Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Futebol
ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2025
1ª Prova — Data: 10 out. 2025

1. O conectivo lógico **nor** ("not-or") é definido pela relação $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$.
   (a) Reescreva $\neg p$ e $p \wedge q$ empregando somente o conectivo lógico **nor**;
   (b) Reescreva $p \to q$ empregando somente o conectivo lógico **nor**.

Resposta 1

$$p \downarrow p \equiv \neg(p \vee p) \equiv \neg p \wedge \neg p \equiv \neg p$$
$$p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \equiv \neg(\neg p \downarrow q)$$

2. Prove ou disprove a proposição: $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 4n$ é ímpar se e somente se n é ímpar.

Resposta 2

Demonstração. Vamos considerar n par:

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} \to n^2 + 4n = (2k)^2 + 4(2k) = 4k^2 + 8k = 2(2k^2 + 4k) = 2b$$

$\implies$ Para todo $n \in \mathbb{N}$ par, a expressão é par.

QED

Demonstração. Vamos considerar n ímpar:

$$n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \to n^2 + 4n = (2k+1)^2 + 4(2k+1)$$
$$= 4k^2 + 1^2 + 4k + 8k + 4 = 4k^2 + 12k + 4 + 1 = 2(2k^2 + 6k + 2) + 1 = 2b + 1$$

$\implies$ Para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar, a expressão é ímpar.

QED

$\implies$ A proposição é verdadeira.

3. Dados n números reais $a_1, \ldots, a_n$ distintos, prove por contradição que pelo menos um desses números deve ser maior que a média dos números.

Resposta 3

$$\nexists a_i \in \{a_1, \ldots, a_n\} : a_i > \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$
$$\to \forall a_i \in \{a_1, \ldots, a_n\}, a_i \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Vamos considerar a média do conjunto como o centro de massa de uma barra. Se todos itens forem menores do que a média, a barra penderá para a esquerda. Se todos forem iguais a média, o enunciado é impossível. Portanto deve existir a_i maior do que a média para balancear o peso.

4. Estabeleça os seguintes resultados usando o Princípio de indução finita:
   (a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$;
   (b) $5^n - 4n - 1$ é divisível por 16;
   (c) $P_n(x) = e^{-x^2}\left(\frac{d^n}{dx^n}\right)e^{x^2}$ é um polinômio de grau n.

Resposta 4

Demonstração.

$$\text{Caso base: } n = 2 \to \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Hipótese: Para um } k \text{ qualaquer, } \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} = \frac{k-1}{k}$$

$$\text{Indução: } \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k}\right) + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+1)+1}{k(k+1)} = \frac{k^2 - 1^2 + 1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{k^2}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

QED

Demonstração.

$$\text{Caso base: } n = 1 \to 5^1 - 4 \cdot 1 - 1 = 5 - 4 - 1 = 0 \text{ é divisível por } 16$$

$$\text{Hipótese: Para um } k \text{ qualquer, } (5^k - 4k - 1) \text{ é divisível por } 16$$

Indução: Fica a cargo do leitor

QED

Demonstração.

$$\text{Caso base: } n = 1 \to P_1(x) = e^{-x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)e^{x^2} = e^{-x^2}e^{x^2}2x = 2x$$

$$\text{Hipótese: Para um } k \text{ qualquer, } P_k(x) = e^{-x^2}\left(\frac{d^k}{dx^k}\right)e^{x^2}$$

$$\text{Indução: } P_{k+1}(x) = e^{-x^2}\left(\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\right)e^{x^2}$$

$$= e^{-x^2}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}e^{x^2}\right)\right) = e^{-x^2}\left(\frac{d}{dx}P_k(x)e^{x^2}\right)$$

$$e^{-x^2}(P_k'(x)e^{x^2} + P_k(x)e^{x^2}2x) = P_k'(x) + P_k(x) \cdot 2x = P_{k+1}(x)$$

QED

5. Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ um conjunto formado por cinco números inteiros distintos $1 \leq a_i \leq 8$. Mostre que as somas dos elementos de cada um dos subconjuntos não-vazios de A não podem ser todas diferentes entre si.

Resposta 5

Demonstração.

$$|\wp(A)| - 1 = 2^5 - 1 = 32 - 1 \text{ (Retirar o conjunto vazio.)}$$

Todas as somas são limitadas superiormente por $8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 30$ e inferiormente por 1, precisamos associar cada uma delas a cada um dos 31 conjuntos não-vazios. Não é difícil perceber que uma delas precisará se repetir.

QED

6. Sejam A, B, C três subconjuntos finitos quaisquer de um conjunto universo Ω dado.
   (a) Simplifique a expressão $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$, onde $\overline{X} = \{x : x \notin X\}$ denota o complemento de X;
   (b) Mostre que $A \triangle B = \overline{A} \triangle \overline{B}$, onde $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ é a diferença simétrica entre os conjuntos A e B, com $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\} = A \cap \overline{B}$;
   (c) Encontre uma expressão para $|A \cup B \cup C|$ em termos de A, B, C e suas interseções.

Resposta 6

$p \equiv$ "$x : x \in A$", $q \equiv$ "$x : x \in B$", $r \equiv$ "$x : x \in C$".

Demonstração.

$$\begin{gathered}
\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}} \equiv \neg(\neg((p \vee q) \wedge r) \vee \neg q) \equiv \\
\equiv ((p \vee q) \wedge r) \wedge q \equiv ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \wedge q \\
\equiv ((p \wedge r) \wedge q) \vee ((q \wedge r) \wedge q) \\
\equiv (p \wedge r \wedge q) \vee (q \wedge r) \\
p \wedge q \wedge r \subseteq q \wedge r \\
\implies (p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv q \wedge r \equiv B \cap C
\end{gathered}$$

QED

Demonstração.

$$\begin{gathered}
A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = (\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) \\
= \overline{A} \triangle \overline{B}
\end{gathered}$$

QED

Demonstração.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

QED