1 K(x)

$$\beta = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}$$
$$\epsilon(q) = \epsilon_1\epsilon_0 \frac{1+(q\xi)^2}{\epsilon_1+\epsilon_0(q\xi)^2}$$
$$K(x) = \frac{1}{2\pi}\epsilon_0\epsilon_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+(q\xi)^2}{\epsilon_1+\epsilon_0(q\xi)} e^{iqx} dq =$$
$$= \frac{\epsilon_1}{2\pi}\int e^{iqx}(1+\frac{\epsilon_0-\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_0(q\xi)^2})dq =$$
$$= \epsilon_1\delta(x) + (\epsilon_0-\epsilon_1)\frac{\beta}{2\xi}e^{-\beta\frac{|x|}{\xi}}$$

2 D(x)

Let's pretend that $E(x) = E_0 + E_1 e^{\frac{x-h}{\xi}} + E_1 e^{\frac{-x-h}{\xi}} = E_0 + 2E_1 e^{-\frac{h}{\xi}}\,\mathrm{ch}(\frac{x}{\xi})$

$D(x) = \int\limits_{-h}^{h} K(x-x')E(x')dx' = \int\limits_{-h}^{h}\left(\epsilon_1\delta(x-x') + \frac{\beta}{2\xi}(\epsilon_0-\epsilon_1)e^{-\beta\frac{|x-x'|}{\epsilon}}\right)\left(E_0+2E_1e^{-\frac{h}{\xi}}\,\mathrm{ch}(\frac{x}{\xi})\right)$

2.1 D_1

$D_1(x) = \int \epsilon_1\delta(x-x')\left(E_0+E_1e^{-\frac{h}{\xi}}\,\mathrm{ch}(\frac{x}{\xi})\right) = \epsilon_1E_0 + \epsilon_1E_1e^{-\frac{h}{\xi}}\,\mathrm{ch}(\frac{x}{\xi})$

2.2 D_2

$$D_2(x) = \frac{\beta}{2\xi}(\epsilon_0-\epsilon_1)E_0\int e^{-\beta\frac{|x-x'|}{\epsilon}}dx' =$$
$$= \frac{\beta}{2\xi}(\epsilon_0-\epsilon_1)E_0\left[\int\limits_{-h}^{x}\exp(-\beta\frac{x-x'}{\xi})dx' + \int\limits_{x}^{h}\exp(\beta\frac{x-x'}{\xi})\right] =$$
$$= \frac{\beta}{2\xi}(\epsilon_0-\epsilon_1)E_0\left[e^{-\beta\frac{x}{\xi}}\frac{\xi}{\beta}\left(e^{\beta\frac{x}{\xi}}-e^{-\beta\frac{h}{\xi}}\right) - e^{\beta\frac{x}{\xi}}\frac{\xi}{\beta}\left(e^{-\beta\frac{h}{\xi}}-e^{-\beta\frac{x}{\xi}}\right)\right] =$$
$$= (\epsilon_0-\epsilon_1)E_0\left(1-e^{-\beta\frac{h}{\xi}}\,\mathrm{ch}\left(\beta\frac{x}{\xi}\right)\right)$$

2.3 D_3

$$D_3(x) = \frac{\beta}{2\xi}(\epsilon_0-\epsilon_1)E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \int\limits_{-h}^{+h} e^{-\beta\frac{|x-x'|}{\xi}} \operatorname{ch}\left(\frac{x'}{\xi}\right) dx' =$$

$$= \frac{\beta}{4\xi}(\epsilon_0-\epsilon_1)E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \left[e^{-\beta\frac{x}{\xi}} \int\limits_{-h}^{x} \left(e^{\frac{x'}{\xi}(1+\beta)} + e^{\frac{x'}{\xi}(\beta-1)} \right) dx' + e^{\beta\frac{x}{\xi}} \int\limits_{x}^{h} \left(e^{\frac{x'}{\xi}(1-\beta)} + e^{-\frac{x'}{\xi}(1+\beta)} \right) dx' \right] =$$

$$= \frac{\beta}{4\xi}(\epsilon_0-\epsilon_1)E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \Bigg[e^{-\beta\frac{x}{\xi}} \left(\frac{\xi}{1+\beta} \left\{ e^{\frac{x}{\xi}(1+\beta)} - e^{-\frac{h}{\xi}(1+\beta)} \right\} + \frac{\xi}{\beta-1} \left\{ e^{\frac{x}{\xi}(\beta-1)} - e^{-\frac{h}{\xi}(\beta-1)} \right\} \right) +$$

$$+ e^{\beta\frac{x}{\xi}} \left(\frac{\xi}{1-\beta} \left\{ e^{\frac{h}{\xi}(1-\beta)} - e^{\frac{x}{\xi}(1-\beta)} \right\} - \frac{\xi}{\beta+1} \left\{ e^{-\frac{h}{\xi}(1+\beta)} - e^{-\frac{x}{\xi}(1+\beta)} \right\} \right) \Bigg] =$$

$$= \frac{1}{4}\beta(\epsilon_0-\epsilon_1)E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \left[\frac{1}{1+\beta} \left(e^{\frac{x}{\xi}} - e^{-\frac{h}{\xi}(1+\beta)-\beta\frac{x}{\xi}} - e^{-\frac{h}{\xi}(1+\beta)+\beta\frac{x}{\xi}} + e^{-\frac{x}{\xi}} \right) + \frac{1}{\beta-1} \left(e^{-\frac{x}{\xi}} - e^{-\frac{h}{\xi}(\beta-1)-\beta\frac{x}{\xi}} - e^{-\frac{h}{\xi}(\beta-1)+\beta\frac{x}{\xi}} + e^{\frac{x}{\xi}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4}\beta(\epsilon_0-\epsilon_1)E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \left[\frac{2}{1+\beta} \left(\operatorname{ch}(\frac{x}{\xi}) - \operatorname{ch}(\beta\frac{x}{\xi}) e^{-\frac{h}{\xi}(1+\beta)} \right) - \frac{2}{1-\beta} \left(\operatorname{ch}(\frac{x}{\xi}) - \operatorname{ch}(\beta\frac{x}{\xi}) e^{-\frac{h}{\xi}(\beta-1)} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\beta(\epsilon_0-\epsilon_1)E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \left[-\frac{4\beta}{1-\beta^2} \operatorname{ch}(\frac{x}{\xi}) - 2\operatorname{ch}(\beta\frac{x}{\xi}) e^{-\beta\frac{h}{\xi}} \left(\frac{e^{-\frac{h}{\xi}}}{1+\beta} - \frac{e^{\frac{h}{\xi}}}{1-\beta} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\beta(\epsilon_0-\epsilon_1)E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \left[-\frac{4\beta}{1-\beta^2} \operatorname{ch}(\frac{x}{\xi}) - 2\operatorname{ch}(\beta\frac{x}{\xi}) e^{-\beta\frac{h}{\xi}} \left(\frac{-2\operatorname{sh}(\frac{h}{\xi}) - 2\beta\operatorname{ch}(\frac{h}{\xi})}{1-\beta^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{\beta}{1-\beta^2}(\epsilon_0-\epsilon_1)E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \left[-\beta\operatorname{ch}(\frac{x}{\xi}) + \operatorname{ch}(\beta\frac{x}{\xi}) e^{-\beta\frac{h}{\xi}} \left(\operatorname{sh}(\frac{h}{\xi}) + \beta\operatorname{ch}(\frac{h}{\xi}) \right) \right]$$

2.4 $D(x)$

$$D(x) = D_1(x) + D_2(x) + D_3(x) =$$

$$= \epsilon_1 E_0 + \epsilon_1 E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \operatorname{ch}(\frac{x}{\xi}) + (\epsilon_0-\epsilon_1)E_0 \left(1 - e^{-\beta\frac{h}{\xi}} \operatorname{ch}\left(\beta\frac{x}{\xi}\right) \right) +$$

$$+ \frac{\beta}{1-\beta^2}(\epsilon_0-\epsilon_1)E_1 e^{-\frac{h}{\xi}} \left[-\beta\operatorname{ch}(\frac{x}{\xi}) + \operatorname{ch}(\beta\frac{x}{\xi}) e^{-\beta\frac{h}{\xi}} \left(\operatorname{sh}(\frac{h}{\xi}) + \beta\operatorname{ch}(\frac{h}{\xi}) \right) \right]$$

$$= \epsilon_0 E_0 + \operatorname{ch}\left(\beta\frac{x}{\xi}\right) e^{-\beta\frac{h}{\xi}} \left[-(\epsilon_0-\epsilon_1)E_0 + \frac{E_1\epsilon_1}{\beta} \left(\operatorname{sh}(\frac{h}{\xi}) + \beta\operatorname{ch}(\frac{h}{\xi}) \right) \right]$$

3 $\frac{d}{dx}D(x) = 0$

$E_1 = E_0\beta\frac{\epsilon_0-\epsilon_1}{\epsilon_1\left[\operatorname{sh}\left(\frac{h}{\xi}\right)+\beta\ \operatorname{ch}\left(\frac{h}{\xi}\right)\right]}$

Итого мы имеем

$D = E_0\epsilon_0$

$E(x) = E_0\left(1 + \frac{(\epsilon_0-\epsilon_1)\beta}{\epsilon_1\left(\operatorname{sh}(\frac{h}{\xi})+\beta\operatorname{ch}(\frac{h}{\xi})\right)} e^{-\frac{h}{\xi}} \operatorname{ch}(\frac{x}{\xi})\right)$

Что полностью соответствует написанному в заметке. Видимо, отсутствие $(\epsilon_0-\epsilon_1)$ перед вторым слагаемым в формуле (6) в заметке - это просто опечатка, а не неправильное решение. Выражая P(x)

$P(x) = \frac{E_0}{4\pi}\left((\epsilon_0-1) - \frac{(\epsilon_0-\epsilon_1)\beta}{\epsilon_1\left(\operatorname{sh}(\frac{h}{\xi})+\beta\operatorname{ch}(\frac{h}{\xi})\right)} e^{-\frac{h}{\xi}} \operatorname{ch}(\frac{x}{\xi})\right)$

4 K(x)

Найдем функцию Грина уравнения (2.19)

$$\delta(x-x') = \alpha G(x') - \delta G^{''}(x')$$

$$G(x,x') = \begin{cases} C_1 e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x-x')} + C_2 e^{\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x-x')}, & x' < x \\ C_3 e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x-x')} + C_4 e^{\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x-x')}, & x' > x \end{cases}$$

Изнепрерывности и скачка производной

$$\begin{cases} G(x,x+0) = G(x,x-0) \\ -\delta\left[G^{'}(x,x+0) - G^{'}(x,x-0)\right] = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_3 + C_4 \\ -C_1 + C_2 + C_3 - C_4 = -\frac{1}{\sqrt{\delta\alpha}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 - C_3 = \frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}} \\ C_2 - C_4 = -\frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}} \end{cases}$$

У Таганцева гран условия $G(x,-h) = G(x,h) = 0$. В терминах C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x+h)} + C_2 e^{\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x+h)} = 0 \\ C_3 e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x-h)} + C_4 e^{\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x-h)} = 0 \end{cases}$$

Итого имеем систему на коэфициенты

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x+h)} \\ C_3 = -C_4 e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x-h)} \\ C_1 - C_3 = \frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}} \\ C_2 - C_4 = -\frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_2 e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x+h)} + C_4 e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x-h)} = \frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}} \\ C_2 - C_4 = -\frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}} \end{cases}$$

$$-C_4 e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x+h)} + \frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}} e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x+h)} + C_4 e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x-h)} = \frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}}$$

$$-2C_4 e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}x} \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right) = \frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}}\left(1 - e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x+h)}\right)$$

$$C_4 = -\frac{e^{-2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}x} - e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h}}{4\sqrt{\delta\alpha}\ \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)}$$

$$C_2 = \frac{\left(-e^{-2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}x} + e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h} - 2\operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)\right)}{4\sqrt{\delta\alpha}\ \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)} = \frac{-e^{-2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}x} + e^{-2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h}}{4\sqrt{\delta\alpha}\ \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)}$$

$$C_3 = \frac{e^{-2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h} - e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}x}}{4\sqrt{\delta\alpha}\ \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)}$$

$$C_1 = \frac{e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h} - e^{2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}x}}{4\sqrt{\delta\alpha}\ \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)}$$

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}\ \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)}\left[\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left\{x - x' - 2h\right\}\right) - \operatorname{ch}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x+x')\right]\right] & x' < x \\ \frac{1}{2\sqrt{\delta\alpha}\ \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)}\left[\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left\{x - x' + 2h\right\}\right) - \operatorname{ch}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}(x+x')\right]\right] & x' > x \end{cases}$$

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta\alpha}\ \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)} \operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left(h + x'\right)\right] \operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left(h - x\right)\right] & x' < x \\ \frac{1}{\sqrt{\delta\alpha}\ \operatorname{sh}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h\right)} \operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left(h - x'\right)\right] \operatorname{sh}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left(h + x\right)\right] & x' > x \end{cases}$$

У нас же ядро выглядит несколько иначе. Оно соотвтетствует гран условиям таким, что $C_2 = C_3 = 0$. Если рассмотреть предел $\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}h \gg x \to \infty$ то как видно $C_2, C_3 \to 0$ и $G \to \# e^{-\#|x-x'|}$ т.е. получаем наше ядро K(x). Т.е. фактически мы искали функцию Грина в свободном пространстве(убывающую на бесконечности) и она же получается при предельном переходе от функции Грина с гран условиями в $\pm h$

5 Соответствие констант

Найдем выражение для P(x) в рамках нашей модели

$$P(x) = \frac{1}{4\pi}\left(D(x) - E(x)\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\int\limits_{-h}^{h}\left[(\epsilon_1 - 1)\delta(x - x') + \frac{\beta}{2\xi}(\epsilon_0 - \epsilon_1)e^{-\beta\frac{|x-x'|}{\xi}}\right]E(x')dx'\right)$$

Согласно ЛЛ считая, что $\epsilon_1 \approx 1$

$$P(x) = \int\limits_{-h}^{h}\frac{\beta(\epsilon_0 - \epsilon_1)}{8\pi\xi}e^{-\beta\frac{|x-x'|}{\xi}}E(x')dx$$

Рассматривая G(x,x') в вышеупомянутом пределе

$$G(x, x') = \frac{1}{\sqrt{\delta\alpha}}e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}|x-x'|}$$

Такимобразом

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\delta\alpha}} = \frac{\beta(\epsilon_0-\epsilon_1)}{8\pi\xi}\\ \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} = \frac{\beta}{\xi}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha = \frac{8\pi}{\epsilon_0-\epsilon_1}\\ \delta = \frac{8\pi\xi^2}{\beta^2(\epsilon_0-\epsilon_1)}\end{cases}$$

$$\xi^T = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} = \frac{\xi}{\beta} - \text{тут и далее верхним индексом Т будем обозначать обозначения Таганцева}$$

$$\xi_1^T \approx \xi^T\sqrt{\frac{\kappa_b}{\kappa}} = \frac{\xi}{\beta}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} = \xi$$

6 ϵ_{eff}

Согласно формуле (13) нашей заметке

$$\epsilon_{eff} = \frac{h}{h + \xi\gamma\ \operatorname{sh}\frac{h}{\xi}}\epsilon_0$$

$$\gamma = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}\left[\beta\ \operatorname{ch}\left(\frac{h}{\xi}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{h}{\xi}\right)\right]}$$

$$\text{Рассмотрим предел}\frac{h}{\xi} \gg 1\text{и } \beta = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} \ll 1$$

$$\epsilon_{eff} = \frac{h}{h + \xi\frac{\epsilon_0-\epsilon_1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}\left[\beta\ c\operatorname{th}\left(\frac{h}{\xi}\right)+1\right]}}\epsilon_0 = \frac{h}{h + \xi\frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1}}}\epsilon_0 = \frac{\epsilon_0}{1 + \frac{\xi}{\beta h}}$$

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_0\left(1 - \frac{\xi}{\beta h}\right)$$

Если я правильно понял, то Таганцев находит среднее значение поляризации, а потом говорит, что эффективная диэлектрическая проницаемость должна вести себя так же(см. переход от (2.23) к (2.24) например). Таким образом

$$
\begin{aligned}
\bar{P} \sim \kappa_{eff} &= \kappa \left(1 - 2\frac{\xi_1^T}{h} \operatorname{th}\left(\frac{h}{2\xi_1^T}\right)\right) \\
\kappa_{eff} &= \kappa \left(1 - 2\frac{\xi_1^T}{h}\right) \text{или в наших обозначениях} \\
\epsilon_{eff} &= \epsilon_0 \left(1 - 2\frac{\xi}{h}\right)
\end{aligned}
$$

Таким образом ответ в пределе различается и в наших обозначениях выглядит так

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{eff} &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{\xi}{\beta h}\right) \\
\epsilon_{eff} &= \epsilon_0 \left(1 - 2\frac{\xi}{h}\right)
\end{aligned}
$$

Однако мне представляется весьма странным то что при нахождении ядра для поляризации пришлось считать, что $\epsilon_1 = 1$. Если это действительно так, а κ очевидно тоже самое что ϵ_0(Таганцев явно пишет что это “dielectic permittivity” после формулы (2.15) к примеру) то тогда и κ_b должна быть единицей в силу нашего предположения.