

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1

Чисельні методи в інформатиці
“Розв’язок нелінійних рівнянь”

Варіант №4

Виконав студент групи ІПС-31
Міцкевич Костянтин Олександрович

Київ — 2025

Постановка задачі

Знайти розв'язок рівняння з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ наступними методами:

Варіант №8

- Метод Ньютона: $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$
- Метод простої ітерації: $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

Додати можливість зміни точності

Теоретичні відомості та обґрунтування

Метод Ньютона:

Ітераційний процес: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Достатня умова збіжності. Якщо функція $f(x) \in C^2_S$, де $S = \{x : |x - x^*| \leq \delta\}$; $f(a)f(b) < 0$;

$f'(x)$ – знакостала на S ; $f'(x) \neq 0$, $x \in S$; $x_0 \in S$ та якщо виконуються умови:

1) $f(x_0) * f'(x_0) > 0$

2) $q = \frac{M_2 |x_0 - x^*|}{2m_1} < 1$

де $M_2 = \max_{x \in S} |f''(x)|$, $m_1 = \min_{x \in S} |f'(x)|$, то ітераційний процес збігається

$\exists x^* : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, при чому швидкість збіжності квадратична: $|x_n - x^*| < q^{2^n-1} |x_0 - x^*|$.

Апріорна оцінка кількості кроків: $n \geq \left[\log_2 \left(\frac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q)} \right) + 1 \right] + 1$ - не вдається

обрахувати через негативне число під логарифмом.

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Метод простої ітерації:

Ітераційний процес: $x_{n+1} = \phi(x_n)$, де $\phi(x) = x + \psi(x)f(x)$

Достатня умова: $\phi'(x)$ задовольняє умовам:

1) $\max_{x \in S} |\phi'(x)| \leq q < 1$

2) $|\phi(x_0) - x_0| \leq (1-q)\delta$

Апріорна оцінка: $n \geq \left[\frac{\ln(|\phi(x_0) - x_0| / (1-q)\varepsilon)}{\ln(1/q)} \right] + 1$

Умова припинення залежить від q :

$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon$, якщо $q < \frac{1}{2}$

$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$, в інших випадках

Xід роботи

Мова програмування – Python;

Використані бібліотеки: numpy (робота з масивами, векторизовані обчислення многочлена, прості перетворення), math (для розрахунку апріорної кількості ітерацій), matplotlib (для побудови графіків рівнянь).

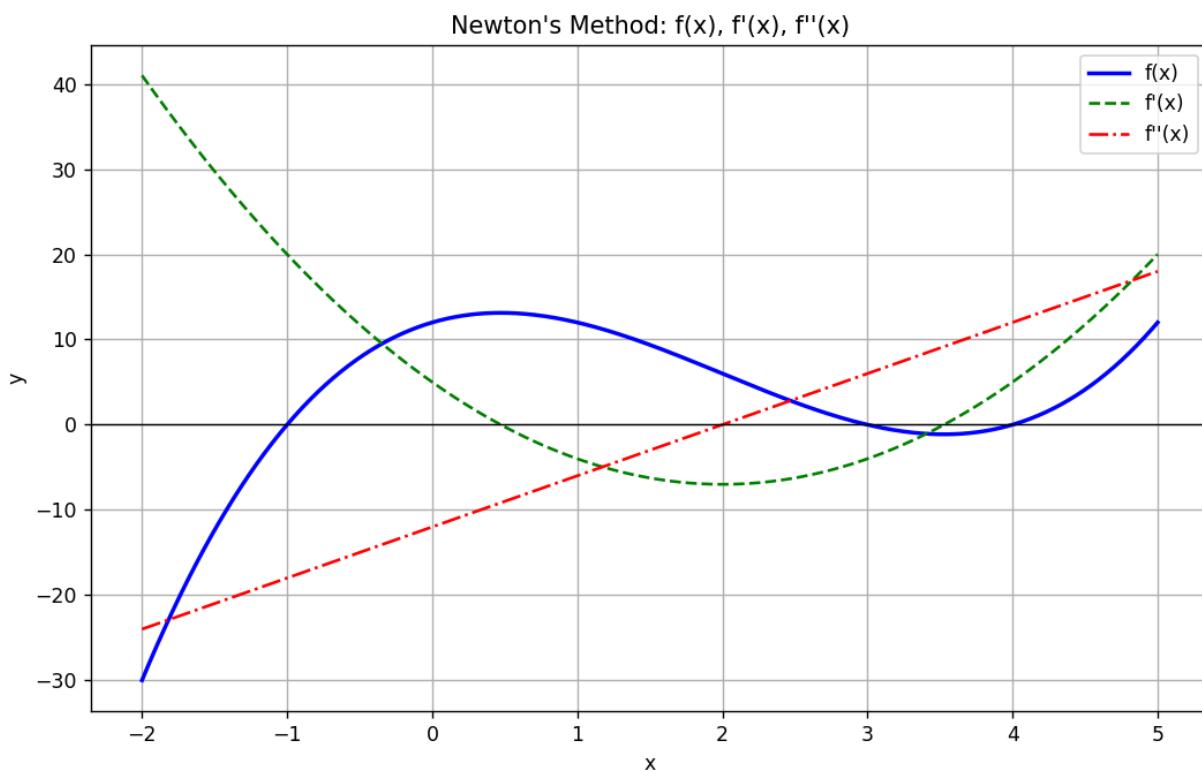
1) Метод Ньютона:

Функція, перша та друга її похідна. Їх графіки:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$$

$$f''(x) = 6x - 12$$



Рівняння має три корені. Спочатку обираємо інтервал, що містить один із них: [-2.5; -0.5]. Якщо в цьому інтервалі виявиться кілька розв'язків, програма автоматично звужує його та визначає підінтервал, у якому знаходиться лише один корінь, щоб продовжити подальші обчислення.

```
Enter tolerance epsilon: 0.001
22:25:26 - newton_method - INFO - Starting Newton's method with interval [-2.5, -0.5], x* = -1, eps = 0.001
22:25:26 - utils - INFO - Searching for root interval in [-2.5, -0.5]
22:25:26 - utils - INFO - f(-2.5) = -53.625000, f(-0.5) = 7.875000
22:25:26 - utils - INFO - Root interval found: [-2.5, -0.5]
22:25:26 - utils - INFO - Plotting functions with title: Newton's Method: f(x), f'(x), f''(x)
22:25:29 - utils - INFO - Function plot displayed successfully
```

Обираємо приблизне значення $x = -1.5$ – середина обраного відрізка. Перевіряємо достатні умови збіжності. За невдалих перевірок програма повертає False значення з відповідними алогами.

```
22:25:29 - newton_method - INFO - Initial approximation: x0 = -1.5
22:25:29 - newton_method - INFO - Checking convergence conditions for x0 = -1.5
22:25:29 - newton_method - INFO - f(x0) = -12.375000, f''(x0) = -21.000000
22:25:29 - newton_method - INFO - M2 = 27.000000, m1 = 11.750000
22:25:29 - newton_method - INFO - ✓ Newton's Method: Convergence conditions satisfied (sign and q < 1)
22:25:29 - newton_method - INFO - Convergence achieved after 4 iterations
```

Апроксимована оцінка: $n \geq \lceil \log_2 \left(\frac{\ln(|-1.5 - -1|/0.001)}{\ln(1/0.57446)} \right) + 1 \rceil + 1 = 4$

Починаємо ітераційний процес для методу Ньютона:

Step	x_n	$f(x_n)$

0	-1.50000000	-12.37500000
1	-1.08403361	-1.74482052
2	-1.00300652	-0.06021168
3	-1.00000406	-0.00008119
4	-1.00000000	-0.00000000
22:25:29 - newton_method - INFO - === Newton's Method Result ===		
22:25:29 - newton_method - INFO - Root found: $x \approx -1.00000000$		
22:25:29 - newton_method - INFO - Total iterations: 5		

Отже, отримані результати демонструють, що реалізований алгоритм методу Ньютона коректно знайшов розв'язок рівняння з заданою точністю ϵ .

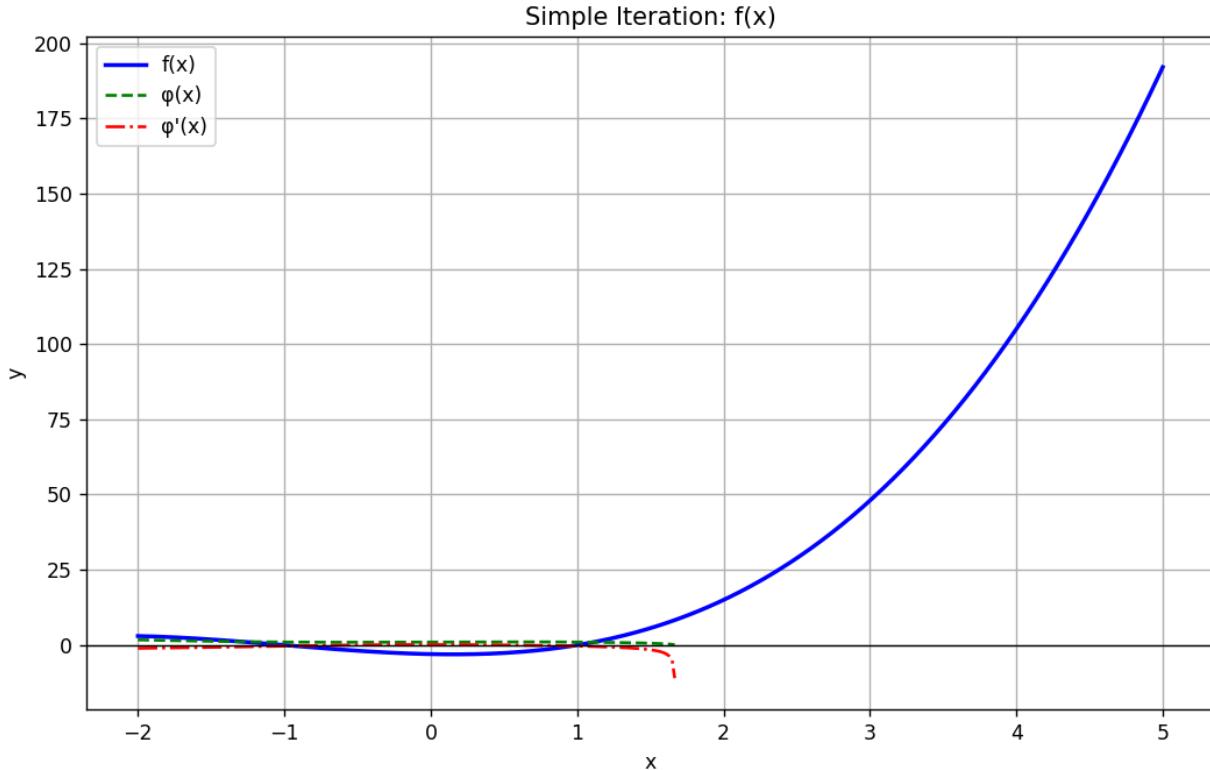
2) Метод простої ітерації:

Функція, $\varphi(x)$ та похідна $\varphi'(x)$. Їх графіки:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{-x^3 + x + 3}{3}}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1 - 3x^2}{2 * \sqrt{3} * \sqrt{-x^3 + x + 3}}$$



Рівняння має три корені. Спочатку обираємо інтервал, що містить один із них: [0.75; 1.3]. Якщо в цьому інтервалі виявиться кілька розв'язків, програма автоматично звужує його та визначає підінтервал, у якому знаходиться лише один корінь, щоб продовжити подальші обчислення.

```
22:44:35 - simple_iteration - INFO - Starting simple iteration method with interval [0.75, 1.3], eps = 0.001
22:44:35 - utils - INFO - Searching for root interval in [0.75, 1.3]
22:44:35 - utils - INFO - f(0.75) = -1.640625, f(1.3) = 2.967000
22:44:35 - utils - INFO - Root interval found: [0.75, 1.3]
22:44:35 - utils - INFO - Plotting functions with title: Simple Iteration: f(x)
```

Обираємо функцію $\phi(x)$

$$\text{Знаходимо } x_0 = \frac{a+b}{2} = 1.025$$

Знаходимо $\delta = \max(|x_0 - a|, |b - x_0|) = 0.275$

Перевіримо достатні умови збіжності:

- $\max_{x \in S} |\phi'(x)| \leq q < 1$
- $|\phi(x_0) - x_0| \leq (1-q)\delta$

```
22:44:36 - simple_iteration - INFO - Initial approximation: x0 = 1.025
22:44:36 - simple_iteration - INFO - Checking convergence conditions for interval [0.75, 1.3], x0 = 1.025
22:44:36 - simple_iteration - INFO - Maximum |\phi'(x)| = 0.810185
22:44:36 - simple_iteration - INFO - Delta = 0.275000
22:44:36 - simple_iteration - INFO - ✓ Simple Iteration: Convergence conditions satisfied
22:44:36 - simple_iteration - INFO -   Convergence rate q ≈ 0.810185
22:44:36 - simple_iteration - INFO -   Convergence achieved after 5 iterations
```

$$\text{Апроксимована оцінка: } n \geq \left\lceil \frac{|0.991 - 1.025| / (1 - 0.81) * 0.001}{\ln(1/0.81)} \right\rceil + 1 = 41$$

Достатні умови виконуються, отже виконуємо ітераційний процес:

Iter	x_n	x_n+1	f(x_n+1)

0	1.02500000	0.99131384	-0.06903726
1	0.99131384	1.00285370	0.02287849
2	1.00285370	0.99904423	-0.00764065
3	0.99904423	1.00031808	0.00254526
4	1.00031808	0.99989392	-0.00084860
00:43:11 - simple_iteration - INFO - === Simple Iteration Result ===			
00:43:11 - simple_iteration - INFO - Root found: x ≈ 0.99989392			

Отримані результати показують, що реалізований алгоритм методу простої ітерації забезпечив збіжність до розв'язку з заданою точністю ϵ .