システム計画論 第 3 回 課題

April 25, 2023　　29C23002　　石川健太郎

[3a]

$N=\{1,2,\ldots,n\},\ \ N^-=\{i\in N\mid k_i<0\},\ \ N^+=\{i\in N\mid k_i\geq 0\}$ とする.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in N} k_iA_i &= \sum_{i\in N^-} k_iA_i + \sum_{i\in N^+} k_iA_i && (1)\\
&= -\sum_{i\in N^-} |k_i|\,A_i + \sum_{i\in N^+} |k_i|\,A_i && (2)\\
&= -\sum_{i\in N^-} \left[|k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] + \sum_{i\in N^+} \left[|k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] && (3)\\
&= -\left[\sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] + \left[\sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] && (4)\\
&= \left[-\sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}},\ -\sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}}\right] + \left[\sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] && (5)\\
&= \left[\sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}} - \sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}},\ \sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}} - \sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \right] && (6)
\end{aligned}
$$

[3b]

まず, $\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h \supseteq f\left((\tilde{A}_1)_h,(\tilde{A}_2)_h\right)$ を示す.
$y\in f\left((\tilde{A}_1)_h,(\tilde{A}_2)_h\right)$ とする.
y の定義から任意の y に対して $y=f\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2\right)$ を満たす $\bar{x}_1\in(\tilde{A})_h,\ \bar{x}_2\in(\tilde{A})_h$ が存在するので, 任意の y について $f^{-1}(y)\neq\emptyset$ である.
よって, 拡張原理から次の関係が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\mu_{f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)}(y) &= \sup_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)} \min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1),\mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\right) && (7)\\
&\geq \min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1),\mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)\right) && (8)\\
&> h \quad \left(\bar{x}_1\in(\tilde{A})_h,\ \bar{x}_2\in(\tilde{A})_h \text{ なので, } \mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1)>h,\ \mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)>h\right) && (9)
\end{aligned}
$$

$\mu_{f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)}(y)\geq h$ なので, $y\in\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h$ である.
以上から, $\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h \supseteq f\left((\tilde{A}_1)_h,(\tilde{A}_2)_h\right)$ が示された.
次に, $\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h \subseteq f\left((\tilde{A}_1)_h,(\tilde{A}_2)_h\right)$ を示す.
$y\in\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h$ とする.
拡張原理から, $\mu_{f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)}(y)=\min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1),\mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)\right)$ を満たす $\bar{x}_1\in\tilde{A}_1,\bar{x}_2\in\tilde{A}_2$ が存在する.
$y\in\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h$ より, $\mu_{f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)}(y)>h$ なので, $\min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1),\mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)\right)>h$ である.
すなわち, $\mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1)>h,\mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)>h$ が成り立ち, $\bar{x}_1\in(\tilde{A}_1)_h,\bar{x}_2\in(\tilde{A}_2)_h$ である.

このことから， $y \in f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ であるといえる．
以上から， $\left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h \subseteq f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ が示された．
$\left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h \supseteq f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right), \left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h \subseteq f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ が成り立つので， $\left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h = f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ が成り立つ．