1.

$x^2 - 2\pi x + \ln 3 = 0$

$\Delta(\pi^*) = 0.5 \cdot 10^{-2}$, $\Delta(\ln 3^*) = 0.5 \cdot 10^{-2}$

$D = (2\pi)^2 - 4\ln 3 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{2\pi \pm \sqrt{(2\pi)^2 - 4\ln 3}}{2} = \pi \pm \sqrt{\pi^2 - \ln 3}$$

НЕХАЙ $\ln 3 = a$:

$f(\pi, a) = \pi + \sqrt{\pi^2 - a}$ – БІЛЬШИЙ КОРІНЬ

$$\frac{\partial f}{\partial \pi} = 1 + \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 - a}} \qquad \frac{\partial f}{\partial \pi} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi^2 - a}}$$

ПОРАХУЄМО ПОХІДНІ

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \pi}\right| = \left|1 + \frac{3.1416}{2.962}\right| \approx 2.061, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \left|-\frac{1}{2 \cdot 2.962}\right| = 0.1687$$

$$\Delta(x) = \left|\frac{\partial f}{\partial \pi}\right| \Delta(\pi) + \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta(a) =$$

$$\approx 2.061 \cdot 0.005 + 0.1687 \cdot 0.005 \approx 0.010305 +$$

$$+ 0.0008435 \approx 0.0111$$

НАБЛИЖЕНЕ ЗНАЧЕННЯ КОРЕНЯ: $x = 3.1416 + 2.962 =$
$= 6.1036$

ВІДНОСНА ПОХИБКА $\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x|} 100\% = \frac{0.0111}{6.1036} 100\% \approx$
$\approx 0.182\%$

В-ДЬ: $\Delta(x) \approx 0.011$, $\delta(x) = 0.18\%$

2.

$x_1=-5.1627$

x^4+4x^3-160 рівняння має 2 корених:

$x_2=2.8575$

$\varepsilon=0.001$

$f(-6)=(-6)^4+4(-6)^3-160=272>0$

$f(-5)=(-5)^4+4(-5)^3-160=-35$. Отже $x^*\in[-6,-5]$

Знайдемо m_1 і M_1

$f'(x)=4x^3+12x^2$, $m_1=\min\limits_{x\in[-6,-5]}|f'(x)|=|f'(-5)|=200$

$M_1=\max\limits_{x\in[-6,-5]}|f'(x)|=|f'(-6)|=432$

Оптимальний параметр: $\tau_0=\frac{2}{M_1+m_1}=\frac{2}{432+200}\approx0.00316$

Оскільки $f'(x)<0$, то $x_{n+1}=x_n+\tau_0 f(x_n)$

Беремо правий кінець відрізка $x_0=-5$

Ітерація 1:

$x_1=x_0+\tau_0 f(x_0)=-5+\frac{1}{316}\cdot(-35)\approx-5.1108$

$|x_1-x_0|=|-5.1108-(-5)|=0.1108>\varepsilon$ - не виконується

Ітерація 2

$x_2=x_1+\tau_0 f(x_1)=-5.1108+\frac{1}{316}\cdot(-11.72)\approx-5.1479$

$|x_2-x_1|=|-5.1479-(-5.1108)|=0.0371>\varepsilon$ - невик.

Умова збіжності:

$\frac{2}{M_1}\approx0.00463$, $0<\tau_0<\frac{1}{316}\approx0.00316<0.00463=\frac{2}{M_1}$

Умова збіжності виконується

3 $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & -b & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$

За критерієм збіжності:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ \lambda a & -\lambda b & a \\ 0 & \lambda a & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad det = 2a^2\lambda^2 - b\lambda^3 = 0$$

$2a^2\lambda^2 - b\lambda^3 = 0$

$\lambda^2(2a^2 - b\lambda) = 0$

$\lambda^2 = 0$ - ігноруємо $\qquad 2a^2 - b\lambda = 0$

$2a^2 = b\lambda$

$\lambda = \frac{2a^2}{b}$

Для збіжності потрібно $|\lambda| < 1$, отже

$\left|\frac{2a^2}{b}\right| < 1$ - область збіжності

4. $f(x) = e^{1+x}$, $x \in [1, 4]$, $\varepsilon = 10^{-3}$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Знайдемо $n+1$ похідну і M_{n+1}:

$f'(x) = e^{1+x}$, $f''(x) = e^{1+x}$, ... $f^{(k)}(x) = e^{1+x}$ $\forall k$

Тому $f^{(n+1)}(x) = e^{1+x}$, $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [1,4]} |e^{1+x}| = e^5$

Оцінка похибки

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{e^5}{(n+1)!} \cdot \frac{5^{n+1}}{2^{2n+1}} \leq 10^{-3}$$

Потрібно підібрати найменше n, для якого похибка виконується:

При $n = 8$ похибка $\approx 6 \cdot 10^{-3} > 10^{-3}$ – не підходить

При $n = 9$ $\approx 7.6 \cdot 10^{-4} < 10^{-3}$ – підходить,

отже мінімальне $n = 9$.

Тоді число чебишовських вузлів $n+1 = 10$

5. $x_0 = -4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, проміжок – $[-4, 1]$

$p(x) = x$

$$\int_{-4}^{1} x f(x)\,dx \approx C_0 f(-4) + C_1 f(-1) + C_2 (1)$$

Обчислимо $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) =$
$= (x+4)(x+1)(x-1)$

$w'(x_0) = w'(-4) = (-4+1)(-4-1) = 15$
$w'(x_1) = w'(-1) = (-1+4)(-1-1) = -6$
$w'(x_2) = w'(1) = (1+4)(1+1) = 10$

Знайдемо коефіцієнти C_1, C_2, C_3:

$$C_0 = \int_{-4}^{1} x \cdot \frac{(x+1)(x-1)\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)} \cdot 15}\,dx = \frac{1}{15}\int_{-4}^{1} (x^3 - x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{1} = 3.75$$

$$C_1 = \int_{-4}^{1} x \cdot \frac{(x+4)(x-1)}{-6}\,dx = -\frac{1}{6}\int_{-4}^{1} (x^3 + 3x^2 - 4)\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4} + x^3 - 4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} = -5\frac{5}{24} \approx -5.21$$

$$C_2 = \int_{-4}^{1} x \cdot \frac{(x+4)(x+1)}{10}\,dx = \frac{1}{10}\int_{-4}^{1} (x^3 + 5x^2 + 4x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_{-4}^{1} \approx -2.43$$

В-дь: Квадратурна формула: $\int_{-4}^{1} x f(x)\,dx \approx$
$\approx 3.75 f(-4) - 5.21 f(-1) - 2.41 f(1)$