Tema 4.2

Espacio vectorial euclídeo y producto escalar

INDICE DE CONTENIDOS

1. Formas bilineales y cuadráticas.

1.1. Formas bilineales

Definición: ***Aplicación bilineal***

Sean V_1, V_2 y W tres K-espacios vectoriales.

Una ***aplicación bilineal*** es una función $F: V_1 \times V_2 \to W$ tal que:

1. $\forall u, v \in V_1$ y $\forall h \in V_2$ se verifica $F(u+v, h) = F(u,h) + F(v,h)$
2. $\forall u \in V_1$, $\forall h \in V_2$ y $\forall k \in K$ se verifica $F(k \cdot u, h) = k \cdot F(u,h)$
3. $\forall u \in V_1$ y $\forall h, g \in V_2$ se verifica $F(u, h+g) = F(u,h) + F(u,g)$
4. $\forall u \in V_1$, $\forall h \in V_2$ y $\forall k \in K$ se verifica $F(u, k \cdot h) = k \cdot F(u,h)$

Observación:

1. Es decir que $\forall w \in V$ la aplicación $F(\_, w): V \to \mathbb{R}$ es lineal (equivalente a las propiedades 1 y 2) y la aplicación $F(w, \_): V \to \mathbb{R}$ es lineal (equivalente a las propiedades 3 y 4)
2. Las cuatro condiciones anteriores se pueden resumir en dos únicas condiciones dando una definición alternativa y equivalente de la siguiente forma:

$F: V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal si $\forall u, u', v, v' \in V$ y $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se verifica:

1*. $F(au + bu', v) = aF(u,v) + bF(u',v)$

2*. $F(u, av + bv') = aF(u,v) + bF(u,v')$

Ejemplo1.1:

Consideremos los espacios vectoriales reales $V_1 = \mathbb{R}^2$, $V_2 = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

La aplicación $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : F(u,v) = u^t \cdot A \cdot v$ es una aplicación bilineal.

Observa que si $u = (u_1, u_2)$, $u' = (u'_1, u'_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $v' = (v'_1, v'_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica que:

1. Esta aplicación está bien definida:

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix} =$$
$$= u_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + u_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) =$$
$$= a_{11}v_1u_1 + a_{12}v_2u_1 + a_{21}v_1u_2 + a_{22}v_2u_2 \in \mathbb{R}$$

$$F(u,v)=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}u_1+a_{21}u_2 & a_{12}u_1+a_{22}u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=$$
$$=v_1\left(a_{11}u_1+a_{21}u_2\right)+u_2\left(a_{12}u_1+a_{22}u_2\right)=$$
$$=a_{11}v_1u_1+a_{12}v_2u_1+a_{21}v_1u_2+a_{22}v_2u_2\in\mathbb{R}$$

2. Y además se verifican las propiedades de bilinealidad:

$$F(\lambda u+\beta u',v)=\begin{pmatrix}\lambda u_1+\beta u'_1 & \lambda u_2+\beta u'_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{22}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=$$
$$=\left(\lambda(u_1,u_2)+\beta(u'_1,u'_2)\right)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{22}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=$$
$$=\lambda(u_1,u_2)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{22}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}+\beta(u'_1,u'_2)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{22}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=$$
$$=\lambda F(u,v)+\beta F(u',v)$$

De igual forma se demuestra que $\forall u\in\mathbb{R}^2$ la aplicación $F(u,\_):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es lineal (3 y 4)

<u>**Notación**</u>:

Para que las definiciones tengan sentido (producto de matrices y vectores…) empleamos la notación

u para expresar un vector columna $u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$ y la notación u^t para expresar un vectora fila,

$u^t=(u_1,u_2,...,u_n)$

<u>**Definición:**</u> ***Forma bilineal***

Sea V un K-espacio vectorial. Una ***forma bilineal*** es una aplicación bilineal $F:V\times V\to K$

<u>**Ejemplo 1.2**</u>:

Consideremos los espacios vectoriales reales $V_1=\mathbb{R}^2,\ V_2=\mathbb{R}^2, W=\mathbb{R}$ y

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{22}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in M_{2\times2}(\mathbb{R}).$$

La aplicación $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:F(u,v)=u^t\cdot A\cdot v$ es una forma bilineal.

Definiciones:

Sea V un K-espacio vectorial y sea $F : V \times V \to K$ una forma bilineal.

1) Se dice que F es una ***forma bilineal simétrica*** si se verifica que:

$\forall u, v \in V \;\; F(u,v) = F(v,u)$

2) Se dice que F es una ***forma bilineal antisimétrica*** si se verifica que:

$\forall u, v \in V \;\; F(u,v) = -F(v,u)$

Observación:

El conjunto de todas las **formas bilineales simétricas** sobre un K-espacio vectorial forma un K-espacio vectorial con las operaciones suma de formas bilineales y producto de forma bilineal por un escalar.

El conjunto de todas las **formas bilineales antisimétricas** sobre un K-espacio vectorial forma un K-espacio vectorial con las operaciones suma de formas bilineales y producto de forma bilineal por un escalar

Ejemplo 1.3:

La aplicación determinante aplicada a vectores de $\mathbb{R}^2$ es una forma bilineal antisimétrica.

$$\det(,) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u,v) \to \det(u,v)$$

$$(u,v) = ((u_1,u_2),(v_1,v_2)) \to \det(u,v) = \det((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1v_2 - v_1u_2$$

$$(v,u) = ((v_1,v_2),(u_1,u_2)) \to \det(v,u) = \det((v_1,v_2),(u_1,u_2)) = \begin{vmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{vmatrix} = v_1u_2 - u_1v_2 = -\det(u,v)$$

Ejemplo 1.4:

Dados $u = (u_1,u_2,u_3), v = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$.

La siguiente aplicación es una forma bilineal:

$$F(u,v) = u_1v_1 - u_1v_3 + 2u_2v_3 + u_3v_1 - 3u_3v_2 + u_3v_3$$

Sean $u = (u_1,u_2,u_3), u' = (u'_1,u'_2,u'_3), v = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ y $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Demostremos

1*, es decir que , $\forall v \in V$ la aplicación $F(\_,v) : V \to \mathbb{R}$ es lineal.

$$F(au+bu',v)=F\left((au_1+bu'_1,au_2+bu'_2,au_3+bu'_3),(v_1,v_2,v_3)\right)\underset{\text{Definición } F}{=}$$
$$=(au_1+bu'_1)v_1-(au_1+bu'_1)v_3+2(au_2+bu'_2)v_3+(au_3+bu'_3)v_1-3(au_3+bu'_3)v_2+(au_3+bu'_3)v_3=$$
$$=(au_1v_1+bu'_1v_1)-(au_1v_3+bu'_1v_3)+2(au_2v_3+bu'_2v_3)+(au_3v_1+bu'_3v_1)-3(au_3v_2+bu'_3v_2)+(au_3v_3+bu'_3v_3)=$$
$$=au_1v_1+bu'_1v_1-au_1v_3-bu'_1v_3+2au_2v_3+2bu'_2v_3+au_3v_1+bu'_3v_1-3au_3v_2-3bu'_3v_2+au_3v_3+bu'_3v_3\underset{\text{Conmutatividad}}{=}$$
$$=\underbrace{au_1v_1-au_1v_3+2au_2v_3+au_3v_1-3au_3v_2+au_3v_3}_{\text{distributiva con } a}+\underbrace{bu'_1v_1-bu'_1v_3+2bu'_2v_3+bu'_3v_1-3bu'_3v_2+bu'_3v_3}_{\text{distributiva con } b}=$$
$$=a(u_1v_1-u_1v_3+2u_2v_3+u_3v_1-3u_3v_2+u_3v_3)+b(u'_1v_1-u'_1v_3+2u'_2v_3+u'_3v_1-3u'_3v_2+u'_3v_3)\underset{\text{Definición } F}{=}$$
$$=aF(u,w)+bF(u',w)$$

De igual forma se demuestra 2*, es decir que, $\forall u\in\mathbb{R}^3$ la aplicación $F(u,\_):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es lineal

Ejemplo 1.5:

Para cualquier par de vectores $u=(u_1,u_2,u_3),v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$ la siguiente aplicación es una forma bilineal:

$F(u,v)=2u_1v_1-u_1v_2+4u_1v_3+3u_2v_1-5u_2v_3+7u_3v_1-5u_3v_2-4u_3v_3$ es

Notación:

$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$ vector columna y $u^t=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ vector fila

1.2. Representación matricial de formas bilineales

Sea V un K-espacio vectorial, sea $B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ una base fija de V y sea $F:V\times V\to K$ una forma bilineal.

La matriz $A_F\in M_{n\times n}(K)$ tal que $a_{ij}=F(u_i,u_j)$ $\forall i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ verifica que:

$$F(v,w)=v^t\cdot A\cdot w=(v_1,v_2,\dots,v_n)_B\cdot\begin{pmatrix}F(u_1,u_1)&F(u_1,u_2)&\cdots&F(u_1,u_n)\\F(u_2,u_1)&F(u_2,u_2)&\cdots&F(u_2,u_n)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\F(u_n,u_1)&F(u_n,u_2)&\cdots&F(u_n,u_n)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}_B$$

$\forall v,w\in V$ tales que están representados en función de la base B

También podemos escribir $M(F)_B=A_F$ para tener en cuenta la base que hemos considerado para construir la matriz.

Definiciones:

Se dice que $A \in M_{n\times n}(K)$ es una matriz simétrica si verifica que $A = A^t$

Se dice que $A \in M_{n\times n}(K)$ es una matriz antisimétrica si verifica que $A = -A^t$

Proposición:

Sea V un K-espacio vectorial, sea $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ una base fija de V y sea $F: V\times V \to K$ una forma bilineal.

F es una forma bilineal simétrica $\Leftrightarrow A_F = M(F)_B$ es una matriz simétrica

F es una forma bilineal antisimétrica $\Leftrightarrow A_F = M(F)_B$ es una matriz antisimétrica

Definición:

Sea V un K-espacio vectorial, sea $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ una base fija de V y sea $F: V\times V \to K$ una forma bilineal.

Se llama ***rango de una forma bilineal*** F al rango de la matriz que la representa

$rg(F) = rg(A_F) = rg\left(M(F)_B\right)$

Se dice que una ***forma bilineal es degenerada*** cuando $rg(F) < n$, en ese caso existirá algún vector $u_0 \in V,\ u_0 \neq \overline{0}$ tal que $\forall v \in V,\ F(u_0, v) = F(v, u_0) = 0$.

Ejemplo 2.1:

Considerando la base canónica de $\mathbb{R}^3, B_3 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

La matriz asociada a la forma bilineal dada en el ejemplo 1.1:

$$F(u,v) = u_1v_1 - u_1v_3 + 2u_2v_3 + u_3v_1 - 3u_3v_2 + u_3v_3$$

Toma la forma

$$A_F = M(F)_{B_3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo $a_{ij} = F(e_i, e_j)\ \forall i, j \in \{1,2,3\}$

$$a_{11} = F(e_1, e_1) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$
$$a_{12} = F(e_1, e_2) = 0_{(F(u,v)=u_1v_1-u_1v_3+2u_2v_3+u_3v_1-3u_3v_2+u_3v_3)}$$
$$a_{13} = F(e_1, e_3) = -1_{(F(u,v)=u_1v_1-u_1v_3+2u_2v_3+u_3v_1-3u_3v_2+u_3v_3)}$$
$$a_{21} = F(e_2, e_1) = 0_{(F(u,v)=u_1v_1-u_1v_3+2u_2v_3+u_3v_1-3u_3v_2+u_3v_3)}$$
$$a_{22} = F(e_2, e_2) = 0_{(F(u,v)=u_1v_1-u_1v_3+2u_2v_3+u_3v_1-3u_3v_2+u_3v_3)}$$
$$a_{23} = F(e_2, e_3) = 2_{(F(u,v)=u_1v_1-u_1v_3+2u_2v_3+u_3v_1-3u_3v_2+u_3v_3)}$$
$$a_{31} = F(e_3, e_1) = 1_{(F(u,v)=u_1v_1-u_1v_3+2u_2v_3+u_3v_1-3u_3v_2+u_3v_3)}$$
$$a_{32} = F(e_3, e_2) = -3_{(F(u,v)=u_1v_1-u_1v_3+2u_2v_3+u_3v_1-3u_3v_2+u_3v_3)}$$
$$a_{33} = F(e_3, e_3) = 1_{(F(u,v)=u_1v_1-u_1v_3+2u_2v_3+u_3v_1-3u_3v_2+u_3v_3)}$$

Por tanto la matriz asociada a la forma bilineal F respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ toma la forma:

$$A_F = M(F)_{B_3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cualquier par de vectores $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ se verifica que:

$$u^t A_F v = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (u_1 + u_3, -3u_3, -u_1 + 2u_2 + u_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$$
$$= (u_1 + u_3)v_1 - 3u_3v_2 + (-u_1 + 2u_2 + u_3)v_3 =$$
$$= u_1v_1 + u_3v_1 - 3u_3v_2 - u_1v_3 + 2u_2v_3 + u_3v_3 =$$
$$= u_1v_1 - u_1v_3 + 2u_2v_3 + u_3v_1 - 3u_3v_2 + u_3v_3 = F(u, v)$$

1.3. Formas cuadráticas

Definición: ***Forma cuadrática***

Sea V un K-espacio vectorial y sea $F : V \times V \to K$ una forma bilineal.

Se dice que $Q_F : V \to K : Q_F(u) = F(u, u) \in K$ es la ***forma cuadrática asociada*** a la forma bilineal F.

Observaciones:

Toda forma bilineal produce una forma cuadrática asociada, pero por cada forma cuadrática podemos encontrar multitud de formas bilineales asociadas a ella, que la inducen.

Si embargo, dada una forma cuadrática, existe una única forma bilineal simétrica que induce la forma cuadrática.

Si A_F es la matriz asociada a la forma bilineal F, la forma cuadrática asociada se puede expresar de la forma $Q(u)=u^t \cdot A \cdot u \quad \forall u \in V$, es decir, su representación matricial coincide.

1.4. Diagonalización de formas bilineales

Definición: ***Base conjugada***

Sea V un K-espacio vectorial, sea $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ una base de V y sea $F:V\times V\to K$ una forma bilineal simétrica.

Se dice que B es ***conjugada respecto a*** F si $F(u_i,u_j)=0 \ \forall i,j\in\{1,2,...,n\},\ i\neq j$ o equivalentemente $M(F)_B$ es una matriz diagonal.

Definición: ***conjunto conjugado de uno dado***

Sea V un K-espacio vectorial, sea $F:V\times V\to K$ una forma bilineal simétrica arbitraria y sea $S=\{u_1,u_2,...,u_k\}\subset V$ un conjunto de vectores.

$S^c=\left\{v\in V,\ F(v,u_i)=F(u_i,v)=0\ \forall u_i\in S\ \left(\forall i\in\{1,2,...k\}\right)\right\}$ es el ***conjunto conjugado de de*** S ***respecto a*** F **.**

Proposición:

Sea V un K-espacio vectorial, sea $F:V\times V\to K$ una forma bilineal simétrica arbitraria.

Para todo conjunto de vectores $S=\{u_1,u_2,...,u_k\}\subset V$, su conjugado respecto a F, S^c, es un subespacio vectorial de V.

Además $V=L(S)\oplus S^c$.

Teorema:

Sea V un K-espacio vectorial, $\dim(V)=n$, y sea $F:V\times V\to K$ una forma bilineal simétrica.

Entonces existe una base $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ de V conjugada para F, es decir tal que:

$$M(F)_B=M(Q_F)_B=D=\begin{pmatrix} F(u_1,u_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F(u_2,u_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F(u_n,u_n) \end{pmatrix}$$

Demostración:

La demostración de este teorema es constructiva.

Se parte de un vector $u_1 \in V$, se construye el conjugado de ese vector y se añade un vector de forma que pertenezcan al conjugado $u_2 \in \{u_1\}^C$.

Se repite el proceso añadiendo a $\{u_1,u_2\}$ un vector $u_3 \in \{u_1,u_2\}^C$, y así sucesivamente hasta completar los elementos de una base.

Consecuencia:2.1 del guión puede servirte de ayuda.

Si $A \in M_{n\times n}(K)$ es una matriz simétrica, $A = A^t$, entonces existe una matriz diagonal $D \in M_{n\times n}(K)$ semejante a A, es decir, existe P inversible tal que $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$.

Recuerda que la matriz P no es más que una matriz de cambio de base:

$$F(u,v) = \underbrace{u_B{}^t}_{\text{Coordenadas de u respecto B}} \quad M(F)_B \quad \underbrace{v_B}_{\text{Coordenadas de v respecto B}} \underset{F\ \text{Simétrica}}{=}$$

$$= \underbrace{u_{B^*}{}^t}_{\text{Coordenadas de u respecto B}^*} \quad \underbrace{D}_{M(F)_{B^*}} \quad \underbrace{v_{B^*}}_{\text{Coordenadas de v respecto B}^*} =$$

$$\begin{cases} C_{BB^*}\cdot u_B = u_{B^*} \Rightarrow \left(C_{BB^*}\cdot u_B\right)^t = u_{B^*}{}^t = u_B{}^t\cdot C_{BB^*}{}^t \\ C_{BB^*}\cdot v_B = v_{B^*} \end{cases}$$

$$\underbrace{=}_{\substack{C_{BB^*}{}^t\cdot C_{BB^*} = I \\ C_{BB^*}\text{matriz ortogonal}}} \underbrace{u_B{}^t}_{\text{Coordenadas de u respecto B}} \quad C_{B^*B} M(F)_B\, C_{BB^*} \quad \underbrace{v_B}_{\text{Coordenadas de v respecto B}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{D}_{M(F)_{B^*}} = \underbrace{C_{BB^*}}_{P} M(F)_B \underbrace{C_{BB^*}}_{P^{-1}}$$

$\Rightarrow \exists P,$ inversible (ortogonal) tal que: $\underbrace{D}_{M(F)_{B^*}} = P\cdot M(F)_B\, P^{-1}$

$\Rightarrow M(F)_B$ (Simétrica) es semejante a una matriz diagonal D

Definiciones:

1. De entre todas las matrices diagonales asociadas a una forma bilineal simétrica, sólo tomaremos aquellas cuya diagonal esté formada por ceros, unos y menos unos, a esa matriz se la denomina ***matriz reducida.***

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1_{(s,s)} & & & & & & \\ & & & -1_{(s+1,s+1)} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1_{(r,r)} & & & \\ & & & & & & 0_{(r+1,r+1)} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0_{(n,n)} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

2. Si $A\in M_{n\times n}(K)$ es una matriz simétrica, $A=A^t$, consideremos su matriz semejante reducida, se denomina signatura de la matriz A, al para formado por el número de unos y menos unos en la matriz reducida semejante a ella, $sig(A)=(s,r-s)$.

Definiciones:

Sea V un K-espacio vectorial, y sea $F:V\times V\to K$ una forma bilineal simétrica.

1) Se dice que F es ***definida positiva*** si $F(u,u)>0,\ \forall u\in V,\ u\neq\overline{0}\ \left(sig(A_F)=(n,0)\right)$

2) Se dice que F es ***definida negativa*** si $F(u,u)<0,\ \forall u\in V,\ u\neq\overline{0}\ \left(sig(A_F)=(0,n)\right)$

3) Se dice que F es ***semidefinida positiva*** si $F(u,u)\geq 0,\ \forall u\in V\ \left(sig(A_F)=(r,0),r\leq n\right)$

4) Se dice que F es ***semidefinida negativa*** si $F(u,u)\leq 0,\ \forall u\in V\ \left(sig(A_F)=(0,r),r\leq n\right)$

Teorema de Sylvester:

Sea V un K-espacio vectorial, $\dim(V)=n$.

F es una forma bilineal simétrica definida positiva $\Leftrightarrow \forall B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ base de V se tiene que $A_F=M(F)_B$ es una matriz tal que todos sus menores principales son positivos.

Es decir si $A_F=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$, $\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{pmatrix}\right)>0\ \forall k\in\{1,2,...n\}$

Observación:

En realidad es suficiente con que exista una base para la que se verifique la condición.

2. Producto escalar. Espacio euclídeo.

2.1. Producto escalar

Sea V un K-espacio vectorial. Un ***producto escalar*** definido en V, es una forma bilineal simétrica definida positiva definida en él.

Para su notación no utilizaremos la vista en otras secciones sino $\langle .,. \rangle : V \times V \to K$.

Por lo visto en la sección anterior se verificará que $\forall u, u', v \in V,\ \forall \lambda \in K$:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. $\langle \lambda \cdot u, v\rangle = \langle v, \lambda \cdot u\rangle = \lambda \cdot \langle v, u\rangle$
3. $\langle u + u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle \left(= \langle v, u + u'\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v, u'\rangle\right)$
4. $\langle u, u\rangle > 0\ \forall u \neq \overline{0}$ y además $\langle u, \overline{0}\rangle = 0$

Por tanto un ***producto escalar*** definido en V, es una función que toma dos vectores y nos devuelve un escalar $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ y que verifica las cuatro propiedades anteriores (binilineal, simétrica y definida positivo)

<u>Ejemplo1:</u> ***Producto escalar usual en*** $\mathbb{R}^n$

El producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$ es la forma bilineal simétrica cuya matriz asociada es la identidad.

Como vamos a utilizarlo mucho simplifiquemos su notación y en lugar de utilizar $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, utilizaremos $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (u, v) \to u \cdot v$.

No creará confusión con el producto de vectores por escalares ya que en este caso sólo se aplica a dos vectores.

Veamos qué forma toma:

Sean $u = (u_1, u_2 \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$u \cdot v = (u_1, u_2 \ldots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (u_1, u_2 \ldots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n \in \mathbb{R}$$

Es claro que verifica todas las propiedades anteriores:

1. $u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + \ldots + v_n \cdot u_n = v \cdot u$
2. $(\lambda \cdot u) \cdot v = \lambda \cdot u_1 \cdot v_1 + \lambda \cdot u_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda \cdot u_n \cdot v_n = \lambda \cdot (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n) = \lambda \cdot (u \cdot v)$
3. $(u + u') \cdot v = u \cdot v + u' \cdot v$

<u>Demostración:</u>

$$(u+u')\cdot v=(u_1+u'_1)\cdot v_1+(u_2+u'_2)\cdot v_2+\ldots+(u_n+u'_n)\cdot v_n=$$
$$=(u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n)+(u'_1\cdot v_1+u'_2\cdot v_2+\ldots+u'_n\cdot v_n)=u\cdot v+u'\cdot v$$

4. $u\cdot u=u_1\cdot u_1+u_2\cdot u_2+\ldots+u_n\cdot u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i^2>0\ \forall u\neq\overline{0}$ y además

$$u\cdot\overline{0}=u_1\cdot 0+u_2\cdot 0+\ldots+u_n\cdot 0=\sum_{i=1}^{n}0=0$$

Ejemplo 2*: Producto escalar en* $\mathbb{R}_n(x)$

En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en los reales, $\mathbb{R}_n(x)=\{P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n : a_i\in\mathbb{R},\ \forall i\in\{1,2,\ldots,n\}\}$, podemos definir el siguiente producto escalar:

$$\langle P(x),Q(x)\rangle=\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$$

Siendo $P(x),Q(x)\in\mathbb{R}_n(x)$

Puedes comprobar, a partir de las propiedades del operador integral, que esta aplicación así definida verifica todas las propiedades de un producto escalar.

El espacio vectorial $\mathbb{R}_n(x)$ con sus operaciones usuales de suma de polinomios y producto por escalares y el producto escalar definido en este ejemplo forman un espacio vectorial euclídeo.

2.2. Espacio vectorial euclídeo

Un ***espacio vectorial euclídeo*** es un par $(V,\langle .,.\rangle)$, dónde V es un K- espacio vectorial y $\langle .,.\rangle$ es un producto escalar definido en V.

Ejemplo: $((\mathbb{R}^n,+,\cdot),\cdot)$

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales y el producto escalar usual forman un espacio vectorial euclídeo.

3. Normas de vectores y ángulos

3.1. Norma de un vector

Sea un espacio vectorial euclídeo $\left(V,\langle .,.\rangle\right)$.

Para todo $u \in V$, la ***norma de*** u se define como $\|u\| = +\sqrt{\langle u,u\rangle}$.

Propiedades:

$\forall u,v \in V,\ \forall \lambda \in K$ se verifica:

1. $\|u\| \geq 0,\ \forall u \in V, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overline{0}$

2. $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$

3. Desigualdad triangular: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Demostración:

La demostración de estas propiedades es inmediata a partir de las propiedades del producto escalar. Demostraremos sólo **3**. y el resto quedan como ejercicio

Demostrar $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, por ser $\|u+v\| \geq 0$, es equivalente a demostrar:

(1) $\|u+v\|^2 \leq \left(\|u\| + \|v\|\right)^2$

Como se tiene que:

(a) $\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u+v\rangle + \langle v,u+v\rangle =$

$$= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\| + \|v\| + 2\cdot\langle u,v\rangle$$

(b) $\left(\|u\| + \|v\|\right)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\|$

Sustituyendo estas dos expresiones en (1) podemos ver que basta demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz (2) $\left|\langle u,v\rangle\right| \leq \|u\|\cdot\|v\|$.

Como $\left|\langle u,v\rangle\right| \geq 0$, podemos demostrar una propiedad equivalente:

(3) $\langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\cdot\|v\|^2$

Sea $\lambda \in K$ arbitrario, se verifica que:

(i) $\langle u+\lambda\cdot v,u+\lambda\cdot v\rangle = \|u+\lambda\cdot v\|^2 \geq 0$ por ser una norma al cuadrado y

(ii) $\langle u+\lambda\cdot v,u+\lambda\cdot v\rangle = \langle u,u+\lambda\cdot v\rangle + \langle \lambda\cdot v,u+\lambda\cdot v\rangle =$

$$= \langle u,u\rangle + 2\cdot\lambda\cdot\langle u,v\rangle + \lambda^2\langle v,v\rangle = \lambda^2\underbrace{\|v\|^2}_{a} + \lambda\,\underbrace{2\cdot\langle u,v\rangle}_{b} + \underbrace{\|u\|^2}_{c}$$

Por tanto obtenemos que $\langle u+\lambda\cdot v,u+\lambda\cdot v\rangle \underset{\text{(ii)}}{=} a\lambda^2 + b\lambda + c \underset{\text{(i)}}{\geq} 0$, Es decir la representación de este polinomio en λ, es una parábola cuyos puntos (λ, y), con $y = f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, verifican que $y \geq 0$, es decir que a lo sumo tiene una raíz real y es cero, es decir que su discriminante será negativo o cero:

$$b^2 - 4ac = \left(2\cdot\langle u, v\rangle\right)^2 - 4\|v\|^2\|u\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle^2 \leq \|v\|^2\|u\|^2 \quad (3)$$

Como queríamos demostrar.

Por tanto, utilizando esta desigualdad en la primera expresión obtenemos que:

$$\|u+v\|^2 = \|u\| + \|v\| + 2\cdot\langle u, v\rangle \leq \|u\| + \|v\| + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\| = \left(\|u\| + \|v\|\right)^2 \quad (1)$$

Tomando raíces cuadradas positivas a ambos lados de la desigualdad queda demostrada la desigualdad triangular:

$$+\sqrt{\|u+v\|^2} \leq +\sqrt{\left(\|u\|+\|v\|\right)^2} \Leftrightarrow \|u+v\| \leq \left\|\|u\|+\|v\|\right\| = \|u\| + \|v\|$$

<u>Observaciones:</u>

Siempre que tengamos una norma definida sobre un espacio vectorial podremos hablar de ***espacio vectorial normado*** $(V, \|\ \|)$.

Todos los espacios euclídeos son espacios normados, pero el recíproco no siempre es cierto.

En realidad la norma de un vector expresa, de alguna forma, una longitud asociada a dicho vector.

<u>Teorema 3.1:</u> Desigualdad de Cauchy-Shwarz

En un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, todo producto escalar verifica la **desigualdad de Cauchy-Schwarz :** $\forall u, v \in V$ $\boxed{\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}$

En función de la norma asociada al producto escalar esta desigualdad se puede escribir $\forall u, v \in V$ $\boxed{|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|}$

<u>Ejemplo 3.1:</u> Norma euclídea o norma usual $\left((\mathbb{R}^n, +, \cdot), \|\ \|\right)$

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales y el producto escalar usual forman un espacio vectorial euclídeo. Si definimos una norma asociada al producto vectorial usual, obtendremos la norma usual o euclídea o norma 2 definida como sigue:

Sea $u = (u_1, u_2 ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = \sqrt{u\cdot u} = +\sqrt{u_1\cdot u_1 + u_2\cdot u_2 + ... + u_n\cdot u_n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \in \mathbb{R}^+$

Ejemplo 3.2: Norma en $\mathbb{R}_n(x)$

En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes en los reales, $\mathbb{R}_n(x)=\left\{P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n : a_i\in\mathbb{R},\ \forall i\in\{1,2,...,n\}\right\}$, con el producto escalar definido en el ejemplo 1.2 $\langle P(x),Q(x)\rangle=\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$, siendo $P(x),Q(x)\in\mathbb{R}_n(x)$, podemos definir la siguiente norma asociada: $\|P(x)\|=\sqrt{\int_0^1 P^2(x)\,dx}$

3.2. Distancia entre dos vectores

Sean $(V,\langle .,.\rangle)$ un espacio euclídeo y $\|\ \|=+\sqrt{\langle\ ,\ \rangle}$ la norma definida sobre él.

Sean $u,v\in V$, se define la función **distancia de dos vectores** como:

$$d:V\times V\to K, d(u,v)=\|v-u\|$$

Propiedades:

$\forall u,v\in V,\ \forall\lambda\in K$ se verifica:

1. $d(u,v)\geq 0,\ \forall u,v\in V\wedge d(u,v)=0\Leftrightarrow u=v$
2. $d(u,v)=d(v,u)\ \ \forall u,v\in V$
3. Desigualdad triangular: $d(u,v)\leq d(u,w)+d(w,v),\ \forall u,v,w\in V$

Observaciones:

Siempre que tengamos una distancia definida sobre un espacio vectorial podremos hablar de ***espacio vectorial métrico*** (V,d).

Todos los espacios euclídeos y todos los espacios normados son espacios métricos, pero el recíproco no siempre es cierto.

Ejemplo 3.3: $\left((\mathbb{R}^n,+,\cdot),d\right)$

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales y el producto escalar usual forman un espacio vectorial euclídeo. Tomando la norma usual o euclídea o norma 2 y considerando la función distancia definida a partir de ella obtendremos un espacio vectorial métrico:

Sean $u=(u_1,u_2...,u_n), v=(v_1,v_2,...v_n)\in\mathbb{R}^n$, $d(u,v)=\|v-u\|=+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i-u_i)^2}\in\mathbb{R}^+$

3.3. Ángulo entre dos vectores

Sea $\left(V,\langle .,. \rangle\right)$ un espacio vectorial euclídeo.

Recuerda la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\left|\langle u,v\rangle\right| \le \|u\|\cdot\|v\|$ y consideremos $u,v\in V,\ u,v\neq \overline{0}$,

En ese caso $\langle u,v\rangle > 0 \wedge \|u\|\cdot\|v\| > 0$, por tanto $\left|\langle u,v\rangle\right| \le \|u\|\cdot\|v\| \Rightarrow \dfrac{\left|\langle u,v\rangle\right|}{\|u\|\cdot\|v\|} \le 1$

Quitando el valor absoluto del denominador obtenemos que:

$$-1 \le \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \le 1$$

En este caso existe un único $\theta \in [0,\pi]$ tal que $\cos\theta = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$

Definición:

Sean $u,v\in V$, el ángulo determinado por esos dos vectores es $\measuredangle(u,v) = \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}\right)$

Observación:

Al igual que las nociones de norma, distancia y perpendicularidad cambiarán con el producto escalar que escojamos, también cambiará la noción de ángulo.

Ejemplo 3.4

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con las operaciones usuales y el producto escalar.

Sean $u=(2,3,4), v=(1,0,0)\in\mathbb{R}^3$, el ángulo que forman esos dos vectores será:

$$\left.\begin{array}{l}(2,3,4)\cdot(1,0,0)=2,\\ \|(2,3,4)\| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}\\ \|(1,0,0)\| = \sqrt{1} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle(u,v) = \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) \simeq 68^{o}11'55'' = 1{,}19 rad$$

4. Conjuntos ortogonales y ortonormales de vectores

4.1. Ortogonalidad

Sea $(V, \langle .,. \rangle)$ un espacio euclídeo.

Decimos que $u, v \in V$, son ***vectores ortogonales o perpendiculares***, y escribiremos $u \perp v$ si se verifica que $\langle u, v \rangle = 0$.

Observación:

Recuerda que en el lenguaje de las formas bilineales a este tipo de vectores los denominamos conjugados.

Todas las propiedades que vimos entonces se mantendrán.

Ejemplo 4.1

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales y el producto escalar usual los vectores de la base canónica $B = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ forman un conjunto ortogonal, ya que son perpendiculares dos a dos.

4.2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definiciones:

Sea $(V, \langle .,. \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo.

1) Sea $u \in V$, se dice que es ***unitario*** si $\|u\| = 1$

2) El conjunto $S = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ es un ***conjunto ortogonal*** si $u_i \perp u_j \ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots k\},\ i \neq j$, es decir si $\langle u_i, u_j \rangle = 0 \ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots k\},\ i \neq j$.

3) El conjunto $S = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ es un ***conjunto ortonormal*** si es ortogonal y además todos sus vectores son unitarios

Ejemplo 4.2:

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales y el producto escalar usual los vectores de la base canónica, $B = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$, forman un conjunto ortogonal, ya que son perpendiculares dos a dos.

4.3. Bases ortonormales

Sea $\left(V,\langle .,.\rangle\right)$ un espacio vectorial euclídeo y sea $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ una base de V

1) B es una ***base ortogonal*** si B es un conjunto ortogonal.

2) B es una ***base ortonormal*** si B es una base ortogonal y todos sus vectores tienen norma uno, es decir $\|u_i\|=1\ \forall i\in\{1,2,...,n\}$

Ejemplo 4.3:

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales y el producto escalar usual los vectores de la base canónica $B=\{e_1,e_2,...e_n\}$ forman un conjunto ortogonal y además sus vectores tienen norma uno, por tanto es una base ortonormal.

Proposición:

Sea $S=\{u_1,u_2,...u_n\}$ un conjunto ortogonal, entonces S es un sistema de vectores linealmente independiente.

Demostración:

Supongamos $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+...+\lambda_k u_k=\overline{0},\ \lambda_i\in K$

Se verifica $\forall i\in\{1,2,...,k\}$ que:

$$0=\left\langle u_i,\overline{0}\right\rangle \underset{\substack{\overline{0}=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+...+\lambda_k u_k \\ \text{Propiedades del producto escalar}}}{=} \lambda_1\left\langle u_i,u_1\right\rangle+\lambda_2\left\langle u_i,u_2\right\rangle+...+\lambda_k\left\langle u_i,u_k\right\rangle=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left\langle u_i,u_j\right\rangle \underset{\substack{\langle u_i,u_j\rangle=0\ i\neq j \\ \text{Conjunto ortogonal}}}{=} \lambda_i\left\langle u_i,u_i\right\rangle=\lambda_i\|u_i\|^2 \underset{\|u_i\|^2\neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda_i=0$$

Por tanto es un conjunto de vectores linealmente independiente.

La última equivalencia es cierta por ser el producto escalar una forma bilineal simétrica y definida positiva, ya que eso implica que $\|u_i\|^2\geq 0$, si $u_i\neq 0$.

Observación:

Sea $\left(V,\langle .,.\rangle\right)$ un espacio vectorial euclídeo tal que $\dim V=n$.

Sea $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ un conjunto ortogonal, por la proposición anterior se verifica que $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ es un conjunto de n vectores linealmente independientes y por tanto es una base ortogonal de V, por tanto $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|},\frac{u_{21}}{\|u_2\|},...,\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\}$ será una base ortonormal de V.

Teorema:

En todo espacio vectorial euclídeo de dimensión finita existen bases ortonormales.

Demostración:

Este teorema se puede demostrar de dos formas diferentes.

Una de ellas se basa en el hecho de que el producto escalar no es más que una forma bilineal simétrica definida positiva y que por tanto, por una proposición vista anteriormente, existirá una base respecto la cual su representación reducida será la identidad. Esa base será una base ortonormal del espacio vectorial euclídeo considerado.

La otra demostración es el método de ortonormalización de Gram-Schmidt que analizamos en el siguiente punto.

4.4. Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Teorema:

Sea $(V, \langle .,. \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo tal que $\dim V = n$.

Sea $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces existe $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ conjunto ortogonal tal que:

$$\begin{aligned} &L(\{w_1\}) = L(\{u_1\}) \\ &L(\{w_1, w_2\}) = L(\{u_1, u_2\}) \\ &\vdots \\ &L(\{w_1, w_2, ..., w_k\}) = L(\{u_1, u_2, ..., u_k\}) \end{aligned}$$

Demostración:

Por inducción sobre k.

- **Base de inducción:**

Si $k = 1$, no hay nada que demostrar, $\{w_1\}$ es l.i. por tanto tomando $u_1 = w_1$ ya tenemos que $\{u_1\}$ es un conjunto ortogormal.

Si $k = 2$, Sea $\{w_1, w_2\}$ un conjunto l.i. Tomamos $u_1 = w_1$ verificándose que $L(\{w_1\}) = L(\{u_1\})$.

Sea $u_2 = \lambda u_1 + w_2 = \lambda w_1 + w_2 \in L(\{w_1, w_2\})$ tal que $u_2 \perp u_1$, es decir

$$0 = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, \lambda u_1 + w_2 \rangle = \lambda \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_1, w_2 \rangle = \lambda \|u_1\|^2 + \langle u_1, w_2 \rangle$$

Por tanto tomando $\lambda = \frac{-\langle u_1, w_2 \rangle}{\|u_1\|^2} \in \mathbb{R}$ se verifica que $\{u_1, u_2\}$ es un conjunto ortogonal tal que $L(\{w_1, w_2\}) = L(\{u_1, u_2\})$

(Esta última igualdad es cierta porque por construcción se verifica que $L(\{u_1, u_2\}) \subset L(\{w_1, w_2\})$ y además son conjuntos con la misma dimensión.)

- ***Hipótesis de inducción***:

Supongamos que el resultado es cierto para $k = r$.

- ***Paso de inducción:***

Si $k = r+1$ sea $\{w_1, w_2, ..., w_r, w_{r+1}\}$ un conjunto de vectores l.i.

Por hipótesis de inducción podemos afirmar que existe un conjunto ortogonal $\{u_1, u_2, ...u_r\}$ tal que:

$$\begin{cases} L(\{w_1\}) = L(\{u_1\}) \\ L(\{w_1, w_2\}) = L(\{u_1, u_2\}) \\ \vdots \\ L(\{w_1, w_2, ..., w_r\}) = L(\{u_1, u_2, ..., u_r\}) \end{cases}$$

Sea $u_{r+1} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_r u_r + \beta w_{r+1}$.

Tomamos $\beta = 1$ y calculamos los valores de $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ para que $\langle u_{r+1}, u_i \rangle = 0 \ \forall i \in \{1, 2, ..., r\}$

$$u_{r+1} \perp u_i \Leftrightarrow \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_r u_r + w_{r+1}, u_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \langle u_j, u_i \rangle + \langle w_{r+1}, u_i \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle + \langle w_{r+1}, u_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{-\langle w_{r+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|}$$

Por tanto tomando $\lambda_i = \frac{-\langle w_{r+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|} \ \forall i \in \{1, 2, ...r\}$ se verifica que $u_{r+1} \perp u_i \ \forall i \in \{1, 2, ...r\}$

También se verifica que $L(\{w_1, w_2, ..., w_r, w_{r+1}\}) = L(\{u_1, u_2, ..., u_r, u_{r+1}\})$ ya que por construcción $L(\{u_1, u_2, ..., u_r, u_{r+1}\}) \subseteq L(\{w_1, w_2, ..., w_r, w_{r+1}\})$ y

$$\dim L(\{w_1, w_2, ..., w_r, w_{r+1}\}) = \dim L(\{u_1, u_2, ..., u_r, u_{r+1}\}) = r+1$$

Por tanto queda demostrado el resultado.

Observación:

La demostración de este teorema es importante ya que es la descripción del método que hemos de utilizar para construir bases ortogonales.

Para construir una base ortonormal basta normalizar la base ortogonal obtenida a través de este método, o en cada paso añadir un paso de normalización del vector obtenido

Procedimiento: Ortonormalización de un conjunto de vectores

Procedimiento para calcular un conjunto ortonormal $N=\{n_1,n_2,...,n_k\}$ a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes $U=\{u_1,u_2,...,u_k\}$:

Paso I: Ortogonalización: cálculo de un conjunto ortogonal los $W=\{w_1,w_2,...,w_k\}$ por orden como sigue

1. $w_1=u_1$
2. $w_2=u_2-\dfrac{\langle u_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1$
3. $w_3=u_3-\dfrac{\langle u_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1-\dfrac{\langle u_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle}w_2$
4. Se repetiría el proceso tantas veces como vectores hay en la base del subespacio inicial, utilizando para cada $w_j,\ j\in\{1,2,...,k\}$ la fórmula $w_j=u_j-\sum_{i=1}^{j-1}\dfrac{\langle u_j,w_i\rangle}{\langle w_i,w_i\rangle}w_i$

Paso II. Normalización

Basta dividir cada vector de $W=\{w_1,w_2,...,w_k\}$ por su norma:

$$N=\left\{n_1=\frac{w_1}{\|w_1\|},n_2=\frac{w_2}{\|w_2\|},...,n_k=\frac{w_k}{\|w_k\|}\right\}$$

Ejemplo 4.4:

Obtener mediante el método de Gram-Schmidt una base de vectores ortonormales para el subespacio $H=L\left(\{(1,2,-1,0),(0,1,1,0),(1,0,-2,1)\}\right)$

Paso 0: Organización de la información: Numerar y dar nombres a los vectores iniciales

$U=\{u_1=(1,2,-1,0),u_2=(0,1,1,0),u_3=(1,0,-2,1)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente (basta comprobar que la matriz que forman estos vectores tiene un menor de orden 3 distinto de cero), por tanto una base de H

Paso I: Ortogonalización: cálculo de los w_i por orden como sigue

1. $w_1 = u_1 = (1,2,-1,0)$

2. $w_2 = \frac{1}{6}(-1,4,7,0)$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0,1,1,0) - \frac{1}{6}(1,2,-1,0) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{7}{6}, 0\right) = \frac{1}{6}(-1,4,7,0)$$

$$\langle w_1, w_1\rangle = \langle (1,2,-1,0),(1,2,-1,0)\rangle = 1+4+1 = 6$$

$$\langle u_2, w_1\rangle = \langle (0,1,1,0),(1,2,-1,0)\rangle = 2-1 = 1$$

3. $w_3 = \frac{1}{11}(3,-1,1,11)$

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = (1,0,-2,1) - \frac{3}{6}(1,2,-1,0) - \frac{-15/6}{11/6}\frac{1}{6}(-1,4,7,0) =$$

$$= \left(1-\frac{3}{6}-\frac{15}{66}, -\frac{6}{6}+\frac{60}{66}, -2+\frac{3}{6}+\frac{105}{66}, 1\right) = \left(\frac{18}{66}, -\frac{6}{66}, \frac{6}{66}, 1\right) = \left(\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{11}{11}\right) =$$

$$= \frac{1}{11}(3,-1,1,11)$$

$$\langle w_1, w_1\rangle = \langle (1,2,-1,0),(1,2,-1,0)\rangle = 1+4+1 = 6$$

$$\langle u_3, w_1\rangle = \langle (1,0,-2,1),(1,2,-1,0)\rangle = 1+2 = 3$$

$$\langle w_2, w_2\rangle = \left\langle \frac{1}{6}(-1,4,7,0), \frac{1}{6}(-1,4,7,0)\right\rangle = \frac{1}{6^2}(1+16+49) = \frac{66}{6^2} = \frac{11}{6}$$

$$\langle u_3, w_2\rangle = \left\langle (1,0,-2,1), \frac{1}{6}(-1,4,7,0)\right\rangle = \frac{1}{6}(-1-14) = \frac{-15}{6}$$

Paso II: Ortonormalización:

$$\|w_1\| = \sqrt{\langle w_1, w_1\rangle} = \sqrt{6}$$

$$\|w_2\| = \sqrt{\langle w_2, w_2\rangle} = \sqrt{\frac{11}{6}}$$

$$\|w_3\| = \sqrt{\langle w_3, w_3\rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{1}{11}(3,-1,1,11), \frac{1}{11}(3,-1,1,11)\right\rangle} = \frac{1}{11}\sqrt{(9+1+1+121)} = \frac{\sqrt{132}}{11} = 2\sqrt{\frac{3}{11}}$$

$$N = \left\{ n_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, n_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \ldots, n_k = \frac{w_k}{\|w_k\|} \right\} =$$

$$= \left\{ n_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0), n_2 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}\frac{1}{6}(-1,4,7,0), n_3 = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}\frac{1}{11}(3,-1,1,11) \right\} =$$

$$= \left\{ n_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0), n_2 = \frac{1}{\sqrt{66}}(-1,4,7,0), n_3 = \frac{1}{2\sqrt{33}}(3,-1,1,11) \right\} =$$

4.5. Ortogonal a un conjunto

Sea $(V,\langle .,. \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo tal que $\dim V = n$, sea $S \subset V$ un subconjunto de V no necesariamente subespacio vectorial, $S \neq \varnothing$

El conjunto $S^{\perp} = \{v \in V,\ v \perp s, \forall s \in S\} = \{v \in V,\ \langle v, s \rangle = 0, \forall s \in S\}$ es el ***conjunto ortogonal*** al conjunto S.

Ejemplo

Sea $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \langle (x,y,z),(1,-1,1) \rangle = 0\} = \{(1,-1,1)\}^{\perp}$

Proposición:

Sea $(V,\langle .,. \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo tal que $\dim V = n$, sea $S \subset V$ un subconjunto de V no necesariamente subespacio vectorial, $S \neq \varnothing$

1) $S^{\perp}$ es siempre un subespacio vectorial de V

2) $\{\overline{0}\}^{\perp} = V$ y $V^{\perp} = \{\overline{0}\}$

3) Si $S \subseteq S' \Rightarrow S^{\perp} \supseteq S'^{\perp}$

4) $S^{\perp} = L(S)^{\perp}$

5) Sea H un subespacio vectorial de V, entonces $V = H \oplus H^{\perp}$, es decir cualquier elemento $v \in V$ se puede representar de forma única como suma de un elemento de H y otro de $H^{\perp}$:

$\forall v \in V \quad \exists h \in H, \exists h^{\perp} \in H^{\perp}$ únicos tales que $v = h + h^{\perp}$

Además en ese caso se verifica que: $\|v\| = \|h\| + \|h^{\perp}\|$

6) $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$ y $L(S) = (S^{\perp})^{\perp}$

7) Si H es un espacio vectorial de V, entonces $H = (H^{\perp})^{\perp}$

4.6. Vector proyección ortogonal

Definición Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

Sea H un subespacio de dimensión finita, $\dim(H) = k$, de un espacio vectorial euclídeo $(V,\langle .,. \rangle)$ y sea $B_H = \{u_1, u_2, .., u_k\}$ una base ortonormal de H.

Si $v \in V$ denominamos **proyección ortogonal de v sobre el subespacio H** al vector definido por:

$$v_H = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i$$

Teorema Teorema de mejor aproximación

Sea H un subespacio de dimensión finita, $\dim(H)=k$,de un espacio vectorial euclídeo $(V,\langle .,. \rangle)$ y sea $v \in V$. La proyección ortogonal v_H es el vector de H más próximo a v , es decir:

$\forall u \in H$ se tiene que $d(v,v_H) \le d(v,u)$

O equivalentemente:

$\|v - v_H\| \le d\|v-u\|, \forall u \in H$

Teorema Teorema de descomposición ortogonal

Sea H un subespacio vectorial de V , entonces cualquier elemento $v \in V$ se puede representar de forma única como suma de un elemento de H y otro de $H^{\perp}$ de la forma $v = v_H + v_H{}^{\perp}$

Además en ese caso se verifica que: $\|v\|^2 = \|v_H\|^2 + \|v_H{}^{\perp}\|^2$

4.7. Aplicación: Distancia de un punto a un subespacio vectorial

Sea $(V,\langle .,. \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo tal que $\dim V = n$ y sea $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ una base ortonormal de V .

Sea H un subespacio vectorial de V y $v \in V, v \ne \overline{0}$.

Podemos definir la distancia del afijo de v y H como $d(v,H)=\min\{d(v,h), h \in H\}$, pero no es una definición demasiado buena a la hora de aplicarlo a un problema concreto.

Proposición:

Sea $(V,\langle .,. \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo tal que $\dim V = n$ y sea $B=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ una base ortonormal de V .Sea H un subespacio vectorial de V y $v \in V, v \ne \overline{0}$.

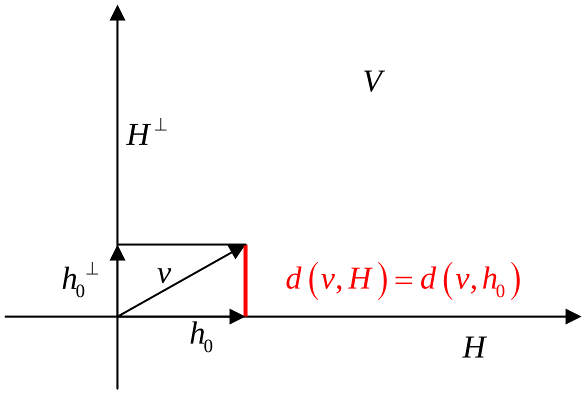
Existe un único $h_0 \in H$ tal que $d(v,H) = d(v,h_0)$

Demostración:

La demostración nos dará el método para poder calcular las distancias entre el punto afijo a un vector y un espacio vectorial.

Sabemos que $V = H \oplus H^{\perp}$, luego podemos encontrar $h_0 \in H$, $h_0^{\perp} \in H^{\perp}$ de forma que

$v = h_0 + h_0^{\perp}$



Basta demostrar que $d(v,h_0) < d(v,h)\ \forall h \in H - \{h_0\}$ para afirmar que efectivamente en h_0 se alcanza la mínima distancia posible. Observa que esto es equivalente a demostrar que $\left(d(v,h_0)\right)^2 < \left(d(v,h)\right)^2\ \ \forall h \in H - \{h_0\}$

Sea $h \in H$ arbitrario.

$$\left.\begin{aligned} d(v,h)^2 &= \|v-h\|^2 = \Big\|\underbrace{v-h_0}_{=h_0^\perp\in H^\perp} + \underbrace{h_o-h}_{\in H}\Big\|^2 \underset{\substack{\text{Teorema de Pitágoras}\\ \text{(Son ortogonales)}}}{=} \\ &= \|v-h_0\|^2 + \|h_0-h\|^2 = \\ &= \left(d(v,h_0)\right)^2 + \underbrace{\|h_0-h\|^2}_{\geq 0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(v,h)^2 > \|v-h_0\|^2 = d(v,h_0)^2$$

Por tanto $d(v,H) = d(v,h_0) = \left\|h_0^\perp\right\|$

4.8. Aplicación: Solución aproximada de un sistema lineal de ecuaciones

Dado un sistema S de n ecuaciones lineales con m incógnitas:

$$S \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{m}x_m = b_n \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sean $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ la matriz del sistema, $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ el vector incógnita ,

$\overline{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de términos independientes y $(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$ la matriz ampliada del sistema.

<u>Definición 5.1</u> Solución aproximada por mínimos cuadrados

Llamamos **solución aproximada por mínimos cuadrados del sistema** S a la solución del sistema $Ax=b_{Col(A)}$, donde $b_{Col(A)}=\mathrm{Pr}\,oy_{Col(A)}(b)$ es la proyección ortogonal del vector de términos independientes $\overline{b}$ sobre el subespacio vectorial generado por las columnas de la matriz A,

$$Col(A)=L\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}\right\}:$$

$$b_{Col(A)}=\mathrm{Pr}\,oy_{Col(A)}(b)$$

<u>Procedimiento 5.1:</u>

1. Si el sistema es compatible $rg(A)=rg(A|b)$, se puede resolver el sistema por cualquiera de los métodos vistos en el tema 5 (Gauss p.e) y la solución obtenida multiplicada será la solución aproximada por mínimos cuadrados

2. Si el sistema es incompatible, es decir $k=rg(A)\neq rg(A|b)$,

1) Encontramos una base de $Col(A)=L\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}\right\}$

p.e. Utilizando operaciones elementales simplificamos el sistema de generadores de $Col(A)$ (columnas de A), hasta obtener un conjunto linealmente independiente (base de $Col(A)$)

2) Encontramos una base ortonormal de $Col(A)$

Aplicando Gram-Schmidt en la base obtenida en el paso anterior, obtenemos una base ortonormal de $Col(A)$: $B_{Col(A)} = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$

3) Calculamos la proyección ortogonal de b sobre $Col(A)$:

$$b_{Col(A)} = \operatorname{Pr} oy_{Col(A)}(b) = \sum_{i=1}^{k} \langle b, u_i \rangle u_i$$

4) Resolvemos el sistema $Ax = b_{Col(A)}$ por cualquiera de los métodos vistos.

5. Transformaciones de un espacio vectorial

5.1. Proyecciones

Sea $P:V\to V$ dónde V es un K espacio vectorial.

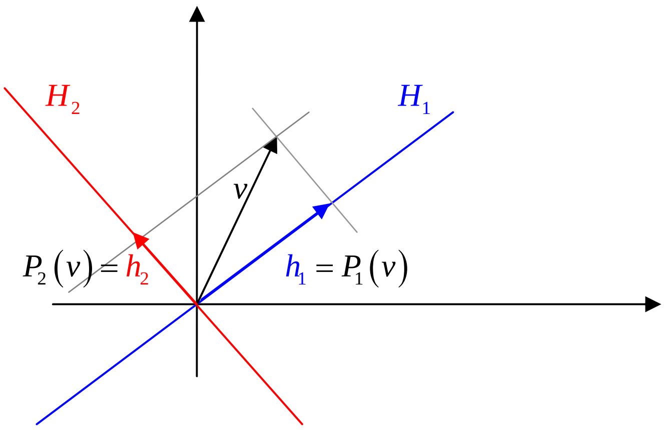
El endomorfismo P es una ***proyección*** si se verifica que $P^2=P\circ P=P$.

Supongamos que H_1 y H_2 son dos subespacios vectoriales de V, tales que $V=H_1\oplus H_2$.

Recuerda que en ese caso $\forall v\in V,\ \exists h_1\in H_1 \wedge \exists h_2\in H_2$ únicos tales que $v=h_1+h_2$.

En estas condiciones podemos definir dos proyecciones en V, una sobre H_1 y otra sobre H_2 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_1,P_2 &: V=H_1\oplus H_2\to V=H_1\oplus H_2\\ v=h_1+h_2 &\to P_1(v)=P_1(h_1+h_2)=h_1\\ v=h_1+h_2 &\to P_2(v)=P_2(h_1+h_2)=h_2\end{aligned}$$



En el caso de que H_1 y H_2 sean ***ortogonales***, a las proyecciones asociadas se las denomina ***proyecciones ortogonales***.

La manera más fácil para encontrar las ecuaciones o la matriz de una proyección es considerar una base de V, formada por la unión de bases de H_1 y H_2.

Sea $V=\mathbb{R}^5$ sean $H_1=L\left(\left\{(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0)\right\}\right)$ Y $H_2=L\left(\left\{(0,0,0,1,0),(0,0,0,1,1)\right\}\right)$ subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ tales que $H_1\oplus H_2=\mathbb{R}^5$.

Observa que $B=\left\{(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,1,1)\right\}$ es una base para $\mathbb{R}^5$ en la que sus tres primeros vectores forman una base de H_1 y los dos siguientes forman una base de H_2.

La proyección $P_1 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ sobre H_1 tendrá una matriz asociada respecto la base dada de la forma:

$$M\left(P_1\right)_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La proyección sobre H_2 tendrá una matriz asociada respecto de B que tomará la forma:

$$M\left(P_2\right)_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En virtud de estas expresiones podemos afirmar que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \ker P_1 = H_2 = \operatorname{Im} P_2 \\ \operatorname{Im} P_1 = H_1 = \ker P_2 \end{array}}$$

Observa que, entre otras cosas, la base utilizada está formada por autovectores para cada una de las proyecciones (aplicaciones lineales), ya que hacen que la expresión en forma matricial tome forma diagonal.

Podremos afirmar que las proyecciones son endomorfismos diagonalizables.

Para obtener la matriz asociada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^5$ podemos utilizar matrices de cambio de base:

Sea $B_5 = \left\{\left(1,0,0,0,0\right),\left(0,1,0,0,0\right),\left(0,0,1,0,0\right),\left(0,0,0,1,0\right),\left(0,0,0,0,1\right)\right\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$.

Sabemos que la matriz de cambio de base de la base B a la canónica toma la forma:

$$C_{BB_5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando su inversa obtendremos $C_{B_5B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{f_1\to f_1-f_2\\ f_2\to f_2-f_3\\ f_3\to f_3-f_4}]{}\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&1&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

De esta forma tenemos que:

$$M(P_1)_{B_5B_5}=C_{BB_5}M(P_1)_{BB}C_{B_5B}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Observa, a juzgar por el resultado, que los vectores de la base canónica también son autovectores para esta proyección. Basta observar que los primeros tres vectores de la base canónica están en H_1 y por tanto, la proyección P_1 los deja fijos.

Lo mismo pasará con los dos últimos vectores de la base canónica, pertenecen a H_2 y por tanto P_1 los llevará al cero.

Para la proyección P_2 podemos considerar un argumento análogo para deducir que su matriz respecto de la base canónica toma la forma $M(P_2)_{B_5B_5}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Observa que además H_1 y H_2 son ortogonales entre si.

Tomando en $\mathbb{R}^5$ el producto escalar usual para convertirlo en un espacio vectorial euclídeo podemos afirmar que si $v_1 \in H_1, \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $v_1 = \alpha(1,0,0,0,0) + \beta(1,1,0,0,0) + \gamma(1,1,1,0,0)$ y si $v_2 \in H_2, \exists \delta, \lambda \in \mathbb{R}$ tales que $v_2 = \delta(0,0,0,1,0) + \lambda(0,0,0,1,1)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= (\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma, 0, 0)\cdot(0,0,0,\delta+\lambda,\lambda) = \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)\cdot 0 + (\beta+\gamma)\cdot 0 + \gamma\cdot 0 + (\delta+\lambda)\cdot 0 + \lambda\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $H_1 \perp H_2$, y las proyecciones antes definidas son ortogonales.

Observa que la expresión analítica de estas proyecciones toma la forma:

$$P_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3, 0, 0)$$

$$P_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, x_4, x_5)$$

5.2. Homotecias

Sea V un K espacio vectorial.

La aplicación lineal $F: V \to V$ es una ***Homotecia*** si existe una base B de V tal que su matriz asociada es de la forma:

$$\boxed{M(F)_{BB} = k \cdot I_n} \text{ con } k \neq 0,\ k \in K$$

Las homotecias tienen un único punto invariante que es el ***centro*** de la homotecia y para que se trate de una aplicación lineal ese centro ha de ser el origen.

Al factor k se le denomina ***razón*** de la homotecia.

Obviamente se trata de un endomorfismo diagonalizable y su matriz diagonal respecto de una base toma la forma $M(F)_{BB} = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$

5.3. Isometrías o transformaciones ortogonales

Sea $F:V \to V$ un endomorfismo, dónde V es un K espacio vectorial, dotado de un producto escalar $\langle \ , \ \rangle$, es decir, un espacio euclídeo.

El endomorfismo F es una ***isometría*** ó trasformación ortogonal si se verifica que:

$$\forall u,v \in V, \langle F(u), F(v) \rangle = \langle u,v \rangle$$

Es decir, las isometrías o transformaciones ortogonales conservan el producto escalar.

Observación:

También se pueden definir isometrías que no sean endomorfismos, es decir si $F:V_1 \to V_2$, dónde V_i es un espacio vectorial euclídeo considerando en él el producto escalar $\langle \ , \ \rangle_i$, $i=1,2$, F será una isometría o aplicación ortogonal si $\forall u,v \in V_1, \langle F(u), F(v) \rangle_2 = \langle u,v \rangle_1$

Proposición: *Propiedades de las transformaciones ortogonales*

Sea $F:V \to V$ un endomorfismo isométrico en V espacio euclídeo siendo K espacio vectorial y dotado de un producto escalar $\langle \ , \ \rangle$. Si $\| \ \|$ y $d:V \times V \to \mathbb{R}$ son la norma y la distancia asociadas al producto escalar $\langle \ , \ \rangle$ de V se verifica que:

1. F conserva las longitudes de vectores, $\forall u \in V, \|F(u)\| = \|u\|$

2. Si H_1 y H_2 son subespacios ortogonales de V, entonces $F(H_1)$ y $F(H_2)$ también son subespacios ortogonales entre si.

3. Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ es un sistema ortogonal de V, $\{F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_k)\}$ también es un sistema ortogonal.

4. Si F es un automorfismo (biyectiva) su inversa también será ortogonal.

5. La composición de aplicaciones ortogonales también es una aplicación ortogonal.

En general una isometría es una aplicación que conserva las distancias y los ángulos entre vectores, conserva las formas.

Proposición: *Caracterización de las aplicaciones ortogonales*

Sea $F:V \to V$ un endomorfismo en V espacio euclídeo siendo K espacio vectorial y dotado de un producto escalar $\langle \ , \ \rangle$. Son equivalentes:

1. F es una isometría

2. F conserva las longitudes de vectores, $\forall u \in V, \|F(u)\| = \|u\|$

3. F trasforma una bases ortonormal de V en otra base ortonormal de V

5.3.1. Matriz asociada a una aplicación ortogonal

Sea $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo isométrico en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ considerando el producto escalar usual. Consideremos B_n la base canónica y sea I_n la matriz asociada al producto escalar usual respecto de la base B_n y $A = M(F)_{B_nB_n}$.

Por ser F ortogonal se verificará que $\forall u,v \in V, F(u)\cdot F(v) = u\cdot v$.

Traduciendo esto a su expresión en producto de matrices tenemos que: $\forall u,v \in V$

$$F(u)\cdot F(v) = (A\cdot u)\cdot I_n\cdot (A\cdot v)^t = A\cdot u\cdot I_n\cdot v^t\cdot A^t = u\cdot I_n\cdot v^t = u\cdot v$$

Por tanto, la relación entre estas matrices es: $A\cdot I_n\cdot A^t = I_n \Leftrightarrow A\cdot A^t = I_n$, es decir, que la matriz asociada a la isometría F es ortogonal.

Recuerda que una matriz ortogonal es aquella que verifica que $A\cdot A^t = A^t\cdot A = I_n$

Observa que en ese caso $\det(A\cdot A^t) = \det(A)\cdot\det(A^t) = \det(A)^2 = \det(I) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$, es decir, el determinante de una matriz ortogonal siempre es 1 o -1.

Definiciones:

Diremos que una isometría o trasformación ortogonal es una ***rotación*** o ***trasformación ortogonal directa*** si el determinante de su matriz asociada es 1, si su determinante es -1 diremos que es una ***transformación ortogonal inversa.***

Observaciones:

- $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es isometría $\Leftrightarrow$ su matriz con respecto a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ es ortogonal.
- Los únicos autovalores reales de una trasformación ortogonal o isometría son 1 o -1, y si tiene autovalores complejos, estos siempre tendrán módulo 1.

5.3.2. Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$

Sea $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $M(F)_{BB} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es ortogonal respecto cierta base ortonormal B.

Pueden suceder dos cosas dependiendo del valor del determinante de la matriz A.

1) Si $|A| = 1$, entonces $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

En este caso diremos que F es un ***giro de ángulo*** θ y en el caso de que $\theta = \pi$ diremos que es una ***simetría respecto del origen***.

Observa que si $\theta = 0$, $F = Id$.

En este caso la matriz no es siempre simétrica y será diagonalizable cuando $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0$, o en el caso en el que $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$ y además se verifique que $a_{11} = a_{22} \wedge a_{12} = a_{21} = 0$.

(Recuerda el ejercicio 11 de la hoja 4)

Para que se verifique que $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$ ha de suceder que:

$$(\cos\theta - \cos\theta)^2 - 4sen^2\theta = 0 \Leftrightarrow sen^2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

Es decir, si la isometría es la identidad o es una simetría respecto del origen, obviamente matrices diagonales.

Observa que para que se verifique que $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \neq 0$ ha de suceder que:

$$(\cos\theta - \cos\theta)^2 - 4sen^2\theta \neq 0 \Leftrightarrow sen^2\theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

En ese caso los autovalores de la matriz no serán reales.

$$P_A(\lambda) = \left|\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix}\right| = (\cos\theta - \lambda)^2 + sen^2\theta =$$
$$= \cos^2\theta + \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + sen^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{\underbrace{\cos^2\theta - 1}_{-sen^2\theta}} = \cos\theta \pm isen\theta$$

Observa que $-sen^2\theta < 0\ \forall\theta$ y por tanto los autovalores tomarán valores complejos y no será diagonalizable en $\mathbb{R}$.

2) Si $|A| = -1$, entonces $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Al ser una matriz simétrica siempre es diagonalizable, y al ser su determinante -1 sus autovalores serán 1 y -1, por tanto la matriz diagonal en una cierta base ortonormal de autovectores será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Este tipo de aplicación se denominan ***simetría axial:*** una simetría respecto de la recta que contiene al autovector asociado al autovalor 1.

5.3.3. Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$

Sea $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una trasformación ortogonal, entonces existirá una base B ortonormal respecto de la cual la matriz asociada a la aplicación, $M(F)_{BB} = A$, tomará una de las siguientes formas:

1) Si $|A| = 1$, entonces pueden suceder varias cosas:

a. Si $A = I_3$, F es la aplicación identidad.

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, en ese caso la isometría es una simetría axial respecto del eje que contiene al autovector asociado al autovalor 1:

$F(x_1, x_2, x_3)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = (x_1, -x_2, -x_3)_B$ En este ejemplo respecto del eje X.

<u>Observación:</u>

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Representaría una simetría respecto del eje Y y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ una simetría respecto del eje Z.

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, en este caso F representa un giro de ángulo θ en torno del eje X (o el eje generado por el autovector asociado al autovalor 1, el primer vector de la base respecto de la cual construimos A).

Observaciones:

- Si $\theta=\pi$ se trataría de la simetría axial analizada en el caso b y si $\theta=0$ estaríamos hablando de la identidad.
- Si $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -sen\theta\\ 0 & 1 & 0\\ sen\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$, representaría un giro de un ángulo θ sobre el eje Y (o sobre el eje generado por el autovector asociado al 1, en este caso segundo de la base respecto a la que hemos construido A) y
- $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -sen\theta & 0\\ sen\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ representa un giro de un ángulo θ en torno al eje Z (o sobre el eje generado por el autovector asociado al 1, en este caso el tercero de la base respecto a la que hemos construido A)

2) Si $|A|=-1$, entonces puede suceder que:

a. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. En este caso para todo vector de la forma $(x_1,x_2,x_3)_B$ se verificaría:

$$F(x_1,x_2,x_3)_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}_B=(x_1,x_2,-x_3)_B$$

Es decir que F es una ***simetría respecto de un plano***, el que contiene a los autovectores asociados al autovalor 1.
El autoespacio asociado al autovalor 1 es el plano respecto del que se realiza la simetría.
Si B es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, este plano es el generado por los ejes X e Y, $(x_3=0)$

Observación:

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ Representaría una simetría respecto del plano que forman los ejes X y Z $(x_2=0)$, si B es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. En general será una simetría respecto al plano generado por el primer y tercer vector que forman la base respecto a la que construimos A (autovectores asociados al 1)

Si B es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ una simetría respecto del plano generado por los ejes Y y Z $\left(x_1=0\right)$. $\mathbb{R}^3$. En general será una simetría respecto al plano generado por el segundo y tercer vector que forman la base respecto a la que construimos A (autovectores asociados al 1)

b. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, en ese caso F es una ***simetría central*** o ***respecto del origen***:

$$F\left(x_1,x_2,x_3\right)_B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}_B=\left(-x_1,-x_2,-x_3\right)_B$$

c. Si la matriz toma la forma $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -sen\theta\\ 0 & sen\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, entonces F es la composición de un giro de ángulo θ respecto del eje X (en general al eje generado por el primer vector de la base, autovector asociado al -1) y una simetría respecto del plano $x_1=0$ (plano generado por el segundo y tercer vector de la base, perpendicular al eje generado por el autovector asociado al -1)

__**Observación:**__

Si $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -sen\theta\\ 0 & -1 & 0\\ sen\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$ entonces F es la composición de un giro de ángulo θ respecto del eje Y y una simetría respecto del plano $x_2=0$ si la base considerada es la base canónica, aunque en general será un giro de ángulo θ respecto el segundo vector de la base (el autovector asociado al autovalor -1), compuesto por una simetría respecto el plano perpendicular al eje anterior.

Cuando $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la base considerada es la canónica, F es la composición de un giro de ángulo θ respecto del eje Z y una simetría respecto del plano $x_3 = 0$. En general será un giro de ángulo θ respecto al tercer vector de la base (el autovector asociado al autovalor -1), compuesto por una simetría respecto el plano perpendicular al eje anterior (generado por los dos primeros vectores de la base).