RESOLUÇÃO DE MODELOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS

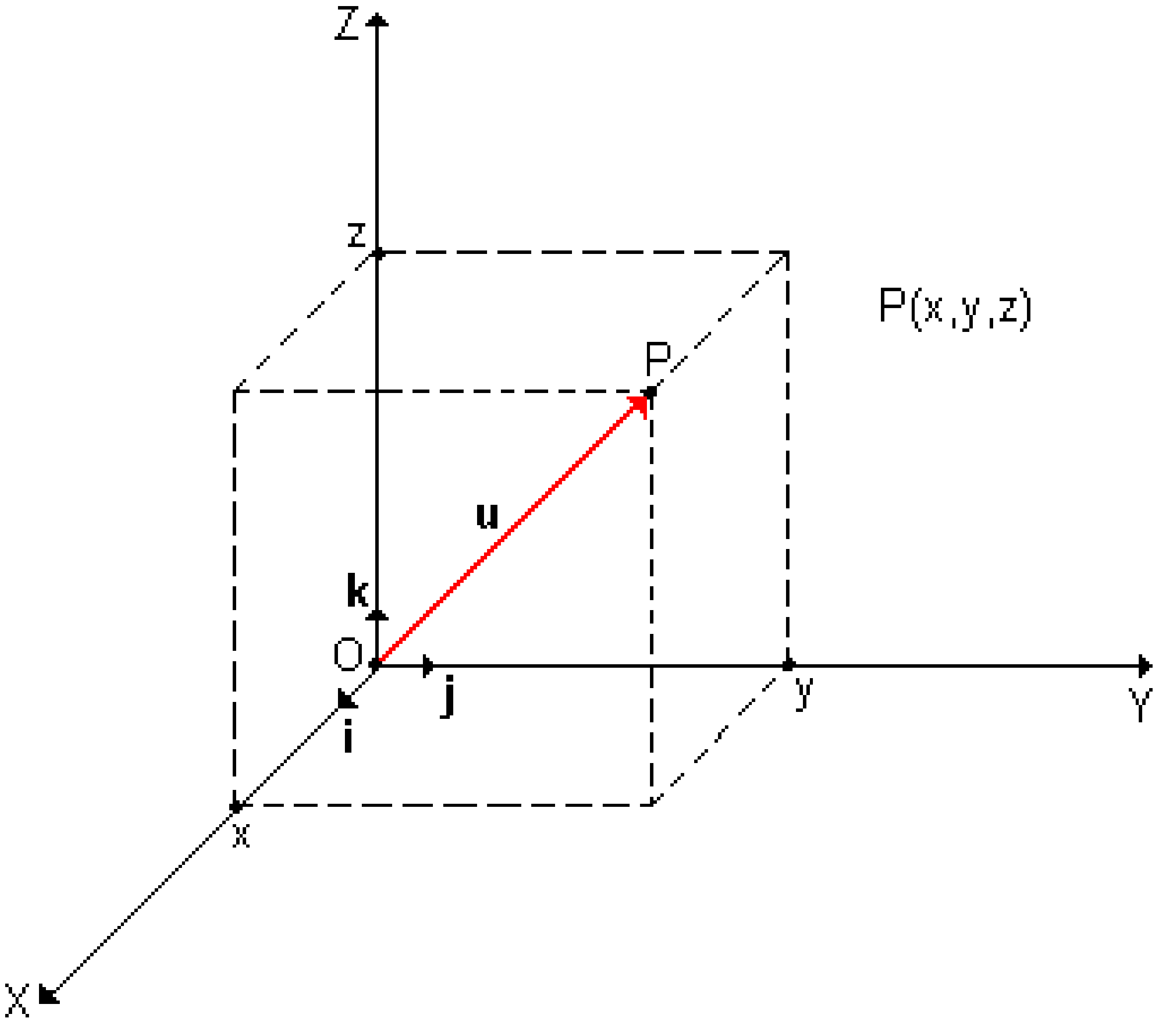
Professor Alexandre Wegner

Coordenadas Cartesianas no Espaço

- R^2 -> Plano Cartesiano : P(x, y) (par ordenado)
- R^3 -> Espaço Tridimensional: P(x, y, z) (terno ordenado)

Seja o ponto P(x, y, z) e três planos perpendiculares entre si dois a dois, cujas intersecções sejam os eixos *ox, oy, oz*. Estes três planos coordenados são designados por plano xy, xz e yz.

Assim P(x, y, z) = P(i, j, k); onde x = i, y = j, z = k

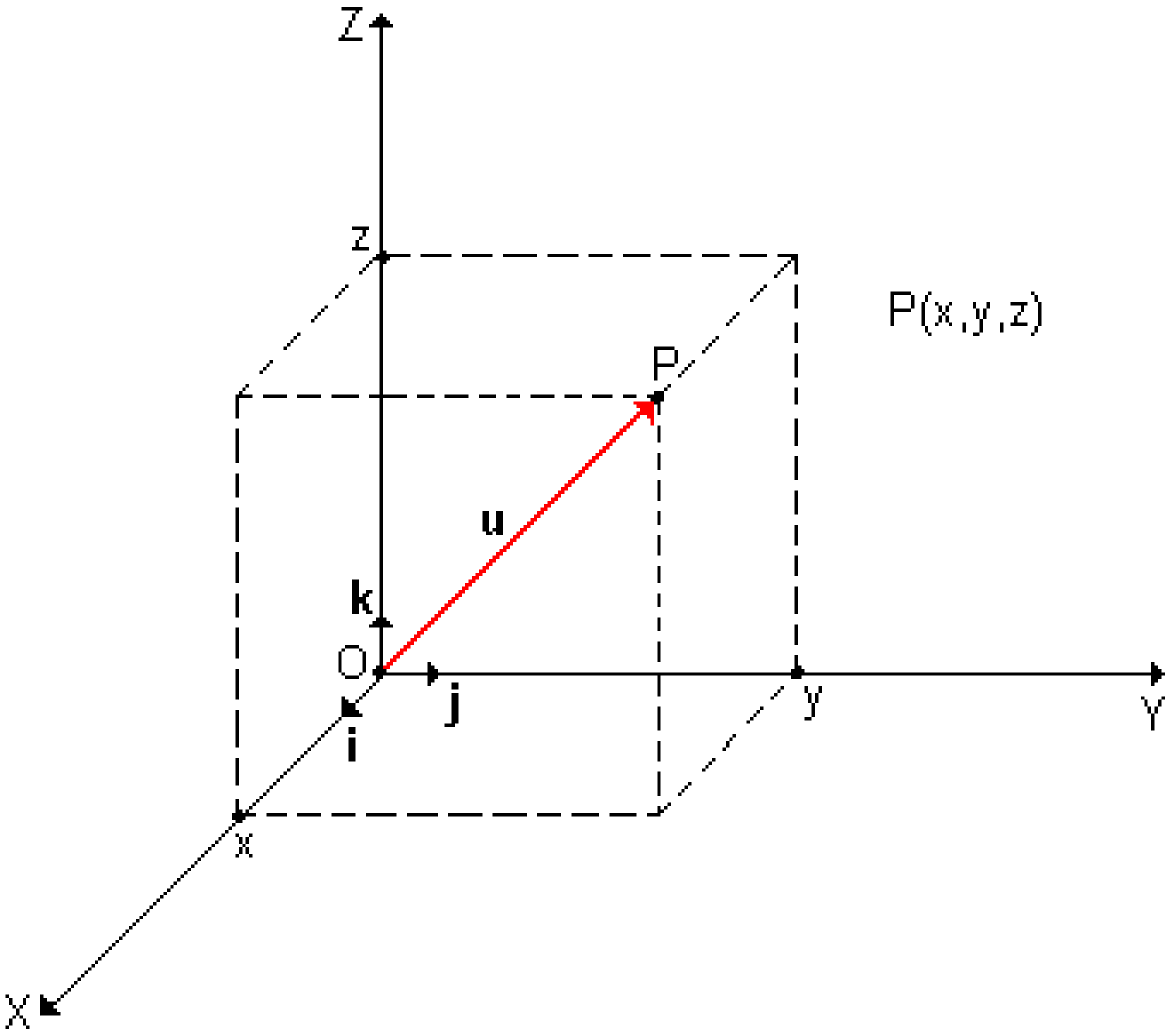


- Exercício rápido: Marque no espaço tridimensional os pontos a seguir, localizando-os:

A(2, 3, 4) B(2, 0, -2) C(3, 0, 0) D(0, 5, 0)

E(0, 0, -1) F(3, -1, 0) G(0, 1, 2) H(-1, -2, -3)

O segmento de reta $\overline{OP}$ possui as seguintes coordenadas: O(0, 0, 0) e P(x, y, z)



Exercício rápido: Marque no espaço tridimensional os segmentos de retas que seguem abaixo:

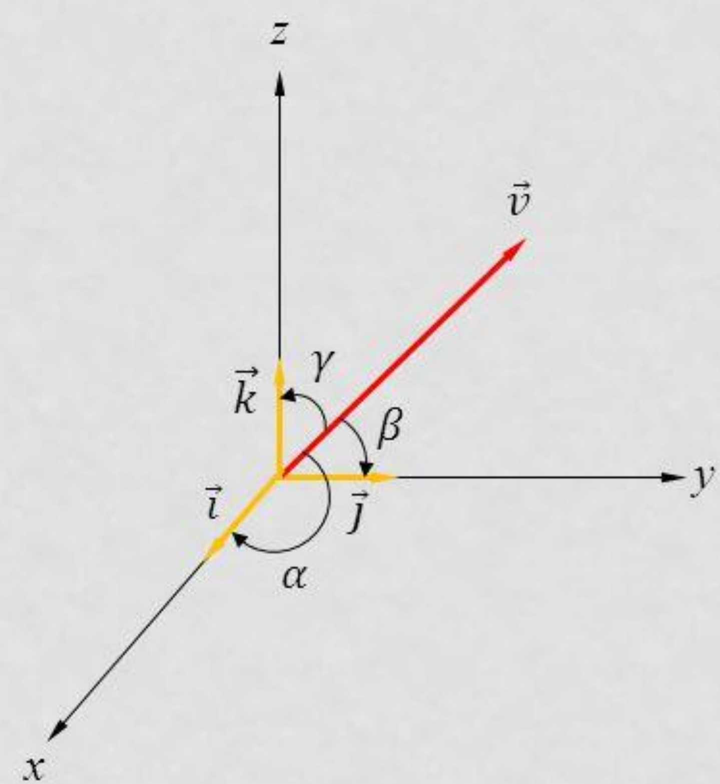
- a). $\overline{AG} = A(2, 4, 6)\ e\ G(1, 3, 2)$
- b). $\overline{CY} = C(-2, 3, 7)\ e\ Y(1, -3, -2)$
- c). $\overline{EH} = E(4, 0, 1)\ e\ H(-1, 8, 6)$

ÂNGULOS DIRETORES E COSSENOS DIRETORES DE UM VETOR

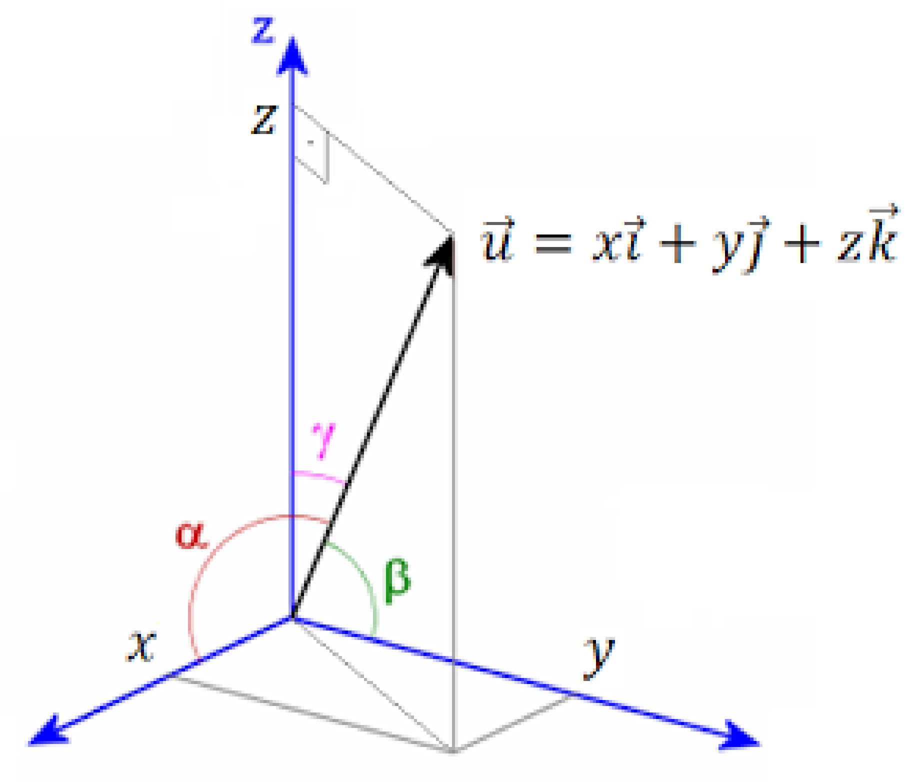
Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não-nulo.

Ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos α, β e γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente.

Cossenos diretores de $\vec{v}$ são os cossenos de seus ângulos diretores, isto é, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.



Veja a figura referente a cossenos diretores:



- $L^2 = x^2 + y^2$
- $\rho^2 = L^2 + z^2$
- $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Assim: $\cos \alpha = x/\rho$

$\cos \beta = y/\rho$

$\cos \gamma = z/\rho$

Parâmetros Diretores de Uma Reta

No lugar de usar cossenos diretores, costuma-se usar três números proporcionais, denominados de “Parâmetros Diretores de Uma Reta”. Sendo:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- Obs. quanto ao sentido da reta:

reta O -> P : +

reta P -> O : -

Exemplo: Determinar os ângulos diretores (α, β, γ) de uma reta tirada pela origem para cima, cujos parâmetros diretores são os números: a) (4, 0, -3)

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ onde $\rho = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}$

$\rho = \sqrt{16 + 0^2 + 0}$ => $\rho = \sqrt{25}$ => $\rho = 5$

$\cos \alpha = 4/5$

$\cos \beta = 0/5$

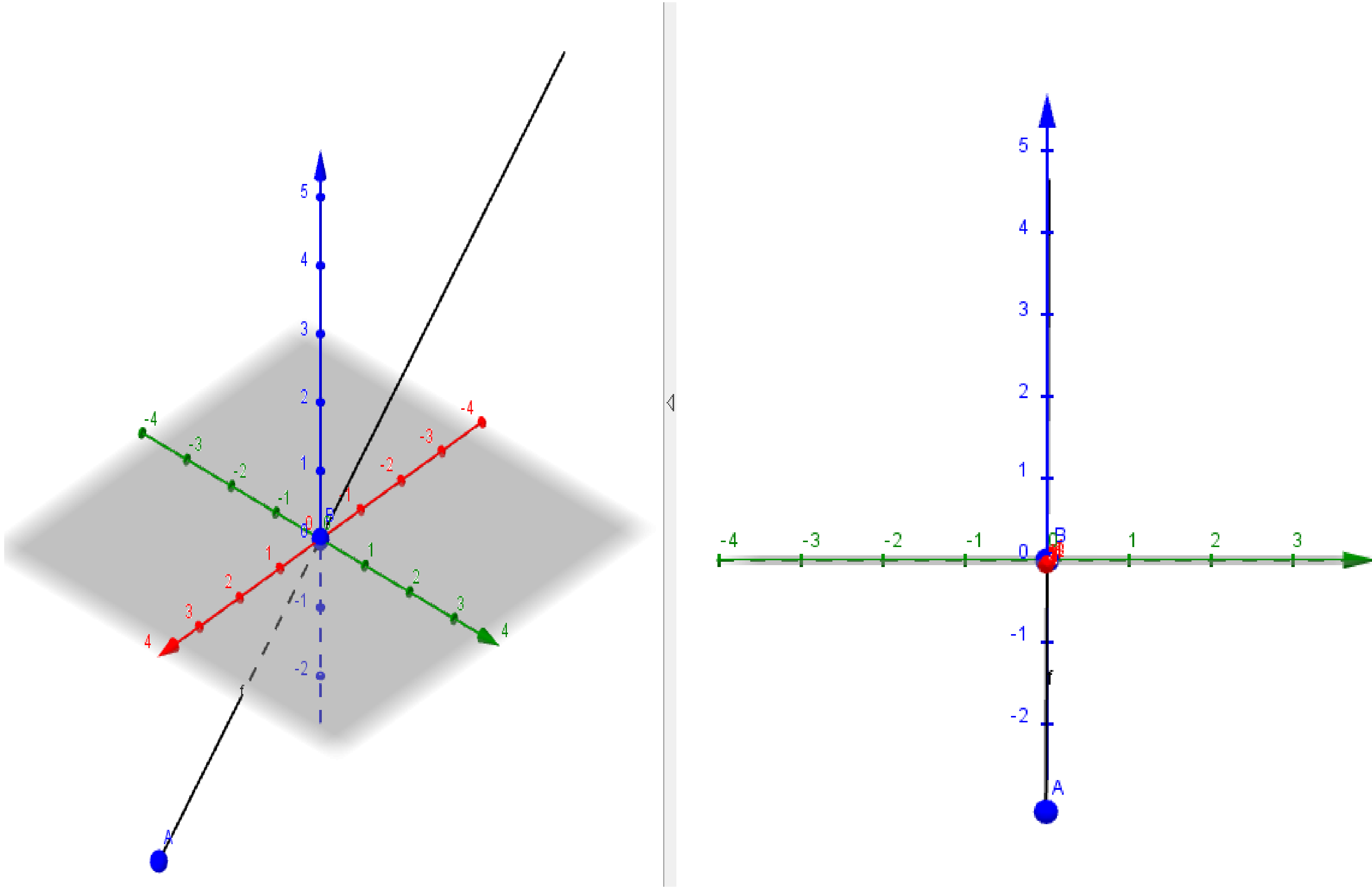
$\cos \gamma = -3/5$

Lembre que sobe do ponto para a origem, logo considere o sinal negativo.

$\cos \alpha = 4/-5 \Rightarrow \cos \alpha = 143,13°$

$\cos \beta = 0/-5 \Rightarrow \cos \beta = 90°$

$\cos \gamma = -3/-5 \Rightarrow \cos \gamma = 53,13°$


A
B
A
B

Continue construindo e calculando:

b) (8, 8, -6)

c) (4, 3, 12)

d) (0, 2, 0)

Soluções:

b) $\cos \alpha = 128{,}65°$

$\cos \beta = 128{,}65°$

$\cos \gamma = 62{,}06°$

c) $\cos \alpha = 72{,}07°$

$\cos \beta = 76{,}65°$

$\cos \gamma = 22{,}61°$

d) $\cos \alpha = 90°$

$\cos \beta = 0°$

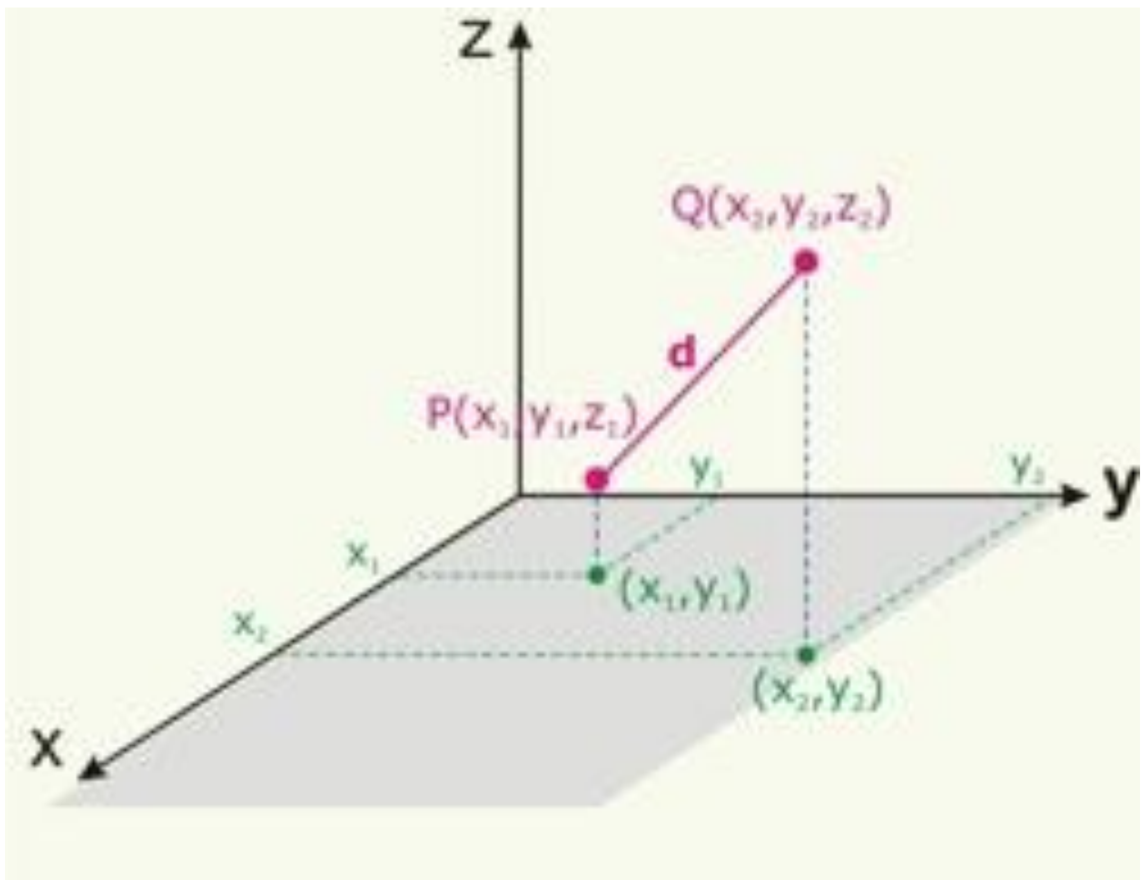
$\cos \gamma = 90°$

- Obs.: Se um parâmetro diretor for igual a zero, a reta será perpendicular ao eixo coordenado correspondente (veja exemplo “a”).

- Se dois parâmetros diretores forem nulos, a reta será paralela ao terceiro eixo (veja exercício “d”).

Distância entre Dois Pontos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



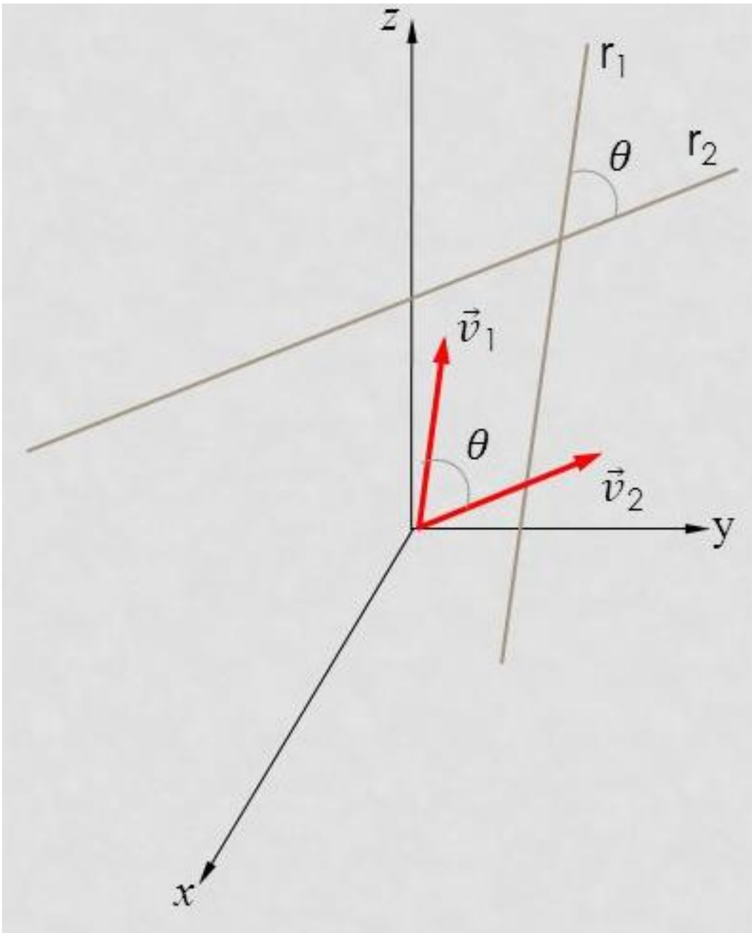
- Exercício rápido:

Calcule a distância entre os pontos “P” e “Q”:

a) P(1, -2, 0) e Q(-2, 4, 2) R: 7u

b) P(0, 3, -1) e Q(3, 1, 4) R: $\sqrt{38}$ u

Ângulo entre Duas Retas



- θ = ângulo entre as retas r_1 e r_2
- $\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1$ = cossenos diretores da reta r_1
- $\alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2$ = cossenos diretores da reta r_2

$$cos\ \theta = cos\alpha_1 \cdot cos\alpha_2 + cos\beta_1 \cdot cos\beta_2 + cos\gamma_1 \cdot cos\gamma_2$$

Exemplo: Sejam as retas r_1 e r_2 traçadas da origem O do sistema de pontos P(4, 3, 5) e Q(2, 1, 3), respectivamente. Determine o ângulo entre elas:

$$\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \rho_1 = \sqrt{16 + 9 + 25} \rightarrow \rho_1 = \sqrt{50}$$
$$\rho_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \rho_2 = \sqrt{4 + 1 + 9} \rightarrow \rho_2 = \sqrt{14}$$

- $cos\alpha_1 = \frac{4}{\sqrt{50}} = 55{,}55°$
- $cos\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{14}} = 57{,}68°$
- $cos\beta_1 = \frac{3}{\sqrt{50}} = 64{,}89°$
- $cos\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} = 74{,}49°$
- $cos\gamma_1 = \frac{5}{\sqrt{50}} = 45°$
- $cos\gamma_2 = \frac{3}{\sqrt{14}} = 36{,}69°$

$$cos\theta = \left(\frac{4}{\sqrt{50}} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}}\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{50}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\right) + \left(\frac{5}{\sqrt{50}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \frac{26}{\sqrt{700}} = 10{,}67°$$

Sejam as retas r_1 e r_2 traçadas da origem O do sistema de pontos P e Q, respectivamente. Determine o ângulo entre elas:

a) P(1, 1, 4) e Q(-1, 0, 3)

b) P(-2, 2, 1) e Q(1, 0, -3)

c) P(-1, -1, -1) e Q(3, 5, 4)

Referências

- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos; HAZZAN, Samuel; MACHADO, Nílson José; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar. 4. ed. São Paulo: Atual, 1993. 10 v.
- LEITHOLD, Louis. O cálculo: com geometria analítica. 3. ed São Paulo: Harbra, 1994. 2 v.
- PAIVA, Manoel. Matemática: conceitos, linguagem e aplicações. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2002. 3 v.
- SWOKOWSKI, Earl William. Cálculo: com geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. 2 v.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P.; Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.