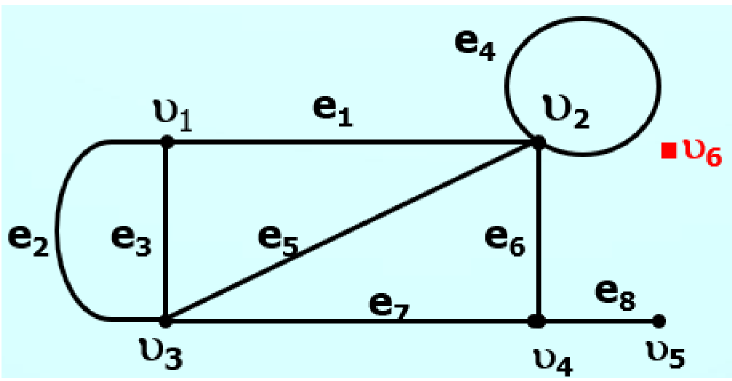
1、许多工程和管理的问题都可以用图与网络来描述，图与网络优化问题是一类应用十分广泛的问题。图与网络优化是线性规划等理论和算法在具有图结构的问题中的应用。由于图与网络问题具有特殊的结构，相应的优化算法也不同于一般的单纯形算法，具有其独特的直观和简捷的特点。

2、图的基本概念和模型



端点：$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$
关联边：$e = (v_i, v_j)$
点相邻：与同一条边相关联
边相邻：有一个公共端点
环（如果图中一个边的两个端点为同一个点）、**多重边**(如果图中一个边的两个端点为同一个点)、**简单图**(一个没有环、也没有多重边的图)
点v_i的关联边的个数称为v_i的次，记为 d(v_i)

奇点：v_1, v_2(环增加次数 2)$, v_4, v_5$

偶点：v_3
孤立点：v_6

$$G = (V, E), v_{i0}, v_{i1}, \dots, v_{ik} \in V, e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{jk} \in E$$

若 $e_{jt} = (v_{it-1}, v_{it}), t = 1,2,\dots,k$，则称点边交替序列，$\mu = (v_{i0}, e_{j1}, v_{i1}, e_{j2}, \dots, e_{jk}, v_{ik})$ 为一条从 v_{i0} 到 v_{ik} 的链，简记为 $\mu = v_{i0}, v_{i1}, \dots, v_{ik}$，若$v_{i0} = v_{ik}$，则为闭链，否则为开链。

简单链：边都不同

初等链：点也不同

圈：初等闭链（至少有 3 个不同点）

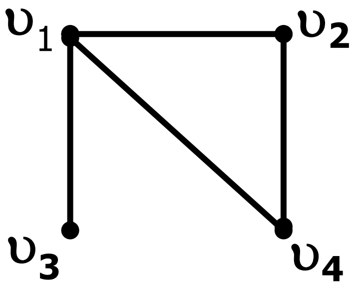
连通图：任意两点间至少存在一条链；否则为不连通图。

$$G = (V, E), G' = (V', E')$$

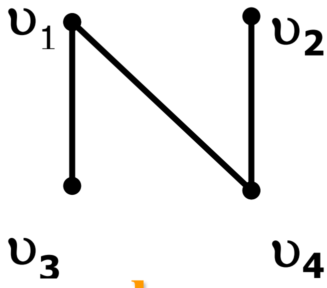
（1）若$V' \subseteq V, E' \subseteq E$，　a, b, c, d 都是 a 的子图；

（2）若$V' \subseteq V, E' \subset E$，　b, c, d 是 a 的真子图；

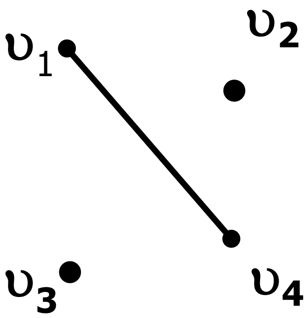
（3）$V'=V, E'\subseteq E$，　　a, b, c 是 a 的支撑子图；



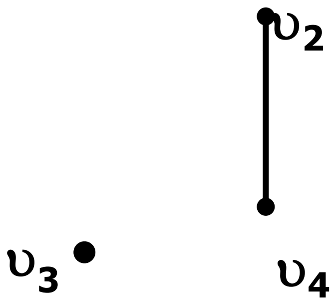
a



b



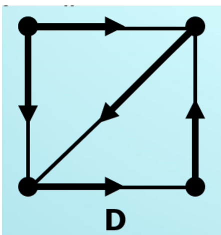
c



d

有向图：$D=(V,A), A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$弧集

设交替序列$\mu=(v_{i0},a_{j1},v_{i1},a_{j2},\dots,a_{jk},v_{ik})$为 D 的一条链，若$a_{jt}=(v_{it-1},v_{it}), t=1,2,\dots,k$，则$\mu$是一条从$v_{i0}$到$v_{ik}$的路，若$v_{i0}=v_{ik}$，则为回路，否则为开路。



3、两个定理

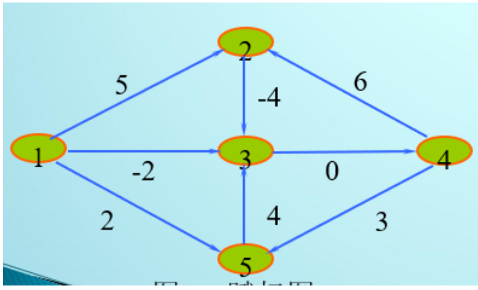
图$G=(V,E)$中，所有点的次之和是边数的两倍，即$\sum_{v\in V}d(v)=2q$

任意一图中，奇点的个数为偶数，$\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)=\sum_{v\in V}d(v)=2q$，设$V_1$表示奇点的集合，$V_2$表示偶点的集合。由有：

因为偶点的次之和为偶数，总数为偶数，所以奇点的次之和必须是偶数，只有偶数个奇数之和才能是偶数。所以奇点的个数必然为偶数个。

4、赋权图

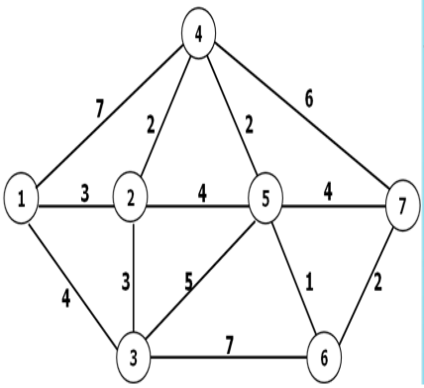
如果给定一个图$G=(V,E)$或$D=(V,A)$的任一边（弧）有一个实数w_{ij}与之相对应，由称这样的图为赋权无向（有向）图。



在赋权图中的链（路）上所有边（弧）对应的权之和，称为链（路）的权。一个连通图连同定义在其边集上的一个实函数一起，称为一个网络。

5、图的矩阵表示

图形虽然有直观等优点，但随着实际问题的大型化，大多数算法需要在计算机上运算和求解，计算机处理直观图形是比较困难的。以下介绍将图用矩阵表示，将图的几何形状转化为代数矩阵，可以方便计算机对图形的处理与运算。以下举例说明。



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	0	1	1	1	0	0	0
V_2	1	0	1	1	1	0	0
V_3	1	1	0	0	1	1	0
V_4	1	1	0	0	1	0	1
V_5	0	1	1	1	0	1	1
V_6	0	0	1	0	1	0	1
V_7	0	0	0	1	1	1	0

不考虑权重的情况

两个端点之间有边记为 1，无边相连则记为 0，对角线上记为 0。这样得到一个对称的矩阵。

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	0	3	4	7	∞	∞	∞
V_2	3	0	3	2	4	∞	∞
V_3	4	3	0	∞	5	7	∞
V_4	7	2	∞	0	2	∞	6
V_5	∞	4	5	2	0	1	4
V_6	∞	∞	7	0	1	0	2
V_7	∞	∞	∞	6	4	2	0

考虑权数时的矩阵表示

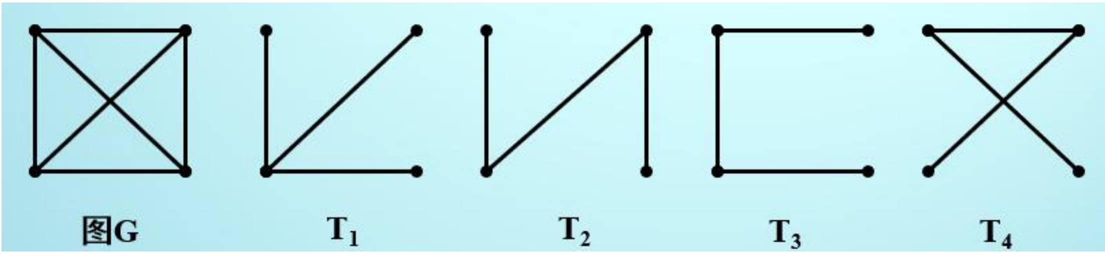
两个端点之间有边相连的，记上其权数，无边相连的记为∞，对称线上仍记为 0。赋权无向图的矩阵也是对称矩阵。

6、最小树问题

树：一个连通无圈简单图，记为 T

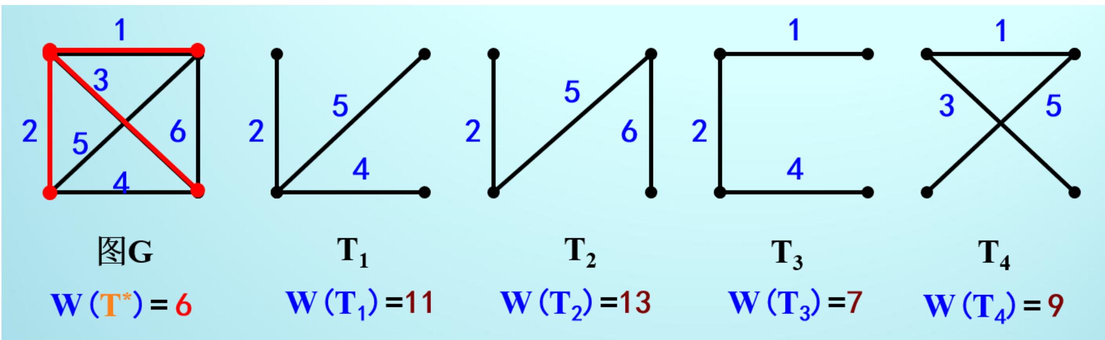
林：一个无圈简单图

若图 G 的一个支撑图 T 是树，则称 T 为 G 的一棵支撑树



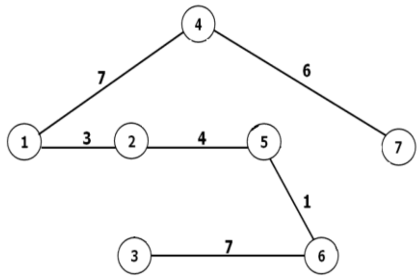
树的权数：树的各边权数的总和；W(T)

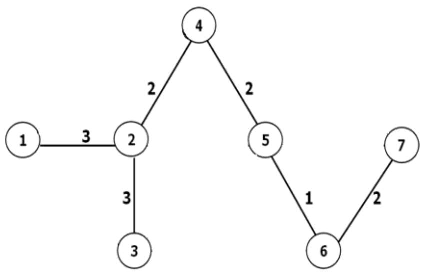
网络最小支撑树：网络所有支撑树中的权数最小者，记为T^*，简称网络最小树。



7、图的支撑树

设图 G 有 p 个节点，q 条边。由 G 中 p 个节点，p-1 条边组成的树称为图 G 的支撑树，也称为图 G 的生成树。





树中只与一条边关联的节点称为悬挂点。与悬挂节点关联的边称为悬挂边。

树有以下性质

（1）任何树至少有两个悬挂点。

（2）如果树的节点数是 p，则边的个数为 p-1。

（3）树中任意两个节点之间只有唯一的一条链。

（4）在树中任意两个不相邻的节点之间增加一条边，则会形成圈。

一个连通图可以有多个支撑树。

支撑树的权：若$T=(V,E')$ 是 G 的一个支撑树，E'中的所有边的权之和称为支撑树的权，记为$W(T)$:$\sum_{[v_i,v_j]\in T} w_{ij}$

例如上左图的总的权为 28，上右图的总的权为 13。

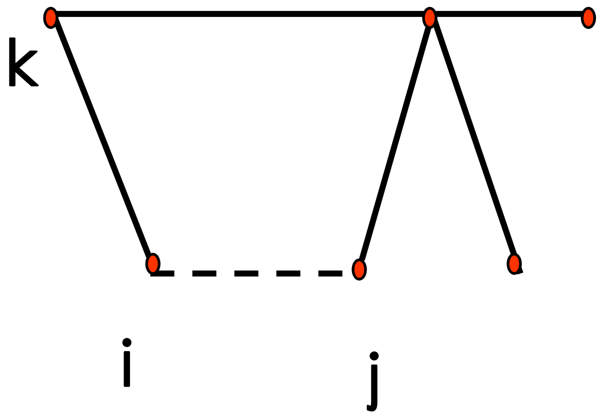
最小支撑树：图的权最小的支撑树，即：$W(T^*)=\min w(T)$

比如，在一个小区铺设光缆通讯网，只要各个楼都连通即可，希望用的光纤越少越好。

8、三种求最小支撑树的方法

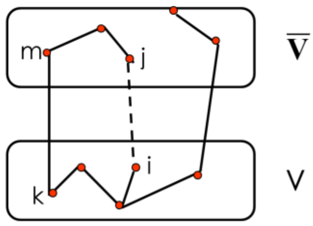
① 破圈法 ② 避圈法 ③ 顶点扩充法

破圈法和避圈法的理论依据：图中任意一个点 i，若 j 是与 i 相邻点中距离最近的，则边[i, j]一定必含在该图的最小支撑树内。



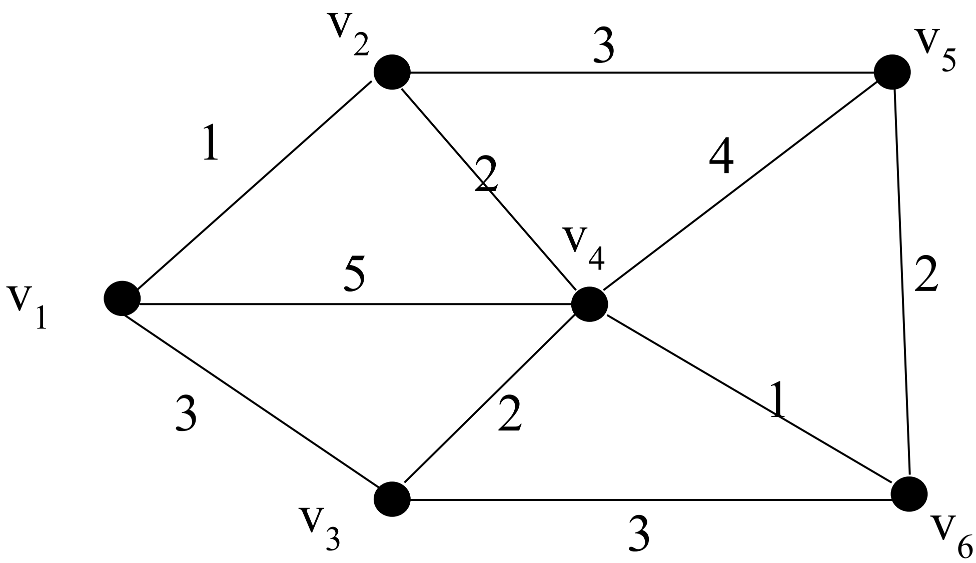
注意：反之要找到最小支撑树，可通过寻找距离最小的边来选取

推论：把图的所有点分成V和$\bar{V}$两个集合，则两集合之间连线的最短边一定包含在最小支撑树内。



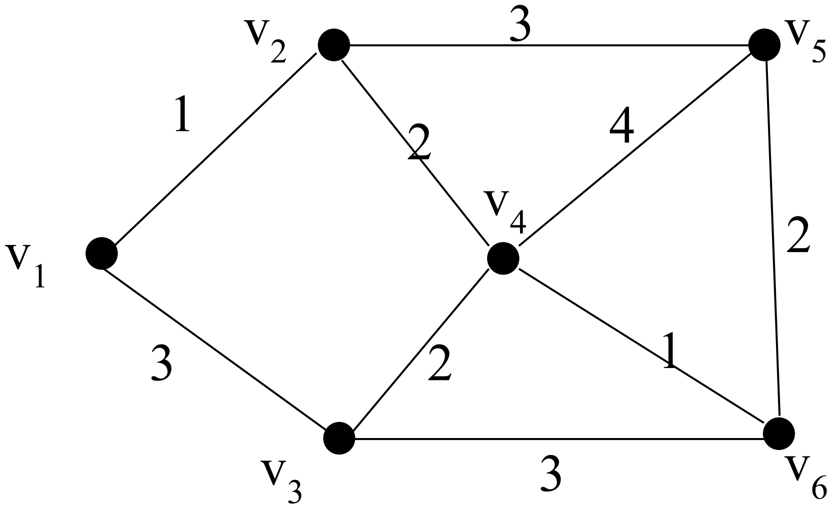
9、破圈法例题

设某个小区由六个楼组成，如图，图上的数字为各相邻楼的距离（百米）。现要铺设光纤，试求光纤总长度最短的铺设方案。



用破圈法求解过程如下：一般先找权数最大的边所在的圈

（1）找圈$\{v_1, v_2, v_4, v_1\}$或$\{v_1, v_3, v_4, v_1\}$，去掉边$[v_1, v_4]$，如图

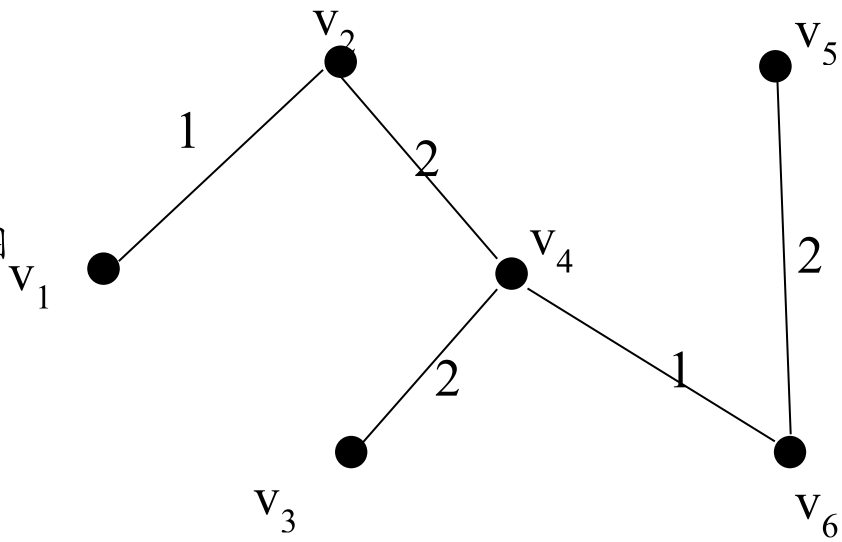


（2）去掉边$[v_4, v_5]$

（3）去掉边$[v_3, v_6]$

（4）去掉边$[v_3, v_1]$

（5）去掉边$[v_2, v_5]$，得到图

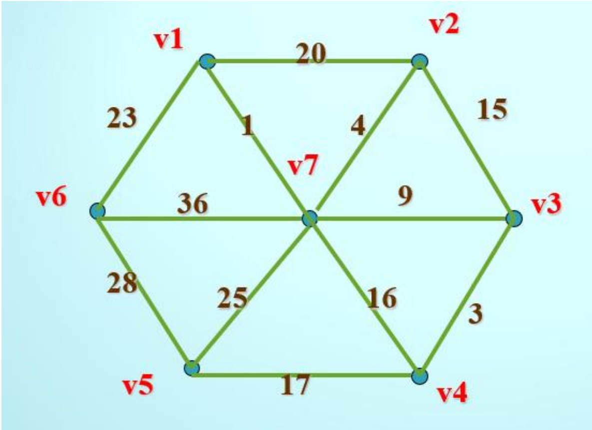


此时图中已不含圈，剩下的边构成了原网络的最小支撑树，也就是铺设光纤的最优方案。最小树的权为$W(T^*) = 1 + 2 + 2 + 1 + 2 = 8$

10、**避圈法**与破圈法的思想相反，先将所有边的权按从小到大的次序排列，然后依次检查，如果某个边加到图上不会产生圈，就将其加上，否则就不加到图上。直到所有边都检查完为止。

一般来说，一个图可以有多个不同的最小支撑树，但它们的总权一定相同。

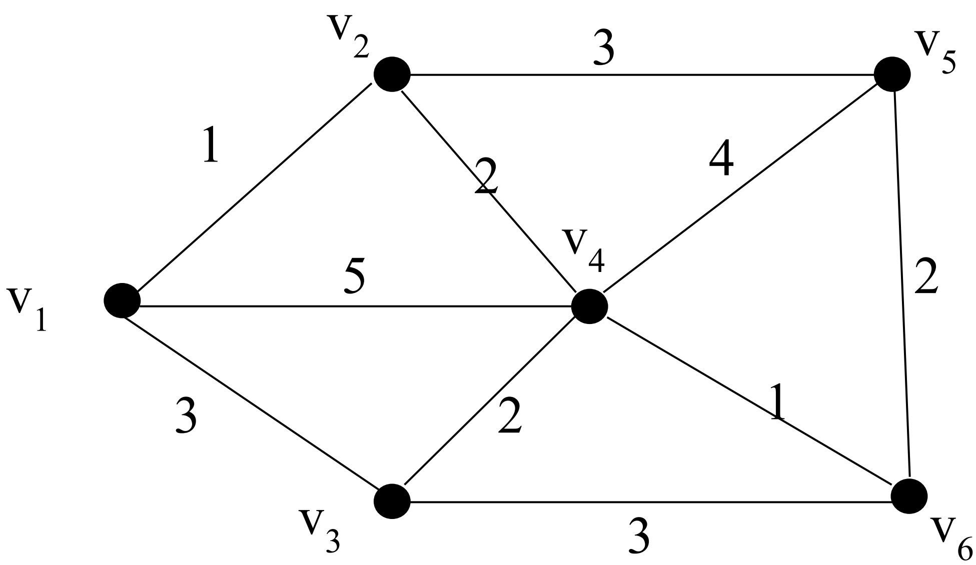
例题：



（1）首先选取其中权值最小的边(V_1,V_7)，然后选取(V_3,V_4),然后选取(V_2,V_7)，(V_3,V_7)，下一步应该选择(V_2,V_3)，但是选取(V_2,V_3)会形成闭环，所以选取(V_4,V_7)但是也会形成闭环，所以选取下一个(V_4,V_5)这个不会形成闭环，继续向下(V_1,V_2)，但是同样会形成闭环，选择下一个(V_1,V_6)，不会形成闭环，此时边的个数=点的个数—1，所以总造价=1+4+9+3+17+23=57

11、顶点扩充法（有的书中也叫做避圈法）

顶点扩充法是先在图中任选一个点，记为$S=\{a_1\}$，以该点为出发点，将与其相连的最小权的边加入图中，将相关连的点加入到 S 中，得到$S=\{a_1,a_2\}$；再寻找与 S 中的点相连的边中权数最小的边加入图中，将相关连的点加入到 S 中，反复进行以上步骤，直到所有的点都加入到 S 中为止。即可得到最小支撑树。



在上图中，以V_4作为出发点，$S=\{V_4\}$，与V_4相连的边有 5 条，权数最小的为$[V_4,V_6]$，将V_6加入 S 中，$S=\{V_4,V_6\}$；

与$S=\{V_4,V_6\}$相连的边有 7 条，其中权数最小的有 3 条，权数都是 2，此时可任选一条。如将V_5加入，得$S=\{V_4,V_6,V_5\}$；

与$S=\{V_4,V_6,V_5\}$相连的边有 5 条，其中权数最小的有 2 条，权数都是 2，此时可任选一条。如将V_2加入，得$S=\{V_4,V_6,V_5,V_2\}$；

与$S=\{V_4,V_6,V_5,V_2\}$相连的边有 4 条，其中权数最小的有 1 条，权数是 1，将V_1加入，得$S=\{V_4,V_6,V_5,V_2,V_1\}$；

与$S=\{V_4,V_6,V_5,V_2,V_1\}$相连的边有 3 条，其中权数最小的有 1 条，权数是 2，将V_3加入，得$S=\{V_4,V_6,V_5,V_2,V_1,V_3\}$。此时所有点都加入到 S 中，可以得到与破圈法相同的结果。