и начальные условия в виде рядов Фурье:

$$\left.\begin{aligned}
f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, & f_n(t) &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi;\\
\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n\sin\frac{n\pi}{l}x, & \Phi_n &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi;\\
\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x, & \Psi_n &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi.
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (48) в исходное уравнение (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\left\{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 u_n(t)-\ddot{u}_n(t)+f_n(t)\right\}=0,$$

видим, что оно будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$\ddot{u}_n(t)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2u_n(t)=f_n(t). \tag{50}$$

Для определения $u_n(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Начальные условия дают:

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dot{u}_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

откуда следует:

$$\begin{cases} u_n(0)=\Phi_n,\\ \dot{u}_n(0)=\Psi_n. \end{cases} \tag{51}$$

Эти дополнительные условия полностью определяют решение уравнения (50). Функцию $u_n(t)$ можно представить в виде

$$u_n(t)=u_n^{(1)}(t)+u_n^{(II)}(t),$$

где

$$u_n^{(1)}(t)=\frac{l}{n\pi a}\int\limits_0^t\sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)\cdot f_n(\tau)d\tau \tag{52}$$

есть решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями[1])
и

$$u^{(1)}(t) = \Phi_n \cos\frac{n\pi}{l}at + \frac{l}{n\pi a}\Psi_n \sin\frac{n\pi}{l}at \tag{53}$$

— решение однородного уравнения с заданными начальными условиями. Таким образом, искомое решение запишется в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\int\limits_0^t \sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x\cdot f_n(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Phi_n\cos\frac{n\pi}{l}at + \frac{l}{n\pi a}\Psi_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{54}$$

Вторая сумма представляет решение задачи о свободных колебаниях струны при заданных начальных условиях и была нами исследована ранее достаточно подробно. Обратимся к изучению первой суммы, представляющей вынужденные колебания струны под действием внешней силы при нулевых начальных условиях. Пользуясь выражением (49) для $f_n(t)$, находим:

$$u^{(1)}(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^t\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi\right\}f(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{55}$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi. \tag{56}$$

Выясним физический смысл полученного решения. Пусть функция $f(\xi,\tau)$ отлична от нуля в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0,\tau_0)$:

$$\xi_0 \le \xi \le \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \le \tau \le \tau_0 + \Delta\tau.$$

Функция $\rho f(\xi,\tau)$ представляет плотность действующей силы; сила, приложенная к участку $(\xi_0, \xi_0+\Delta\xi)$, равна

$$F(\tau) = \rho\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi,\tau)d\xi.$$

1

[1]1) В этом можно убедиться непосредственно. Формула (52) может быть получена

методом вариации постоянных. См. также мелкий шрифт в конце настоящего пункта.