1、现实中的动态规划（Dynamic Programming）问题

多式联运是一种以实现货物整体运输最优化为目标的联合运输组织形式，它以集装箱为媒介，把水路、公路、以及铁路等多种运输方式有机地结合起来，构筑连续的、综合性的一体化货物运输网络。在集装箱多式联运系统中，各种运输方式的组织优化直接关系到货物运输的费用、时间和运输质量。

通常情况下，多式联运组织优化问题具有如下几个方面的特点：

一、两地之间集装箱货物运输有三种可选的运输方式（公路、铁路、水路运输）

二、集装箱的中转过程有很好的衔接

三、集装箱运量不可以分割，在某两个特定的地点之间，只能选择一种运输方式

四、集装箱运量对运输价格及运输时间没有明显的影响

五、集装箱运输能力几乎不受限制

六、运输时间须控制在合理范围之内（如集装箱干线船的班期）。

2、从上述现实问题中可以看出，动态规划解决的一般是多阶段性决策问题，从 Q 到 T，$Q \to S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_k \to S_{k+1} \to \cdots S_n \to T$

$$\boxed{S_{k'} \to \cdots S_{n'}}$$

当全程为最优时，子程也是最优。

3、动态规划的基本概念

（1）把所研究的问题恰当的划分成若干个相互联系的阶段。用

k = 1，2，…，n 表示阶段序号，称为**阶段变量**。

（2）状态表示某段的初始条件。用s_k表示第 k 段的状态，称为第 k 段**状态变量**。$s_k \in S_k$

（3）决策是指人们对某一阶段活动中各种不同的行为或方案或途径等的一种选择。用x_k表示第 k 段的决策，称为第 k 段**决策变量**。由于决策随状态而变，所以决策变量x_k是状态变量s_k的函数，记为

$x_k = x_k$（s_k）

（4）状态转移方程，s_{k+1}与s_k, x_k之间必须能够建立一种明确的数量对应关系，记为$T_k(x_k, s_k)$，即有$s_{k+1} = T_k(x_k, s_k)$,这种明确的数量关系称为**状态转移方程**。

(5) **策略**，由各阶段决策x_k构成的决策序列，称为全过程策略，简称策略，记为$p_1(s_1)$，有$p_1(s_1) = \{x_1(s_1), x_2(s_2), \dots, x_n(s_n)\}$

$$p_k(s_k) = \{x_k(s_k), x_{k+1}(s_{k-1}), \dots, x_n(s_n)\} \in p_k$$

称为第 k 子过程策略，简称子策略。

(6) 指标函数

i. **阶段指标函数**，用$v_k(s_k, x_k)$表示第 k 段处于s_k状态且所作决策为x_k时的指标，则它就是第 k 段指标函数，简记为v_k。

ii. **过程指标函数**，用$f_k(s_k, x_k)$表示第 k 子过程的指标函数。它是各v_k的累积效应。常见的过程指标函数多为积函数$\prod_{i=k}^{n} f$与和函数$\sum_{i=k}^{n} f$

(7) 最优解

i. 最优指标函数$f_k{}^*(s_k) = opt\{f_k(s_k, p_k(s_k))\}, k = 1,2, \dots, n, p_k \in P_k$

ii. 最优策略 ，能使上式成立的子策略p_k^*称为最优子策略，记为$f_k^*(s_k)=\{x_k^*(s_k),\dots,x_n^*(s_n)\}$，特别当 k=1 时，称为最优策略，记为$p_1^*(s_1)=\{x_1^*(s_1),\dots,x_k^*(s_k),\dots,x_n^*(s_n)\}$。

iii. 最优决策，构成最优策略的决策称为最优决策，记为x_k^*。

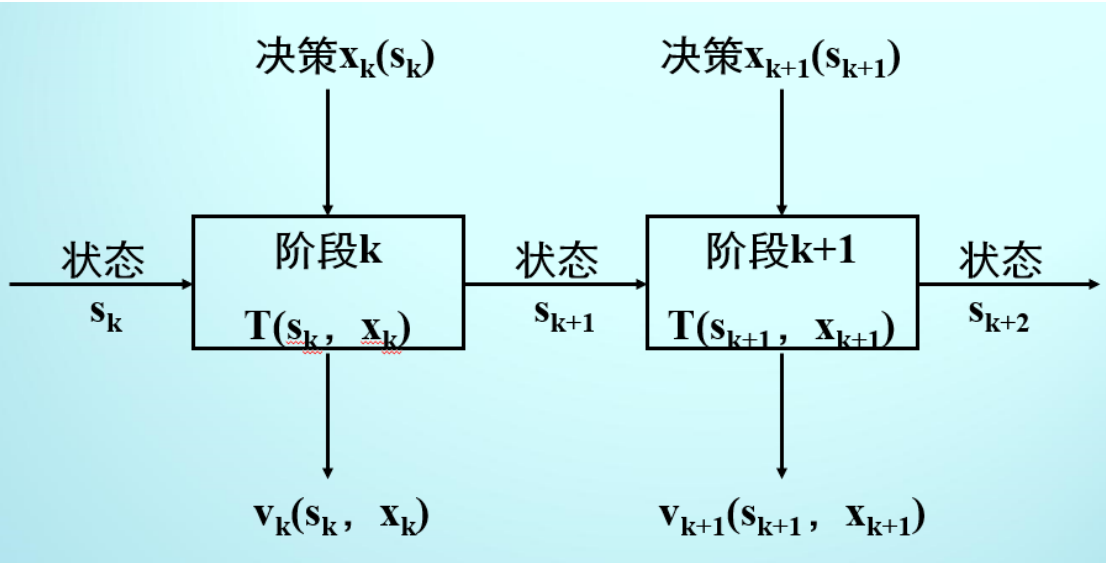
vi. 最优值：最优策略对应的最优指标 f_1^*

4、动态规划的基本方法（标号法）

（1）最优化原理，作为一个全过程最优策略具有这样的性质：无论过去的状态和决策如何，对前面所形成的状态而言，余下的各个决策必构成最优策略。

(2) 函数基本方程，和$\begin{cases} f_{n+1}^*(s_{n+1})=0 \\ f_k^*(s_k)=opt\{v_k(s_k,x_k)+f_{k+1}^*(s_{k+1})\} \end{cases}$

积$\begin{cases} f_{n+1}^*(s_{n+1})=1 \\ f_k^*(s_k)=opt\{v_k(s_k,x_k)\times f_{k+1}^*(s_{k+1})\} \end{cases}$



(3) 基本步骤

i. 建立模型

(a) 划分阶段，设定 k

(b) 设定状态变量s_k

(c) 设定决策变量 x_k

(d) 建立状态转移方程

(e) 确定指标函数 v_k，f_k^*

(f) 建立函数基本方程

ii.递推（逆推）求解

iii.得出（顺推）结论

5、动态规划的基本类型

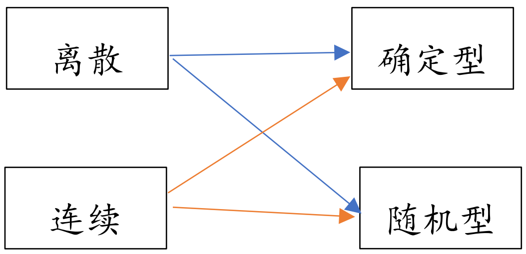
（1）按阶段变量 k 来分

（a）定期型：k=1,2,…,n

（b）不定期型： k=1,2,…,n（解前未知）

（c）无期型：k=1,2,…,n…

（2）按状态变量s_k划分



6、例题一

今有一辆载货量为 6t 的载货车，现有 3 种需要运输的货物，均可用此载货车装运。若已知这 3 种货物每一种的质量和运输例如下表所示。在载货量许可的条件下，每车装载每一种货物的件数不限，应如何搭配这三种货物，才能使每车装载货物的利润最大？

货物种类	每件质量（t）	每件运输利润（百元）
1	2	8
2	3	13
3	4	18

该问题可以看作一个3阶段的动态规划问题

步骤1，划分阶段。设每装一种货物为一个阶段，k=1, 2, 3。

步骤 2，确定状态变量。设状态变量为$\begin{cases} S_1 = 6 \\ S_k = \{0,1,2,3,4,5,6\}(k = 2,3) \end{cases}$

可用于表示装载第k种货物到第n种货物(n=3)时卡车剩余的装载量。

1） 确定决策变量。设决策变量表示第 k 种货物的装载件数

$$x_k \in D_k(x_k) = \{0,1,\dots,[\frac{s_k}{w_k}]\}(k = 1,2,3)$$

2） 状态转移方程为

$$s_{k+1} = s_k - w_k x_k$$

3） 阶段指标函数。第 k 阶段装载x_k件货物时所创的利润 。$v_k x_k$

4） 函数的基本方程为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \underset{\substack{x_k \in D_k(s_k) \\ s_k = \{0,1,\cdots,6\}}}{opt} [v_k x_k + f_{k+1}(s_k - w_k x_k)](k = 1,2,3) \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

阶段	s_3 \ x_3	$18x_3$				f_3	x_3^*	s_4
		0	1					
k=3	0	0	—			0	0	0
	1	0	—			0	0	1
	2	0	—			0	0	2
	3	0	—			0	0	3
	4	0	18			18	1	0
	5	0	18			18	1	1
	6	0	18			18	1	2
阶段	s_2 \ x_2	$13x_2+f_3(s_2-3x_2)$				f_2	x_2^*	s_3
		0	1	2				
k=2	0	0+0	—	—		0	0	0
	1	0+0	—	—		0	0	1
	2	0+0	—	—		0	0	2
	3	0+0	13+0	—		13	1	0
	4	0+18	13+0	—		18	0	4
	5	0+18	13+0	—		18	0	5
	6	0+18	13+0	26+0		26	2	0
阶段	s_1 \ x_1	$8x_1+f_2(s_1-2x_1)$				f_1	x_1^*	s_2
		0	1	2	3			
k=1	6	0+26	8+18	16+0	24+0	26	0, 1	6 4

最优解为$x_1^*=0, x_2^*=2, x_3^*=0$或$x_1^*=1, x_2^*=0, x_3^*=1$

逆推求解，顺推得出结论。

逆推求解，当 **k=3** 时，即从第三种货物开始装，当货车容量大于等于第三种货物的质量时才可以开始装车，当容量大于等于 4 时，才能装下一个第三种货物。f_3表示利润，x_3^*表示装载 3 货物的个数。S_4表示剩余空间；当 **k=2** 时，即从第二种货物开始装，同理，当容量大于等于 3 小于 6 时，才能装下一个第二种货物，当剩余容量是 6 是，可以装下 2 件二货物；当 **k=1** 时，即从第一种货物开始装，这是货车肯定为空，容量从 6 开始，因此火车可以装载一货物的件数从 0 到 3 都有可能。

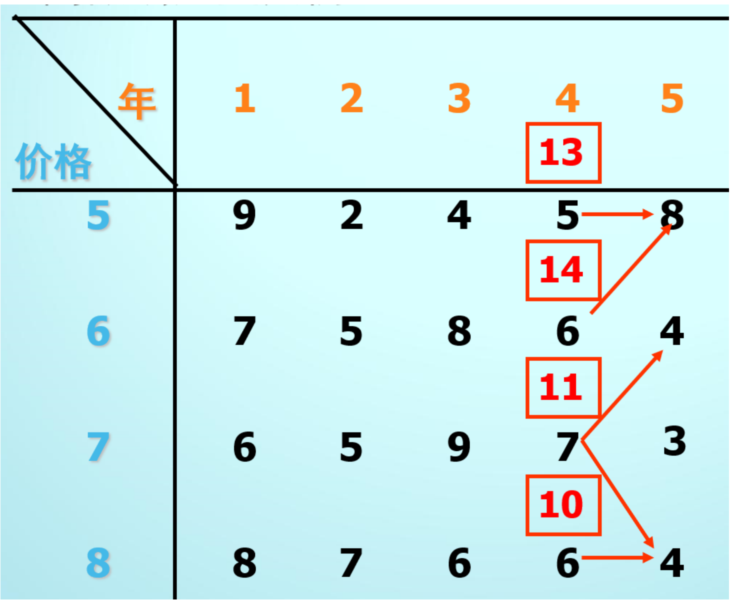
顺推结论，根据最大的利润 26，从 k=1 到 k=3 推出三种货物的件数。

7、例题二　　**离散确定型典例**

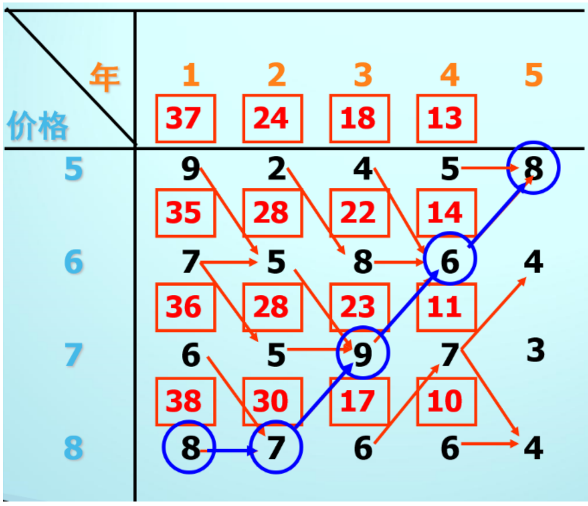
定价问题

某厂要确定一种新产品在今后五年内的价格，并已拟定只在 5、6、7、8 元这四种单价中进行选择。 据预测，今后五年不同价格下每年盈利如表所示， 但是各相邻年度价格增减不超过 1 元。问今后五年内每年定价各为多少，可预期五年总利润最大？

年 价格(元)	1	2	3	4	5
5	9	2	4	5	8
6	7	5	8	6	4
7	6	5	9	7	3
8	8	7	6	6	4



同样是逆推法求解，从第四年开始看，因为逆推的话第五年就相当于第一年，获利都是确定的了。第四年这一列上的数字去寻找第五年这一列上相邻一个单位举例的最大数字相加求和。每一个数都和后面的列这样求和，最后得出最大的数来及进行回推。



得到的最优定价策略为{8，7，9，6，8}

最大获利为 38

8、例题三　　**离散确定型典例**

资源分配问题

某厂为扩大生产能力，拟定购某种成套设备 4~6 套，以分配给其所辖三个分厂使用。预计各分厂分得不同套数的设备后每年创造的利润如下表所示。该厂应订购几套设备并如何分配，才能使每年预计创利总额最大？

套数 / 分厂	0	1	2	3	4	5	6
1	0	3	5	6	7	6	5
2	0	4	6	7	8	9	10
3	0	2	5	9	8	8	7

解　1. 建立 DP 模型

以 k = 1，2，3 表示给三个分厂分配的顺序。

设 s_k =在给 k 分厂分配时尚余的套数；

$x_k =$ 分给 k 分厂的套数；

可知状态方程为 $s_{k+1} = s_k - x_k$

$v_k(s_k, x_k) =$ 从现有s_k套设备中分给 k 分厂x_k套设备后的预计创利额；

$f_k(s_k, x_k) =$ 将现有s_k套设备从 k − 3 分配后(其中 k 分厂分得x_k套)的预计创利额之和；

2. 按逆序递推法逐段求解

(1) k=3

此时，1，2 厂已分完，而目前所剩设备套数为$s_3 = 0,1,2,3,4,5,6$

允许决策为$x_3 = 0,1,2,3,4,5,6$, 得下表。

$f_3(s_3, x_3)$	$v_3(s_3, x_3)$							$f_3^*(s_3)$	x_3^*
s_3 \ x_3	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1	0	2						2	1
2	0	2	5					5	2
3	0	2	5	9				9	3
4	0	2	5	9	8			9	3
5	0	2	5	9	8	8		9	3
6	0	2	5	9	8	8	7	9	3

寻找每一列中最大的数，最大的数对应$f_3{}^*(s_3)$，对应的列为$x_3{}^*$

(2) k=2

此时，1 厂已分完，而目前所剩设备套数$s_2 = 0,1,2,3,4,5,6$，允许决策为$x_3 = 0,1,2,3,4,5,6$, 得下表。

$f_2(s_2, x_2)$	$v_2(s_2, x_2) + f_3{}^*(s_3)$							$f_2{}^*(s_2)$	$x_2{}^*$
s_2 \ x_2	0	1	2	3	4	5	6		
0	0+0							0	0
1	0+2	4 +0						4	1
2	0+5	4 +2	6+0					6	1,2
3	0+9	4 +5	6+2	7+0				9	0,1
4	0+9	4 +9	6+5	7 +2	8+0			13	1
5	0+9	4 +9	6+9	7 +5	8+2	9 +0		15	2
6	0+9	4+9	6 +9	7 +9	8+5	9 +2	10+0	16	3

（3）k=1

此时，作为第一个被分配的厂家，目前所剩设备套数$s_1 = 4,5,6$因为题目中规定购买 4~6 套，允许决策为$x_1 = 0,1,2,3,4,5,6$，得下表。

$f_1(s_1,x_1)$	$v_1(s_1,x_1)+f_2^*(s_2)$							$f_1^*(s_1)$	x_1^*
s_1 \ x_1	0	1	2	3	4	5	6		
4	0+13	3+9	5+6	6+4	7+0			13	0
5	0+15	3+13	5+9	6+6	7+4	6+0		16	1
6	0+16	3+15	5+13	6+9	7+6	6+4	5+0	18	1, 2

$p_1^*(6) = \{1,2,3\}$或$\{2,1,3\}$ (套)

$f_1^*(6) = 18$ (万元)

3. 顺序递推，得出结论

按 k = 1，2，3 的顺序，依次查看各表的s_k列与$x_k{}^*$列，并按$s_{k+1}= s_k - x_k{}^*$ 的转移规律将最优决策衔接为最优策略。表中$s_1 = 6$时 $f_1{}^*(s_1) = 18$，值最大，故$s_1{}^* = 6$。顺次查看 k = 1，2，3 时的表格，可知最优策略为：$p_1{}^*$ （$s_1{}^* = 6$） = { 1，2，3 } 或 { 2，1，3 }，即该厂应订购 6 套该设备，可分给 1，2，3 分厂 1，2，3 套或 2，1，3 套。这样预计每年创利最大，为 18 万元。

9、例题 3 **连续确定型典例**

机器负荷分配问题

设有 100 台同一规格的完好自动机床，每台机床全年在高负荷下工作可创利 9 万元，折损率为 0.75；在低负荷下工作可创利 6 万元， 折损率为 0.96。

试拟订连续四年设以 k = 1，2，3，4 表示年度；

$s_k =$ 第 k 年初（第 k-1 年末）拥有的机床当量台数(有效台年）；

$x_k =$ 第 k 年度分配于高负荷下工作的机床当量台数的分配计划，使总利润最大。

$$s_{k+1} = 0.75x_k + 0.96(s_k - x_k) = 0.96s_k - 0.21x_k$$

$$v_k(s_k, x_k) = 9x_k + 6(s_k - x_k) = 3x_k + 6s_k$$

(1) k=4

由于$f_4{}^*(s_4) = 3x_4 + 6s_4$为关于$x_4$的线性单增函数，故有$x_4{}^* = s_4$，$f_4{}^* = 9s_4$

(2) k=3

由于 $f_3{}^*(s_3) = \max\{3x_3 + 6s_3 + 9(0.96s_3 - 0.21x_3)\} = 14.64s_3 + 1.11x_3$，故有$x_3{}^* = s_3$，$f_3{}^* = 15.75s_3$

(3) k=2

由于 $f_2{}^*(s_2) = \max\{3x_2 + 6s_2 + 15.75(0.96s_2 - 0.21x_2)\} = 21.12s_2 - 0.375x_2$，故有$x_2{}^* = 0$，$f_2{}^* = 21.12s_2$

(4) k=1

由于 $f_1{}^*(s_1) = \max\{3x_1 + 6s_1 + 21.12(0.96s_1 - 0.21x_1)\} = 26.2752s_1 - 1.4352x_1$，故有$x_1{}^* = 0$，$f_1{}^* = 2627.52$

因此，最优策略为$x_1{}^* = x_2{}^* = 0$，$x_3{}^* = s_3$，$x_4{}^* = s_4$

机床当量台数：$S_1 = 100$

$$S_2 = 0.96S_1 - 0.21x_1{}^* = 0.96S_1 = 96$$

$$S_3 = 0.96S_2 - 0.21x_2{}^* = 0.96S_2 = 92.16$$

$$S_4 = 0.96S_3 - 0.21x_3{}^* = 0.75S_3 = 69.12$$

$$S_5 = 0.96S_4 - 0.21{x_4}^* = 0.75S_4 = 51.84$$

10、例题 4 **离散随机型典例**

采购问题

某厂供应科必须在今后 5 周内购买一原料，以保证第六周生产之用。根据过去的统计资料，预计该原料今后每周的价格如右表所示。应如何拟订采购策略，才能期望原料价格最低?

价格(元)	概率
500	0.3
550	0.3
600	0.4

用 k = 1, 2, 3, 4, 5 表示今后每周的序号；

设：s_k =第 k 周的原料价格；

x_k =第 k 周的决策；x_k =1（采购）或 0（等待）；

${f_k}^*(s_k)$ = 源于s_k状态的第 k 周以后的最低期望价格；

第 k 段状态集 s_k = { 500,550,600 };状态概率分布为 p{ s_k =500 } = 0.3， p{ s_k =550 } = 0.3， p{ s_k = 600 } = 0.4

令 E （s_{k+1}） = $\sum p(s_{k+1}) {f_{k+1}}^*(s_{k+1})$ = 0.3${f_{k+1}}^*(500)$ + 0.3${f_{k+1}}^*(550)$ + 0.4${f_{k+1}}^*(600)$

则函数方程为${f_k}^*(s_k)$ = min {s_k， E(s_{k+1})}， k = 4, 3, 2, 1

又因第五周只得采购，即 ${x_5}^* = 1$， 故有${f_5}^*(s_5)$ = s_5,此即函数的

边界条件。而第 k 子过程指标函数为

$$f_k(s_k,x_k)=\begin{cases} s_k, 当x_k=1 \\ E(S_{k+1}), 当x_k=0 \end{cases}$$

（1）k = 5，最后一周，只有唯一决策：按该周价格采购，有

$$E(s_5)=0.3*500+0.3*550+0.4*600=555$$

（2）k = 4，第四周，可以选择订货，或者是不定货，等到第五周再

订货 $f_4{}^*(s_4)=\begin{cases} E(S_5)=555，当x_4=0 \\ S_4，当x_4=1 \end{cases}$

故有，$f_4{}^*(s_4)=\min\{555,S_4\}=\begin{cases} 500, x_4{}^*=1, S_4=500 \\ 550, x_4{}^*=1, S_4=550 \\ 555, x_4{}^*=0, S_4=600 \end{cases}$

$$E(s_4)=0.3*500+0.3*550+0.4*555=537$$

（3）k=3，第三周，可以选择订货，或者是不定货，在之后的周中再

订货 $f_3{}^*(s_3)=\begin{cases} E(S_4)=537，当x_3=0 \\ S_3，当x_3=1 \end{cases}$

故有，$f_3{}^*(s_3)=\min\{537,S_3\}=\begin{cases} 500, x_3{}^*=1, S_3=500 \\ 537, x_3{}^*=0, S_3=550 \\ 537, x_3{}^*=0, S_3=600 \end{cases}$

$$E(s_3)=0.3*500+0.3*537+0.4*537=525.9$$

（4）k = 2，第二周，可以选择订货，或者是不定货，在之后的周中

再订货 $f_2{}^*(s_2)=\begin{cases} E(S_3)=525.9，当x_2=0 \\ S_2，当x_2=1 \end{cases}$

故有，$f_2{}^*(s_2)=\min\{525.9,S_2\}=\begin{cases} 500, x_2{}^*=1, S_2=500 \\ 525.9, x_2{}^*=0, S_2=550 \\ 525.9, x_2{}^*=0, S_2=600 \end{cases}$

$$E(s_2)=0.3*500+0.3*525.9+0.4*525.9=518$$

（5）k = 1，第一周，可以选择订货，或者是不定货，在之后的周中

再订货 $f_1{}^*(s_1)=\begin{cases}E(S_2)=518，当x_1=0\\ \quad S_1，当x_1=1\end{cases}$

故有，$f_1{}^*(s_1)=\min\{518,S_1\}=\begin{cases}500,x_1{}^*=1,S_2=500\\518,x_1{}^*=0,S_2=550\\518,x_1{}^*=0,S_2=600\end{cases}$

$$E(s_1)=0.3*500+0.3*518+0.4*518=513$$

根据以上结果，可得最优采购策略为：

若前三周原料价格为 500 元，则应立即采购，否则等待以后再采购；

第四周当原材料价格为 500 或 550 元时，都应立即采购，否则等待到第五周再采购；

若前四周均未采购，则第五周无论原料价格如何，都应立即按价采购；

这样，原料期望价格最低为：

$f_1{}^*$ = 0.3 × 500 +（0.3 + 0.4）× 518 = 513（元）