Toán rời rạc

QUAN HỆ

Tạ Thị Nguyệt Nga 2020

- QUAN HỆ LÀ GÌ?
- TÍNH CHẤT CỦA QUAN HỆ
- QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG
- QUAN HỆ THỨ TỰ VÀ QUAN HỆ THỨ TỰ TOÀN PHẦN

ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: Một quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B là tập con của tích Descartes A × B.

- Với quan hệ trên tập $A \times A$, để đơn giản đôi khi ta cũng gọi là "quan hệ trên A".
- Ví dụ:
  1. Nếu $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{1,2\}$ thì

     $R = \{(0,1), (0,2), (2,2), (3,2)\}$ là một quan hệ trên $A \times B$.
  2. Quan hệ bạn bè, quan hệ bố mẹ con cái, anh chị em….
  3. "$\leq$" là một quan hệ trên R, với $\leq$ là tập $\{(x, y)$ với x không lớn hơn $y\}$
  4. {⟨R.Rivest,2002⟩,⟨A.Shamir,2002⟩,⟨L.Adleman,2002⟩,⟨A.Kay,2003⟩, ⟨V.Cerf, 2004⟩, ⟨R.Kahn, 2004⟩, ⟨P.Naur, 2005⟩, ⟨F.Allen, 2006⟩} là một quan hệ trên tập Tên × {2002, 2003, 2004, 2005, 2006}, biểu thị mối quan hệ giữa tên các nhà khoa học và năm họ nhận được giải Turing Award

VÍ DỤ 1

- Hàm số là gì?
- Mở rộng của khái niệm hàm số

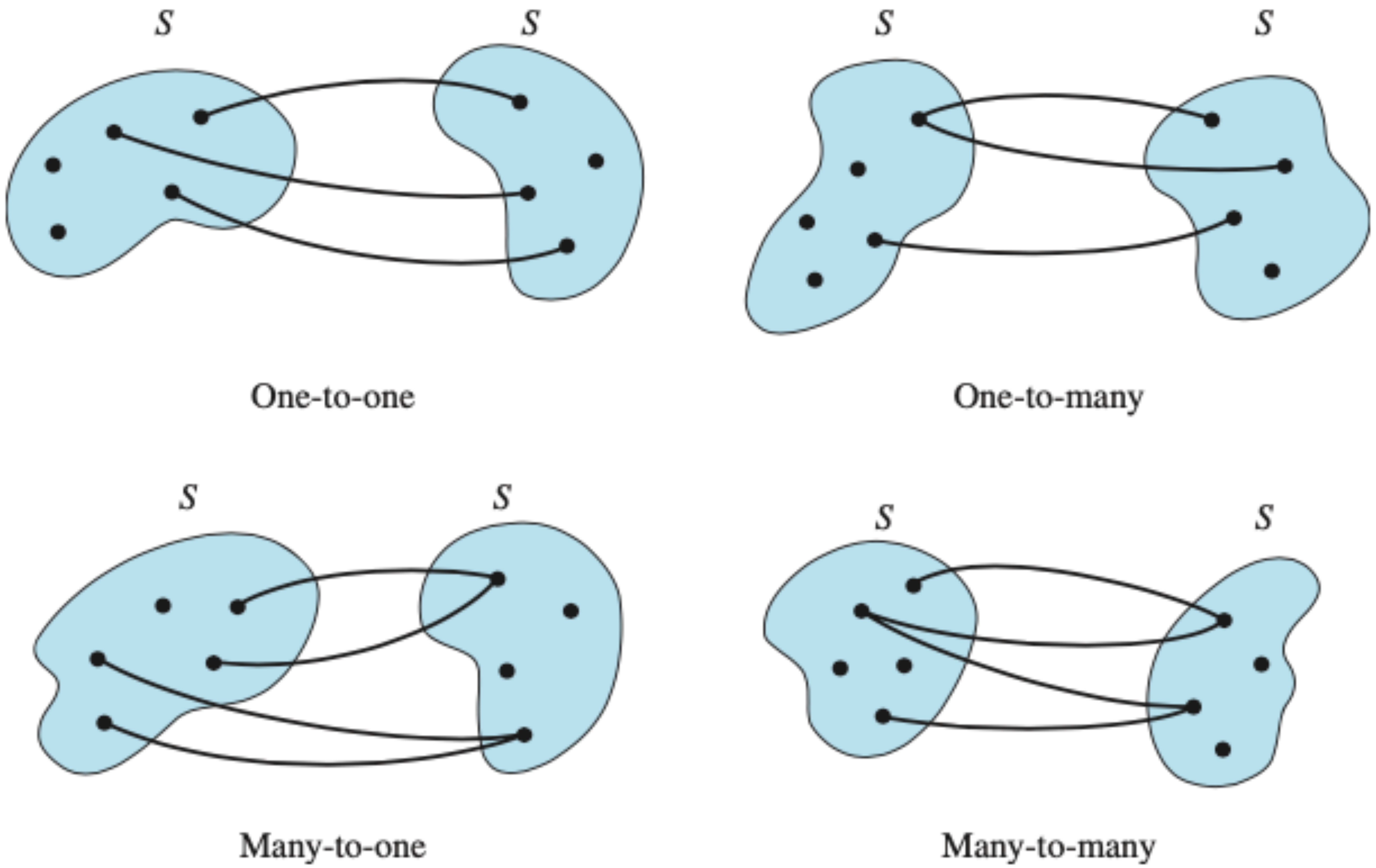
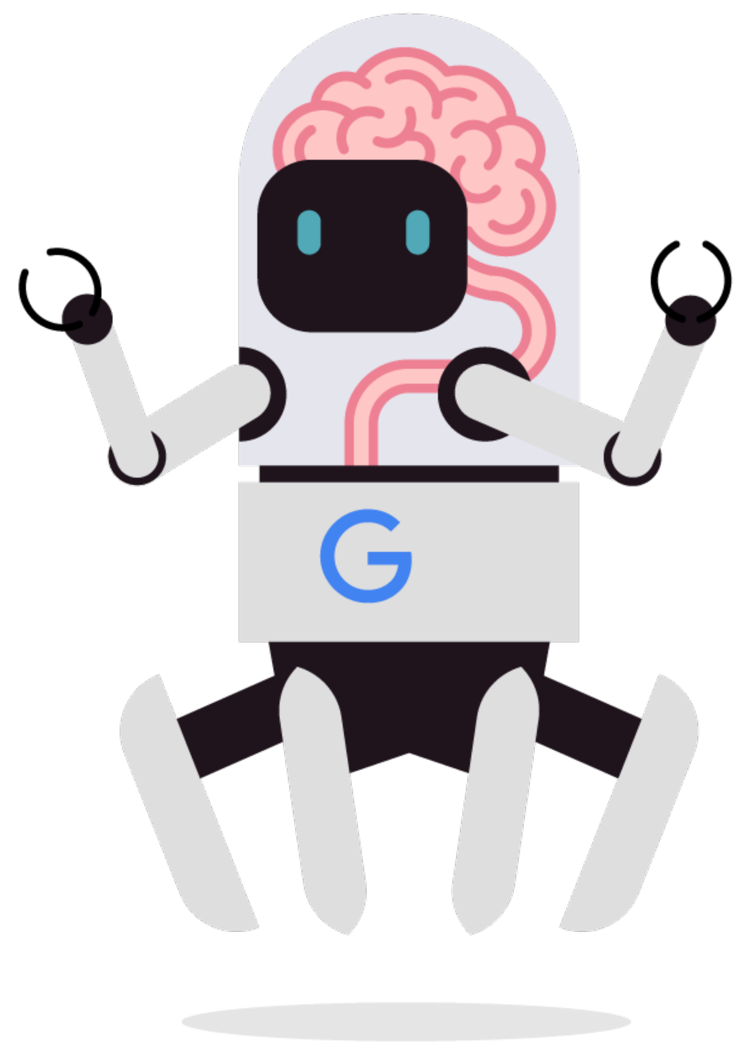


Figure 5.1

VÍ DỤ 2

- Xét quan hệ *isPrefix* như sau:
  - Với hai chuỗi bit x, y, $(x, y) \in isPrefix$ khi và chỉ khi y bắt đầu bằng chính xác x. Sau các bit của x, y có thể chứa các bít khác.
  - Ví dụ (001, 001110) $\in isPrefix$. Tức 001 là bắt đầu của 001110.
  - 001 không là bắt đầu của 1001. Tức (001, 1001) $\notin isPrefix$
  - Hãy viết tất cả các phần tử của is*Prefix* trên tập bít có độ dài nhỏ hơn hoặc bằng 2 . Kí hiệu $\emptyset$ là bit rỗng.
- Thuật toán Search của Google.
  - (x,y) $\in ismatch$ khi và chỉ khi chuỗi bít y chứa chuỗi bít x
- Thuật toán Rankbrain?



VÍ DỤ 3

- Các quan hệ số học
  1. divides: $R_1 = \{\langle n, m\rangle : m \mod n = 0\}$
  2. greater than: $R_2 = \{\langle n, m\rangle : n > m\}$
  3. less than or equal to: $R_3 = \{\langle n, m\rangle : n \leq m\}$
  4. square: $R_4 = \{\langle n, m\rangle : n^2 = m\}$
  5. equivalent mod 5: $R_5 = \{\langle n, m\rangle : n \mod 5 = m \mod 5\}$
- Với Σ là tập tất các các chuỗi kí tự (hữu hạn). Các quan hệ sau được xét trên Σ
  1. $\langle x, y\rangle \in R$ nếu $|x| \geq |y|$. (Độ dài của chuỗi *x*- số các chữ của *x*- *kí hiệu là* $|x|$.)
  2. $\langle x, y\rangle \in S$ nếu x không đứng sau y theo thứ tự bảng chữ cái
  3. $\langle x, y\rangle \in T$ nếu x chứa ít từ "gà rán" hơn y.

BIỂU DIỄN

- A={Jan, Feb, … Dec}
- B={28,29,30,31}
- Xét quan hệ SoNgay kí hiệu R
- xRy nếu y là số ngày trong tháng x, (x,y) $\in$ R
- y không là số ngày của x, $(x, y) \notin$ R, hay $x \not R y$
- Có thể biểu diễn quan hệ này dưới dạng bảng, dạng đồ thi, bằng ma trận…

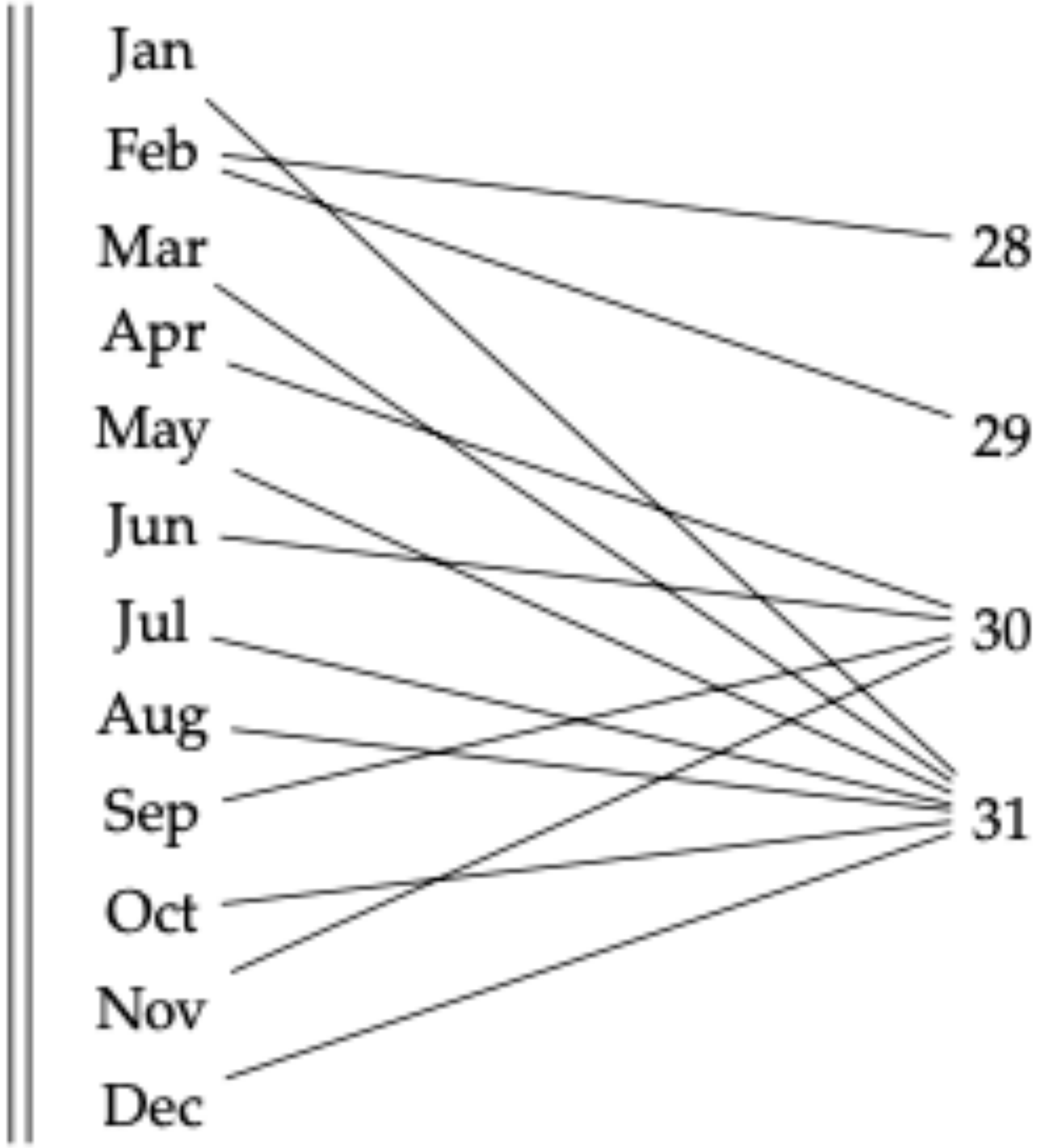
BIỂU DIỄN

- Xét quan hệ SoNgay kí hiệu R
- Bảng
- Đồ thị
- Ma trận

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_j, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

- $$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Month	Days
Jan	31
Feb	28
Feb	29
Mar	31
Apr	30
May	31
Jun	30
Jul	31
Aug	31
Sep	30
Oct	31
Nov	30
Dec	31



NGHỊCH ĐẢO

- Định nghĩa

Gọi R là một quan hệ trên $A \times B$. Nghịch đảo của R là quan hệ R^{-1} trên $B \times A$ được định nghĩa bởi $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$

- Ví dụ

1. Nghich đảo của $R_3 = \{\langle n, m\rangle : n \leq m\}$ là quan hệ $\geq$
2. Nghịch đảo của $R = \{(a, b) | a + b \leq 5\}$ là gì?
3. Nghịch đảo của SoNgay là gì?
4. R={ ⟨1,2⟩,⟨1,3⟩,⟨1,4⟩,⟨1,5⟩,⟨1,6⟩,

   ⟨2, 2⟩, ⟨2, 4⟩, ⟨2, 6⟩, ⟨3, 3⟩, ⟨3, 6⟩, ⟨4, 4⟩, ⟨5, 5⟩, ⟨6, 6⟩ } thì R^{-1} ?
5. Quan hệ LàƯớc - LàBội?

- Định nghĩa

  Cho R là một quan hệ trên $A \times B$, S là một quan hệ trên $B \times C$ quan hệ hợp thành của R và S kí hiệu là $S \circ R$ là một quan hệ trên $A \times C$. Với $(a, c) \in S \circ R$ nếu tồn tại một b sao cho $(a, b) \in R$ và $(b, c) \in S$
- Ví dụ Hàm là một quan hệ. Hàm hợp thành là ví dụ của quan hệ hợp thành
- Bài tập 1 (nhóm 2- 10 phút)
  - Tự cho quan hệ R_1, R_2 để tìm $R_1 \circ R_2$, R_1^{-1}. Tìm không được, cho lại.
  - Tính $R_1^{-1} \circ R_1$ và $R_1 \circ R_1^{-1}$ nếu tính được. Nếu không cho lại R_1
  - Kết luận.

MỞ RỘNG: QUAN HỆ N-NGÔI

- Quan hệ n-ngôi trên tập $A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots A_n$ là tập con của tập $A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots A_n$.
- Ví dụ quan hệ 3-ngôi trên R^3:(a, b, c) $\in R$ nếu $a \leq b \leq c$.
- Quan hệ 4-ngôi trên tập

Tên×{0,1,2…255} × {0,1…255} × {0,1…255} là quan hệ giữa màu sắc và các thành phần màu tương ứng.

name	red	green	blue
Green	0	128	0
Lime	0	255	0
Magenta	255	0	255
Maroon	128	0	0
Navy	0	0	128
Olive	128	128	0
Purple	128	0	128
Red	255	0	0
Teal	0	128	128
White	255	255	255
Yellow	255	255	0

Figure 8.10: Some RGB colors.

TÍNH CHẤT

Cho quan hệ R trên A,

- R là phản xạ (reflexive) $\Leftrightarrow \forall x \in A, xRx$
- R là đối xứng (symmetric) $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy \Rightarrow yRx$
- R là phản xứng (antisymmetric) $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy$ và $yRx \Rightarrow x = y$
- R là bất đối xứng (asymmetric) $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy \Rightarrow y\not{R}x$
- R là bắc cầu (transitive) $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy$ và $yRz \Rightarrow xRz$

Xét quan hệ *TonglaChan* trên Z, (x, y) $\in R$ nếu x+y chẵn. Ta có

- *TonglaChan* phản xạ vì x+x chẵn
- *TonglaChan* đối xứng vì x+y chẵn suy ra y+x chẵn
- *TonglaChan* không phản xứng vì x+y chẵn và y+x chẵn không suy ra x=y
- *TonglaChan* bắc cầu vì x+y chẵn, y+z chẵn suy ra x+z chẵn

QUAY LẠI VÍ DỤ 3

- Các quan hệ số học
  1. divides: $R_1 = \{\langle n, m\rangle : m \mod n = 0\}$
  2. greater than: $R_2 = \{\langle n, m\rangle : n > m\}$
  3. less than or equal to: $R_3 = \{\langle n, m\rangle : n \leq m\}$
  4. square: $R_4 = \{\langle n, m\rangle : n^2 = m\}$
  5. equivalent mod 5: $R_5 = \{\langle n, m\rangle : n \mod 5 = m \mod 5\}$
- Với Σ là tập tất các các chuỗi kí tự (hữu hạn). Các quan hệ sau được xét trên Σ
  1. $\langle x, y\rangle \in R$ nếu $|x| \geq |y|$. (Độ dài của chuỗi x- số các chữ của x- *kí hiệu là* $|x|$.)
  2. $\langle x, y\rangle \in S$ nếu x không đứng sau y theo thứ tự bảng chữ cái
  3. $\langle x, y\rangle \in T$ nếu x chứa ít từ “gà rán” hơn y.

BAO ĐÓNG CỦA QUAN HỆ

- Bao đóng của quan hệ R với tính chất T là
  - quan hệ nhỏ nhất R^c mà
    - $R \subseteq R^c$
    - R^c có tính chất T

reflexive-closure(R):
Input: a relation $R \subseteq A \times A$
Output: the smallest reflexive $R' \supseteq R$
1: **return** $R \cup \{\langle a, a \rangle : a \in A\}$

symmetric-closure(R):
Input: a relation $R \subseteq A \times A$
Output: the smallest symmetric $R' \supseteq R$
1: **return** $R \cup R^{-1}$

transitive-closure(R):
Input: a relation $R \subseteq A \times A$
Output: the smallest transitive $R' \supseteq R$
1: $R' := R$
2: **while** there exist $a, b, c \in A$ such that $\langle a, b \rangle \in R$ and $\langle b, c \rangle \in R$ and $\langle a, c \rangle \notin R'$:
3: $R' := R' \cup \{\langle a, c \rangle\}$
4: **return** R'

- Quan hệ LaCha. Bao đóng bắc cầu-phản xạ là gì ?

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

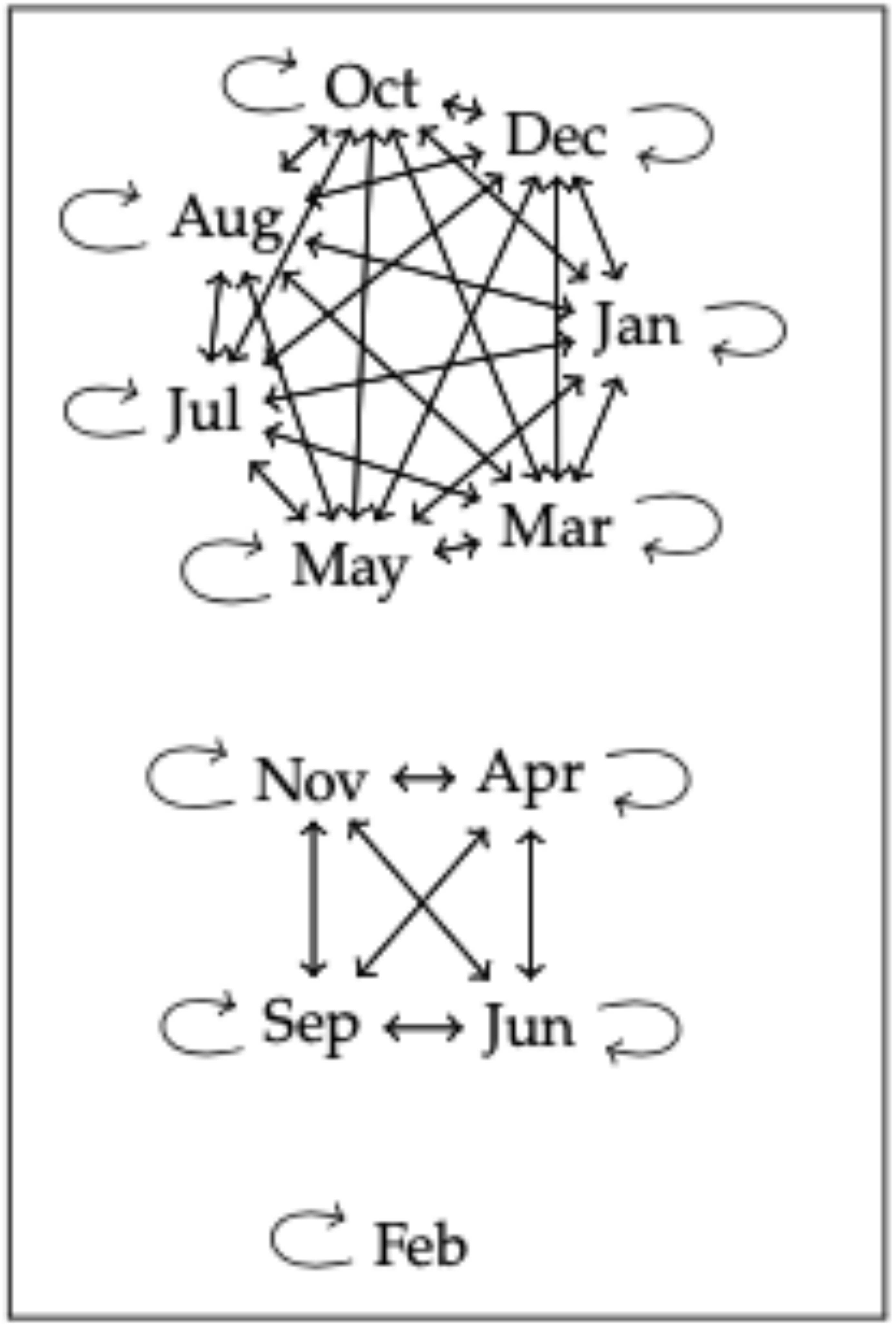
- Định nghĩa: Cho R là quan hệ trên tập hợp A. Ta nói R là quan hệ tương đương trên A nếu R thỏa mãn các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

- Ví dụ

  1. Quan hệ "quen nhau" có là quan hệ tương đương????
     aQuena, aQuenb thì bQuena, aQuenb và bQuenc có suy ra aQuenc?
  2. Quan hệ TonglaChan thì sao?
  3. Quan hệ đồng dư trên Z, $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \equiv y \mod n$
     Với quan hệ này ta đem tất cả các phần tử tương đương cho vào lớp tương đương trong Z_n
  4. $\langle x, y\rangle \in T$ nếu x chứa ít từ "gà rán" hơn y.

VÍ DỤ

- 10 phút
- Tự cho thêm ví dụ về quan hệ tương đương? hoặc không tương đương
- Trình bày ví dụ trước lớp và hỏi nó có là quan hệ tương tương hay không
- Lớp trả lời và giải đáp



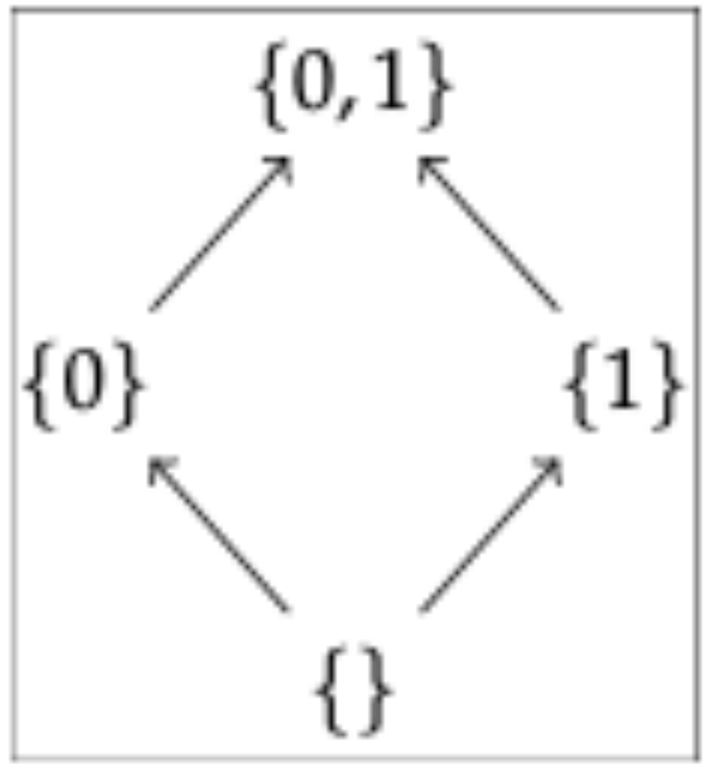
QUAN HỆ THỨ TỰ BỘ PHẬN

Quan hệ R trên tập hợp A được gọi là quan hệ thứ tự bộ phận nếu nó thỏa mãn các tính chất:

- R là phản xạ $\Leftrightarrow \forall x \in A, xRx$
- R là phản xứng $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy$ và $yRx \Rightarrow x = y$
- R là bắc cầu $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy$ và $yRz \Rightarrow xRz$

Khi đó (A, R) được gọi là một tập thứ tự. Nếu R là một thứ tự trên tập hợp A thì ta ký hiệu a $\preceq$b thay cho aRb, và ký hiệu a $\prec$ b khi a $\preceq$b nhưng a $\neq$ b

1. divides (reflexive): $R_1 = \{\langle n, m\rangle : m \bmod n = 0\}$.
2. greater than (irreflexive): $R_2 = \{\langle n, m\rangle : n > m\}$.
3. less than or equal to $R_3 = \{\langle n, m\rangle : n \leq m\}$
4. Subset $\subseteq$ trên tập $\mathscr{P}(\{0, 1\})$ là quan hệ thứ tự

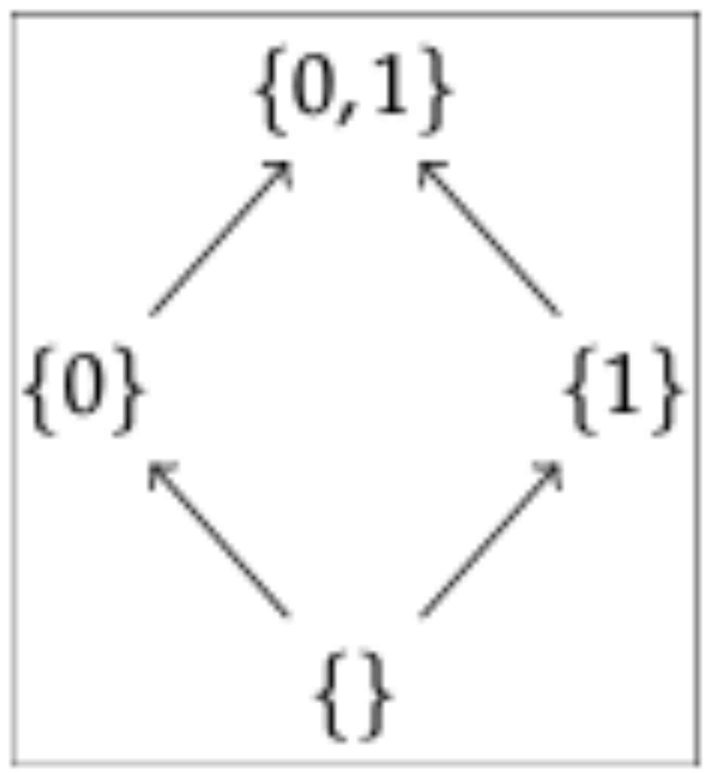


QUAN HỆ THỨ TỰ BỘ PHẬN NGẶT

Quan hệ R trên tập hợp A được gọi là quan hệ thứ tự bộ phận ngặt nếu nó thỏa mãn các tính chất:

- R là không phản xạ $\Leftrightarrow \forall x \in A, x \not R x$
- R là phản xứng $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy$ và $yRx \Rightarrow x = y$
- R là bắc cầu $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy$ và $yRz \Rightarrow xRz$

1. divides (reflexive): $R_1 = \{\langle n, m\rangle : m \bmod n = 0\}$.
2. greater than (irreflexive): $R_2 = \{\langle n, m\rangle : n > m\}$.
3. less than or equal to $R_3 = \{\langle n, m\rangle : n \leq m\}$
4. Subset $\subseteq$ trên tập $\mathscr{P}(\{0, 1\})$ là quan hệ thứ tự



PHẦN TỬ TRỘI

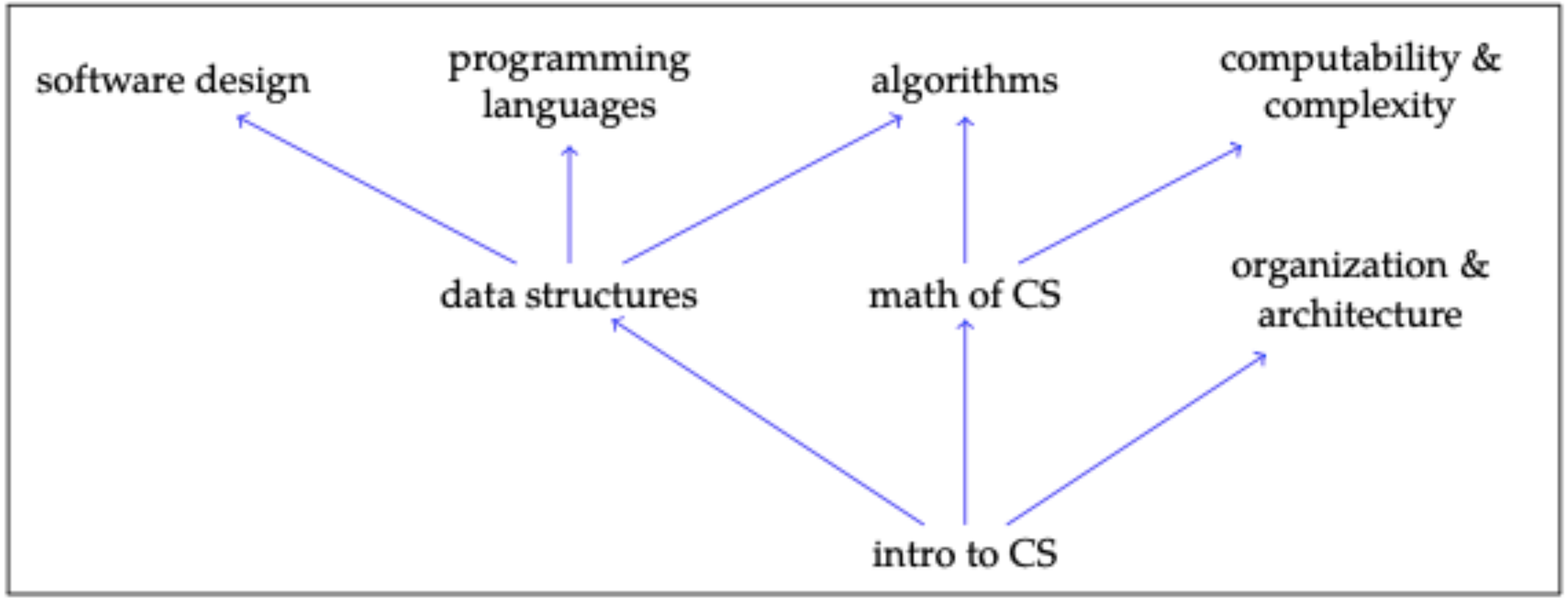
Cho $(A,\preceq)$ là một tập thứ tự và $x, y \in A$. Khi đó:

1 Nếu $x \preceq y$ thì ta nói y là trội của x hoặc x đúợc trội bởi y.

2 Nếu $x \prec y$ thì ta nói y là trội thật sự của x.

3 Nếu $x \preceq y$ và không tồn tại $z \in A$ sao cho $x \preceq z \preceq y$ thì ta nói y là trội trực tiếp của x.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, xét (A, LaUoc).



THỨ TỰ TOÀN PHẦN

- Các phần tử a và b của tập thứ tự $(A,\preceq)$ gọi là so sánh đủợc nếu $a \preceq b$ hay $b \preceq a$.

Nếu hai phần tử tùy ý của A đều so sánh được với nhau thì ta gọi nó là tập thứ tự toàn phần. Ta cũng nói rằng $\preceq$ là thứ tự toàn phần trên A.

Ngược lại, nó được gọi là tập thứ tự bộ phận.

- Với Σ là tập tất các các chuỗi kí tự (hữu hạn). Các quan hệ sau được xét trên Σ

  1. $\langle x, y\rangle \in R$ nếu $|x| \geq |y|$. (Độ dài của chuỗi x- số các chữ của x- *kí hiệu là* $|x|$.)
  2. $\langle x, y\rangle \in S$ nếu x không đứng sau y theo thứ tự bảng chữ cái
  3. $\langle x, y\rangle \in T$ nếu x chứa ít từ "gà rán" hơn y.

PHẦN TỬ CỰC TRỊ

Định nghĩa. Cho $(A, \preceq)$ là một tập thứ tự và $m \in A$. Ta nói

1. m là phần tử tối đại của A nếu $\forall\, x \in A,\ m \preceq x \rightarrow m = x$
2. m là phần tử tối tiểu củaA nếu $\forall\, x \in A,\ x \preceq m \rightarrow x = m$.
3. m là phần tử lớn nhất của A nếu $\forall\, x \in A,\ x \preceq m$.
4. m là phần tử nhỏ nhất của A nếu $\forall\, x \in A,\ m \preceq x$

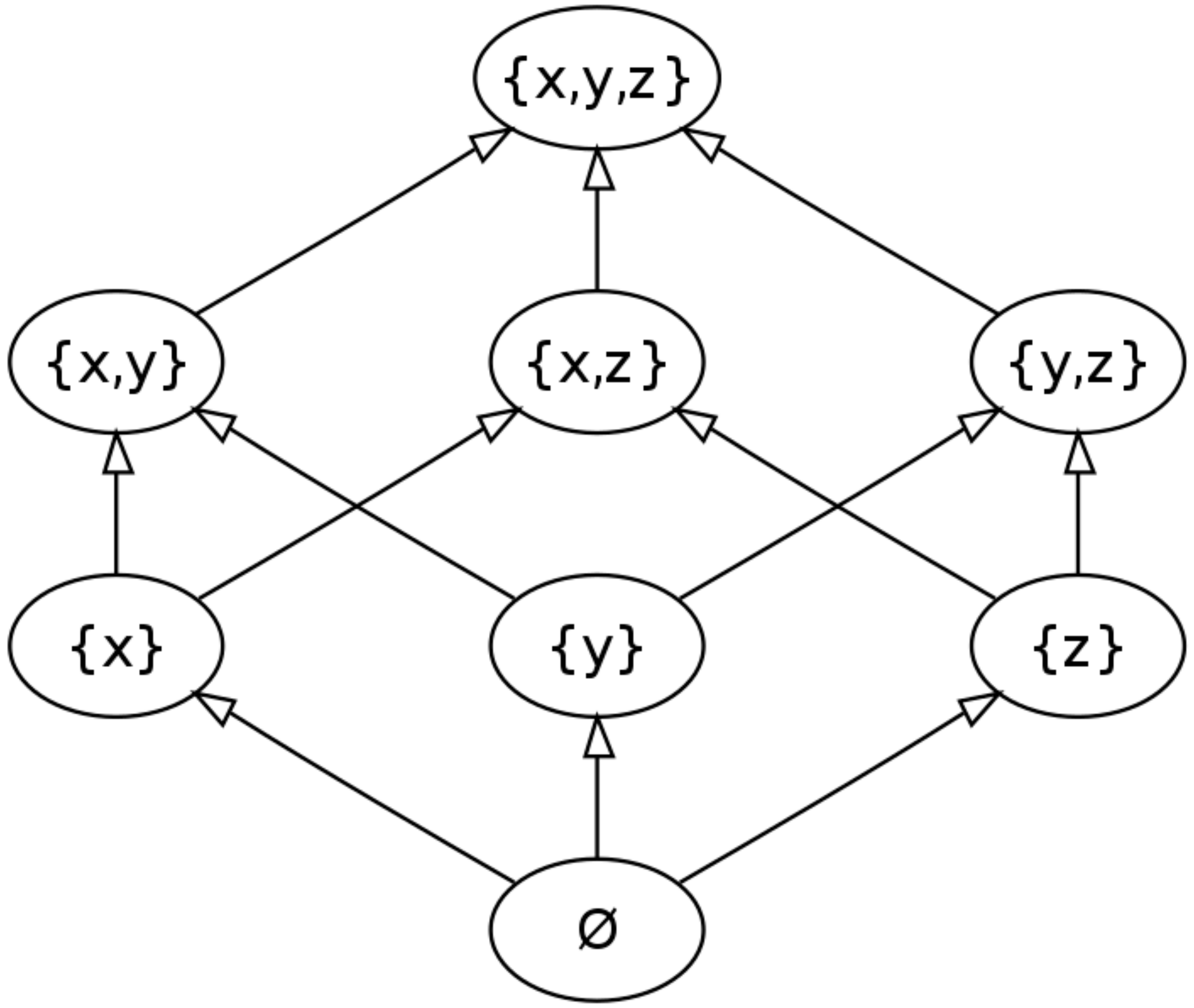
Ví dụ: Tìm phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất của tập thứ tự:

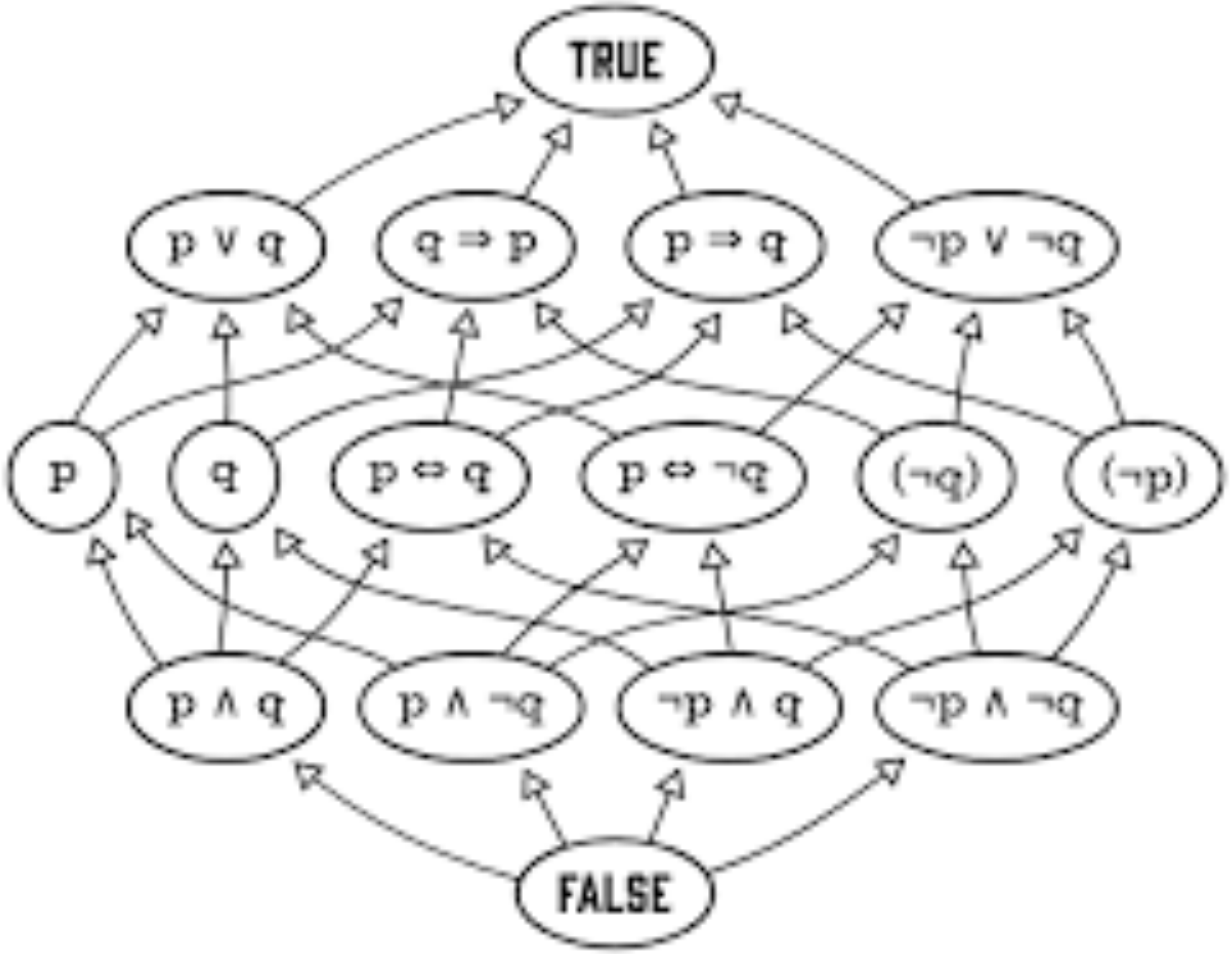
1. $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ Quan hệ chia hết
2. $(N, |)$ (Tập các số tự nhiên, với quan hệ chia hết)

BIỂU ĐỒ HASS

Biểu đồ Hasse của tập thứ tự (A, ≼) là một đồ thị có hướng

- Các đỉnh tương ứng với các phần tử của A.
- Các cung có hướng nối từ x đến y nếu y là trội trực tiếp của x





BIỂU ĐỒ HASS

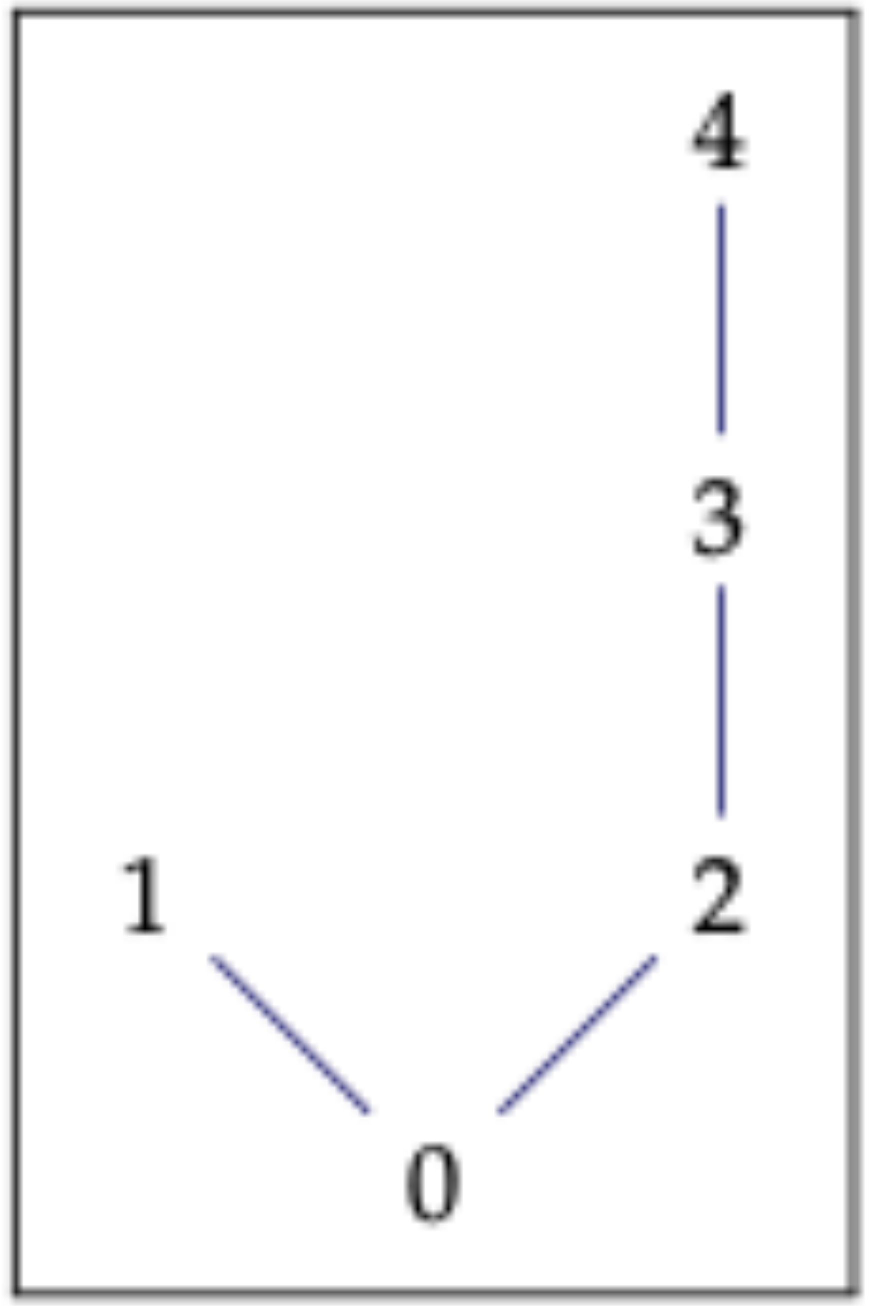
Xét quan hệ R cho bởi

$\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 0,4\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

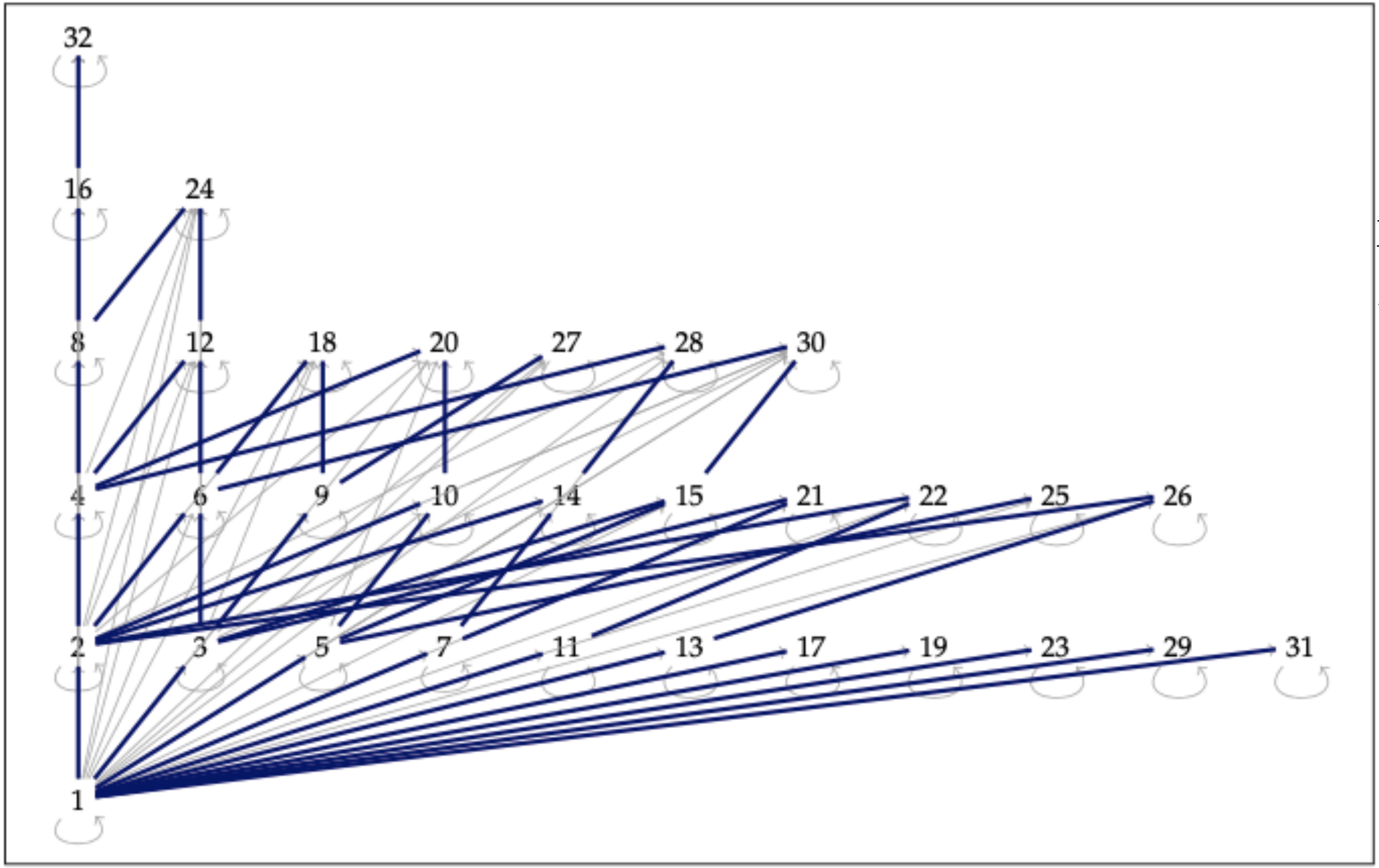
Bỏ biểu diễn dấu khuyên ở 5 đỉnh đi (tính phản xạ)

Có thể bỏ dấu mũi tên vì biểu đồ chỉ lên trên

Bỏ biểu diễn $\langle 0,3\rangle, \langle 0,4\rangle, \langle 2,4\rangle$ vì có thể suy ra từ tính bắc cầu



VẼ BIỂU ĐỒ HASS



Xét quan hệ

"chia hết" trên tập {1,2,...32}

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG TRÊN Z_n

Định nghĩa. Cho số tự nhiên $n \in N$, ta xét quan hệ R trên tập số nguyên Z được xác định bởi :

$$\forall x, y \in Z, xRy \Leftrightarrow x \equiv y \mod n$$

Ta đặt $Z_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots \overline{n-1}\}$

Tất cả các phần tử khi chi cho n có cùng số dư thì cho vào một "lớp". Kí hiệu gạch ngang trên đầu.

Ví dụ. Cho $n = 9$, $\forall x, y \in Z, xRy \Leftrightarrow x \equiv y \mod 9$. Ta có $3 \equiv 12 \mod 9$, nên $3R12$, hay $\overline{3} = \overline{12}$.

Trong lớp $\overline{3}$ sẽ gồm vô số phần tử: 3, 12, 21,… và $\overline{3} = \overline{-6} = \overline{-15} \ldots\ldots$,

Trong Z_9 thì $\overline{5} \,.\, \overline{6} + \overline{7} = ?$

- Trong Z_{13} thì $\overline{7} = \overline{20}$, $\overline{25} = \overline{12}$
- Các phép toán trên Z_n định nghĩa như sau: $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$

$$\bar{x} - \bar{y} = \overline{x - y}$$

$$\bar{x} \,.\, \bar{y} = \overline{x \,.\, y}$$

Khả nghịch trong Z_n

Định nghĩa. Cho số nguyên $n \geq 2$ và $x \in Z_n$. Phần tử $\bar{x}$được gọi là khả nghịch nếu tồn tại $\bar{y} \in Z_n$ sao cho $\bar{x}\bar{y} = \bar{1}$. Phần tử $\bar{y}$ được gọi là nghịch đảo của $\bar{x}$. Kí hiệu $\bar{x}^{-1}$.

Ví dụ Trong Z_9 thì $\bar{4}$ khả nghịch vì $\bar{4}\,.\,\bar{7} = \bar{1}$. Và $\bar{4}^{-1}$ là $\bar{7}$. Nghịch đảo của $\bar{4}$ là $\bar{7}$

$\bar{3}$ không khả nghịch vì sao?

Mệnh đề Cho $\bar{x} \in Z_n$. Chứng minh rằng $\bar{x}$ khả nghịch khi và chỉ khi $gcd(x, n) = 1$

gcd(x,n)=1 suy ra $1 = xa + nb$ suy ra $\bar{x}b = 1$ suy ra x khả nghịch

(Dùng thuật toán Euclide mở rộng)

Các nghịch đảo trong Z_{25}

2	3	4	6	7	8	9	11	12	24
13	17	19	21	18	22	14	16	23	24

Tìm nghịch đảo trong Z_n

- Step 1: nếu $(x, n) \neq 1$ thì x không có nghịch đảo
- Step 2: nếu $(x, n) = 1$ thì

1. Dùng Euclide mở rộng để tìm p, q

   $1 = px + qn$

2. Nghịch đảo của $\overline{x}$ là $\overline{p}$
3. Đổi từ $\overline{p}$ sang lớp rút gọn nằm trong $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots \overline{n-1}\}$

- Tìm nghịch đảo $\overline{4}$ trong Z_9
- —> Step 2 Vì $(4,9) = 1$

1. Tìm p, q để $1 = p.4 + q.9$
   Ta có $1 = -2.4 + 9$
2. Nghịch đảo của $\overline{4}$ là $\overline{-2}$
3. Trong Z_9 thì $\overline{-2} = \overline{7}$ nên nghịch đảo của $\overline{4}$ là $\overline{7}$

Giải phương trình $\overline{a}\,.\,\overline{x} = \overline{b}$ trong Z_n

- Giải phương trình trong Z_9: $\overline{4}\,.\,\overline{x} = \overline{5}$
- Tìm $\overline{x}$ trong Z_9 để $\overline{4}\,.\,\overline{x} = \overline{5}$
- Nhân cả hai vế với $\overline{7}$ ta được $\overline{7}\,.\,\overline{4}\,.\,\overline{x} = \overline{7}\,.\,\overline{5}$
- Rút gọn $\overline{x} = \overline{7}\,.\,\overline{5} = \overline{35} = \overline{8}$
- Kiểm tra: $\overline{4}\,.\,\overline{8} = \overline{32} = \overline{5}$ (đúng)
- *(Trong Z_9 bạn cứ làm phép toán thông thường, rồi chia cho 9 lấy phần dư thôi)*

Tổng quát:

- $\overline{a} = \overline{0}$ và $\overline{b} \neq \overline{0}$ thì vô nghiệm
    - $\overline{a} = \overline{0}$ và $\overline{b} = \overline{0}$, có n nghiệm: $\overline{0}, \overline{1}, \ldots \overline{n-1}$
- $\overline{a} \neq \overline{0}$ và khả nghịch thì $\overline{x} = (\overline{a})^{-1}\,.\,\overline{b}$
- $\overline{a} \neq \overline{0}$ và không khả nghịch thì $d = (a, n)$,
    - Nếu $d \nmid b$ vô nghiệm
    - Nếu $d \mid b$ đặt $a' = \dfrac{a}{d}, b' = \dfrac{b}{d}, n' = \dfrac{n}{d}$

    Khi đó $\overline{x} = \overline{x' + kn'}$ với x' là nghiệm của

    $a'\,.\,x' = b'$ trong $Z_{n'}$ $(0 \leq k \leq d - 1)$

Ví dụ

Giải phương trình $\overline{20}\,.\,\overline{x} + \overline{17} = \overline{2}$ trong Z_{85}

1. Chuyển về dạng $\overline{20}\,.\,\overline{x} = \overline{2} - \overline{17} = \overline{-15} = \overline{70}$
2. $\overline{a} = \overline{20}$, không khả nghịch có $d = (20{,}85) = 5$. d là ước của 70 nên ta đi xét phương trình.
   $\overline{4}\,.\,\overline{x'} = \overline{14}$ trong Z_{17}
   1. Nghịch đảo của $\overline{4}$ trong Z_{17} là $\overline{13}$ (*Nhắc lại: tìm nghịch đảo bằng thuật toán euclide mở rộng)*
   2. Vậy nghiệm sẽ là $\overline{x'} = \overline{13}\,.\,\overline{14} = \overline{12}$
3. Theo công thức tổng quát $\overline{x} = \overline{12 + 17k}$ với $0 \leq k \leq 4$. Vậy tập nghiệm $\{\overline{12}, \overline{29}, \overline{46}, \overline{63}, \overline{80}\}$

Tư tưởng chính

- Chuyển về dạng $ax = b$
- Rút gọn hai vế
- Giải bình thương

Giải phương trình $\overline{2}\,.\,\overline{x} + \overline{5} = \overline{8}$ trong Z_9

Giải phương trình $\overline{8}\,.\,\overline{x} + \overline{9} = \overline{21}$ trong Z_{40}

Giải phương trình $\overline{33}\,.\,\overline{x} + \overline{51} = \overline{45}$ trong Z_{57}

Tổng quát:

- $\overline{a} = \overline{0}$ và $\overline{b} \neq \overline{0}$ thì vô nghiệm
    - $\overline{a} = \overline{0}$ và $\overline{b} = \overline{0}$, có n nghiệm: $\overline{0}, \overline{1}, \ldots \overline{n-1}$
- $\overline{a} \neq \overline{0}$ và khả nghịch thì $\overline{x} = (\overline{a})^{-1}\,.\,\overline{b}$
- $\overline{a} \neq \overline{0}$ và không khả nghịch thì $d = (a, n)$,
    - Nếu $d \nmid b$ vô nghiệm
    - Nếu $d \mid b$ đặt $a' = \dfrac{a}{d}, b' = \dfrac{b}{d}, n' = \dfrac{n}{d}$

      Khi đó $\overline{x} = \overline{x' + kn'}$ với x' là nghiệm của

      $a'\,.\,x' = b'$ trong $Z_{n'}$ $(0 \leq k \leq d - 1)$