1、线性规划解的概念

（1）可行解：满足 LP 问题所有约束条件的一组变量的取值，可行解的集合称为可行域

（2）最优解：满足目标要求的可行解（使目标函数达到最优的可行解）

（3）基本解：只适用于标准形 LP 问题（M）

（4）基本可行解：满足非负性约束的基本解，对于基本(可行)解而言，若有一个或多个基变量取值为 0，则称其为一个退化的基本(可行)解，否则为非退化的。

基(矩阵)：AX=b，设 B 为 A 的一个 m 阶子矩阵，若|B|≠0，则称 B 为约束方程组 AX=b 或标准形 LP 问题（M）的一个基(矩阵).

例如：$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 4 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ a1 & a2 & a3 & a4 & a5\end{pmatrix}$，A 包含 x1, x2, x3, x4, x5 五个列向量，可取 B_0=（a3, a4, a5）为基（$|B|_0\neq 0$），这时称 a3, a4, a5 为基向量，a1, a2 为非基向量，称 x3, x4, x5 为基变量，x1, x2 为非基变量

基本可行解对应的基，称为可行基；

最优基本解对应的基，称为最优基。

如：基 B_0=(a3, a4, a4)为可行基，对应$X_0=(0，0，8，12，36)^T$可行

基 B_1=(a2, a3, a4)为非可行基，对应$X_1=(0,9,8,-6,0)^T$*不可行*

基 B_2=(a1, a2, a3)为最优基，对应$X_2=(4,6,4,0,0)^T$为最优解

2、单纯形法的基本定理

定理 1　如果线性规划问题存在可行解，则可行域是凸集（凸集中任

意两点连线上的点都在凸集中）

定理 2　线性规划问题的基本可行解与可行域的顶点是一一对应的

定理 3　线性规划问题如果存在最优解，一定存在一个基本可行解是最优解

基于上述三个定理，单纯形法的基本思路是：首先找到线性规划问题的一个基本可行解，对其最优性进行判断，如果不是最优解，则设法转换成另一个基本可行解。反复重复以上步骤，一直找到最优解为止

3、定理 1　若线性规划问题存在可行域，则其可行域是凸集

引理 1　线性规划问题的可行解为基本可行解的充要条件是 X 的正分量所对应的系数列向量是线性独立的

定理 2　线性规划问题的基本可行解对应于可行域 D 的顶点

定理 3　若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上到达最优。

4、单纯形法的计算步骤

（1）把 LP 问题化为标准形

（2）在系数阵中找出或构造一个 m 阶排列阵作为初始可行基，建立初始单纯性表

（3）最优性检验：若所有的检验数 $\sigma_j \leq 0$，就得到一个最优基本解，停止计算；否则转（4）

（4）解无界判断：在所有 $\sigma_j>0$ 中，只要有一个 $\sigma_r>0$ 所对应的系数向量 $a_r \leq 0$，即一切 $a_{ir} \leq 0$，$i=1,2,\cdots,m$

则该 LP 问题解无界，停止计算；否则转（5）

（5）确定主元

1. 先按最大检验数规则，$\max\{\sigma_j | \sigma_j > 0\} = \sigma_k$，确定进基变量 x_k 和主列 a_k；

2. 再按最小比值规则，$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\middle|a_{ik} > 0\right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$ 确定主元 a_{lk}，同时也就确定第 l 行的基变量 x_r 离基。

（6）以 a_{lk} 为主元对当前表格进行一次换基运算，得到一个新单纯性表，返回（3）

5、在填写单纯型表时，当所有检验数都≤0，非基变量的检验数为 0 时，目标函数有无穷多最优解。在所有检验数>0 的列，只要有一个检验数大于 0 的列所对应的系数向量中有一个<0 的数，则目标函数有无界解。

6、单纯形法的扩展人工变量法（大 M 法，两阶段法）

在实际问题中有些模型并不含有单位矩阵，为了得到一组基向量和初始基可行解，在约束条件的等式左端加一组虚拟变量，得到一组基变量，这种人为加入的变量称为人工变量，构成的可行基称为人工基，用大 M 法或两阶段法，这种用人工变量作桥梁的求解方法称为人工变量法。

因为人工变量是后加入到原约束条件中的虚拟变量，要求经过基变换将它们从基变量中逐个替换出来，但加入人工变量的数学模型与未加人工变量的数学模型一般是不等价的，一般情况下关于这一点有以下结论：

(1)加入人工变量的线性规划用单纯形方法得到最优解中，人工

变量处在非基变量位置。

(2)最优解中，人工变量可能在基变量中，但取值为零，则可以求出原问题的最优解。若最优解中包含有非零的人工变量，则原问题无可行解。

迭代中，人工变量一旦出基后，不会再入基，所以当某个人工变量 R_k 出基后，对应第 k 列的系数可以不再计算，以减少计算量。

大 M 法

在一个线性规划问题的约束条件中加进人工变量后，要求人工变量对目标函数取值不受影响；为此假定人工变量在目标函数中的系数为(-M)　(M 为任意大的正数)，这样目标函数要实现最大化时，必须把人工变量从基变量换出。否则目标函数不可能实现最大化。

例题：

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + \qquad\quad x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + \qquad\quad x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

下面用单纯形法，将人工变量替换出去，得到最优解

两阶段法

用大 M 法解含有人工变量的线性规划问题时，若用计算机处理，只能用很大的具体数据来代替 M，这就可能造成计算上的错误。两阶段法引入人工变量的目的和大 M 法相同，将人工变量从基变量中换出，以求出原问题的最优解。不同的是处理人工变量的方法。

对于上述例题用两阶段法求解，第一阶段辅助函数的目标函数是 $min_{\omega} = x_6 + x_7$，约束条件一样，用单纯形法求解此函数的值，将人工变量逐步、全部换出。判断是否进入第二阶段，进入第二阶段使用第一阶段最终的单纯表，将目标函数换成初始的目标函数即可。

（两阶段法的步骤：求解一个辅助线性规划。目标函数取所有人工变量之和，并取极大值（或人工变量相反值的和并取极小化）；约束条件为原问题中引入人工变量后包含一个单位矩阵的标准型的约束条件。如果辅助线性规划存在一个基本可行解，使目标函数的最小值等于零，则所有人工变量都已经“离基”。表明原问题已经得了一个初始的基本可行解，可转入第二阶段继续计算；否则说明原问题没有可行解，可停止计算。求原问题的最优解。在第一阶段已求得原问题的一个初始基本可行解的基础上，继续用单纯形法求原问题的最优解）

7、当线性规划问题的基本可行解中有一个或者多个基变量取零

值时，称此基本可行解为退化解。产生的原因：在单纯形法计算中用最小比值原则确定换出变量时，有时存在两个或两个以上相同的最小比值 0，那么在下次迭代中就会出现一个甚至多个基变量等于 0，这就出现了退化。

几种退化的情况：（1）退化解可能是最优的，并可求出此退化最优解（2）退化解不是最优的，而继续进行迭代时，这种退化消失了，最终得到非退化的最优解（3）有最优解，但从退化解开始，再继续迭代时到某一步有重复出现前面单纯性表格而形成一种循环现象，这样永远得不到最优解，循环的是一种退化群，耽美达到最优，称为循环退化群。一般的退化常有，而循环极其罕见。

特殊情况：当出现退化时，进行多次迭代，而基 $B_1, B_2, \cdots$有返回到 B_1，即出现计算过程的循环，便永远达不到最优解。

解决办法：勃兰特规则[<1>选取检验数大于 0 中下标最小的非基变量 x_k 为换入变量<2>选择出基变量：当按最小比值规则计算存在两个和两个以上最小比值时，选取下标最小的基变量为换出变量]

8、关于解的判别

唯一最优解的判断：最优表中所有非基变量的检验数非 0，则 LP 问题有唯一最优解

多重最优解的判断：最优表中存在非基变量的检验数为 0，则 LP 问题具有多重最优解。

无界解的判断：对于 max 问题，若某个 $\sigma_k>0$ 且 $a_{ik}\leqslant 0(i=1,2,\cdots m)$ 则 LP 问题具有无界解

无可行解的判断：（1）当用大 M 法得到最优解并且存在人工变量 $R_i\neq 0$ 时，则原 LP 问题无可行解；

（2）两阶段法中，当第一阶段的最优值 $w\neq 0$ 时，则原 LP 问题无可行解

退化基可行解的判断：存在某个基变量为 0 的基可行解

作业1.8：用单纯形法求解某极大化问题的单纯形表如下，问表中参数a_1,a_2,a_3,d,c_1,c_2为何取值范围时，下列结论成立。

	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_3	d	4	a_1	1	0	a_2	0
	x_4	2	-1	-3	0	1	-1	0
	x_6	3	a_3	-5	0	0	-4	1
Z			c_1	c_2	0	0	-3	0

（1）表中解为唯一最优解；　$c_1<0$ ，$c_2<0$ ，$d\geq 0$

（2）表中解为多重最优解之一；　$c_1\leq 0$, $c_2\leq 0$, $d\geq 0$, $c_1\cdot c_2=0$

（3）该问题有无界解；　$d\geq 0$, $c_2>0$, $a_1\leq 0$

（4）表中解为退化的基解；　$d=0$

（5）表中解为不可行解；　$d<0$

（6）尚未得到最优解，以x_1代换x_6。　$c_1>0$ ，$c_1\geq c_2$ ，$d\geq 0,$ $d/4>3/a_3$ ，$a_3>0$

9、单纯形法小结

（1）根据实际问题给出数学模型；加入松弛变量或剩余变量，进行标准化；再加入人工变量，化为典式；最后列出初始单纯性表。

变量	$x_j \geqslant 0$ $x_j \leqslant 0$ x_j无约束	不需要处理 令$x'_j=-x_j, x'_j \geqslant 0$ 令$x_j=x'_j-x''_j$ ； x'_j，$x''_j \geqslant 0$
约束条件	$b \geqslant 0$ $b<0$ $\leqslant$ $=$ $\geqslant$	不需要处理 约束条件两端同乘-1 加松弛变量 加人工变量 减去剩余（松弛）变量，加人工变量
目标函数	max z min z 加入的变量: 松弛或剩余变量 人工变量	不需要处理 令$z'=-z$,求max z' 目标函数中加入变量的系数: 0 -M(max) M(min)

(2)对目标函数求 max 的线性规划问题，用单纯形法计算。