3. Прямі і ітераційні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Постановка задачі

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Ax = b,$$

де A – матриця розмірності $n \times n$, $detA \neq 0$, отже розв'язок системи існує і він єдиний.

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь поділяються на прямі та ітераційні:

1) прямі методи:
   – метод Гаусса з вибором головного елемента,
   – метод квадратних коренів,
   – метод прогонки;

2) ітераційні методи:
   – метод Якобі,
   – метод Зейделя.

Прямі методи застосовують для матриць невеликої розмірності $n < 10^2$, а ітераційні для розріджених матриць, чи коли $n > 10^2$. Матрицю назвемо розрідженою, якщо вона має достатньо багато нулів.

Метод Гаусса з вибором головного елемента

Для зменшення обчислювальної похибки в методі Гаусса використовують вибір головного елементу:

1) по стовпцях,
2) по рядках,
3) за всією матрицею.

Розглянемо алгоритм на прикладі методу Гаусса з вибором головного елементу по стовпцях.

Покладемо $A_0 = A$. Ведучим елементом обирається максимальний по модулю елемент стовпця, що розглядається: $a_{lk} = \max\limits_{i} |a_{ik}^{(k-1)}|$, $i = \overline{k, n}$. Для того щоб ведучий елемент зайняв відповідне місце, переставляються рядки k та l в матриці A_{k-1} за допомогою матриці перестановок:

$$\tilde{A}_k = P_k A_{k-1},$$

де P_k – це матриця перестановок, отримана з одиничної матриці перестановкою k та l рядків:

$$P_k = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ l \\ \\ k \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Прямий хід Гаусса в матричній формі:

$$A_k = M_k \tilde{A}_k,$$

де M_k – матриця розмірності $n \times n$:

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{kk} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & m_{(k+1)k} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{nk} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

$$m_{kk} = \frac{1}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad m_{ik} = \frac{-\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad i = \overline{k+1, n}.$$

За допомогою прямого ходу методу Гаусса в матричній формі:

$$M_n P_n ... M_2 P_2 M_1 P_1 A x = M_n P_n ... M_2 P_2 M_1 P_1 b,$$

зводимо систему до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + ... + a_{1n}^{(1)} x_n = & a_{1(n+1)}^{(1)}; \\ \qquad x_2 + ... + a_{2n}^{(2)} x_n = & a_{2(n+1)}^{(2)}; \\ .... & \\ \qquad\qquad x_n = & a_{n(n+1)}^{(n)}. \end{cases}$$

Розв'язок знаходимо за допомогою зворотнього ходу Гаусса: $x_n = a^n_{n(n+1)}$, $\quad x_i = a^{(i)}_{i(n+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a^{(i)}_{ij}$, $\quad i = \overline{n-1,1}$.

Складність методу Гаусса: $Q(n) = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Зауваження. Методом Гаусса з вибором головного можна знайти визначник:

$$detA = (-1)^p\ \tilde{a}^{(1)}_{11}\ \tilde{a}^{(2)}_{22}\ ...\ a^{(n)}_{nn} = (-1)^p\ a^{(0)}_{11}\ a^{(1)}_{22}\ ...\ a^{(n-1)}_{nn},$$

де p – кількість перестановок.

Зауваження. При реалізації методу Гаусса з вибором головного по рядках:

$$a_{kl} = \max_j |a^{(k-1)}_{kj}|, \quad j = \overline{k,n}; \qquad \tilde{A}_k = A_{k-1}P_k,$$

також при перестановці стовпців необхідно перенумеровувати змінні.

Зауваження. При реалізації методу Гаусса з вибором головного за всією матрицею переставляються рядочки і стовпчики.

Приклад. Знайти розв'язок системи методом Гауса з вибором головного по стовпцях. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо до розширеної матриці, в якості ведучого елементу оберемо максимальний по модулю у стовпці:

$$\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 3 \end{array}\right); \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_1 = P_1\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right); \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{A_1} = M_1\tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{5/3} & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right); \qquad P_2 = E; \qquad \tilde{A}_2 = P_2\overline{A_1} = \overline{A_1};$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \overline{A_2} = M_2\tilde{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4/5} & 0 \end{array}\right)$$

$P_3 = E;$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix};$$

$\tilde{A}_3 = P_3\overline{A_2} = \overline{A_2};$

$$\overline{A_3} = M_3\tilde{A}_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad \begin{array}{l} x_3 = 0; \\ x_2 = 0 - 3/5x_3 = 0; \\ x_1 = 1 - 5/3x_2 - 2x_3 = 1. \end{array}$$

Система розв'язана, переходимо до знаходження визначника, тому визначимо кількість фактичних перестановок. Оскільки

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad P_2 = E; \qquad P_3 = E,$$

то кількість перестановок $p = 1$.

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \; \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 2 \\ 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}; \; \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix};$$

$DetA = (-1)^p \; \tilde{a}_{11}^{(1)} \; \tilde{a}_{22}^{(2)} \; \tilde{a}_{33}^{(3)} = (-1)^1 \cdot 3 \cdot 5/3 \cdot 4/5 = -4.$

Отже, розв'язок системи: $(1; 0; 0)^T$, $DetA = -4$.

Метод квадратного кореня

Метод квадратного кореня Використовується, якщо матриця A — симетрична, т.т. $A = A^T$. Матрицю A подамо у вигляді $A = S^T DS$, де

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & ... & s_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & s_{nn} \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pm 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \pm 1 \end{pmatrix};$$

$$d_{ii} = \operatorname{sgn}\left|a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi}^2 d_{pp}\right|; \; s_{ii} = \sqrt{\left|a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi}^2 d_{pp}\right|}, \; i = \overline{1, n};$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} s_{pi} d_{pp} s_{pj}}{d_{ii} s_{ii}}, \qquad i = \overline{2, n-1}, \qquad j = \overline{i+1, n}.$$

Подальше рішення зводиться до розв'язання двох систем лінійних алгебраїчних рівнянь з трикутними матрицями, з першої системи знаходять y:

$$S^T D y = b,$$

а з другої – x:

$$Sx = y.$$

Складність методу квадратного кореня: $Q(n) = \frac{1}{3} n^3 + O(n^2)$.

Зауваження. Методом квадратних коренів можна знайти визначник:

$$det A = \prod_{k=1}^{n} d_{kk} s_{kk}^2.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом квадратних коренів. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо до матричної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A = A^T$, можна використовувати метод квадратних коренів. Знайдемо матриці S та D:

$d_{11} = \operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn}(1) = 1;$

$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|} = \sqrt{|1|} = 1;$

$s_{12} = \dfrac{a_{12}}{d_{11} s_{11}} = \dfrac{2}{1 \cdot 1} = 2;$

$s_{13} = \dfrac{a_{13}}{d_{11} s_{11}} = \dfrac{3}{1 \cdot 1} = 3;$

$d_{22} = \operatorname{sgn}(a_{22} - s_{12}^2 d_{11}) = \operatorname{sgn}(5 - 2^2 \cdot 1) = \operatorname{sgn} 1 = 1;$

$s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}|} = \sqrt{|1|} = 1;$

$s_{23} = \dfrac{a_{23} - s_{12} d_{11} s_{13}}{d_{22} s_{22}} = \dfrac{5 - 2 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 1} = -1;$

$d_{33} = \operatorname{sgn}(a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}) = -1;$

$s_{33} = \sqrt{|a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}|} = \sqrt{|-4|} = 2.$

Всі елементи знайдені, заповнюємо матриці D та S:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Переходимо до розв'язання систем:

$$S^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$S^T D y = b;$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1; \\ y_2 = 2 - 2 \cdot 1 = 0; \\ y_3 = -\dfrac{1}{2}(3 - 3 \cdot 1 + 0) = 0. \end{array}$$

$Sx = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_3 = 0; \\ x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1. \end{array}$$

Розв'язок системи знайдено, знайдемо визначник:

$$DetA = \prod_{i=1}^{3} d_{ii} s_{ii}^2 = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 = -4.$$

Отже, розв'язок системи: $(1; 0; 0)^T$, $DetA = -4$.

Метод прогонки

Метод прогонки використовується, якщо матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь A є тридіагональною. Цей метод є частковим випадком методу Гаусса.

Нехай маємо систему вигляду:

$$\begin{cases} -c_0y_0+b_0y_1=-f_0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_iy_{i-1}-c_iy_i+b_iy_{i+1}=-f_i, \quad i=\overline{1,n-1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_ny_{n-1}-c_ny_n=-f_n; \end{cases}$$

Достатня умова стійкості. Нехай коефіцієнти $a_0, b_0 = 0$; $c_0, c_n \neq 0$; $a_i, b_i, c_i \neq 0$; $i=\overline{1,n-1}$. Якщо виконуються умови:

1) $|c_i| \geqslant |a_i|+|b_i|, \quad i=\overline{0,n}$;

2) $\exists\, i : |c_i| > |a_i|+|b_i|$,

то метод є стійким: $|\alpha_i| \leqslant 1$; $|z_i|>1$, $i=\overline{1,n}$.

Прямий хід метода Гаусса в методі прогонки відповідає знаходженню прогонкових коефіцієнтів:

$$\alpha_1=\frac{b_0}{c_0}; \qquad \beta_1=\frac{f_0}{c_0}; \qquad \alpha_{i+1}=\frac{b_i}{z_i}; \qquad \beta_{i+1}=\frac{f_i+a_i\beta_i}{z_i};$$

$$z_i=c_i-\alpha_i a_i; \qquad i=\overline{1,n-1}.$$

Зворотній ход:

$$y_n=\frac{f_n+a_n\beta_n}{z_n}; \qquad y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1}, \qquad i=\overline{n-1,0}.$$

Складність методу прогонки: $Q(n)=8n-2$.

Зауваження. Методом прогонки можна знайти визначник:

$$DetA=-c_0\cdot(-z_1)\cdot\ldots\cdot(-z_n).$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом прогонки. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1+x_2=1; \\ x_1+3x_2+2x_3=1; \\ x_2+2x_3=1. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо до матричної форми:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}; \quad b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця A – тридіагональна, можна використовувати метод прогонки. Перевіримо достатні умови стійкості:

$$\left.\begin{array}{l} |1| \geqslant |1| \\ |3| \geqslant |1| + |2| \\ |2| > |1| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{метод стійкий.}$$

Знайдемо прогонкові коефіцієнти:

$\alpha_1 = \dfrac{b_0}{c_0} = \dfrac{1}{-1} = -1;$

$\beta_1 = \dfrac{f_0}{c_0} = \dfrac{-1}{-1} = 1;$

$z_1 = c_1 - \alpha_1 a_1 = -3 - (-1) \cdot 1 = -2;$

$\alpha_2 = \dfrac{b_1}{z_1} = \dfrac{2}{-2} = -1;$

$\beta_2 = \dfrac{f_1 + a_1 \beta_1}{z_1} = \dfrac{-1 + 1 \cdot 1}{-2} = 0;$

$z_2 = c_2 - \alpha_2 a_2 = -2 - (-1) \cdot 1 = -1;$

$y_2 = \dfrac{f_2 + a_2 \beta_2}{z_2} = \dfrac{-1 + 1 \cdot 0}{-1} = 1;$

$y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 = -1 \cdot 1 + 0 = -1;$

$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 = -1 \cdot (-1) + 1 = 2.$

Розв'язок системи знайдемо, знайдемо визначник:
$DetA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot (-z_2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$

Отже, розв'язок системи: $(2; -1; 1)^T$, $DetA = 2$.

Метод Якобі

Метод Якобі є ітераційним методом для розв'язання СЛАР $Ax = b$, т.т. розв'язок знаходимо із заданою точністю ε. Початкове наближення x^0 обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}. \tag{21}$$

Достатня умова збіжності. Якщо $\forall i : i = \overline{1,n}$ виконується нерівність:

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

то ітераційний процес методу Якобі (21) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Умова припинення методу: $||x^n - x^{n-1}|| \leqslant \varepsilon$.

Зауваження. В якості норми зазвичай обирають неперервну (кубічну) норму вектору: $||x||_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу Якобі (21) збігається тоді і тільки тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Зауваження. При розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь перевіряють достатні умови збіжності. Якщо в задачі необхідно щось довести, знайти область збіжності, то використовують необхідні і достатні умови збіжності.

Приклад. Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Якобі з точністю $0,5$.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75; \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь до матричної форми:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array}\right).$$

Перш ніж розпочинати ітераційний процес, перевіримо достатню умову збіжності:

$$\left.\begin{array}{l} |3| \leqslant |-1| + |1| \\ |2| \leqslant |-1| + |0,5| \\ |3| \leqslant |1| + |0,5| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{метод Якобі збігається}$$

Побудуємо ітераційний процес:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{3}(x_2^k - x_3^k + 1);$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}(x_1^k - 0,5x_3^k + 1,75);$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{3}(-x_1^k - 0,5x_2^k + 2,5).$$

Оберемо довільне початкове наближення: $x^0 = (0;0;0)^T$.

Ітерація 1.

$x_1^1 = 1/3 \cdot (0 - 0 + 1) = 0,33;$
$x_2^1 = 1/2 \cdot (0 - 0,5 \cdot 0 + 1,75) = 0,88;$
$x_3^1 = 1/3 \cdot (-0 - 0,5 \cdot 0 + 2,5) = 0,83.$

Перевіримо умову припинення:
$||x^1 - x^0|| = ||(0,33;0,88;0,83)^T - (0;0;0)^T||_\infty = 0,88 > \varepsilon.$

Ітерація 2.

$x_1^2 = 1/3 \cdot (0,88 - 0,83 + 1) = 0,35;$
$x_2^2 = 1/2 \cdot (0,33 - 0,5 \cdot 0,83 + 1,75) = 0,83;$
$x_3^2 = 1/3 \cdot (-0,33 - 0,5 \cdot 0,88 + 2,5) = 0,58.$

Перевіримо умову припинення:
$||x^2 - x^1|| = ||(0,02;-0,05;-0,25)^T||_\infty = 0,25 \leqslant \varepsilon.$

Розв'язок системи з точністю 0.5: $(0,35;0,83;0,58)^T$.

Приклад. Знайти область збіжності методу Якобі для системи лінійних алгебраїчних рівнянь із матрицею

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Застосуємо критерій збіжності методу Якобі:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \lambda\alpha & \beta \\ 0 & \beta & \lambda\alpha \end{vmatrix} = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\beta\lambda\alpha - 0) = 0;$$

$\lambda^3\alpha^3 - \lambda\alpha\beta^2 - \lambda\alpha\beta^2 = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - 2\beta^2) = 0;$

$\lambda\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2\alpha^2 - 2\beta^2 = 0; \quad \lambda = \dfrac{\sqrt{2}\beta}{\alpha}$; $|\lambda| < 1 \quad \Rightarrow$ $\left|\dfrac{\sqrt{2}\beta}{\alpha}\right| < 1; \quad \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Отже, область збіжності методу Якобі: $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Метод Зейделя

Метод Зейделя є ітераційним методом для розв'язання СЛАР $Ax = b$, т.т. розв'язок знаходимо із заданою точністю ε. Початкове наближення x^0 обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}. \tag{22}$$

Достатня умова збіжності 1. Якщо $\forall i : i = \overline{1, n}$ виконується нерівність

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

то ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Достатня умова збіжності 2. Якщо $A = A^T > 0$, то ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Умова припинення: $||x^n - x^{n-1}|| \leqslant \varepsilon$.

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається тоді і тільки тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом Зейделя з точністю $0,5$.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75; \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь до матричної форми:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array}\right).$$

Перевіримо достатню умову збіжності, наприклад, другу:

$A = A^T$ – перша частина виконується;

$$\left.\begin{array}{l} Det(3) = 3 > 0; \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0; \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 3 \end{vmatrix} = 11,25 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A > 0 \quad \Rightarrow$$

$A = A^T > 0$, тому метод Зейделя збігається. Побудуємо ітераційний процес:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{3}(x_2^k - x_3^k + 1);$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}(x_1^{k+1} - 0,5x_3^k + 1,75);$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{3}(-x_1^{k+1} - 0,5x_2^{k+1} + 2,5).$$

Оберемо початкове наближення: $x^0 = (0;0;0)^T$.

Ітерація 1.
$x_1^1 = 1/3 \cdot (0 - 0 + 1) = 0,33;$
$x_2^1 = 1/2 \cdot (0,33 - 0,5 \cdot 0 + 1,75) = 1,04;$
$x_3^1 = 1/3 \cdot (-0,33 - 0,5 \cdot 1,04 + 2,5) = 0,55.$
Перевіримо умову припинення:
$||x^1 - x^0|| = ||(0,33; 1,04; 0,55)^T - (0;0;0)^T||_\infty = 1,04 > \varepsilon.$

Ітерація 2.
$x_1^2 = 1/3 \cdot (1,04 - 0,55 + 1) = 0,50;$
$x_2^2 = 1/2 \cdot (0,50 - 0,5 \cdot 0,55 + 1,75) = 0,99;$
$x_3^2 = 1/3 \cdot (-0,50 - 0,5 \cdot 0,99 + 2,5) = 0,50.$
Перевіримо умову припинення:
$||x^2 - x^1|| = ||(0,02; -0,05; -0,25)^T||_\infty = 0,17 \leqslant \varepsilon.$

Отже, розв'язок системи з точністю $0,5$: $(0,50; 0,99; 0,50)^T$.

Приклад. Знайти область збіжності методу Зейделя для системи лінійних алгебраїчних рівнянь із матрицею

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Застосуємо критерій збіжності методу Зейделя:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \beta & 0 \\ \lambda\beta & \lambda\alpha & \beta \\ 0 & \lambda\beta & \lambda\alpha \end{vmatrix} = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - \lambda\beta^2) - \beta(\lambda^2\beta\alpha - 0) = 0;$$

$$\lambda^3\alpha^3 - \lambda^2\alpha\beta^2 - \lambda^2\alpha\beta^2 = \lambda^2\alpha(\lambda\alpha^2 - 2\beta^2) = 0;$$

$$\lambda^2\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\alpha^2 - 2\beta^2 = 0; \quad \lambda = \frac{2\beta^2}{\alpha^2};$$

$$|\lambda| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\right| < 1; \quad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, область збіжності методу Зейделя: $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Метод простої ітерації

Ітераційний процес має вигляд:

$$x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - f). \tag{23}$$

Достатня умова збіжності. Якщо покласти $\tau \leqslant \dfrac{2}{L}$, де $l \leqslant |\lambda_i(A)| \leqslant L$, $i = \overline{1, n}$, $\lambda(A)$ – власні значення A, то ітераційний процес (23) збігається, при чому швидкість збіжності є лінійною.

Зауваження. Якщо в ітераційному процесі (23) покласти

$$\tau_o = \frac{2}{L + l},$$

то кількість ітерацій буде мінімальною.

Зауваження. Щоб уникнути знаходження власних значень при обчисленні τ, можна використовувати нерівність:

$$||A||_\infty \geqslant \max_i |\lambda(A)|, \quad i = \overline{1, n}, \qquad ||A||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу простої ітерації (23) збігається тоді і тільки тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом простої ітерації з точністю $0,5$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75; \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо до матричної форми:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array} \right)$$

Побудуємо ітераційний процес:

$x_1^{k+1} = x_1^k - \tau(3x_1^k - x_2^k + x_3^k - 1);$

$x_2^{k+1} = x_2^k - \tau(-x_1^k + 2x_2^k + 0,5x_3^k - 1,75);$

$x_3^{k+1} = x_3^k - \tau(x_1^k + 0,5x_2^k + 3x_3^k - 2,5)$.

Оберемо τ: $\tau \leqslant \dfrac{2}{L}$, де $L \geqslant |\lambda_i(A)|$, $||A||_\infty \geqslant \max\limits_i |\lambda(A)|$, $i = \overline{1,3}$;

$||A||_\infty = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^{3} |a_{ij}| \right) = 5$, тому $\tau \leqslant \dfrac{2}{||A||_\infty} = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

Оберемо початкове наближення: $x^0 = (0; 0; 0)^T$.

Ітерація 1.

$x_1^1 = 0 - 0,4(3 \cdot 0 - 0 + 0 - 1) = 0,4$;

$x_2^1 = 0 - 0,4(-0 + 2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 - 1,75) = 0,7$;

$x_3^1 = 0 - 0,4(0 + 0,5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2,5) = 1$.

Перевіримо умову припинення:

$||x^1 - x^0||_\infty = ||(0,4; 0,7; 1)^T||_\infty = 1 > \varepsilon$.

Ітерація 2.

$x_1^2 = 0,4 - 0,4(3 \cdot 0,4 - 0,7 + 1 - 1) = 0,2$;

$x_2^2 = 0,7 - 0,4(-0,4 + 2 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 1 - 1,75) = 0,8$;

$x_3^2 = 1 - 0,4(0,4 + 0,5 \cdot 0,7 + 3 \cdot 1 - 2,5) = 0,5$.

Перевіримо умову припинення:

$||x^1 - x^0||_\infty = ||(-0,2; 0,1; -0,5)^T||_\infty = 0,5 \leqslant \varepsilon$.

Розв'язок системи з точністю 0,5: $(0,2; 0,8; 0,5)^T$.

Число обумовленості

Число обумовленості є мірою невизначеності системи лінійних алгебраїних рівнянь та показує в скількі разів збільшиться похибка вихідних даних. Число обумовленості визначається за формулою:

$$Cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||.$$

Властивості числа обумовленості:

1) $Cond(A) \geqslant 1$;

2) $Cond(AB) \leqslant Cond(A)Cond(B)$;

3) $Cond(A) \geqslant \dfrac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$;

4) $A^T = A^{-1} \Rightarrow Cond(A) = 1$.

Теорема. *Нехай A - невироджена $n \times n$ матриця, $\overline{A} = A + \Delta A$, при цьому $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тоді якщо x та $\overline{x} = x + \Delta x$ є розв язками систем $Ax = b$ та $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$, $\overline{b} = b + \Delta b$, то має мічце оцінка*

$$\delta(x) = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Зауваження. При обчисленні числа обумовленості можна використовувати одну із норм матриці:

$$||A||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right); \qquad ||A||_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Приклад. Знайти число обумовленості матриці A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. $DetA = 1 \cdot 0,98 - 0,99 \cdot 0,98 = 10^{-4} \neq 0$, тому А – невироджена, можна знайти число обумовленості.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9802 & -9900 \\ -9900 & 10000 \end{pmatrix}$;

$||A||_\infty = \max\{1,99; 1,97\} = 1,99$;

$||A^{-1}||_\infty = \max\{19702; 19900\} = 19900$;

$Cond(A) = 1,99 \cdot 19900 = 39601$.

Отже, число обумовленості дорівнює 39601.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти розв'язок системи методом Гаусса з вибором головного по стовпцях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + 13x_2 + x_3 = -12; \\ x_1 + x_2 + 11x_3 = 10. \end{cases}$$

2. Знайти визначник методом квадратних коренів

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

3. Знайти розв'язок системи методом прогонки

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = -6; \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -8; \\ x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Знайти визначник методом Гаусса з вибором головного по рядках

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

5. Знайти розв'язок системи методом квадратних коренів

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + x_2 = 9. \end{cases}$$

6. Знайти визначник методом прогонки

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -4; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -5; \\ x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

7. Знайти розв'язок системи методом Гаусса з вибором головного за всією матрицею

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

8. Зробити дві ітерації методом Якобі. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,01$.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -4; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2; \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

9. Зробити дві ітерації методом Зейделя. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,01$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -4; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2; \\ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Знайти область збіжності методу Зейделя для системи $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Знайти область збіжності методу Якобі для системи $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Знайти число обумовленості матриці

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. Знайти число обумовленості матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$