1、在实际中经常会遇到这样的问题，有 n 项不同的任务，需要 n 个人分别完成其中的一项，但由于任务的性质和各人的专长不同，因此各人去完成不同的任务的效率（或花费的时间或费用）也就不同。于是产生了一个问题：应指派哪个人去完成哪项任务，使完成 n 项任务的总效率最高（或所需时间最少），这类问题称为指派问题或分派问题。

2、求解指派问题时，通常需要引入 0-1 变量，

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & 不分配第i个人去完成第j项任务\\ 1, & 分配第i个人去完成第j项任务\end{cases}$$

而且指派问题中，一般每个人必须完成一件且仅能完成一件工作。因此，在约束条件中应该加上每一行、每一列决策变量的和均为 1.

例如：甲、乙、丙、丁四人加工 A,B,C,D 四种工件，所需时间如下表所示。若一种工件只交一人加工，则应指派何人加工何种工件，能使总的加工时间最少？

工件 j / 工人 i	A	B	C	D
甲	14	9	4	15
乙	11	7	9	10
丙	13	2	10	5
丁	17	9	15	13

现在建立该例的数学模型，根据上表，每个格内的效益值c_{ij}与变量x_{ij}的乘积之和即为总的时耗 z，每人只须加工一种工件，故每行变量x_{ij}之和须为 1；每种工件必须恰好有一人加工，故每列变量x_{ij}之和为 1。

因此该指派问题的数学模型为：

$$\min z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, & i = 1, 2, 3, 4 \\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, & j = 1, 2, 3, 4 \\ x_{ij} = 0, 1 \end{cases}$$

满足约束条件的解称为可行解，可写成矩阵形式，叫做解矩阵。

如本例的一个可行解矩阵（但不一定是最优解）

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

指派问题的解矩阵应具有如下特点：

（1）解矩阵（x_{ij}）中各行各列的元素之和都是 1

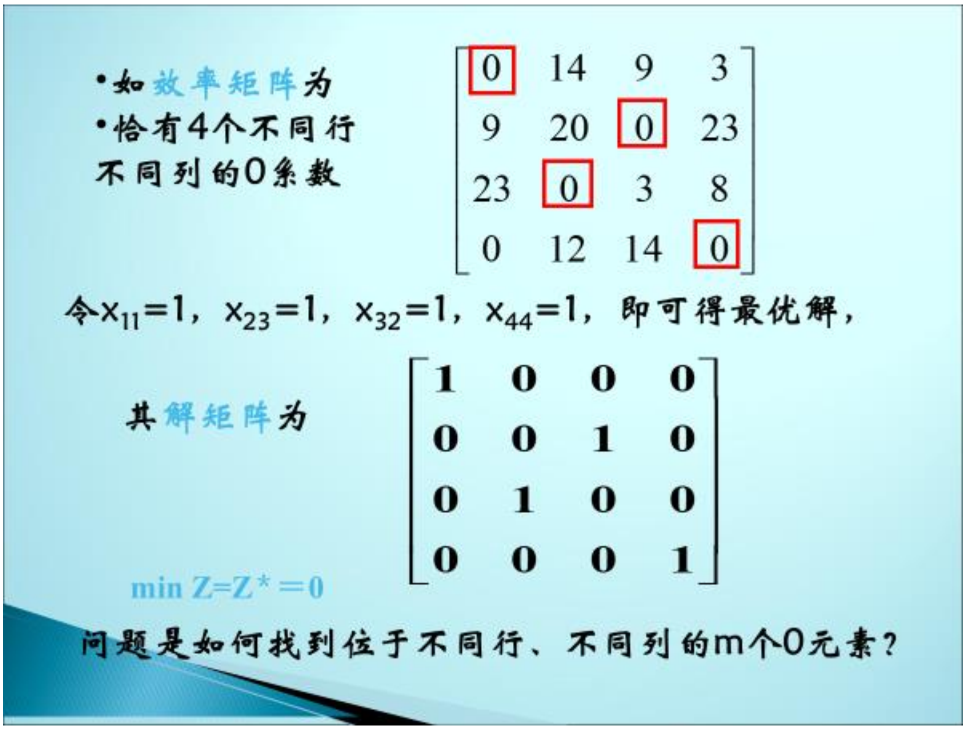
（2）可行解（最优解）中恰含有 4 个非零元，即 4 个 1

（3）可行解（最优解）矩阵中的 1 恰取于不同行不同列

可以看出，指派问题即使 0-1 规划问题，也是运输问题，所以也可用整数规划，0-1 规划，或运输问题的解法去求解。

3、指派问题的求解方法---------匈牙利法

匈牙利法基于这样一个明显的事实：如果在 m 阶效率矩阵中，所有元素$c_{ij} \geq 0$，而其中有 m 个位于不同行不同列的一组 0 元素，则在解矩阵中，只要令对应于这些 0 原位置的$x_{ij} = 1$, 其余的$x_{ij} = 0$，就得到最优解。此时的最优解为 0.



4、算法的基本原理

定理 1：如果从指派问题效率矩阵$[c_{ij}]$的每一行元素分别减去（或加上）一个常数u_i(被称为该行的位势)，从每一列分别减去（或加上）一个常数v_j（称为该列的位势）得到一个新的效率矩阵$[b_{ij}]$，其中$b_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$，则$[b_{ij}]$的最优解的结构等价于$[c_{ij}]$的最优解的结构。

利用这个性质，可是原系数矩阵变换为含有很多 0 元素的新系数矩阵，而最优解保持不变。

在系数矩阵（b_{ij}）中，把位于不同行不同列的 0 元素，简称为独立的 0 元素。

问题是：能否找到位于不同行、不同列的 m 个 0 元素？若能在系数矩阵（b_{ij}）中找出 m 个独立的 0 元素，则令解矩阵（x_{ij}）中对应这 m 个独立的 0 元素的x_{ij}取值为 1，其他元素取值为 0. 将其带入目标函数

中得到$z_b = 0$，他一定是最小值。这就是以（b_{ij}）为系数矩阵的纸牌问题的最优解，从而也就得到了原问题的最优解。

定理 2：系数矩阵中独立的“0”元素的最多个数等于覆盖所有“0”元素的最少直线数。（若效率矩阵 C 的元素可分成“0”与非“0”两部分，则覆盖所有“0”元素的最少直线数=独立的“0”元素的最多个数）

5、匈牙利算法的计算步骤

（1）效益矩阵的初始变换——0 元的获得

①从效益矩阵的每行减去该行的最小元素

②从所得矩阵的每列减去该列的最小元素

（2）最优性检验

①检查矩阵的每行每列，从中找出未加标记的 0 元最少的一排，从该排圈出一个 0 元，若该排有多个 0 元，则任圈一个，用 0 表示

②把刚得到的 0 元所在行、列中的其余 0 元划去，用 $\cancel{0}$ 表示。

③凡是 0 ，$\cancel{0}$ 就成为加了标记的 0 元，返回①

（3）找出能覆盖非最优阵中所有 0 元的最少直线集合

①对没有 0 元的行打√号

②对打√号的行上所有 $\cancel{0}$ 元所在的列打√号

③对打√号的列上所有 0 元所在的行打√号

④重复②③步骤，知道找不出新的打√号的行、列为止

⑤对没有打√号的行画横线，打所有√号的列画竖线，这就是能覆盖所有 0 元的最少直线的集合。

（4）非最优阵的变换——0 元的移动

①在未被直线覆盖的所有元素中，找出最小元素

②所有未被直线覆盖的元素都减去这个最小元素

③覆盖线十字交叉处的元素都加上这个最小元素

④其余元素不变

例如：$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 & 8 & 11 \\ 9 & 12 & 7 & 11 & 9 \\ 8 & 5 & 4 & 6 & 8 \\ 7 & 3 & 6 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{分别减去行、列中的最小元素}} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & \cancel{0} & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & \cancel{0} & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \cancel{0} & 5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} √ \\ \\ \\ √ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad & √ & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array}$

第一步：在没有 0 的行打√号

第二步：在打√号的行找到 ~~0~~ ，在 ~~0~~ 所在的列打√号

第三步：在有√号的列上找 0，在 0 所在的行打√号

第四步：在没有√号行上加入虚线

第五步：在未被直线覆盖的所有元素中，找出最小元素，最小元素是 1，所有未被直线覆盖的元素都减去 1，覆盖线十字交叉处的元素都加上 1，得到如下矩阵：$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & \cancel{0} \\ 4 & 2 & \cancel{0} & 1 & 3 \\ 3 & \cancel{0} & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \cancel{0} & 5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} √ \\ √ \\ √ \\ √ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad & √ & √ & \quad & √ \end{matrix} & \end{array}$

第六步：在没有 0 的行打√号

第七步：在打√号的行找到 ~~0~~ ，在 ~~0~~ 所在的列打√号

第八步：在有√号的列上找 0，在 0 所在的行打√号

第九步：在未被直线覆盖的所有元素中，找出最小元素，最小元素是1，所有未被直线覆盖的元素都减去1，覆盖线十字交叉处的元素都加上1，得到如下矩阵：$\begin{bmatrix} \cancel{0} & 0 & 3 & \cancel{0} & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 2 & \cancel{0} \\ 3 & 2 & \cancel{0} & 0 & 3 \\ 2 & \cancel{0} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & \cancel{0} & 6 \end{bmatrix}$，此时原问题的最优解（此问题有多个最优解）可得

需要注意的是，当指派问题的系数矩阵，经过变换得到了同行和同列中都有两个或两个以上0元素时。这时可以任选一行(列)中某一个0元素，再划去同行(列)的其他0元素。这时会出现多重解。

6、非标准形指派问题

在实际应用中，经常会遇到非标准形式的指派问题，处理方法：化标准，再按匈牙利算法求解

（1）最大化指派问题

当目标函数为$\max z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_{ij}$时，上述目标函数等价于

$$\min z'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(-a_{ij})x_{ij}$$

应用【4、算法的基本原理中】的定理1，将之化为标准形：设最大化分配问题效率矩阵A=$[a_{ij}]$，其中最大元素为m，令B=$[b_{ij}]$=[m+($-a_{ij}$)]=[m$-a_{ij}$]，则以B为系数矩阵的最小化指派问题和以A为系数矩阵的原最大化指派问题有相同最优解。

例：有4种机械要分别安装在4个工地，它们在4个工地工作效率（见下表）不同。问应如何指派安排，才能使4台机械发挥总的效率最大？

机器 \ 工地	甲	乙	丙	丁
Ⅰ	30	25	40	32
Ⅱ	32	35	30	36
Ⅲ	35	40	34	27
Ⅳ	28	43	32	38

解：设最大化的指派问题系数阵$C=(c_{ij})_{n\times n}$，其中最大元素为 m（本例中 m=43），令矩阵

$$C=\begin{pmatrix}30 & 25 & 40 & 32\\ 32 & 35 & 30 & 36\\ 35 & 40 & 34 & 27\\ 28 & 43 & 32 & 38\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}6 & 15 & 0 & 8\\ 0 & 1 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 6 & 13\\ 11 & 0 & 11 & 5\end{pmatrix}$$

然后再用标准的匈牙利算法解决问题

（2）人数和任务数不等的指派问题

当人少任务多时，则添加一些虚拟的“人”。这些虚拟的“人”完成各任务的费用系数可取 0，理解为这些费用实际上不会发生。

当人多任务少时，则添上一些虚拟的“任务”，这些虚拟的“任务”被各人完成的费用系数同样也取 0。

人 \ 工作	I	II	III	IV
1	3	6	2	6
2	7	1	4	4
3	3			
4	6			
5	5	2	4	3
6	5	7	6	2

人 \ 工作	I	II	III	IV	V	VI
1	3	6	2	6	0	0
2	7	1	4	4	0	0
3	3	6	5	8	0	0
4	6	4	3	7	0	0
5	5	2	4	3	0	0
6	5	7	6	2	0	0

（3）一个人可完成多件任务的分配问题

若某个人可做几件事，则可以将该人化做相同的几个“人”来接受分配，这几个“人”做同一件事的费用系数当然都一样。

（4）某事一定不能由某人做的分配问题

若某事一定不能由某人做,则可将相应的费用系数取做足够大的数M,以使费用最小的最优解中一定不会出现相应的分配方案。

例：某商业公司计划开办五家新商店B_i（i=1,2,⋯,5)。为了尽早建成 营业，商业公司决定由 5 家建筑公司A_j（j=1,2,⋯,5)分别承建。已知建筑公司对新商店的建造报价（万元）为c_{ij}（i,j=1,2,⋯,5）。商业公司应当对 5 家建筑公司怎样分配建筑任务，才能使总的建筑费用最少？

$$C = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

对于上例的指派问题，为了保证工程质量，经研究决定，舍弃建筑公司A_4和A_5，而让技术力量较强的建筑公司A_1、A_2和A_3来承建。根据实际情况，可以允许每家建筑公司承建一家或两家商店。求使总费用最少的指派方案。反映投标费用的系数矩阵为：

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

由于每家建筑公司最多可承建两家新商店，因此，把每家建筑公司化作相同的两家建筑公司（A_j和A_j', j=1, 2, 3）这样系数矩阵变为

这样，系数矩阵变为：

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_1' \\ A_2 \\ A_2' \\ A_3 \\ A_3' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

上面的系数矩阵有 6 行 5 列，为了使“人”和“任务”的数目相同，引入一件虚事B_6，使之成为标准指派问题的系数矩阵，然后再用匈牙利法求解。

B_6

$$
C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_1' \\ A_2 \\ A_2' \\ A_3 \\ A_3' \end{array}
$$