10. Наближені методи розв'язання задачі Коші

Постановка задачі

Розглянемо постановку задачі Коші на прикладі звичайного диференційного рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f(x, u); \\ u(x_0) = u_0. \end{cases}$$

Розглянемо основні наближені методи розв'язання задачі Коші:

1) чисельні:
   – метод Ейлера,
   – модифікований метод Ейлера,
   – метод Ейлера-Коші,
   – методи Рунге-Кутта.
2) аналітичні:
   – метод послідовного диференціювання,
   – метод послідовних наближень (Пікара);

Нехай h – сталий крок: $x_n = nh$, $n = 0, 1, ...$, тоді для чисельних методів **глобальною похибкою** методу називають

$$z_n = u(x_n) - y_n,$$

де $u(x)$ – точний розв'язок, а $y(x)$ – наближений.

Локальною похибкою чисельного методу називають величину

$$R(h) = u(x_{n+1}) - y_{n+1},$$

за умовою, що $u(x_n) = y_n$.

Порядком точності методу називають число $p > 0$ при $h \to 0$, для якого

$$|u(x_n) - y_n| = O(h^p) \quad \text{або} \quad R(h) = O(h^{p+1}).$$

Нев'язка (похибка апроксимації) $\Psi(h)$ – це похибка при підстановці точного розв'язку в різницеве рівняння.

Метод Ейлера

Для задачі Коші із звичайним диференційним рівнянням першого порядку

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

можна використати чисельний метод Ейлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

який має порядок глобальної похибки та нев'язки – 1, а порядок локальної похибки – 2.

Приклад. Знайти локальну та глобальну похибки методу Ейлера.

Розв'язок. Для знаходження локальної похибки скористаємося її означенням.

$R(h) = u(x_{n+1}) - y_{n+1} = u(x_n + h) - (y_n + hf(x_n, y_n)) = u(x_n) +$
$+ u'(x_n)(x_n + h - x_n) + O(h^2) - u(x_n) - hf(x_n, u(x_n)) = O(h^2).$

Оскільки $R(h) = O(h^2) = O(h^{p+1})$, то $p = 1$, тому глобальна похибка $|u(x_n) - y_n| = O(h^p) = O(h)$.

Отже, локальна похибка методу Ейлера дорівнює $O(h^2)$, а глобальна – $O(h)$.

Приклад. Знайти нев'язку методу Ейлера.

Розв'язок. Для знаходження нев'язки запишемо різницеве рівняння методу Ейлера:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$$

Підставивши в нього точний розв'язок $u(x)$ знайдемо нев'язку:

$$\Psi(h) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - f(x_n, u(x_n)) = \frac{1}{h}\Big(u(x_n + h) - u(x_n)\Big) -$$
$$-f\Big(x_n, u(x_n)\Big) = \frac{1}{h}\Big(u(x_n) + u'(x_n)h + O(h^2) - u(x_n)\Big) -$$
$$-f\Big(x_n, u(x_n)\Big) = u'(x_n) - f\Big(x_n, u(x_n)\Big) + O(h) = O(h).$$

Отже, нев'язка методу Ейлера – $O(h)$.

Модифікований метод Ейлера

Модифікований метод Ейлера також застосовується для знаходження наближеного чисельного розв'язку звичайного диференційного рівняння першого порядку:

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2}; \qquad y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n);$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+\frac{1}{2}}; y_{n+\frac{1}{2}}).$$

Метод є чисельним, має порядок точності $p = 2$, глобальну похибку та нев'язку $O(h^2)$, локальну похибку – $O(h^3)$.

Приклад. Розв'язати задачу Коші модифікованим методом Ейлера:

$$\begin{cases} y''' = xy + y'y''; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 1; \\ y''(1) = 0. \end{cases}$$

Знайти розв'язок $y(x)$ на проміжку $[1; 5]$ з кроком 2.

Розв'язок. Необхідно знайти розв'язок диференційного рівняння третього порядку, зведемо його до системи диференційних рівнянь, щоб можна було застосувати модифікований метод Ейлера.

Зробимо заміну: $u^1 = y; \quad u^2 = y'; \quad u^3 = y''.$

Врахуємо $x_0 = 1$, тому $u_0 = 2$; $u_0' = 2$; $u_0'' = 2$.

$$\begin{cases} y''' = xy + y'y''; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 1; \\ y''(1) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} (u^3)' = xu^1 + u^2u^3; \\ u_0^1 = 2; \\ u_0^2 = 1; \\ u_0^3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки задається крок $h = 2$, а $x_0 = 1$, тому $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, необхідно знайти u_1^1, u_2^1.

Для знаходження u_1^1, спочатку знайдемо значення в точці $x_{0.5} = x_0 + h/2 = 1 + 2/2 = 2$:

$u_{0.5}^1 = u_0^1 + (h/2)u_0^2 = 2 + (2/2) \cdot 1 = 3;$

$u_{0.5}^2 = u_0^2 + (h/2)u_0^3 = 1 + (2/2) \cdot 0 = 1;$

$u_{0.5}^3 = u_0^3 + (h/2)(x_0 u_0^1 + u_0^2 u_0^3) = 0 + (2/2)(1 \cdot 2 + 1 \cdot 0) = 2;$
$u_1^1 = u_0^1 + h(u_{0.5}^2) = 2 + 2 \cdot 1 = 4.$
Знайдемо u_2^1:
$u_1^2 = u_0^2 + h(u_{0.5}^3) = 1 + 2 \cdot 2 = 5;$
$u_1^3 = u_0^3 + h(x_0 u_0^1 + u_0^2 u_0^3) = 0 + 2(1 \cdot 2 + 1 \cdot 0) = 4;$
$u_{1.5}^2 = u_1^2 + \dfrac{h}{2} u_1^3 = 5 + \dfrac{2}{2} \cdot 4 = 9;$
$u_2^1 = u_1^1 + h(u_{1.5}^2) = 4 + 2 \cdot 9 = 22.$
Вертаємося до початкових позначень задачі: $u_1^1 = y(3) = 4$, $u_2^1 = y(5) = 22$.

Отже, $y(3) = 4$, $y(5) = 22$.

Метод Ейлера-Коші

Ще одна модифікація методу Ейлера є методом типу "предиктор-коректор":

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n);$$

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n; y_n) + f(x_{n+1}; \tilde{y}_{n+1})}{2}.$$

Метод також є чисельним, має порядок точності $p = 2$, глобальну похибку та нев'язку $O(h^2)$, локальну похибку – $O(h^3)$.

Методи Рунге-Кутта

Методи Рунге-Кутта є m-стадійними (етапними), їх загальний вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m} p_i k_i(h)$$

$k_i(h) = hf(\xi_i; \eta_i)$; $\quad i = \overline{1, m}$; $\quad \xi_i = x_n + \alpha_i h$; $\quad \alpha_1 = 0$;
$\eta_i = y_n + \beta_{i_1} k_1 + \beta_{i_2} k_2 + ... + \beta_{i_{i-1}} k_{i-1}$.

Для $m = \overline{1, 4}$, якщо крок сталий, то порядок глобальної похибки методу m, а локальної – $(m+1)$. Для $m > 4$ кількість коефіцієнтів із глобальною похибкою не співпадає.

1-етапний метод Рунге-Кутта

Якщо $m = 1$, то метод співпадає із методом Ейлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n; y_n).$$

2-етапні методи Рунге-Кутта

В залежності від коефіцієнтів α, β, p двоетапні методи Рунге-Кутта можуть приймати різний вигляд, наприклад:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2;$$

$$k_1 = hf(x_n; y_n); \qquad k_2 = hf(x_n + h; y_n + k_1);$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2;$$

$$k_1 = hf(x_n; y_n); \qquad k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2});$$

3-етапні методи Рунге-Кутта

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3); \qquad k_1 = hf(x_n; y_n);$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2}); \qquad k_3 = hf(x_n + h; y_n - k_1 + 2k_2);$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3); \qquad k_1 = hf(x_n; y_n);$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{3}; y_n + \frac{k_1}{3}); \qquad k_3 = hf(x_n + \frac{2h}{3}; y_n + \frac{2k_2}{3}).$$

4-етапні методи Рунге-Кутта

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

$$k_1 = hf(x_n; y_n); \qquad k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2});$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_2}{2}); \qquad k_4 = hf(x_n + h; y_n + k_3);$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4);$$

$$k_1 = hf(x_n; y_n); \qquad k_2 = hf(x_n + \frac{h}{4}; y_n + \frac{k_1}{4});$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_2}{2}); \qquad k_4 = hf(x_n + h; y_n + k_1 - 2k_2 + 2k_3).$$

Приклад. За допомогою методу Рунге Кутта 4 порядку точності знайти значення в точці $y(0,1)$, крок $h = 0,1$

$$\begin{cases} y' = x + y; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Четвертий порядок точності мають 4-етапні методи Рунге Кутта.

За умовою $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $h = 0,1$; $y(0,1) = y_1$.

$k_1 = hf(x_0; y_0) = h(x_0 + y_0) = 0.1(0 + 1) = 0,1;$

$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1}{2}) = h(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0,1(0 + \frac{0,1}{2} +$
$+1 + \frac{0.1}{2}) = 0,11;$

$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2}{2}) = h(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0,1(0 + \frac{0,1}{2} +$
$+1 + \frac{0,11}{2}) = 0,1105;$

$k_4 = hf(x_0 + h; y_0 + k_3) = h(x_0 + h + y_0 + k_3) = 0,1(0 + 0,1+$
$+1 + 0,1105) = 0,12105;$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105+$
$+0,12105) = 1,11034.$

Отже, $y(0,1) \approx 1,11034$.

Метод послідовного диференціювання

Для знаходження наближеного розв'язку в аналітичному вигляді використовують метод послідовного диференціювання. Його можна використовувати для диференційних рівнянь довільного порядку.

Розглянемо задачу Коші із звичайним диференційним рівнянням n-го порядку:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}); \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

наближений аналітичний розв'язок шукають у вигляді розкладу у ряд Тейлора:

$$y(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{y_0^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k.$$

Приклад. Знайти перші чотири члени розкладу в степеневий ряд розв'язку рівняння

$$\begin{cases} y'' + 0,1(y')^2 + (1 + 0,1x)y = 0; \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Розв'язок. Застосуємо метод послідовного диференціювання, розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y_0'''}{3!}(x - x_0)^3.$$

За умовою $y(0) = 1$ і $y'(0) = 2$, тому $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0' = 2$;

$$y(x) = 1 + 2x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{3!}x^3.$$

Знайдемо y_0'', врахуємо, що $y_0'' = y''(x_0) = y''(0)$. Оскільки за умовою $y'' + 0,1(y')^2 + (1 + 0,1x)y = 0$, то

$$y'' = -0,1(y')^2 - (1 + 0,1x)y$$

$$y_0'' = -0,1(y_0')^2 - (1+0,1x_0)y_0 = -0,1\cdot 2^2 - (1+0,1\cdot 0)\cdot 1 = -1,4;$$

Знайдемо y_0''':

$$y''' = (-0,1(y')^2 - (1+0,1x)y)' = -0,1\cdot 2y'y'' - y' - 0,1y - 0,1xy';$$

$$y_0''' = -0,1\cdot 2y_0'y_0'' - y_0' - 0,1y_0 - 0,1x_0y_0' = -0,1\cdot 2\cdot 2(-1,4) - -2 - 0,1\cdot 1 - 0.1\cdot 0\cdot 2 = -1,54.$$

Підставляємо знайдені значення в ряд Тейлора:

$y(x) = 1 + 2x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{3!}x^3 = 1 + 2x - \frac{1,4}{2}x^2 - \frac{1,54}{6}x^3 =$
$= 1 + 2x - 0,7x^2 - 0,25x^3.$

Отже, наближений розв'язок: $y(x) = 1+2x-0,7x^2-0,25x^3$.

Метод послідовних наближень (Пікара)

Для задачі Коші із звичайним диференційним рівнянням першого порядку

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

шукається наближений аналітичний розв'язок у вигляді послідовних наближень, для цього проінтегруємо ліву і праву частину рівняння на проміжку $[x_0; x]$, оскільки $x \geqslant x_0$:

$$y_k(x) = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{k-1})dx;$$

тоді $y_1 = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$; $y_2 = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$ і так далі.

Приклад. Знайти два послідовні наближення розв'язку системи рівнянь:

$$\begin{cases} y' = xy + yz; \\ z' = xy - z; \\ y(0) = 1; \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. При розв'язанні системи необхідно знаходити послідовні розв'язки спочатку $y(x)$, потім $z(x)$. Позначимо $f_1(x, y, z) = xy + yz$, $f_2(x, y, z) = xy - z$, за умовою $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$.

$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0)dx = 1 + \int\limits_{0}^{x}(xy_0 + y_0z_0)dx = 1 + \int\limits_{0}^{x} xdx =$
$= 1 + \frac{x^2}{2};$

$$z_1(x) = z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(x, y_0, z_0)dx = 0 + \int\limits_0^x (xy_0 - z_0)dx = \int\limits_0^x xdx = \frac{x^2}{2};$$

$$y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, z_1)dx = 1 + \int\limits_0^x (xy_1 + y_1 z_1)dx = 1 +$$

$$+ \int\limits_0^x \left(x(1 + \frac{x^2}{2}) + (1 + \frac{x^2}{2})\frac{x^2}{2} \right) dx = 1 + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2};$$

$$z_2(x) = z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(x, y_1, z_1)dx = 0 + \int\limits_0^x (xy_1 - z_1)dx =$$

$$= \int\limits_0^x \left(x(1 + \frac{x^2}{2}) - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}.$$

Отже, $y(x) \approx 1 + \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2}$; $z(x) \approx \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти наближене значення функції в точці y(2) методом Ейлера, $h = 1$

$$\begin{cases} y''' + xy'' - yx^2 - 1 = 0; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 3; \\ y''(1) = -1. \end{cases}$$

2. Знайти наближене значення y(2) модифікованим методом Ейлера, $h = 1$

$$\begin{cases} y'' + xy' - 2y - 1 = 0; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

3. Знайти наближене значення $y(\pi)$ методом Ейлера Коші, $h = \pi$

$$\begin{cases} y'' + y' \cos x - yx - 1 = 0; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

4. Знайти наближене значення $y(1)$ методом Рунге Кутта

2 порядку точності, $h = 1$

$$\begin{cases} y'' - 3y' - yx = 2; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

5. Знайти наближене значення y(2) методом Рунге Кутта 3 порядку точності, $h = 1$

$$\begin{cases} y'' - 5xy - y'x = 0; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = -2. \end{cases}$$

6. Знайти наближене значення y(0) методом Рунге Кутта 4 порядку точності, $h = 1$

$$\begin{cases} y' - 2xy - 1 = 0; \\ y(-1) = 2; \\ y'(-1) = -2. \end{cases}$$

7. Записати перших 5 членів розкладу в ряд розв'язку за допомогою методу послідовного диференціювання

$$\begin{cases} y''' + xy'' - y^2x^2 - 1 = 0 \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 3; \\ y''(1) = -1. \end{cases}$$

8. Знайти перші два наближення розв'язку методом Пікара

$$\begin{cases} y'' + xy' - 2y - 1 = 0; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = -3. \end{cases}$$