

Chương 2. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

2.1 Tập hợp

Cho A là tập hợp và x là một phần tử, ta có một số hàm liên quan

- `{a, b, c, ...}`: Tạo ra tập hợp $\{a, b, c, \dots\}$.
- `{seq(f(i), i=n..m)}`: Tập hợp với các phần tử là $f(i)$ với i chạy từ n đến m .
- `nops(A)`: Số phần tử của A .
- `op(A)`: Trích xuất tất cả các phần tử của A .
- `A[i]`: Phần tử thứ i của A .
- `member(x, A)`: Kiểm tra x có là phần tử của A không?.

> <code>A:={1,5,2,2,3,2,3,4,7};</code>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
> <code>nops(A);</code>	6
> <code>op(A);</code>	1, 2, 3, 4, 5, 7
> <code>A[6];</code>	7
> <code>member(4, A);</code>	<i>true</i>
> <code>member(6, A);</code>	<i>false</i>
> <code>{seq(2^i, i = 1 .. 5)};</code>	$\{2, 4, 8, 16, 32\}$

Cho A, B là các tập hợp, khi đó

- `A union B`: Tìm hợp của A và B .
- `A intersect B`: Tìm giao của A và B .
- `A minus B`: Tìm hiệu của A và B .
- `A subset B`: Kiểm tra A có là tập con của B không?.

> <code>A := {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9}; B := {2, 4, 6, 8, 10};</code>	
> <code>A union B;</code>	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

> A intersect B;	$\{2, 6, 8\}$
> A minus B;	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$
> A subset B;	<i>false</i>

2.2 Ánh xạ

Một số hàm liên quan tới ánh xạ

- **f:=x -> exp**: Xây dựng ánh xạ một biến f với $f(x) = exp$, trong đó exp là một biểu thức theo biến x .
- **f:=(x, y, ...) -> exp**: Xây dựng ánh xạ nhiều biến f với $f(x, y, \dots) = exp$, trong đó exp là một biểu thức theo biến x, y, \dots .
- **f(t)**: Tính giá trị ánh xạ f tại t .
- **f@g**: Tìm ánh xạ hợp $f \circ g$.
- **f@@k**: Tìm ánh xạ hợp k lần của f .
- **g:=x -> solve(f(y)=x, y)**: Khi f là song ánh thì g chính là ánh xạ ngược của f .

> f:=x -> (3*x+2)/(x-5):	$f := x \rightarrow \frac{3x+2}{x-5}$
> f(4);	-14
> f3:=f@@3: simplify(f3(t));	<i>#Tìm ánh xạ hợp f^3</i> $\frac{29t+42}{21t-139}$
> g:=t -> 2*t+1;	$g := t \rightarrow 2t+1$
> h := g@f; simplify(h(t));	<i>#Tìm $h = g \circ f$</i> $\frac{7t-1}{t-5}$
> fn := x-> solve(f(y) = x, y): simplify(fn(t));	<i>#Tìm ánh xạ ngược của f</i> $\frac{2+5t}{-3+t}$

Phần II. Bài tập

Bài 2.1 Những khẳng định nào sau đây là đúng

- | | | |
|--------------------------|------------------------------|--------------------------|
| a) $0 \in \emptyset$ | c) $\{0\} \subset \emptyset$ | e) $\{0\} \in \{0\}$ |
| b) $\emptyset \in \{0\}$ | d) $\emptyset \subset \{0\}$ | f) $\{0\} \subset \{0\}$ |

Bài 2.2 Những khẳng định nào sau đây là đúng

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ | c) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ | e) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ |
| b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | d) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ |

Bài 2.3 Liệt kê các tập hợp sau:

- a) $A = \{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
b) $B = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
c) $C = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m^2 < 2 \text{ và } 6n > n^2 - 7\}$
d) $D = \{2 \sin \frac{n\pi}{6} + 5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
e) $E = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \sqrt{17} < n \leq \sqrt{80} \text{ và } \frac{1}{2} < x < 1\}$
f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 4} \leq 0\}$
g) $G = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 \geq 256 \text{ và } x = \sqrt{3} \cos x - \sqrt{2} \sin 3x\}$

Bài 2.4 Cho $A, B \subset \mathbb{R}$. Viết \overline{A} , \overline{B} , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ thành phần hội của các đoạn, khoảng rời nhau trong \mathbb{R} .

- a) $A = (-9, -3) \cup [-1, 2] \cup [4, 5) \cup (7, 11] \cup (13, +\infty)$ và
 $B = (-\infty, -7] \cup [-4, -2) \cup (0, 3) \cup (6, 8] \cup [10, 15]$
b) $A = (-\infty, -4) \cup [4, 7] \cup \{-1, 2, 8, 10\}$ và $B = (-5, 1] \cup [6, 9) \cup \{-6, 3, 5, 10\}$.

Bài 2.5 Cho $A, B, C, D \subset E$. Hãy rút gọn các biểu thức sau đây:

- a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$
b) $(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (A \cap B)]$
c) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$
d) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$
e) $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D})$

Bài 2.6 Cho $A, B, D \subset E$. Hãy chứng minh

- a) $D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B) = (D \cup B) \setminus (A \cup B)$
- b) $D \setminus (A \cap B) = (D \setminus A) \cup (D \setminus B)$
- c) $(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$
- d) $(A \cap B) \setminus D = (A \setminus D) \cap (B \setminus D)$
- e) $(A \setminus B) \setminus D = A \setminus (B \cup D) = (A \setminus D) \setminus (B \setminus D)$

Bài 2.7 Cho $A, B, H, K \subset E$. Chứng minh

- a) $[(A \cap H) \cup (B \cap K)] \subset [(A \cup B) \cap (H \cup K)]$
- b) $(A \setminus H) \subset [(A \setminus B) \cup (B \setminus H)]$
- c) $[(A \cup B) \setminus (H \cup K)] \subset [(A \setminus H) \cup (B \setminus K)] \subset [(A \cup B) \setminus (H \cap K)]$
- d) $[(A \cup B) \setminus H] \subset [A \cup (B \setminus H)]$
- e) $[(A \cup B) \setminus (A \cup H)] \subset (B \setminus H)$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong a), b), c), d) và e).

Bài 2.8 Cho $A = \{0, 1, a\}$, $B = \{a, 2\}$ và $C = \{2, b\}$.

- a) Liệt kê các tập hợp A^2 , $A \times B$, $C \times A$, $B \times C$ và $C \times B$.
- b) Liệt kê các tập hợp B^3 , $A \times B^2$, $C \times A \times C$, $A \times B \times C$ và $C^2 \times B$.

Bài 2.9 Cho $A, B \subset E$ và $H, K \subset F$. Chứng minh

- a) $A \times (H \setminus K) = (A \times H) \setminus (A \times K)$
- b) $[(A \times H) \setminus (B \times K)] = [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)]$
- c) $(A \times H) \cap (B \times K) = (A \cap B) \times (H \cap K)$
- d) $[(A \times H) \cup (B \times K)] \subset [(A \cup B) \times (H \cup K)]$
- e) $[(A \setminus B) \times (H \setminus K)] \subset [(A \times H) \setminus (B \times K)]$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong d) và e).

Bài 2.10 Các qui tắc $f : X \rightarrow Y$ sau có phải là ánh xạ không ? Tại sao ?

- a) $X = (-2, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$, $\forall x \in X$
- b) $X = \mathbb{R}$, $Y = (6, +\infty)$, $f(x) = e^x + 9e^{-x}$, $\forall x \in X$
- c) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \ln |\sin x|$, $\forall x \in X$
- d) $X = [-1, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = y$ sao cho $y^2 - 2y = x$, $\forall x \in X$

e) $X = [1, 3], Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = 3x^2 - 9x + 5, \forall x \in X$

f) $X = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{Z}, f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 + 3^n - mn, \forall \frac{m}{n} \in X$

Bài 2.11 Xét tính đơn ánh và toàn ánh của các ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ sau:

a) $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \forall x \in X$

b) $X = [-2, +\infty), Y = (-20, +\infty), f(x) = x^2 + 6x - 3, \forall x \in X$

c) $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 4), \forall x \in X$

d) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x - 3}{x}, \forall x \in X$

e) $X = \mathbb{R}, Y = [-2, 2], f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x, \forall x \in X$

f) $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = 3 \cos 2x - 7x + 8, \forall x \in X$

Bài 2.12 Xét hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi: $f(x) = ax + b$ và $g(x) = 1 - x + x^2$. Giả sử $g \circ f = f \circ g$, hãy xác định a và b ?

Bài 2.13 Xác định $u = g \circ f, v = f \circ g$ và $w = h \circ g \circ f$ (nếu có) khi $f : X \rightarrow Y, g : Z \rightarrow T$ và $h : U \rightarrow V$ trong đó

a) $X = Y = Z = T = U = V = \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 + x - 3$ và $h(x) = x^3 + 4 \cos x$

b) $X = T = U = (0, +\infty), Y = Z = \mathbb{R}, V = [1, +\infty), f(x) = 3 \ln x - 2, g(x) = e^{\sin x}$ và $h(x) = 5x^4 - x^2 + 1$

c) $X = V = \mathbb{R}, Y = Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}, T = U = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, f(x) = x^2 - 4x + 6, g(x) = \frac{3x + 2}{1 - x}$ và $h(x) = \ln |x + 3|$

Bài 2.14 Cho hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x) = x^2 - 3$ và $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$. Hãy tìm $f(A), g(A), f^{-1}(A)$ và $g^{-1}(A)$ với

a) $A = \{2, 3\}$

c) $A = (-3, 3)$

e) $A = [-7, 2]$

b) $A = \{-3, -2, 2, 3\}$

d) $A = (-3, 2]$

f) $A = (-4, -3] \cup [5, 6]$

Bài 2.15 Tìm $f(A), f(B), f(C), f(D), f(E), f(\mathbb{R}), f^{-1}(G), f^{-1}(H), f^{-1}(K), f^{-1}(L), f^{-1}(M)$ và $f^{-1}(N)$ cho các ánh xạ sau

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ trong đó

• $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

• $H = [-7, -5]$

• $B = [1, 3]$

• $K = (-5, 5)$

• $C = (-1, 2)$

• $L = [7, +\infty)$

• $D = (-\infty, 0]$

• $M = [1, 9)$

• $E = (3, +\infty)$

• $N = (-3, 2]$

• $G = \{-7, -5, -3, 1, 2, 5, 7, 9\}$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ với $f(x) = \begin{cases} x + 7 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 5 - 2x & \text{nếu } 0 < x < 3 \\ x - 1 & \text{nếu } x \geq 3 \end{cases}$ trong đó

- $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$
- $B = [-2, 1]$
- $C = (2, 4)$
- $D = (-1, 5]$
- $E = [0, +\infty)$
- $G = \{-5, -2, -1, 0, 4, 5, 7, 10, 11\}$
- $H = [-5, -1]$
- $K = (-\infty, 0]$
- $L = [-2, 4)$
- $M = (5, 10]$
- $N = (7, 11)$.

Bài 2.16 Chứng minh các ánh xạ dưới đây là song ánh và tìm ánh xạ ngược của chúng:

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$
- b) $h : [1, 2) \rightarrow [5, 7), h(x) = 3x + \frac{2}{x}$
- c) $p : \mathbb{R} \rightarrow (-2, 3), p(x) = \frac{9 - 2e^x}{e^x + 3}$
- d) $q : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-3\}, q(x) = \frac{5 - 3x}{x - 1}$
- e) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x - 3e^{-x} + 1$
- f) $r : (0, 3] \rightarrow (2, \frac{17}{4}], r(x) = (x+1) + \frac{1}{x+1}$

Bài 2.17 Với các ánh xạ đã cho ở bài trên, hãy tìm các ánh xạ u, v, w thỏa $p_{\circ}^{-1}u = g, v_{\circ}f = g$ và $f_{\circ}^{-1}w_{\circ}p = g$.