2. Ітераційні методи розв'язання нелінійних рівнянь

Постановка задачі

Нехай $f(x) \in C[a,b]$. Розглянемо задачу наближеного знаходження коренів нелінійного рівняння

$$f(x) = 0$$

з точністю ε за допомогою ітераційних методів.

Загальні етапи знаходження наближених коренів нелінійного рівняння:

1) дослідження кількості коренів,

2) відокремлення коренів,

3) наближене обчислення кореня.

Для розв'язання задач 1) та 2) найчастіше використовують графічний метод чи побудову таблиць значень функції $f(x)$ та використовують такі твердження:

1. Якщо на кінцях деякого відрізку $[a,b]$ неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків $f(a)f(b) < 0$, то на цьому відрізку рівняння має хоча б один корінь. Якщо при цьому $f(x)$ має неперервну першу похідну, що не змінює знак,то корінь єдиний.

2. Нехай $f(x)$ - аналітична функція на $[a,b]$. Якщо $f(a)f(b) < 0$, то між a та b непарна кількість коренів. Якщо ж $f(a)f(b) > 0$ то між a та b чи немає коренів, чи їх парна кількість (враховуючи кратність).

Будемо позначати x^* – точне значення кореня, $x^* \in [a;b]$, x_k – наближене значення кореня на k-й ітерації, x_0 – початкове наближення ітераційного процесу.

Якщо $|x_n - x^*| \leqslant \alpha |x_{n-1} - x^*|^p$, де $0 < \alpha < 1$, то p – ***порядок швидкості збіжності*** ітераційного методу.

Апріорна та ***апостеріорна*** оцінка кількості кроків ітераційного процесу – кількість кроків, яку необхідно виконати для наближеного знаходження кореня рівняння із точністю ε. Апріорна оцінка є теоретичною, її можна обчислити до початку ітераційного процесу, апостеріорна оцінка – практична – її можна знайти після припинення ітераційного процесу. Якщо умова припинення виконалася для x_n, то апостеріорна оцінка кількості ітерацій дорівнює n. Апріорна оцінка може співпадати з апостеріорною або бути більшою за неї.

Метод ділення навпіл (дихотомія)

Метод можна використовувати, якщо $f(x) \in C_{[a;b]}$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Покладемо $a_0 = a$, $b_0 = b$, тоді початкове наближення $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, а ітераційний процес:

$$a_n = \begin{cases} x_{n-1}, \text{ якщо } \operatorname{sgn} f(a_{n-1}) = \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \\ a_{n-1}, \text{ якщо } \operatorname{sgn} f(a_{n-1}) \neq \operatorname{sgn} f(x_{n-1}); \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} x_{n-1}, \text{ якщо } \operatorname{sgn} f(b_{n-1}) = \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \\ b_{n-1}, \text{ якщо } \operatorname{sgn} f(b_{n-1}) \neq \operatorname{sgn} f(x_{n-1}); \end{cases}$$

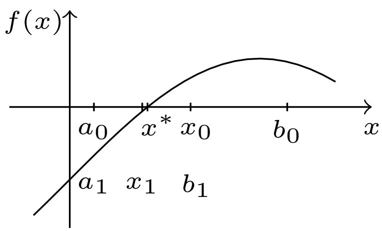
$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$

Швидкість збіжності ітераційного процесу методу дихотомії є лінійною: $|x_n - x^*| \leqslant \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$, звідси можна вивести апріорну оцінку кількості кроків:

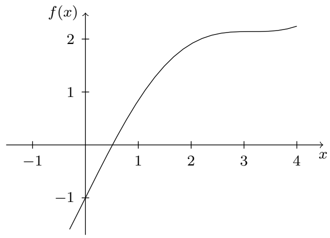
$$n \geqslant \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right].$$

Геометрична інтерпретація:



Приклад. Знайти розв'язок рівняння $x + \sin x - 1 = 0$ методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0,1$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Розв'язок. Перший етап. Рівняння має єдиний дійсний корінь.



Другий етап. Відокремлення коренів: знайдемо проміжок, який містить єдиний корінь.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 + \sin 0 - 1 = -1 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \quad f(0)\cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0 \Rightarrow x^* \in [0; \frac{\pi}{2}].$$

Третій етап. Для того щоб почати ітераційний процес методом дихотомії, знайдемо початкове наближення. Покладемо $a_0 = a = 0$; $b_0 = b = \frac{\pi}{2}$, тоді $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0 + \pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Ітерація 1.

Звузимо проміжок вдвічі. Для цього розглянемо проміжки $[0; \pi/4]$ та $[\pi/4; \pi/2]$, будемо працювати із проміжком, на якому відбувається зміна знаків, оскільки саме він буде містити шуканий корінь.

$f(0) = -1$; $f(\frac{\pi}{2}) \approx 1,5708$; $f(\frac{\pi}{4}) \approx 0,4925$; $f(0)\cdot f(\frac{\pi}{4}) < 0 \quad \Rightarrow$
$a_1 = a_0 = 0$; $b_1 = x_0 = \frac{\pi}{4}$; $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{\pi}{8}$.

Будемо розглядати проміжок $[0; \pi/4]$, але спочатку перевіримо умову припинення ітераційного процесу:

$|x_1 - x_0| = |\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}| \approx 0,4 > \varepsilon$.

Умова не виконується, тому необхідно знов звузити проміжок вдвічі.

Ітерація 2.

$f(0) = -1$; $f(\frac{\pi}{4}) \approx 0,4925$; $f(\frac{\pi}{8}) \approx -0,2246$; $f(\frac{\pi}{4}) \cdot f(\frac{\pi}{8}) < 0 \Rightarrow$
$a_2 = x_1 = \frac{\pi}{8}$; $b_2 = b_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{\pi/8 + \pi/4}{2} = \frac{3\pi}{16}$.
$|x_2 - x_1| = |\frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{8}| \approx 0,2 > \varepsilon$.

Ітерація 3.

$f(\frac{\pi}{8}) = -0,2246$; $f(\frac{\pi}{4}) \approx 0,4925$; $f(\frac{3\pi}{16}) \approx 0,1446$;
$f(\frac{\pi}{8}) \cdot f(\frac{3\pi}{16}) < 0 \Rightarrow a_3 = a_2 = \frac{\pi}{8}$; $b_3 = x_2 = \frac{3\pi}{16}$;
$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{\pi/8 + 3\pi/16}{2} = \frac{5\pi}{32}$.
$|x_3 - x_2| = |\frac{5\pi}{32} - \frac{3\pi}{16}| \approx 0,1 \leqslant \varepsilon$.

Умова припинення виконалась, отже, знайшли корінь рівняння з точністю $0,1$: $x^* \approx x_3 \approx 5\pi/32 \approx 0,4909$.

Оскільки корінь знайдено на третій ітерації, то апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 3.

Для знаходження апріорної оцінки кількості кроків скористаємося формулою:

$$n \geqslant \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right] = \left[\log_2 \frac{\pi/2 - 0}{0,1}\right] = [3,9734] = 3.$$

Метод простої ітерації

Метод простої ітерації грунтується на зведенні нелінійного рівняння до вигляду

$$x = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = x + \Psi(x)f(x)$, $\Psi(x)$ – знакостала неперервна функція.

Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a; b]$, ітераційний процес має вигляд:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \tag{16}$$

Достатня умова збіжності. Нехай для $\forall x_0 : x_0 \in S$, де $S = \{x : |x - x_0| \leqslant \delta\}$, $\varphi(x)$ задовольняє умовам:

1) $\max\limits_{x\in S} |\varphi'(x)| \leqslant q < 1$;

2) $|\varphi(x_0) - x_0| \leqslant (1-q)\delta$;

тоді ітераційний процес (16) збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, при чому швидкість збіжності лінійна:

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0|. \tag{17}$$

Зауваження. Замість умови 1) $\max\limits_{x\in S} |\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ можна використати умову Ліпшиця: $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant q|x-y|$, $x, y \in S$.

З формули швидкості збіжності (17) можна вивести апріорну оцінку кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1.$$

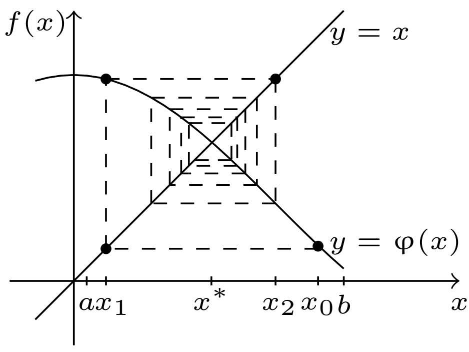
Умова припинення залежить від q:

$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \dfrac{1-q}{q}\varepsilon$, якщо $q < \dfrac{1}{2}$;

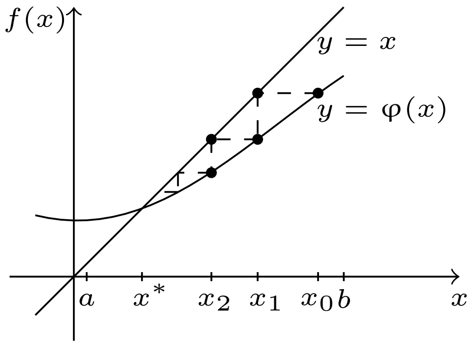
$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$, в інших випадках.

Геометрична інтерпретація:

$-1 < \varphi'(x) < 0$

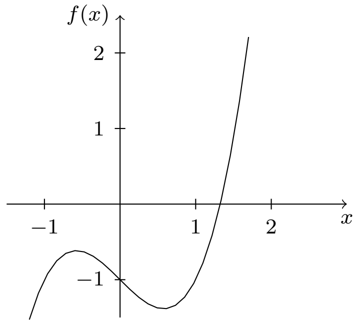


$0 < \varphi'(x) < 1$



Приклад. Знайти розв'язок рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0,1$ Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Розв'язок. Перший етап. Рівняння має єдиний дійсний корінь:



Другий етап. Відокремлення коренів: знайдемо проміжок, який містить єдиний корінь.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 \\ f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 \end{array}\right\} \quad f(1)\cdot f(2) < 0 \Rightarrow x^* \in [1;2].$$

Третій етап. Переходимо до побудови ітераційного процесу. Зведемо нелінійне рівняння до вигляду $x = \varphi(x)$:

$$x^3 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x^3 - 1.$$

Оберемо початкове наближення: $x_0 = 1,5$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in [1;2] \\ |x-1,5| \leqslant \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \delta = 0,5.$$

Перевіримо достатні умови збіжності:

1) $\max\limits_{x\in[a;b]} |\varphi'(x)| = \max\limits_{x\in[1;2]} |3x^2| > 1 \Rightarrow$ не виконуються

Для обраної функції $\varphi(x)$ достатні умови збіжності не виконуються, оберемо нову функцію $\varphi(x)$:

$$x^3 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{x} + 1} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}.$$

Перевіримо достатні умови збіжності для нової функції $\varphi(x)$:

1) $\max\limits_{x\in[a;b]} |\varphi'(x)| = \max\limits_{x\in[1;2]} \left| -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3+x^4}} \right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,354 < 1;$

2) $|\sqrt{\varphi(x_0) - x_0}| = \left| \sqrt{\dfrac{1}{1,5} + 1} - 1,5 \right| = |-0,209|;$

$$(1-q)\delta = (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}})0,5 = 0,323.$$

Оскільки $q < 1$ та $0,209 < 0,323$, значить є збіжність. Переходимо до ітераційного процесу.

Ітерація 1.

$x_0 = 1,5;$

$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{\dfrac{1}{x_0} + 1} = \sqrt{\dfrac{1}{1,5} + 1} \approx 1,291.$

Перевіримо умову припинення. Оскільки $q < 1/2$, то використаємо умову: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \dfrac{1-q}{q}\varepsilon.$

$\dfrac{1-q}{q}\varepsilon = \left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot 0,1 \div \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,183;$

$|x_1 - x_0| = |1,291 - 1,5| \approx 0,209 > 0,183$, умова не виконалася.

Ітерація 2.

$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt{\dfrac{1}{x_1} + 1} = \sqrt{\dfrac{1}{1,291} + 1} \approx 1,332;$

$|x_2 - x_1| = |1,332 - 1,291| \approx 0,041 < 0,183;$

Умова припинення виконалась, отже, знайшли корінь рівняння з точністю $0,1$: $x^* \approx x_2 \approx 1,332.$

Оскільки корінь знайдено на другій ітерації, то апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 2.

Для знаходження апріорної оцінки кількості кроків скористаємося формулою:

$$n \geqslant \left[\frac{\ln\dfrac{|\varphi(x_0)-x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)}\right]+1=\left[\frac{\ln\dfrac{|1,291-1,5|}{(1-0,354)0,1}}{\ln(1/0,353)}\right]+1=$$

$= [1,128] + 1 = 2.$

Метод релаксації

Якщо в методі простої ітерації $\Psi(x) \equiv \tau \equiv const$, то отримаємо метод релаксації.

Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a;b]$, ітераційний процес:

$$x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n), \tag{18}$$

де «+», якщо $f'(x) < 0$; «−», якщо $f'(x) > 0$.

Достатня умова збіжності. Якщо в ітераційному процесі (18) параметр $\tau \in (0; 2/M_1)$, де $0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, $m_1 = \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, то ітераційний процес (18) збігається, при цьому швидкість збіжності лінійна.

Оптимальний параметр. Якщо обрати $\tau_o = 2/(M_1 + m_1)$, то кількість ітерацій буде мінімальною, швидкість збіжності залишається лінійною: $|x_n - x^*| \leqslant q_0^n|x_0 - x^*|$, де $q_o = \dfrac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}$.

Для оптимального параметру τ_o апріорна оцінка кількості кроків:

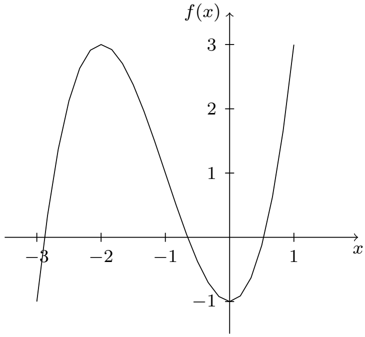
$$n_o \geqslant \left[\frac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q_o)}\right] + 1.$$

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$.

Приклад. Знайти найменший за модулем від'ємний корінь рівняння $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ методом релаксації з точністю $\varepsilon =$

$0,1$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Перший етап. Рівняння має три дійсних кореня:



Другий етап. Відокремлення коренів: знайдемо проміжок, який містить найменший за модулем від'ємний корінь рівняння.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1 \\ f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 1 = -1 \end{array}\right\} \quad x^* \in [-1; 0].$$

Третій етап. Переходимо до побудови ітераційного процесу методу релаксації, для чого знайдемо m_1, M_1.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $m_1 = \min\limits_{x \in [-1;0]} |3x^2 + 6x| = 0$ – не задовольняє умові $0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, тому повернемося до другого етапу і звузимо проміжок.

Другий етап.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1 \\ f(-0,5) = (-0,5)^3 + 3(-0,5)^2 - 1 \approx -0,1 \end{array}\right\} x^* \in [-1; -0,5].$$

Третій етап.

$m_1 = \min\limits_{x \in [-1;-0,5]} |3x^2 + 6x| = 2,25$; $M_1 = \max\limits_{x \in [-1;-0,5]} |3x^2 + 6x| = 3$;

$$\tau_o = \frac{2}{M_1 + m_1} = \frac{2}{3 + 2,25} \approx 0,381.$$

Оскільки $f'(x) < 0$, то в ітераційному процесі беремо знак «+»: $x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n)$.

Оберемо початкове наближення: $x_0 = -0,5$.

Ітерація 1.

$x_1 = x_0 + \tau f(x_0) = -0,5 + 0,381\big((-0,5)^3 + 3(-0,5)^2 - 1\big) \approx$
$\approx -0,643$.

Перевіримо умову припинення:

$|x_1 - x_0| \approx |-0,643 + 0,5| = 0,143 > \varepsilon$. Не виконується.

Ітерація 2.

$x_2 = x_1 + \tau f(x_1) = -0,643 + 0,381\Big((-0,643)^3 + 3(-0,643)^2 -$
$-1\Big) \approx -0,653$.

$|x_2 - x_1| \approx |-0,653 + 0,643| = 0,01 \leqslant \varepsilon$.

Знайшли корінь на другій ітерації: $x^* \approx x_2 \approx -0,653$, отже апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 2.

Знайдемо апріорну оцінку кількості кроків:

$q_o = \dfrac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \dfrac{3 - 2,25}{3 + 2,25} \approx 0,143;$

$\left.\begin{array}{l} x^* \in [-1; -0,5] \\ x_0 = -0,5 \end{array}\right\} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |-0,5 - x^*| \leqslant 0,5;$

$n_o \geqslant \left[\dfrac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q_o)}\right] + 1 = \left[\dfrac{\ln(0,5/0,1)}{\ln(1/0,143)}\right] + 1 = [0,828] + 1 = 1.$

Метод дотичних (Ньютона)

Ітераційний процес методу має вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{19}$$

Достатня умова збіжності. Якщо функція $f(x) \in C_S^2$, де $S = \{x : |x - x^*| \leqslant \delta\}$; $f(a)f(b) < 0$; $f''(x)$ – знакостала на S; $f'(x) \neq 0$, $x \in S$; $x_0 \in S$ та якщо виконуються умови:

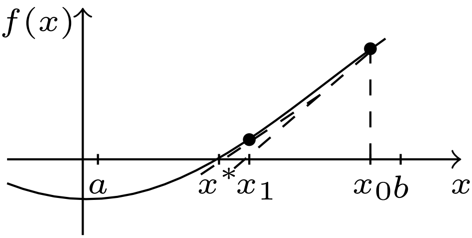
$$1) f(x_0)f''(x_0) > 0, \qquad 2) q = \frac{M_2|x_0 - x^*|}{2m_1} < 1,$$

де $M_2 = \max\limits_{x \in S} |f''(x)|$, $m_1 = \min\limits_{x \in S} |f'(x)|$, то ітераційний процес (19) збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$, при чому швидкість збіжності квадратична: $|x_n - x^*| \leqslant q^{2^n - 1}|x_0 - x^*|$.

Апріорна оцінка кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\log_2\left(\frac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q)} + 1\right)\right] + 1.$$

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$.
Геометрична інтерпретація:

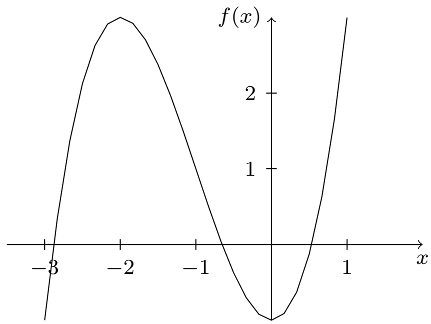


Приклад. Знайти найменший додатній корінь рівняння

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0,1$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Розв'язок. Перший етап. Рівняння має три дійсних кореня:



Другий етап. Відокремлення коренів: знайдемо проміжок, який містить найменший додатній корінь рівняння.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^3 + 3\cdot 0^2 - 1 = -1 \\ f(1) = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 1 = 3 \end{array}\right\} \quad f(0)f(1) < 0 \Rightarrow \quad x^* \in [0;1].$$

Третій етап. Переходимо до побудови ітераційного процесу, але спочатку перевіримо достатні умови збіжності:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f''(x) = 6x + 6 > 0$ на $[0;1]$; $f'(0) = 0$ – не задовольняє достатній умові збіжності, тому повернемося до другого етапу і звузимо проміжок.

Другий етап.

$$\left.\begin{array}{l} f(0,5) = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 1 = -0,125 \\ f(1) = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 1 = 3 \end{array}\right\} \quad x^* \in [0,5;1].$$

Третій етап. Достатні умови збіжності:

$f''(x) = 6x + 6 > 0$ на $[0,5;1]$; $f'(x) \neq 0$ на $[0,5;1]$.

Виберемо початкове наближення:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,5) = 0,5^3 + 3\cdot 0,5^2 - 1 = -0,125 \\ f''(0,5) = 6\cdot 0,5 + 6 = 9 \end{array}\right\} \quad f(0,5)f''(0,5) < 0$$

$\Rightarrow$ не виконується, тому $x_0 \neq 0,5$;

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 1 = 3 \\ f''(1) = 6\cdot 1 + 6 = 12 \end{array}\right\} \quad f(1)f''(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1.$$

Початкове наближення знайдено, продовжимо перевірку достатньої умови збіжності:

$m_1 = \min\limits_{x\in[0,5;1]} |3x^2 + 6x| = 3,75$; $M_2 = \max\limits_{x\in[0,5;1]} |6x + 6| = 12$;

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in [0,5;1] \\ x_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |1 - x^*| \leqslant 0,5.$$

$$q = \frac{M_2|x_0 - x^*|}{2m_1} \leqslant \frac{12\cdot 0,5}{2\cdot 3,75} \approx 0,8 < 1$$

Достатні умови збіжності виконуються. Переходимо до ітераційного процесу.

Ітерація 1.

$x_0 = 1$;

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1^3 + 3\cdot 1^2 - 1}{3\cdot 1^2 + 6\cdot 1} \approx 0,667;$$

Перевіримо умову припинення:

$|x_1 - x_0| = |0,667 - 1| \approx 0,3 \geqslant \varepsilon$. Не виконується.

Ітерація 2.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,667 - \frac{0,667^3 + 3\cdot 0,667^2 - 1}{3\cdot 0,667^2 + 6\cdot 0,667} \approx 0,548;$$

$|x_2 - x_1| = |0,548 - 0,667| \approx 0,1 \leqslant \varepsilon$.

Умова припинення виконалася, знайшли корінь на другій ітерації, тому $x^* \approx x_2 \approx 0,548$, а апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 2.

Знайдемо апріорну оцінку кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\log_2 \left(\frac{\ln \dfrac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon}}{\ln(1/q)} + 1 \right) \right] + 1 \geqslant \left[\log_2 \left(\frac{\ln(0,5/0,1)}{\ln(1/0,8)} + 1 \right) \right]$$

$+1 = [3,038] + 1 = 4.$

Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес методу має вигляд:

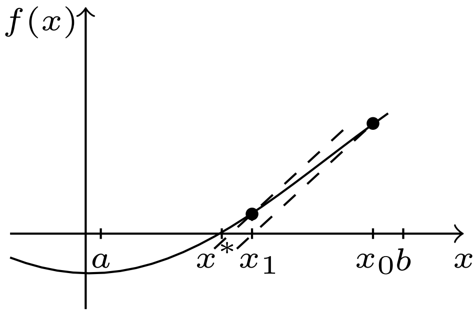
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}. \tag{20}$$

Порядок швидкості збіжності модифікованого методу ньютона є лінійним.

Достатня умова збіжності. Якщо функція $f(x) \in C^2_{[a;b]}$; $f'(x), f''(x)$ – знакосталі на $[a;b]$; $f'(x) \neq 0$ на $[a;b]$, то ітераційний процес (20) збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$.

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$.

Геометрична інтерпретація:



Метод січних

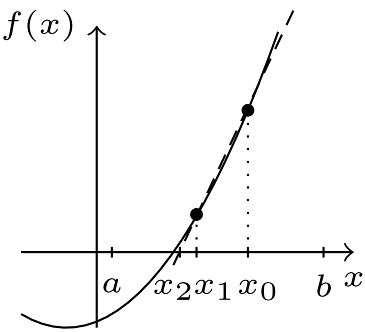
Метод січних є ще однією модифікацією методу Ньютона. Ітераційний процес методу є ***двокроковим***, оскільки для знаходження наближеного значення на x_{n+1} ітерації необхідно використати відомі два попередні значення x_n та x_{n-1}:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Обираються два початкових значення $x_0, x_1 \in [a; b]$. Швидкість збіжності ітераційного процесу методу січних є лінійною.

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$.

Геометрична інтерпретація:



Задачі для самостійного розв'язання

1. Зробити дві ітерації методом дихотомії для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $e^x - 2(x-1)^2 = 0$. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

2. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$ методом простої ітерації, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію розбіжного процесу простої ітерації (сходами).

3. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^2 \lg x - 1 = 0$

методом релаксації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Записати формулу ітераційного процесу для заданого рівняння.

4. За яку кількість кроків можна знайти найбільший корінь нелінійного рівняння $x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = 0$ методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0,001$? Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.

5. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого від'ємного кореня нелінійного рівняння $x^3 - 4x^2 - 4x + 13 = 0$ модифікованим методом Ньютона, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.

6. За яку кількість кроків можна знайти найменший корінь нелінійного рівняння $\operatorname{sh} x - 12thx - 0.311 = 0$ методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0,001$.

7. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію розбіжного процесу простої ітерації (спіраллю).

8. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $3x^2 - \cos^2(\pi x) = 0$ методом релаксації. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

9. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^2 + 4\sin(x) = 0$ методом Ньютона. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

10. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $x^3 + 4x - 6 = 0$ модифікованим методом Ньютона. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

11. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $(x-1)^3 + 0.5e^x = 0$ методом дихотомії, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.

12. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^2 + \sin x - 12x - 0,25 = 0$ методом простої ітерації. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжного процесу простої ітерації (сходами). Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

13. За яку кількість кроків можна знайти найменший корінь нелінійного рівняння $x^3 - 3x^2 - 17x + 22 = 0$ методом релаксації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Записати формулу ітераційного процесу для заданого рівняння.

14. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найменшого кореня рівняння $x^2 + 5\sin x - 1 = 0$ методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0,001$.

15. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $3x - \cos x - 1 = 0$ модифікованим методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0,001$. Записати умову припинення ітераційного процесу.

16. За яку кількість кроків можна знайти найбільший корінь нелінійного рівняння $x^3 - 3x^2 - 17x + 22 = 0$ методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0,001$.

17. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найменшого кореня рівняння $x^2 + 4\sin(x) = 0$ методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію розбіжного процесу простої ітерації (спіраллю).

18. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $x^2+4\sin(x) = 0$ методом релаксації. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

19. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $3x^2 - \cos^2(\pi x) = 0$ методом Ньютона. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

20. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $(x-1)^3 + 0.5e^x = 0$ модифікованим методом Ньютона. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

21. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^3 + 4x - 6 = 0$ методом дихотомії, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.