システム計画論 第 9 回 課題

June 26, 2023　29C23002　石川健太郎

ファジィ数 $\tilde{C}_j$ のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{C}_j}(c)$ は次のように定められている.

$$\mu_{\tilde{C}_j}(c) = \exp\left(-\frac{(c - c_j^c)^2}{w_j^2}\right) \tag{1}$$

また, ベクトル $\boldsymbol{c}$ のメンバシップ関数 $\mu_C(\boldsymbol{c})$ を次のように定める.

$$\mu_C(\boldsymbol{c}) = \min_{j \in \{1,2,\ldots,n\}} \mu_{\tilde{C}_j}(c_j), \quad \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

あるクリスプな $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}$ について, リグレット $r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{c})$ は次のように書ける.

$$r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{c}) = \max\left\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 1, \ \ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\right\} \tag{3}$$

ただし, $\boldsymbol{e}$ はすべての要素が 1 のベクトルである.
式 (3) の式の非負条件を除く制約条件は $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 1$ の 1 つだけなので, 基底変数の数は 1 つである. すなわち, $\boldsymbol{y}$ は 1 箇所のみが 1 であり, 他の要素は 0 のベクトルである. よって, 式 (3) は次のように書き直すことができる.

$$r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{c}) = \max_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} c_i - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{4}$$

拡張原理から, リグレット $R(x)$ のメンバシップ関数 $\mu_{R(x)}(r)$ は次のように書ける.

$$\mu_{R(\boldsymbol{x})}(r) = \sup\left\{\mu_C(\boldsymbol{c}) \mid r = r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{c})\right\} \tag{5}$$

リグレット $R(x)$ が z 以下となる必然性 $N_{R(\boldsymbol{x})}(\{r \mid r \leq z\})$ が h_0 以上となるような z を最小化するモデル (満足水準最適化モデル) は次のように書ける.

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z, \\
\text{subject to} \quad & N_{R(\boldsymbol{x})}(\{r \mid r \leq z\}) \geq h_0, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
N_{R(\boldsymbol{x})}(\{r \mid r \leq z\}) &= \inf_{r > z}\left(1 - \mu_{R(\boldsymbol{x})}(r)\right) \quad \left(\text{必然性の定義}\right) \\
&= \inf_{r > z}\left(1 - \sup_{\substack{\boldsymbol{c} \\ r = r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{c})}} \mu_C(\boldsymbol{c})\right) \quad \left(\text{式 (5) より}\right) \\
&= \inf_{\substack{\boldsymbol{c} \\ r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{c}) > z}} \left(1 - \mu_C(\boldsymbol{c})\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

式 (7) から, $N_{R(\boldsymbol{x})}(\{r \mid r \le z\}) \ge h_0$ を次のように書き換えることができる.

$$\mu_C(\boldsymbol{c}) > 1 - h_0 \quad \Rightarrow \quad r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{c}) \le z \tag{8}$$

レベル集合を使って書き直すと次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{c} \in [C]_{1-h_0}} r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{c}) \le z, \\
&[C]_{1-h_0} = \{\boldsymbol{c} \mid \mu_C(\boldsymbol{c}) \ge 1 - h_0\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\mu_C(\boldsymbol{c}) &\ge 1 - h_0 \\
\min_{j \in \{1,2,\ldots,n\}} \mu_{\tilde{C}_j}(c_j) &\ge 1 - h_0 \quad \bigl(\text{式 (2) より}\bigr) \\
\mu_{\tilde{C}_j}(c_j) &\ge 1 - h_0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\
\exp\left(-\frac{(c_j - c_j^c)^2}{w_j^2}\right) &\ge 1 - h_0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \bigl((1) \text{ より}\bigr) \\
c_j^c - w_j\sqrt{-\ln(1-h_0)} \le c_j &\le c_j^c + w_j\sqrt{-\ln(1-h_0)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned} \tag{10}$$

$[C]_{1-h_0}$ は n 次元直方体になっている.
以上の議論から, 数理計画問題 (6) は次のように書ける.

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z, \\
\text{subject to} \quad & \max_{\boldsymbol{c} \in [C]_{1-h_0}} r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{c}) \le z, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\
& x_j \ge 0, \; j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{c} \in [C]_{1-h_0}} r(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{c}) &\le z \\
\max_{\boldsymbol{c} \in [C]_{1-h_0}} \left(-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \max_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} c_i\right) &\le z \quad \bigl(\text{式 (4) より}\bigr) \\
\max_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} \max_{\boldsymbol{c} \in [C]_{1-h_0}} \left(-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c_i\right) &\le z \\
\max_{\boldsymbol{c} \in [C]_{1-h_0}} \left(-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c_i\right) &\le z, \quad i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned} \tag{12}$$

次のように $F_i(\boldsymbol{c})$ を定める.

$$F_i(\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c_i \tag{13}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial c_j} = \begin{cases} 1 - x_j, & \text{if } i = j, \\ -x_j, & \text{if } i \ne j. \end{cases} \tag{14}$$

(11) の制約の下で, $1 - x_j \ge 0, \quad -x_j \le 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$ である.

$[C]_{1-h_0}$ が n 次元直方体であることと $\frac{\partial F_i}{\partial c_j}$ の 0 との大小関係から, $\boldsymbol{c} \in [C]_{1-h_0}$ のとき, $F_i(\boldsymbol{c})$ は c_i が最大で, $c_j,\ j \neq i$ が最小の $\boldsymbol{c}$ で最小値をとる. 式 (10), と合わせて各 i について次が成り立つことがわかる.

$$
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{c}\in[C]_{1-h_0}} \left(-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c_i\right) &\leq z \\
-\left(c_i^c x_i + w_i x_i g_0 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(c_j^c x_j - w_j x_j g_0\right)\right) + \left(c_i^c + w_i g_0\right) &\leq z \\
-g_0\left(w_i x_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_j x_j\right) - \sum_{j=1}^{n} c_j^c x_j + c_i^c + g_0 w_i &\leq z \\
g_0\left(w_i x_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_j x_j\right) + \sum_{j=1}^{n} c_j^c x_j + z &\geq c_i^c + g_0 w_i
\end{aligned} \tag{15}
$$

ただし, $g_0 = \sqrt{-\ln(1-h_0)}$ である.
式 (15) を 数理計画問題 (11) に代入すると, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z, \\
\text{subject to} \quad & \sqrt{-\ln(1-h_0)}\left(w_i x_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_j x_j\right) + \sum_{j=1}^{n} c_j^c x_j + z \geq c_i^c + \sqrt{-\ln(1-h_0)}\, w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\
& x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{16}
$$

数理計画問題 (6) は, 線形計画問題 (16) と等価である.