1、整数规划（Integer Programming）：变量取整数的线性规划

纯整数规划：所有变量都取整数的线性规划

混合整数规划：部分变量取整数的线性规划

0-1 规划：所有变量都去 0、1 两个值的规划

0-1 混合规划：部分变量取 0、1 两个值的规划。

2、投资决策问题

设有 n 个投资项目，其中第 j 个项目需要资金a_j万元，将来可获利润c_j万元。若现在资金总额为 b 万元，则应该选择哪些投资项目，才能获利最大？

设$x_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ 1 表示第 j 个项目投资，0 表示不会对第 j 个项目投资

设 z 为可获得的总利润（万元），则数学模型为

$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1,\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

3、设备购置问题

某厂拟用 M 元资金，购买 m 种设备$A_1, A_2, \ldots, A_M$，其中设备A_i单价为p_i（i=1,2,⋯,m）。现有 n 个地点$B_1, B_2, \ldots, B_M$可装置这些设备，其中B_j处最多b_j台（j=1,2,⋯,n）。预计将一台设备A_i装备于B_i处可获纯利C_{ij}元，则应该如何购置这些设备，才能使预计总利润为最大？

解：设x_{ij}为将设备A_i装备于B_j处的台数，y_i为购买设备A_i的台数，z 为预计的总利润。

数学模型为

$$\max z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-y_i\le 0, i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le b_j, j=1,2,\dots,n\\ \sum_{i=1}^{m}p_iy_i\le M\\ x_{ij}\ge 0, y_i\ge 0, 且均为整数\end{cases}$$

4、工厂选址问题

某种商品有 n 个销地，各销地的需求量分别为b_j吨/天，j =1，2，・・・，n。现拟在 m 个地点中选址建厂，来生产这种产品以满足供应，且规定一址最多只能建一个工厂。若选 i 址建厂，将来生产能力为a_i 吨/天，固定费用为d_i 元/天，i=1，2，・・・，m. 已知 i 址至销地 j 的运价为c_{ij}元/吨。应如何选择厂址和安排调运，使总的费用最少？

解：设x_{ij}是从厂址 i 到销地 j 的运量（吨/天）

Z 是总费用，$y_i=\begin{cases}1, 在i址建厂\\ 0，不建厂\end{cases}$

该问题的数学模型是

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}d_iy_i$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i y_i, i = 1,2,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,\dots,m \\ x_{ij} \ge 0 \\ y_i = 0 \text{ 或 } 1\end{cases}$$

5、在整数规划问题中，无论是根据图解法还是单纯形法，最后求出的结果很多都不是整数，在实际问题中，绝对不存在“半个工厂”，因此，要将最优解化为整数。整数规划的方法一般有分支定界法和割平面法。

6、分支定界法主要分四步进行。

第一步：放宽条件，具体做法是，首先删去整数条件，把原整数规划成相应的线性规划，其次求解相应的线性规划。

（1）如果相应的线性规划没有可行解，则原整数规划也没有可行解，则停止。

（2）如果相应线性规划有最优解，且符合原整数规划问题的整数条件，则这个最优解也是原整数规划的最优解，那么整个计算过程结束。

（3）如果线性规划有最优解，但不符合原整数规划问题的整数条件，则这个最优解不是原整数规划的最优解。转入第二步。

第二步：分支，具体做法是从相应线性规划的最优解中，任意选择一个不满足原整数规划整数条件的决策变量$x_j = b_j$，以使相应线性规划增加一个约束条件；x_j小于b_j的最大整数（或x_j大于b_j的最小整数），因而得到两个新的线性规划称为分支，也称为后继问题。列出两分支各自的数学模型，计算每支的最优解和最优值。经过分支之后，就有

如下结论：分支后并没有减少整数解，故原整数规划的可行域真包含于两支可行域的并集，原整数规划的最优解不大于两支最优值的最大值。

第三步：定界，具体做法是，以每个后继问题为一分支标明求解的结果，与其他问题的解的结果中，找出最优目标函数值最大者作为新的上界$\bar{z}$，从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界$\underline{z}$，若无可行解，则 z=0。

第四步：比较与剪支，各分支的最优函数若有小于$\underline{z}$者，则剪掉这支，即以后不再考虑了，若有大于$\underline{z}$，但不符合整数条件，则继续分支，一直到最后得到$z^* = \underline{z}$为止，得最优整数解$x_j{}^*$，$j = 1, \dots, n$。

用分支定界法可解纯整数线性规划问题和混合整数线性规划问题，他比穷举法优越。因为他仅在一部分可行解的整数解中寻求最优解，计算量比穷举法小，若变量数目很大，其计算工作量也是相当可观的。

例题：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且均取整数值} \end{cases}$$

第一步，放宽---剔除整数约束，得整数规划的松弛问题L_0如下：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

图解法可得L_0的最优解为（3.25，2.5），$z^* = 14.75$，转第二步。

得到两个线性规划模型L_1和L_2

$$\boxed{L_1} \qquad \max z = 3x_1+2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \leq 4.5 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{L_2} \qquad \max z = 3x_1+2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \leq 4.5 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

L_1的最优解为（3.5，2），$z_1 = 14.5$

L_2的最优解为（2.5，3），$z_2 = 13.5$，其中，$z_1 > z_2$，对L_1继续分支

得到两个线性规划模型L_{11}和L_{12}

$$\boxed{L_{11}} \qquad \max z = 3x_1+2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \leq 4.5 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

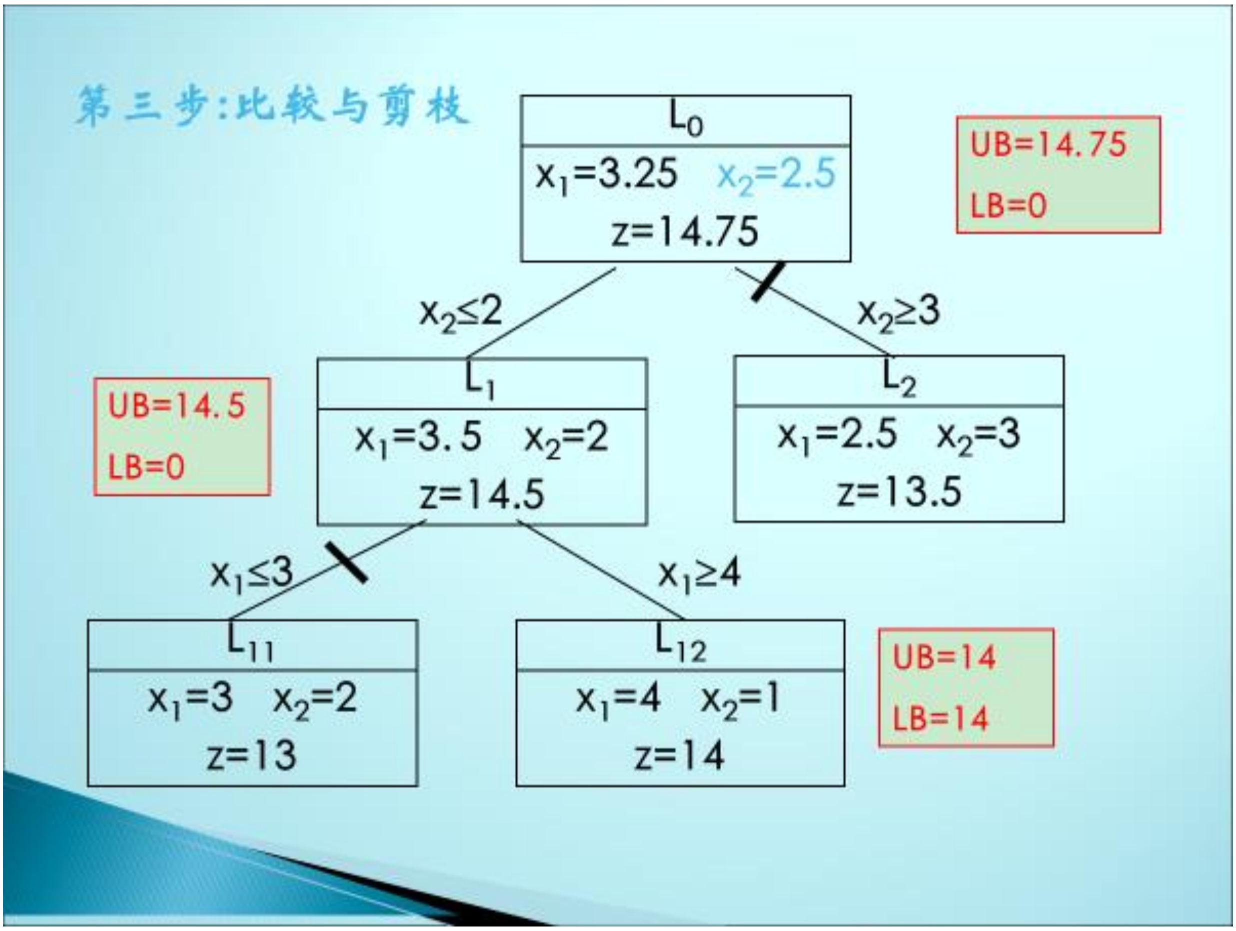
$$\boxed{L_{12}} \qquad \max z = 3x_1+2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \leq 4.5 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

L_{11}的最优解为(3, 2)，$z_{11} = 13$

L_{12}的最优解为(4, 1)，$z_{12} = 14$，其中$z_{11} < z_{12}$，因为L_2的最优解为

（2.5，3），$z_2 = 13.5, z_2 < z_{12}$，因此不必再对L_2进行分支，所以，L_{12}的解为最优解.



7、割平面法

基本思想：先不考虑变量的取整数约束，求解相应的线性规划，然后不断增加线性约束条件（即割平面），将可行域割掉不含整数可行解的一部分，最终得到一个具有整数坐标顶点的可行域，而该顶点恰好是原整数规划问题的最优解。

割平面法的计算步骤分为 3 步。

第一步，用单纯形法求解（整数规划 IP）对应的松弛问题（线性规划 LP):【在引入系数之前应该适当调整系数和常数，是引入的系数也都为整数】

（1）若 LP 没有可行解，则 IP 也没有可行解

（2）若 LP 有最优解，并符合 IP 的整数条件，则 LP 的最优解即为 IP 的最优解，停止计算

（3）若 LP 有最优解，但不符合 IP 的整数条件，转入下一步。

第二步，从 LP 的最优解中，任选出一个不为整数的分量x_r，将最优单纯性表中该行的系数a_{rj}'和b_r'分解为整数部分和非负真分数部分之和，并以该行为源行，按下式做割平面方程：

$$f_r - \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj}x_j \le 0$$

f_r为b_r'的非负真分数部分，f_{rj}为a_{rj}'的非负真分数部分。

第三步，将所得的割平面方程，作为一个新的约束条件，置于最优单纯性表中（同时增加一个单位列向量），用对偶单纯形法求出新的最优值，返回第一步。

例题：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ x_1, x_2 \ge 0, \textit{且均取整数值} \end{cases}$$

解：首先要把文中的所有约束条件的系数均化为整数，由$x_1 + 0.5x_2 \le 4.5$化成$2x_1 + x_2 \le 9$

最终单纯性表为：

			x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_2	5/2	0	1	1/2	-1/2
3	x_1	13/4	1	0	-1/4	3/4
	c_j-z_j		0	0	-1/4	-5/4

则有，$x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=\frac{5}{2}$，根据规则调整成

$$x_2+\left(0+\frac{1}{2}x_3\right)+(-1+\frac{1}{2})x_4=(2+\frac{1}{2})$$

$$x_2-x_4-2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4$$

则有$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\le 0$，---------$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4+x_5=0$

将新的得到的公式加入约束条件中得，

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$s.t.\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=14\\2x_1+x_2+x_4=9\\-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4+x_5=-\frac{1}{2}\\x_i\ge 0,\textit{且均取整数值}\end{cases}$$

			2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_2	$2\frac{1}{2}$	0	1	1/2	-1/2	0
3	x_1	$3\frac{1}{4}$	1	0	-1/4	3/4	0
0	x_5	-1/2	0	0	[-1/2]	-1/2	1
	c_j-z_j		0	0	-1/4	-5/4	0

用对偶单纯形法迭代，得到最终表为：

2	x_2	2	0	1	0	-1	1/2
3	x_1	$3\frac{1}{2}$	1	0	0	1	-1/2
0	x_3	1	0	0	1	1	-2
	c_j-z_j		0	0	0	-1	-1/2

重复第一步至第三步一直到找出问题的整数最优解为止

$x_1+x_4-\frac{1}{2}x_5=3\frac{1}{2}$ ----→ $x_1+x_4-x_5-3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_5$ -----→ $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_5\le 0$--→$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_5+x_6=0$, 加入到约束条件中

$$\max z=3x_1+2x_2$$

$$s.t.\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=14\\ 2x_1+x_2+x_4=9\\ -\dfrac{1}{2}x_3-\dfrac{1}{2}x_4+x_5=-\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}x_5+x_6=-\dfrac{1}{2}\\ x_i\ge 0,\text{且均取整数值}\end{cases}$$

			2	3	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_2	2	0	1	0	-1	1/2	0
3	x_1	$3\frac{1}{2}$	1	0	0	1	-1/4	0
0	x_3	1	0	0	1	1	-1	0
0	x_6	-1/2	0	0	0	0	[-1/2]	1
	c_j-z_j		0	0	0	-1	-1/2	0

通过对偶单纯形法求解，得到

2	x_2	1	0	1	0	-1	0	2
3	x_1	4	1	0	0	1	0	-1
0	x_3	3	0	0	1	1	0	-4
0	x_5	1	0	0	0	0	1	-2
	c_j-z_j		0	0	0	-1	0	-1

因此，最优整数解为（x_1,x_2）=(4, 1), 函数的最优值为 14

8、Gomery 的切割法自 1958 年被剔除后，即引起人们的广泛注意，但至今完全用他解题的仍是少数，原因就是经常遇到收敛很慢的情形，但若和其它方法（如分支定界法）配合使用，也是有效的。