

1、在人们的生产实践中，经常会遇到如何利用现有资源来安排生产，以取得最大经济效率等问题。此类问题构成了运筹学的一个重要分支——数学规划，而线性规划(Linear Programming，简记 LP)则是数学规划的一个重要分支。自从 1947 年 G. B. Dantzig 提出求解线性规划的单纯形法以来，线性规划在理论上趋于成熟，在实用中日益广泛与深入。特别是在计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更为广泛了，已成为现代管理中经常采用的基本方法之一。

2、LP 模型的三要素：

- (1) 决策变量：指模型中要求解的未知量，简称变量。
- (2) 目标函数：指模型中要达到的目标的数学表达式。
- (3) 约束条件：指模型中的变量取值所需满足的一切限制条件。

LP 模型的一般形式如下：

$$\begin{array}{ll} \max(\min) & z = x_1 + x_2 + x_3 & \text{目标函数} \\ \text{s. t.} = & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 \leq 6 \end{cases} & \text{约束条件} \end{array}$$

其中 x_1, x_2, x_3 为决策变量 s. t. 是 subject to 的缩写

3、线性规划问题是在一组线性约束条件下的限制，求一线性目标函数最大或最小的问题。在解决实际问题时，把问题归结成一个线性规划模型是很重要的一步，但往往也是困难的一步，模型建立是否恰当，直接影响到求解。而选适当的决策变量，是我们建立有效模型的关键之一。

4、图解法在实际运用中要注意以下几点：

(1) 若函数约束原型就是等式，则其代表的区域仅为一直线，而且问题的整个可行域 R（若存在的话）也必然在此直线上。

(2) 在画目标函数等值线时只需画两条就能确定其法线方向，为此，只需赋给 z 两个适当的位置

(3) 再找出最优点后，关于坐标值有两种确定方法：

①在图上观测最优点坐标值

②通过解方程组得出最优点坐标值

图解法的优点是直观性强，计算方便，但缺点是只适用于问题中有两个变量的情况。图解法的步骤是：建立坐标系，将约束条件在图上表示；确定满足约束条件的解的范围；绘制出目标函数的图形；确定最优解。

几种可能的结果：唯一解，多重解，无界解，无可行解

5、线性规划问题的标准形式

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$s. t. = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

在标准形式中，约束条件都是等号， b_i 都是大于 0 的，目标函数求的是 max 值，决策变量 x_1, x_2, x_3 都是大于 0 的。

非标准型 LP 问题的标准化：

若目标函数是 $\min z$ ，则另 $z' = -z$

若函数约束中： (1) $b_i < 0$ ，则两边乘以-1

(2) 约束形式为 \leq 加上松弛变量

(3) 约束形式为 \geq 减去剩余变量

若决策变量: $x_k \leq 0$, 令 $x_k = -x_k'$, 则 $x_k' \geq 0$

若 x_k 为自由变量, 令 $x_k = x_k' - x_k''$, 且 $x_k' - x_k'' \geq 0$

【自由变量指的是未指出 x_k 与 0 的大小关系】

规划问题 $\min |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$$\text{s. t. } Ax \leq b$$

要把上面的问题变换成线性规划问题只要注意到事实: 对任意的 x_i ,

存在 $u_i, v_i > 0$ 满足 $x_i = u_i - v_i$, $|x_i| = u_i + v_i$

记 $u = [u_1, \dots, u_n]^T$, $v = [v_1, \dots, v_n]^T$ 从而, 我们就可以把上述问题变

成 $\min \sum (u_i + v_i) \quad \text{s. t.} = \begin{cases} A(u - v) \leq b \\ u, v \geq 0 \end{cases}$