Conteúdo

Capítulo 1

Primitivas e derivadas

1.1 Definição e propriedades

A derivada pode ser pensada como um "operador" D que para uma função f suficientemente regular, ou seja, diferenciável, atribui uma outra função, sua derivada, na forma

$$D\colon f \to f'.$$

Por exemplo, usando os resultado em [4, exemplo 1.1.6], sabe-se que

$$D \operatorname{sen} = \cos, \quad D \cos = -\operatorname{sen}.$$

Dado que a derivada opera nesse "universo" de funções, dada uma função f em geral, cabe perguntar quando uma tal função resulta da forma $f = Dg$ para alguma g apropriada. Em outras palavras, do ponto de vista algébrico, esta questão consiste em analisar o domínio do operador inverso $D^{-1}f = g$. Por questões históricas, denota-se

$$\int f = g \Longleftrightarrow g' = f.$$

Em tal caso, se diz que g é uma **primitiva** de f. Os termos **antiderivada** e **integral indefinida** também costumam ser usados na literatura com o mesmo significado.

Para uma função diferenciável f, o leitor não deveria ter nenhuma dificuldade em perceber que

$$\int f' = f.$$

Caso contrário, talvez não tenha entendido corretamente a definição de primitiva, em cujo caso seria recomendável revisar o conteúdo desde o começo da presente seção.

Uma primeira propriedade que deve ser notada consiste em que a atribuição definica pela primitiva contém um traço de ambiguidadem no sentido que uma mesma função pode possuir várias primitivas diferentes. No entanto, a diferença entre duas primitivas quaisquer não pode ser arbitrária. Com maior precisão, tem-se

$$\int f = g \wedge \int f = h \Longrightarrow g = h + c.$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Este resultado é um corolário do teorema do valor médio, vide [Seção 2.2].

Uma outra propriedade importante segue observando que, sendo a derivada um operador *linear*, ou seja,

$$D(cf + g) = (cf + g)' = cf' + g' = cDf + Dg$$

tal linearidade é herdada pela primitiva, ou seja,

$$\int (cf + g) = c \int f + \int g.$$

A verificação desta última identidade fica a cargo do leitor, mais como um exercício no uso da notação do que uma prova de perícia técnica.

Finalmente, uma outra questão que o leitor não deveria ter dificuldade em se convencer é dada pela constatação de que uma maneira particularmente simples de obter uma tabela de primitivas consiste em ler uma tabela de derivadas no sentido contrário. A tabela 1.1 apresenta uma coletânea minimalista de primitivas.

Função	Primitiva
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
cos	sen
sen	$-\cos$
exp	exp
$\frac{1}{x}$	log
$\frac{1}{1+x^2}$	arctan

Tabela 1.1: Uma coletânea minimalista de primitivas.

1.2 Uma identidade notável

Nesta seção introdutória, o tratamento das séries é informal. No entanto, tais manipulações podem ser formalizadas rigorosamente usando polinômios de Taylor, incluindo estimativas adequadas do resto. Esta análise será adiada pelo momento. O leitor interessado pode consultar as seções 6.3 e 6.4.

A identidade
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$
como também
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$
foram ambas estabelecidas em [Seção 6.1]. Observe que
$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \log(1+x), \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$
Tomando a primitiva em ambos termos da primeira identidade acima, tem-se
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
Analogamente, observando que
$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\log(1-x)$$
e tomando a primitiva em ambos termos da segunda identidade, tem-se
$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$
Combinando ambas séries para o logaritmo, resulta
$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$$
$$= (x+x) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{4}\right) + \cdots$$
$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right)$$
de onde segue que
$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Por outro lado, a identidade
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$
também foi estabelecida em [Seção 6.1]. Agora, observando que
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

e tomando a primitiva em ambos termos desta identidade, tem-se

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7 + \cdots}$$

Seja i um símbolo tal que $i^2 = i \cdot i$ pode ser substituído por -1 em qualquer fórmula. Observe que

$$\begin{aligned} i &= i \\ i^2 &= i \cdot i = -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(-1) = 1 \end{aligned}$$

Logo, tem-se

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

e a partir daqui as sucessivas potências repetem-se periodicamente a cada quatro, por exemplo:

$$i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1$$

Usando essa tabela de potências do símbolo i tem-se

$$\begin{aligned} \arctan ix &= ix - \frac{(ix)^3}{3} + \frac{(ix)^5}{5} - \frac{(ix)^7}{7} + \cdots \\ &= ix + i\frac{x^3}{3} + i\frac{x^5}{5} + i\frac{x^7}{7} + \cdots \\ &= i\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right) \end{aligned}$$

de onde segue que

$$-i \arctan ix = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Comparando com a identidade para o logaritmo estabelecida acima, obtém-se a seguinte identidade notável

$$-i \arctan ix = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

Esta identidade é equivalente à fórmula de Euler, como o leitor pode verificar no exercício 1.5.1.

Para quem ficar incomodado com o fato da identidade acima ter sido estabelecida através de manipulações informais de séries de potências, a fórmula de Euler será obtida de maneira independente, e rigorosa, na Seção 6.4.

Além disso, a identidade acima possui um equivalente que dispensa o uso do símbolo i, segundo o resultado do exercício 1.6.2.

1.3 Um exemplo revelador

As primitivas foram introduzidas na Seção 1.1. Uma aplicação é fornecida na Seção 1.2 anterior, particulamente notável no sentido que o resultado final apresentado equivale à fórmula de Euler.

No entanto, até agora não ficou clara a questão de, dada uma função arbitrária, determina se possui ou não uma primitiva. Menos ainda foi dito sobre como encontrar tal primitiva, caso a resposta da questão anterior seja afirmativa.

Um fator que complica ambas questões consiste no fato que muitas funções, mesmo aquelas consideradas mais "simples", possuem primitivas que não são tão elementares assim, ou cuja determinação não possui nada de trivial, nem a resposta parece intuitiva. Por exemplo, o leitor pode verificar que

$$\int \log x \, dx = x \log x - x$$

Para tanto, basta derivar o membro direito e verificar que o resultado corresponde à função no membro esquerdo. No entanto, como pode ser determinada essa primitiva em particular? Que tipo de cálculos devem ser desenvolvidos com tal finalidade?

Colocando tais questões em um contexto mais amplo: Como surgem as primitivas? Existe algum "mecanismo" capaz de gerar primitivas? A seguir é apresentado um exemplo revelador para a questão da gênese das primitivas.

A figura 1.1 mostra um setor circular no primeiro quadrante do círculo unitário, ou seja, de raio igual a 1. Observe que tal círculo é definido pela condição

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$$

de onde segue que

$$x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Em particular, o círculo unitário no semiplano *superior* corresponde ao gráfico da função

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

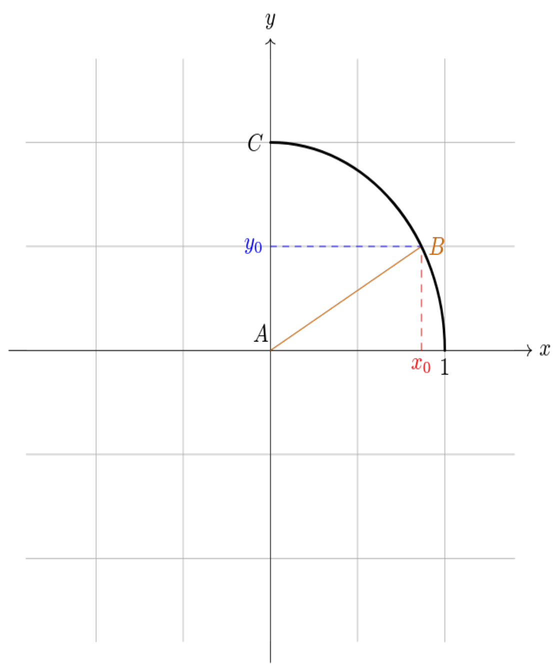

Figura 1.1: Setor circular no círculo unitário.

Seja $F(x)$ a área limitada pelo gráfico desta função f e o eixo horizontal, compreendida entre as abcissas 0 e x. Observando a figura 1.1 tem-se

$$\text{área}\,\widehat{ACB} = F(x) - \text{área}\,\widehat{Ax_0B}$$

Denotando a o arco subentendido pelo setor circular $\widehat{CAB}$, observe que

$$x = \operatorname{sen} a \Longrightarrow a = \operatorname{arcsen} x$$

Além disso, tem-se

$$\text{área}\,\widehat{CAB} = \frac{1}{2}(\text{arco}) \cdot (\text{raio}) = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x$$

Capítulo 2

Calculando áreas

2.1 Aproximação por funções simples

Demonstração

Uma prova no caso do intervalo $[0, 1]$ consta em Seção 6.4. A mesma demonstração pode ser adaptada para o intervalo $[0, b]$ com $b > 0$ arbitrário como segue. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Dado que $[0, b]$ é compacto, pelo teorema Seção 6.4 segue que f é uniformemente contínua. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Considere uma partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais, de comprimento $\frac{b}{n}$, onde $fracbn < \delta$. Seja g definida como

$$g(x) = f\left(\frac{b}{n}\left\lfloor\frac{nx}{b}\right\rfloor\right)$$

Observe que para todo $x \in [0, b]$ existe algum $k \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que x pertence a $[\frac{bk}{n}, \frac{b(k+1)}{n}]$. Logo, tem-se

$$x \in \left[\frac{bk}{n}, \frac{b(k+1)}{n}\right] \Longrightarrow \frac{bk}{n} \leqslant x < \frac{b(k+1)}{n} \Longrightarrow k \leqslant \frac{nx}{b} < k + 1$$

$$\Longrightarrow \frac{b}{n}\left\lfloor\frac{nx}{b}\right\rfloor = \frac{bk}{n}$$

de onde segue que

$$|f(x) - g(x)| = \left|f(x) - f\left(\frac{b\left\lfloor\frac{nx}{b}\right\rfloor}{n}\right)\right| = \left|f(x) - f\left(\frac{bk}{n}\right)\right| < \varepsilon$$

pois

$$x \in \left[\frac{bk}{n}, \frac{b(k+1)}{n}\right] \Longrightarrow \left|x - \frac{bk}{n}\right| < \frac{b}{n} < \delta$$

Dado que as duas últimas duas desigualdades vigoram para todo $x \in [0, b]$ segue que $||f - g|| < \varepsilon$.

Resulta como corolário que toda função f contínua em $[0,b]$ pode ser aproximada uniformemente em tal intervalo por uma sequência $\{g_n\}$ de funções simples. Em outras palavras $||f - g_n|| \to 0$ quando n tende para infinito. Com efeito, basta usar o resultado anterior com $\varepsilon = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observe que área determinada pelo gráfico das funções simples g_n pode ser calculado somando a área de retângulos, como

$$\int_0^b g_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{n} \cdot g_n \frac{bk}{n} = \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_n \frac{bk}{n}$$

2.2 Funções trigonométricas

Considere a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ no intervalo $[0,b]$ com $0 \leq b \leq \frac{\pi}{2}$. Em tal caso, tem-se

$$\frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{bk}{n}\right) = \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{bk}{n}\right)$$

2.3 Recapitulação

2.4 Epílogo: O perigo mora nos detalhes

Capítulo 3

Integral de Riemann

3.1 Definição de integral

3.2 Funções simples

3.3 Lema de Riemann-Lebesgue

3.4 Área do círculo unitário com trapézios

3.5 Estimativa do valor de π

3.6 Uma estimativa do fatorial

3.7 Crescimento sublinear do logaritmo

Capítulo 4

Propriedades da integral

4.1 Integrabilidade em subintervalos

4.2 Linearidade

4.3 Integrais e desigualdades

4.4 Produto de funções

Capítulo 5

Funções contínuas e integral

5.1 Integrabilidade das funções contínuas

5.2 Teorema do valor médio para integrais

5.3 Teorema fundamental do Cálculo

Demonstração

$$Df = g$$

5.4 Convergência uniforme e integrais

Seja agora $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e considera uma sequência $\{g_n\}$ de funções simples tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||f - g_n|| = 0$$

como no teorema 2.1.1, lembrando que

$$||f - g|| = \sup |f(x) - g(x)| \colon x \in [a,b].$$

Teorema 5.4.1 *Se f é contínua em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n.$$

Capítulo 6

Teorema fundamental do Cálculo

6.1 Continuidade da integral

Teste

6.2 Primeiro teorema fundamental

6.3 Segundo teorema fundamental

6.4 Placeholder