ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
Phần 2

1. Không gian vectơ
   - Khái niệm và ví dụ về không gian vectơ
   - Sự độc lập tuyến tính và sự phụ thuộc tuyến tính
   - Không gian sinh bởi một tập hợp
   - Cơ sở và số chiều của không gian vectơ
   - Bài toán tìm cơ sở
   - Tọa độ
2. Ánh xạ tuyến tính
   - Khái niệm ánh xạ
   - Khái niệm ánh xạ tuyến tính
   - Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát
   - Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính
   - Xác định ánh xạ tuyến tính thông qua ảnh các vectơ cơ sở
   - Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Khái niệm không gian vectơ

Định nghĩa

Cho tập V khác rỗng, mỗi phần tử thuộc V được gọi là một vectơ. Trên V ta định nghĩa hai phép toán như sau:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{R} \times V \to V \\ (\lambda, u) \mapsto \lambda u \end{array}$$

Ta nói V cùng với hai phép toán trên là một *không gian vectơ* (trên $\mathbb{R}$) nếu 8 tính chất sau được thỏa:

1) $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$

2) $\exists 0 \in V : u + 0 = 0 + u = u \quad \forall u \in V$

3) $\forall u \in V, \exists(-u) \in V : (-u) + u = u + (-u) = 0$

4) $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$

5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

6) $(\lambda_1 + \lambda_2)u = \lambda_1 u + \lambda_2 u \quad \forall u \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

7) $(\lambda_1\lambda_2)u = (\lambda_1)(\lambda_2 u) \quad \forall u \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

8) $1u = u \quad \forall u \in V.$

Khái niệm không gian vectơ

Chú ý

Cho V là một không gian vectơ. Khi đó:

(i) Phần tử 0 được xác định duy nhất và được gọi là *vectơ không*.

(ii) Với mọi $u \in V$, phần tử $-u$ cũng được xác định duy nhất và được gọi là *vectơ đối* của u.

Mệnh đề

Cho V là không gian vectơ và $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó:

(i) $\lambda u = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ *hay* $u = 0$.

(ii) $(-1)u = -u$.

(iii) $(-\lambda u) = (-\lambda)u = \lambda(-u)$.

Ví dụ về không gian vectơ

Ví dụ

Ta ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là tập hợp tất cả các bộ gồm n thành phần

$$u = (a_1, \ldots, a_n) \text{ với } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Ta định nghĩa phép cộng hai phần tử $u = (a_1, \ldots, a_n)$, $v = (b_1, \ldots, b_n)$ trong $\mathbb{R}^n$ và phép nhân phần tử u với một số thực λ như sau:

(i) $u + v = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$

(ii) $\lambda u = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$

Khi đó tập hợp $\mathbb{R}^n$ cùng với hai phép toán trên là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và được gọi là *không gian vectơ* $\mathbb{R}^n$. Vectơ 0 trong $\mathbb{R}^n$ chính là vectơ $(0, \ldots, 0)$.

Ví dụ về không gian vectơ

Ví dụ

Tập hợp V gồm tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$

Ví dụ

Tập hợp $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ gồm tất cả các ma trận cấp $m \times n$ với hai phép toán cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ

Tập hợp $P_n[x]$ gồm tất cả các đa thức hệ số thực bậc không quá n với phép cộng đa thức và nhân đa thức với một số thực là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$

Không gian con

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và W là một tập con khác rỗng của V. Ta nói W là không gian con của V, ký hiệu $W \leq V$ nếu W là một không gian vectơ ứng với các phép toán đã được trang bị trên V.

Ví dụ

Cho V là một không gian vectơ. Khi đó $\{0\}$ và V là hai không gian con tầm thường của V.

Không gian con

Định lý

Cho V là không gian vectơ và W là tập con của V. Khi đó W là không gian con của V khi và chỉ khi những điều sau được thỏa:

(i) $W \neq \emptyset$;

(ii) $u + v \in W \quad \forall u, v \in W$;

(iii) $\lambda u \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in W$.

Chú ý

Các điều kiện (ii) và (iii) trong định lý trên có thể được thay thế bởi điều kiện sau:

$$\lambda u + v \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in W$$

Không gian con

Phương pháp xác định không gian con

Để xác định tập hợp con W có là không gian con của không gian vectơ V hay không, ta thực hiện như sau:

- Bước 1: Xét xem vectơ 0 có thuộc W hay không? Nếu $0 \notin W$ thì W không phải là không gian con của V. Ngược lại, ta tiến hành bước 2.
- Bước 2: Lấy $u, v \in W$. Từ đó dựa vào tính chất của W để suy ra tính chất của u, v. Sau đó kiểm tra $u + v$ và $\lambda u (\lambda \in \mathbb{R})$ có thỏa tính chất của W hay không. Nếu $u + v$ và λu thỏa tính chất của W thì ta kết luận W là không gian con của V. Ngược lại, ta cần chỉ ra một ví dụ cụ thể của $u, v \in W$ sao cho $u + v \notin W$ hay một ví dụ cụ thể của $u \in W, \lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda u \notin W$.

Không gian con

Ví dụ

Kiểm tra tập hợp $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y + z\}$ có là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$ hay không?

Giải

- Vì $(0, 0, 0) \in W$ nên $W \neq \emptyset$.
- Lấy $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in W$. Ta có: $x_1 = y_1 + z_1$ và $x_2 = y_2 + z_2$. Vì $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ và $x_1 + x_2 = (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) = (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$ nên $u + v \in W$.
- Với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ và $\lambda x_1 = \lambda(y_1 + z_1) = \lambda y_1 + \lambda z_1$ nên $\lambda u \in W$.

  Vậy W là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Không gian con

Ví dụ

Kiểm tra tập hợp $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 1\}$ có là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$ hay không?

Giải

Vì $(0, 0, 0) \notin W$ nên W không phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

Kiểm tra tập hợp $W = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 | xy = z)\}$ có là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$ hay không?

Giải

Chọn $u = (1, 1, 1) \in W$ và $\lambda = 2$. Khi đó $\lambda u = 2u = (2, 2, 2) \notin W$. Suy ra W không phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và $u, u_1, \ldots, u_n$ là các vectơ thuộc V. Ta nói u là *tổ hợp tuyến tính* của $u_1, \ldots, u_n$ nếu tồn tại các số thực $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sao cho

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Ví dụ

Vectơ không luôn là tổ hợp tuyến tính của một họ bất kỳ các vectơ $u_1, \ldots, u_m$ bởi vì $0 = 0u_1 + \cdots + 0u_m$.

Tổ hợp tuyến tính

Ví dụ

Xét các vectơ $u = (3, 0, 4), u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (-1, 1, 0)$. Khi đó $u = 2u_1 + u_2 - u_3$. Do đó u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3

Ví dụ

Vectơ $u = (1, 1, 1)$ không là tổ hợp tuyến tính của $u_1 = (2, 1, 0)$ và $u_2 = (3, 4, 0)$ vì thành phần thứ ba của u_1 và u_2 là 0 trong khi thành phần thứ 3 của u khác 0.

Tổ hợp tuyến tính

Kiểm tra vectơ u có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1, \ldots, u_m$

Xét phương trình $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m$ với các ẩn là $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Phương trình này tương đương với một hệ phương trình tuyến tính m ẩn.

- Nếu phương trình có nghiệm thì u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, \ldots, u_m$.
- Nếu phương trình vô nghiệm thì u không là tổ hợp tuyến tính của $u_1, \ldots, u_m$.

Tổ hợp tuyến tính

Ví dụ

Kiểm tra vectơ $u = (1, 4, -3)$ có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 1, -2)$ hay không?

Giải

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \\ \Leftrightarrow (1, 4, -3) &= \lambda_1(2, 1, 1) + \lambda_2(-1, 1, -1) + \lambda_3(1, 1, -2) \\ \Leftrightarrow (1, 4, -3) &= (2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3) \end{aligned}$$

Từ đây ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = -3 \end{cases}$

Nghiệm của hệ trên là $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$. Do đó u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3.

Hệ vectơ độc lập tuyến tính (phụ thuộc tuyến tính)

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ. Họ các vectơ $u_1, \ldots, u_m \in V$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Họ các vectơ không độc lập tuyến tính được gọi là *phụ thuộc tuyến tính*.

Chú ý

- Nếu $u \neq 0$ thì $\{u\}$ độc lập tuyến tính.
- Mọi tập hợp chứa vectơ 0 đều phụ thuộc tuyến tính.

Kiểm tra hệ vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$

Phương pháp

Cho các vectơ $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Đặt $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ và xác định $r(A)$

- Nếu $r(A) = m$ thì hệ vectơ $\{u_1, \ldots, u_m\}$ độc lập tuyến tính.
- Nếu $r(A) < m$ thì hệ vectơ $\{u_1, \ldots, u_m\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Kiểm tra hệ vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$

Ví dụ

Xác định tập hợp các vectơ
$u_1 = (1, 2, 3, 1), u_2 = (1, 1, 2, 3), u_3 = (1, 3, 1, 2)$ là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$. Do đó $r(A) = 3$. Suy ra $\{u_1, u_2, u_3\}$ độc lập tuyến tính.

Kiểm tra hệ vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$

Chú ý

Trong trường hợp $m = n$, đặt $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

- Hệ vectơ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu $det(A) \neq 0$.
- Hệ vectơ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu $det(A) = 0$.

Kiểm tra hệ vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$

Ví dụ

Xác định tập hợp các vectơ $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, -2, 1), u_3 = (-1, 2, -1)$ là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Giải

Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vì $det(A) = 0$ nên hệ các vectơ $\{u_1, u_2, u_3\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Không gian sinh bởi một tập hợp

Định lý

Cho V là một không gian vectơ và S là một tập hợp con khác rỗng của V. Đặt W là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vectơ thuộc S. Khi đó W là không gian con nhỏ nhất của V chứa S

Định nghĩa

Không gian W được xây dựng như trên được gọi là *không gian sinh bởi tập hợp S* và được ký hiệu $W =< S >$. Khi đó tập hợp S được gọi là *tập sinh* của W.

Chú ý

Ta quy ước không gian sinh bởi tập rỗng là không gian $\{0\}$.

Không gian sinh bởi một tập hợp

Mệnh đề

Cho S là một tập con của không gian vectơ V. Khi đó S là tập sinh của V nếu và chỉ nếu mọi vectơ trong V đều là tổ hợp tuyến tính của một số vectơ trong S.

Ví dụ

$S = \{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$ là tập sinh của không gian $\mathbb{R}^3$ bởi vì với mọi $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ thì $u = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$.

Cơ sở của không gian vectơ

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}$ là tập con của V. Ta nói $\mathcal{B}$ là *cơ sở* của V nếu $\mathcal{B}$ là tập sinh của V và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ

Ta có $\mathcal{B}_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ và $\mathcal{B}_0$ độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}_0$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Cơ sở này được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Chú ý

Tổng quát, tập hợp tất cả các vectơ dòng của ma trận đơn vị I_n theo thứ tự từ dòng đầu tiên đến dòng cuối cùng sẽ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, và cơ sở này được gọi là *cơ sở chính tắc* của $\mathbb{R}^n$.

Số chiều của không gian vectơ

Định lý

Cho V là một không gian vectơ. Nếu V có một cơ sở gồm n vectơ thì mọi cơ sở khác của V cũng gồm n vectơ.

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ sao cho V có một cơ sở gồm n vectơ. Khi đó n được gọi là *số chiều* của V, ký hiệu $dim(V)$.
Không gian V có $dim(V) < \infty$ được gọi là *không gian hữu hạn chiều*.

Ví dụ

$dim(\{0\}) = 0$.

Số chiều của không gian vectơ

Mệnh đề

Số chiều của không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ *là* n.

Định lý

Cho V *là không gian vectơ* n *chiều và* $\mathcal{B}$ *là tập con của* V. *Khi đó:*

(i) $\mathcal{B}$ *là cơ sở của* V *nếu và chỉ nếu* $\mathcal{B}$ *độc lập tuyến tính và* $\mathcal{B}$ *có đúng* n *phần tử.*

(ii) $\mathcal{B}$ *là cơ sở của* V *nếu và chỉ nếu* $\mathcal{B}$ *là tập sinh gồm* n *phần tử của* V.

Hệ quả

Cho V *là không gian vectơ* n *chiều và* S *là tập con của* V. *Nếu* S *có nhiều hơn* n *phần tử thì* S *phụ thuộc tuyến tính.*

Số chiều của không gian vectơ

Phương pháp kiểm tra cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$

Để kiểm tra tập hợp con $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^n$ có là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ hay không, ta thực hiện như sau:

- Nếu số phần tử của $\mathcal{B}$ khác n thì $\mathcal{B}$ không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Ngược lại, $\mathcal{B}$ có số phần tử bằng n. Ta kiểm tra xem $\mathcal{B}$ có độc lập tuyến tính hay không.
- Nếu $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính thì $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Ngược lại, $\mathcal{B}$ không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ vì $\mathcal{B}$ phụ thuộc tuyến tính.

Số chiều của không gian vectơ

Ví dụ

Kiểm tra $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,-2,1),(1,2,-1)\}$ có là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ hay không?

Giải

- $\mathcal{B}$ có số phần tử bằng số chiều của $\mathbb{R}^3$.
- Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vì $det(A) = 6 \neq 0$ nên $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.
  Vậy $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Không gian sinh bởi một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Cho ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Với mỗi $i = 1, \ldots, m$ đặt u_i là vectơ dòng thứ i của A. Khi đó không gian sinh bởi các vectơ u_i được gọi là *không gian dòng* của A.

Định lý

Nếu W là không gian dòng của ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ thì $dim(W) = r(A)$ và tập hợp tất cả các vectơ dòng khác 0 trong dạng bậc thang của A chính là cơ sở của W.

Không gian sinh bởi một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Tìm cơ sở của không gian sinh bởi một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Để tìm cơ sở của không gian sinh bởi tập hợp $\{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, ta thực hiện các bước sau:

- Đặt $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$.
- Dùng thuật toán Gauss để đưa A về ma trận bậc thang B. Khi đó các vectơ dòng khác 0 của B chính là cơ sở cần tìm.

Không gian sinh bởi một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Ví dụ

Cho $S = \{u_1 = (1,2,3), u_2 = (4,5,6), u_3 = (7,8,9)\}$ và $W = span(S)$.

(a) Chứng minh $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ không là cơ sở của W.

(b) Tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của W.

Giải

(a) Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Vì $det(A) = 0$ nên S phụ thuộc tuyến tính. Suy ra S không phải là cơ sở của W.

Không gian sinh bởi một tập hợp trong $\mathbb{R}^n$

Giải (tiếp theo)

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 7d_1]{d_2 \to d_2 - 4d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[d_2 \to \frac{-1}{3} d_2]{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Vậy cơ sở của W là $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$.

Cơ sở không toàn vẹn

Định lý

Cho V là không gian vectơ hữu hạn chiều. Khi đó, mọi tập hợp độc lập tuyến tính trong V đều có thể bổ túc thêm một số vectơ để tạo thành một cơ sở của V.

Bổ sung thêm vectơ vào tập độc lập tuyến tính để tạo thành cơ sở

Cho S là một tập con độc lập tuyến tính của không gian vectơ V. Để tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của V chứa S ta thực hiện như sau:

- Nếu S có số phần tử bằng số chiều của V thì ta chọn $\mathcal{B} = S$.
- Ngược lại ta chọn $u \in V$ sao cho $S \cup \{u\}$ là tập độc lập tuyến tính.
- Thay S bởi $S \cup \{u\}$ rồi lặp lại quá trình trên đến khi nào được tập hợp có số phần tử bằng số chiều của V thì dừng.

Cơ sở không toàn vẹn

Bổ sung thêm vectơ vào tập độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$ để tạo thành cơ sở

Cho $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ $(m \leq n)$ là một tập con độc lập tuyến tính của không gian vectơ $\mathbb{R}^n$. Để tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^n$ chứa S ta thực hiện như sau:

Đặt $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$. Thực hiện thuật toán Gauss để đưa A về ma trận bậc thang B. Chọn $n-m$ vectơ $v_1, \ldots, v_{n-m}$ sao cho hạng của ma trận $C = \begin{pmatrix} B \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-m} \end{pmatrix}$ là n. Khi đó $\{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_{n-m}\}$ là cơ sở cần tìm.

Cơ sở không toàn vẹn

Ví dụ

Cho $S = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Chứng minh S độc lập tuyến tính nhưng không là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm một cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^3$ sao cho $\mathcal{B}$ chứa S.

Giải

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Do đó $r(A) = 2$.

Suy ra S độc lập tuyến tính. Vì số phần tử của S là 2 nhỏ hơn số chiều của $\mathbb{R}^3$ nên S không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Cơ sở không toàn vẹn

Giải (tiếp theo)

(b) Đặt $\mathcal{B} = S \cup \varepsilon_3 = (0,0,1)$. Vì số phần tử của $\mathcal{B}$ bằng số chiều của $\mathbb{R}^3$ nên để chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Do đó $r(B) = 3$.

Suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vì vậy $\mathcal{B}$ cũng là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Không gian nghiệm

Định nghĩa

Tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ tạo thành một không gian con của $\mathbb{R}^n$. Không gian này được gọi là *không gian nghiệm* của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Không gian nghiệm

Phương pháp tìm cơ sở của không gian nghiệm

Để tìm cơ sở cho không gian nghiệm W của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm n ẩn, ta thực hiện như sau:

- Giải hệ phương trình và biểu diễn các ẩn phụ thuộc theo các ẩn tự do.
- Ứng với mỗi bộ các thành phần tự do, ta cho một thành phần bằng 1 và các thành phần còn lại bằng 0 để thu được một vectơ nghiệm của hệ. Ta gọi vectơ nghiệm này là vectơ nghiệm căn bản. Tập hợp tất cả các vectơ nghiệm căn bản của hệ sẽ tạo thành một cơ sở cho không gian nghiệm W.
- Nếu hệ có nghiệm duy nhất $X = 0$ thì $W = \{0\}$. Khi đó cơ sở của W là tập rỗng.

Không gian nghiệm

Ví dụ

Tìm cơ sở cho không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Không gian nghiệm

Giải (tiếp theo)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cho $\alpha = 1$ ta có $u = (0, -1, 1)$ là vectơ nghiệm căn bản của hệ.
Vậy cơ sở cần tìm là $\{u = (0, -1, 1)\}$.

Không gian tổng

Định lý

Cho V là một không gian vectơ và W_1, W_2 là các không gian con của V. Đặt $W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$. Khi đó $W_1 + W_2$ là không gian con của V và được gọi là không gian tổng của W_1 với W_2. Hơn nữa, nếu S_1, S_2 lần lượt là tập sinh của W_1, W_2 thì $S_1 \cup S_2$ là tập sinh của $W_1 + W_2$.

Chú ý

Bởi định lý trên, bài toán tìm cơ sở cho không gian tổng của W_1 và W_2 nếu biết tập sinh của W_1, W_2 chính là bài toán tìm cơ sở cho không gian sinh bởi một tập hợp.

Không gian tổng

Ví dụ

Cho $u_1 = (0,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,1,1)$, $u_3 = (-1,1,0,1)$, $u_4 = (-2,1,-1,0)$, $u_5 = (1,1,1,0)$ và $W_1 =< \{u_1, u_2, u_3\} >$, $W_2 =< \{u_3, u_4, u_5\}$. Tìm cơ sở và số chiều của $W_1 + W_2$.

Giải

Không gian tổng $W_1 + W_2$ là không gian sinh bởi tập hợp $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_5 \to d_5 - d_2 \\ d_1 \leftrightarrow d_2}]{\substack{d_3 \to d_3 + d_2 \\ d_4 \to d_4 + 2d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Không gian tổng

Giải (tiếp theo)

$$\xrightarrow[d_5\to d_5+d_2]{\substack{d_3\to d_3-3d_2\\ d_4\to d_4-5d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -4 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4\to d_4+4d_5]{d_3\to d_3+2d_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4\to d_4-3d_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3\leftrightarrow d_4]{d_4\leftrightarrow d_5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy cơ sở của $W_1 + W_2$ là $\{v_1 = (1,2,1,1), v_2 = (0,1,1,1), v_3 = (0,0,1,0), v_4 = (0,0,0,-1)\}$ và $dim(W_1 + W_2) = 4$.

Không gian giao

Định lý

Cho V là một không gian vectơ và W_1, W_2 là các không gian con của V. Khi đó $W_1 \cap W_2$ là không gian con của V và được gọi là không gian giao của W_1 với W_2.

Phương pháp tìm cơ sở cho không gian giao

Cho W_1, W_2 là các không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ và S_1, S_2 lần lượt là các tập sinh của W_1, W_2. Để tìm cơ sở cho không gian giao $W_1 \cap W_2$, ta thực hiện như sau: Tìm điều kiện của $(a_1, \ldots, a_n)$ sao cho $u = (a_1, \ldots, a_n)$ lần lượt là tổ hợp tuyến tính của các vectơ trong S_1, S_2. Khi đó $u \in W_1 \cap W_2$ nếu và chỉ nếu $a_1, \ldots, a_n$ thỏa một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất nào đó. Điều này dẫn đến $W_1 \cap W_2$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên.

Không gian giao

Ví dụ

Cho $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,1,1), u_4 = (1,1,2)$ và $W_1 =< \{u_1, u_2\} >, W_2 =< \{u_3, u_4\} >$. Tìm cơ sở và số chiều của không gian $W_1 \cap W_2$.

Giải

Lấy $u = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
$u \in W_1 \Leftrightarrow u$ là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2 \Leftrightarrow$ phương trình $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ có nghiệm.

$$\begin{array}{lcc} & u & = & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \\ \Leftrightarrow & (a_1, a_2, a_3) & = & \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,1) \\ \Leftrightarrow & (a_1, a_2, a_3) & = & (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = a_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = a_3 \end{cases}$$

Không gian giao

Giải (tiếp theo)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 2 & a_2 \\ 1 & 1 & a_3 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & a_3 - a_1 \end{array}\right)$$

Do đó $u \in W_1$ nếu và chỉ nếu $a_3 - a_1 = 0$.

$u \in W_2 \Leftrightarrow u$ là tổ hợp tuyến tính của $u_3, u_4 \Leftrightarrow$ phương trình $u = \lambda_1 u_3 + \lambda_2 u_4$ có nghiệm.

$$\begin{array}{lccc} & u & = & \lambda_1 u_3 + \lambda_2 u_4 \\ \Leftrightarrow & (a_1, a_2, a_3) & = & \lambda_1(2,1,1) + \lambda_2(1,1,2) \\ \Leftrightarrow & (a_1, a_2, a_3) & = & (2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = a_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = a_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = a_3 \end{cases}$$

Không gian giao

Giải (tiếp theo)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a_1 \\ 1 & 1 & a_2 \\ 1 & 2 & a_3 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_2 \\ 2 & 1 & a_1 \\ 1 & 2 & a_3 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & a_1 - 2a_2 \\ 0 & 1 & a_3 - a_2 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & a_1 - 2a_2 \\ 0 & 0 & a_1 + a_3 - 3a_2 \end{array}\right)$$

Do đó $u \in W_2$ nếu và chỉ nếu $a_1 + a_3 - 3a_2 = 0$.
Suy ra $u = (a_1, a_2, a_3) \in W_1 \cap W_2$ nếu và chỉ nếu

$$\begin{cases} a_3 - a_1 & = & 0 \\ a_1 + a_3 - 3a_2 & = & 0 \end{cases}$$

Vì vậy $W_1 \cap W_2$ là không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Không gian giao

Giải (tiếp theo)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 + d_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 = \alpha \in \mathbb{R} \\ \lambda_2 = \frac{2}{3}\alpha \end{cases}$$

Cho $\alpha = 1$ ta được $u = (1, \frac{2}{3}, 1)$ là vectơ nghiệm căn bản của hệ.
Vậy cơ sở của $W_1 \cap W_2$ là $\{u = (1, \frac{2}{3}, 1)\}$ và $dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

Mối liên hệ giữa số chiều của không gian tổng và không gian giao

Định lý

Cho V là không gian vectơ hữu hạn chiều và W_1, W_2 là các không gian con của V. Khi đó

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

Khái niệm tọa độ

Định lý

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của không gian vectơ V. Khi đó, với mọi $u \in V$, tồn tại duy nhất bộ số thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sao cho $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$.

Ta đặt $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ và $[u]_{\mathcal{B}}$ được gọi là tọa độ của vectơ u theo cơ sở $\mathcal{B}$.

Chú ý

Tọa độ của một vectơ theo một cơ sở $\mathcal{B}$ chỉ có ý nghĩa khi thứ tự xuất hiện của các vectơ trong $\mathcal{B}$ được cố định.

Khái niệm tọa độ

Ví dụ

Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là
$\mathcal{B}_0 = \{\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$. Với
$u = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, ta có $u = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$ nên

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = u^T.$$

Chú ý

Với $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ thì

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = u^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Khái niệm tọa độ

Mệnh đề

Cho $\mathcal{B}$ là cơ sở của không gian vectơ V. Khi đó, với mọi $u, v \in V$ và với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ ta có:

(i) $[u+v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$.

(ii) $[\lambda u]_{\mathcal{B}} = \lambda [u]_{\mathcal{B}}$.

Ví dụ

Cho $\mathcal{B}$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ và $u, v \in \mathbb{R}^3$. Giả sử

$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$[u+v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ và } [2u]_{\mathcal{B}} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Khái niệm tọa độ

Phương pháp tìm tọa độ của một vectơ

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ là cơ sở của không gian vectơ V. Để tìm tọa độ của vectơ $u \in V$ ta giải hệ phương trình

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n,$$

với các ẩn là $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Phương trình này sẽ tương đương với một hệ phương trình tuyến tính n phương trình n ẩn. Hệ phương trình này sẽ có nghiệm duy nhất $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (a_1, \dots, a_n)$. Khi đó $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Khái niệm tọa độ

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ
$u = (4,1,5), u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,0,1)$ và
$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$. Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

Giải

Xét $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vì $det(A) = 1 \neq 0$ nên $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Hơn nữa, $\mathcal{B}$ có số phần tử bằng số chiều của $\mathbb{R}^3$. Do đó $\mathcal{B}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Khái niệm tọa độ

Giải (tiếp theo)

$$
\begin{array}{rrcl}
 & u & = & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \\
\Leftrightarrow & (4,1,5) & = & \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,1,1) + \lambda_3(0,0,1) \\
\Leftrightarrow & (4,1,5) & = & (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 4 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}
$$

Vậy $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ma trận chuyển cơ sở

Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ và $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là các cơ sở của V. Đặt

$$P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1} \ldots [v_n]_{\mathcal{B}_1}).$$

Khi đó P được gọi là *ma trận chuyển cơ sở* từ cơ sở $\mathcal{B}_1$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2$ của V và được ký hiệu là $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$.

Ví dụ

$\mathcal{B} = \{u_1 = (3, 2, 1), u_2 = (4, 1, 1), u_3 = (5, 0, 2)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = ([u_1]_{\mathcal{B}_0} [u_2]_{\mathcal{B}_0} [u_3]_{\mathcal{B}_0}) = (u_1^T \, u_2^T \, u_3^T) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận chuyển cơ sở

Mệnh đề

Cho $\mathcal{B}$ là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$ và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}) = \left(u_1^T \dots u_n^T\right).$$

Phương pháp tìm ma trận chuyển cơ sở

Để tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ sang cơ sở $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ của không gian vectơ V, ta thực hiện như sau:

- Cho $u \in V$ bất kỳ. Tìm $[u]_{\mathcal{B}_1}$.
- Lần lượt thay u bởi $v_1, \dots, v_n$ để tìm $[v_1]_{\mathcal{B}_1}, \dots, [v_n]_{\mathcal{B}_1}$.
- Khi đó $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = ([v_1]_{\mathcal{B}_1} \dots [v_n]_{\mathcal{B}_1})$.

Ma trận chuyển cơ sở

Ví dụ

Cho $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)\}, \mathcal{B}_2 = \{v_1 = (1,2,3), v_2 = (2,3,1), v_3 = (3,1,2)\}$. Hãy xác định ma trận chuyển cơ sở $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$.

Giải

Lấy $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl} u & = & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \\ \Leftrightarrow \quad (x,y,z) & = & \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(1,1,1) \\ \Leftrightarrow \quad (x,y,z) & = & (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3) \end{array}$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ \lambda_1 + \lambda_3 = z \end{cases}$

Ma trận chuyển cơ sở

Giải (tiếp theo)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 0 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 + d_2]{d_1 \to d_1 - d_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & y+z-x \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & x-z \\ 0 & 0 & 1 & y+z-x \end{array}\right)$$

Do đó $\lambda_1 = x - y, \lambda_2 = x - z, \lambda_3 = y + z - x$. Suy ra

$$[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} x-y \\ x-z \\ y+z-x \end{pmatrix}. \text{ Vậy } (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận chuyển cơ sở

Định lý

Cho V là một không gian vectơ n chiều và $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là các cơ sở của V. Khi đó:

(i) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

(ii) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ *khả nghịch và* $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1} = (\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1)$.

Định lý

Cho V là không gian vectơ hữu hạn chiều và $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ là các cơ sở của V. Khi đó, với mọi $u \in V$ ta có $[u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

Ma trận chuyển cơ sở

Hệ quả

Cho $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}, \mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *là cơ sở của* $\mathbb{R}^n$. *Khi đó* $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2) = (u_1^T \ldots u_n^T)^{-1}(v_1^T \ldots v_n^T)$

Hệ quả

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *là cơ sở của* $\mathbb{R}^n$. *Khi đó, với mọi* $u \in \mathbb{R}^n$, *ta có:* $[u]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1}[u]_{\mathcal{B}_0} = (u_1^T \ldots u_n^T)^{-1}(u^T)$.

Phương pháp tìm tọa độ của một vectơ trong $\mathbb{R}^n$

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $u \in \mathbb{R}^n$. Để tìm $[u]_{\mathcal{B}}$ ta thực hiện như sau:
Đặt $M = (u_1^T \ldots u_n^T | u^T)$. Dùng thuật toán Gauss-Jordan để đưa M về dạng $(I_n | v)$. Khi đó $v = [u]_{\mathcal{B}}$.

Ma trận chuyển cơ sở

Phương pháp tìm ma trận chuyển cơ sở trong $\mathbb{R}^n$

Cho $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}, \mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ lần lượt là các cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Để tìm $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$ ta thực hiện như sau:

- Đặt $M = (u_1^T \ldots u_n^T | v_1^T \ldots v_n^T)$.
- Dùng thuật toán Gauss-Jordan để đưa M về dạng $(I_n|A)$. Khi đó $A = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$.

Ví dụ

Cho $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 1)\}, \mathcal{B}_2 = \{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 1), v_3 = (3, 1, 2)\}$.

(a) Hãy tìm tọa độ của $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ theo cơ sở $\mathcal{B}_1$.

(b) Hãy xác định ma trận chuyển cơ sơ từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$.

Ma trận chuyển cơ sở

Giải

(a) $$[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x-z \\ y+z-x \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Khái niệm ánh xạ

Định nghĩa

Cho X, Y là hai tập hợp khác rỗng và f là một phép tương ứng từ X vào Y (ký hiệu: $f : X \to Y$). Khi đó f được gọi là một *ánh xạ* từ X vào Y nếu với mọi $x \in X$ tồn tại duy nhất một $y \in Y$ sao cho y là tương ứng của x qua f. Ta ký hiệu $y = f(x)$ và gọi y là ảnh của x qua f.

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi $f(x, y) = (xy, x - y)$. Khi đó f là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Khái niệm ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được gọi là *ánh xạ tuyến tính* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ và với mọi $u \in \mathbb{R}^n$.

Tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ được ký hiệu là $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Nếu $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ thì f được gọi là *toán tử tuyến tính* trên $\mathbb{R}^n$. Tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$ được ký hiệu là $L(\mathbb{R}^n)$.

Khái niệm ánh xạ tuyến tính

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

Giải

Lấy $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Ta có $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$. Do đó $f(u + v) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2, z_1 + z_2 + x_1 + x_2)$. Vì vậy $f(u + v) = f(u) + f(v)$. Hơn nữa

$$f(\lambda u) = (\lambda x + \lambda y, \lambda y + \lambda z, \lambda z + \lambda x) = \lambda f(u).$$

Vậy f là ánh xạ tuyến tính.

Khái niệm ánh xạ tuyến tính

Mệnh đề

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. *Khi đó:*

(i) $f(0) = 0$.

(ii) *Với mọi* $u \in \mathbb{R}^n$, $f(-u) = -f(u)$.

(iii) *Với mọi* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *và với mọi* $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$, *ta có:*

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_k f(u_k).$$

Mệnh đề

Ánh xạ $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *nếu và chỉ nếu tồn tại duy nhất* $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}$ *sao cho* $f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$ *với mọi* $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Định nghĩa

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}, \mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ lần lượt là cơ sở của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ và $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Khi đó ma trận

$$A = ([f(u_1)]_{\mathcal{C}} \ldots [f(u_n)]_{\mathcal{C}})$$

được gọi là *ma trận biểu diễn* của f đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ (hay vắn tắt là ma trận của f đối với cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{C}$) và được ký hiệu là $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Ví dụ

Cho $f(x, y, z) = (x + y + z, 3x - 5y + 7z)$ và $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$. Khi đó $[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ được xác định bởi $f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$ và $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. Khi đó

$$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Ví dụ

Cho $f(x,y,z) = (x+y+z, y+2z)$ và $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,1)\}, \mathcal{C} = \{v_1 = (1,2), v_2 = (3,5)\}$ lần lượt là cơ sở của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.

(a) Hãy xác định $[f(u)]_{\mathcal{C}}$ với $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Hãy xác định $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Giải

(a)

$$\begin{aligned} f(u) &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ \Leftrightarrow \quad (x+y+z, y+2z) &= \lambda_1(1,2) + \lambda_2(3,5) \\ \Leftrightarrow \quad (x+y+z, y+2z) &= (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 5\lambda_2) \end{aligned}$$

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Giải (tiếp theo)

Ta có: $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = x + y + z \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = y + 2z \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x+y+z \\ 2 & 5 & y+2z \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 - 2d_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x+y+z \\ 0 & -1 & -2x-y \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to -d_2]{d_1 \to d_1 + 3d_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5x-2y+z \\ 0 & 1 & 2x+y \end{array}\right).$$

Do đó $\lambda_1 = -5x - 2y + z$, $\lambda_2 = 2x + y$.

Vậy $[f(u)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5x-2y+z \\ 2x+y \end{pmatrix}$.

(b) $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{C}}[f(u_2)]_{\mathcal{C}}[f(u_3)]_{\mathcal{C}}) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Định lý

Cho $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ lần lượt là cơ sở của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ và $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Khi đó với mọi $u \in \mathbb{R}^n$, ta có:

$$[f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}.$$

Định lý

Cho $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^m$. Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ tuyến tính thì

$$[f]_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}_2} = (\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1)[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1}(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2).$$

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Hệ quả

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}, \mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ *lần lượt là cơ sở của* $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ *và* $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. *Khi đó*

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (v_1^T \ldots v_m^T)^{-1}(f(u_1)^T \ldots f(u_n)^T).$$

Hệ quả

Cho $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ *là cơ sở của* $\mathbb{R}^m$ *và* $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. *Với mọi* $u \in \mathbb{R}^n$, *ta có* $[f(u)]_{\mathcal{C}} = (v_1^T \ldots v_m^T)^{-1}(f(u)^T)$.

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Phương pháp tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}, \mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ lần lượt là cơ sở của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ và $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Để tìm $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ ta thực hiện như sau:

- Tính $f(u_1), \ldots, f(u_n)$.
- Đặt $M = (v_1^T \ldots v_m^T | f(u_1)^T \ldots f(u_n)^T)$.
- Dùng thuật toán Gauss-Jordan để đưa M về dạng $(I_m|A)$. Khi đó $A = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Phương pháp tìm tọa độ của ảnh của một vectơ

Cho $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^m$ và $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Với $u \in \mathbb{R}^n$, để xác định $[f(u)]_{\mathcal{C}}$ ta thực hiện như sau: Đặt $M = (v_1^T \ldots v_m^T | f(u)^T)$. Dùng thuật toán Gauss-Jordan để đưa M về dạng $(I_m|v)$. Khi đó $v = [f(u)]_{\mathcal{C}}$.

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Ví dụ

Cho $f(x,y,z) = (x+y+z, y+2z)$ và $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,1)\}, \mathcal{C} = \{v_1 = (1,2), v_2 = (3,5)\}$ lần lượt là cơ sở của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.

(a) Hãy xác định $[f(u)]_{\mathcal{C}}$ với $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Hãy xác định $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Giải

(a)

$$\begin{aligned}[f(u)]_{\mathcal{C}} &= (v_1^T v_2^T)^{-1}(f(u)^T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+2z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5x-2y+z \\ 2x+y \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Giải (tiếp theo)

(b)

$$
\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} &= (v_1^T v_2^T)^{-1}(f(u_1)^T f(u_2)^T f(u_3)^T) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Phương pháp tìm ánh xạ tuyến tính khi biết ma trận biểu diễn

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}, \mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ lần lượt là cơ sở của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ và $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. Để xác định $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ khi biết $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ ta thực hiện như sau:

- Tính $[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0}$ theo công thức sau:

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \\ &= (v_1^T \ldots v_m^T)[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u_1^T \ldots u_n^T)^{-1}. \end{aligned}$$

- Với $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có $[f(u)]_{\mathcal{C}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0})(u^T)$. Suy ra $f(u) = ([f(u)]_{\mathcal{C}_0})^T$.

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính tổng quát

Ví dụ

Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ sao cho ma trận biểu diễn đối với cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,1,-2)\}, \mathcal{C} = \{v_1 = (1,2), v_2 = (3,5)\}$ là $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải

Gọi $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$. Ta có:

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} &= (v_1^T \dots v_m^T)[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u_1^T \dots u_n^T)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -9 & 19 & 8 \\ -15 & 32 & 14 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Giải (tiếp theo)

Với $u = (x, y, z)$ ta có:

$$\begin{aligned}[f(u)]_{\mathcal{C}_0} &= [f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0}(u^T) = \begin{pmatrix} -9 & 19 & 8 \\ -15 & 32 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9x + 19y + 8z \\ -15x + 32y + 14z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vậy $f(u) = (-9x + 19y + 8z, -15x + 32y + 14z)$.

Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Định nghĩa

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n)$ và $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Khi đó ta gọi $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ là *ma trận biểu diễn* của f đối với cơ sở $\mathcal{B}$. Để thuận tiện ta sẽ dùng ký hiệu $[f]_{\mathcal{B}}$ thay cho ký hiệu $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Ví dụ

Cho $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, x - y)$ và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$. Khi đó $[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Mệnh đề

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n)$ được xác định bởi
$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)$ *và*
$\mathcal{B}_0$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$. *Khi đó* $[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Cho $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x, y) = (x + y, 2x - y)$ và
$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, -2), u_2 = (2, -3)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

(a) Hãy xác định $[f(u)]_{\mathcal{B}}$ với $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Hãy xác định $[f]_{\mathcal{B}}$.

Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Giải

$$\begin{array}{rrcl} & f(u) & = & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \\ \Leftrightarrow & (x+y, 2x-y) & = & \lambda_1(1,-2) + \lambda_2(2,-3) \\ \Leftrightarrow & (x+y, 2x-y) & = & (\lambda_1 + 2\lambda_2, -2\lambda_1 - 3\lambda_2) \end{array}$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x+y \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 2x-y \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x+y \\ -2 & -3 & 2x-y \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 + 2d_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 4x+y \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x+y \\ \lambda_2 = 4x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -7x-y \\ \lambda_2 = 4x+y \end{cases}$$

Do đó $[f(u)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -7x-y \\ 4x+y \end{pmatrix}$.

Suy ra $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Định lý

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n)$ *và* $\mathcal{B}$ *là cơ sở của* $\mathbb{R}^n$*. Khi đó, với mọi* $u \in \mathbb{R}^n$*, ta có* $[f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}$.

Định lý

Cho $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *là các cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $f \in L(\mathbb{R}^n)$*. Khi đó*
$[f]_{\mathcal{B}_2} = (\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1)[f]_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}[f]_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$.

Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Hệ quả

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *là cơ sở của* $\mathbb{R}^n$*. Khi đó* $[f]_{\mathcal{B}} = (u_1^T \ldots u_n^T)^{-1}(f(u_1)^T \ldots f(u_n)^T)$.

Hệ quả

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *là cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $f \in L(\mathbb{R}^n)$*. Với mọi* $u \in \mathbb{R}^n$*, ta có* $[f(u)]_{\mathcal{B}} = (u_1^T \ldots u_n^T)^{-1}(f(u)^T)$.

Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Phương pháp tìm ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Để xác định $[f]_{\mathcal{B}}$ ta thực hiện như sau:

- Tính $f(u_1), \dots, f(u_n)$.
- Đặt $M = (u_1^T \dots u_n^T | f(u_1)^T \dots f(u_n)^T)$.
- Dùng thuật toán Gauss-Jordan để đưa M về dạng $(I_n|A)$. Khi đó $A = [f]_{\mathcal{B}}$.

Phương pháp tìm tọa độ của ảnh của một vectơ

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Với $u \in \mathbb{R}^n$, để tìm $[f(u)]_{\mathcal{B}}$ ta thực hiện như sau: Đặt $M = (u_1^T \dots u_n^T | f(u)^T)$. Dùng thuật toán Gauss-Jordan để đưa M về dạng $(I_n|v)$. Khi đó $v = [f(u)]_{\mathcal{B}}$.

Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Ví dụ

Cho $f \in L(\mathbb{R}^2)$ xác định bởi $f(x,y) = (x+y, 2x-y)$ và $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,-2), u_2 = (2,-3)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

(a) Hãy xác định $[f(u)]_{\mathcal{B}}$ với $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Hãy xác định $[f]_{\mathcal{B}}$.

Giải

(a) $[f(u)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x-y \\ 4x+y \end{pmatrix}.$

(b) $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Phương pháp tìm toán tử tuyến tính khi biết ma trận biểu diễn

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Để xác định $f \in L(\mathbb{R}^n)$ khi biết $[f]_{\mathcal{B}}$ ta thực hiện như sau:

- Tính $[f]_{\mathcal{B}_0}$ theo công thức sau:

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0} &= (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B})^{-1} \\ &= (u_1^T \ldots u_n^T)[f]_{\mathcal{B}}(u_1^T \ldots u_n^T)^{-1}. \end{aligned}$$

- Với $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có $[f(u)]_{\mathcal{B}_0} = ([f]_{\mathcal{B}_0})(u^T)$. Suy ra $f(u) = ([f(u)]_{\mathcal{B}_0})^T$.

Ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính

Ví dụ

Tìm $f \in L(\mathbb{R}^2)$ sao cho ma trận biểu diễn f đối với cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,2), u_2 = (3,5)\}$ là $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -22 & 16 \\ -37 & 27 \end{pmatrix}.$$

Với $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ta có:

$$[f(u)]_{\mathcal{B}_0} = [f]_{\mathcal{B}_0}(u^T) = \begin{pmatrix} -22 & 16 \\ -37 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22x + 16y \\ -37x + 27y \end{pmatrix}.$$

Suy ra $f(u) = (-22x + 16y, -37x + 27y)$.

Xác định ánh xạ tuyến tính thông qua ảnh các vectơ cơ sở

Định lý

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là tập hợp các vectơ thuộc $\mathbb{R}^m$. Khi đó tồn tại duy nhất $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sao cho $f(u_i) = v_i$ với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Phương pháp xác định ánh xạ tuyến tính thông qua ảnh các vectơ cơ sở

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là tập hợp trong $\mathbb{R}^m$. Để tìm $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ thỏa $f(u_i) = v_i$ với mọi $i = 1, \ldots, n$ ta thực hiện như sau:

- Tính $[u]_{\mathcal{B}} = (u_1^T \ldots u_n^T)^{-1}(u^T)$ với $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- Khi đó $f(u) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ với $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Xác định ánh xạ tuyến tính thông qua ảnh các vectơ cơ sở

Ví dụ

Tìm $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ sao cho $f(1,1) = (1,3,5), f(1,2) = (2,4,6)$.

Giải

Ta có $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1), u_2 = (1,2)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Với $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ta có:

$$[u]_{\mathcal{B}} = (u_1^T u_2^T)^{-1}(u^T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(u) &= (2x-y)f(u_1) + (-x+y)f(u_2) \\ &= (2x-y)(1,3,5) + (-x+y)(2,4,6) \\ &= (y, 2x+y, 4x+y) \end{aligned}$$

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Khi đó tập hợp $\mathrm{Ker} f = \{u \in \mathbb{R}^n | f(u) = 0\}$ được gọi là *nhân* của ánh xạ tuyến tính f.

Định lý

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Khi đó $\mathrm{Ker} f$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$. Hơn nữa, $\mathrm{Ker} f$ là không gian nghiệm của hệ $[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} X = 0$ với $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$.

Định nghĩa

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Khi đó $\mathrm{Ker} f$ được gọi là *không gian nhân* của f và $dim(\mathrm{Ker} f)$ được gọi là số khuyết của f, ký hiệu bởi $\mathrm{null}(f)$.

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Phương pháp xác định cơ sở của không gian nhân

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Để xác định cơ sở của Ker$f$ ta thực hiện như sau:

- Xác định $[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0}$ với $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$.
- Tìm cơ sở của không gian nghiệm của hệ $[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} X = 0$. Cơ sở của không gian nhân chính là cơ sở của không gian nghiệm của hệ $[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} X = 0$

Ví dụ

Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi
$f(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y + 3z, 2x + 3y + 2z)$. Hãy tìm cơ sở của Ker$f$ và tính null(f).

Nhân của ánh xạ tuyến tính

Giải

Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5\alpha \\ x_2 = -4\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

Cho $\alpha = 1$ ta có $u = (5, -4, 1)$. Vậy cơ sở của Ker$f$ là $\{u = (5, -4, 1)\}$ và null$(f) = 1$.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Khi đó tập hợp $\mathrm{Im} f = \{f(u) | u \in \mathbb{R}^n\}$ được gọi là *ảnh* của ánh xạ tuyến tính f.

Định lý

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Khi đó Imf là không gian con của $\mathbb{R}^m$. Hơn nữa, Imf là không gian dòng của ma trận $([f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0})^T$ với $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$.

Định nghĩa

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Khi đó $\mathrm{Im} f$ được gọi là *không gian ảnh* của ánh xạ tuyến tính f và $dim(\mathrm{Im} f)$ được gọi là *hạng* của f, ký hiệu bởi $r(f)$.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính

Phương pháp xác định cơ sở của không gian ảnh

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Để xác định cơ sở của Imf ta thực hiện như sau:

- Xác định $[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0}$ với $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$.
- Tìm cơ sở của không gian dòng của ma trận $([f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0})^T$. Cơ sở của không gian ảnh chính là cơ sở của không gian dòng của ma trận $([f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0})^T$.

Ví dụ

Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ xác định bởi
$f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + y - 3z)$. Hãy tìm cơ sở của Im$f$ và tính $r(f)$.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính

Giải

Gọi $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.

$[f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Suy ra

$$([f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0})^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - 7d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó cơ sở của $\mathrm{Im} f$ là $\{u_1 = (1,2), u_2 = (0,-1)\}$ và $r(f) = 2$.

Mối liên hệ giữa hạng và số khuyết

Mệnh đề

Cho $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. *Khi đó*

$$dim(Imf) + dim(Kerf) = n.$$