システム計画論 第 3 回 課題

May 9, 2023　　29C23002　　石川健太郎

[3a]

$N=\{1,2,\dots,n\},\ \ N^-=\{i\in N \mid k_i<0\},\ \ N^+=\{i\in N \mid k_i\geq 0\}$ とする．

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in N} k_iA_i &= \sum_{i\in N^-} k_iA_i + \sum_{i\in N^+} k_iA_i && (1)\\
&= -\sum_{i\in N^-} |k_i|\,A_i + \sum_{i\in N^+} |k_i|\,A_i && (2)\\
&= -\sum_{i\in N^-} \left[|k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \ |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] + \sum_{i\in N^+} \left[|k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \ |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] && (3)\\
&= -\left[\sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \ \sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] + \left[\sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \ \sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] && (4)\\
&= \left[-\sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}},\ \ -\sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}}\right] + \left[\sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \ \sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}}\right] && (5)\\
&= \left[\sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}} - \sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}},\ \ \sum_{i\in N^+} |k_i|\,a_i^{\mathrm{R}} - \sum_{i\in N^-} |k_i|\,a_i^{\mathrm{L}},\ \ \right] && (6)
\end{aligned}
$$

[3b]

$y\in\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h$ のとき，y の定義から任意の y に対して $y=f\,(x_1,x_2)$ を満たす $x_1\in\tilde{A},\ x_2\in\tilde{A}$ が存在するので，任意の y について $f^{-1}(y)\neq\emptyset$ である．

$$
y\in\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h \Rightarrow f^{-1}(y)\neq\emptyset \qquad (7)
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad y\in f\left((\tilde{A}_1)_h,(\tilde{A}_2)_h\right) && (8)\\
&\Leftrightarrow \exists\,(\bar{x}_1,\bar{x_2})\in f^{-1}(y);\ \ \bar{x}_1\in(\tilde{A}_1)_h\ \ \text{amd}\ \ \bar{x}_2\in(\tilde{A}_2)_h && (9)\\
&\Leftrightarrow \exists\,(\bar{x}_1,\bar{x_2})\in f^{-1}(y);\ \ \mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1)>h\ \ \text{amd}\ \ \mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)>h && (10)\\
&\Leftrightarrow \exists\,(\bar{x}_1,\bar{x_2})\in f^{-1}(y);\ \ \ \min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1),\mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)\right)>h && (11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad y\in\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h && (12)\\
&\Leftrightarrow \mu_{f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)}(y)>h && (13)\\
&\Leftrightarrow \sup_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)} \min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1),\mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\right)>h \qquad (\because (7)\ \text{と拡張原理}) && (14)
\end{aligned}
$$

任意の $(\bar{x}_1,\bar{x_2})\in f^{-1}(y)$ は $\sup_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)}\min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1),\mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\right)$ よりも小さいので，(11) $\Leftarrow$ (14) が成り立つ．
sup の定義から，明らかに (11) $\Rightarrow$ (14) が成り立つ．
よって，(11) $\Leftrightarrow$ (14) が成り立つ．以上から， $y\in f\left((\tilde{A}_1)_h,(\tilde{A}_2)_h\right)\Leftrightarrow y\in\left(f\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)\right)_h$ が示された．