KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ

Nguyễn Văn Thìn

BỘ MÔN THỐNG KÊ TOÁN HỌC
KHOA TOÁN - TIN HỌC
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Tháng 2 năm 2016

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Outline

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Outline

1 Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê
2 Kiểm định tham số
- Kiểm định hợp lý
3 Kiểm định giả thuyết cho trường hợp một mẫu
4 Kiểm định giả thuyết cho trường hợp hai mẫu độc lập
5 So sánh hai mẫu không độc lập
6 Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê
Những nội dung chính

- Định nghĩa giả thuyết thống kê
- Giả thuyết không và đối thuyết
- Cách đặt giả thuyết
- Miền bác bỏ - Tiêu chuẩn kiểm định
- Sai lầm loại I và loại II
- p - giá trị

Định nghĩa

Định nghĩa 1

- Giả thuyết thống kê là một phát biểu về phân phối của một hoặc nhiều biến ngẫu nhiên.
- Một giả thuyết thống kê, nếu đúng, xác định một hàm phân phối xác suất được gọi là giả thuyết đơn. Ngược lại, nó được gọi là giả thuyết hợp.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Định nghĩa 2

- Phép kiểm định cho một giả thuyết thống kê là một quy tắc sao cho ứng với mỗi bộ số liệu nhận được từ mẫu, ta nhận được một quyết định chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết khảo sát.
- Miền bác bỏ của một phép kiểm định là tập các bộ số liệu mẫu mà phép kiểm định bác bỏ giả thuyết thống kê.

Nhận xét 3

- Một phép kiểm định sẽ xác định miền bác bỏ, và ngược lại,
- một cách chọn miền bác bỏ cho ta xác định một phép kiểm định.
- Điều này có nghĩa là các từ "phép kiểm định" và "miền bác bỏ" có thể thay thế nhau.

Định nghĩa

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Định nghĩa 4

Trong bài toán kiểm định giả thuyết, giả thuyết cần được kiểm định gọi là Giả thuyết không (null hypothesis), ký hiệu là H_0. Mệnh đề đối lập với H_0 gọi là đối thuyết (alternative hypothesis), ký hiệu là H_1.

Nhận xét 5

- Không có một nguyên tắc chung nào cho việc chọn một giả thuyết thống kê làm giả thuyết không và một giả thuyết khác làm đối thuyết.
- Thông thường, người ta có khuynh hướng chấp nhận giả thuyết không trừ phi có bằng chứng thuyết phục chống lại nó.

Sai lầm loại I và loại II

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Quyết định \ Thực tế	H_0 đúng	H_0 sai
Không bác bỏ H_0	Không có sai lầm	Sai lầm loại II
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I	Không có sai lầm

Với một phép kiểm định xác định bởi miền bác bỏ $R \subset \mathbb{R}^n$ cho bài toán kiểm định giả thuyết không $H_0 : \theta \in \Theta_0$ so với đối thuyết $H_1 : \theta \in \Theta_1$, người ta tìm cách đánh giá các nguy cơ sai lầm.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ

Nguyễn Văn Thìn

Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Định nghĩa 6

Với mỗi $\theta' \in \Theta$, giá trị

$$K_R(\theta') = P((X_1, X_2, \dots, X_n) \in R | \theta = \theta')$$

được gọi là *năng lực* của phép kiểm định tại θ'. Hàm số

$$\begin{aligned} K_R : \Theta &\to \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto K_R(\theta) \end{aligned}$$

được gọi là *hàm năng lực* của phép kiểm định cho bởi miền bác bỏ R. Giá trị

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} K_R(\theta)$$

được gọi là *mức ý nghĩa* của phép kiểm định (hay là *kích thước* miền bác bỏ tương ứng).

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ

Nguyễn Văn Thìn

Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Outline

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ

Nguyễn Văn Thìn

Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Kiểm định tham số

Trong phần này, ta khảo sát mô hình tham số $\mathcal{F} = \{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$, nghĩa là xét một tổng thể có hàm mật độ xác suất phụ thuộc vào tham số θ lấy giá trị trong miền tham số $\Theta \subset \mathbb{R}^k$.

Các phép kiểm định

- Kiểm định tối ưu (mạnh nhất, best test)
- Kiểm định tối ưu đều (mạnh đều nhất, uniformly most powerful test)
- Kiểm định tỷ số hợp lý
- Kiểm định hợp lý

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ

Nguyễn Văn Thìn

Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Định nghĩa 7

Cho C là một tập con của không gian các dữ liệu mẫu. C được gọi là miền bác bỏ tối ưu kích thước α để kiểm định giả thuyết đơn $H_0 : \theta = \theta'$ so với đối thuyết đơn $H_1 : \theta = \theta''$ nếu

(a) $P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in C | H_0] = \alpha$, và
(b) $P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in C | H_1] \geq P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in A | H_1]$, với mọi tập con A của không gian các dữ liệu mẫu sao cho $P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in A | H_0] = \alpha$.

Nhận xét 8

- Điều kiện (a) nói rằng kích thước của miền bác bỏ là α.
- Điều kiện (b) nói rằng trong các miền bác bỏ có kích thước α, ta chọn miền nào có năng lực của phép kiểm định tại $\theta = \theta''$ là lớn nhất.

Định lí 9 (Neyman-Pearson)

Xét mẫu ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lấy từ tổng thể có hàm mật độ xác suất $f(x;\theta)$. Với θ' và θ'' là hai tham số phân biệt của θ và với số dương k cho trước; gọi C là một tập con của không gian số liệu mẫu sao cho

(a) $\dfrac{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta')}{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta'')} \le k$, *với mọi điểm* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C$,

(b) $\dfrac{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta')}{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta'')} > k$, *với mọi điểm* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin C$,

(c) $\alpha = P[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C | H_0]$.

Ta có C là một miền bác bỏ tối ưu kích thước α kiểm định giả thuyết đơn $H_0 : \theta = \theta'$ so với đối thuyết đơn $H_1 : \theta = \theta''$.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Nhận xét 10

- Ba điều kiện (a-c) không chỉ là điều kiện đủ mà còn là điều kiện cần để C là miền bác bỏ tối ưu kích thước α.
- Với mỗi $k > 0$, tập C tất cả các điểm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa
$$\frac{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta')}{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta'')} \le k,$$
đều là một miền bác bỏ tối ưu.
- Giá trị k được xác định từ điều kiện (c).

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Nhận xét 11

- Nếu H_0 là giả thuyết đơn xác định hàm mật độ đồng thời trên mẫu ngẫu nhiên là $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và đối thuyết đơn H_1 xác định hàm mật độ đồng thời $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, thì C là miền bác bỏ tối ưu kích thước α của phép kiểm định H_0 so với H_1 khi, với $k > 0$,

  (a') $\dfrac{g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta')}{h(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta'')} \le k$, với mọi điểm $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C$,

  (b') $\dfrac{g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta')}{h(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta'')} > k$, với mọi điểm $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin C$,

  (c') $\alpha = P[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C | H_0]$.
- Giả thuyết đơn H_0 và H_1 không nhất thiết phải là các giả thuyết liên quan đến các tham số của phân phối cũng như không nhất thiết các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ phải là độc lập từng đôi.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Định nghĩa 12

Miền bác bỏ C được gọi là một *miền bác bỏ tối ưu đều* kích thước α để kiểm định giả thuyết đơn H_0 so với đối thuyết hợp H_1 nếu tập C là miền bác bỏ tối ưu kích thước α để kiểm định H_0 so với từng giả thuyết đơn lấy từ H_1. Một phép kiểm định tương ứng với miền bác bỏ C như thế được gọi là *một kiểm định tối ưu đều* kích thước α để kiểm định giả thuyết đơn H_0 so với giả thuyết đối phức hợp H_1.

Cho biết

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là n biến ngẫu nhiên độc lập từng đôi, lần lượt có hàm mật độ xác suất $f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m), i = 1, 2, \ldots, n$.
- $\Omega = \{(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)\}$ (không gian tham số)
- $\omega \subset \Omega$.

Giả thuyết cần kiểm định

$$H_0 : (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \in \omega \text{ so với mọi } H_1. \tag{1}$$

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Hàm hợp lý (mật độ đồng thời của $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$),

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m),$$

Giả sử L đạt giá trị lớn nhất trên ω và Ω và đặt

$$L(\omega) = \max_{(\theta_1,\ldots,\theta_m)\in\omega} L(\theta_1, \ldots, \theta_m) \text{ và } L(\Omega) = \max_{(\theta_1,\ldots,\theta_m)\in\Omega} L(\theta_1, \ldots, \theta_m).$$

Tỷ số hợp lý,

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda = \frac{L(\omega)}{L(\Omega)}.$$

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Phép kiểm định tỷ số hợp lý

Giả thuyết H_0 trong (1) bị bác bỏ nếu và chỉ nếu

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \le \lambda_0.$$

Giá trị $\lambda_0 < 1$ được xác định từ mức ý nghĩa:

$$\alpha = P[\lambda(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le \lambda_0 | H_0]$$

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Phép kiểm định hợp lý

Xét $Y = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là một thống kê trên mẫu ngẫu nhiên mà phân phối xác suất của nó được hoàn toàn xác định khi giả thuyết không H_0 đúng. Miền bác bỏ kích thước α của phép kiểm định hợp lý được xác định bởi phần bù của khoảng tin cậy R của thống kê Y, khi H_0 đúng, ở độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$, trong đó khoảng tin cậy R được chọn một cách "hợp lý" tùy vào đối thuyết H_1.

- Phép kiểm định dùng khoảng tin cậy $R = (a, b)$, với

$$P(Y \leq a|H_0) = P(Y \geq b|H_0) = \frac{\alpha}{2},$$

được gọi là *phép kiểm định hai bên*. Khi đó, ta bác bỏ H_0 khi $Y \leq a$ hay khi $Y \geq b$.

- Phép kiểm định dùng khoảng tin cậy $R = (-\infty, C)$ (hay $R = (C, \infty)$), với

$$P(Y \geq C|H_0) = \alpha \text{ (hay } P(Y \leq C|H_0) = \alpha)$$

được gọi là *phép kiểm định một bên*. Khi đó, ta bác bỏ H_0 khi $YgleC$ (hay khi $Y \leq C$).

- Y được gọi là *thống kê kiểm định*.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

p - giá trị (p - value)

Định nghĩa 13

Tương ứng với một giá trị thống kê kiểm định tính trên một mẫu các giá trị quan trắc xác định, p - giá trị là mức ý nghĩa nhỏ nhất dùng để bác bỏ giả thuyết H_0.

Dựa vào đối thuyết H_1, các bước tính p-giá trị như sau:

1. Xác định thống kê kiểm định: TS. Tính giá trị thống kê kiểm định dựa trên mẫu $(x_1, \ldots, x_n)$, giả sử bằng a.
2. p-giá trị cho bởi

$$p = \begin{cases} \mathbb{P}(|TS| > |a||H_0), & \text{kiểm định hai phía} \\ \mathbb{P}(TS < a|H_0), & \text{kiểm định một phía - bên trái} \\ \mathbb{P}(TS > a|H_0), & \text{kiểm định một phía - bên phải} \end{cases} \quad (2)$$

Kết luận: Bác bỏ giả thuyết H_0 nếu p-giá trị $\leq \alpha$.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Outline

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Kiểm định giả thuyết cho trường hợp một mẫu

Nội dung chính

- Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
  - Trường hợp biết phương sai,
  - Trường hợp không biết phương sai, mẫu nhỏ,
  - Trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn.
- Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ chưa biết.
  - Phương sai σ^2 đã biết.
  - Cho trước giá trị μ_0, cần so sánh kỳ vọng μ với μ_0.
- **Bài toán kiểm định có 3 trường hợp:**

$$(a)\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
TH biết σ^2

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ và tính thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{3}$$

4. Xác định miền bác bỏ W_α: bảng 1

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
TH biết σ^2

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : \lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}\right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 < -z_{1-\alpha}\right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 > z_{1-\alpha}\right\}$

Bảng 1: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
TH biết σ^2

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

- **Sử dụng *p*-giá trị (p - value):** tính p-giá trị dựa theo đối thuyết và kết luận bác bỏ H_0 khi p -giá trị $\leq \alpha$, với mức ý nghĩa α cho trước. Công thức tính p - giá trị theo các trường hợp xem ở bảng 2.

Giả thuyết	p - giá trị
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$p = 2\left[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)\right]$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$p = \Phi(z_0)$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

Bảng 2: p-giá trị với đối thuyết tương ứng

Ví dụ 14 (Kiểm định 2 phía)

Dây chuyền sản xuất kem đánh răng P/S được thiết kế để đóng hộp những tuýt kem có trọng lượng trung bình là 6 oz (1 oz = 28g). Một mẫu gồm 30 tuýt kem được chọn ngẫu nhiên để kiểm tra định kỳ. Bộ phận điều khiển dây chuyền phải đảm bảo để trọng lượng trung bình mỗi tuýt kem là 6 oz; nếu nhiều hơn hoặc ít hơn, dây chuyền phải được điều chỉnh lại.
Giả sử trung bình mẫu của 30 tuýt kem là 6.1 oz và độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể $\sigma = 0.2$ oz.
Thực hiện kiểm định giả thuyết với mức ý nghĩa 3% để xác định xem dây chuyền sản xuất có vận hành tốt hay không?

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Gọi X là trọng lượng của một tuýt kem đánh răng, giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, 0.2^2)$. Các bước kiểm định như sau:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 6 \\ H_1 : \mu \neq 6 \end{cases}$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.03$
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{6.1 - 6.0}{0.2/\sqrt{30}} = 2.74$$

4. Xác định miền bác bỏ: Bác bỏ H_0 khi $|z_0| > z_{1-\alpha/2}$

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

$\alpha = 3\%$ nên $z_{1-\alpha/2} = z_{0.985} = 2.17$. Vậy bác bỏ H_0 nếu

$$z_0 < -2.17 \quad \text{hoặc} \quad z_0 > 2.17$$

5. Kết luận: do $z_0 = 2.74 > 2.17$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi tuýt kem không bằng 6.

- **Sử dụng p - giá trị:**

4a. Tính p-giá trị, bài toán kiểm định hai phía

$$p = 2[1 - \Phi(|z_0|)] = 2[1 - \Phi(2.74)] = 2[1 - 0.9969] = 0.0062$$

5a. Kết luận: với $\alpha = 0.03$, ta có $p = 0.0062 < 0.03$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi tuýt kem không bằng 6.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Ví dụ 15 (Kiểm định một phía)

Metro EMS: Một bệnh viện tại trung tâm thành phố cung cấp dịch vụ cấp cứu tại nhà. Với khoảng 20 xe cấp cứu, mục tiêu của trung tâm là cung cấp dịch vụ cấp cứu trong khoảng thời gian trung bình là 12 phút sau khi nhận được điện thoại yêu cầu. Một mẫu ngẫu nhiên gồm thời gian đáp ứng khi có yêu cầu của 40 ca cấp cứu được chọn. Trung bình mẫu là 13.25 phút. Biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể là $\sigma = 3.2$ phút. Giám đốc EMS muốn thực hiện một kiểm định, với mức ý nghĩa 5%, để xác định xem liệu thời gian một ca cấp cứu có bé hơn hoặc bằng 12 phút hay không?

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
TH biết σ^2

Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết
   $H_0 : \mu = 12$: Thời gian đáp ứng của dịch vụ cấp cứu đạt yêu cầu, không cần phải thay đổi.
   $H_1 : \mu > 12$: Thời gian đáp ứng của dịch vụ không đạt yêu cầu, cần thay đổi.
2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - 12}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{13.25 - 12}{3.2/\sqrt{40}} = 2.47$$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
TH biết σ^2

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 nếu $z_0 > z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.645$
5. Kết luận: $z_0 = 2.47 > 1.645$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận rằng với 95% độ tin cậy, Mertro EMS không đáp ứng được mục tiêu thời gian phục vụ khách hàng từ 12 phút trở xuống.

- **Sử dụng p - giá trị:**

4a. Tính p-giá trị, bài toán kiểm định một phía - bên phải

$$p = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(2.47) = 1 - 0.9932 = 0.0068$$

5a. Kết luận: với $\alpha = 0.05$, ta có $p = 0.0068 < 0.05$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 95% độ tin cậy rằng Metro EMS không đáp ứng được mục tiêu thời gian phục vụ khách hàng từ 12 phút trở xuống.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
TH không biết σ^2, mẫu nhỏ

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 không biết.
  - Sử dụng ước lượng S thay cho σ.
  - Cỡ mẫu nhỏ: $n \leq 30$.
- **Bài toán kiểm định có 3 trường hợp:**

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
TH không biết σ^2, mẫu nhỏ

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ và tính thống kê kiểm định

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (4)$$

   Biến ngẫu nhiên T_0 có phân phối Student với $n - 1$ bậc tự do.
4. Xác định miền bác bỏ W_α: bảng 3

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{t_0 : \lvert t_0\rvert > t^{n-1}_{1-\alpha/2}\right\}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \left\{t_0 : t_0 < -t^{n-1}_{1-\alpha}\right\}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \left\{t_0 : t_0 > t^{n-1}_{1-\alpha}\right\}$

Bảng 3: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng (trường hợp mẫu nhỏ)

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

- **Sử dụng *p*-giá trị (p - value):** tính *p*-giá trị dựa theo đối thuyết và kết luận bác bỏ H_0 khi p -giá trị $\leq \alpha$, với mức ý nghĩa α cho trước. Công thức tính p - giá trị theo các trường hợp xem ở bảng 4.

Giả thuyết	p - giá trị
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$p = 2\mathbb{P}(T_{n-1} \geq \lvert t_0\rvert)$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \leq t_0$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \geq t_0)$

Bảng 4: p-giá trị với đối thuyết tương ứng (trường hợp mẫu nhỏ)

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có kỳ vọng μ và phương sai σ^2 không biết.
  - Sử dụng ước lượng không chệch S thay cho σ.
  - Cỡ mẫu lớn: $n > 30$.
- Khi cỡ mẫu lớn biến ngẫu nhiên

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{5}$$

sẽ hội tụ về phân phối chuẩn hóa $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Khi đó miền bác bỏ W_α hoặc p-giá trị sẽ được tính tương tự như trường hợp biết phương sai, chỉ thay thế $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ bằng Z_0 ở phương trình (5).

Ví dụ 16

Trạm cảnh sát giao thông trên đường cao tốc sẽ thực hiện việc bắn tốc độ định kỳ tại các địa điểm khác nhau để kiểm tra tốc độ của các phương tiện giao thông. Một mẫu về tốc độ của các loại xe được chọn để thực hiện kiểm định giả thuyết sau

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 65 \\ H_1 : \mu > 65 \end{cases}$$

Những vị trí mà bác bỏ H_0 là những vị trí tốt nhất được chọn để đặt radar kiểm soát tốc độ.
Tại địa điểm F, một mẫu gồm tốc độ của 64 phương tiện được bắn tốc độ ngẫu nhiên có trung bình là 66.2 mph và độ lệch tiêu chuẩn 4.2 mph. Sử dụng $\alpha = 5\%$ để kiểm định giả thuyết.

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng TH không biết σ^2

- Các bước kiểm định:
  1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 65 \\ H_1 : \mu > 65 \end{cases}$$

  2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$
  3. Tính giá trị thống kê kiểm định khi σ^2 không biết và cỡ mẫu $n = 64$ (lớn)

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{66.2 - 65}{4.2/\sqrt{64}} = 2.286$$

  4. Xác định miền bác bỏ: Bác bỏ H_0 khi $z_0 > z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.645$

Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng TH không biết σ^2

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

5. Kết luận: $z_0 = 2.286 > 1.645$ nên bác bỏ H_0, ta kết luận với 95% độ tin cậy rằng tốc độ trung bình tại địa điểm F lớn hơn 65 mph. Địa điểm F là địa điểm tốt để đặt radar kiểm soát tốc độ.

- **Sử dụng *p*-giá trị:**

4a. Tính p-giá trị:
Với $z_0 = 2.286$, $p = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(2.286) = 0.0111$

5a. Kết luận: $p = 0.0111 < 0.05$ nên bác bỏ H_0, ta kết luận với 95% độ tin cậy rằng tốc độ trung bình tại địa điểm F lớn hơn 65 mph. Địa điểm F là địa điểm tốt để đặt radar kiểm soát tốc độ.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

- **Bài toán:**

Cho tổng thể X, trong đó tỷ lệ phần tử mang đặc tính A nào đó là trong tổng thể là p (p chưa biết). Từ mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hãy kiểm định

$$(a) \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α.

- Giả định:
  - Cỡ mẫu n lớn; để phân phối chuẩn xấp xỉ phân phối nhị thức tốt cần có $np_0 \geq 5$ và $n(1 - p_0) \geq 5$.

Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

- Quan sát sự xuất hiện của biến cố "phần tử mang đặc tính A" trong n phép thử độc lập. Gọi Y là số lần xuất hiện biến cố trên thì $Y \sim B(n, p)$. Và

$$\hat{P} = \frac{Y}{n}$$

là một ước lượng không chệch cho p.

- Nếu H_0 đúng, thống kê

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

có phân phối chuẩn hóa $\mathcal{N}(0, 1)$. Chọn Z_0 làm tiêu chuẩn kiểm định.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

4. Xác định miền bác bỏ: bảng 5

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : \lvert z_0\rvert > z_{1-\alpha/2}\right\}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 < -z_{1-\alpha}\right\}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 > z_{1-\alpha}\right\}$

Bảng 5: Miền bác bỏ cho bài toán kiểm định tỷ lệ

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Sử dụng *p*-giá trị: *p*-giá trị tính tương tự như bảng 2.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Ví dụ 17

Trong kỳ nghỉ giáng sinh và đầu năm mới, Cục An toàn giao thông đã thống kê được rằng có 500 người chết và 25000 người bị thương do các vụ tại nạn giao thông trên toàn quốc. Theo thông cáo của Cục ATGT thì khoảng 50% số vụ tai nạn có liên quan đến rượu bia. Khảo sát ngẫu nhiên 120 vụ tai nạn thấy có 67 vụ do ảnh hưởng của rượu bia. Sử dụng số liệu trên để kiểm định lời khẳng định của Cục An toàn giao thông với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$.

Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5 \\ H_1 : p \neq 0.5 \end{cases}$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.5(1-0.5}{120}} = 0.045644$$

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{(67/120) - 0.5}{0.045644} = 1.28$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $|z_0| > z_{0.975} = 1.96$ hoặc tính *p*-giá trị

$$p = [(1-\Phi(z_0)] = 2[1-\Phi(1.28)] = 2(1-0.8977) = 0.2006$$

5. Kết luận: do $z_0 = 1.28 < 1.96$ (hoặc $p = 0.2006 > 0.05$) nên kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Outline

Kiểm định giả thuyết cho trường hợp hai mẫu độc lập

Nội dung chính

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

- So sánh hai kỳ vọng
  - Trường hợp biết phương sai
  - Trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn
  - Trường hợp không biết phương sai, mẫu nhỏ
    - So sánh hai phương sai
    - Trường hợp $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$
    - Trường hợp $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- So sánh hai tỉ lệ

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp biết phương sai

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

• Các giả định:

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2.
- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 2 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2.
- Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
- Các phương sai σ_1^2 và σ_2^2 đã biết.

• Bài toán kiểm định giả thuyết trên hai mẫu độc lập gồm các dạng sau:

$$(a)\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp biết phương sai

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Tính thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \tag{6}$$

thống kê $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

4. Xác định miền bác bỏ

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp biết phương sai

Miền bác bỏ và p-giá trị tương ứng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	p **- giá trị**
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p = \Phi(z_0)$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha)100\%$ độ tin cậy. Ngược lại ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với α cho trước.

So sánh hai kỳ vọng

Ví dụ 18

Một công ty sản xuất sơn nghiên cứu về 1 loại phụ gia làm giảm thời gian khô của sơn. Thực hiện thí nghiệm trên 2 mẫu: mẫu thứ nhất gồm 10 mẫu vật được sơn bằng loại sơn bình thường; mẫu thứ hai gồm 10 mẫu vật được sơn với sơn có chất phụ gia mới. Trong những nghiên cứu trước, biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của thời gian khô sau khi quét sơn là 8 phút và không thay đổi khi thêm phụ gia vào. Trung bình của mẫu 1 và 2 lần lượt là $\bar{x} = 121$ phút và $\bar{y} = 112$ phút. Với mức ý nghĩa 5%, hãy cho kết luận về loại sơn với chất phụ gia mới.

1. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 & \text{chất phụ gia mới không có hiệu quả} \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 & \text{chất phụ gia mới có hiệu quả} \end{cases}$$

2. Mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$

So sánh hai kỳ vọng

3. Tính giá trị thống kê kiểm định, với $\bar{x} = 121$, $\bar{y} = 112$ và $\sigma_1 = \sigma_2 = 8$ ta có

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y} - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{121 - 112}{\sqrt{\frac{8^2}{10} + \frac{8^2}{10}}} = 2.52$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $z_0 > z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.65$.
5. Kết luận: Ta có $z_0 = 2.52 > 165$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận rằng với 95% độ tin cậy, chất phụ gia có hiệu quả làm giảm thời gian khô sau khi sơn.

5a. **Sử dụng** p **- giá trị**: ta có $p = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(2.52) = 0.0059 < 0.05$ nên bác bỏ H_0.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn

- Các giả định:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2 không biết.
  - $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 2 có kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2 không biết.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Cỡ mẫu lớn: $n > 30$ và $m > 30$.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn

- Đối với trường hợp mẫu lớn, khi phương sai tổng thể σ_1^2 và σ_2^2 không biết, ta thay thế bằng các phương sai mẫu S_1^2 và S_2^2 mà không tạo ra nhiều khác biệt.
- Khi cả $n > 30$ và $m > 30$, đại lượng

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n} + \dfrac{S_2^2}{m}}} \qquad (7)$$

sẽ xấp xỉ phân phối chuẩn hóa $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Miền bác bỏ (hoặc p - giá trị) trong trường hợp này được tính tương tự như trường hợp biết phương sai (thay thế σ_1 và σ_2 bởi S_1 và S_2).

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn

Ví dụ 19

Khảo sát về chiều cao của sinh viên hai khoa Toán và CNTT: chọn ngẫu nhiên 50 sinh viên khoa Toán, tính được chiều cao trung bình là 163 (cm) và độ lệch tiêu chuẩn 5 (cm). Đo chiều cao 50 khoa CNTT, có trung bình mẫu là 166 (cm) và độ lệch tiêu chuẩn 8 (cm). Với mức ý nghĩa $\alpha = 1\%$, hãy cho kết luận về chiều cao của sinh viên hai khoa.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai, mẫu nhỏ

- Các giả định:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2 không biết.
  - $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 2 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2 không biết.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Cỡ mẫu nhỏ: $n \leq 30$ hoặc $m \leq 30$.
- Ta xét hai trường hợp:
  1. Trường hợp phương sai bằng nhau $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,
  2. Trường hợp phương sai khác nhau $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

So sánh hai phương sai

- Giả sử $X_1, \ldots, X_n$ và $Y_1, \ldots, Y_m$ lần lượt là hai mẫu ngẫu nhiên chọn từ hai tổng thể độc lập và có phân phối chuẩn với kỳ vọng và phương sai là (μ_1, σ_1^2) và (μ_2, σ_2^2). Ta cần kiểm định giả thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases} \qquad (8)$$

- Nếu S_1^2 là phương sai mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ thì

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad (9)$$

tương tự, ta có

$$\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$$

So sánh hai phương sai

- Khi đó, đại lượng

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \tag{10}$$

sẽ có phân phối $\mathcal{F}$ với $(n-1, m-1)$ bậc tự do.

- Xét biến ngẫu nhiên $F \sim \mathcal{F}(u, v)$ có hàm mật độ xác suất là $f(x)$, phân vị trên mức α của F là $f_{\alpha,u,v}$ được định nghĩa như sau

$$\mathbb{P}(F > f_{\alpha,u,v}) = \int_{f_{\alpha,u,v}}^{\infty} f(x)dx = \alpha \tag{11}$$

- Phân vị dưới mức $1-\alpha$ của F cho bởi

$$f_{1-\alpha,u,v} = \frac{1}{f_{\alpha,u,v}} \tag{12}$$

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

So sánh hai phương sai

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ và đối thuyết $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Khi H_0 đúng, thống kê

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \tag{13}$$

có phân phối $\mathcal{F}$ với $(n-1, m-1)$ bậc tự do.
4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $F > f_{\alpha/2,n-1,m-1}$ hoặc $F < f_{1-\alpha/2,n-1,m-1}$
5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha) * 100\%$ độ tin cậy. Ngược lại kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

So sánh hai kỳ vọng, mẫu nhỏ, trường hợp $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

- Trường hợp $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, ta sử dụng một ước lượng chung cho cả σ_1^2 và σ_2^2 là S_p^2 gọi là phương sai mẫu chung (pooled sample variance)

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2} \tag{14}$$

- Thống kê

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \tag{15}$$

có phân phối Student với $n+m-2$ bậc tự do

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

So sánh hai kỳ vọng, mẫu nhỏ, trường hợp $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

- Đặt $df = n+m-2$, miền bác bỏ và p - giá trị trong trường hợp này có dạng

Đối thuyết	Miền bác bỏ	p - giá trị
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$\lvert t_0\rvert > t_{1-\alpha/2}^{df}$	$p = 2\mathbb{P}(T_{df} \geq \lvert t_0\rvert)$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$t_0 < -t_{1-\alpha}^{df}$	$p = \mathbb{P}(T_{df} \leq t_0)$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$t_0 > t_{1-\alpha}^{df}$	$p = \mathbb{P}(T_{df} \geq t_0)$

- Kết luận: Bác bỏ H_0/Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

So sánh hai kỳ vọng, mẫu nhỏ, trường hợp $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Khi $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, sử dụng thống kê

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \tag{16}$$

- Khi đó T_0 có phân phối Student với bậc tự do df được xác định như sau

$$df = \frac{\left[(s_1^2/n) + (s_2^2/m)\right]^2}{\frac{(s_1^2/n)^2}{n-1} + \frac{(s_2^2/m)^2}{m-1}} \tag{17}$$

- Miền bác bỏ trong trường hợp này giống như trường hợp phương sai bằng nhau, chỉ thay bậc tự do df cho bởi phương trình (17).

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Ví dụ 20

Tại một thành phố, ở khu vực A, người ta chọn ngẫu nhiên 17 sinh viên và cho làm 1 bài kiểm tra để đo chỉ số IQs, thu được trung bình mẫu là 106 và độ lệch tiêu chuẩn bằng 10; tại khu vực B, chỉ số IQs trung bình của một mẫu gồm 14 sinh viên bằng 109 với độ lệch tiêu chuẩn là 7. Giả sử phương sai bằng nhau. Có sự khác biệt về chỉ số IQs của sinh viên ở hai khu vực A và B hay không? $\alpha = 0.02$.

So sánh hai kỳ vọng, trường hợp không biết phương sai

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Ví dụ 21

Hàm lượng thạch tín (Asen) (Đv: ppb) trong nước càng cao càng có hại cho sức khỏe. Người ta kiểm tra hàm lượng thạch tín ở hai khu vực là trung tâm thành phố Biên Hòa và khu vực gần sân bay Biên Hòa. Tại mỗi khu vực, người ta đo ngẫu nhiên hàm lượng thạch tín trong nước ứng với 10 địa điểm khác nhau. Số liệu cho bởi bảng thống kê bên dưới

Trung tâm TP	3	7	25	10	15	6	12	25	15	7
Khu vực gần sân bay	48	44	40	38	33	21	20	12	1	18

Với $\alpha = 0.05$, hãy kiểm tra xem có sự khác biệt về hàm lượng thạch tín ở hai khu vực này.

So sánh hai tỷ lệ

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

- Khảo sát những phần tử thỏa một tính chất A nào đó trên hai tổng thể độc lập với tỷ lệ tương ứng là p_1 và p_2; từ hai tổng thể chọn ra hai mẫu với cỡ lần lượt là n và m. Gọi X và Y là số phần tử thỏa tính chất A trong mẫu 1 và mẫu 2. Khi đó, ta có $X \sim B(n, p_1)$ và $Y \sim B(m, p_2)$.
- Bài toán: so sánh tỷ lệ p_1 và p_2.
- Bài toán kiểm định giả thuyết gồm các trường hợp sau:

$$(a)\begin{cases} H_0: p_1 - p_2 = D_0 \\ H_1: p_1 - p_2 \neq D_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0: p_1 - p_2 = D_0 \\ H_1: p_1 - p_2 < D_0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0: p_1 - p_2 = D_0 \\ H_1: p_1 - p_2 > D_0 \end{cases}$$

- Các giả định
  - Hai mẫu độc lập,
  - Cỡ mẫu lớn và $np_1 > 5$; $n(1-p_1) > 5$ và $mp_2 > 5$; $m(1-p_2) > 5$.

So sánh hai tỷ lệ

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Tính thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - D_0}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \quad (18)$$

với

$$\hat{P}_1 = \frac{X}{n};\ \hat{P}_2 = \frac{Y}{m};\ \hat{P} = \frac{X+Y}{n+m}$$

nếu H_0 đúng, $Z_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$.

So sánh hai tỷ lệ

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

4. Xác định miền bác bỏ

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	***p* - giá trị**
$H_1 : p_1 - p_2 \neq D_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2}$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : p_1 - p_2 < D_0$	$z_0 < -z_{1-\alpha}$	$p = \Phi(z_0)$
$H_1 : p_1 - p_2 > D_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha)100\%$ độ tin cậy. Ngược lại ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với α cho trước.

So sánh hai tỷ lệ

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Ví dụ 22

Một công ty sản xuất thuốc cần kiểm tra một loại thuốc có tác dụng là giảm việc xuất hiện cơn đau ngực ở các bệnh nhân. Công ty thực hiện thí nghiệm trên 400 người, chia làm hai nhóm: nhóm 1 gồm 200 được uống thuốc và nhóm 2 gồm 200 người được uống giả dược. Theo dõi thấy ở nhóm 1 có 8 người lên cơn đau ngực và nhóm 2 có 25 người lên cơn đau ngực. Với $\alpha = 0.05$, hay cho kết luận về hiệu quả của thuốc mới sản xuất.

Outline

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test) [1]

- Khi hai mẫu không độc lập thì mỗi giá trị quan trắc được trong một mẫu có mối liên hệ tương ứng với một giá trị quan trắc ở mẫu thứ hai. Như vậy, ta có thể ghép cặp từng giá trị trong hai mẫu với nhau.
- Việc ghép cặp là kết quả của việc
  - quan trắc giá trị trước và sau khi thực hiện 1 thí nghiệm. Chẳng hạn như đo trọng lượng trước và sau khi thực hiện một chế độ ăn kiêng.
  - so sánh cùng 1 đặc tính.
  - thí nghiệm trên cùng 1 địa điểm.
  - thí nghiệm với cùng thời gian.

[1] Phần đọc thêm

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test) [1]

- Xét (X_{1i}, X_{2i}), với $i = 1, 2, \ldots, n$, là tập gồm n cặp giá trị quan trắc với giả sử rằng kỳ vọng và phương sai của tổng thể đại diện bởi X_1 là μ_1 và σ_1^2 và kỳ vọng và phương sai của tổng thể đại diện bởi X_2 là μ_2 và σ_2^2. X_{1i} và X_{2j} $(i \neq j)$ độc lập.
- Định nghĩa độ sai khác giữa mỗi cặp trong tập hợp các giá trị quan trắc là

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}, \ i = 1, \ldots, n \tag{19}$$

- Các $D_i, i = 1, \ldots, n$ được giả sử có phân phối chuẩn.
- Gọi $\mu_D = E(D_i)$, bởi vì $D_1, \ldots, D_n$ là những biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối, nếu $d_1, \ldots, d_n$ là những giá trị của $D_1, \ldots, D_n$, ta định nghĩa

[1] Phần đọc thêm

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test) [1]

- Gọi $\mu_D = E(D_i)$, bởi vì $D_1, \ldots, D_n$ là những biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối, nếu $d_1, \ldots, d_n$ là những giá trị của $D_1, \ldots, D_n$, ta định nghĩa

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \tag{20}$$

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{d})^2 \tag{21}$$

- Ta cần kiểm định các giả thuyết và đối thuyết sau

$$(a)\begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D \neq D_0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D < D_0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D > D_0 \end{cases}$$

[1] Phần đọc thêm

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test) [1]

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Tính thống kê kiểm định

$$T_0 = \frac{\bar{D} - D_0}{S_D/\sqrt{n}} \tag{22}$$

thống kê T_0 có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.

4. Xác định miền bác bỏ

[1] Phần đọc thêm

So sánh hai mẫu không độc lập (paired t - test) [1]

Miền bác bỏ và p - giá trị trong trường hợp này có dạng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	**p - giá trị**
$H_1 : \mu_D \neq D_0$	$\lvert t_0\rvert > t^{n-1}_{1-\alpha/2}$	$p = 2\mathbb{P}(T_{n-1} \geq \lvert t_0\rvert)$
$H_1 : \mu_D < D_0$	$t_0 < -t^{n-1}_{1-\alpha}$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \leq t_0)$
$H_1 : \mu_D > D_0$	$t_0 > t^{n-1}_{1-\alpha}$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \geq t_0)$

5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha) * 100\%$ độ tin cậy. Ngược lại kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

• Trường hợp cỡ mẫu $n > 30$, bài toán kiểm định hai mẫu phụ thuộc thực hiện tương tự như trường hợp một mẫu dựa trên mẫu ngẫu nhiên $(D_1, \ldots, D_n)$.

[1] Phần đọc thêm

So sánh hai mẫu không độc lập [1]

Ví dụ 23

Một bác sĩ dinh dưỡng nghiên cứu một chế độ ăn kiêng và tập thể dục mới để làm giảm lượng đường trong máu của các bệnh nhân bị bệnh tiểu đường. 10 bệnh nhân bị bệnh tiểu đường được chọn để thử nghiệm chương trình này, bảng kết quả bên dưới cho biết lượng đường trong máu trước và sau khi các bệnh nhân tham gia chương trình

Trước	268	225	252	192	307	228	246	298	231	185
Sau	106	186	223	110	203	101	211	176	194	203

Số liệu được cung cấp có đủ bằng chứng để kết luận rằng chế độ ăn kiêng và tập thể dục có tác dụng làm giảm lượng đường trong máu không? $\alpha = 0.05$.

[1] Phần đọc thêm

Outline

Kiểm định giả thuyết về phân phối

• **Bài toán:** Khảo sát biến ngẫu nhiên X liên liên quan đến một tổng thể có phân phối chưa biết. Cần kiểm định xem phân phối của tổng thể có phải là $F(x;\theta)$ hay không? Chẳng hạn, ta cần kiểm định phân phối của tổng thể đang xét là phân phối chuẩn.

Các bước kiểm định

1. Chọn mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $(X_1, \dots, X_n)$. Chia miền giá trị của các biến ngẫu nhiên X_i thành K khoảng không trùng nhau $I_1, I_2, \dots, I_K$ (Trường hợp X là biến ngẫu nhiên rời rạc, ta chia thành K điểm: $x_1, x_2, \dots, x_K$).
2. Gọi O_j là số các giá trị mẫu nằm trong khoảng I_j $(j = 1, 2, \dots, K)$ (Trường hợp X là biến ngẫu nhiên rời rạc là tần số lặp lại của giá trị x_j). O_j gọi là các tần số thực nghiệm.
3. Phát biểu giả thuyết H_0: X tuân theo luật phân phối $F(x; \theta)$.

   Khi đó, tính $p_j = \mathbb{P}(X \in I_j)$ (hoặc $\mathbb{P}(X = x_j)$ nếu X rời rạc). Đặt $E_j = np_j$, E_j gọi là các tần số lý thuyết.

   Điều kiện: $E_j \geq 5$, $j = 1, 2, \dots, K$.

4. Thống kê kiểm định Q^2 cho bởi công thức

$$Q^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} \tag{23}$$

   Q^2 xấp xỉ phân phối χ^2 với $K - 1$ bậc tự do.

5. Bác bỏ H_0 nếu

$$Q^2 \geq \chi^2_{\alpha, K-r-1} \tag{24}$$

   với r là số tham số ước lượng. Tìm $\chi^2_{\alpha, K-r-1}$: tra bảng Chi - bình phương.

Ví dụ 24

Bảng thống kê số vụ tai nạn xe máy/ngày ở quận 5 trong 80 ngày

Số vụ tai nạn	Số ngày
0	34
1	25
2	11
3	7
4	3

Với mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm tra xem số vụ tai nạn xe máy hàng ngày có tuân theo luật phân phối Poisson hay không?

1. Gọi X = số vụ tai nạn xe máy/ngày ở Q.5; phát biểu giả thuyết

   H_0 : X tuân theo luật phân phối Poisson với tham số λ

2. Tính các tần số thực lý thuyết $E_j, j = 1, \dots, 5$.
   $E_j = np_j = n\mathbb{P}(X = x_j)$. Nếu $X \sim P(\lambda)$, các xác suất p_j được tính như sau

$$p_j = \mathbb{P}(X = x_j) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_j}}{x_j!}$$

   Do λ chưa biết nên ta sử dụng ước lượng của λ là

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} O_i x_i = 1$$

Kiểm định giả thuyết về phân phối

3. Xác suất và kết quả tính tần số lý thuyết cho ở bảng bên dưới

$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	$E_i = np_i$
$p_1 = \frac{e^{-1}1^0}{0!} = 0.368$	29.44
$p_2 = \frac{e^{-1}1^1}{1!} = 0.368$	29.44
$p_3 = \frac{e^{-1}1^2}{2!} = 0.184$	14.72
$p_4 = \frac{e^{-1}1^3}{3!} = 0.061$	4.88
$p_5 = 1 - \sum_{i=1}^{4} p_i = 0.019$	1.52

4. Tính thống kê Q^2,

$$Q^2 = \sum_{j=1}^{5} \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} = \frac{(34 - 29.44)^2}{29.44} + \ldots + \frac{(3 - 1.52)^2}{1.52} = 4.67$$

Kiểm định giả thuyết về phân phối

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

5. Bác bỏ H_0 khi:

$$Q^2 \geq \chi^2_{\alpha, K-r-1} = \chi^2_{0.05, 5-1-1}$$

Tra bảng, ta có $\chi^2_{0.05,3} = 7.815$.

6. Do $Q^2 = 4.67 < 7.815$ nên kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0. Vậy, số vụ tai nạn giao thông/ ngày ở Q.5 tuân theo luật phân phối Poisson.

Kiểm định giả thuyết về phân phối

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Ví dụ 25

Điểm thi của 200 sinh viên trong một lớp học cho bởi bảng bên dưới. Có ý kiến cho rằng điểm thi của sinh viên là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với điểm trung bình bằng 75 và độ lệch chuẩn bằng 8. Với $\alpha = 0.05$, hãy kiểm tra ý kiến này.

Điểm thi	$(0, 60]$	$(60, 70]$	$(70, 80]$	$(80, 90]$	$(90, 100]$
Số sinh viên	12	36	90	44	18

Kiểm định giả thuyết về phân phối

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Ví dụ 26

Nhóm máu của 500 người chọn ngẫu nhiên từ một khu vực cho bởi bảng sau

A	B	AB	O
75	150	15	260

Theo từ điển y khoa thì tỷ lệ nhóm máu trong dân số là 0.18, 0.28, 0.05, 0.49. Hỏi nhóm máu trong dân số có phù hợp với từ điển y khoa hay không? Mức ý nghĩa 1%.

Kiểm định giả thuyết về phân phối

Ví dụ 27

Chọn 100 người bệnh tâm thần được phân loại vào mùa mà họ sinh ra, số liệu cho ở bảng sau:

Xuân	Hạ	Thu	Đông
20	35	20	25

Hỏi bệnh có phụ thuộc vào mùa được sinh ra hay không? Mức ý nghĩa 1%.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

- **Bài toán:**
  - Giả sử mỗi phần tử trong một tổng thể có thể được phân loại theo hai đặc tính khác nhau, gọi là đặc tính X và đặc tính Y. X có r giá trị và Y có s giá trị. Gọi

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

với $i = 1, \ldots, r$ và $j = 1, \ldots, s$. P_{ij} là xác suất chọn được một phần tử trong tổng thể có đặc tính X bằng i và đặc tính Y bằng j.

  - Gọi

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{s} P_{ij}, \quad i = 1, \ldots, r$$

và

$$q_j = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{r} P_{ij}, \quad j = 1, \ldots, s$$

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

p_i là xác suất chọn được một phần tử của tổng thể có đặc tính X bằng x_i, q_j là xác suất chọn được môt phần tử của tổng thể có đặc tính Y bằng y_j.

- Ta cần kiểm định xem X có độc lập với Y hay không? Phát biểu giả thuyết

$$H_0 : P_{ij} = p_i q_j \quad \forall i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s$$

và đối thuyết

$$H_1 : \exists\,(i, j) \text{ sao cho } P_{ij} \neq p_i q_j$$

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

- Khảo sát N phần tử, ta được bảng kết quả, trong bài toán này gọi là bảng ngẫu nhiên (contingency table):

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_s	Tổng hàng
x_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1s}	n_1
x_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2s}	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_r	n_{r1}	n_{r2}	$\cdots$	n_{rs}	n_r
Tổng cột	m_1	m_2	$\cdots$	m_s	N

Bảng 6:

trong đó, các n_{ij} gọi là tần số thực nghiệm.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

- Ước lượng của p_i và q_j lần lượt bằng

$$\hat{p}_i = \frac{n_i}{N}, \quad i = 1, \dots, r$$
$$\hat{q}_j = \frac{m_j}{N}, \quad j = 1, \dots, s$$

- Gọi N_{ij} là số phần tử có đặc tính (x_i, y_j) trong N phần tử khảo sát, thì $N_{ij} \sim B(N, P_{ij})$. Khi đó,

$$\mathbb{E}(N_{ij}) = NP_{ij} = Np_i q_j \text{ khi } H_0 \text{ đúng}$$

Đặt

$$e_{ij} = N\hat{p}_i\hat{q}_j = \frac{n_i m_j}{N}$$

e_{ij} gọi là tần số lý thuyết.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

Định lí 28 (Pearson)

Với N_{ij} và $E_{ij} = NP_{ij}$, biến ngẫu nhiên

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(N_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

sẽ hội tụ theo phân phối về biến ngẫu nhiên Chi bình phương $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$ bậc tự do.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0: X và Y độc lập
2. Xác định tần số thực nghiệm n_{ij} và tần số lý thuyết

$$e_{ij} = \frac{n_i m_j}{N}$$

với n_i và m_j là tổng hàng i và tổng cột j tương ứng, Điều kiện: $e_{ij} \geq 5$.

Kiểm định giả thuyết về tính độc lập

3. Tính thống kê kiểm định

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{e_{ij}} - N \qquad (25)$$

Nếu H_0 đúng, thống kê Q^2 có phân phối Chi bình phương với $(r-1)(s-1)$ bậc tự do

4. Bác bỏ H_0 khi

$$Q^2 > \chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha) \qquad (26)$$

4b. Sử dụng p-giá trị:

$$p = \mathbb{P}\left(\chi^2_{(r-1)(s-1)} \geq Q^2\right) \qquad (27)$$

Bác bỏ H_0 khi: $p \leq \alpha$.

Ví dụ 29

Một báo cáo khoa học trong y khoa tuyên bố rằng việc sở hữu một thú cưng trong nhà (chó hoặc mèo) sẽ làm tăng khả năng sống sót của những người chủ mà thường bị lên cơn đau tim. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 95 người đã lên cơn đau tim được chọn để khảo sát. Dữ liệu của mỗi người khảo sát được chia làm 2 loại:

- Những người sống sót/tử vong 1 năm sau khi lên cơn đau tim.
- Người sống sót/tử vong có nuôi thú cưng trong nhà hay không.

Kết quả cho bởi bảng sau

	Có nuôi thú cưng	Không nuôi thú cưng
Sống sót	28	44
Tử vong	8	15

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

1. Phát biểu giả thuyết, H_0: Bệnh lên cơn đau tim độc lập với việc nuôi thú cưng,
2. Tính tần số thực nghiệm: với $n_1 = 72$, $n_2 = 23$, $m_1 = 36$, $m_2 = 59$

$$e_{11} = \frac{n_1 m_1}{N} = \frac{72 \times 36}{95} = 27.284; \qquad e_{12} = \frac{n_1 m_2}{N} = \frac{72 \times 59}{95} = 44.716$$

$$e_{21} = \frac{n_2 m_1}{N} = \frac{23 \times 36}{95} = 8.716; \qquad e_{22} = \frac{n_2 m_2}{N} = \frac{23 \times 59}{95} = 14.284$$

3. Tính giá trị thống kê Q^2

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{n_{ij}^2}{e_{ij}} - n = \left(\frac{28^2}{27.284} + \frac{44^2}{44.716} + \frac{8^2}{8.716} + \frac{15^2}{15.284}\right) - 95 = 0.125$$

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

4. Bác bỏ H_0 khi: $Q^2 > \chi^2_{(r-1)(s-1)}(\alpha) = \chi^2_1(0.05)$.
Tra bảng Chi - bình phương, ta được $\chi^2_1(0.05) = 3.841$. $Q^2 = 0.125$, suy ra $Q^2 < 3.841$. Ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 tức là bệnh lên cơn đau tim độc lập với việc nuôi thú cưng.

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ
Nguyễn Văn Thìn
Bài toán
Kiểm định tham số
Kiểm định hợp lý
Một mẫu
Hai mẫu độc lập
Hai mẫu không độc lập
Kiểm định Chi bình phương (Goodness-of-Fit-test)

Ví dụ 30

Vé máy bay của hãng hàng không Việt Nam Airline được chia làm 3 loại: Hạng thường (C), hạng trung (B) và hạng doanh nhân (A). Hành khách đi máy bay của VN Airlines nằm trong 1 trong 2 dạng sau: bay nội địa hoặc quốc tế. Khảo sát 920 hành khách đã bay của hãng, cho kết quả sau:

	Loại chuyến bay	
Loại vé	Nội địa	Quốc tế
Hạng thường	29	22
Hạng trung	95	121
Hạng doanh nhân	518	135

Có ý kiến cho rằng hành khách mua loại vé nào (A, B, C) sẽ phụ thuộc vào việc người đó bay nội địa hay quốc tế. Với mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm tra ý kiến trên.