седними, то Вася соединяет их. Полученную хорду не пересечет никакая другая, поэтому данную пару точек и хорду можно стереть. Так Вася продолжает делать, пока это возможно. Если после этого все точки оказались стерты, то он провел 20 хорд. Если же точки остались, то их цвета чередуются. Тогда Вася выбирает любую точку A и соединяет хордой пару точек, соседних с ней. Затем он соединяет точки, соседние с теми, которые только что были соединены, и т.д. В итоге кроме точки A свободной останется только «противоположная» ей точка, а всего Вася проведет 19 хорд.

Пример. Пусть Петя отметил точки так, что их цвета чередуются. Тогда первая проведенная Васей хорда разобьет окружность на две дуги, содержащие нечетное число точек. После этого соединить все точки непересекающимися хордами невозможно, поэтому больше 19 хорд Вася провести не сможет.

16. При $n = 10$.

Докажем, что при $n = 10$ Петя помешать Васе не сможет. Для какого-то цвета (пусть белого) найдется не менее 500 кубиков с тремя гранями этого цвета. Назовем кубик *угловым*, если у него есть три белые грани с общей вершиной, и *реберным*, если у него есть две белые грани с общим ребром. Заметим, что каждый кубик из упомянутых 500 – реберный.

Пусть среди этих 500 кубиков есть 8 угловых. Тогда Вася может сложить белый снаружи куб. Для этого ему еще понадобится $12 \cdot 8 = 96$ реберных кубиков и $6 \cdot 8^2 = 384$ кубиков с хотя бы одной белой гранью. В сумме это меньше 500.

Пусть восьми угловых кубиков нет. Тогда среди 500 реберных кубиков есть не менее 493 неугловых. В каждом из них есть три грани с общей вершиной, из которых две белые, а одна, скажем, черная. В этом случае Вася может сложить куб, где две противоположные грани будут черными, а остальные четыре – белыми. Действительно, любой из 493 кубиков можно поместить нужным образом в вершины, на ребро или на грань такого куба, а для покрытия поверхности требуется всего $10^3 - 8^3 = 488$ кубиков.

При $n < 10$ Петя может раскрасить $\left[\frac{1}{2}n^3\right]$ кубиков полностью в белый цвет, а остальные – полностью в черный. Так как на стыке любых граней оба цвета одинаковы, то и во всем кубе все грани одного цвета. Поэтому все кубики другого цвета должны «спрятаться» внутрь, т.е. их должно быть не больше чем $(n-2)^3$. Однако $(n-2)^3 < \left[\frac{1}{2}n^3\right]$ при $n \le 9$.

17. За $n - 1$ переливаний.

Алгоритм. Пусть средняя концентрация всех растворов равна m% (под средней концентрацией раствора мы понимаем концентрацию его смеси). Если в какой-то пробирке концентрация отклоняется от m% в одну сторону, то найдется пробирка с отклонением в другую сторону. Пусть в пробирке A концентрация раствора больше m%, а в B – меньше m%, при этом обе пробирки заполнены не более чем наполовину. Посмотрим на среднюю концентрацию в этих пробирках. Если она равна m%, просто сольем раствор из обеих пробирок в одну. Если больше m%, то будем переливать раствор из A в B, пока концентрация в B не станет m%. Если же меньше m%, то можно получить в A концентрацию m%, переливая из B в A. После этого пробирку, в которой получили m-процентный раствор, можно исключить из рассмотрения. Во второй пробирке раствора стало меньше, поэтому все пробирки, где концентрация раствора не равна m%, заполнены не более чем наполовину и дальнейшие аналогичные действия всегда возможны. В итоге каждое переливание увеличивает число пробирок с концентрацией m% как минимум на одну. Поскольку при последнем переливании в обеих пробирках получится m-процентный раствор, то всего потребуется не более $n - 1$ переливаний.

Пример. Пусть одна пробирка наполовину заполнена раствором концентрации 60%, а в остальных – по полпробирки раствора концентрации $\left(50 - \frac{10}{n-1}\right)\%$. Тогда средняя концентрация всех растворов равна 50%. Каждое переливание уменьшает число пробирок с концентрацией менее 50% не больше чем на одну, поэтому менее чем за $n - 1$ переливаний нельзя получить во всех пробирках раствор одинаковой концентрации.

18. 1,5.

При каждом взвешивании монеты делятся на три группы: находящиеся на левой чаше, находящиеся на правой чаше и не участвующие во взвешивании. Если при первом взвешивании в одной из групп окажется не меньше четырех монет, то при попадании фальшивой монеты в эту группу наверняка выявить ее вторым взвешиванием не удастся, так как по крайней мере две из этих монет снова будут в одной группе. Следовательно, во время первого взвешивания монеты должны быть разбиты на две группы из трех монет и одну группу из двух монет. Сравнивать группы из трех монет нет смысла, так как если перевесит правая чаша, то это не даст никакой информации о местонахождении фальшивой монеты. Значит, первый раз должны сравниваться группы из трех монет на левой чаше и двух монет на правой. При этом должны быть возможны все три исхода, иначе второе взвешивание может не иметь смысла. Так как неизвестно, насколько фальшивая монета легче настоящей, равновесие должно означать, что все пять монет на весах настоящие. Следовательно, $a = 1{,}5$.

Теперь покажем, как при $a = 1{,}5$ Толя может выявить фальшивую монету за два взвешивания. Первым взвешиванием он определяет, в какой из трех групп находится фальшивая монета. При втором взвешивании Толя кладет на левую чашу одну из монет этой группы, а на правую – другую (если в группе три монеты, то третья во втором взвешивании не участвует). Доложив две заведомо настоящие монеты на левую чашу и одну на правую, Толя узнает, в какой группе фальшивая монета, что позволит определить ее.

19. 2,5 очка.

Всего на турнире было сыграно 15 матчей. Пусть за победу начислялось x очков, было k результативных встреч и $15 - k$ ничьих. Тогда суммарно команды набрали $kx + 2(15 - k)$ очков. По условию эта сумма равна $10 + 7 + 6 + 6 + 3 + 3 = 35$, откуда получаем $k(x-2) = 5$. Следовательно, $x > 2$.

Команда, набравшая 6 очков, выиграла хотя бы один матч, иначе набрала бы не больше 5 очков. Из ограничения $x > 2$ следует, что она могла выиграть не более двух матчей. Значит, x – целое или полуцелое число, в таком случае k – делитель числа 10. С другой стороны, $k \ge 4$, поскольку у каждой из первых четырех команд есть хотя бы один выигрыш. Следовательно, возможны только два варианта.

1) $k = 5$, $x = 3$. Но в этом случае команда, набравшая 10 очков, должна была одержать ровно три победы, т.е. $k \ge 6$. Противоречие.

2) $k = 10$, $x = 2{,}5$.

Пример такого турнира приведен в таблице 1.

20. 7 туров.

Оценка. Пусть проведено не больше шести туров; докажем, что можно провести еще хотя бы один. Разобьем шахматистов случайным образом на пары. Допустим, в какой-то паре шахматисты A и B уже играли до этого. Среди остальных шести

Таблица 1

0	2,5	2,5	0	2,5	2,5	**10**
0	0	2,5	2,5	1	1	**7**
0	0	0	2,5	2,5	1	**6**
2,5	0	0	0	1	2,5	**6**
0	1	0	1	0	1	**3**
0	1	1	0	1	0	**3**