правих прямокутників будується аналогічно формулі лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b), \qquad |R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)),$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)h}{2}.$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули правих прямокутників, так саме як і лівих, дорівнює 0, порядок точності складеної формули – 1, а формули по одному проміжку – 2.

Формула середніх прямокутників з оцінкою залишкових членів має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad |R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\Big(f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{1}{2}})\Big), \tag{30}$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)h^2}{24}. \tag{31}$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 1. Порядок точності складеної формули середніх прямокутників – 2, а на одному проміжку – 3.

Приклад. Наближено обчислити інтеграл за допомогою формули середніх прямокутників з $n = 4$:

$$I = \int_{-1}^{3} \frac{dx}{2+x}.$$

Розв'язок. Для $n = 4$ складемо таблицю значень.
$h = (b-a)/n = (3+1)/4 = 1.$

k	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x_k	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x_k)$	1	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	1/4	2/9	1/5

За формулою (30)

$$I \approx 1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \right) \approx 1,5746.$$

Отже, $I \approx 1,5746$.

Формула трапецій з оцінкою залишкових членів має вигляд:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a), \qquad |R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12}.$$

Тоді складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right), \tag{32}$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)h^2}{12}. \tag{33}$$

Алгебраїчний степінь та порядок точності співпадає з формулою середніх прямокутників.

Приклад. Обчислити інтеграл за допомогою формули трапецій з точністю $\varepsilon = 0,25$, використавши оцінку залишкових членів

$$I = \int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{2+x}.$$

Розв'язок. З формули (33):

$h \leqslant \sqrt{\dfrac{12\varepsilon}{M_2(b-a)}}$,

знайдемо значення M_2 та отримаємо оцінку для кроку:

$M_2 = \max\limits_{x\in[-1;3]} \left|\dfrac{2}{(2+x)^3}\right| = 2; \qquad h \leqslant \sqrt{\dfrac{12\cdot 0,25}{2(3+1)}} \approx 0,6124.$

Для зручності обчислень покладемо $h = 0,5$ і складемо таблицю значень:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x_k)$	1	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	1/4	2/9	1/5

За формулою (32)

$$I \approx 0,5\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{1}{10}\right) \approx 1,629.$$

Формула Сімпсона ще має назву формули парабол:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))\right),$$

оцінка залишкового члена

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{2880}.$$

Складена формула Сімпсона з оцінкою залишкового члена має вигляд:

$$I \approx \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right), \qquad (34)$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)h^4}{2880}.$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 3. Порядок точності складеної формули – 4, а по одному проміжку – 5.

Зауваження. Інколи, при застосуванні складеної квадратурної формули Сімпсона, для зручності використовують цілу нумерацію вузлів:

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right), \quad (35)$$

Похибка при цьому має вигляд

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)h^4}{180}.$$

Правило Рунге

Величина похибки чисельного інтегрування залежить від кроку h та від гладкості підінтегральної функції $f(x)$. Наприклад, величина M_i, яка є складовою оцінки залишкових членів, може сильно змінюватись від точки до точки та невідома заздалегідь. Якщо величина похибки велика, то її можна зменшити за рахунок зменшення кроку, але для цього необхідно вміти оцінювати похибку апостеріорно, наприклад, методом Рунге.

Нехай I_h та $I_{h/2}$ – інтеграли, обчислені з кроком h та $h/2$ відповідно, за допомогою складеної квадратурної формули, яка має порядок точності p, тоді апостеріорна оцінка похибки інтеграла $I_{h/2}$ має вигляд:

$$|I - I_{\frac{h}{2}}| \approx \frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1}. \qquad (36)$$

Приклад. Обчислити інтеграл за формулою Сімпсона, використавши правило Рунге з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$

$$I = \int\limits_1^3 \ln x dx.$$

Розв'язок. Покладем $n = 2$, тоді $h = (b-a)/n = (3-1)/2 = 1$. Скористаємось формулою (35):

$I_h \approx \frac{1}{3}\Big(\ln 1 + 4\ln 2 + \ln 3\Big) \approx 1,29040.$

Обчислимо з двічі меншим кроком $0,5$:

$I_{\frac{h}{2}} \approx \frac{0,5}{3}\Big(\ln 1 + 4(\ln 1,5 + \ln 2,5) + 2\ln 2 + \ln 3\Big) \approx 1,29532.$

За формулою (36) обчислимо точність останнього знайденого інтеграла, врахуємо, що порядок точності складеної квадратурної формули Сімпсона дорівнює 4:

$|I - I_{\frac{h}{2}}| \leqslant \frac{|1,29040 - 1,29532|}{2^4 - 1} \approx 0,00033 > \varepsilon,$

тому обчислимо з кроком $0,25$:

$I_{\frac{h}{4}} \approx \frac{0,25}{3}\Big(\ln 1 + 4(\ln 1,25 + \ln 1,75 + \ln 2,25 + \ln 2,75) + 2(\ln 1,5 +$
$+ \ln 2 + \ln 2,5) + \ln 3\Big) \approx 1,29580.$

$|I - I_{\frac{h}{4}}| \leqslant \frac{|1,29532 - 1,29580|}{2^4 - 1} \approx 0,000032 \leqslant \varepsilon.$

Отже, $I \approx 1,2958$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу з $\rho(x) = 1$ за вузлами $a; (2a+b)/3; (a+2b)/3; b$. Визначити алгебраїчний степінь точності та оцінку залишкового члена отриманої формули.

2. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу на проміжку $[0;1]$ з ваговим множником $\rho(x) = \sqrt{x}$ за вузлами 0 та 1. Визначити оцінку залишкового члена отриманої формули.

3. Визначити алгебраїчний степінь точності квадратурної формули $I \approx \dfrac{\pi}{3}\Big(f(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) + f(0) + f(\dfrac{\sqrt{3}}{2})\Big)$, визначеної на проміжку $[-1;1]$ з ваговим множником $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Знайти наближене значення числа π з трьома правильними значущими цифрами за його інтегральним представленням $\pi = \int\limits_0^1 \dfrac{4}{1+x^2}dx$ за допомогою квадратурних формули середніх прямокутників. Яку кількість значень підінтегральної функції необхідно використати?

5. При $n = 10$ за формулою трапецій наближено обчислити значення сталої Каталана $G = \int\limits_0^1 \dfrac{\arctan x}{x}dx$.

6. Наближено обчислити повний еліптичний інтеграл другого роду $E\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 x dx}$ з точністю 0,05 за формулою середніх прямокутників.

7. На скільки частин необхідно розбити відрізок $[0;1]$, щоб обчислити значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ при $x = 1$ з похибкою $\varepsilon \leqslant 10^{-6}$ за формулою Сімпсона ?

8. Скільки значень підінтегральної функції необхідно знати, щоб наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{x}dx$ за формулою трапецій з точністю $\varepsilon = 0,01$.