№1

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n\left(n^2+1-n^2\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

За теоремою про арифм. дії

№2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p}{n^{p+1}}+\frac{2^p}{n^{p+1}}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\frac{n^p}{n^{p+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p}{n^{p+1}}+\frac{2^p}{n^{p+1}}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

За теоремою про арифметичні дії з границями:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}\right)=\overbrace{0+0+\dots+0}^{n \text{ доданків}}=0.$$

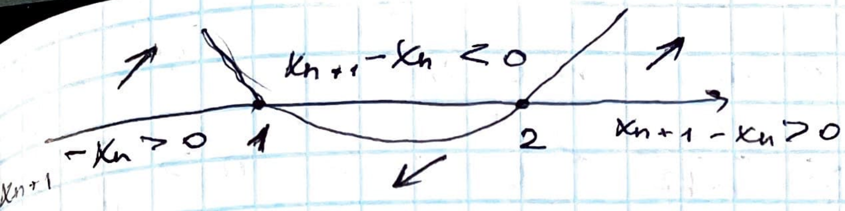
7 $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$

$x_1 \in (1, 2)$

1) Монотонність:

$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 2x_n + 2 - x_n = x_n^2 - 3x_n + 2 =$

$= (x_n - 1)(x_n - 2)$



2) Обмеженість.

Припустимо, що $x_n \in (1;2)$.

За ММІ:

1) база: $x_1 \in (1,2)$.

2) крок: $1 < x_{n+1} < 2$

$$x_n^2 - 2x_n + 2 = (x_n - 1)^2 + 1$$

$$(x_n - 1)^2 > 0 \Rightarrow (x_n - 1)^2 + 1 > 1$$

$x_n < 2$, за припущенням

$$x_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < (x_n - 1)^2 < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_n - 1)^2 + 1 < 2.$$

Отже, послідовність (x_n) є монотонною та обмеженою. Значить, вона збіжна за теоремою Вейєрштрасса.

№4

$$f: [0; +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}.$$

1) Якщо 2^n зростає швидше, ніж x^n, то

$$2^n \geq x^n \Rightarrow 2 \geq x.$$

Тоді, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(2^n + x^n)}{n} =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(2^n\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\right)}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \ln 2 + \ln\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)}{n} =$$

$$= \ln 2 \approx 0{,}7$$

2) Якщо 2^n зростає повільніше, ніж x^n, то $2^n < x^n \Rightarrow x > 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(x^n\left(\left(\frac{2}{x}\right)^n + 1\right)\right)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln x + \ln\left(\left(\frac{2}{x}\right)^n + 1\right)}{n} = \ln x$$