システム計画論 第 3 回 課題

May 1, 2023　29C23002　石川健太郎

[3a]

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $N^- = \{i \in N \mid k_i < 0\}$, $N^+ = \{i \in N \mid k_i \geq 0\}$ とする.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} k_i A_i &= \sum_{i \in N^-} k_i A_i + \sum_{i \in N^+} k_i A_i && (1)\\
&= -\sum_{i \in N^-} |k_i| A_i + \sum_{i \in N^+} |k_i| A_i && (2)\\
&= -\sum_{i \in N^-} \left[|k_i| a_i^{\mathrm{L}},\ |k_i| a_i^{\mathrm{R}}\right] + \sum_{i \in N^+} \left[|k_i| a_i^{\mathrm{L}},\ |k_i| a_i^{\mathrm{R}}\right] && (3)\\
&= -\left[\sum_{i \in N^-} |k_i| a_i^{\mathrm{L}},\ \sum_{i \in N^-} |k_i| a_i^{\mathrm{R}}\right] + \left[\sum_{i \in N^+} |k_i| a_i^{\mathrm{L}},\ \sum_{i \in N^+} |k_i| a_i^{\mathrm{R}}\right] && (4)\\
&= \left[-\sum_{i \in N^-} |k_i| a_i^{\mathrm{R}},\ -\sum_{i \in N^-} |k_i| a_i^{\mathrm{L}}\right] + \left[\sum_{i \in N^+} |k_i| a_i^{\mathrm{L}},\ \sum_{i \in N^+} |k_i| a_i^{\mathrm{R}}\right] && (5)\\
&= \left[\sum_{i \in N^+} |k_i| a_i^{\mathrm{L}} - \sum_{i \in N^-} |k_i| a_i^{\mathrm{R}},\ \sum_{i \in N^+} |k_i| a_i^{\mathrm{R}} - \sum_{i \in N^-} |k_i| a_i^{\mathrm{L}},\ \right] && (6)
\end{aligned}$$

[3b]

まず, $\left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h \supseteq f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ を示す.
$y \in f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ とする.
y の定義から任意の y に対して $y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ を満たす $\bar{x}_1 \in (\tilde{A})_h$, $\bar{x}_2 \in (\tilde{A})_h$ が存在するので, 任意の y について $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ である.
よって, 拡張原理から次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\mu_{f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)}(y) &= \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\right) && (7)\\
&\geq \min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1), \mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)\right) && (8)\\
&> h \quad \left(\bar{x}_1 \in (\tilde{A})_h,\ \bar{x}_2 \in (\tilde{A})_h \text{ なので, } \mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1) > h,\ \mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2) > h\right) && (9)
\end{aligned}$$

$\mu_{f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)}(y) \geq h$ なので, $y \in \left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h$ である.
以上から, $\left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h \supseteq f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ が示された.
次に, $\left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h \subseteq f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ を示す.
$y \in \left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h$ とする.
拡張原理から, $\mu_{f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)}(y) = \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\right)$ が成り立ち, $\mu_{f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)}(y) = \min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1), \mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)\right)$ を満たす $\bar{x}_1 \in \tilde{A}_1, \bar{x}_2 \in \tilde{A}_2$ が存在する.
$y \in \left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h$ より, $\mu_{f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)}(y) > h$ なので, $\min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1), \mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2)\right) > h$ である.

すなわち，$\mu_{\tilde{A}_1}(\bar{x}_1) > h, \mu_{\tilde{A}_2}(\bar{x}_2) > h$ が成り立ち，$\bar{x}_1 \in (\tilde{A}_1)_h, \bar{x}_2 \in (\tilde{A}_2)_h$ である．
このことから，$y \in f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ であるといえる．
以上から，$\left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h \subseteq f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ が示された．
$\left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h \supseteq f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right), \left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h \subseteq f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ が成り立つので，$\left(f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right)_h = f\left((\tilde{A}_1)_h, (\tilde{A}_2)_h\right)$ が成り立つ．