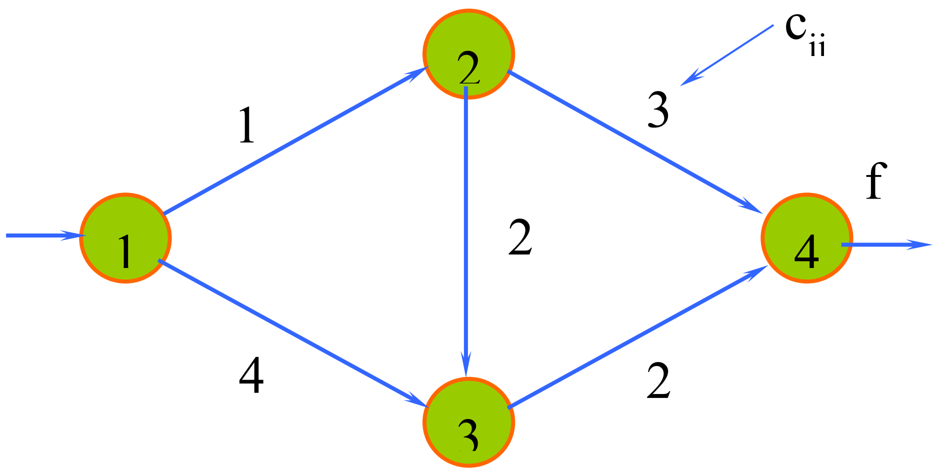
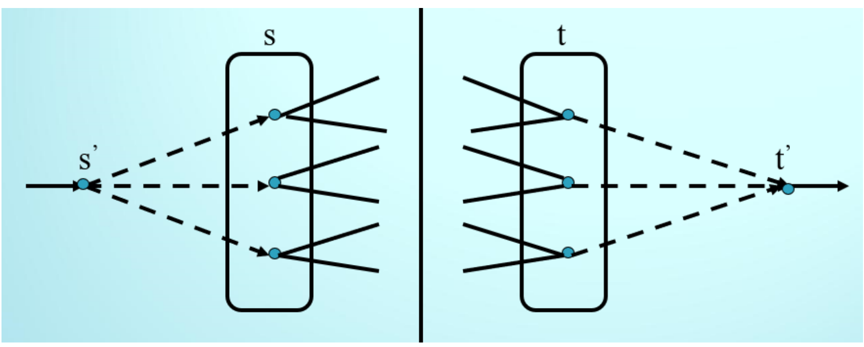
1、最大流问题：在网络图中指定一个源节点和一个汇节点，源节点的供应量为f，汇节点的需求量为f，图中其他节点均为中转节点。图中各边(i,j)流量的下界$L_{ij}=0$，上界$C_{ij}>0$。对于一个给定的图，各节点流入、流出的流量保持平衡，各边上的流量为非负且不超过相应边的流量上界，求通过图的最大流量f的问题就是网络最大流问题。



现实中的许多系统都存在各种各样的流，如公路系统中的车辆流、水利系统中的水流、电力系统中的电流、生产系统中的产品流、金融系统中的货币流、服务系统中的顾客流、信息系统中的信息流等。

2、我们一般只研究有一个发点和一个收点的网络，对于有多个发点和多个收点的网络，可以另外虚设一个总发点和总收点，并将其分别于各收点、各发点连接起来，就可以转换称一个只有一个收点和一个发点的网络。



3、基本概念

（1）网络流：是指在一定条件下通过一个网络的某种流在各边上的流量的集合。

这里的一定条件指的是：

①. 网络上有一个始点V_s和一个终点V_t

②. 通过网络的流量有一定的方向，一般用有向网络$N=(V,A)$加以描述，各弧的方向就是流量通过的方向。

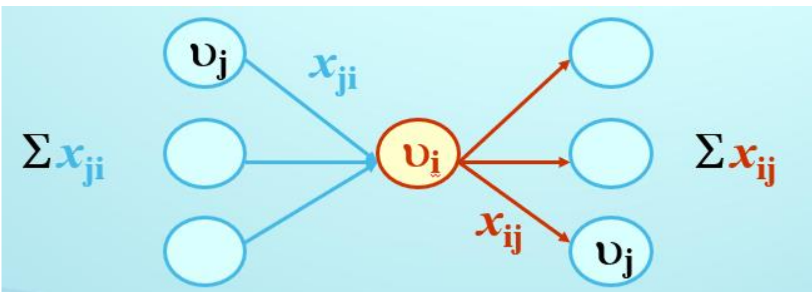
③. 对于每一个弧$(V_i,V_j)\in A$，都赋予一个容量$r\left(V_i,V_j\right)=r_{ij}$或$c_{ij}$，表示允许通过该弧的最大流量。

在一个网络$N=(V,A)$中，设以$x_{ij}=x(v_i,v_j)$表示通过弧$(v_i,v_j)\in A$的流量，则集合$X=\{x_{ij}|(v_i,v_j)\in A\}$称为该网络的一个流。其流量记为$f=f(X)$

（2）可行流：满足下列条件的流称为可行流

①弧流量限制条件：$0\le x_{ij}\le r_{ij}(c_{ij})$，$(v_i,v_j)\in A$

②中间点平衡条件：$\sum x_{ij}-\sum x_{ji}=0$，$i\neq s,t$，这意味着每个中间点的净贮流量为 0，即每个中间点的流入量必须等于流出量，二者必须平衡。



（3）最大流：流量最大的可行流称为最大流，即为$X^*=\{x_{ij}{}^*\}$，其流量记为$f^*=f(X^*)$

最大流问题的线性规划模型

$$\max f = f(X)$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} f, i = s \\ 0, i \neq s \\ -f, i = t \end{cases} \\ 0 \le x_{ij} \le r_{ij}, \qquad (v_i, v_j) \in A \end{cases}$$

可行流恒在，比如$X_0 = \{x_{ij} = 0 | (v_i, v_j) \in A\}$就是一个可行流，称为零流，其流量$f(X_0) = 0$

(4) 链的前向弧和后项弧

设μ是网络N中的一条从V_s到V_t的一条链，则链μ与链的方向一致的弧称为前向弧，其集合为μ^+，链μ与链的方向相反的弧称为后向弧，其集合为μ^-

（5）增广链

设$X = \{x_{ij}\}$是一可行流，μ是网络N中的一条从V_s到V_t的一条链，若μ上各弧流量满足下述条件：$\begin{cases} x_{ij} > 0, (v_i, v_j) \in \mu^- & \text{非零流弧} \\ x_{ij} \le r_{ij}\ , (v_i, v_j) \in \mu^+ & \text{非饱和弧} \end{cases}$

则称μ是关于一条可行流X的增广链，记为$\mu(X)$

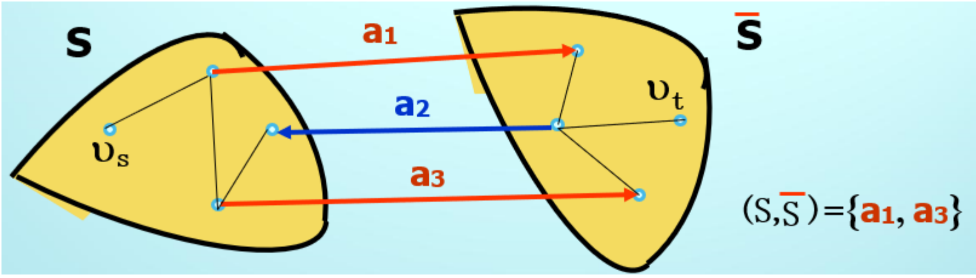
（6）截集

①$S \cup \bar{S} = V, V_s \in S$　　　　　$S \cap \bar{S} = \emptyset, V_t \in \bar{S}$

②S中各点不须经由$\bar{S}$中的点而均连通

$\bar{S}$中的点也不须经由S中的点而均连通

则把始点在S中而终点在$\bar{S}$中的一切弧所构成的集合，称为一个分离V_s和V_t的截集，记为$(S, \bar{S})$



（7）截量　　　$r(S,\bar{S})=\sum_{(V_i,V_j)\in(S,\bar{S})} r_{ij}$

（8）最小截集　在网络 N 中，容量最小的截集称为最小截集，记为 $(S^*,\bar{S}^*)$

4、两个定理

①流量-截集定理

在网络$N=(V,A)$中，设$X=\{x(u,v)|u,v\in V\}$是任一可行流，$(S,\bar{S})$是任一截集，$f(X)\le r(S,\bar{S})$

②增广链调整法

设$X=\{x_{ij}\}$是$N=(V,A)$中的一个可行流，$\mu=V_sV_1V_2\ldots V_k\ldots V_t$是关于$X$的一条增广链

③最大流的充要条件

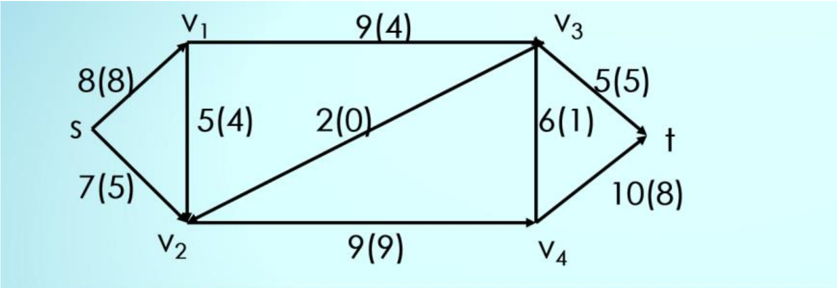
设$X^*=\{x_{ij}{}^*\}$是网络$N=(V,A)$的一个可行流，则X^*为最大流的充要条件是：网络N中不存在增广链$\mu(X^*)$。

④最大流量-最小截量定理

网络中从V_s到V_t的最大流的流量等于分离V_s和V_t的最小截集的截量。

即若 X^*为一最大流，$(S^*,\bar{S}^*)$为一最小截集，则有$f(X^*)=r(S^*,\bar{S}^*)$

截集与可行流无关，而只与网络本身有关，最小截量是个定值



V	$\overline{V}$	截集	截集的容量
s	v_1,v_2,v_3,v_4,t	(s,1) (s,2)	15
s, v_1	v_2,v_3,v_4,t	(s,2) (1,2) (1,3)	21
s, v_2	v_1, v_3,v_4,t	(s,1) (2,4)	17
s, v_1,v_2	v_3,v_4,t	(1,3) (2,4)	18
s, v_1, v_3	v_2,v_4,t	(s,2) (1,2) (3,2) (3,t)	19
s, v_2,v_4	v_1, v_3,t	(s,1) (4,3) (4,t)	24
s, v_1,v_2,v_3	v_4,t	(2,4) (3,t)	14
s, v_1,v_2, v_4	v_3,t	(1,3) (4,3) (4,t)	25
s, v_1,v_2,v_3,v_4	t	(3,t) (4,t)	15

5、用**标号法**（福特-富尔克逊标号法）求网络最大流问题

从某一可行流X（如零流）出发，按一定规则找出一条增广链，并按增广链调整法调整X,得到一个流量增大θ的新可行流X'。重复上述做法直到找不出增广链为止,这时就得到一个最大流，同时还得到一个最小截集。

基本步骤：

前源点

当前最大可调整量

（1）给始点V_s标号$(0,\infty)$，则V_s已标号待检查

（2）取一个已标号待检查的点V_i，对所有与V_i相邻而未标号的点V_j依次判断、执行如下手续：

①若关联V_j与 V_i的弧为(V_i,V_j)，则当该弧上的流量$x_{ij} < r_{ij}$ 时，给V_j标号$(V_i,b(V_j))$，其中

$$b(V_j) = \min\{b(V_i), r_{ij} - x_{ij}\}$$

表示 (V_i,V_j) 弧上的流量的最大可调整量；而当$x_{ij} = r_{ij}$时，不给 V_j标号。

②若关联V_j与V_i的弧为(V_j,V_i)则当该弧上的流量$x_{ji}>0$ 时，给V_j标号$(-V_i,b(V_j))$，其中

$$b(V_j)=\min\{b(V_i),x_{ji}\}$$

而当$x_{ji}=0$时，不给 V_j标号。

当所有与V_i相邻而未标号的点V_j都执行完上述手续后，就给点V_i打√，表示对它已检查完毕。

（3）重复(2)，可能出现两种结果：

① 终点V_t得到标号。则从V_t回溯标号点的第一个标号，就能找出一条由标号点和相应的弧连接而成的从V_s到V_t 的增广链$\mu(X)$，转到第(4)步；

② 所有标号点均已打√（检查过），而V_t又未得标号。这说明不存在增广链，而当前的可行流即最大流，算出其流量，停止。

（4）取调整量 $\theta=b(V_t)$(即终点V_t的第二个标号)，令

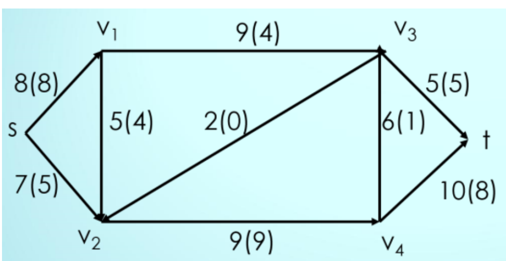
$$x_{ij}=x_{ij}+\theta,\qquad 对一切(V_i,V_j)\in\mu^+$$

$$x_{ij}=x_{ij}-\theta,\qquad 对一切(V_i,V_j)\in\mu^-$$

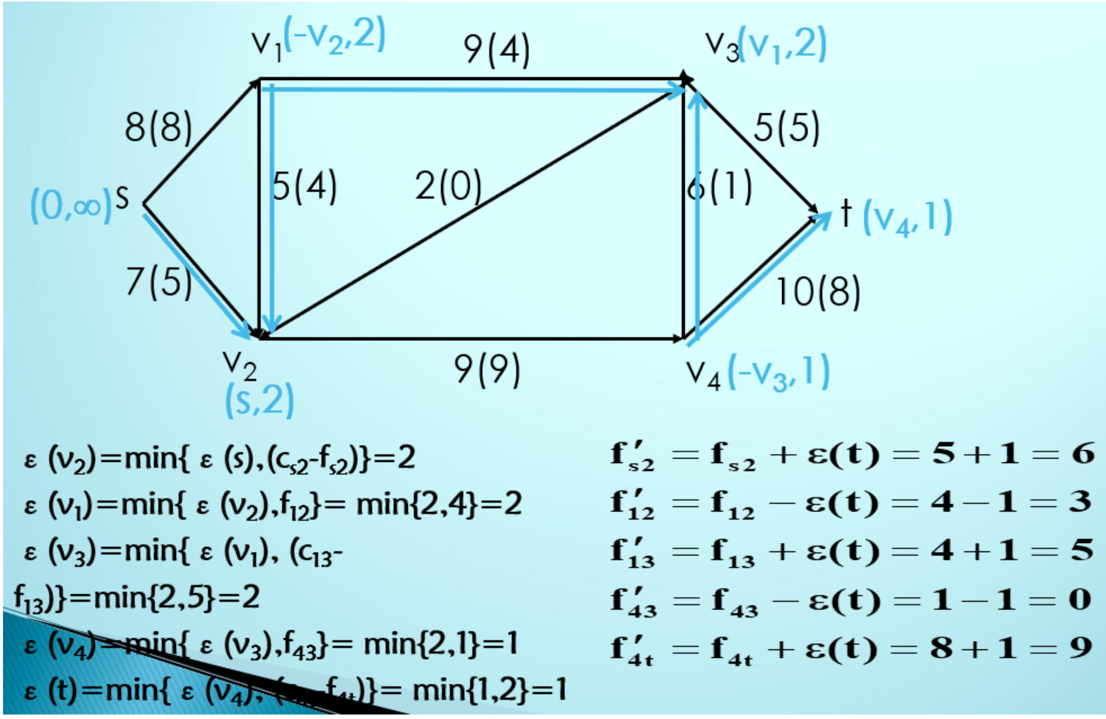
非增广链上的各弧流量x_{ij}不变。

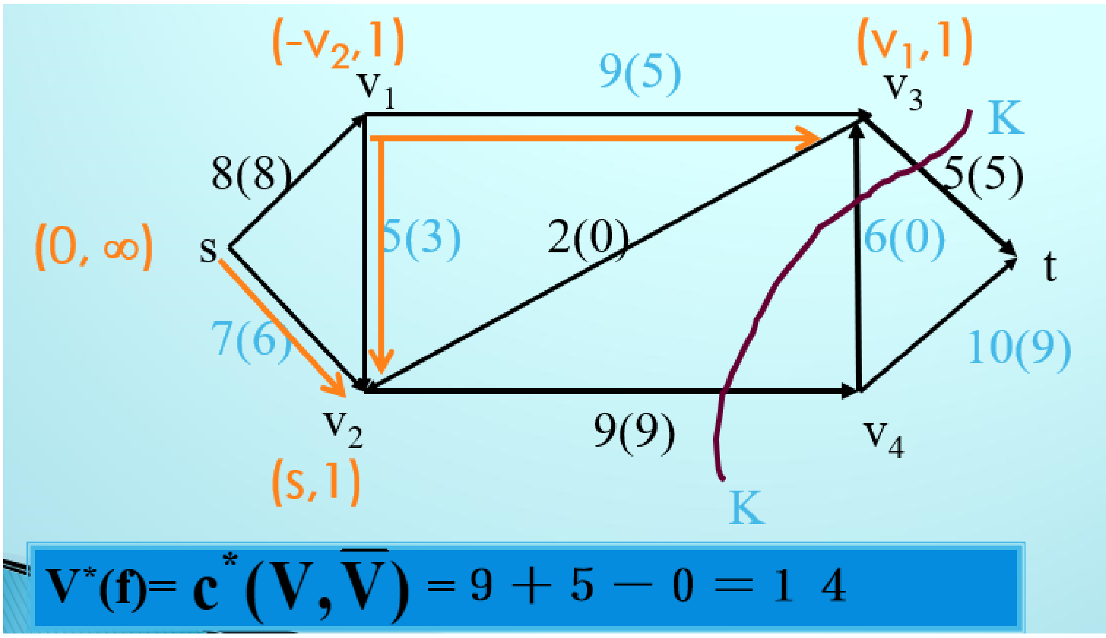
（5）删除网络中原有一切标号，返回 第（1）步

6、例：用标号法求下图中 s→t 的最大流量，并找出该网络的最小割集.



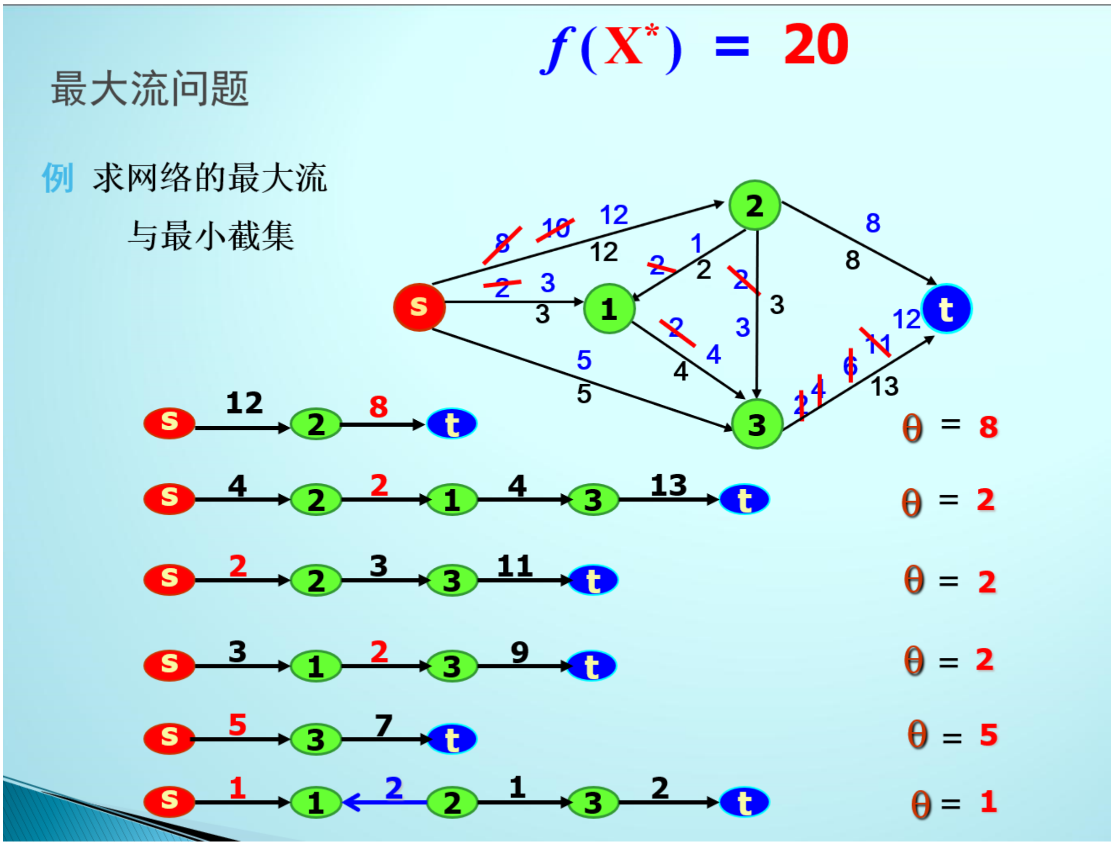
解：





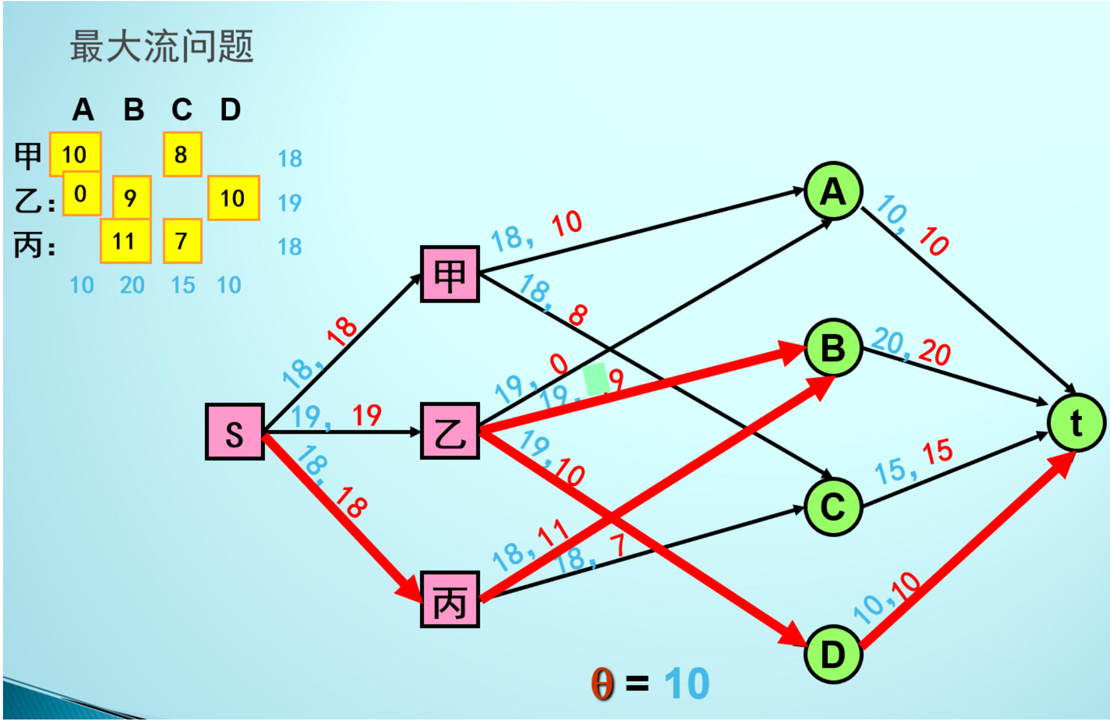
（与分割线相交线的流量之和）

7、



8、分配问题

	A	B	C	D	加工件数
甲	√		√		18
乙	√	√		√	19
丙		√	√		18
需求量	10	20	15	10	55


最大流问题
A B C D
甲 10 8 18
乙: 0 9 10 19
丙: 11 7 18
10 20 15 10
S
甲
乙
丙
A
B
C
D
t
18, 18
19, 19
18, 18
18, 10
18, 8
19, 0
19, 9
19,10
18,11
18, 7
10, 10
20, 20
15, 15
10,10
θ = 10