# Resolução de modelos algébricos e geométricos

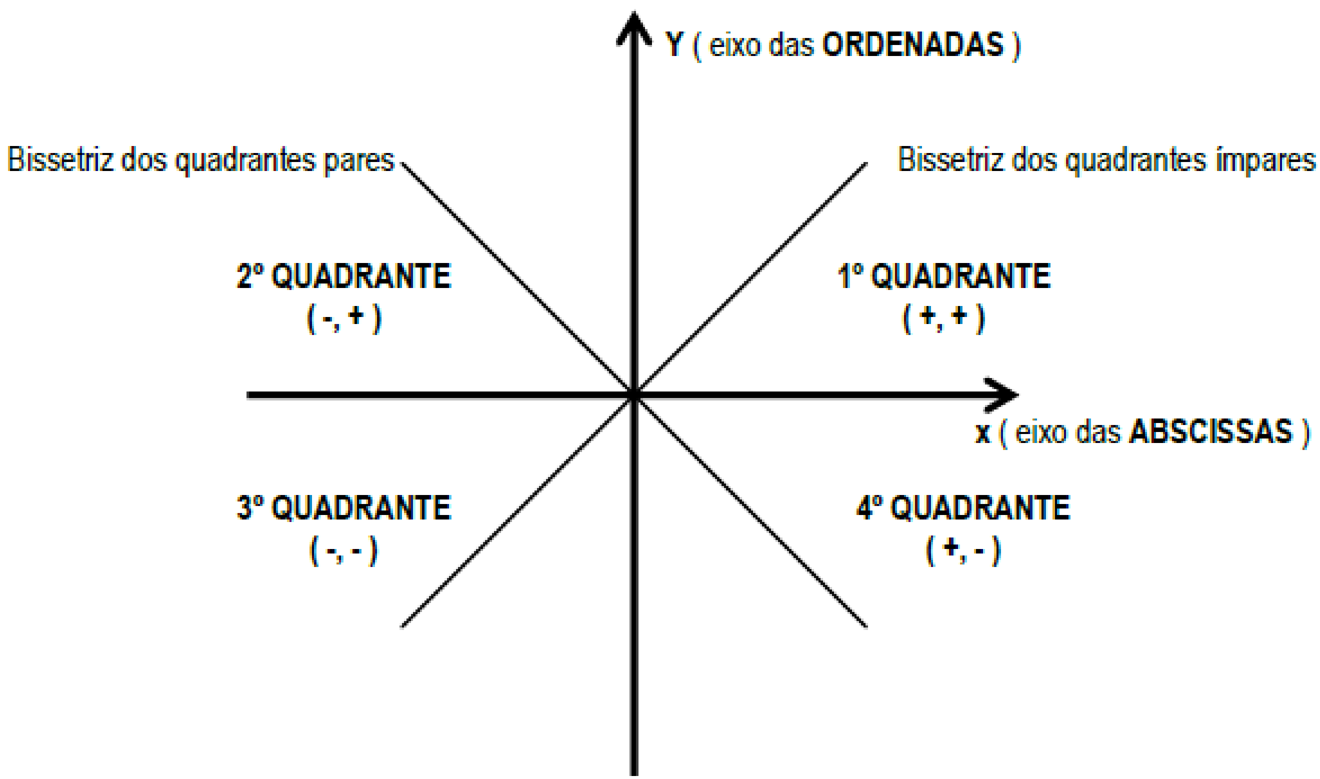
Professor Alexandre Wegner

A **Geometria Analítica** ou Geometria com Coordenadas é o ramo da Matemática que possibilita estudar o comportamento de uma figura geométrica (como ponto, reta, circunferência) através de elementos algébricos como pares ordenados, equações, etc.

# 1 – PROBLEMAS MÉTRICOS NO PLANO

## 1.1– Sistema de Coordenadas Cartesianas

Um sistema de coordenadas cartesianas é constituído por duas retas **x** e **y**, perpendiculares entre si.



A reta horizontal **x** é chamada **eixo das abscissas**.
A reta vertical **y** é chamada **eixo das ordenadas**.
O ponto **O**, intersecção das retas **x** e **y**, é chamado **origem**.

Os dois eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**.

A reta que divide ao meio os quadrantes ímpares é chamada de **bisssetriz dos quadrantes ímpares** e a que divide os quadrantes pares é a **bissetriz dos quadrantes pares.**

Observações:

I. Os pontos pertencentes ao eixo 0x possuem ordenadas nulas.

$$P \in 0x \leftrightarrow P = (x, 0)$$

II. Os pontos pertencentes ao eixo 0y possuem abscissas nulas.

$$P \in 0y \leftrightarrow P = (0, y)$$

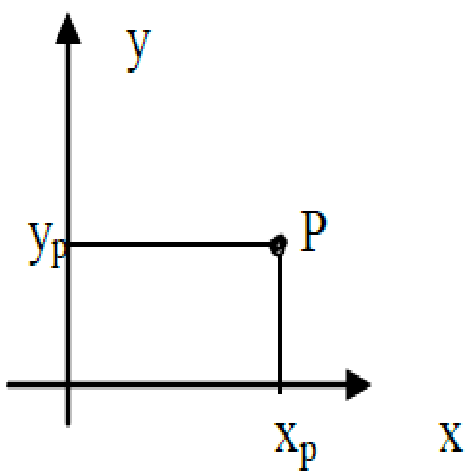
III. Todos os pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares possuem abscissas iguais à

$$A \in b_i \leftrightarrow A = (a, a)$$

IV. Todos os pontos da bissetriz dos quadrantes pares possuem abscissas e ordenadas opostas e vice-versa.

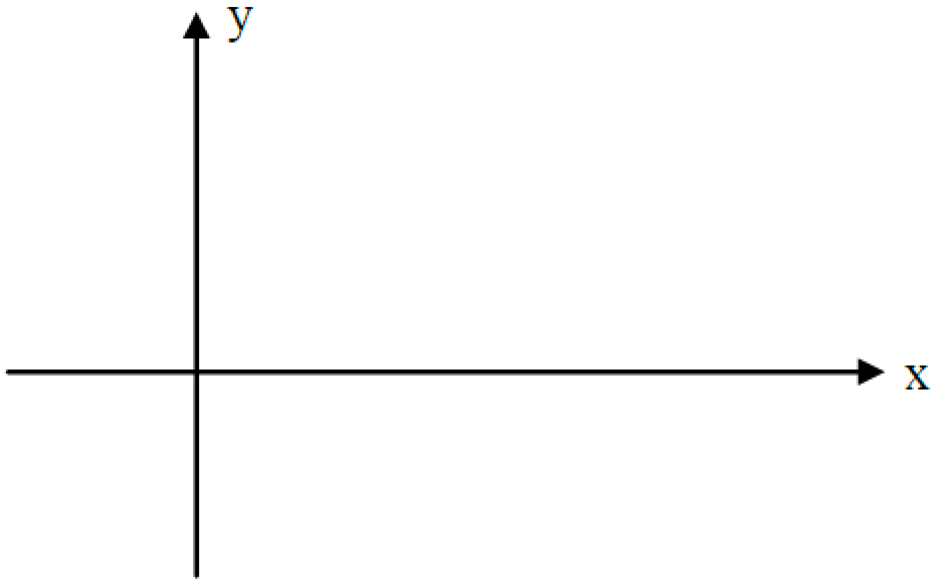
$$B \in b_p \leftrightarrow B = (b, -b)$$

Qualquer ponto **P** desse plano é representado por um único par ordenado ($x_p$ , $y_p$) de números reais.

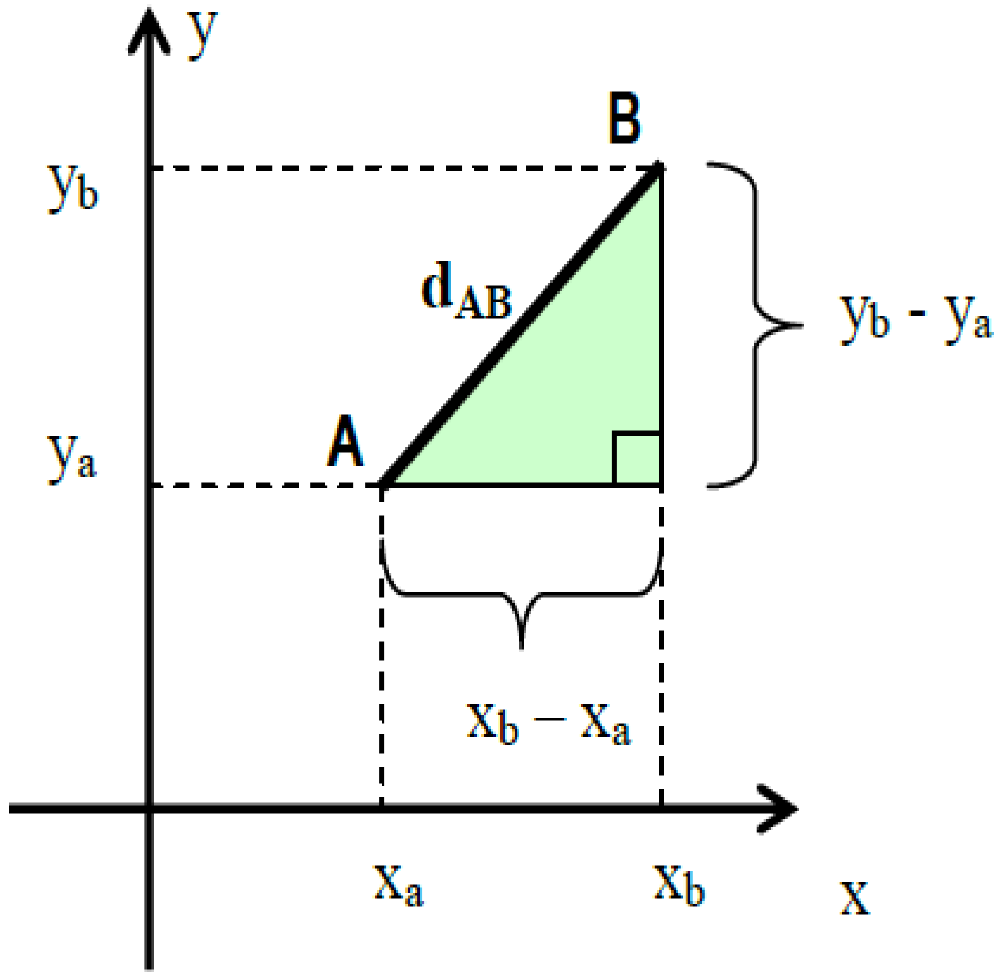



$$\begin{cases} x_p : abscissa\ de\ p \\ y_p : ordenada\ de\ p \\ P(x_p, y_p)\ \text{ponto P de coordenadas } x_p \text{ e } y_p. \end{cases}$$

<u>Exemplo</u>: Represente no plano abaixo, os pontos P(1,2), Q(2,1), M(4,–2), N(–1,–1), O(0,0), A(0,4) e B(4,0).



## 1.2– Distância Entre Dois Pontos



Dados dois pontos distintos do plano cartesiano, chama-se **distância** entre eles a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidade. Sendo $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$, aplicando Pitágoras temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \text{ou} \quad d_{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

<u>Exemplo</u>: Calcular a distância entre o ponto A(5, 2) e a origem do sistema cartesiano.

Exercícios:

1) Calcular a distância entre os pontos $A(1, -1)$ e $B(4, -5)$:

2) Sabe-se que o ponto $P(a,2)$ é **eqüidistante** dos pontos $A(3,1)$ e $B(2,4)$. Calcular a abscissa **a** do ponto P.

3) Responda:

a) Quais as coordenadas da origem?

b) Em que quadrante se encontra o ponto $A(-5, 3)$? E o ponto $B(-5, -3)$?

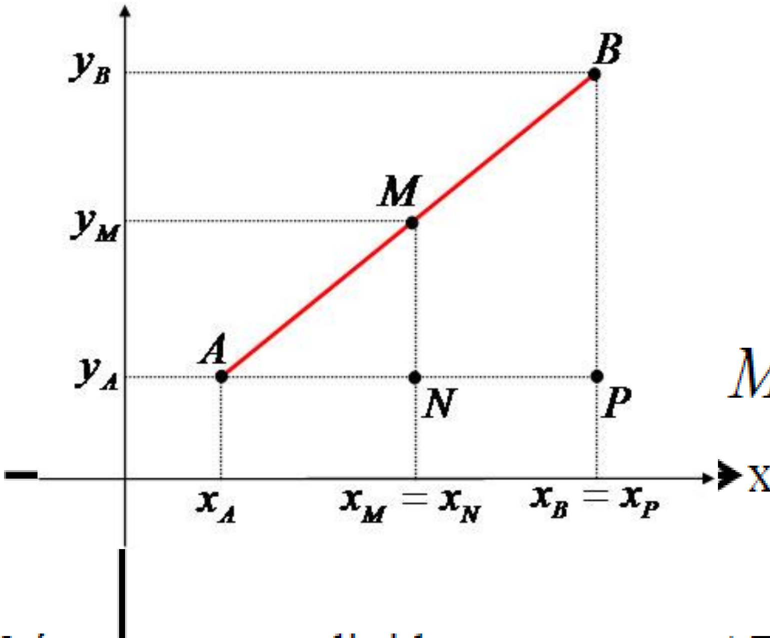
c) Se um ponto A tem abscissa diferente de zero e ordenada nula, em que eixo o ponto se encontra?

4) Calcule a distância do ponto $M(-12, 9)$ à origem.

**Resp.: 1) 5; 2) a = 1; 3) a) (0,0); b) 2º e 3º; c) eixo x; 4) d(M,0) = 15.**

## 1.3– Ponto que Divide um Segmento (Ponto Médio de um Segmento)

Sendo A($x_a$, $y_a$), B($x_b$, $y_b$) e M( $x_M$, $y_M$ ) o seu ponto médio do segmento AB, temos:




$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

M é o ponto que divide o segmento AB ao meio.

Exemplo: Uma das extremidades de um segmento é o ponto A(13, 19). Sendo M(–9, 30) o ponto médio do segmento, calcule as coordenadas do ponto B(x,y), que é a outra extremidade do segmento.

Exercícios:

1) Calcule as coordenadas de M, ponto médio do segmento AB, quando:

a) $A(-1, 4)$ e $B(5, -2)$

b) $A(1, -7)$ e $B(4, -6)$

c) $A(0, 6)$ e $B(0, 3)$

d) $A(1/2, 1)$ e $B(1/2, -4)$

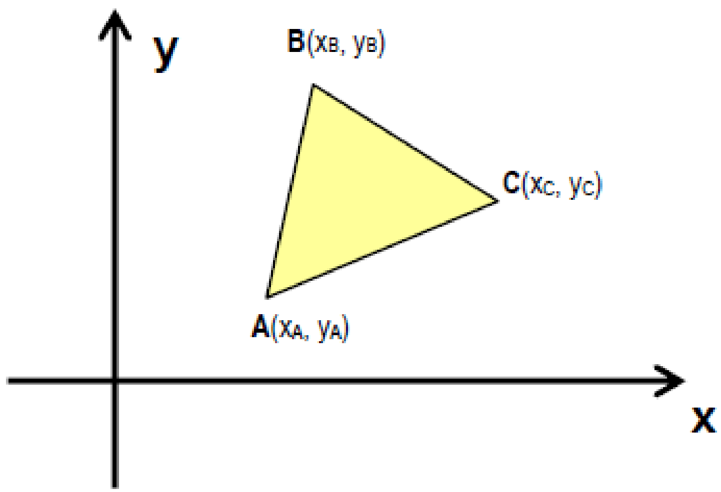
2) Uma das extremidades de um segmento AB é o ponto $A(3, 2)$. Sendo $M(-1, 3)$ o ponto médio desse segmento, determine as coordenadas da outra extremidade do segmento. Represente graficamente.

3) Sendo $A(1, 2)$ e $C(3, 4)$, determinar as coordenadas do ponto B, tal que C seja ponto médio do segmento AB.

**Resp.: 1) a)M(2,1), b) M( 5/2, -13/2), c) M(0, 4.5), d) M(1/2, -1.5); 2) B(–5,4); 3) B(5,6).**

## 1.4– Área de um Triângulo

Consideramos um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ a sua área é dada por:




$$s_\Delta = \frac{|D|}{2} \quad \text{onde} \quad D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

*Observações:*

- Se $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ são pontos não alinhados, então a área do triângulo ABC será $s_\Delta = \dfrac{|D|}{2}$ ;
- A determinante D pode ser positiva ou negativa.

<u>Exemplo</u>: Achar a área do triângulo ABC, conhecendo A(3, 2), B(–1, 1) e C(0, 3).

Exercícios:

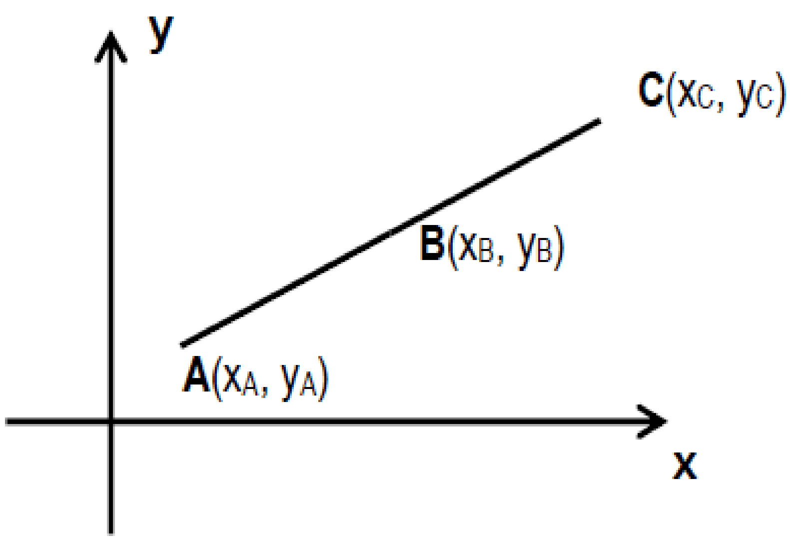
1) Os pontos $A(0, 3)$, $B(-k, 1)$ e $C(2k, 0)$ são os vértices de um triângulo de área igual a 4 unidades. Determine o valor da constante k.

2) Sendo $A(0, 4)$, $B(0, 2)$, $C(4, 4)$ e $D(4, 2)$, calcule, através de área de triângulos, a área da figura formada pelos segmentos AB, BD, DC e CA.

**Resp.: 1) $k=8/7$; 2) 8.**

## 1.5 – Condição de Alinhamento de Três Pontos

Sendo $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos distintos dois a dois, são **colineares** ou **estão alinhados**, se e somente se:




$$D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Exemplo</u>: Determinar $\alpha$, para que os pontos $A(0, \alpha)$, $B(\alpha, -4)$ e $C(1, 2)$ estejam alinhados.

Exercícios:

1) Determine $x$ de modo que os pontos A(1, 3), B($x$, 1) e C(3, 5) sejam os vértices de um triângulo.

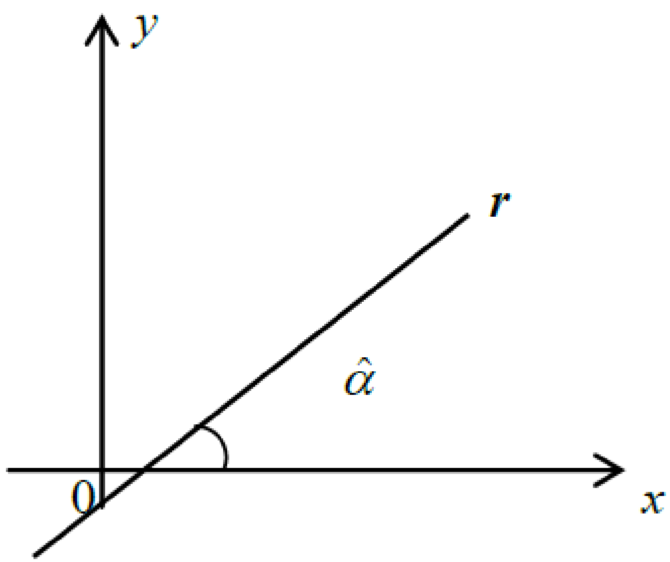
2) Determine t, sabendo que os pontos A(1/2, t), B(2/3, 0) e C(–1, 6) são colineares.

3) Determinar m para que os pontos A(3, 1), B(m, m) e C(1, m+1) sejam vértices de um triângulo.

**Resp.: 1) $x \neq -1$; 2) $t = 3/5$; 3) $m \neq -1$ ou $m \neq 2$.**

# 2– RETAS

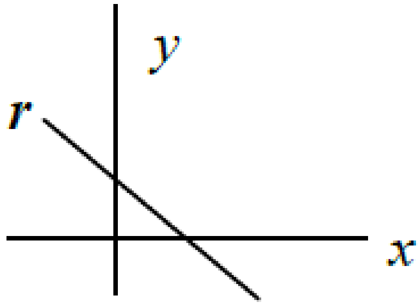
## 2.1– Inclinação e Declividade



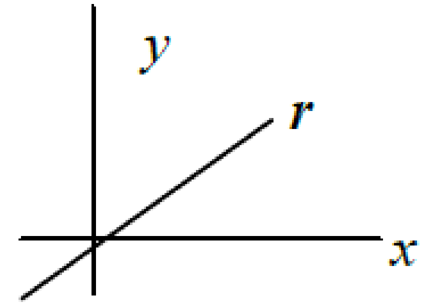

$\hat{\alpha}$ é o menor ângulo que a reta forma com o eixo $x$, medido do eixo para a reta ***r*** no **sentido anti-horário**.

A medida do ângulo $\hat{\alpha}$ é chamada **inclinação** da reta ***r***.

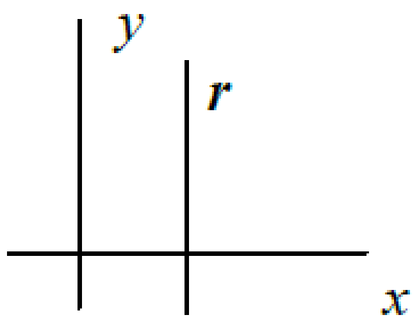
Exemplos:



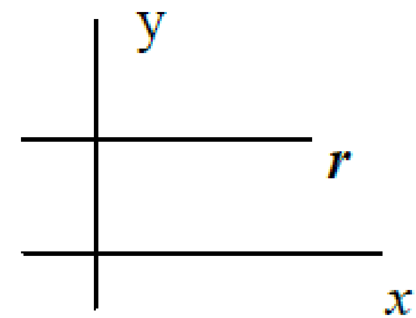

$$90^{\circ} < \hat{\alpha} < 180^{\circ}$$




$$0^{\circ} < \hat{\alpha} < 90^{\circ}$$




$$\hat{\alpha} = 90^{\circ}$$




$$\hat{\alpha} = 0^{\circ}$$

## 2.2 – Coeficiente Angular ou Declividade

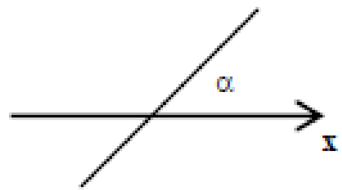
O coeficiente angular de uma reta é um número real “a” que representa a sua inclinação ($\alpha$).

Por definição, temos que:

$$\boxed{a = tg\,\alpha}$$

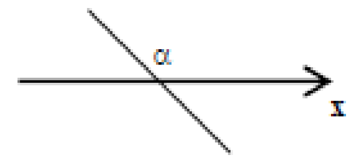
São quatro as possibilidades para o coeficiente angular:

**Reta inclinada para a direita**



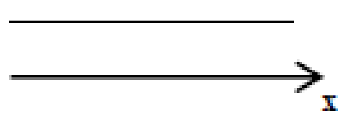

$\alpha$ é agudo $\Leftrightarrow a > 0$

**Reta inclinada para esquerda**



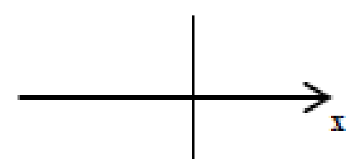

$\alpha$ é obtuso $\Leftrightarrow a < 0$

**Reta horizontal**




$\alpha$ é nulo $\Leftrightarrow a = 0$

**Reta vertical**




$\alpha$ é reto $\Leftrightarrow$ a não existe

Para determinarmos o valor do coeficiente angular (a) faremos:

$$a = \frac{med.y}{med.x} \quad \text{ou} \quad a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{ou} \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Observação: **"b"** é a ordenada do ponto onde a reta intersecciona o eixo y.

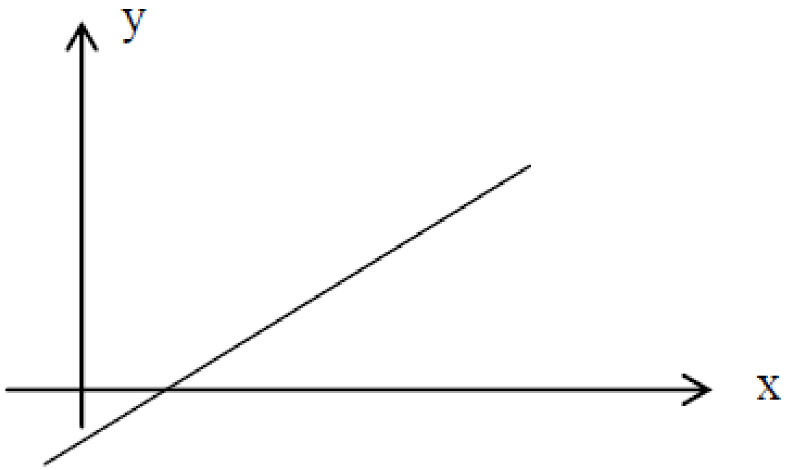
<u>Exemplos</u>: Determinar o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos:

a) A(3, 2) e B(–3, –1)

b) A(2, 5) e B(–2, –1)

**2.3 – Equação da Reta** – (que passa por um ponto $P(x_1,y_1)$ e cujo coeficiente angular (ou declividade) é **a**.)

Consideremos, uma reta **r** que passa por um ponto $P(x_1,y_1)$ e tem um coeficiente angular **m** e tomamos um ponto $Q(x,y)$ qualquer sobre a reta r.




$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1)}$$

<u>Exemplo:</u> Determinar a equação de uma reta **r** que passa pelo ponto A(–1, 4) e tem coeficiente angular 2.

## 2.4 – Equação Reduzida da Reta

É toda equação do tipo **y = ax + b**, onde "**a**" é chamado de **coeficiente angular** (ou declividade) e "**b**" é chamado de **coeficiente linear.**

Exemplos:

$$y = 2x - 3\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \qquad 2x + y - 1 = 0\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$y = 5x + 1\begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \qquad 5x + 4y = 0\begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 0 \end{cases}$$

<u>Exemplos:</u>

1) Escreva na forma reduzida a equação da reta que passa pelo ponto A(1, 5) e tem coeficiente angular a = –2.

2) Achar a equação reduzida da reta **t**, sabendo que sua equação geral é: $2x + 5y - 12 = 0$. Destacar o coeficiente angular e o coeficiente linear.

3) Achar a equação reduzida da reta **t** que passa em $A(-3,2)$ e $B(1,3)$.

4) Verifique se os pontos $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(0, 4)$ e $D(3, -1)$ pertencem à reta **r**: $3x + 2y - 8 = 0$.

## 2.5 – Equação Geral da Reta

Considere os pontos A(4, 3) e B(2, 2). Existe uma única reta que passa por A e B. Para que um ponto P(x,y) qualquer pertença à reta AB, deve-se impor que P esteja alinhado com A e B.

O ponto K(10, 6) está sobre esta reta?
O ponto L(8, 3) está sobre esta reta?

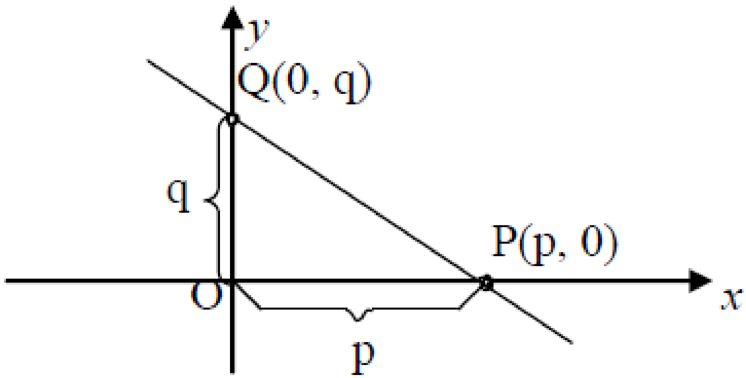
<u>Exemplos:</u>

1) Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos A(1, 1) e B(–2, 7).

2) Determinar a equação geral e reduzida da reta que passa pelos pontos A(1, 2) e C(2, 4).

## 2.6 – Equação Segmentária

Seja $r$ uma reta que intercepta o eixo $x$ em P(p,0) e o eixo $y$ em Q(0, q), com p e q não-nulos.




Uma equação de $r$ é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad pq - qx - py = 0 \quad \Leftrightarrow \quad qx + py = pq.$$

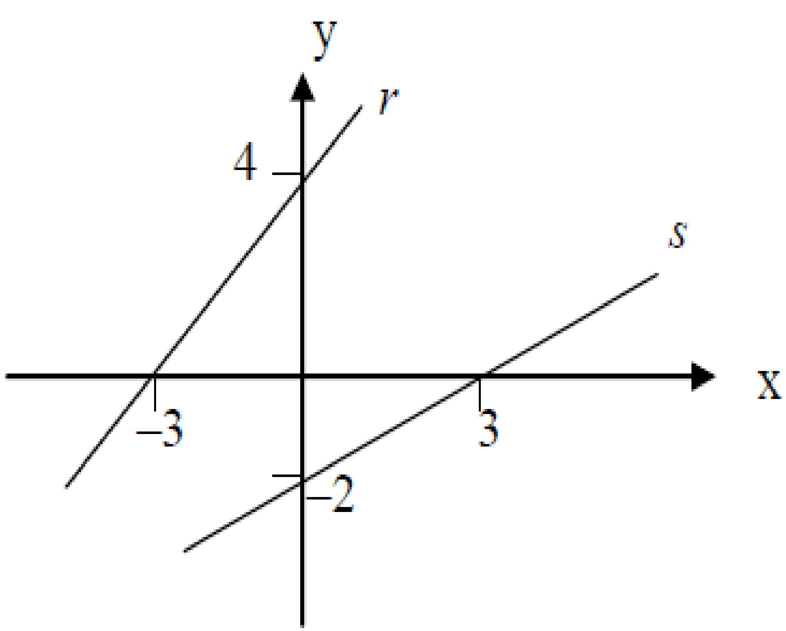
Dividindo os membros da última equação por pq, obtemos:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

que é denominada equação segmentária de $r$.

Exemplos:

a) Na figura, obtenha as equações segmentárias de *r* e *s*.




b) Dada a reta que possui equação geral: $2x + 3y - 12 = 0$ reescreva-a na forma segmentária.

### 2.7– Representação Gráfica de Retas

<u>Exemplos:</u>

Representar graficamente as seguintes retas:

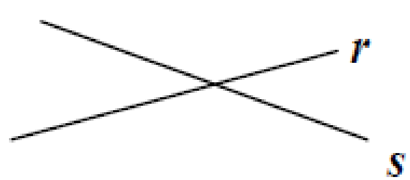
a) $2x + y - 4 = 0$

b) $3x - 5y = 0$

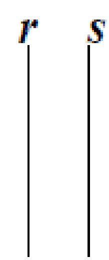
c) $2y - 5 = 0$

d) $4x - 7 = 0$

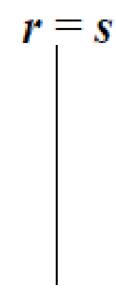
### 2.8 – Posições Relativas de Duas Retas




***Concorrentes***



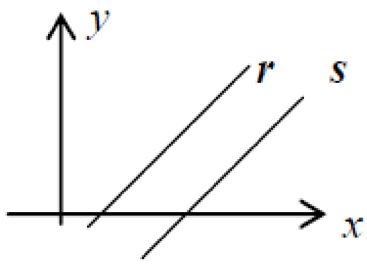

***paralelas***




***coincidentes***

***Condição de Paralelismo:***

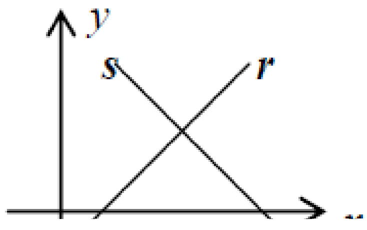
Duas retas, **r** e **s**, não verticais, são paralelas se, e somente se, têm coeficientes angulares iguais.




$$\boxed{r \,//\, s \Rightarrow m_r = m_s}$$

***Condição de Perpendicularismo:***

Se **r** e **s** são retas não verticais, então **r** é perpendicular a **s** se, e somente se o produto de seus coeficientes angulares é **–1**.




$$\boxed{r \perp s \Rightarrow m_r . m_s = -1}$$

Exemplos: Verifique a posição relativa entre as seguintes retas:

a) r: $3x - 2y + 1 = 0$ e s: $6x - 4y + 6 = 0$

b) r: $y = (3/4)x + 5/7$ e s: $y = (-4/3)x - 1$

c) r: $12x + 5y - 8 = 0$ e s: $5x + 12y - 4 = 0$

Exercícios:

1) Sendo **r** e **s** duas retas dadas pelas equações $2x - 3y + 12 = 0$ e $4x - 3y + 6 = 0$, respectivamente,

a) Verifique a posição relativa entre **r** e **s** .

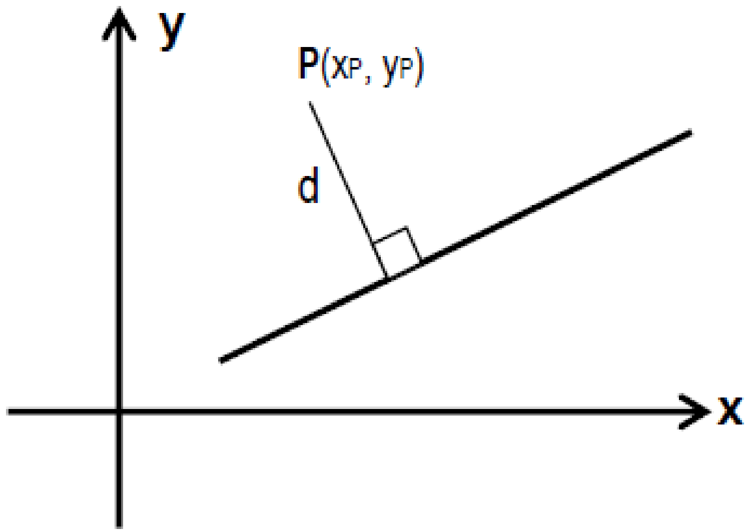
b) Ache o ponto de intersecção, se existir.

c) Represente graficamente

2) As equações das retas suportes dos lados de um triângulo são $x + 6y - 11 = 0$, $3x - 2y + 7 = 0$ e $x - 6y - 5 = 0$. Determinar as coordenadas dos vértices do triângulo.

## 2.9 – Distância de Um Ponto a Uma Reta

A distância entre o ponto e a reta (r) Ax + By + C = 0 é dada pela seguinte expressão:




$$d_{Pr} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Exemplos:

1) Calcular a distância da origem à reta **r**: 4x + 3y – 5 = 0.

2) Determinar a distância entre o ponto A(2, 1) e a reta **r**, de equação x + 2y – 14 = 0.

3) As retas $\mathbf{l_1}$ e $\mathbf{l_2}$ de equações 2x + 3y – 6 = 0 e 2x + 3y – 10 = 0, respectivamente, são paralelas. Calcular a distância entre as retas.

Exercícios:

1) Determinar o valor de **a** para que a distância do ponto P(–1, a) à reta **r** de equação $3x + 4y - 5 = 0$, seja igual a 2 unidades.

2) Obtenha a equação da reta que passa por A(0, 0) e que dista 1 de P(1, 2).

3) Calcule a distância entre as retas $\mathbf{l_1}$ de equação $3y = 4x - 2$, e $\mathbf{l_2}$ de equação $3y = 4x + 8$, sabendo que $\mathbf{l_1}$ é paralela a $\mathbf{l_2}$.

4) Os pontos A(1, 1), B(4, 1), C(4, 3) e D(1, 3) são os vértices de um retângulo. Calcule a distância do vértice **A** à diagonal BD do retângulo.

**Resp. 1) a=9/2 ou a=-1/2; 2) -3x+4y=0; 3) d=2; 4)** $d = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$ **.**

## Referências


- ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. 572 p.
- BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra linear. 3. ed. rev. e ampl São Paulo: Harbra, c1986. 411 p.
- LAY, David C. Álgebra linear e suas aplicações. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 504 p.
- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Geometria analítica. 2. ed São Paulo: Makron Books, 1987. 292 p.
- SWOKOWSKI, Earl William. Cálculo: com geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. 2 v.
- WINTERLE, Paulo. Vetores e geometria analítica. São Paulo Makron Books, 2000. 232 p.