第5章 数组和广义表

本章重点与难点

- **重点：**

数组的存储表示方法；特殊矩阵压缩存储方法；稀疏矩阵的压缩存储方法。

- **难点：**

稀疏矩阵的压缩存储表示和实现算法。

第五章 数组和广义表

5.1 数组的类型定义

5.2 数组的顺序表示和实现

5.3 矩阵的压缩存储

5.4 广义表的类型定义

5.5 广义表的存储结构

第五章 数组和广义表

5.1 数组的类型定义

- 数组：
  - 是由下标（index）和值（value）组成的序对（index，value）的集合。
  - 也可以定义为是由相同类型的数据元素组成有限序列。
  - 每个元素受n(n≥1)个线性关系的约束，每个元素在n个线 性关系中的序号i_1、i_2、…、i_n称为该元素的下标，并称该 数组为n 维数组。
- 数组的特点：
  - 元素本身可以具有某种结构，属于同一数据类型；
  - 数组是一个具有固定格式和数量的数据集合。
- 示例：

5.1 数组的类型定义

- 示例：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A=(A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots,\ A_n)$

其中：

$A_i=(a_{1i},\ a_{2i},\ \ldots\ldots,\ a_{mi})$

$(1\le i\le n)$

- 元素a_{22}受两个线性关系的约束，在行上有一个行前驱a_{21}和一 个行后继a_{23}，在列上有一个列前驱a_{12}和和一个列后继a_{32}。
- 二维数组是数据元素为线性表的线性表。

5.1 数组的类型定义

例 分析二维数组a[m][n]和三维数组a[m][n][p]在内存中的存放方式。

a[m][n]在内存中的存放方式是：

$(a_{00}, \cdots; a_{0n-1}, a_{10}, \cdots; a_{1n-1}, \cdots a_{ij}, \cdots; a_{m-1\,0}, \cdots; a_{m-1n-1})$

$0 \le i \le m-1,\ 0 \le j \le n-1$;

a[m][n][p]在内存中的存放方式是：

$(a_{000}, \cdots; a_{00n-1}, a_{010}, \cdots; a_{01n-1}, \cdots; a_{ijk}, \cdots; a_{m-1n-10}, \cdots; a_{m-1n-1p-1})$

$0 \le i \le m-1,\ 0 \le j \le n-1,\ 0 \le k \le p-1$

5.1 数组的类型定义

- 数组的ADT定义：

ADT Array {

数据对象：

$j_i=0,\ldots,b_i-1, i=1,2,\ldots,n,$

$D=\{a_{j1,j2,\ldots,jn} \mid$ n称为数据元素的维数，b_i是数组第i维的长度，j_i 是数组元素的第i维下标，$a_{j1,j2,\ldots,jn} \in ElemSet\}$

数据关系：

$R=\{R1, R2, \ldots, Rn\}$

$Ri=\{<a_{j1,\ldots ji,\ldots jn}, a_{j1,\ldots ji+1,\ldots jn}> \mid 0 \le j_k \le b_k-1,$
$1 \le k \le n$ 且 $k \ne i,\ 0 \le j_i \le b_i-2,$
$a_{j1,\ldots ji,\ldots jn}, a_{j1,\ldots ji+1,\ldots jn} \in D,\ i=2,\ldots,n\}$

基本操作：

} ADT Array

见下页

5.1 数组的类型定义

- 基本操作：
  - 初始化：Create（）
    - 建立一个空数组；
    - int A[ ][ ]
  - 存取：Retrieve（array，index）
    - 给定一组下标，读出对应的数组元素；
    - A[i][j]
  - 修改：Store（array，index，value）：
    - 给定一组下标，存储或修改与其相对应的数组元素。
    - A[i][j]=8。
  - 无需插入和删除操作

第五章 数组和广义表

5.1 数组的类型定义

5.2 数组的顺序表示和实现

5.3 矩阵的压缩存储

5.4 广义表的类型定义

5.5 广义表的存储结构

5.2 数组的顺序表示和实现

- **数组的存储结构**：
  - 数组没有插入和删除操作，所以，不用预留空间，适合采 用顺序存储。
  - 数组是多维的结构，而存储空间是一个一维的结构。
  - 数组的顺序存储
    - 用一组连续的存储单元来实现（多维）数组的存储。
    - 高维数组可以看成是由多个低维数组组成的。

5.2 数组的顺序表示和实现

- 二维数组的存储与寻址
  - 常用的映射（存储）方法有两种：
    - 按行优先：先行后列，先存储行号较小的元素，行号相同者先存储列号较小的元素。（高级语言一般以行序为主序）
    - 按列优先：先列后行，先存储列号较小的元素，列号相同者先存储行号较小的元素。（例如matlab）

不同的存储方式有不同元素地址计算方法。

5.2 数组的顺序表示和实现

- 数组元素的地址关系：

例 分别以行序为主和以列序为主求二维数组a[3][4]中元素a[1][2]地址，首地址用loc(a[0][0])表示，每个元素占用L个内存单位。

a00	a01	a02	a03
a10	a11	a12	a13
a20	a21	a22	a23

a00	a01	a02	a03
a10	a11	a12	a13
a20	a21	a22	a23

以行序为主：

loc(a[1][2])=loc(a[0][0])+[(1×4)+2]×L

以列序为主：

loc(a[1][2])=loc(a[0][0])+[(2×3)+1]×L

5.2 数组的顺序表示和实现

- 数组元素的地址关系(行序为主):

设每个元素所占空间为L,A[0][0]的起始地址记为LOC[0,0]。

二维数组$A[b_1][b_2]$中元素A_{ij}的起始地址为:

$$LOC[i,j]=LOC[0,0]+(b_2\times i+j)L$$

三维数组$A[b_1][b_2][b_3]$中数据元素A[i][j][k]的起始地址为:

$$LOC[i,j,k]=LOC[0,0,0]+(b_2\times b_3\times i+b_3\times j+k)\times L$$

n维数组$A[b_1][b_2]...[b_n]$中数据元素$A[j_1,j_2,\ldots j_n]$的存储位置为:

$$LOC[j_1,j_2,\ldots j_n]=LOC[0,0,\ldots,0]+$$

$$(b_2\times\ldots\times b_n\times j_1+b_3\times\ldots\times b_n\times j_2+\ldots+b_n\times j_{n-1}+j_n)\times L$$

5.2 数组的顺序表示和实现

- 数组的顺序存储类型实现：

```
#include <stdarg.h>
                    //标准头文件，提供宏va_start、
                    //va_arg和va_end,用于存放变长参数表
#define MAX_ARRAY_DIM 8     //数组维数
typedef struct {
     Elemtype *base;              //数组元素基址
     int dim;                     //数组维数
     int *bounds;                 //数组维界基址
     int *constants;              //数组映像函数常量基址
}Array;
```

第五章 数组和广义表

5.3 矩阵的压缩存储

- 特殊矩阵的压缩存储：
  - 特殊矩阵：矩阵中很多值相同的元素并且它们的分布有一 定的规律。
  - 稀疏矩阵：矩阵中有很多特定值的（如零）元素。
- 压缩存储的基本思想是：
  - 为多个值相同的元素只分配一个存储空间；
  - 对特定值的（如零）元素不分配存储空间。

5.3.1 特殊矩阵

- 下(上)三角矩阵

对角线以上(下)元素都为0的矩阵称为(下)上三角矩阵与对称矩阵A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

下三角矩阵

上三角矩阵

5.3.1 特殊矩阵

- 下(上)三角矩阵的存储方式

下(上)三角矩阵对角线以上(下)元素都为零，根据这个特点可以定义一个长度为n*(n+1)/2的一维数组来存储。

- 下(上)三角矩阵压缩存储时地址对应关系

设下三角矩阵为a[n][n]，用一维数组sa[n*(n+1)/2]存储，则矩阵元素a[i][j]在数组sa中的位置为：

当i>=j时

a[i][j]对应存储在sa[i(i-1)/2+j-1]

5.3.2 稀疏矩阵

- 何谓稀疏矩阵

假设 m 行 n 列的矩阵含 t 个非零元素，

称：$\delta = \dfrac{t}{m \times n}$ 为稀疏因子。

通常认为 $\delta \leq 0.05$ 的矩阵为稀疏矩阵。

以常规方法，即以二维数组表示高阶的稀疏矩阵时产生的问题：
1）零值元素占的空间很大；
2）计算中进行了很多和零值的运算；

5.3.2 稀疏矩阵

- 解决问题的原则：

  ① 尽可能少存或者不存零值元素；

  ② 尽可能减少没有实际意义的运算；

  ③ 运算方便，即：

    - 能尽可能快地找到与下标值（i，j）对应的元素；
    - 能尽可能快地找到同一行或同一列的非零值元素。

5.3.2 稀疏矩阵

- 稀疏矩阵的ADT定义

ADT SparseMatrix {

数据对象： $D=\{a_{ij} \mid i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n;$

$a_{ij} \in ElemSet, m,n$ 分别为行数与列数$\}$

数据关系： $R=\{Row, Col\}$

$Row=\{<a_{i,j}, a_{i,j+1}> \mid i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n-1\}$

$Col=\{<a_{i,j}, a_{i+1,j}> \mid i=1,\ldots,m-1, j=1,\ldots,n\}$

基本操作 见下页

} ADT Array

5.3.2 稀疏矩阵

- 基本操作：

CreatSMatrix(&M) //创建稀疏矩阵M

DestroyArray(&M) //销毁稀疏矩阵M

………………………………..

TransposeSMatrix(M, &T) //求稀疏矩阵M的转置矩阵T

MultSMatrix(M,N,&Q) //求稀疏矩阵M和N的乘积Q

5.3.3 矩阵的压缩存储

- 稀疏矩阵的三元组顺序表存储：

根据稀疏矩阵大部分元素的值都为零的特点，可以只存储稀疏矩阵的非零元素，三元组分别记录非零元素的行，列位置和元素值。

例 求矩阵M的三元组表示。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵M

M=((1，2，1)，(2，4，2)，(3，1，1))

5.3.3 矩阵的压缩存储

- 三元组顺序表的实现：

```
#define  MAXSIZE  12500
typedef struct {
    int  i, j;            //该非零元的行下标和列下标
    ElemType  e;          // 该非零元的值
} Triple;                 // 三元组类型

typedef struct{
    Triple  data[MAXSIZE + 1];    //data[0]未用
    int     mu, nu, tu;
} TSMatrix;                       // 稀疏矩阵类型
```

5.3.3 矩阵的压缩存储

- 三元组顺序表转置的实现：
  - 示例分例

(1)从矩阵到转置矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵M

转值矩阵T

5.3.3 矩阵的压缩存储

- 求转置矩阵的操作：
  - 用常规的二维数组表示时的算法

```
for (col=1; col<=nu;++col)
    for (row=1; row<=mu; ++row)
        T[col][row] = M[row][col];
```

其时间复杂度为：O(mu * nu)

5.3.3 矩阵的压缩存储

- 三元组顺序表转置传统算法：

```
Status TransposeSMatrix(TSMatrix M, TSMatrix &T)
{ int p, q, col;T.mu=M.nu;T.nu=M.mu;T.tu=M.tu;
  if (T.tu) { q = 1;
    for (col=1; col<=M.nu; ++col)
      for (p=1; p<=M.tu; ++p)
        if (M.data[p].j == col) {
          T.data[q].i=M.data[p].j;T.data[q].j =M.data[p].i;
          T.data[q].e =M.data[p].e;  ++q;
        }
  }
  return OK;
}
```

5.3.3 矩阵的压缩存储

- 三元组顺序表转置算法时间复杂性：

```
for (col=1; col<=M.nu; ++col)
    for (p=1; p<=M.tu; ++p)
      ..............................
      }
```

时间复杂度为: O(M.nu*M.tu)

5.3.3 矩阵的压缩存储

- 三元组顺序表转置的实现：

  ➢ 示例分例

  (2)三元组的转置

1	2	1
1	5	5
2	2	7
3	1	3
3	4	2

1	3	3
2	1	1
2	2	7
4	3	2
5	1	5

5.3.3 矩阵的压缩存储

- 三元组顺序表快速转置算法：

```
Status FastTransposeSMatrix(TSMatrix M, TSMatrix &T)
{T.mu=M.nu;T.nu=M.mu;T.tu=M.tu;
 if (T.tu) {
  for (col=1; col<=M.nu; ++col)  num[col]=0;
  for (t=1; t<=M.tu; ++t)  ++num[M.data[t].j]; //求M中每列非零元个数
  cpot[1] =1;
  //求第col列中第一个非零元在b.data中的序号
  for (col=2; col<=M.nu; ++col)  cpot[col]=cpot[col-1]+num[col-1];
   for (p=1; p<=M.tu; ++p) {
    col=M.data[p].j;   q=cpot[col];
     T.data[q].i=M.data[p].j;T.data[q].j =M.data[p].i;
     T.data[q].e =M.data[p].e;  ++cpot[col];
    }
 }
 return OK;
} // 时间复杂度为O(nu + tu)
```

第五章 数组和广义表

5.4 广义表的类型定义

- 广义表的引入：

线性表要求数据元素的类型相同，在实际应用中线性表的数据类型往往不同。

例如：一个公司有董事长，总经理，秘书，人事部，分公司等等，董事长、总经理、秘书都是单个的人，而人事部、分公司又是一个组织。

如何在这种情况下应用线性表，就是广义表的范畴。

5.4 广义表的类型定义

- 广义表的定义：

广义表是线性表的推广，也称列表(Lists)。它是n个元素的有限序列，记作A=（a_1,a_2,……a_n)

其中A是表名，n是广义表的长度，a_i是广义表的元素，a_i既可以是单个元素，也可以是广义表。

子表：如果a_i是广义表，称为子表，用大写字母表示；

原子：如果a_i是单个元素，称为原子，用小写字母表示。

例如：D = (E, F) = （(a, (b, c))，F)

5.4 广义表的类型定义

- 广义表的ADT：

ADT Glist {

数据对象： $D＝\{e_i \mid i=1,2,..,n;\ n\geq 0;$
$e_i \in AtomSet$ 或 $e_i \in GList$,
AtomSet为某个数据对象 }

数据关系： $LR＝\{<e_{i-1}, e_i> \mid e_{i-1}, e_i \in D, 2\leq i\leq n\}$

基本操作： 见下页

} ADT Glist

5.4 广义表的类型定义

- 基本操作：

```
InitGlist(&L)            //初始化
CreateGlist(&L,S)        //销毁
GListLength(L)           //求表长
GListDepth(L)            //求表的深度
GetHead(L)               //取表头
GetTail(L)               //取表尾
```

5.4 广义表的类型定义

广义表是递归定义的线性结构，

$$LS = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

其中：α_i 或为原子 或为广义表

例如：$A = (\ )$

$F = (d, (e))$

$D = ((a,(b,c)), F)$

$C = (A, D, F)$

$B = (a, B) = (a, (a, (a, \cdots ,)))$

5.4 广义表的类型定义

广义表是一个多层次的线性结构

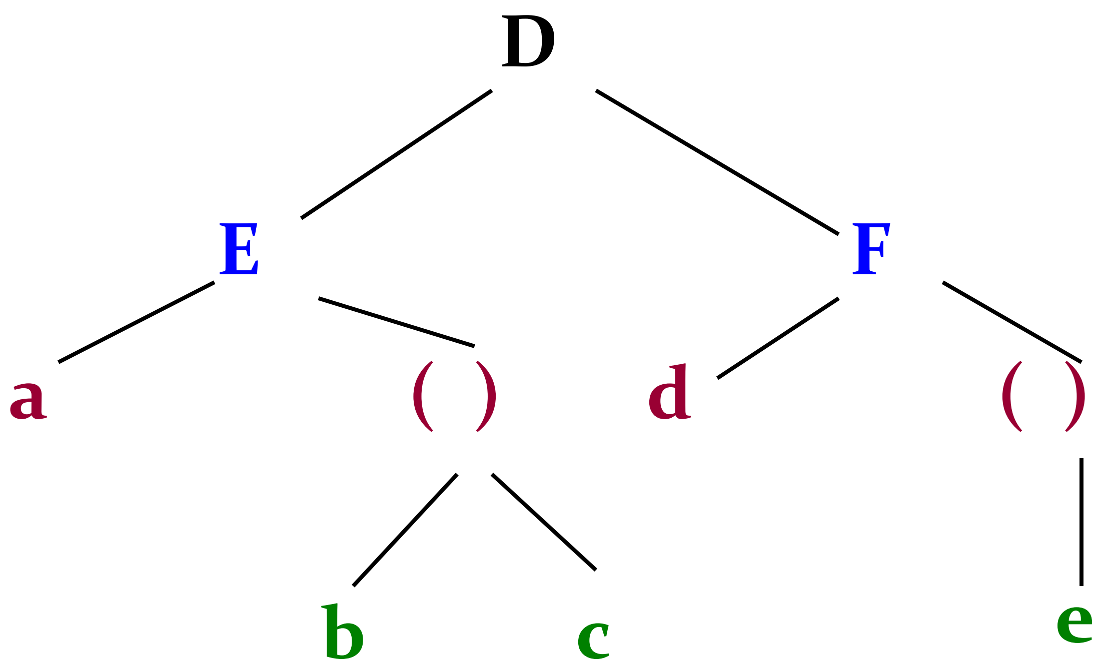
例如：

D=(E,F)

其中：

E=(a, (b, c))

F=(d, (e))



5.4 广义表的类型定义

- 广义表 LS = (α_1, α_2, …, α_n)的结构特点:

1) 广义表中的数据元素有相对次序;
2) 广义表的长度定义为最外层包含元素个数;
3) 广义表的深度定义为所含括弧的重数;

注意: "原子"的深度为 0

"空表"的深度为 1

广义表的深度=Max {子表的深度} +1

4) 广义表可以共享(不必列出子表的值,而是通过子表的名称来引用);
5) 广义表可以是一个递归的表。

递归表的深度是无穷值,长度是有限值。

5.4 广义表的类型定义

□广义表 LS = (α_1, α_2, ..., α_n)的结构特点:

6) 任何一个非空广义表 LS = (α_1, α_2, ..., α_n)均可分解为表头 Head(LS) = α_1 和表尾 Tail(LS) = (α_2, ..., α_n) 两部分。

例如: D = (E, F) = ((a, (b, c)), F)

Head(D) = E Tail(D) = (F)

Head(E) = a Tail(E) = ((b, c))

Head(((b, c))) = (b, c) Tail(((b, c))) = ( )

Head((b, c)) = b Tail((b, c)) = (c)

Head((c)) = c Tail((c)) = ( )

5.4 广义表的类型定义

- 基本操作举例

按例(1)的方式完成(2)(3)(4)填空

（1）B=（e）

只含一个原子，长度为1，深度为1。

（2）C=(a,(b，c，d))

有一个原子，一个子表，长度为2，深度为2。

（3）D=(B,C)

二个元素都是列表，长度为2，深度为3。

（4）E=(a,E)

是一个递归表，长度为2，深度无限，相当于E=（a,（a,（a,（a,……）））））。

第五章 数组和广义表

5.1 数组的类型定义

5.2 数组的顺序表示和实现

5.3 矩阵的压缩存储

5.4 广义表的类型定义

5.5 广义表的存储结构

5.5 广义表的存储结构

- 广义表表示方法

广义表从结构上可以分解成

广义表 = 表头 + 表尾 ⟹ 表头、表尾分析法

广义表 = 子表1 + 子表2 + … + 子表n ⟹ 子表分析法

5.5 广义表的存储结构

- 表头、表尾分析法

广义表通常采用头、尾指针的链表结构

图示

表结点：

tag=1	**hp**	**tp**

原子结点：

tag=0	**data**

举例

对于每一个结点，若**tag=0**表示这是一个原子结点，**atom**域存放该原子的值。若**tag=1**表示这是一个表结点，**hp**指向子表头，**tp**指向广义表的下一个

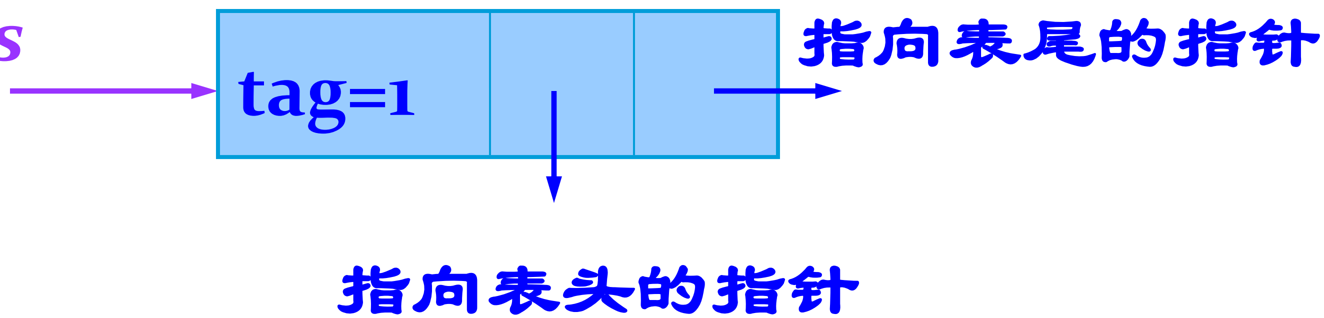
5.5 广义表的存储结构

- 表头、表尾分析法

1) 表头、表尾分析法：

空表 *ls=NIL*

非空表 *ls*

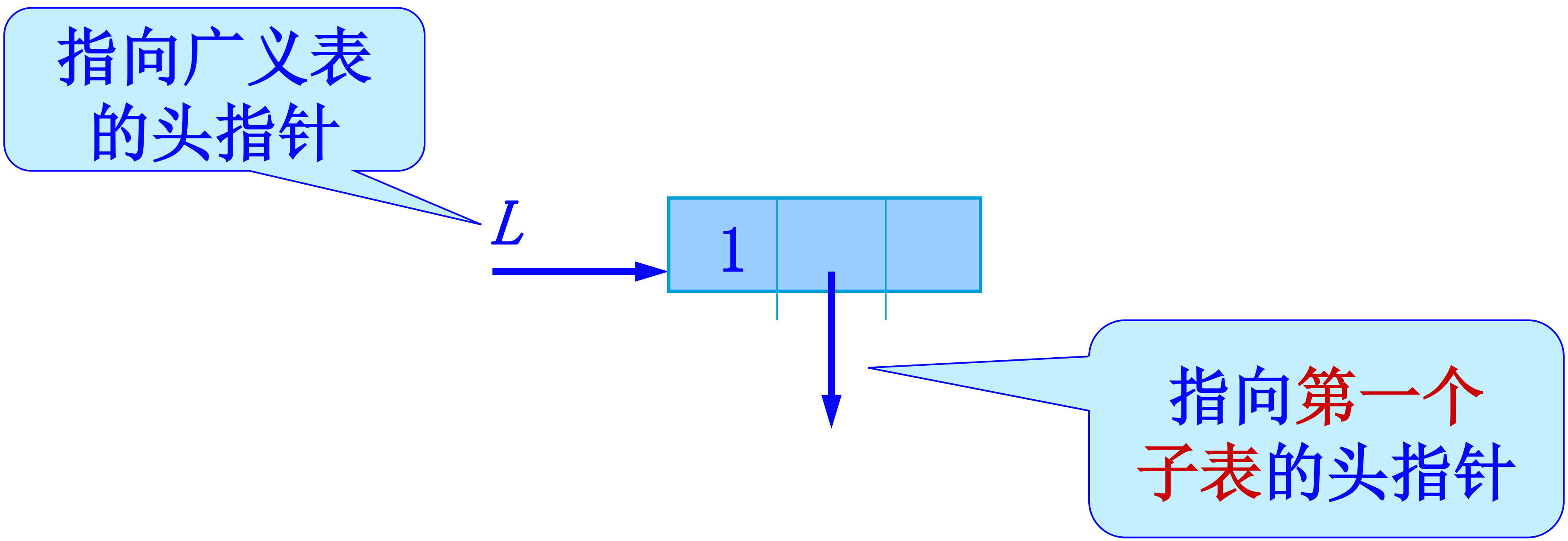


5.5 广义表的存储结构

- **表头、表尾分析法**
  - ➢如何由子表组合成一个广义表？

首先分析广义表和子表在存储结构中的关系。

先看第一个子表和广义表的关系：



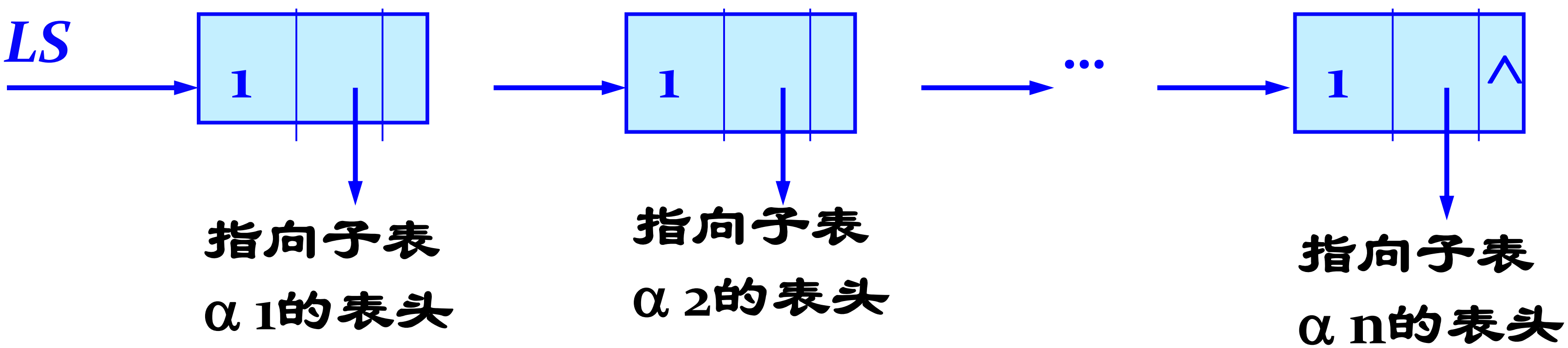
5.5 广义表的存储结构

- 子表分析法

广义表 LS = (α1, α2, …, αn)包括n个子表，
可以看成是线性链表

空表 *ls=NIL*

非空表



若子表为原子，则为

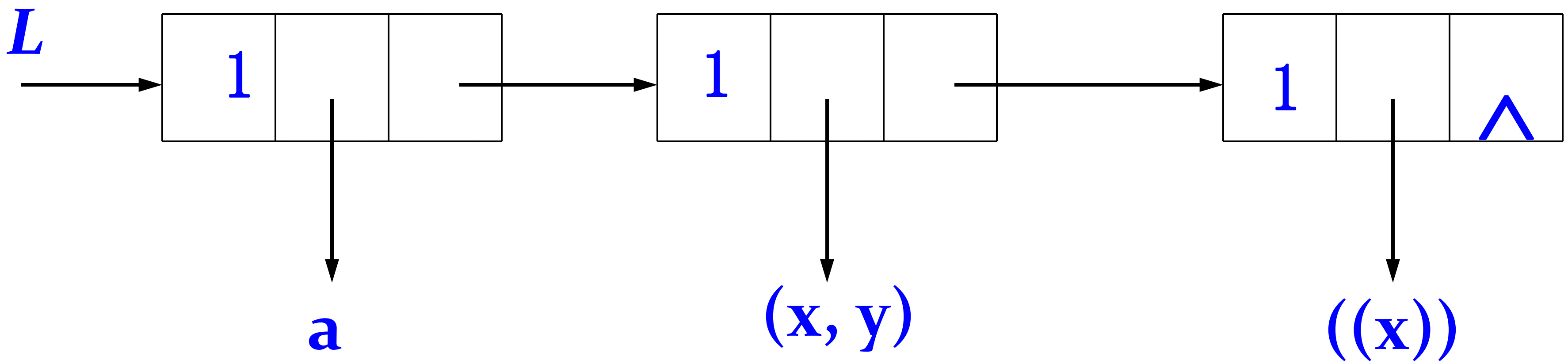
tag=0	data

子表分析法

5.5 广义表的存储结构

- 子表分析法

例如:　　L=(a, (x,y), ((x)))

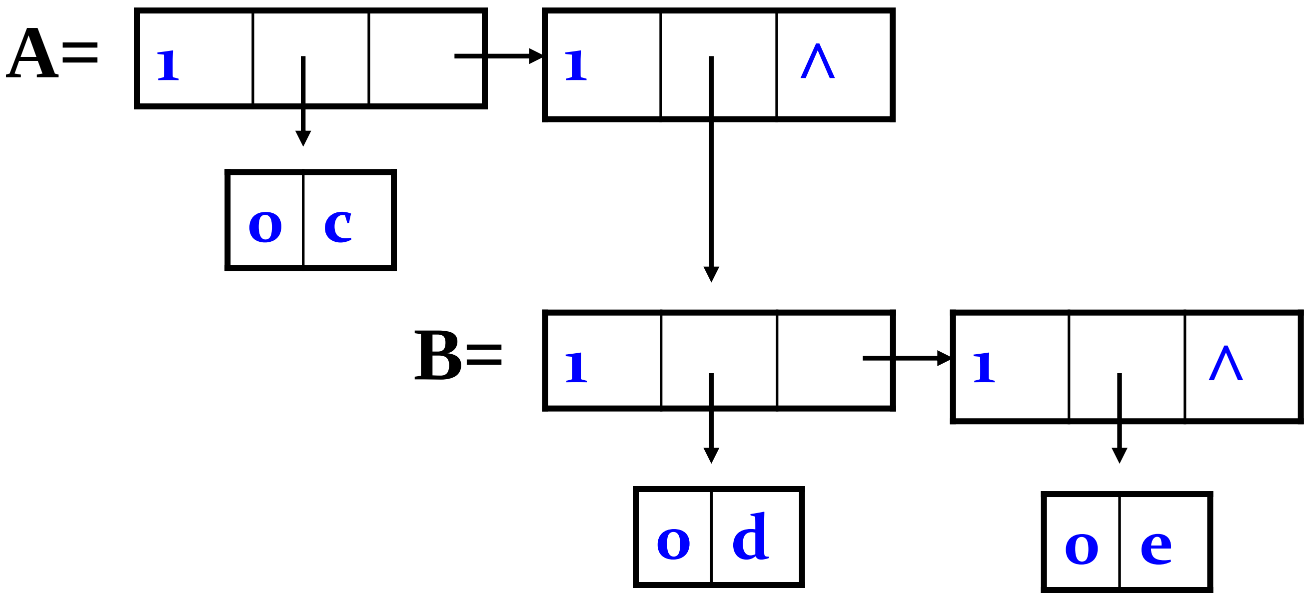


可以看成是线性表

5.5 广义表的存储结构

- 广义表的头尾指针结点结构

例 画出广义表A=(c,B),B=(d,e)的存储结构图



5.5 广义表的存储结构

- 广义表的头尾链表存储表示

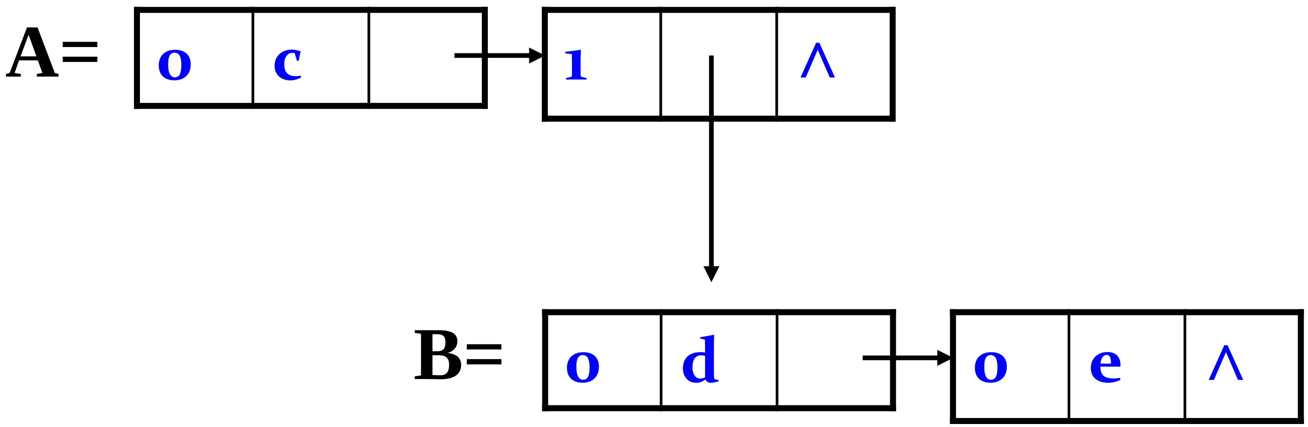
```
typedef enum{ATOM,LIST} ElemTag;

typedef struct GLNode{
    ElemTag tag;
    union{
    AtomType atom;
    struct {struct GLNode *hp,*tp;}ptr;
    }
}*Glist;
```

5.5 广义表的存储结构

- 扩展头尾指针结点结构

例 画出广义表A=(c,B),B=(d,e)的存储结构图



5.5 广义表的存储结构

- 扩展头尾指针结点结构

```
typedef enum{ATOM,LIST} ElemTag;

typedef struct GLNode{
    ElemTag tag;
    union{
    AtomType atom; //原子结点
    struct GLNode *hp; //定义它的头指针
    };
    struct GLNode *tp;//相当于线性链表中的next，指向下一个元素的节点；
}
```

本章小结

✓ 熟练掌握：

(1)数组的存储表示方法；

(2)数组在存储结构中的地址计算方法；

(3)特殊矩阵压缩存储时的下标变换公式；

(4)稀疏矩阵的压缩存储方法；

(5)三元组表示稀疏矩阵时进行矩阵运算采用的算法。

(6)广义表的定义、存储和性质。