1、运输问题的模型

产销平衡模型

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=S_i \quad i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}=d_j \quad j=1,2,\dots,m\\ X_{ij}\geq 0\end{cases}$$

产大于销模型

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\leq S_i \quad i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}=d_j \quad j=1,2,\dots,m\\ X_{ij}\geq 0\end{cases}$$

产小于销模型

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=S_i \quad i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}\leq d_j \quad j=1,2,\dots,m\\ X_{ij}\geq 0\end{cases}$$

运输模型有两个特点

（1） 他有 m*n 个变量，m+n 个约束方程，由于产销平衡的运输问题，$\sum s_i=\sum d_j$，最大独立方程数 m+n-1

（2） 其系数阵具有特殊的结构

(2) 其系数阵具有特殊的结构

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&1&1&1&&&&&&&&\\&&&&1&1&1&1&&&&\\&&&&&&&&1&1&1&1\\1&&&&1&&&&1&&&\\&1&&&&1&&&&1&&\\&&1&&&&1&&&&1&\\&&&1&&&&1&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{m=3}\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{n=4}\end{array}$$

2、从运输网络图中一个基应满足的条件，容易得出运输表中一个基必须满足的条件：

（1）一个基应占表中的 m+n-1 格

（2）构成基的同行同列格子不能构成闭回路

（3）一个基在表中所占的 m+n-1 个格子应包括表的每一行每一列

运输问题可以用单纯形法求解，但由于其模型的特殊性，也可以用基

于单纯形法思想的表上作业法求解，求解的速度要优于单纯形法。

表上作业法的步骤：初始基本可行解——>最优性检验——>改进方案

（1）确定初始基本可行解

西北角法、最小元素法、最大差额法（vogel 法）

用西北角法确定初始可行解的方法简单，不会出现贿赂，而且一般情况下基变量的个数恰为 m+n-1 个（退化的情况基变量可能少于 m+n-1，需要通过在相应位置添 0 的方法处理），而且基变量位于每一行每一列，因而得到的是一个基本可行解，西北角发的缺点是在安排运量时不考虑运价，因而得到的初始解可能离开最优解比较远。

最小元素法：所谓最小元素，是指作业表中的最小运价C_{ij}。即先给最小运价那格安排运量，然后花去该运价所在行或列；直到求出初始方案为止。为了保证花圈数字为 m+n-1 个，最小元素法有以下三条原则：

（1）在确定了某一基变量x_{lk}及其数值并画圈以后，若他所在的A_l行或者B_k列中其余变量均应取 0 值，也不能同时把A_l行和B_k列同时划掉，只能划去其中之一。

（2）再确定为最小元素的某一空格上，若该变量$x_{ij}=\min\{a_i,b_j\}=0$，此时也不能保留该空格，而必须要把 0 填上并画圈。

（3）最后一个空格必须画圈，即使该格的$x_{ij}=0$也要添上 0 并画圈

最大差额法（Vogel）步骤如下

1、对每行每列的运价C_{ij}分别计算两最小元素之差（取正值），将“行差”记于表右侧，“列差”基于表下端

2、在所有行差、列差中选一最大差额，若有几个同时最大，则可任选其中之一

3、在最大差额所在行（列）中选一最小运价，若有几个同时最小，则可任选其一。

4、在所确定的最小运价格子内，确定基变量数值并画圈，然后划去所在的行或列，具体做法同最小元素法

5、对剩余未划去的行列重复上述步骤，但当只剩下最后一行(列)时，不在计算行(列)差，而直接按最小元素法分配运量并划去相应的行或列。

最小元素法和最大差额法（后续会写）所确定的初始方案满足以下条件：

1）画圈数字的个数恰好等于线性无关的约束个数，即 m+n-1 个

2）可行：满足所有约束条件

3）表中不存在“以画圈数字为顶点的闭回路”

（2）计算非基变量的检验数

闭回路法、位势法

闭回路法：闭回路是指一个非基变量的格子为始点和终点，而其余顶点均为画圈数字的一条封闭回路。符号 $\boxed{+}$ 表示始点（非基变量），它及其闭回路上标“+”的顶点称为偶点，而标“—”的顶点称为奇点

奇偶点的确定：始点（非基变量）必为偶点，标$\boxed{+}$号，然后沿着闭回路的某一行进方向交错地标记奇偶符号。则$\sigma_{ij}=\sum c_{ij}^{+}-\sum c_{ij}^{-}$即，检验数等于闭回路上偶点的运价总和减去奇点的运价总和（闭回路不一定包括全部的画圈数字，但是画圈的数字都必须是顶点）

位势法：在初始方案表中，可将基变量所在格的“运价C_{ij}”分解为两部分$u_i+v_j=C_{ij}$，其中u_i代表产地A_i所在行的行位势量，v_j代表销地B_j所在列的列位势量，C_{ij}为画圈数字所在格的运价。

所有u_i，v_j的值确定以后，可以证明，σ_{ij}可按下式计算：

$$\sigma_{ij}=C_{ij}-u_i-v_j$$

基变量对应的检验数显然全部都为 0，因此只需要计算非基变量的检验数。这种计算检验数的方法是位势法。（u_i，v_j是通过画圈数字所在的运价求解方程得到的）当非基变量的检验数均为正数时，到达最优解。

在进基变量的闭回路上的所有奇点中（闭回路从非基变量开始），选择数值最小的那个作为离基变量，并取他的值作为调整值。在这个闭回路上，奇点减去这个调整值，偶点加上这个调整值。不在进基变量闭回路上的x_{ij}的值不变。

调整非优方案的一般步骤与规则

1° 进基变量的确定——规则Ⅰ

按 $\min\{\sigma_{ij} \mid \sigma_{ij}<0\}=\sigma_{lk}$ 确定x_{lk}进基。

若有多个σ_{lk}同时最小，则选其中**最小运价**$\min\{c_{lk}\}$所对应的那个x_{lk}进基；又若有多个这样的c_{lk}同时最小，则从中任选一个c_{lk}对应x_{lk}的进基。进而画出**进基变量x_{lk}的闭回路**及**奇偶点**。

2° 离基变量的确定——规则Ⅱ

在进基变量x_{lk}的闭回路上，按

$t=\min\{\bar{x}_{ij}\}=x_{pq}$ （$\bar{x}_{ij}$ 为奇点）

确定x_{pq}离基，同时也就确定x_{pq}的值t为**调整量**。

若有多个奇点x_{pq}的值同时最小，则选其中**最大运价**$\max\{c_{pq}\}$所对应的那个x_{pq}离基；又若有多个这样的c_{pq}同时最大，则从中任选一个c_{pq}对应的x_{pq}离基。

3、已知某运输问题的资料如下表所示：

	B_1	B_2	B_3	B_4	发量
A_1	2	6	5	3	15
A_2	1	3	2	1	12
A_3	3	2	7	4	13
收量	10	13	12	5	40

求出最优运输方案

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差		
A_1	2 10	6	5	3 5	5 ~~15~~	1	1	1
A_2	1	3	2 12	1 0	0 ~~12~~	0	0	
A_3	3	2 13	7	4 0	0 ~~13~~	1	1	1
销量	~~10~~	~~13~~	~~12~~	~~5~~ ~~5~~ 0	40			
列差	1	1	3	2				
	1	4		1				

u_i \ v_j		2	1	4	3	产量
		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	2 10	6 5	5 1	3 5	15
−2	A_2	1 1	3 4	2 12	1 0	12
1	A_3	3 $\boxed{0}$	2 13	7 2	4 0	13
销量		10	13	12	5	

4、产销不平衡问题

销大于产

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	9	2	15
A_2	3	1	7	18
A_3	6	2	8	17
b_j	18	12	26	50 / 56

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	5	9	2	15
A_2	3	1	7	18
A_3	6	2	8	17
A4	0	0	0	6
b_j	18	12	16	26

例：自来水分配问题

引水管理费 区 / 水库	甲	乙	丙	丁	供水量
A	160	130	220	170	50
B	140	130	190	150	60
C	190	200	230	—	50
最低需求	30	70	0	10	
最高需求	50	70	30	不限	

引水管理费 区 / 水库	甲	乙	丙	丁	供水量
A	160	130	220	170	50
B	140	130	190	150	60
C	190	200	230	—	50
最低需求	30	70	0	10	110 / 160
最高需求	50	70	30	60	210 / 160

最高需求就是在除了本地区外的其他地区均为最低需求的时候根据总供水量求出来的。

引水管理费 区 / 水库	甲	乙	丙	丁	供水量
A	160	130	220	170	50
B	140	130	190	150	60
C	190	200	230	—	50
基本需求	30	70	0	10	110 / 160
额外需求	20	0	30	50	210 / 160

引入虚水库 D，30 是必需的，所以不能由 D 供给，令成本为无穷大 M

自来水分配问题的规范表式运输模型

引水 区 / 管理费 / 水库	甲		乙	丙	丁		供水量
	$甲_1$	$甲_2$			$丁_1$	$丁_2$	
A	160	160	130	220	170	170	50
B	140	140	130	190	150	150	60
C	190	190	200	230	M	M	50
D (虚)	M	0	M	0	M	0	50
需求量	30	20	70	30	10	50	210

由上述规范表示的运输模型，经过最大差额法（或最小元素法）得到初始解，然后利用位势法（或者闭回路法）检验是否为最优基，迭代，可得，

自来水分配问题的最优方案表

分配量 区 / 水库	甲$_1$	甲$_2$	乙	丙	丁$_1$	丁$_2$	供水量
A			50				50
B			20		10	30	60
C	30	20	0				50
脱销				30		20	50
需求量	30	20	70	30	10	50	210

5、应用运输问题模型的其他实例

某工厂按合同规定必须于当年的每个季度末分别提供 10、15、25、20 台同一规格的柴油机，已知该厂的生产能力及生产每台柴油机的成本如表示。有如果生产出来的柴油机当季不交货，每台每积压一个季度需要存储维护费用 0.15 万元，要求在完成合同的情况下，做出使全年生产费用最小的决策。

季度	生产能力(台)	单位成本(万元/台)
I	25	10.8
II	35	11.1
III	30	11.0
IV	10	11.3

解：设x_{ij}表示第 i 季度生产，用于第 j 季度交货的数量

c_{ij}表示第 i 季度生产，用于第 j 季度交货的单位成本

则，目标函数是：$\min z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$

由供应数量约束可知：$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \le 25 \\ x_{22}+x_{23}+x_{24} \le 35 \\ x_{33}+x_{34} \le 30 \\ x_{44} \le 10 \\ x_{ij} \ge 0 (i,j=1,2,3,4) \end{cases}$

由需求数量约束可知：$\begin{cases} x_{11}=10 \\ x_{12}+x_{22}=15 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=25 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=20 \end{cases}$

因此，单位费用表为：

单位：万元

供应＼需求	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	
Ⅰ	10.8	10.95	11.10	11.25	25
Ⅱ	M	11.10	11.25	11.40	35
Ⅲ	M	M	11.00	11.15	30
Ⅳ	M	M	M	11.30	10
	10	15	25	20	

接下来，利用最大差额法和位势法求出最优解，可以看出，这是一个供大于求的生产调度模型，需要在 IV 后面再加一列$V_{虚}$，其需求量为

100-70=30