ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
Phần 1

1. Đại cương về ma trận
    - Khái niệm ma trận và các phép toán trên ma trận
    - Hạng của ma trận
    - Ma trận khả nghịch
2. Hệ phương trình tuyến tính
3. Định thức của ma trận

Định nghĩa và ví dụ của ma trận

Định nghĩa

Một *ma trận A* cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là một bảng chữ nhật gồm $m \times n$ số thực được viết thành m dòng, mỗi dòng gồm n phần tử như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ là phần tử ở dòng i cột j (hay còn gọi là vị trí (i, j) của A).

Ma trận A có thể được viết ngắn gọn là $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ hoặc đơn giản là $A = (a_{ij})$. Phần tử ở vị trí (i, j) của A được ký hiệu là a_{ij}.

Định nghĩa và ví dụ của ma trận

Tập hợp tất cả các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ được ký hiệu là $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Nếu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ thì A được gọi là ma trận vuông cấp n. Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu là $M_n(\mathbb{R})$ thay vì $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là *ma trận không* và được ký hiệu là 0.

Ví dụ

Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

a) A là ma trận cấp 2×3.

b) Các dòng của A là $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

c) Các cột của A là $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa và ví dụ của ma trận

Ví dụ

Xét ma trận $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

a) B là ma trận vuông cấp 2.

b) Các dòng của B là $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 4 & 10 \end{pmatrix}$.

c) Các cột của B là $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa

Hai ma trận $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ được gọi là *bằng nhau*, ký hiệu $A = B$, nếu với mọi i, j ta có $a_{ij} = b_{ij}$.

Định nghĩa và ví dụ của ma trận

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó, đường chứa các phần tử $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là *đường chéo chính* hay đường chéo của A. Ma trận A được gọi là *ma trận chéo* nếu mọi phần tử bên ngoài đường chéo của A đều bằng 0.

Ta thường dùng ký hiệu $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ để đại diện cho ma trận đường chéo cấp n có các phần tử trên đường chéo lần lượt là $a_1, \ldots, a_n$.

Ví dụ

Ma trận $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận chéo với các phần tử trên đường chéo là 1 và 2. Ma trận C còn được viết ngắn gọn là $C = \operatorname{diag}(1, 2)$.

Định nghĩa và ví dụ của ma trận

Định nghĩa

Ma trận đường chéo cấp n có tất các các phần tử trên đường chéo đều bằng 1 được gọi là *ma trận đơn vị* và được ký hiệu là I_n.

Ví dụ

a) Ma trận đơn vị cấp 2 là $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Ma trận đơn vị cấp 3 là $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa và ví dụ của ma trận

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Ma trận A được gọi là *ma trận tam giác trên (dưới)* nếu mọi phần tử bên dưới (trên) đường chéo của A bằng 0. Các ma trận tam giác trên và dưới được gọi chung là *ma trận tam giác*.

Ví dụ

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác trên; $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác dưới nhưng $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ không phải là ma trận tam giác trên cũng không phải ma trận tam giác dưới.

Các phép toán trên ma trận

Định nghĩa (Chuyển vị của ma trận)

Ma trận chuyển vị của $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ký hiệu A^T, là ma trận cấp $n \times m$, được xác định như sau:
Phần tử ở vị trí (i,j) của A^T được định nghĩa là phần tử ở vị trí (j,i) của A. Nói cách khác, cột (dòng) thứ i của A^T chính là dòng (cột) thứ i của A.

Định nghĩa (Nhân ma trận với một số)

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và số thực α. *Tích của α với A*, ký hiệu αA là ma trận cấp $m \times n$, được xác định như sau:
Phần tử tại vị trí (i,j) của αA được định nghĩa là tích của α với phần tử tại ví trí (i,j) của A. Nói cách khác, nếu ta nhân α vào từng vị trí của ma trận A ta sẽ thu được ma trận αA.
Ta ký hiệu $(-1)A$ bởi $-A$ và gọi là *ma trận đối* của A.

Các phép toán trên ma trận

Ví dụ

Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Ma trận chuyển vị của A là $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $-A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là *ma trận đối xứng* nếu $A = A^T$ và được gọi là *ma trận phản xứng* nếu $A = -A^T$.

Các phép toán trên ma trận

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận đối xứng còn $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận phản xứng.

Định nghĩa

Tổng của hai ma trận $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ký hiệu $A + B$, là ma trận cấp $m \times n$, được xác định như sau:
Phần tử tại vị trí (i, j) của $A + B$ được định nghĩa là tổng của phần tử tại vị trí (i, j) của A với phần tử tại vị trí (i, j) của B. Nói cách khác, nếu ta cộng các phần tử ở cùng vị trí của A và B với nhau ta sẽ thu được ma trận $A + B$.
Ta ký hiệu $A + (-B)$ bởi $A - B$ và đọc là A *trừ* B.

Các phép toán trên ma trận

Ví dụ

a) Xét $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ và $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Ta có:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$A_1 - A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Xét $A_3 = \begin{pmatrix} 19 & 29 & 37 \\ -13 & -17 & 2 \end{pmatrix}$ và $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Khi đó tổng của hai ma trận A_3 và A_4 không tồn tại vì A_3 và A_4 không cùng cấp.

Các phép toán trên ma trận

Định nghĩa

Tích vô hướng của vectơ dòng $(a_1 \dots a_n)$ và vectơ cột $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ được định nghĩa như sau: $(a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$

Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.1 + 2.0 + 3.1 = 4.$$

Các phép toán trên ma trận

Định nghĩa

Cho hai ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. *Tích của hai ma trận A* và *B*, ký hiệu AB, là ma trận cấp $m \times p$, được xác định như sau: Phần tử ở vị trí (i, j) của AB được định nghĩa là tích vô hướng của vectơ dòng i của A và vectơ cột j của B.

Ví dụ

Xét $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ và $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 25 & 5 \\ 53 & 40 & 58 & 20 \end{pmatrix}.$$

Các phép toán trên ma trận

Ví dụ

Xét $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ và $A_4 = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 19 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 17 \\ 20 & 29 & 31 & 37 \\ 0 & 0 & 5 & 17 \end{pmatrix}$. Khi đó tích của hai ma trận A_3 và A_4 không tồn tại vì số cột của A_3 khác số dòng của A_4.

Các phép toán trên ma trận

Chú ý

a) Tích hai ma trận không có tính giao hoán. Chẳng hạn
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

b) Từ đẳng thức $AB = 0$ ta không thể kết luận được $A = 0$ hay $B = 0$. Chẳng hạn $\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. Do đó khi giải các bài toán định tính liên quan đến phép nhân ma trận ta phải hết sức cẩn thận.

Các phép toán trên ma trận

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Lũy thừa* bậc $k \in \mathbb{N}$ của A, ký hiệu bởi A^k, là một ma trận vuông cấp n được xác định một cách quy nạp theo k như sau:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = A.A; \ldots; A^k = A^{k-1}.A$$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh được $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Đa thức ma trận

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và đa thức

$$f(x) = \alpha_m x^m + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Đặt $f(A) = \alpha_m A^m + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$. Khi đó $f(A)$ là ma trận vuông cấp n và được gọi là *đa thức theo ma trận A*.

Đa thức ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ và $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - 3A + 2I_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mối quan hệ giữa các phép toán trên ma trận

Định lý

Cho $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Khi đó:*

a) $A + B = B + A$;

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

c) $A + 0 = A$;

d) $A + (-A) = 0$;

e) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

f) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

g) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

h) $-(\alpha A) = (-\alpha)A = \alpha(-A)$.

Mối quan hệ giữa các phép toán trên ma trận

Định lý

Cho $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B, B' \in M_{n\times p}(\mathbb{R}), C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Khi đó:*

a) $(AB)C = A(BC)$;

b) $A0 = 0 = 0A$;

c) $A(B \pm B') = AB \pm AB'$;

d) $(A \pm A')B = AB \pm A'B$;

e) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Mối quan hệ giữa các phép toán trên ma trận

Định lý

Cho $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Khi đó:*

a) $(A^T)^T = A$;

b) $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$;

c) $(A \pm A')^T = A^T \pm A'^T$;

d) $A^T = A'^T \Leftrightarrow A = A'$;

e) $(AB)^T = B^T A^T$.

Một số trường hợp đặc biệt

Định lý

Cho $A = diag(a_1, \dots, a_n), B = diag(b_1, \dots, b_n)$ *và* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Khi đó:*

a) $A^T = A$;

b) $\alpha A = diag(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$;

c) $A \pm B = diag(a_1 \pm b_1, \dots, a_n \pm b_n)$;

d) $AB = diag(a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$.

Định lý

a) *Tổng, hiệu, tích, lũy thừa của các ma trận tam giác trên (dưới) là ma trận tam giác trên (dưới).*

b) *Ma trận chuyển vị của ma trận tam giác trên là ma trận tam giác dưới và ngược lại.*

Một số trường hợp đặc biệt

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Khi đó

a) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ và $5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$.

b) $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

c) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$.

Một số trường hợp đặc biệt

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Khi đó:

a) $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ và $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ đều là các ma trận tam giác trên.

b) $AB = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 8 \\ 0 & -20 & 29 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác trên.

c) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ là ma trận tam giác dưới.

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa

Phép biến đổi sơ cấp trên dòng là một phép biến đổi $\varphi : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ thuộc một trong ba loại sau:
Loại 1: Phép hoán vị hai dòng i và j của ma trận, ký hiệu $\varphi := d_i \leftrightarrow d_j$.
Loại 2: Phép nhân dòng i của ma trận với một số $\alpha \neq 0$, ký hiệu $\varphi := d_i \to \alpha d_i$.
Loại 3: Phép cộng dòng i của ma trận với α lần dòng $j \neq i$, ký hiệu $\varphi := d_i \to d_i + \alpha d_j$.

Nếu ma trận A biến thành ma trận A' qua phép biến đổi φ thì ta ký hiệu

$$A' = \varphi(A) \text{ hay } A \xrightarrow{\varphi} A'.$$

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \to 2d_3} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 14 & 16 & 18 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \to d_1 - 4d_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 14 & 16 & 18 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Các phép biến đổi sơ cấp trên cột

Định nghĩa

Phép biến đổi sơ cấp trên cột là một phép biến đổi $\varphi : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ thuộc một trong ba loại sau:
Loại 1: Phép hoán vị hai cột i và j của ma trận, ký hiệu $\varphi := c_i \leftrightarrow c_j$.
Loại 2: Phép nhân cột i của ma trận với một số $\alpha \neq 0$, ký hiệu $\varphi := c_i \to \alpha c_i$.
Loại 3: Phép cộng cột i của ma trận với α lần cột $j \neq i$, ký hiệu $\varphi := c_i \to c_i + \alpha c_j$.

Nếu ma trận A biến thành ma trận A' qua phép biến đổi φ thì ta ký hiệu

$$A' = \varphi(A) \text{ hay } A \xrightarrow{\varphi} A'.$$

Các phép biến đổi sơ cấp trên cột

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \\ 9 & 11 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 \to 2c_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 12 & 8 \\ 9 & 11 & 20 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4 \to c_4 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 12 & -12 \\ 9 & 11 & 20 & -24 \end{pmatrix}.$$

Ma trận tương đương dòng

Định nghĩa

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A *tương đương dòng* với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A qua một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$. Do đó ma trận A tương đương dòng với ma trận B.

Dạng bậc thang của ma trận

Định nghĩa

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Phần tử khác 0 đầu tiên của dòng i được gọi là *phần tử trụ* của dòng i (Lưu ý nếu dòng i là dòng 0 thì nó sẽ không có phần tử trụ).

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó:

- Phần tử trụ của dòng 1 là 10.
- Phần tử trụ của dòng 2 là 9.
- Dòng 3 là dòng 0 nên nó không có phần tử trụ.

Dạng bậc thang của ma trận

Định nghĩa (Ma trận bậc thang)

Một ma trận được gọi là *ma trận bậc thang* nếu nó thỏa hai điều kiện sau đây:

1. Các dòng khác 0 nằm bên trên các dòng 0.
2. Phần tử trụ của dòng bên dưới luôn nằm bên phải phần tử trụ của dòng bên trên.

Dạng bậc thang của ma trận

Ví dụ

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận bậc thang trong khi $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ không phải là ma trận bậc thang.

Dạng bậc thang của ma trận

Định nghĩa

Một ma trận bậc thang tương đương dòng với ma trận A được gọi là *dạng bậc thang* của ma trận A.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = B.$$

Do đó ma trận B là dạng bậc thang của ma trận A.

Dạng bậc thang rút gọn của ma trận

Định nghĩa

Ma trận bậc thang rút gọn hay ma trận chính tắc theo dòng là ma trận bậc thang và thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Tất cả các phần tử trụ của các dòng khác 0 đều bằng 1.
2. Tất cả các cột chứa các phần tử trụ đều chỉ có đúng một vị trí khác 0 (vị trí khác 0 đó chính là vị trí của phần tử trụ).

Dạng bậc thang rút gọn của ma trận

Ví dụ

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận bậc thang rút gọn trong khi $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ chỉ là ma trận bậc thang nhưng không phải ma trận bậc thang rút gọn.

Dạng bậc thang rút gọn của ma trận

Định nghĩa

Một ma trận bậc thang rút gọn tương đương dòng với ma trận A được gọi là *dạng bậc thang rút gọn* của ma trận A.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \to d_1 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 \to d_1 - 3d_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Do đó ma trận B là dạng bậc thang rút gọn của ma trận A.

Hạng của ma trận

Định lý

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó tồn tai duy nhất một dạng bậc thang rút gọn R_A của ma trận A. Ta gọi số lượng dòng khác 0 của R_A là hạng của ma trận A và ký hiệu là $r(A)$.

Mệnh đề

a) *Hạng của ma trận A cũng bằng số lượng dòng khác 0 của bất kỳ dạng bậc thang nào của A.*

b) *Với $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ta có $r(A) \leq min\{m, n\}$.*

c) *Với A là ma trận bất kỳ ta có: $r(A^T) = r(A)$.*

d) *Nếu $A \sim B$ thì $r(A) = r(B)$.*

e) *Với $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, ta có: $r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}$.*

Thuật toán Gauss để tìm dạng bậc thang của ma trận

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta nói cột j của A được *bán chuẩn hóa* tại vị trí i nếu tồn tại $k \geq i$ sao cho $a_{kj} \neq 0$. Nói cách khác, cột j được bán chuẩn hóa tại vị trí i nếu trong các thành phần của cột j từ thành phần i trở xuống (bao gồm cả thành phần i) có ít nhất một thành phần khác 0.

Thuật toán Gauss để tìm dạng bậc thang của ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó:

- Cột 1 được bán chuẩn hóa tại vị trí 1 nhưng lại không được bán chuẩn hóa tại vị trí 2.
- Cột 2 được bán chuẩn hóa tại vị trí $1, 2, 3$.
- Cột 4 được bán chuẩn hóa tại vị trí $1, 2$ nhưng không được chuẩn hóa tại vị trí 3.

Thuật toán Gauss để tìm dạng bậc thang của ma trận

Thuật toán để bán chuẩn hóa một cột

Để bán chuẩn hóa cột j của ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tại vị trí i ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra tính bán chuẩn hóa của cột j tại vị trí i. Nếu cột j không bán chuẩn hóa được tại vị trí i, quá trình dừng lại ở đây. Ngược lại, ta sang bước 2.

Bước 2: Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng i và các dòng bên dưới dòng i để thành phần i của cột j khác 0 (để tiện cho việc tính toán thông thường chúng ta cố gắng đưa thành phần i của cột j về 1).

Bước 3: Với $k > i$, thực hiện các phép biến đổi sơ cấp $d_k \to d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i$ để đưa các thành phần k của cột j về 0.

(Mục đích của bước 3 là đưa các thành phần bên dưới thành phần i của cột j thành 0.)

Thuật toán Gauss để tìm dạng bậc thang của ma trận

Thuật toán Gauss

Để tìm dạng bậc thang cho ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ta thực hiện các bước sau:

Bước cơ sở: Kiểm tra tính bán chuẩn hóa của cột 1 tại vị trí 1.

- Nếu cột 1 không được bán chuẩn hóa tại vị trí 1 thì ta tiến hành kiểm tra tính bán chuẩn hóa của cột 2 tại vị trí 1. Ngược lại ta tiến hành bán chuẩn hóa cột 1 tại ví trí 1 và tiếp tục kiểm tra tính bán chuẩn hóa của cột 2 tại vị trí 2.

Thuật toán Gauss để tìm dạng bậc thang của ma trận

Thuật toán Gauss (tiếp theo)

Bước quy nạp: Nếu cột j không được bán chuẩn hóa tại vị trí i thì ta tiến hành kiểm tra tính bán chuẩn hóa của cột $j+1$ tại vị trí i. Ngược lại ta tiến hành bán chuẩn hóa cột j tại vị trí i và tiếp tục kiểm tra tính bán chuẩn hóa của cột $j+1$ tại vị trí $i+1$.
Ta cứ tiếp tục quá trình trên cho đến cột cuối cùng (cột n) hoặc vị trí cuối cùng của cột (vị trí m) thì dừng. Nói cách khác, quá trình dừng lại nếu ma trận thu được cuối cùng là ma trận bậc thang.

Thuật toán Gauss để tìm dạng bậc thang của ma trận

Ví dụ

Tìm dạng bậc thang của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix}$. Từ đó suy ra hạng của ma trận A.

Giải

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to -d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Thuật toán Gauss để tìm dạng bậc thang của ma trận

Giải (tiếp theo)

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 + 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

B chính là dạng bậc thang của A và hạng của ma trận A là 3.

Ví dụ

Tìm dạng bậc thang của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$.

Từ đó suy ra hạng của ma trận A.

Thuật toán Gauss để tìm dạng bậc thang của ma trận

Giải

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 \to d_4 - 6d_1]{\substack{d_2 \to d_2 - d_1 \\ d_3 \to d_3 - 2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_4} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4 \to d_4 + 3d_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4 \to d_4 + 5d_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \text{ là ma}$$

trận bậc thang. Suy ra hạng của ma trận A là 3.

Thuật toán Gauss-Jordan để tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận

Thuật toán để chuẩn hóa một cột

Để chuẩn hóa cột j của ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tại vị trí i ta thực hiện các bước sau:
Bước 1: Kiểm tra tính bán chuẩn hóa của cột j tại vị trí i. Nếu cột j không bán chuẩn hóa được tại vị trí i, quá trình dừng lại ở đây. Ngược lại, ta sang bước 2.
Bước 2: Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng i và các dòng bên dưới dòng i để thành phần i của cột j về 1).
Bước 3: Với $k \neq i$, thực hiện các phép biến đổi sơ cấp $d_k \to d_k - a_{kj}d_i$ để đưa các thành phần k của cột j về 0.
(Mục đích của bước 3 là đưa các thành phần khác thành phần i của cột j thành 0.)

Thuật toán Gauss-Jordan để tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận

Chú ý

Thuật toán để chuẩn hóa một cột chỉ khác thuật toán bán chuẩn hóa một cột ở bước 2 và bước 3. Cụ thể như sau: Ở bước 2 của thuật toán để chuẩn hóa một cột chúng ta phải đưa thành phần i về 1 trong khi ở bước 2 của thuật toán còn lại ta không nhất thiết phải làm điều đó.
Ở bước 3 của thuật toán để chuẩn hóa một cột chúng ta phải đưa tất cả các thành phần khác thành phần i về 0 trong khi ở bước 3 của thuật toán còn lại chúng ta chỉ cần đưa những thành phần bên dưới thành phần i về 0.

Thuật toán Gauss-Jordan để tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận

Thuật toán Gauss-Jordan

Để tìm dạng bậc thang rút gọn cho ma trận $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ta thực hiện các bước tương tự như trong thuật toán Gauss. Điểm khác biệt duy nhất là thay vì ta tiến hành bán chuẩn hóa những cột có thể bán chuẩn hóa thì ta tiến hành chuẩn hóa những cột đó. Thuật toán được thực hiện cho đến cột cuối cùng (cột n) hoặc vị trí cuối cùng (vị trí m) thì dừng. Nói cách khác, thuật toán kết thúc nếu ma trận thu được cuối cùng là ma trận bậc thang rút gọn.

Thuật toán Gauss-Jordan để tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận

Ví dụ

Tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Từ đó suy ra hạng của ma trận A.

Giải

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 \to d_4 - 4d_1]{\substack{d_2 \to d_2 - 2d_1 \\ d_3 \to d_3 - 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -6 & -7 & -11 \\ 0 & -9 & -12 & -19 \end{pmatrix}$$

Thuật toán Gauss-Jordan để tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận

Giải (tiếp theo)

$$\xrightarrow[d_4 \to d_4 - 3d_2]{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4 \to d_4 - d_3]{d_2 \to \frac{-1}{3} d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3 \to \frac{1}{3} d_3]{d_1 \to d_1 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2 \to d_2 - \frac{5}{3} d_3]{d_1 \to d_1 + \frac{1}{3} d_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/9 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Vậy hạng của ma trận A là 3.

Thuật toán Gauss-Jordan để tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 2 & 3 \\ 17 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Hãy tìm dạng bậc thang rút gọn của A. Từ đó suy ra hạng của A.

Giải

$$\begin{pmatrix} 13 & 1 & 2 & 3 \\ 17 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \to 4d_1 - 3d_2} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -7 & -6 \\ 17 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to d_2 - 17d_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & -7 & -6 \\ 0 & 140 & 124 & 108 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 \to \frac{1}{140} d_2} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 31/35 & 27/35 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{d_1 \to d_1 + 8d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/35 & 6/35 \\ 0 & 1 & 31/35 & 27/35 \end{pmatrix} = B$$ là dạng bậc thang rút gọn của A. Vậy hạng của ma trận A là 2.

Định nghĩa của ma trận khả nghịch

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói:

a) *A khả nghịch trái* nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $BA = I_n$. Ma trận B thỏa mãn điều kiện trên được gọi là *ma trận nghịch đảo trái* của ma trận A.

b) *A khả nghịch phải* nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = I_n$. Ma trận B thỏa mãn điều kiện trên được gọi là *ma trận nghịch đảo phải* của ma trận A.

c) *A khả nghịch* nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = BA = I_n$. Ma trận B thỏa mãn điều kiện trên được gọi là *ma trận nghịch đảo* của ma trận A, ký hiệu A^{-1}.

Tính chất của ma trận khả nghịch

Mệnh đề

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$.

a) *Nếu A khả nghịch phải thì A khả nghịch và ma trận nghịch đảo của A chính là ma trận nghịch đảo phải của A.*
b) *Nếu A khả nghịch trái thì A khả nghịch và ma trận nghịch đảo của A chính là ma trận nghịch đảo trái của A.*

Tính chất của ma trận khả nghịch

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 6 \\ -5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó $AB = I_3$, do đó A khả nghịch phải. Suy ra A khả nghịch và ma trận nghịch đảo của A là B.

Tính chất của ma trận khả nghịch

Mệnh đề

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Nếu A khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là A^{-1} thì ta có những khẳng định sau:

a) A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) A^T *khả nghịch và* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

c) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha A$ *khả nghịch và* $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

Mệnh đề

Nếu $A_1, \ldots, A_m \in M_n(\mathbb{R})$ là các ma trận khả nghịch thì $A_1 \ldots A_m$ khả nghịch và $(A_1 \ldots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \ldots A_1^{-1}$.

Tính chất của ma trận khả nghịch

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$. Khi đó $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 6 \\ -5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a)

$$\begin{aligned} (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 6 \\ -5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ -15 & 9 & -2 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) $(3A)^{-1} = \frac{1}{3}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} 10/3 & -5 & 2 \\ -5/3 & 3 & -4/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Phương pháp Gauss-Jordan tìm ma trận nghịch đảo

Định lý

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó những điều sau đây tương đương:

i) *A khả nghịch;*

ii) $r(A) = n$;

iii) *Tồn tại các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n:*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \to \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n.$$

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, ma trận đơn vị I_n sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1} của A :

$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \to \ldots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

Phương pháp Gauss-Jordan tìm ma trận nghịch đảo

Thuật toán Gauss-Jordan tìm ma trận nghịch đảo

Để xét tính khả nghịch của ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ và tìm A^{-1} (nếu có), ta tiến hành như sau: Xếp I_n bên phải ma trận $A:$ $(A|I_n)$ và dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để biến đổi ma trận này theo hướng đưa A về dạng bậc thang rút gọn của $A:$

$$(A|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|B_1) \to \ldots \xrightarrow{\varphi_k} (A_p|B_p) \to \ldots$$

Trong quá trình biến đổi sẽ xảy ra một trong hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Tồn tại k sao cho ma trận A_k có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.
- Trường hợp 2: Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi có tất cả các dòng và cột khác 0. Nói cách khác, ma trận cuối cùng của dãy trên là $(I_n|B)$. Khi đó A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Phương pháp Gauss-Jordan tìm ma trận nghịch đảo

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của A.

Giải

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Phương pháp Gauss-Jordan tìm ma trận nghịch đảo

Giải (tiếp theo)

$$\xrightarrow[d_4\to d_4-4d_1]{\substack{d_2\to d_2-2d_1\\ d_3\to d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3\to d_3-d_2]{d_1\to d_1-2d_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4\to d_4-2d_3]{\substack{d_1\to d_1-7d_3\\ d_2\to d_2+2d_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Phương pháp Gauss-Jordan tìm ma trận nghịch đảo

Giải (tiếp theo)

$$\xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_4]{\substack{d_1 \to d_1 + d_4 \\ d_2 \to d_2 - d_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Phương pháp Gauss-Jordan tìm ma trận nghịch đảo

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của A.

Giải

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 7d_1]{d_2 \to d_2 - 4d_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 2d_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$. Vậy A không khả nghịch.

Phương trình ma trận

Mệnh đề

Nếu A và A' là các ma trận vuông khả nghịch và B là một ma trận thì:

a) *Nghiệm của phương trình $AX = B$ là $X = A^{-1}B$.*

b) *Nghiệm của phương trình $XA = B$ là $X = BA^{-1}$.*

c) *Nghiệm của phương trình $AXA' = B$ là $X = A^{-1}BA'^{-1}$*

Phương trình ma trận

Ví dụ

Giải phương trình $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải

Phương trình trên có dạng $AX = B$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dễ dàng kiểm tra ma trận nghịch đảo của A là $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ nên nghiệm của phương trình là

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Phương trình ma trận

Ví dụ

Giải phương trình $X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Giải

Phương trình trên có dạng $XA = B$ với $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Dễ dàng kiểm tra ma trận nghịch đảo của A là $A^{-1} = \begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ nên nghiệm của phương trình là

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11 & 4\\ 8 & -3\end{pmatrix}.$$

Khái niệm hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Hệ gồm n ẩn x_i $(i = 1, \ldots, n)$ và m phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \quad (*)$$

trong đó, các hệ số $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$, được gọi là *hệ phương trình tuyến tính*.

Ta nói $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ là một nghiệm của hệ $(*)$ nếu khi ta thay $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$ vào $(*)$ thì tất cả các đẳng thức trong $(*)$ đều được thỏa mãn. Bài toán tìm nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính được gọi là bài toán *giải hệ phương trình tuyến tính*.

Chuyển đổi hệ phương trình tuyến tính về phương trình ma trận và ngược lại

Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \quad (*)$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Khi đó A được gọi là *ma trận hệ số*, X là *cột ẩn* và B là *cột hệ số tự do* của hệ $(*)$.

Chuyển đổi hệ phương trình tuyến tính về phương trình ma trận và ngược lại

Ta gọi là $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ *ma trận mở rộng* của hệ $(*)$. Vạch thẳng đứng để phân biệt phía trái của ma trận mở rộng là ma trận hệ số còn phía phải là cột hệ số tự do. Hệ $(*)$ có thể được viết lại dưới dạng phương trình ma trận $AX = B$. Ngược lại nếu cho trước một ma trận mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính thì ta có thể khôi phục lại hệ phương trình tuyến tính đó.

Chuyển đổi hệ phương trình tuyến tính về phương trình ma trận và ngược lại

Ví dụ

Cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & -3 \\ -7x_3 + 2x_2 & = & 5 \end{cases}$

Hãy viết phương trình ma trận và ma trận mở rộng của hệ phương trình trên.

Giải

Hệ trên được viết lại dưới dạng phương trình ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Chuyển đổi hệ phương trình tuyến tính về phương trình ma trận và ngược lại

Giải (tiếp theo)

Ma trận mở rộng của hệ trên là $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 5 \end{array}\right)$

Ví dụ

Cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x + y + z + t & = & 4 \\ 3y + x + t & = & -3 \\ x + t & = & 5 \end{cases}$

Hãy viết phương trình ma trận và ma trận mở rộng của hệ phương trình trên.

Chuyển đổi hệ phương trình tuyến tính về phương trình ma trận và ngược lại

Giải

Hệ trên được viết lại dưới dạng phương trình ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ma trận mở rộng của hệ trên là $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Chuyển đổi hệ phương trình tuyến tính về phương trình ma trận và ngược lại

Ví dụ

Cho $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & -1 & -2 & 9 \end{array}\right)$ là ma trận mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính. Hãy viết hệ phương trình tuyến tính có các ẩn lần lượt là x, y, z sao cho $\tilde{A}$ là ma trận mở rộng của nó.

Giải

Hệ phương trình tuyến tính tương ứng là $\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 2x + 5y + 6z & = & 7 \\ 8x - y - 2z & = & 9 \end{cases}$

Định lý Kronecker-Capelli

Định lý

Nếu $\tilde{A} = (A|B)$ là ma trận mở rộng của hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình n ẩn có A là ma trận hệ số và B là cột hệ số tự do. Khi đó:

a) *Nếu $r(\tilde{A}) \neq r(A)$ thì hệ vô nghiệm.*
b) *Nếu $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.*
c) *Nếu $r(\tilde{A}) = r(A) = r < n$ thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r$ tham số.*

Định lý Kronecker-Capelli

Ví dụ

Biện luận số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x + my - 3z & = & 0 \\ (1-m^2)z & = & m-1 \end{cases}$$

Giải

$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -3 \\ 0 & 0 & 1-m^2 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & -3 & 0 \\ 0 & 0 & (1-m^2) & m-1 \end{array}\right)$ lần lượt là ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ.

- Nếu $m = 1$ thì $r(A) = r(\tilde{A}) = 1 < 3$. Suy ra hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 2 tham sô.
- Nếu $m = -1$ thì $r(A) = 1 < 2 = r(\tilde{A})$. Suy ra hệ vô nghiệm.
- Nếu $m \neq \pm 1$ thì $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3$. Suy ra hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào một tham số.

Định lý Kronecker-Capelli

Ví dụ

Tìm điều kiện của m để hệ phương trình tuyến tính
$$\begin{cases} mx + 8z - 7t &= m-1 \\ 3x + my + 2z + 4t &= m \\ mz + 5t &= m^2 - 1 \\ 5z - mt &= 2m+2 \end{cases}$$
có nghiệm duy nhất.

Giải

Ma trận hệ số của hệ là $\begin{pmatrix} m & 0 & 8 & -7 \\ 3 & m & 2 & 4 \\ 0 & 0 & m & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -m \end{pmatrix}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow r(A) = 4 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$
$\begin{vmatrix} m & 0 \\ 3 & m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & 5 \\ 5 & -m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m^2(-m^2 - 25) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$

Phương pháp ma trận

Phương pháp này chỉ có thể áp dụng trong trường hợp ma trận hế số của hệ phương trình tuyến tính là ma trận vuông khả nghịch.
Bước 1: Chuyển hệ phương trình tuyến tính về phương trình ma trận $AX = B$ với A là ma trận hệ số, X là cột ẩn và B là cột hệ số tự do.
Bước 2: Phương trình ma trận $AX = B$ tương đương $X = A^{-1}B$. Từ đây ta có thể kết luận được nghiện của hệ ban đầu.

Phương pháp ma trận

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính sau: $\begin{cases} 2x + y - z &= 1 \\ \quad y + 3z &= 3 \\ 2x + y + z &= -1 \end{cases} \quad (*)$

Giải

Hệ phương trình $(*)$ được viết lại như sau:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vậy hệ $(*)$ có nghiệm $\begin{cases} x &= -3 \\ y &= 6 \\ z &= -1 \end{cases}$.

Phương pháp Gauss (Gauss-Jordan)

Phương pháp này dùng để giải tất cả các hệ phương trình tuyến tính.
Bước 1: Thành lập ma trận mở rộng của hệ phương trình tuyến tính.
Bước 2: Đưa ma trận mở rộng về dạng bậc thang (dạng bậc thang rút gọn) bằng thuật toán Gauss (thuật toán Gauss-Jordan). Trong quá trình thực hiện bước này nếu có một dòng dạng $(0 \ldots 0|a)$ với $a \neq 0$ thì ta kết luận hệ vô nghiệm.
Bước 3: Từ dạng bậc thang (dạng bậc thang rút gọn) của ma trận mở rộng ta chuyển đổi về hệ phương trình tuyến tính tương ứng và giải hệ phương trình này từ dòng cuối lên trên.

Phương pháp Gauss (Gauss-Jordan)

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính sau: $\begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ y+3z &= 3 \\ 2x+y+z &= -1 \end{cases} \quad (*)$

Giải

Ma trận mở rộng của hệ $(*)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ y+3z &= 3 \\ 2z &= -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -3 \\ y &= 6 \\ z &= -1 \end{cases}.$$

Phương pháp Gauss (Gauss-Jordan)

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 & = & 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 & = & -1 \end{cases} \quad (*)$$

Giải

Ma trận mở rộng của hệ $(*)$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[d_3 \to 5d_3 - 2d_1]{d_2 \to 5d_2 - 4d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 39 & -15 & 6 & -11 \end{array}\right)$$

Phương pháp Gauss (Gauss-Jordan)

Giải (tiếp theo)

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - 3d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right).$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Phương pháp Gauss (Gauss-Jordan)

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x + 4y + 5z & = & -1 \\ 2x + 7y - 11z & = & 2 \\ 3x + 11y - 6z & = & 1 \end{cases} \quad (*)$$

Giải

Ma trận mở rộng của hệ $(*)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -11 & 2 \\ 3 & 11 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -21 & 4 \\ 0 & -1 & -21 & 4 \end{array}\right)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 5z & = & -1 \\ -y - 21z & = & 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 15 + 79\alpha \\ y & = & -4 - 21\alpha \\ z & = & \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Phương pháp Gauss (Gauss-Jordan)

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 1 \\ x + y + z &= 4 \\ x - y - 2z &= -3 \end{cases} \quad (*)$$

Giải

Ma trận mở rộng của hệ $(*)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

Phương pháp Gauss (Gauss-Jordan)

Giải

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 + 3d_2]{d_1 \to d_1 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \to \frac{-1}{7} d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2 \to d_2 + 2d_3]{d_1 \to d_1 - 3d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính với cột hệ số tự do là cột 0 được gọi là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất*

Chú ý

a) Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn có một nghiệm tầm thường là $(0, \ldots, 0)$.

b) Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất chỉ có 2 trường hợp nghiệm là nghiệm duy nhất hoặc vô số nghiệm.

c) Do hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có cột các hệ số tự do là cột 0 nên khi giải hệ ta không cần lập ma trận mở rộng mà chỉ cần biết đổi trên chính ma trận hệ số của hệ.

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính sau: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 0 \end{cases}$

Giải

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 5d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_1 \to d_1 - d_2]{d_3 \to d_3 - 2d_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ trở thành $\begin{cases} x_1 - 9x_3 &= 0 \\ x_2 + 7x_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 9\alpha \\ x_2 &= -7\alpha \\ x_3 &= \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

Khái niệm định thức

Định nghĩa

Cho $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Ta định nghĩa *định thức* của A, ký hiệu bởi $|A|$ hay $\det(A)$ hay $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:

- $n = 1$. Khi đó $A = (a_{11})$ và $\det(A) = a_{11}$.
- $n = 2$. Khi đó $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ và $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Khái niệm định thức

Định nghĩa (tiếp theo)

- $n > 2$. Với mỗi $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, ta gọi

$$M_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{(i|j)})$$

là *phần bù đại số* của hệ số a_{ij}, trong đó $A_{(i|j)}$ là ma trận vuông cấp $n-1$ có được từ A bằng cách xóa dòng i cột j của A. Khi đó ta định nghĩa

$$\det(A) = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + \cdots + a_{1n}M_{1n}.$$

Ví dụ về phần bù đại số

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Khi đó:

- Phần bù đại số của hệ số tại vị trí $(2, 3)$ là:

$$M_{23} = (-1)^{2+3}\det(A_{(2|3)}) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 14) = 6.$$

- Phần bù đại số của hệ số tại vị trí $(3, 1)$ là:

$$M_{31} = (-1)^{3+1}\det(A_{(3|1)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3.$$

Ví dụ về định thức của ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Tính $\det(A)$.

$$M_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{(1|1)}) = \det(A_{(1|1)}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9.$$

$$M_{12} = (-1)^{1+2}\det(A_{(1|2)}) = -\det(A_{(1|2)}) = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17.$$

$$M_{13} = (-1)^{1+3}\det(A_{(1|3)}) = \det(A_{(1|3)}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

$$\det(A) = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = 1.9 + 2.(-17) + 3.(-2) = -31.$$

Các tính chất của định thức

Định lý (Công thức khai triển định thức theo dòng và theo cột)

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$*. Với mỗi* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*, gọi* M_{ij} *là phần bù đại số của* a_{ij}*. Ta có:*

a) *Công thức khai triển* $det(A)$ *theo dòng* i :

$$det(A) = a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \cdots + a_{in}M_{in}.$$

b) *Công thức khai triển* $det(A)$ *theo cột* j :

$$det(A) = a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \cdots + a_{nj}M_{nj}.$$

Các tính chất của định thức

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Tính $\det(A)$.

Giải

Nếu ta tính định thức của A theo định nghĩa thì ta cần phải tính 4 phần bù đại số là $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$. Trong khi nếu ta sử dụng công thức khai triển định thức theo cột 2 thì ta chỉ cần tính hai phần bù đại số M_{12} và M_{42} (bởi vì ha hệ số của ma trận ở vị trí $(2, 2)$ và vị trí $(3, 2)$ đều bằng 0 do đó ta không cần tính M_{22} và M_{32}). Tương tự nếu ta sử dụng công thức khai triển định thức theo dòng 2 thì ta cũng chỉ cần tính hai phần bù đại số M_{21} và M_{23}.

Các tính chất của định thức

Giải (tiếp theo)

$$\begin{aligned} M_{12} &= (-1)^{1+2}\det(A_{(1|2)}) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -(\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}) \\ &= -(20-8-2.11) = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{42} &= (-1)^{4+2}\det(A_{(4|2)}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 12 + 2(6-12) = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\det(A) = a_{12}M_{12} + a_{42}M_{42} = 1.10 + 2.0 = 10.$

Các tính chất của định thức

Mệnh đề (Định thức của ma trận chuyển vị)

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó $det(A^T) = det(A)$.

Ví dụ

Cho A la ma trận cấp 5 có $\det(A) = 10$. Tính $\det(A^T)$.

Giải

Ta có: $\det(A^T) = \det(A) = 10$.

Các tính chất của định thức

Định lý (Định thức và các phép biến đổi sơ cấp trên dòng)

Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó:

a) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ *thì* $det(A') = -det(A)$.

b) *Nếu* $A \xrightarrow{d_i \to \alpha d_i} A'$ *thì* $det(A') = \alpha det(A)$.

c) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i \to d_i + \alpha d_j} A'$ *thì* $det(A') = det(A)$.

Hệ quả (Định thức của tích ma trận với một số)

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Khi đó $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$.

Các tính chất của định thức

Hệ quả (Định thức và các phép biến đổi sơ cấp trên cột)

Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

a) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{c_i \leftrightarrow c_j} A'$ *thì* $det(A') = -det(A)$.

b) *Nếu* $A \xrightarrow{c_i \to \alpha c_i} A'$ *thì* $det(A') = \alpha det(A)$.

c) *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{c_i \to c_i + \alpha c_j} A'$ *thì* $det(A') = det(A)$.

Định lý (Định thức của tích hai ma trận)

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó* $det(AB) = det(A)det(B)$.

Hệ quả

Nếu $A \in M_n(\mathbb{R})$ *là ma trận khả nghịch thì* $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Các tính chất của định thức

Chú ý

Trong thực hành để tính định thức của một ma trận ta thực hiện các bước sau:

1. Đem các thừa số chung của các hệ số trên cùng một dòng hay trên cùng một cột ra ngoài dấu định thức.
2. Chọn một cột j và một vị trí i thuận lợi nhất để tiến hành chuẩn hóa cột j tại vị trí i.
3. Tính định thức theo cột j.

Các tính chất của định thức

Ví dụ

Cho A là ma trận cấp 4 có định thức bằng 4. Tính $\det(4A)$.

Giải

Ta có: $\det(4A) = 4^4 \det(A) = 4^5 = 1024$.

Ví dụ

Tính $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}$

Các tính chất của định thức

Giải

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{dòng } 2} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột } 2} 2.3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2 \to d_2 - d_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\quad} 6(-11)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -594.$$

Các tính chất của định thức

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Tính $\det(AB)$.

Giải

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (1.2.3)(1.2.3) = 36. \end{aligned}$$

Các tính chất của định thức

Mệnh đề

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử dòng i (tương ứng cột j) của A là tổng của hai dòng $(b_1 \dots b_n)$ và $(c_1 \dots c_n)$ (tương ứng hai cột $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$). Khi đó $det(A) = det(B) + det(C)$, trong đó B, C lần lượt là các ma trận có từ A bằng cách thay dòng i (tương ứng cột j) bằng $(b_1 \dots b_n)$ và $(c_1 \dots c_n)$ (tương ứng $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$)

Ví dụ

Cho $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 3 \\ c & 4 & 8 \end{vmatrix} = 3$ và $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ z & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4$. Tính $\begin{vmatrix} a+x & 1 & 2 \\ b+y & 2 & 3 \\ c+z & 4 & 8 \end{vmatrix}$.

Giải

Ta có: $\begin{vmatrix} a+x & 1 & 2 \\ b+y & 2 & 3 \\ c+z & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 3 \\ c & 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ z & 4 & 8 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7.$

Định thức của một số ma trận đặc biệt

Định lý (Một số trường hợp ma trận có định thức bằng 0)

a) *Nếu ma trận có một dòng (cột) bằng* 0 *thì định thức của nó bằng* 0.

b) *Nếu ma trận có hai dòng (cột) bằng nhau thì định thức của nó bằng* 0.

c) *Nếu ma trận có hai dòng (cột) tỉ lệ với nhau thì định thức của nó bằng* 0.

Định thức của một số ma trận đặc biệt

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Khi đó

a) $\det(A) = 0$ vì dòng 3 của A là dòng 0.

b) $\det(B) = 0$ vì dòng 1 và dòng 2 của B giống nhau.

c) $\det(C) = 0$ vì dòng 2 của C bằng 4 lần dòng 1 của C.

Định thức của một số ma trận đặc biệt

Định lý (Định thức của ma trận chéo và ma trận tam giác)

a) *Định thức của ma trận chéo bằng tích của tất cả các phần tử trên đường chéo của nó.*

b) *Định thức của ma trận tam giác trên (dưới) bằng tích các phần tử trên đường chéo của nó.*

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Khi đó $\det(A) = 1.2.3 = 6$ và $\det(B) = 1.4.6 = 24$.

Định thức của một số ma trận đặc biệt

Định lý

Nếu ma trận X có dạng khối bậc thang $X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *hay* $X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ *trong đó A và C là các ma trận vuông thì* $det(X) = det(A)det(C)$.
(Lưu ý: ở đây ma trận B không nhất thiết phải là ma trận vuông)

Định thức của một số ma trận đặc biệt

Ví dụ

Cho $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 & 17 & 19 \\ 3 & 4 & 11 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ và $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & 1 & 2 & 9 \\ 13 & 17 & 0 & 2 & 5 \\ 23 & 29 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Khi đó

- $\det(X_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (4-6)1.2.6 = -24.$
- $\det(X_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (4-6)1.2.6 = -24.$

Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức

Định nghĩa (Ma trận phụ hợp)

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ và ký hiệu $M_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{i|j})$ là phần bù đại số của a_{ij}. Đặt $\text{adj}(A) = (M_{ij})^T$. Khi đó adj$(A)$ được gọi là *ma trận phụ hợp* hay *ma trận phó* của ma trận A.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Tính adj$(A)$.

Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức

Giải

$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3,\ M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$
$0,\ M_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$
$4,\ M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6,\ M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$
$1, \mathcal{M}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5,\ M_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$
$3,\ M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$

$$\text{Vậy } \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 4 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & -6 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức

Định lý

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó A khả nghịch khi và chỉ khi $det(A) \neq 0$. Hơn nữa, nếu A khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & -8 \\ 19 & 13 & -14 \end{pmatrix}$. Khi đó $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & -8 \\ 19 & 13 & -14 \end{vmatrix} = 0.$
Do đó ma trận A không khả nghịch.

Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$. Chứng minh ma trận A khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của A.

Giải

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal[d_3 \to d_3 - d_1]{d_2 \to d_2 - d_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{\quad} 1 \neq 0$$

Do đó A khả nghịch.

Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức

Giải (tiếp theo)

$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 10,\ M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = -5,\ M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1$

$M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = -15,\ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 9,\ M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 6,\ M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = -4,\ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 1 \\ -15 & 9 & -2 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 6 \\ -5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức

Hệ quả

Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Khi đó A khả nghịch nếu và chỉ nếu* $ad - bc \neq 0$. *Hơn nữa, nếu A khả nghịch thì*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 3/10 \\ -2/5 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Phương pháp sử dụng định thức

Định lý

Cho hệ phương trình tuyến tính dạng $AX = B$ *với* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *và* $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. *Đặt* A_j *là ma trận có được từ* A *bằng cách thay cột* j *của* A *bởi cột* B. *Ta ký hiệu*

$$\Delta = det(A), \Delta_1 = det(A_1), \dots, \Delta_n = det(A_n).$$

- *Nếu* $\Delta \neq 0$ *thì hệ có nghiệm duy nhất*

$$(x_1, \dots, x_n) = (\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}).$$

- *Nếu* $\Delta = 0$ *và tồn tại* i *sao cho* $\Delta_i \neq 0$ *thì hệ vô nghiệm.*

Phương pháp sử dụng định thức

Chú ý

Trong trường hợp $\Delta = \Delta_j = 0$ với mọi j thì ta không thể sử dụng quy tắc Cramer. Khi đó ta có thể áp dụng phương pháp Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải hệ phương trình tuyến tính.

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính sau đây:

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 1 \\ \quad y + 3z &= 3 \qquad (*) \\ 2x + y + z &= -1 \end{cases}$$

Phương pháp sử dụng định thức

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 24, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Vậy $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3, \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 6, \ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$

Phương pháp sử dụng định thức

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính sau đây:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \quad (*) \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{cases}$$

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Do đó hệ $(*)$ vô nghiệm.