

Toán rời rạc

Tạ Thị Nguyệt Nga 2020

Abivin ra sao rồi?



→ Thuật toán?

→ Tối ưu

→ Đô thị

→ Rời rạc

Soure: Internet 2018

Tháng 6 năm 2019, Abivin vô địch, dành 1triệu usd ở giải các starup công nghệ thế giới

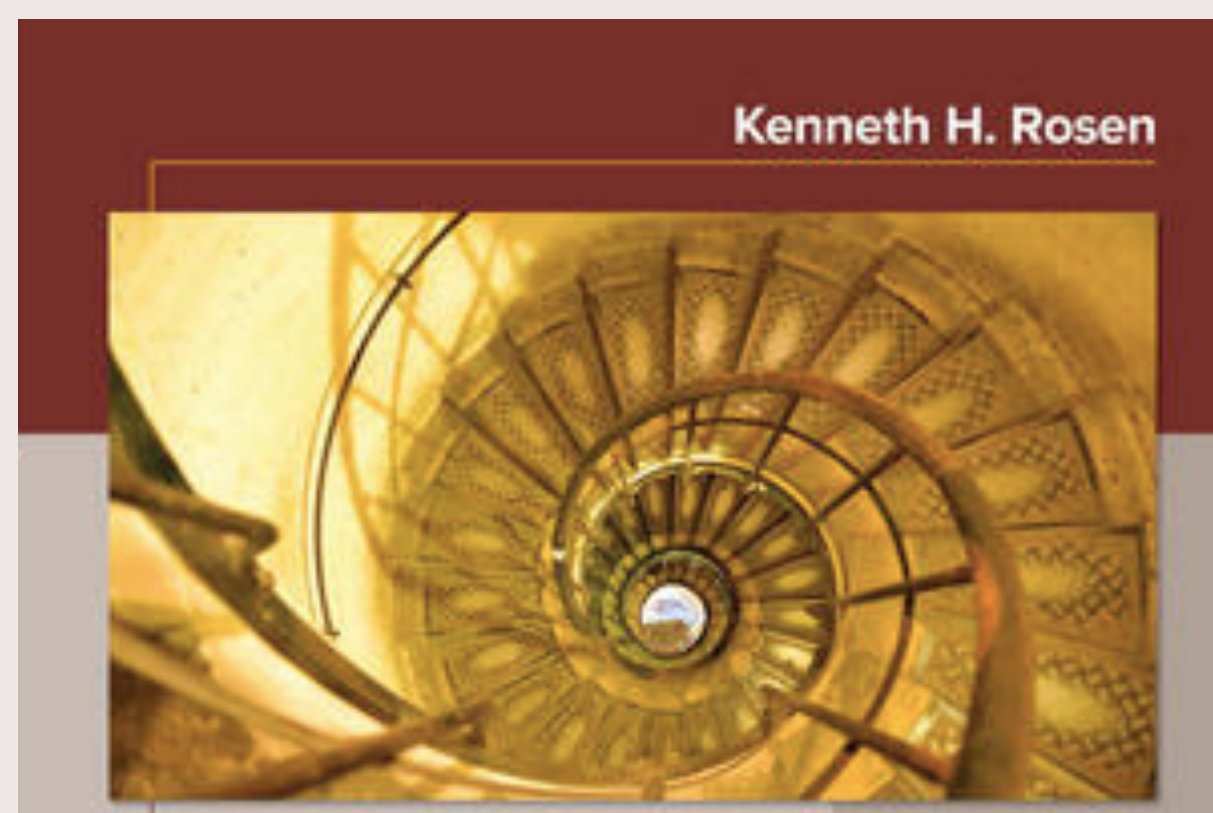
Nội dung

1. Cơ sở logic (2)
2. Tập hợp, ánh xạ (1)
3. Phương pháp đếm (1)
4. Hệ thức đệ quy (1)
5. Số nguyên (1)
6. Quan hệ (2)
7. Hàm Boole (2)



Tài liệu

1. Rosen, Kenneth H - **Discrete mathematics and its applications**-McGraw-Hill (2019).pdf
2. Mathematics for Computer Science, MIT Course Textbook 2018
3. David Liben-Nowell - Discrete Mathematics for Computer Science (2017)
4. Rosen, Kenneth H- Bản tiếng Việt, Toán rời rạc và ứng dụng, Nguyễn Văn Thiều dịch



- Điểm danh 7h40
- Vắng 3 buổi+ 1 buổi có phép
- Bài tập 20%
- Giữa kì 20%
- Cuối kì 60%
- Slides: Moodle cuối ngày.

1. Cơ sở logic

1. MỆNH ĐỀ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MỆNH ĐỀ

2. VỊ TỪ LƯỢNG TỪ

3. CÁC QUY TẮC SUY DIỄN



Mệnh đề

Định nghĩa

Mệnh đề toán học (gọi tắt là mệnh đề): là một phát biểu có giá trị chân lý xác định. Hoặc đúng hoặc sai, nhưng không thể vừa đúng vừa sai.

- Thường được ký hiệu: p, q, r ,
- Đúng: 1 hay T.
- Sai: 0 hay F

Câu hỏi, câu cảm thán, mệnh lệnh không phải là mệnh đề.

Ví dụ

➤ $1+1 = 3$

➤ 'good' in 'this is a great example'

➤ Số 5 là số nguyên tố

Mệnh đề

Ví dụ

- Taylor Swift là kỹ sư tin học
- Năm 2050 sẽ có máy tính lượng tử
- Ta là kẻ nói dối --> nghịch lý kẻ nói dối
- “This statement is false”

Chân trị của mệnh đề



Phép toán trên mệnh đề

Các phép nối mệnh đề

Tên	Viết tắt	Kí hiệu
Phép phủ định	Not	\neg
Phép hội	And	\wedge
Phép tuyển	Or	\vee
Phép loại trừ	Xor	\oplus
Phép kéo theo	Implies	\longrightarrow
Phép kéo theo hai chiều	Iff	\longleftrightarrow

Phép phủ định (not)

- Mệnh đề phủ định của mệnh đề P , được kí hiệu bởi $\neg P$ (\bar{P}), đọc là “không P ” hay “phủ định của P ”.
- Mệnh đề $\neg P$ có chân trị trái ngược với chân trị của P .

P	$\neg P$
T	F
F	T

- Phủ định của “ $2 > 0$ ” là “ $0 \leq 2$ ”
- $P = “a > b”$, thì $\neg P = “a \leq b”$
- “*cô A xấu*” có phải phủ định của “*cô A xinh*”?
- Tìm phủ định của “*Có ít nhất 15 bạn biết đánh đàn guitar*”

Phép nối liền (and)

- Phép toán \wedge , kết quả là mệnh đề hội.
- Mệnh đề hội của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \wedge Q$,
- đọc là “P và Q” hoặc “P hội Q”
- *Mệnh đề $P \wedge Q$ đúng khi và chỉ khi cả P và Q đúng.*
- *Ví dụ: Số 3 là số chẵn và số 5 là số nguyên tố.*

➤ Bảng chân trị:

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Phép nối rời (or)

- Phép toán: Tuyển \vee
- Mệnh đề tuyển của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \vee Q$,
- đọc là “ P hoặc Q ”, “ P tuyển Q ”
- *Mệnh đề $P \vee Q$ sai khi và chỉ khi cả P và Q đều sai*
- **Ví dụ:** Tôi tặng hoa cho em hoặc anh ta tặng hoa cho em.
- Thế còn: “Chỉ tôi hoặc anh ta được tặng hoa cho em thôi” thì sao?

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Phép loại trừ (xor)

- Mệnh đề loại trừ của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \oplus Q$, đọc là “Chỉ P hoặc Q ”,
- *Mệnh đề $P \oplus Q$ đúng khi chỉ một trong hai mệnh đề P hoặc Q đúng.*
- “với số nguyên x thì chỉ có thể $x > 0$ hoặc $x \leq 0$ ”
- Xét câu sau: Tôi chẳng thể vừa uống nước vừa nói được, tôi sẽ bị sặc mất. $P, Q, P \oplus Q$???

➤ Bảng chân trị

P	Q	$P \oplus Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Phép kéo theo (implies)

- Mệnh đề kéo theo của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \rightarrow Q$, đọc là “ P suy ra Q ”
- *Mệnh đề $P \rightarrow Q$ sai khi và chỉ khi P đúng và Q sai.*
- Ví dụ? p : Tôi đói, q : Tôi ăn cơm

- Bảng chân trị:

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

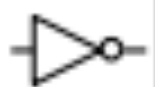


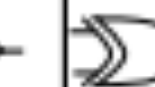
Phép kéo theo hai chiều (iff)

- Mệnh đề kéo theo hai chiều của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \longleftrightarrow Q$, đọc là “ P khi và chỉ khi Q ”.
- *Mệnh đề $P \longleftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q cùng giá trị chân lý.*
- Ví dụ?

- Bảng chân trị:

P	Q	$P \longleftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

CÁC PHÉP TOÁN LOGIC THEO NGÔN NGỮ LẬP TRÌNH

Name:	not	and	or	xor	implies	iff
Propositional logic:	\neg	\wedge	\vee	\oplus	\rightarrow	\leftrightarrow
Boolean algebra:	\bar{p}	pq	$+$	\oplus		
C/C++/Java (wordwise):	!	&&		!=		==
C/C++/Java (bitwise):	~	&		^		
Logic gates:						

```
// C program to demonstrate working of logical operators
#include <stdio.h>

int main()
{
    int a=10, b=4, c = 10, d = 20;

    // logical operators

    // logical AND example
    if (a>b && c==d)
        printf("a is greater than b AND c is equal to d\n");
    else printf("AND condition not satisfied\n");

    // logical AND example
    if (a>b || c==d)
        printf("a is greater than b OR c is equal to d\n");
    else printf("Neither a is greater than b nor c is equal "
               "to d\n");

    // logical NOT example
    if (!a)
        printf("a is zero\n");
    else printf("a is not zero");

    return 0;
}
```


Tổng hợp

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \longrightarrow Q$	$P \longleftrightarrow Q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T

Đố vui: phép toán gì mà cho ra hằng đúng?
Dù P,Q như thế nào, thì luôn cho kết quả là
một mệnh đề đúng?

Ví dụ

P= “Anh yêu em”

Q= “Trái đất quay quanh mặt trời”

➤ $P \rightarrow Q$?

➤ “Vì anh yêu em nên trái đất quay quanh mặt trời”

➤ $(\neg P) \vee Q$

➤ **Mệnh đề** hay một **suy diễn**???



Dạng mệnh đề

Định nghĩa

- **Dạng mệnh đề** là một biểu thức câu tạo từ
 - Hằng mệnh đề
 - Biến mệnh đề p, q, r, \dots
 - Các phép toán $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \longrightarrow, \longleftrightarrow$ và dấu ngoặc $()$.
- $E(p, q) = \neg (\neg p \wedge \neg q)$
 $E(p, q, r) = (p \longrightarrow q) \vee (q \wedge r)$
- **Bảng chân trị của $E(p, q, r)$** là bảng ghi tất cả các trường hợp chân trị có thể xảy ra đối với dạng mệnh đề E theo chân trị của các biến mệnh đề p, q, r .

Dạng mệnh đề

Ví dụ

➤ Thứ tự ưu tiên:

- ❖ Mức 1 \neg
- ❖ Mức 2 \wedge, \vee, \oplus
- ❖ Mức 3 $\rightarrow, \leftrightarrow$

➤ Ví dụ

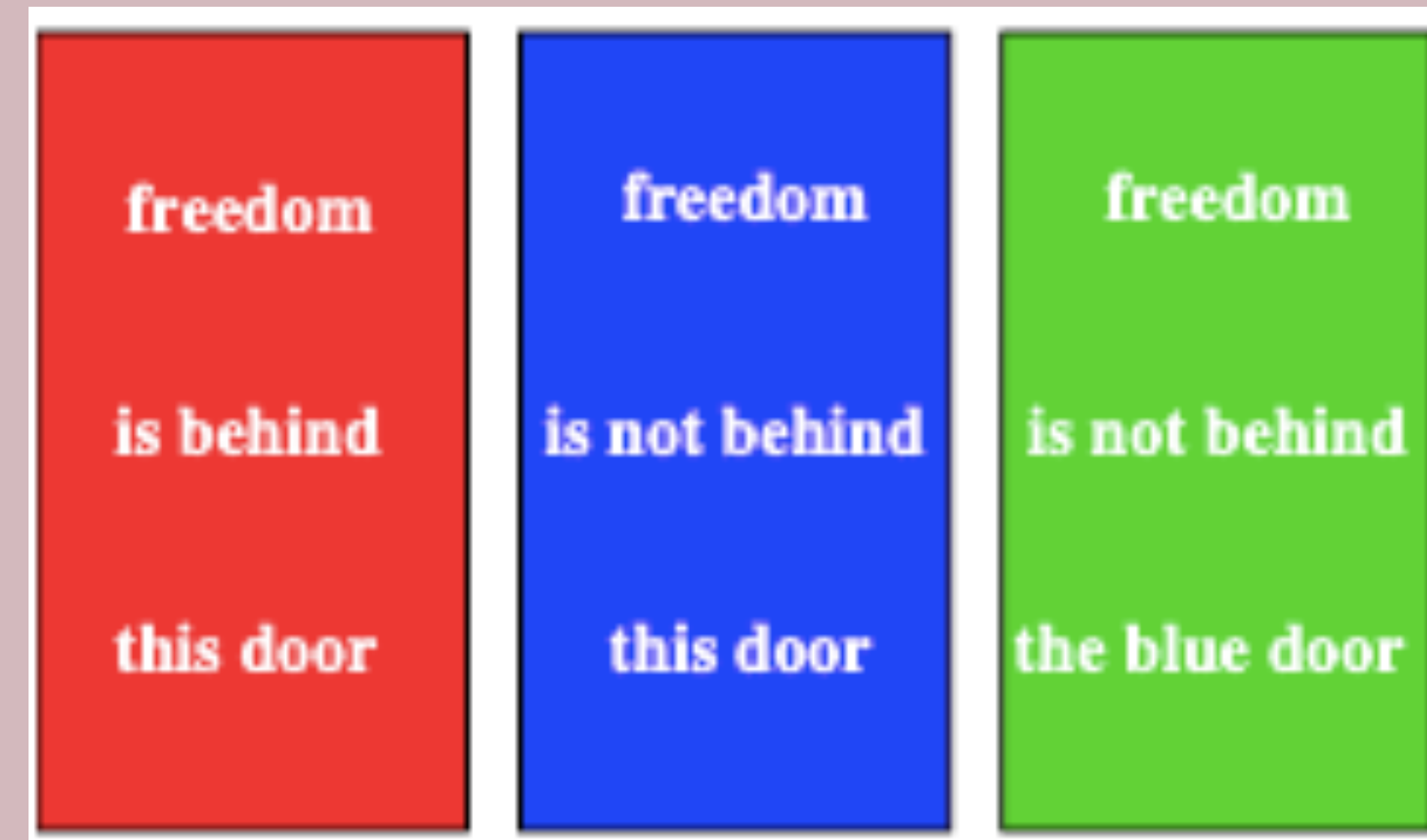
- ❖ $\neg p \wedge q \rightarrow r \vee s$ có nghĩa $[(\neg p) \wedge q] \rightarrow (r \vee s)$
- ❖ $\neg p \oplus q \vee s$ có thể đặt dấu ngoặc vô, để chỉ rõ hơn.
- ❖ Lập bảng chân trị của $\neg(p \oplus q) \vee r$

p	q	r	$p \oplus q$	$\neg(p \oplus q)$	$\neg(p \oplus q) \vee r$
1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1

ĐÂU LÀ CÁNH CỬ TỰ DO?

- Kyle, Neal và Grant thấy mình bị mắc kẹt trong một hầm ngục tối tăm và lạnh lẽo.
- Sau khi tìm kiếm, các cậu bé tìm thấy ba cánh cửa, cánh cửa đầu tiên màu đỏ, cánh cửa thứ hai màu xanh lam và cánh cửa thứ ba màu xanh lá cây.
- Đằng sau một trong ba cánh cửa là con đường dẫn đến tự do. Tuy nhiên, đằng sau hai cánh cửa còn lại là con rông phun lửa độc ác. Mở cửa cho rông đồng nghĩa với cái chết.

Lược dịch từ booklet của Chiara G. & Luciano S.



BIẾT RẰNG:

It nhất một mệnh đề trên ba cánh cửa là đúng
và cũng có **ít nhất một trong chúng là sai** .

LỜI GIẢI

(trên lớp)

- r : “freedom is behind the red door”
- b : “freedom is behind the blue door”
- g : “freedom is behind the green door”

$$(r \wedge \neg b \wedge \neg g) \vee (\neg r \wedge b \wedge \neg g) \vee (\neg r \wedge \neg b \wedge g)$$

r
freedom
is behind
this door

$\neg b$
freedom
is not behind
this door

$\neg b$
freedom
is not behind
the blue door

BIẾT RẰNG:

$$r \vee \neg b$$

It **nhất một** mệnh đề trên ba cánh cửa là đúng
và cũng có **ít nhất một** trong chúng là sai .

$$\neg r \vee b$$

r	b	g	2.5	2.6	2.5 \wedge 2.6
T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T

Hằng mệnh đề

- **Hằng đúng** là dạng mệnh đề chỉ nhận giá trị đúng bất kể giá trị các biến
- **Hằng sai** là dạng mệnh đề chỉ nhận giá trị sai bất kể giá trị các biến
 - 2 là số chẵn
 - $(p \wedge \neg p)$ là hằng sai.
 - “ $p \Leftrightarrow q$ ” khi và chỉ khi “ $p \longleftrightarrow q$ là hằng đúng”
- Xác định xem các dạng mệnh đề sau là hằng đúng hay hằng sai:

- $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
- $(p \vee q \rightarrow r) \vee p \vee q$
- $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r \wedge q) \wedge (q \rightarrow \neg r \wedge p)$
- $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- $(p \vee q) \wedge (\neg q \wedge \neg p)$
- $(\neg p \rightarrow q) \vee ((p \wedge \neg r) \leftrightarrow q)$

Tương đương logic

Luật tương đương

- Hai dạng mệnh đề là tương đương logic khi và chỉ khi chúng có cùng bảng chân trị.
- $p \Leftrightarrow q$ khi và chỉ khi $p \leftrightarrow q$ là hằng đúng
- Phân biệt \Leftrightarrow và \leftrightarrow .
- Ví dụ “ x, y là số tự nhiên, $x=y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ ”

LUẬT LOGIC

Soure: Bài giảng TS Lê Văn Luyện

1. Phủ định của phủ định

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

2. Luật De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

3. Luật giao hoán

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

4. Luật kết hợp

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

5. Luật phân phối

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

6. Luật lũy đẳng

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

7. Luật trung hòa

$$p \vee 0 \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$$

8. Luật về phần tử bù

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{0}$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{1}$$

9. Luật thống trị

$$p \wedge \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0}$$

$$p \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1}$$

10. Luật hấp thu

$$\mathbf{p} \vee (\mathbf{p} \wedge q) \Leftrightarrow \mathbf{p}$$

$$\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \vee q) \Leftrightarrow \mathbf{p}$$

11. Luật về phép kéo theo

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

LUẬT DE MORGAN

2. Luật De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

- Ví dụ: p = “tôi mệt”, q = “tôi đói”
 $\neg(p \wedge q)$ = “Không có chuyện tôi mệt và đói”
 $\neg p \vee \neg q$ = “tôi không mệt hoặc tôi không đói”
- Chứng minh?

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

LUẬT LOGIC

Ví dụ. Cho p, q, r là các biến mệnh đề. Chứng minh rằng:

$$(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

Cách 1

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0

Cách 3

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \rightarrow r \quad (\text{Luật về phép kéo theo})$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \quad (\text{Luật về phép kéo theo})$$

$$\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee r \quad (\text{Luật De Morgan})$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r \quad (\text{Luật phủ định của phủ định})$$

$$\Leftrightarrow r \vee (p \wedge \neg q) \quad (\text{Luật giao hoán})$$

$$\Leftrightarrow (r \vee p) \wedge (r \vee \neg q) \quad (\text{Luật phân phối})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \quad (\text{Luật về phép kéo theo})$$

Cách 2

(Tự làm)

$$(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow$$

LUẬT GIAO HOÁN

3. Luật giao hoán

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

Ngôn ngữ:

“Văn Toàn đá bóng vu vơ và bóng bay vào lưới”

➤ p = “ Văn Toàn đá bóng vu vơ”

➤ q = “bóng bay vào lưới”



Vị từ

Vị từ là một phát biểu có dạng $p(x, y...)$ trong đó $x, y...$ là các biến thuộc tập hợp A, B cho trước sao cho

- Bản thân $p(x, y...)$ không phải là mệnh đề.
- Nếu thay $x, y...$ thành các giá trị cụ thể thì $p(x, y...)$ là mệnh đề.

Ví dụ:

- $p(n) = "n^2 + 1 \text{ là số lẻ}"$
- $p(x, y) = "x \text{ is prefix of } y"$.
 - Với x là ab và y là abc . $p(x, y)$ là gì?
 - Thế còn với x là 2 và y là 5 thì sao?

Lượng từ

Cho $p(x)$ là một vị từ theo một biến xác định trên A .

Mệnh đề “ $\forall x \in A, p(x)$ ” đọc là “với mọi x thuộc A sao cho $p(x)$ ” là mệnh đề đúng khi và chỉ khi $p(a)$ luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$.

Mệnh đề “ $\exists x \in A, p(x)$ ” đọc là “tồn tại x thuộc A sao cho $p(x)$ ” là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị $a \in A$ sao cho $p(a)$.

VÍ DỤ: TẤT CẢ CÁC CÔ GÁI ĐỀU ĐẸP.
CÓ MỘT CÔ GÁI MÀ TÔI SAY MÊ.
ANH CHẴNG MÊ CÔ NÀO.
ANH ẤY BẢO TÔI NÓI SAI RỒI.

TOÁN RỜI RẠC

Nov 11, 2019

ĐỀ GIỮA KÌ 2019

Test 1 (60 phút)

Logic (3đ)

L1. Lập bảng chân trị cho “A implies not(B implies C)”

L2. Cho mệnh đề “ $P(x, y)$: x đã từng leo lên đỉnh núi y .”

Ở đây x nằm trong tập sinh viên lớp CLC, y nằm trong tập tất cả các ngọn núi.

1.1 Biểu thức logic nào sau đây tương đương logic với câu sau: “Chẳng có sinh viên nào của lớp CLC từng leo lên đỉnh núi cả”

- A. $\forall x, \forall y, \text{not } P(x, y).$
- B. $\exists x, \exists y, \text{not } P(x, y)$
- C. $\text{not } (\forall x, \forall y, P(x, y))$
- D. $\text{not } (\exists x, \exists y, P(x, y))$

1.2 Viết biểu thức logic cho câu nói sau: “Chẳng ai trong số sinh viên lớp CLC từng leo được lên đỉnh của hai ngọn núi cả”

Bài 2 Tìm phủ định các mệnh đề

- Một bạn đưa mệnh đề, danh mệnh đề
- Viết thành dạng logic
- Một bạn phủ định.
- Viết thành dạng logic

BÀI 3

‘Let $L(t)$ be the proposition “*At time t , it lasts in love*” and let $H(t)$ be the proposition “*At time t , it hurts in love*”. Translate the logical statement

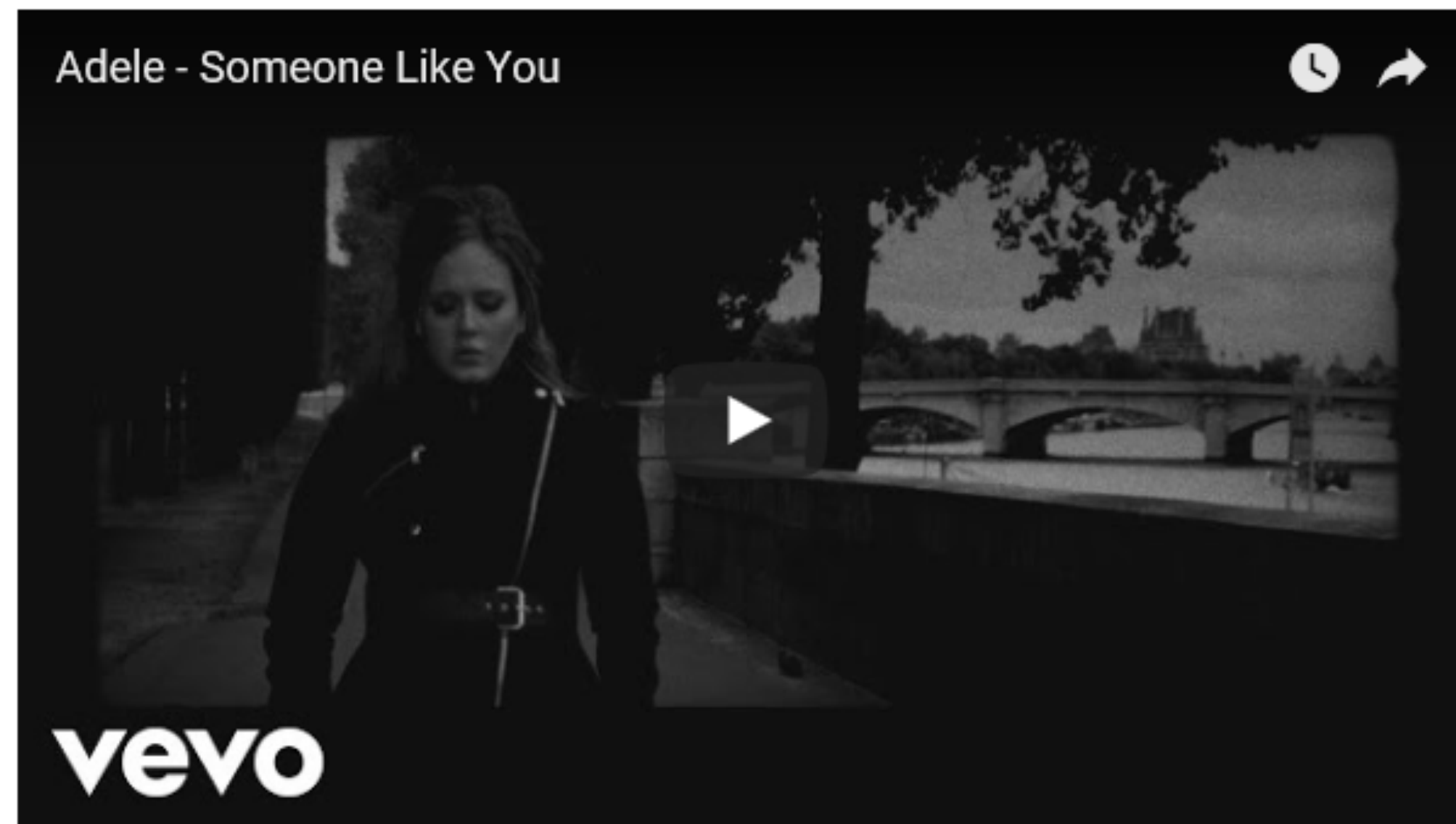
$$\exists t_1(L(t_1)) \wedge \exists t_2(H(t_2))'$$

Predicate Logic and Popular Culture (Part 149): Adele

“ Let $L(t)$ be the proposition “At time t , it lasts in love,” and let $H(t)$ be the proposition “At time t , it hurts in love.” Translate the logical statement

$$\exists t_1(L(t_1)) \wedge \exists t_2(H(t_2)).$$

This matches part of “Someone Like You,” by Adele.



1. Cơ sở logic (tiếp)

1. MỆNH ĐỀ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MỆNH ĐỀ
2. VỊ TỪ LƯỢNG TỪ

3. CÁC QUY TẮC SUY LUẬN

- CÁC QUY TẮC SUY LUẬN
- CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

