

某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗，如表所示，每生产一件产品 I 可获利 2 元，每生产一件产品 II 可获利 3 元，问应该如何安排计划使该工厂获利最多？

| 资源 产品 | I | II | 拥有量 |
|-------|---|----|-----|
| 设备 A | 2 | 2 | 12 |
| 设备 B | 1 | 2 | 8 |
| 原材料 A | 4 | / | 16 |
| 原材料 B | / | 4 | 12 |

① 最大生产利润模型

设企业生产甲产品 x_1 件，乙产品生产 x_2 件，则原问题模型为

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 & y_1 \\ x_1 + x_2 \leq 8 & y_2 \\ 4x_1 \leq 16 & y_3 \\ 4x_2 \leq 12 & y_4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

② 资源最低售价模型

设第 i 中资源价格为 y_i ($i=1, 2, 3, 4$) 则有对偶问题为：

$$\begin{aligned} \min w &= 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4 \\ \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 4y_4 \geq 3 \\ y_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \end{aligned}$$

对偶问题的典式（典式是计算线性问题时所用单纯性法计算的一个标准表达式，将问题列出，然后化为标准型，即所谓的典式，然后对其用表格处理，得最优解）

用矩阵形式表示：

$$(1) \quad \max z = CX \quad \longleftrightarrow \min w = Yb$$

$$s.t. \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad s.t. \begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \max z = CX \quad \longleftrightarrow \min w = Yb$$

$$s.t. \begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases} \quad s.t. \begin{cases} YA \geq C \\ Y \leq 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \max z = CX \quad \longleftrightarrow \min w = Yb$$

$$s.t. \begin{cases} AX \leq b \\ X \leq 0 \end{cases} \quad s.t. \begin{cases} YA \leq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

上述规则均应用于严格定义的对偶问题，也称为对称对偶问题

它满足两个条件：

(1) 所有变量非负：即 $X \geq 0, Y \geq 0$

(2) 约束条件均为同向不等式，若原问题约束条件均为 \leq ，则它的对偶问题的约束条件均为 \geq

当原问题的约束条件的符号不完全相同时，也存在对偶问题，这种对偶问题称为非对称对偶问题。

③ 非对称对偶问题：

$$\min z = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 24 \\ -3x_1 - 6x_2 - 4x_3 \geq 15 \\ 5x_2 + 3x_3 = 30 \\ x_1 \leq 0, x_2 \text{ 取值无约束}, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

分析：为求对偶问题，可先做过渡，将问题对称化。

$x_1 = -x_1'$, $x_2 = x_2' - x_2''$, 则原问题变为 A' :

$$\begin{aligned} \min z' &= -7x_1 + 4x_2' - 4x_2'' - 3x_3 \\ \begin{cases} 4x_1' + 2x_2' - 2x_2'' - 6x_3 \leq 24 \\ -3x_1' + 6x_2' - 6x_2'' + 4x_3 \leq -15 \\ 5x_2' - 5x_2'' + 3x_3 \leq 30 \\ -5x_2' + 5x_2'' - 3x_3 \leq -30 \\ x_1', x_2', x_2'', x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

所以, 对偶问题 B' 为

$$\begin{aligned} \max z' &= 24y_1' - 15y_2' + 30y_3' - 30y_4' \\ \begin{cases} 4y_1' - 3y_2' \geq -7 \\ 2y_1' + 6y_2' + 5y_3' - 5y_4' \geq 4 \\ -2y_1' - 6y_2' - 5y_3' + 5y_4' \geq -4 \\ -6y_1' + 4y_2' + 3y_3' - 3y_4' \geq -3 \\ y_1', y_2', y_3', y_4' \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

以上对偶问题 B' 不是原问题的对偶问题, 而是 A' 的对偶问题, 因此需要调整, 对照问题 B' 目标函数系数的符号与原问题中约束条件右侧的常数项符号, 可以做出如下调整:

$$y_1 = y_1', \quad y_2' = -y_2, \quad y_3 = y_3' - y_4'$$

则得到以下对偶问题:

$$\begin{aligned} \max z &= 24y_1 + 15y_2 + 30y_3 \\ \begin{cases} 4y_1 + 3y_2 \geq -7 \\ 2y_1 - 6y_2 + 5y_3 \geq 4 \\ -2y_1 + 6y_2 - 5y_3 \geq -4 \\ -6y_1 - 4y_2 + 3y_3 \geq -3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ 无符号约束} \end{cases} \end{aligned}$$

最终约束条件为:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 \geq -7 \\ 2y_1 - 6y_2 + 5y_3 = 4 \\ -6y_1 - 4y_2 + 3y_3 \geq -3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ 无符号约束} \end{cases}$$

【ps.为什么将原问题的约束条件统一成大于号和小于号最后的对偶函数结果不一样，统一换成大于号和简便方法得出的结果一致】

简便方法过程见下：

$$\begin{array}{l} \min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{matrix} (1) \Rightarrow y_1 \\ (2) \Rightarrow y_2 \\ (3) \Rightarrow y_3 \end{matrix} \\ \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ 无约束} \end{cases} \end{array}$$

二、对偶问题的性质

(1) 对称性 对偶问题的对偶是原问题

(2) 弱对偶性 若 X 是原问题的可行解， Y 是对偶问题的可行解。

则存在 $CX \leq Yb$

设原问题是 $\max z = CX; AX \leq b; X \geq 0$

因 \bar{X} 是原问题的可行解，所以满足约束条件，即

$$A\bar{X} \leq b$$

若 \bar{Y} 是对偶问题的可行解，将 \bar{Y} 左乘上式，得到

$$\bar{Y}A\bar{X} \leq \bar{Y}b$$

原问题的对偶问题是： $\min \omega = Yb; YA \geq C; Y \geq 0$

因 \bar{Y} 是对偶问题的可行解，所以满足 $\bar{Y}A \geq C$

将 \bar{X} 右乘上式，

于是得到 $C\bar{X} \leq \bar{Y}A\bar{X} \leq \bar{Y}b$ 证毕。

(3) 无界性 若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解

【证明：有弱对偶性可知， $Yb \geq CX \rightarrow \infty$, 不可能成立，由此可证】

但是**这个性质的逆不成立**，当原问题（对偶问题）无可行解时，其对偶问题（原问题）或无可行解或具有无界解。

(4) 可行解是最优解时的性质；设 \bar{X} 是原问题的可行解， \bar{Y} 是对偶问题的可行解，当 $C\bar{X} = \bar{Y}b$ 时， \bar{X} , \bar{Y} 分别是原问题与对偶问题的最优解。

可用弱对偶性证明

(5) 对偶定理 若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等

(6) 兼容性

原问题与对偶问题标准化后，具有相同的分量个数。这些分量相互之间存在着对应的关系。原问题的松弛变量对应着对偶问题的决策变量，对偶问题的剩余变量对应着原问题的决策变量。则原问题单纯形表的检验数行的相反数对应其对偶问题的一个基解，且二者目标函数值相等。我们把这样一对基本解称为互补基本解。主要讨论原问题检验数与对偶问题解的关系。

(7) 互补松弛性

在线性规划问题的最优解中，如果对应某一约束条件的对偶变量值为非零，则该约束条件取严格等式；反之，如果约束条件取严格不等式，则其对应的对偶变量一定为 0

根据性质，求解问题

已知线性规划问题

$$\begin{aligned}\min \quad & \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ & x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, 5\end{aligned}$$

其对偶问题的最优解为 $y_1^* = \frac{4}{5}, y_2^* = \frac{3}{5}; z=5$. 试用对偶理论找出原问题的最优解。

解：原问题的对偶问题为

$$\max \quad z = 4y_1 + 3y_2$$

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \quad & y_1 + 2y_2 \leq 2 & \text{①}\end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \quad y_1 - y_2 \leq 3 & \text{②}$$

$$\blacktriangleright \quad 2y_1 + 3y_2 \leq 5 & \text{③}$$

$$\blacktriangleright \quad y_1 + y_2 \leq 2 & \text{④}$$

$$\blacktriangleright \quad 3y_1 + y_2 \leq 3 & \text{⑤}$$

$$\blacktriangleright \quad y_1, y_2 \geq 0$$

将 $y_1^* = \frac{4}{5}, y_2^* = \frac{3}{5}$ 代入约束条件，得到 ② = $1/5 < 3$ ③ = $17/5 < 5$

④ = $7/5 < 2$ ，他们为严格不等式，由互补松弛性的 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$. 因

为 $y_1, y_2 \geq 0$ ；原问题的两个约束条件应取等式，故有

$$x_1^* + 3x_5^* = 4$$

$$2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到 $x_1^* = 1, x_5^* = 1$ ；故原问题的最优解为

$$X^* = (1, 0, 0, 0, 1); \omega^* = 5$$

三、对偶变量的经济含义

(LP 问题)

(DP 问题)

$$\max z = CX \quad \leftarrow \text{-----} \rightarrow \min w = Yb$$

$$s.t. \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$s.t. \begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

讨论对称形式，已知当 LP 取得最优解 X^* 的时候，其 DP 问题也有最优解 Y^* ，且有 $Z^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = w^*$

b_i 代表：第 i 中资源的拥有量；对偶变量 y_i^* 的意义代表：在资源最优利用的条件下，对单位第 i 中资源的估价。这种估价不是自愿的市场价格，而是根据资源在生产中做出的贡献而作的估价。

影子价格的定义：在资源最优利用的条件下，对单位第 i 种资源的估价。是对偶问题的最优解 $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 是一个向量，他的每个分量 y_i^* 表示最优目标值随相应资源数量变化的变化率

在一对 LP 和 DP 中，在其他条件不变的情况下，当 LP 的某个约束条件的右端项常数 b_i 增加一个单位时，所引起的目标函数最优值 z^* 的改变量。此时， y_i^* 称为 LP 的第 i 个约束条件的影子价格，又称为边际价格。

当原问题是利润最大化的生产计划问题，对原问题的求解是确定资源的最优分配方案的问题。则对偶问题是资源定价问题，对偶问题的最优解 y_1, y_2, \dots, y_m 称为 m 种资源的影子价格。

1、当增加一个单位的资源，立即能够产生价值，即说明该资源目前已耗尽。

2、对于影子价格为零的资源企业，其资源不一定有剩余，如果有剩余，企业应该充分利用剩余的资源，开辟新的生产途径，以增加企业的总收益。

3、如果最优生产计划下，某种资源有剩余，说明资源未被充分利用，松弛变量不产生价值，此时这种资源的影子价格一定等于 0。

4、影子价格越大，说明这种资源越是相对紧缺；影子价格越小，说明这种资源相对不紧缺。

四、影子价格的经济意义

1、影子价格不是市场价

资源的市场价格是已知数，相对比较稳定，而资源的影子价格则有赖于资源的利用情况，是未知数。由于企业生产任务、产品结构等情况发生变化，资源的影子价格也随之改变。

2、资源的影子价格是一种机会成本

在纯市场经济条件下，设第 i 种资源的单位市场价格为 m_i ，当 $y_i > m_i$ 时，企业愿意购进这种资源，单位资源的纯利为 $y_i - m_i$ ，则有利可图，如果 $y_i < m_i$ ，则企业有偿转让这种资源，可获单位资源的纯利为 $m_i - y_i$ ，否则，企业无利可图，甚至亏损。随着资源的买进卖出，他的影子价格也将随之发生变化，一直到影子价格与市场价格保持同等水平时，才处于平衡状态。影子价格的大小客观的反映资源在系统内的稀缺程度，影子价格越高，资源在系统中越稀缺。

(生产一单位的某种商品的机会成本是指生产者所放弃的使用相同的生产要素在其它生产用途中所能得到的最高收入。西方经济学认为一个企业的生产成本应该加上从机会成本的角度来理解。用美国经济学家萨缪尔森通俗易懂的话来理解，即：做一件事的成本可以被认为是他为此而失掉的可能用同样时间做成另一件事，或者是他为此而牺牲掉的闲暇。这种被牺牲掉的其他的事被称为“机会成本”。资源的影子价格定量的反映了单位资源在最优生产方案中为总收益所做出的贡献，因此，资源的影子价格也可称为在最优方案中投入生产的机会成本。)

影子价格可以告诉决策者应如何考虑新产品的价格

| 资源 \ 产品 | A B | | 影子价格 (万元) |
|----------|-----|---|--------------|
| | A | B | |
| 钢材 | 1 | 2 | 3/4 |
| 煤 | 2 | 1 | 0 |
| 机时 | 3 | 4 | 1/4 |
| 单位利润(万元) | 1 | 3 | |

两种新产品A,B的机会成本为:

A单位产品的机会成本 $=1 \times 3/4 + 2 \times 0 + 3 \times 1/4 = 3/2$

B单位产品的机会成本 $=2 \times 3/4 + 1 \times 0 + 4 \times 1/4 = 5/2$

则A产品的定价一定要大于1.5才能增加公司的收益，如售价低于1.5的话，生产是不划算的。



3、影子价格是一种边际价格

影子价格的值相当于在资源得到最优利用的生产条件下， b_i 每增加一个单位时目标函数 z 的增量

五、LP 和 DP 中其他概念的经济学意义

1、对偶约束的经济解释-----产品的机会成本

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 \dots + c_jx_j \dots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1j}x_j \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2j}x_j \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots + a_{mj}x_j \dots + a_{mn}x_n \leq b_m & y_m \end{cases}$$

决策变量均大于 0

减少一件产品可以节省的资源

增加单位资源可以增加的总利润

机会成本 $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{ij}y_i + \dots + a_{mj}y_m$, 表示减少一件产品所节省的资源可以增加的利润

2、对偶约束松弛变量的经济解释-----产品差额成本

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \dots + a_{1j}y_j \dots + a_{1n}y_n - y_{m+1} = c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \dots + a_{2j}y_j \dots + a_{2n}y_n - y_{m+2} = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 \dots + a_{mj}y_j \dots + a_{mn}y_n - y_{m+n} = c_n \end{cases}$$

$$y_{m+j} = (y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \dots + y_ma_{mj}) - c_j = Y^T a_j - c_j$$

差额成本=机会成本-利润

3、互补松弛定理的经济学意义

生产过程中如果某种资源未得到充分利用时, 该种资源的影子价格为零; 又当资源的影子价格不为零时, b_i 表明该种资源在生产中已耗费完毕。

4、单纯形表中检验数的经济学意义

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - \sum_{i=1}^m y_i a_{ij}$$

c_j 代表第 j 种产品的产值

$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij}$ 生产第 j 件产品所消耗各项资源的影子价格的总和 (即隐含

成本), 可见, 产品产值>隐含成本 ——>可生产该产品

否则, 不安排生产

5、线性规划问题的经济学意义

一般来说, 对线性规划问题的求解时: 确定资源的最优分配方案, 而对于对偶问题的求解是: 确定对资源的恰当估计, 这种估计直接涉及到资源的最有效利用。

五、对偶单纯形法

对偶单纯形法是根据对偶原理和单纯形法的原理而设计出来求解原线性规划问题的一种方法, 采用的技术是在原问题的单纯形表格上进行对偶处理

注意: 对偶单纯形法不是求解对偶问题的单纯形法

对偶单纯形法的步骤:

- 1、 列初始单纯性表, 使得所有检验数 $\sigma_j \leq 0$
- 2、 出基变量: 取 $\min\{b_i < 0\} = b_1 \longrightarrow x_{(1)}$
- 3、 入基变量: $\min\left\{\frac{c_j - z_j}{a_{1j}} \mid a_{1k} < 0\right\} = - \longrightarrow x_k,$
- 4、 主元素: $[a_{1k}]$
- 5、 迭代: 同单纯形法, 新单纯表种 p_k 化为单位向量

应用对偶单纯型法求解下面的线性规划问题

$$\begin{aligned} \min w &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad \Rightarrow \quad \max z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{cases} \\ &\quad \downarrow \\ \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 &= -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

| | | | | | | | |
|--|-------|-----|---------------------|-------|-------------------------------|-------|-------|
| $c_j \rightarrow$ | | | -2 | -3 | -4 | 0 | 0 |
| C_B | X_B | b | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
| 0 | x_4 | -3 | -1 | -2 | -1 | 1 | 0 |
| 0 | x_5 | -4 | -2 | 1 | -3 | 0 | 1 |
| $c_j - z_j$ | | | -2 | -3 | -4 | 0 | 0 |
| $\min\{\sigma_j/\alpha_{ij} \alpha_{ij} < 0\}$ | | | $\frac{-2}{-2} = 1$ | — | $\frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ | | |

| | | | | | | | |
|--|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_j \rightarrow$ | | | -2 | -3 | -4 | 0 | 0 |
| C_B | X_B | b | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
| 0 | x_4 | -1 | 0 | -5/2 | 1/2 | 1 | -1/2 |
| -2 | x_1 | 2 | 1 | -1/2 | 3/2 | 0 | -1/2 |
| $c_j - z_j$ | | | 0 | -4 | -1 | 0 | -1 |
| $\min\{\sigma_j/\alpha_{ij} \alpha_{ij} < 0\}$ | | | | 8/5 | | | 2 |

| | | | | | | | |
|-------------------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $c_j \rightarrow$ | | | -2 | -3 | -4 | 0 | 0 |
| C_B | X_B | b | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 |
| -3 | x_2 | 2/5 | 0 | 1 | -1/5 | -2/5 | 1/5 |
| -2 | x_1 | 11/5 | 1 | 0 | 7/5 | -1/5 | -2/5 |
| $c_j - z_j$ | | | 0 | 0 | -3/5 | -8/5 | -1/5 |

$b_i \geq 0, \sigma_j \leq 0$ 得到最优解为：

$$X^* = (11/5, 2/5, 0, 0, 0)^T$$

对偶问题最优解为：

$$Y^* = (y_1^*, y_2^*)^T = (8/5, 1/5)^T$$

原问题松弛变量的检验数的相反数就是对偶问题的最优解。

对偶单纯形法的特点

(i) 原问题可以从非可行解开始（即初始解可以是非可行解），在构造出单位矩阵时，不需要加人工变量，简化计算

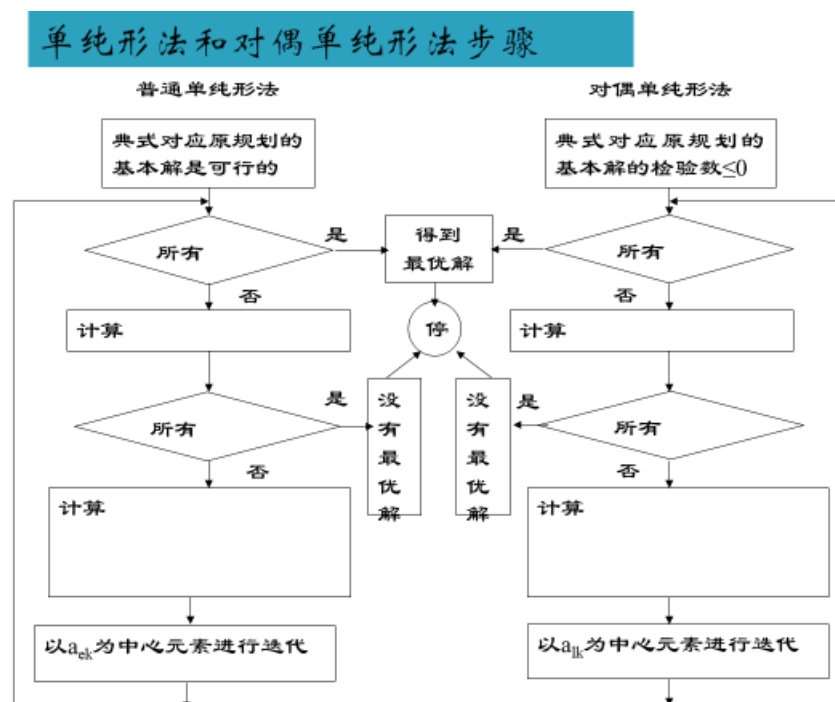
(ii) 变量多，约束条件少的问题，在迭代过程中计算工作量少。因此，可以把变量少，约束条件多的 LP 问题转化成变量多，约束条件少的对偶问题，再用对偶单纯形法计算

(iii) 灵敏度分析和整数规划长借助于对偶单纯形法分析，使问题处理简单

对偶单纯形法的局限性

1> 很难找到初始可行基，很少单独使用

2> 初始单纯性表的检验数行很难满足小于或等于 0 的要求，即满足检验数行对应的对偶问题的解是可行解



六、

当获得排列阵初始基并构成初始单纯形表时，若互补基本解既非原始可行又非对偶可行，则可交替使用两种单纯形法，先把单纯形表化成原始可行或对偶可行，然后再按原始单纯形法或对偶单纯形法继续迭代，直到求解结束。此即交替单纯形法。