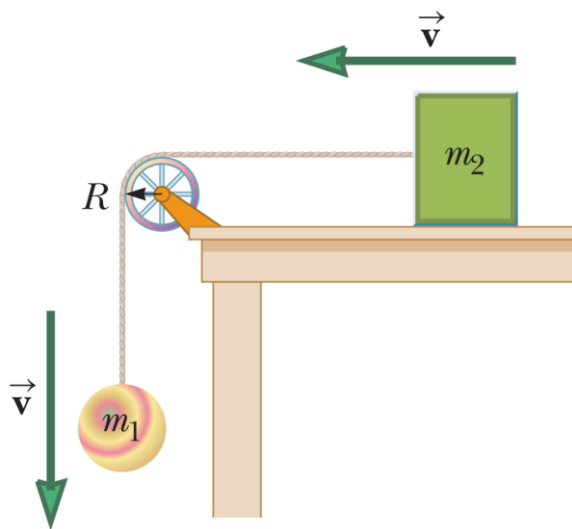
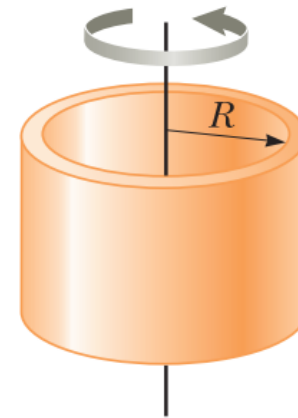
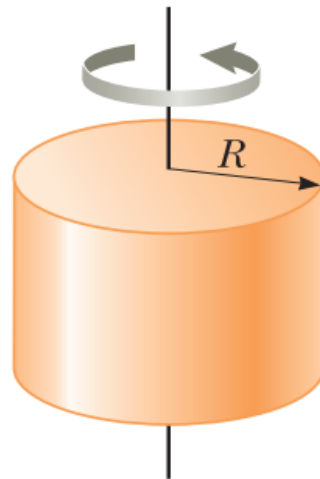


# CƠ HỌC VẬT RẮN

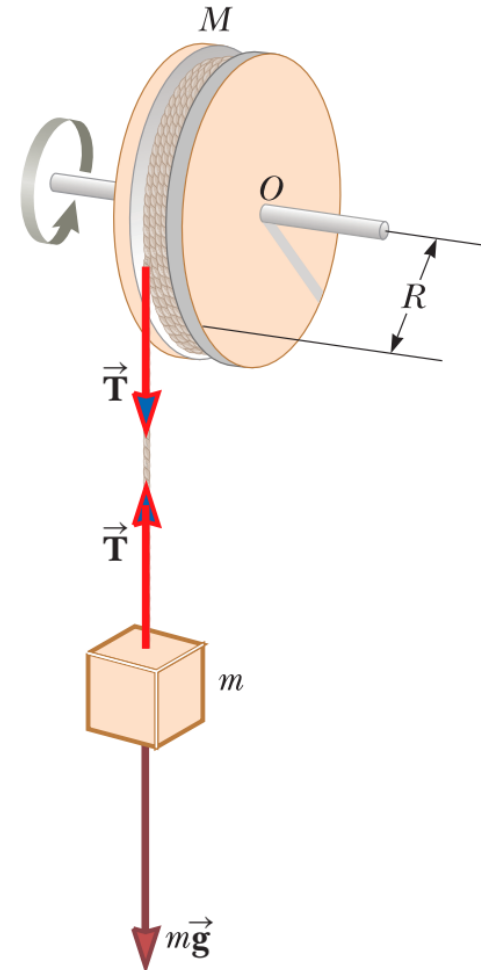
PGS. TS. Lê Công Hào



$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{2} MR^2$$



$$I_{\text{CM}} = MR^2$$



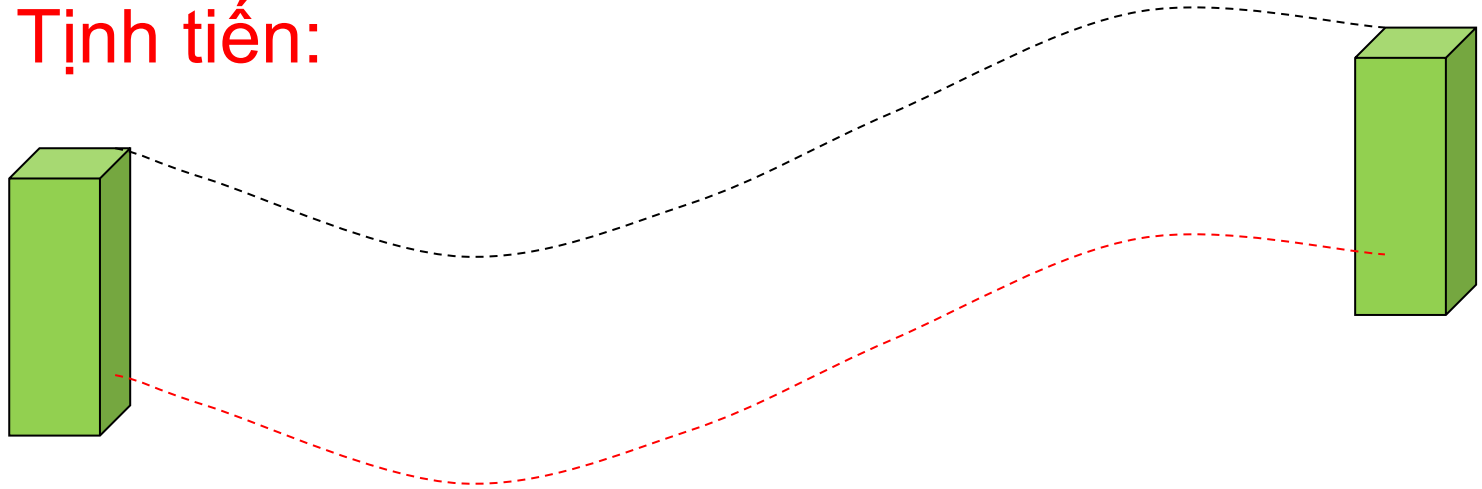
# CƠ HỌC VẬT RẮN

Vật rắn (VR):

- + Là một hệ chất điểm.
- + Khoảng cách giữa các chất điểm không đổi trong quá trình chuyển động
- + Áp dụng được các qui luật CĐ hệ chất điểm vào CĐ vật rắn.

# 1. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VR

## 1 – Tịnh tiến:



☞ Khi VR tịnh tiến, mọi điểm trên VR đều vạch ra các quỹ đạo giống nhau với cùng một vận tốc.

- Mọi điểm trên vật rắn:

- + Cùng vector vận tốc



- + Cùng vector gia tốc

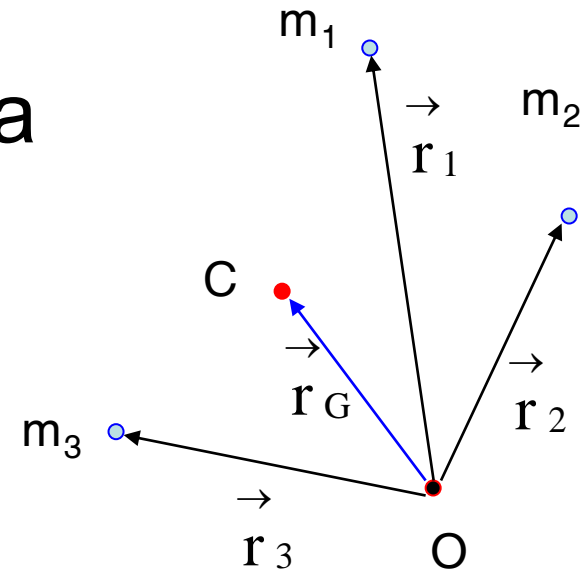
$$\begin{array}{ccc} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ v_M & = & v_N = v_G \\ \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow \\ a_M & = & a_N = a_G \end{array}$$

## 2. Khối Tâm C

**Định nghĩa:** Xem vật rắn như một hệ gồm  $n$  chất điểm.

+ C được gọi là khối tâm của vật rắn nếu vị trí C thỏa:

$$\vec{r}_C = \vec{OC} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i.$$

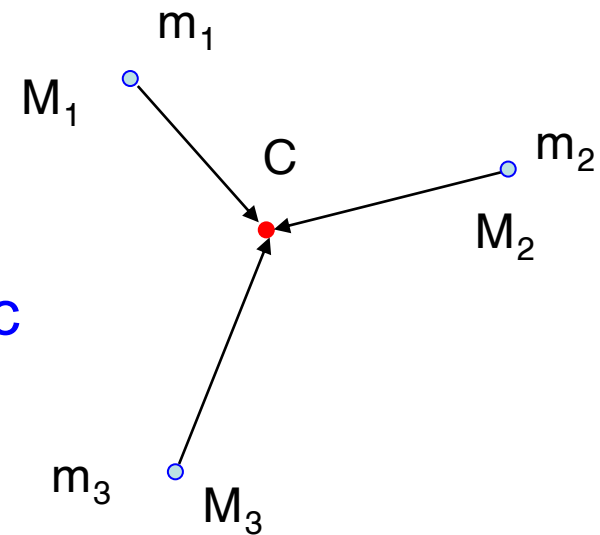
## 2. KHỐI TÂM C (“COM”)

1 - Định nghĩa: Nếu chọn gốc tọa độ trùng khối tâm C  
 Khối tâm của hệ là điểm C thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0 \quad \int_{VR} \vec{r} dm = 0$$

Nếu khối lượng vật rắn phân bố liên tục

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} dm = 0 \quad M = \sum_{i=1}^n m_i$$



$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int x \, dm, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int y \, dm, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int z \, dm,$$

## \* Đặc điểm của C:

- Đặc trưng cho hệ; là điểm rút gọn của hệ.
- Nằm trên các yếu tố đối xứng.

## \* Phân biệt khối tâm và trọng tâm:

- Trọng tâm là điểm đặt của trọng lực
- Trên thực tế C trùng với trọng tâm G

# Toạ độ khối tâm:

\* Hệ chất điểm:

$$G(x_G, y_G, z_G) = G \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m} \right)$$

\* Vật rắn:

$$G(x_G, y_G, z_G) = G \left( \frac{\int_{VR} x dm}{m}, \frac{\int_{VR} y dm}{m}, \frac{\int_{VR} z dm}{m} \right)$$

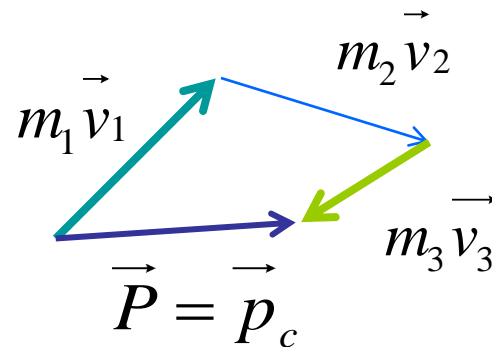
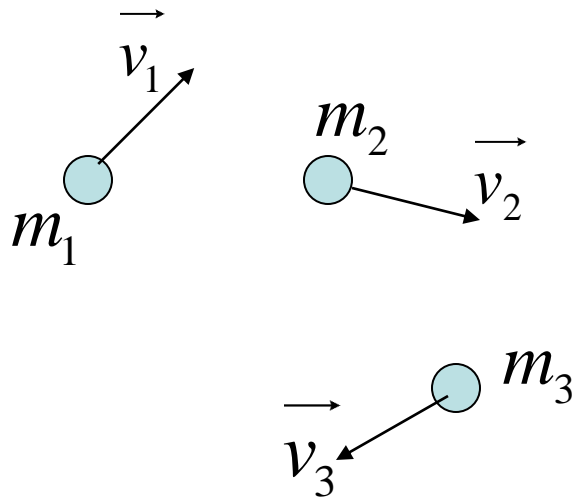
# Đặc điểm khối tâm

\* Động lượng của khối tâm :

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_i^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i^n m_i} \longrightarrow = \frac{\sum_i^n m_i \vec{v}_i}{\sum_i^n m_i} = \frac{\sum_i^n \vec{p}_i}{\sum_i^n m_i} = \frac{\vec{P}_{he,vat}}{\sum_i^n m_i}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i^n m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{p}_c = \left( \sum_i^n m_i \right) \vec{v}_c = \vec{P}_{he,vat}$$





## Gia tốc khối tâm

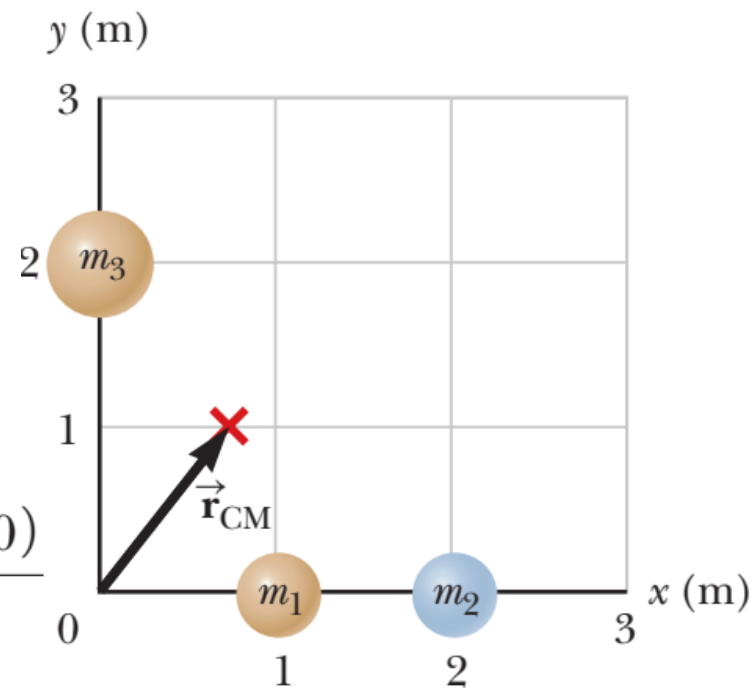
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$
$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{\sum_i m_i}$$
$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$
$$\vec{F} = M \vec{a}_c$$

**Đặc trưng động lực học của vật rắn chuyển động tịnh tiến xem như đồng nhất với động lực học của khối tâm, tức của một chất điểm mà ta đã quen biết.→ Chỉ cần xét chuyển động quay của vật rắn.**

Cho hệ 3 hạt đặt tại vị trí như hình vẽ. Tìm tọa độ khối tâm biết  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 2 \text{ kg}$ ?

$$\begin{aligned} x_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{(1.0 \text{ kg})(1.0 \text{ m}) + (1.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m}) + (2.0 \text{ kg})(0)}{1.0 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg} + 2.0 \text{ kg}} \\ &= \frac{3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 0.75 \text{ m} \end{aligned}$$

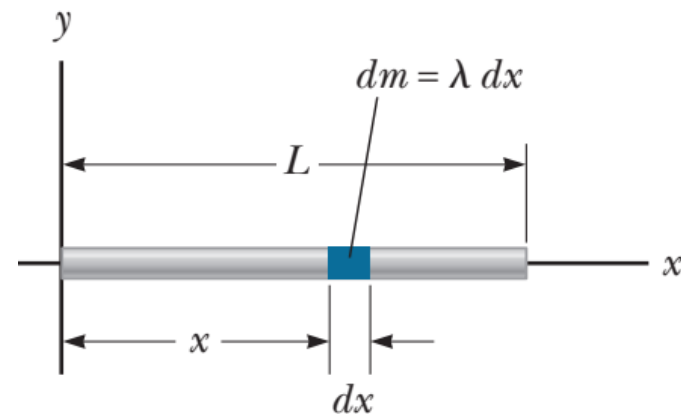
$$\begin{aligned} y_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{(1.0 \text{ kg})(0) + (1.0 \text{ kg})(0) + (2.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m})}{4.0 \text{ kg}} = \frac{4.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 1.0 \text{ m} \end{aligned}$$



Tọa độ khối tâm

$$\vec{r}_{\text{CM}} \equiv x_{\text{CM}} \hat{\mathbf{i}} + y_{\text{CM}} \hat{\mathbf{j}} = (0.75 \hat{\mathbf{i}} + 1.0 \hat{\mathbf{j}}) \text{ m}$$

Tìm khối tâm của thanh dài  $L$  khối lượng  $M$  phân bố đều trên thanh? Khi thanh có khối lượng phân bố không đều, và khối lượng trên đơn vị chiều dài thay đổi theo vị trí như  $\lambda = \alpha \cdot x$ ?



Mật độ khối lượng tuyến tính  $\lambda = M/L$

Phần tử khối lượng ứng với độ dài  $dx$   $dm = \lambda dx$ .

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{L^2}{2M} \left( \frac{M}{L} \right) = \boxed{\frac{1}{2}L}$$

$\lambda = \alpha x.$

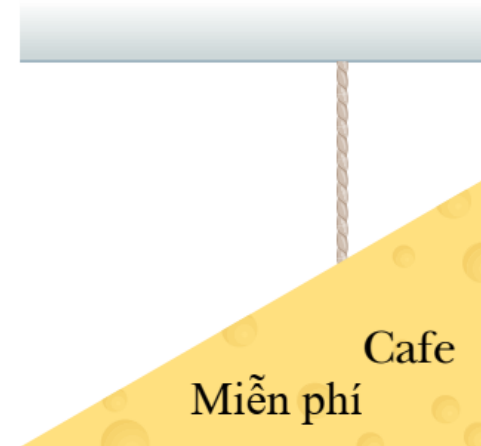
➔

$$\begin{aligned} x_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{1}{M} \int_0^L x \alpha x dx \\ &= \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3M} \end{aligned}$$

Tìm vị trí treo bản hiệu café này? Biết rằng bản hiệu này có khối lượng  $M$  phân bố đều và có bề dày  $t$

Chia bản hiệu café thành phần tử khối lượng  $dm$  như hình

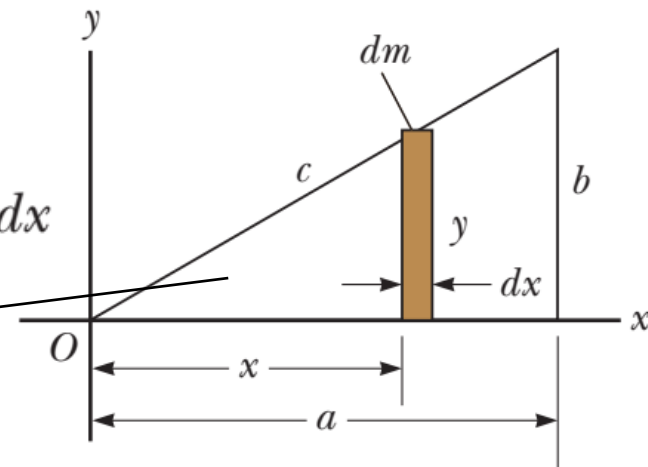
$$dm = \rho y t dx,$$



$$dm = \rho y t dx = \left( \frac{M}{\frac{1}{2}abt} \right) y t dx = \frac{2My}{ab} dx$$

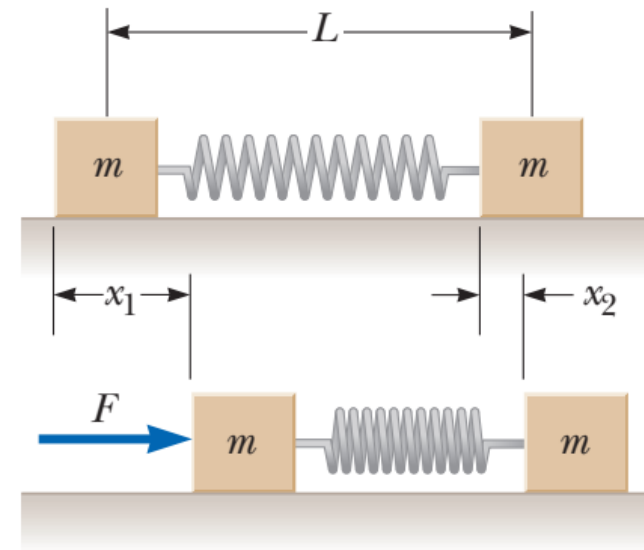
$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^a x \frac{2My}{ab} dx = \frac{2}{ab} \int_0^a xy dx$$

$$y = (b/a)x.$$



$$x_{\text{CM}} = \frac{2}{ab} \int_0^a x \left( \frac{b}{a} x \right) dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3}a$$

Hai vật có khối lượng  $m$  như nhau và được gắn thông qua lò xo, khi lò xo nghỉ, 2 vật cách nhau  $L$ . Tác dụng 1 lực  $F$  vào vật bên trái như hình vẽ, hai vật di chuyển  $x_1$  và  $x_2$ . Bỏ qua ma sát tính vận tốc khối tâm và năng lượng dao động hệ sau khi không còn tác động lực  $F$ ?



$$(2m)(v_{\text{CM}} - 0) = F \Delta t \quad \Rightarrow \quad 2mv_{\text{CM}} = F \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{v_{\text{CM,avg}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\frac{1}{2}(0 + v_{\text{CM}})} = \frac{(x_1 + x_2)}{v_{\text{CM}}}$$

$$2mv_{\text{CM}} = F \frac{(x_1 + x_2)}{v_{\text{CM}}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{CM}} = \boxed{\sqrt{F \frac{(x_1 + x_2)}{2m}}}$$

Khi không còn tác động lực  $F$   $K_{\text{CM}} + E_{\text{vib}} = W = Fx_1$

$$E_{\text{vib}} = Fx_1 - K_{\text{CM}} = Fx_1 - \frac{1}{2}(2m)v_{\text{CM}}^2 = \boxed{F \frac{(x_1 - x_2)}{2}}$$

# Chuyển động quay quanh trục của vật rắn

Mọi điểm có quỹ đạo tròn cùng  
trục  $\Delta$

Trong cùng khoảng thời gian  
mọi điểm cùng quay đi góc  $\theta$

Mọi điểm có cùng vận tốc góc  
 $\omega = d\theta/dt$  & gia tốc góc

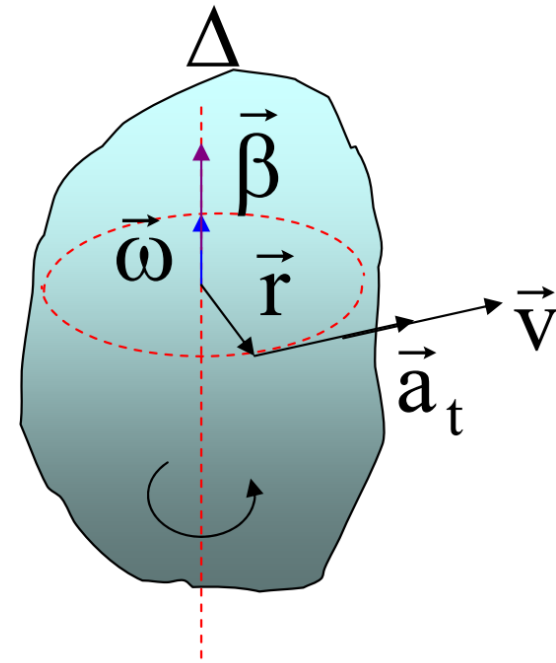
$$\beta = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$$

Vận tốc dài

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \Rightarrow v = \omega R_i$$

Gia tốc tiếp tuyến

$$a_i = R_i \times \beta$$



## 4.2. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

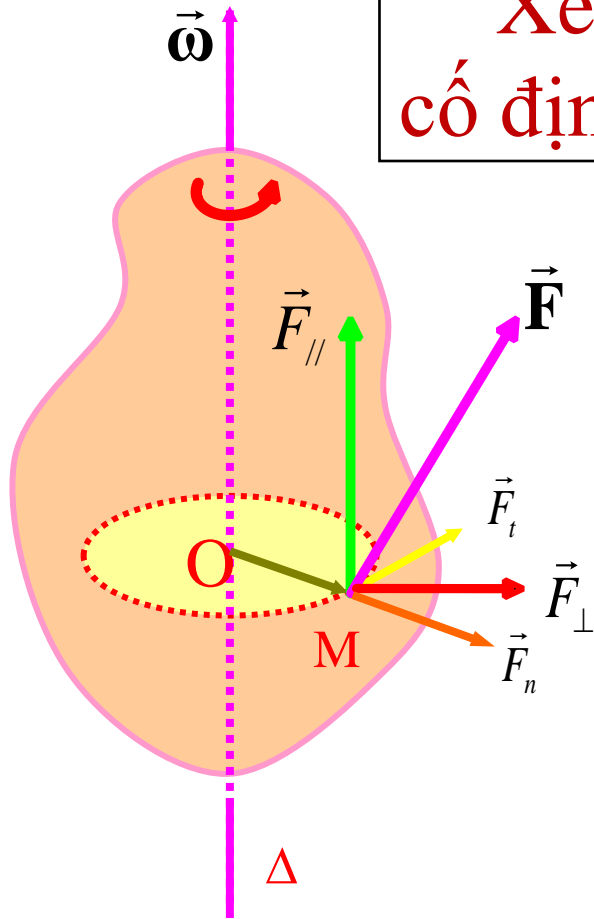
Xét vật rắn quay quanh một trục cố định dưới tác dụng của ngoại lực

Ta có thể phân tích  $\vec{F}$  thành các thành phần khác nhau:

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$$

Mà: 
$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F}_t + \vec{F}_n$$

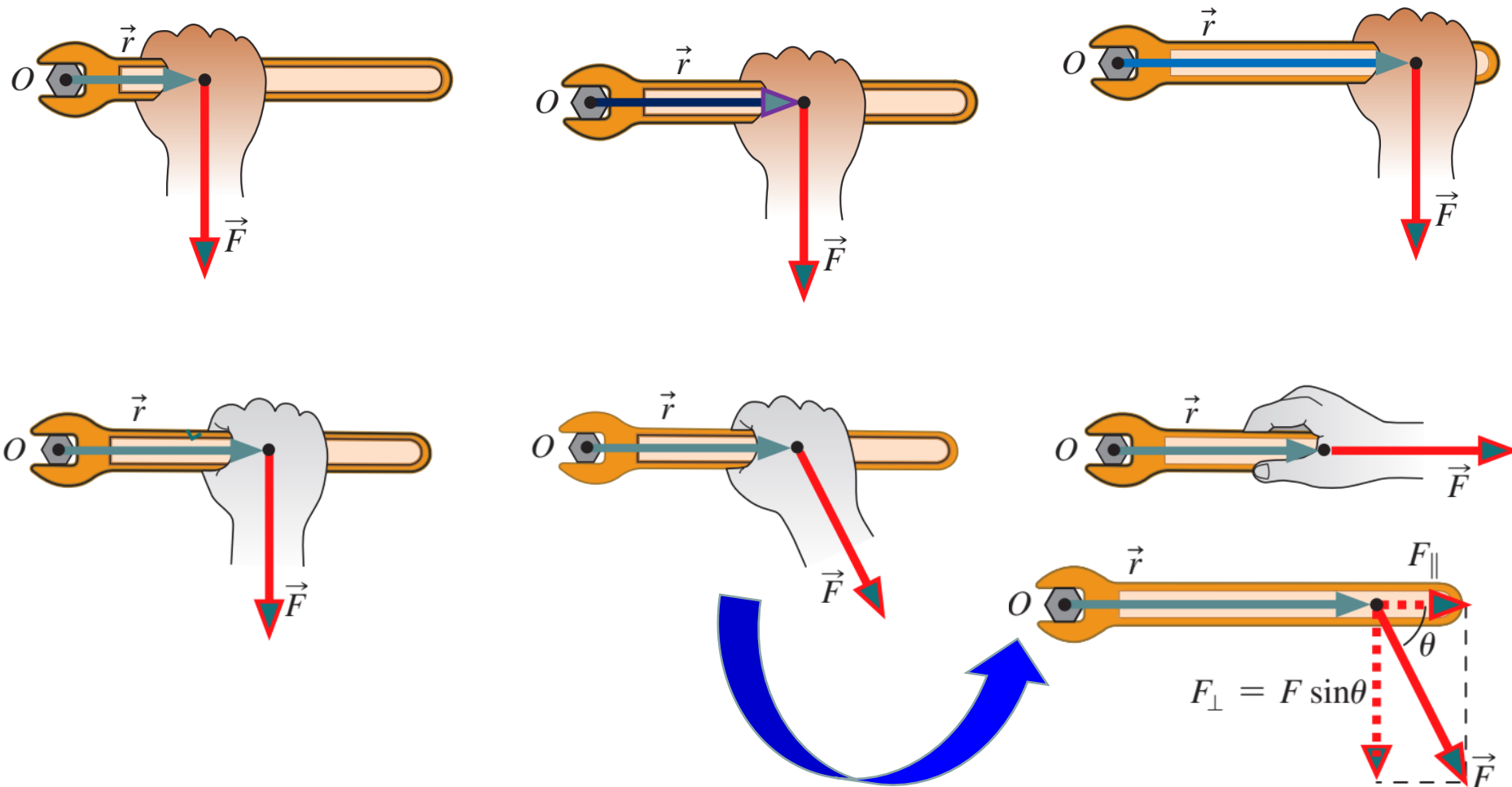
Vậy: 
$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_t + \vec{F}_n$$



*Lực tác dụng lên  
vật rắn quay quanh trục*

## 4.2. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

Quan sát cách dùng lực để mở ốc





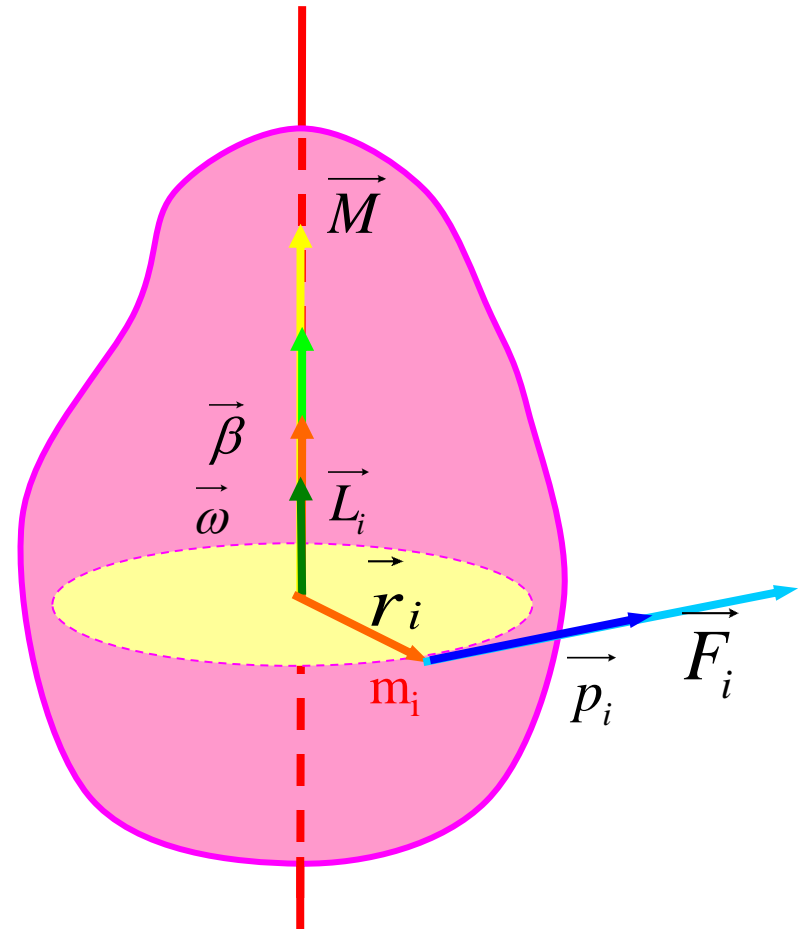
## 4.2.1. Mômen động lượng của vật rắn quay

➤ Mômen động lượng của chất điểm thứ  $i$  đối với trục quay là:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

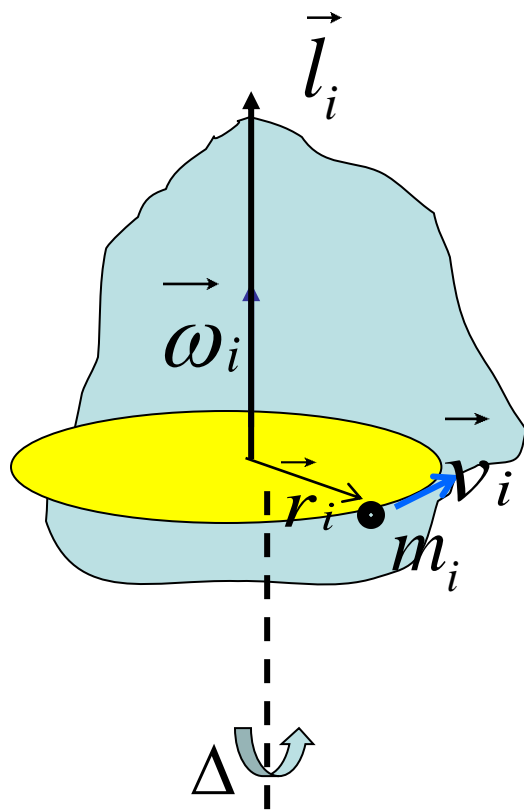
- $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  hướng theo phương *tiếp tuyến*.
- $\vec{r}_i$  hướng theo phương *bán kính*.

➡  $\vec{L}_i$  hướng theo trục quay



Hình 4.8

## 4.2. Phương trình cơ bản của vật rắn quay :



+ Vật rắn đang quay quanh trục  $\Delta$ .

Xét chất điểm  $m_i$  có vận tốc  $v_i$

$$\vec{v}_i = \left[ \vec{\omega}_i \cdot \vec{r}_i \right] \longrightarrow \text{Xác định véc tơ } \vec{\omega}_i$$

+ Momen động lượng của chất điểm, theo định nghĩa :

$$\vec{L}_i = \left[ \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i \right] = \left[ \vec{r}_i \cdot m_i \vec{v}_i \right]$$

$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i, \vec{p}_i$

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i (\omega_i r_i) = m_i \omega_i r_i^2$$

Các chất điểm có cùng vận tốc góc :

$$\omega_i = \omega$$

$$L_i = m_i \omega_i r_i^2 = \omega m_i r_i^2$$

$$L_i = m_i \omega_i r_i^2 = \omega m_i r_i^2$$

→ Momen động lượng của vật rắn quay đối với trục  $\Delta$  :

$$L = \sum_i L_i = \omega \sum_i m_i r_i^2$$

Đặt  $I = \sum m_i r_i^2$  : Momen quán tính của vật đối với trục  $\Delta$

$$\longrightarrow L = I\omega \rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega}$$

Trường hợp tổng quát :  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{(t)}; \vec{L} = \vec{L}_{(t)}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\beta}$$

$$\text{Đặt } \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\tau = M = I \times \beta$$

$$\vec{M} = I\vec{\beta}$$

$$\vec{M} = \vec{R}_i \times \vec{F}_i$$

*Phương trình cơ bản của chuyển động quay vật rắn .*

# MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MỘT VÀI VẬT RẮN ĐƠN GIẢN

## 4.3.1. Công thức

➤ Mômen quán tính với một trục quay xác định cho vật rắn gồm các chất điểm phân bố rời rạc:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

➤ Khi vật rắn gồm các chất điểm phân bố liên tục:

$$I = \int_m R^2 dm$$

### 4.3.1.1. Mômen quán tính $I$ của một thanh đồng chất đối với trục quay vuông góc với thanh tại trung điểm

#### Bài toán

Cho một thanh có chiều dài  $\ell$ , khối lượng  $m$ , tiết diện  $S$ . Tìm mômen quán tính  $I$  đối với trục quay  $\Delta$  là trung trục của thanh. Giả sử thanh nằm dọc theo trục  $Ox$ .

# MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MỘT VÀI VẬT RẮN ĐƠN GIẢN

Chọn  $dm$  như hình vẽ. Gọi  $\rho$  là khối lượng riêng của thanh thì  $dm = \rho S dx$ .

Với  $R = x$ , ta có:

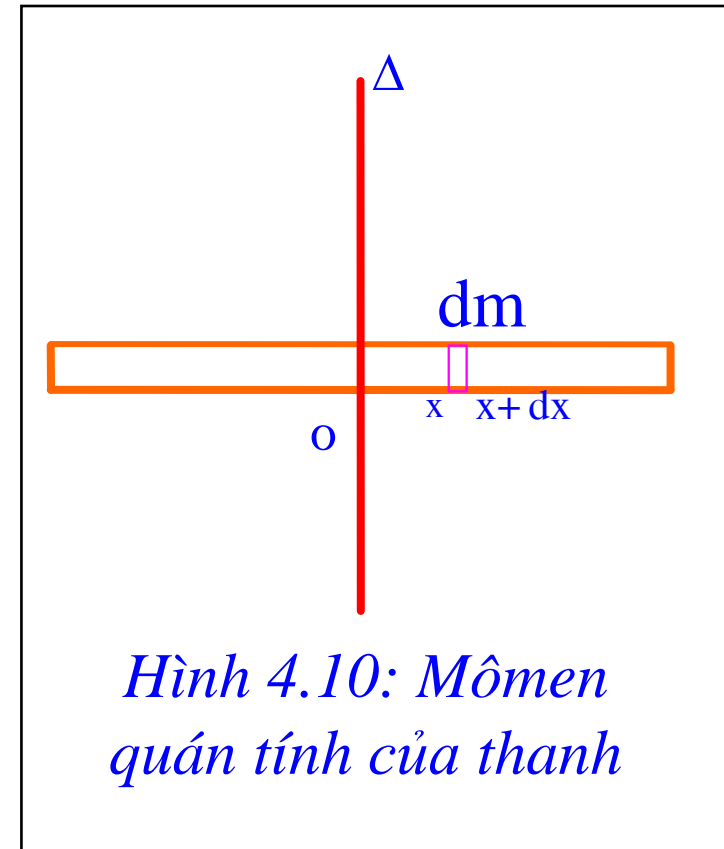
$$I = \int_m x^2 dm$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \rho S x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S l^3$$

Với  $\rho S l = m$  là khối lượng thanh.

Vậy:

$$I = \frac{1}{12} m l^2$$



*Hình 4.10: Mômen quán tính của thanh*

## 4.3.1.2 Mômen quán tính $I$ của vòng tròn đối với trục quay là trục của vòng tròn

### Bài toán

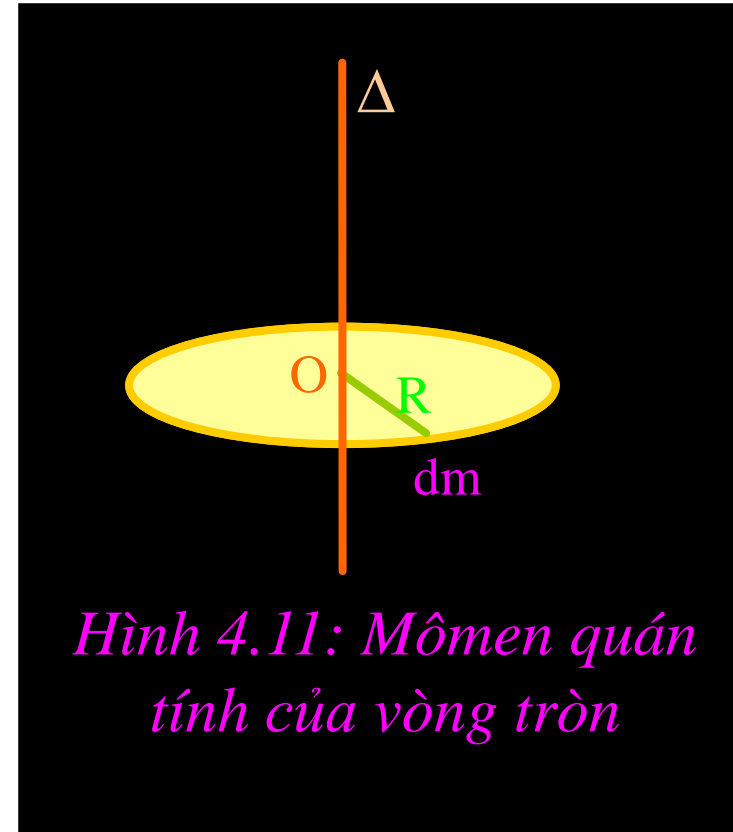
Cho vòng tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ , khối lượng  $m$ . Tìm mômen quán tính của vòng tròn đối với trục quay là trục của vòng tròn.

## 4.3.1.2 Mômen quán tính $I$ của vòng tròn đối với trục quay là trục của vòng tròn

Chia vòng tròn ra làm nhiều phần nhỏ có khối lượng  $dm$ , vì ở trên vòng tròn nên  $dm$  cách tâm  $O$  một khoảng bằng bán kính  $R$ . Vậy ta có:

$$I = \int_m R^2 dm \Rightarrow I = R^2 \int_m dm = mR^2$$

Vậy:  **$I = mR^2$**





### 4.3.1.3 Mômen quán tính $I$ của một đĩa tròn đối với trục quay là trục của đĩa

#### Bài toán

Cho một đĩa tròn mỏng tâm  $O$  bán kính  $R$ , khối lượng  $m$ . Tìm mômen quán tính của đĩa tròn đối với trục quay là trục của đĩa.

### 4.3.1.3 Mômen quán tính I của một đĩa tròn đối với trục quay là trục của đĩa

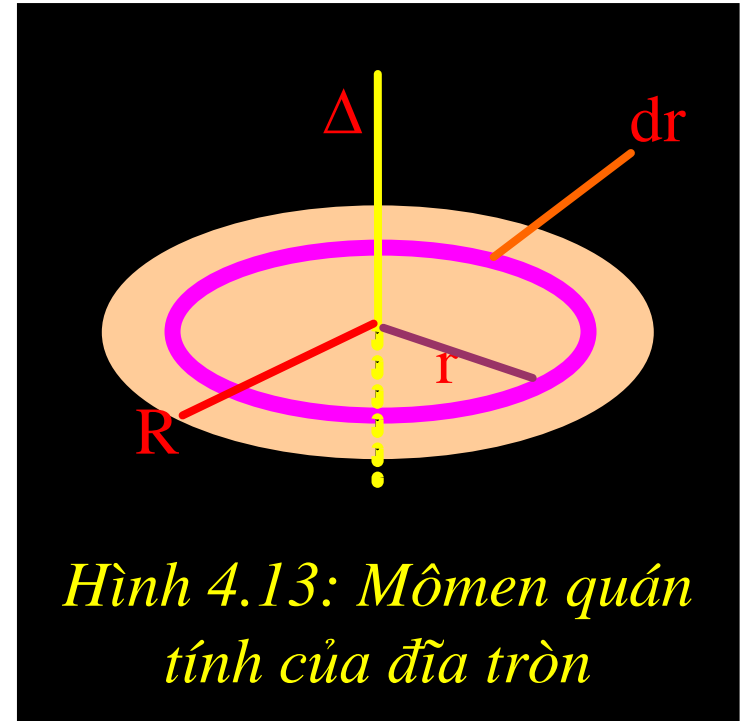
Chia đĩa thành nhiều vành tròn tương đương **những vòng tròn** có bán kính trong  $r$ , bán kính ngoài  $r + dr$ , diện tích của vành là  $dS = 2\pi r dr$  và khối lượng của nó là  $dm = \sigma dS$ , với  $\sigma$  là khối lượng trên đơn vị diện tích.

$$dI = r^2 dm$$

$$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr \Rightarrow I = 2\sigma\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\sigma\pi}{2} [r^4]_0^R$$

Với  $m = \sigma\pi R^2$  nên:

$$I = \frac{mR^2}{2}$$



*Hình 4.13: Mômen quán tính của đĩa tròn*

## 4.3.1.4 Mômen quán tính của trụ rỗng, trụ đặc

### Trụ rỗng

Chia trụ rỗng thành  $n$  vòng tròn, mỗi vòng có mômen quán tính

$$I_i = m_i R_i^2 = m_i R^2$$

Mômen quán tính của trụ rỗng:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = R^2 \sum_{i=1}^n m_i = mR^2$$

Vậy:  $I = mR^2$

# Trụ đặc

Chia hình trụ đặc thành  $n$  đĩa tròn, mỗi đĩa có mômen quán tính:

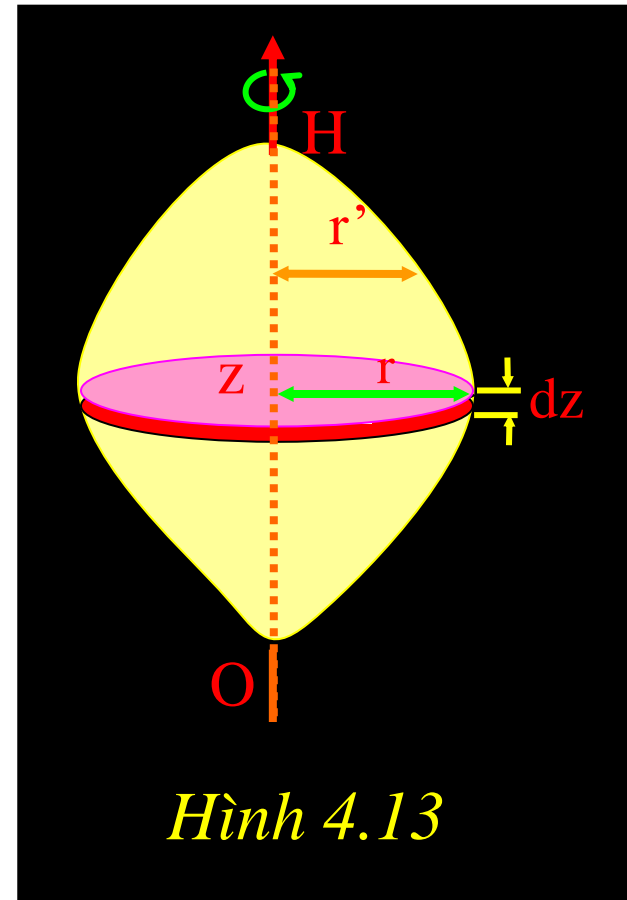
$$I_i = \frac{1}{2} m_i R_i^2 = \frac{1}{2} m_i R^2$$

Mômen quán tính của hình trụ đặc:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i R^2 = \frac{1}{2} R^2 \sum_{i=1}^n m_i$$

Vậy:

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$



Hình 4.13

### 4.3.1.5 Mômen quán tính của các vật tròn xoay

Khái niệm: *Vật tròn xoay* là những vật mà bề mặt của chúng được tạo thành bởi sự quay của một đường cong phẳng quanh một trục nằm trong mặt phẳng chứa đường cong đó.

#### Bài toán

Tính mômen quán tính của vật tròn xoay đối với trục  $Oz$  khi biết sự phụ thuộc hàm  $r(z)$  và mật độ  $\rho$ .

### 4.3.1.5 Mômen quán tính của các vật tròn xoay

- Ta chia vật thành những đĩa mỏng có chiều cao  $dz$ .  
Mômen quán tính của mỗi đĩa được tính

$$dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \pi \rho r^4 dz$$

Với  $dm = \rho \pi r^2 dz$  là khối lượng của đĩa.

- Vậy mômen quán tính của hình tròn xoay:

$$I = \int_{vtx} dI = \frac{1}{2} \pi \rho \int_0^H r^4 dz$$



Tính mômen quán tính của hình nón và hình cầu.

## Hình nón

- Đối với hình nón thì hàm  $r(z)$  có dạng:

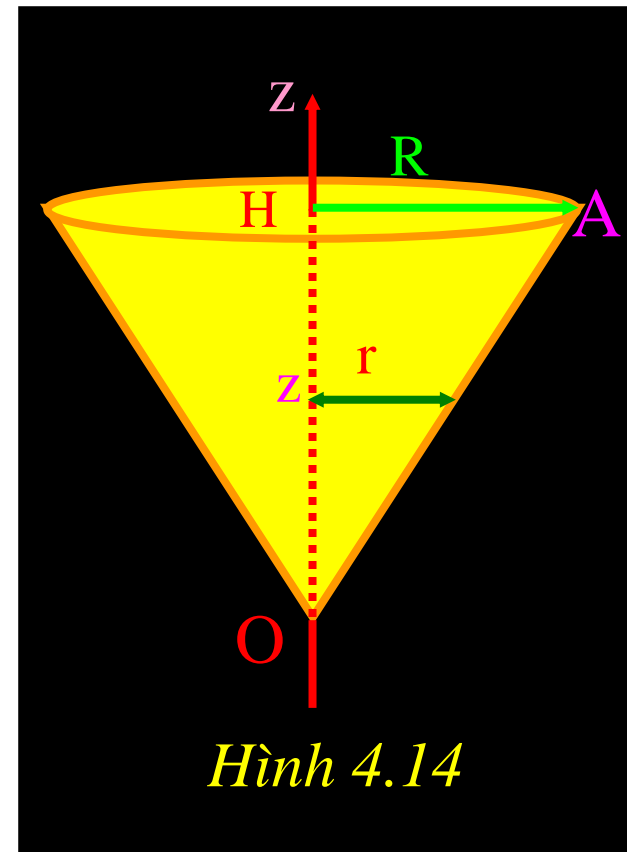
$$r = \frac{R}{H} z$$

$$I = \frac{1}{2} \pi \rho \left( \frac{R}{H} \right)^4 \int_0^H z^4 dz = \frac{1}{2} \pi \rho \left( \frac{R}{H} \right)^4 \frac{H^5}{5}$$

- Khối lượng hình nón:  $m = \pi R^2 H \rho$

- Vậy:

$$I = \frac{3}{10} m R^2$$



Hình 4.14

## Hình cầu

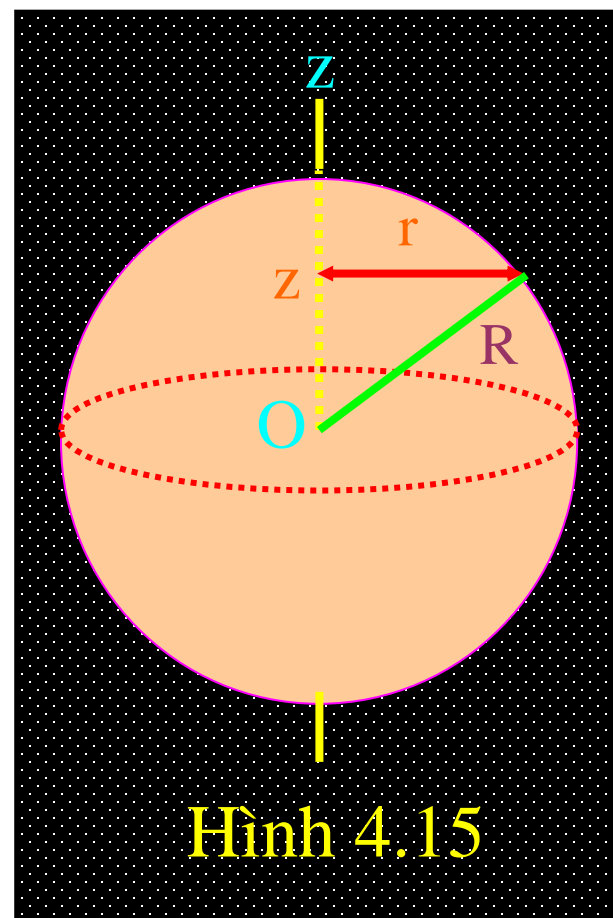
Từ hình vẽ ta có:  $r^2 = R^2 - z^2$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \pi \rho \int_{-R}^R r^4 dz = \pi \rho \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz \\ &= \pi \rho \left( R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 \end{aligned}$$

Với khối lượng quả cầu:  $m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

Vậy:

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

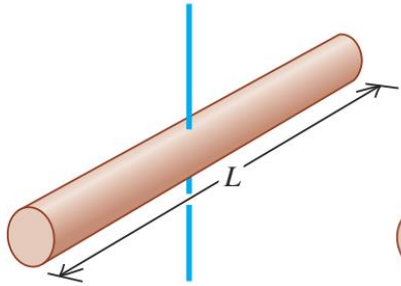


Hình 4.15

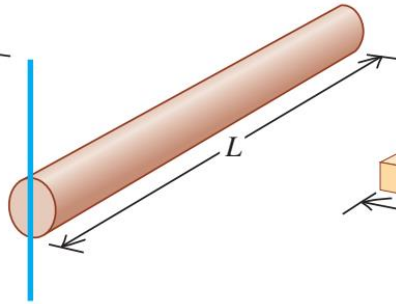


# Tóm tắt Mômen quán tính của một số vật

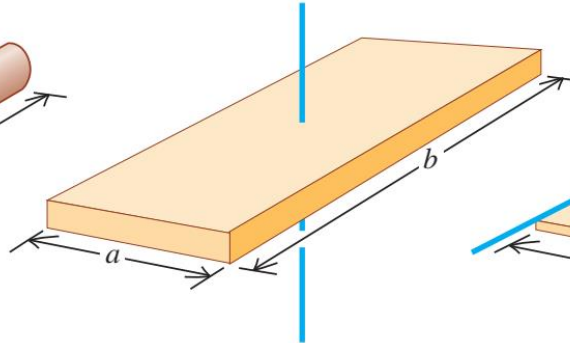
$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



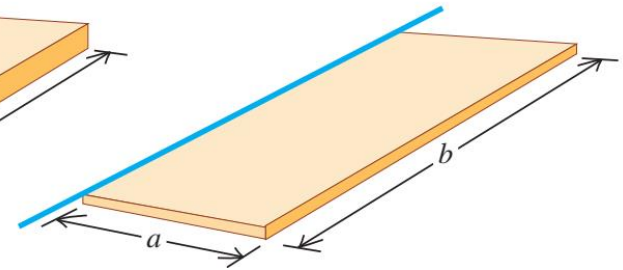
$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



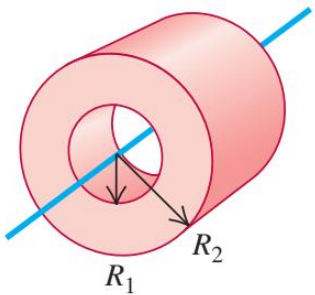
$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



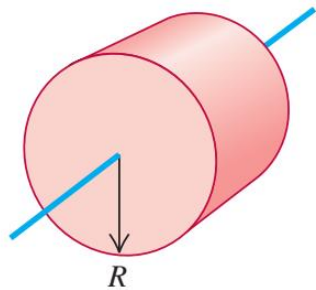
$$I = \frac{1}{3} Ma^2$$



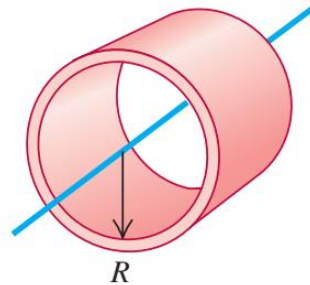
$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$



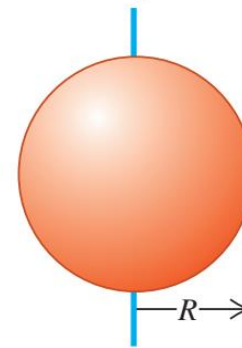
$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



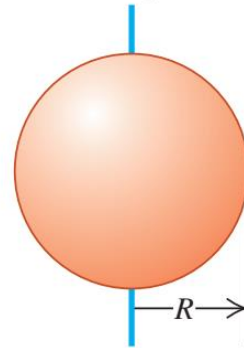
$$I = MR^2$$



$$I = \frac{2}{5} MR^2$$



$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



Bạn làm rơi cuộn giấy vệ sinh 274 g ở độ cao 0,73 m. Biết  $R_1 = 2,7$  cm,  $R_2 = 6,1$  cm. Bao lâu nó chạm đất?

ĐL II Newton

$$T - mg = ma_y.$$

$$a_y = R_2 \times \beta$$

$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$$

Mômen lực

$$\tau = -R_2 T \quad \Rightarrow \quad -R_2 T = \left[ \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2) \right] \frac{a_y}{R_2}$$

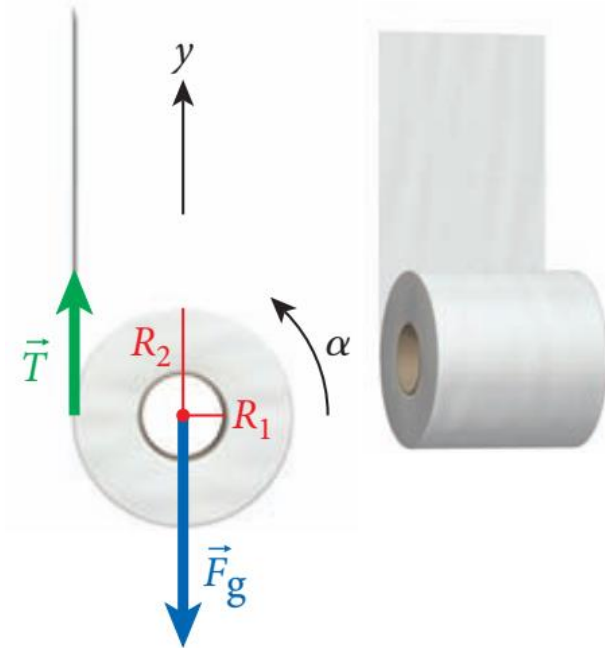
$$\tau = I \times \beta$$

$$-T = \frac{1}{2}m \left( 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) a_y \quad \Rightarrow \quad -mg = \frac{1}{2}m \left( 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) a_y + ma_y$$

$$a_y = - \frac{g}{\frac{3}{2} + \frac{R_1^2}{2R_2^2}}$$

$$a_y = - \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{\frac{3}{2} + \frac{(2.7 \text{ cm})^2}{2(6.1 \text{ cm})^2}} = -6.14 \text{ m/s}^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{-a_y}} = \sqrt{\frac{2(0.73 \text{ m})}{6.14 \text{ m/s}^2}} = 0.488 \text{ s}$$



Con Yo-yo bán kính trong  $R_1$  và BKN  $R_2$

Mômen lực

$$\tau = I \times \beta \Rightarrow -TR_1 = \left(\frac{1}{2}mR_2^2\right)\frac{a_y}{R_1}$$

$$-T = \frac{1}{2}m\frac{R_2^2}{R_1^2}a_y$$

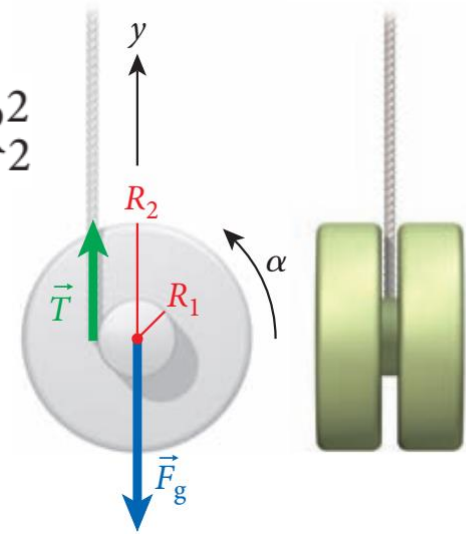
ĐL II Newton  $T - mg = ma_y$

$$-mg = ma_y + \frac{1}{2}m\frac{R_2^2}{R_1^2}a_y \Rightarrow a_y = -\frac{g}{1 + \frac{1}{2}\frac{R_2^2}{R_1^2}} = -\frac{2R_1^2}{2R_1^2 + R_2^2}g$$

Nếu đề cho hoặc thực tế

$$R_2 = 5R_1 \Rightarrow a_y = \frac{-g}{1 + \frac{1}{2}(25)} = \frac{-g}{13.5} = -0.727 \text{ m/s}^2$$

$$I = \frac{1}{2}mR_2^2$$



# Tính gia tốc?

ĐL II Newton

$$I = \frac{1}{2} m_p R^2$$

$$-T_1 + m_1 g = m_1 a$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

$$\tau = I \times \beta$$

$$a = R \times \beta$$

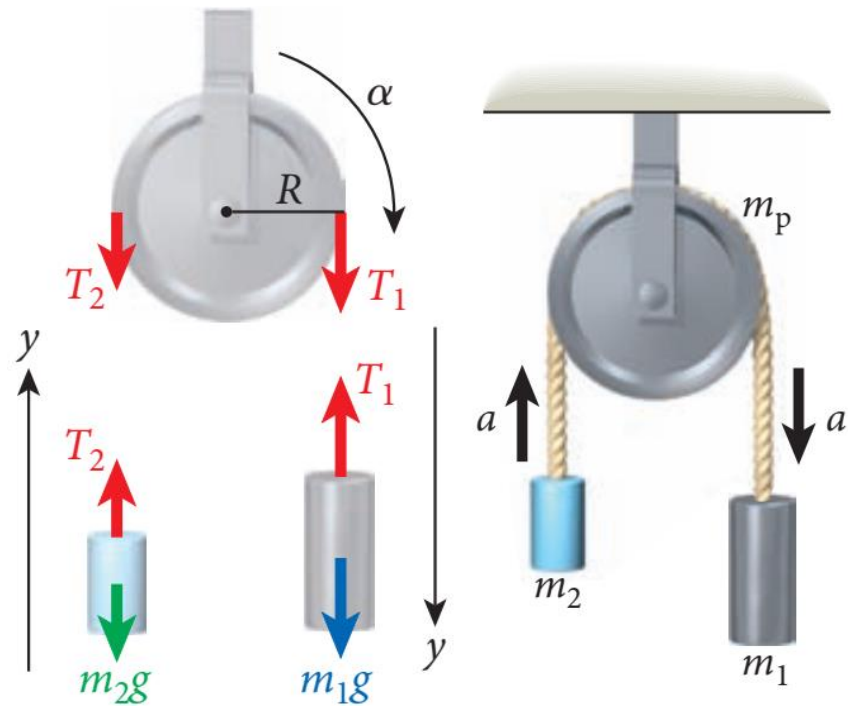
Tổng Mômen lực

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = R T_1 \sin 90^\circ - R T_2 \sin 90^\circ = R(T_1 - T_2).$$

$$R(T_1 - T_2) = \tau = \left( \frac{1}{2} m_p R^2 \right) \left( \frac{a}{R} \right) \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_p a$$

$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_p) a \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_p} g$$



## 4.3.2. Định lý Steiner – Huyghens cho mômen quán tính I đối với một trục bất kỳ không qua khối tâm

### Định lý Steiner – Huyghens

$$I = I_C + ma^2$$

Với  $\Delta$  : trục quay bất kỳ không qua khối tâm

$\Delta_C$ : trục quay qua khối tâm của vật và song song với  $\Delta$

$I$  : mômen quán tính của vật rắn đối với trục  $\Delta$

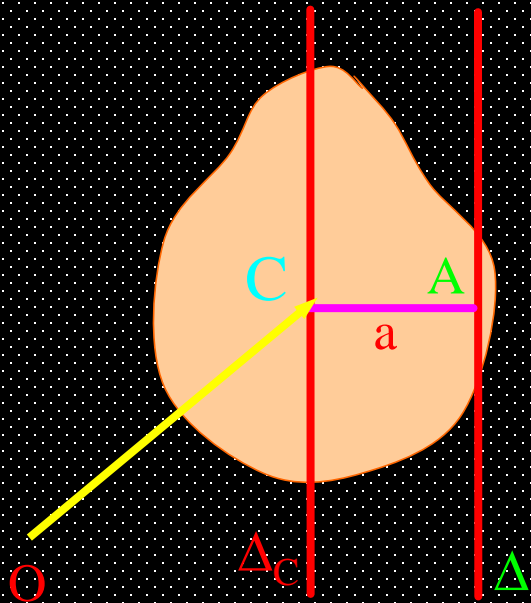
$I_C$ : mômen quán tính của vật rắn đối với trục  $\Delta_C$

$m$  : khối lượng của vật rắn

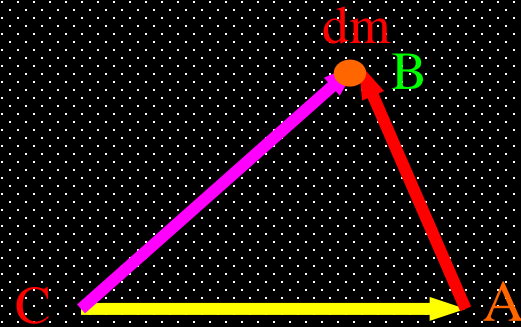
$a$  : khoảng cách giữa hai trục  $\Delta$  và  $\Delta_C$

# CHỨNG MINH

- Xét tiết diện  $S$  của vật rắn vuông góc với hai trục  $\Delta$  và  $\Delta_C$ .
- Khoảng cách từ khối lượng vi phân  $dm$  đến các trục đi qua  $C$  và  $A$  lần lượt là  $\vec{r}$  và  $\vec{r}'$ .



Hình 4.16



Hình 4.17: Tiết diện  $S$  của vật rắn vuông góc với hai trục  $\Delta$  và  $\Delta_C$

Từ hình vẽ ta có:  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$

Do đó:  $(\vec{r}')^2 = r^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{r}$

➤ Vậy

$$I = \int (\vec{r}')^2 dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2\vec{a} \int \vec{r} dm$$

Mômen quán tính  
của vật đối với  
trục đi qua A

Mômen quán tính  
 $I_C$  của vật đối với  
trục đi qua khối  
tâm C

$$= ma^2$$

$$= 2\vec{a}(m\vec{r}_C)$$

$\vec{r}_C$  là bán kính vectơ xác định vị trí của khối tâm C, mà gốc vectơ này chính là C, nên

$$\vec{r}_C = 0$$

Do đó:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_C + \mathbf{ma}^2$$

❖ Ví dụ: Tính mômen quán tính của thanh với trục quay không qua khối tâm.

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_C + \mathbf{ma}^2$$

$$\mathbf{I} = \frac{1}{12} \mathbf{ml}^2 + \frac{1}{4} \mathbf{ml}^2 = \frac{1}{3} \mathbf{ml}^2$$



## Thí nghiệm trên ghế Giucopxki:

Hệ cô lập gồm 2 “vật quay” :

$$I_1 \quad I_2 ; \quad \vec{\omega}_1 ; \quad \vec{\omega}_2$$

$$\vec{L} = I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 = \text{const}$$

Thời điểm đầu tiên hệ đứng yên :  $\vec{L}_0 = 0$

Bảo toàn momen động lượng :

$$\vec{L} = \vec{L}_0 = I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 = 0$$

$$I_1 \vec{\omega}_1 \downarrow = -I_2 \vec{\omega}_2 \longrightarrow \boxed{\vec{\omega}_2 = -\frac{I_1}{I_2} \vec{\omega}_1}$$



→ Người cho bánh xe quay:  $\vec{\omega}_1$

→ Ghế quay ngược chiều với vận tốc góc  $\vec{\omega}_2$

# Vũ công và định luật bảo toàn momen động lượng



Ngoại lực tác dụng lên vũ công là trọng lực.

Trọng lực song song với trục quay .

$$\longrightarrow \vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega} = \text{const}$$

+ Vũ công dang thẳng tay :

$$R_i \uparrow \Rightarrow I \uparrow \Rightarrow \omega \downarrow$$



### Ví dụ

Một đĩa mài có momen quán tính  $1,2 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$  được gắn vào một cái khoan điện, khoan này cho nó một momen quay 16 Nm. Tìm:

a/ Vận tốc góc và

b/ momen động lượng của đĩa sau khi động cơ khởi động 33 ms.

→ Phương trình cơ bản của chuyển động quay :

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{16}{1,2 \cdot 10^{-3}} = 1,33 \cdot 10^4 \text{ rad} / \text{s}^2$$

Vận tốc góc:  $\omega = \beta t + \omega_0 = \beta t$  Quay từ nghỉ :  $\omega_0 = 0$

$$\omega = 1,33 \cdot 10^4 t$$

a/ Vận tốc góc của đĩa lúc  $t = 33 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

$$\omega = 1,33 \cdot 10^4 \cdot 33 \cdot 10^{-3} = 440 \text{ rad} / \text{s}$$

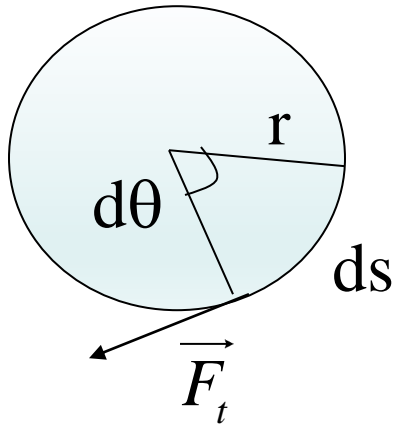
b/ Momen động lượng lúc đó là :

$$L = I\omega = 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 440 = 0,528 \text{ (kgm}^2 / \text{s)}$$

# Công của momen lực và động năng của vật rắn quay

Xét vật rắn quay quanh trục cố định  $\Delta$ , lực tiếp tuyến  $\vec{F}_t$  nằm trong mặt phẳng quỹ đạo.

Công vi phân của lực tiếp tuyến là:



$$dA = F_t \cdot ds = r \cdot F_t \cdot d\theta$$

$$\vec{r} \perp \vec{F}_t \quad ds = r d\theta$$

$$M = r \cdot F_t$$

$$dA = M \cdot d\theta \longrightarrow A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta$$

Với chuyển động của chất điểm :

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$$

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M \cdot \omega$$

$$\vec{M} \nearrow \nearrow \vec{\omega}$$

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

## Động năng của vật quay :

$$dA = M.d\theta$$

$$M = I\beta \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \beta = \frac{d\omega}{dt}$$

$$dA = I\beta.d\theta = I \frac{d\omega}{dt}.d\theta = Id\omega \frac{d\theta}{dt} = I\omega d\omega$$

Nếu :  $I = \text{const}$

$$dA = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)$$

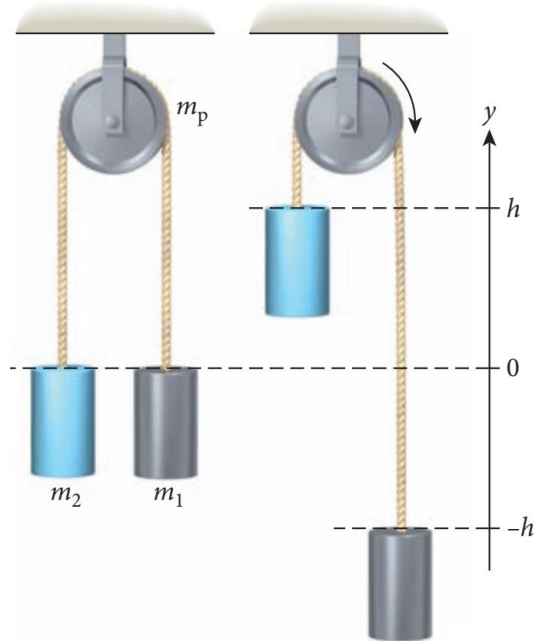
$$\Rightarrow A = \int_0^A dA = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}$$

$$A = \Delta W_d$$

$$K_{dq} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Nếu vừa quay vừa tịnh tiến  $\rightarrow$  Động năng toàn phần :

$$K_t = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$



Hai vật  $m_1 = 3\text{kg}$ ,  $m_2 = 1,4\text{ kg}$  kết nối qua RR khối lượng  $= 2,3\text{kg}$ . Tính VT vật  $m_2$  khi ở độ cao  $h = 0,16\text{ m}$ ?

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1v^2$$

**Động năng quay**

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2v^2$$

$$U_1 = -m_1gh$$

$$U_2 = m_2gh$$

$$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I = \frac{1}{2}m_pR^2$$

$$\omega R = v$$



$$K_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_pR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}m_pR^2\omega^2 = \frac{1}{4}m_pv^2$$

**ĐL II BTNL**

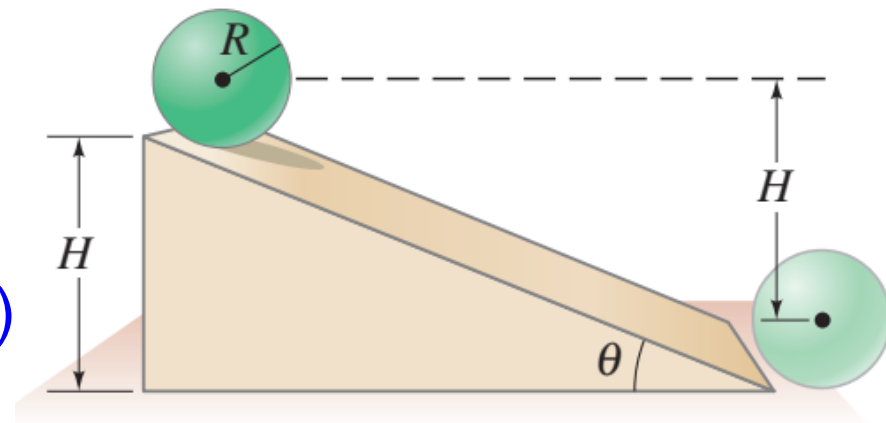
$$0 = U_1 + U_2 + K_1 + K_2 + K_r$$

$$= -m_1gh + m_2gh + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{4}m_pv^2.$$

$$(m_1 - m_2)gh = \left(\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{4}m_p\right)v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m_p}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(3.00\text{ kg} - 1.40\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.16\text{ m})}{3.00\text{ kg} + 1.40\text{ kg} + \frac{1}{2}(2.30\text{ kg})}} = 0.951312\text{ m/s}.$$

Quả cầu đặc, KLượng  $M$  và BK  $R$ , chuyển động TT nghỉ từ độ cao  $H$  của Mp nghiêng 1 góc  $\theta$ .  
Tính vận tốc của nó (không trượt)



Năng lượng toàn phần

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + Mgy,$$

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2$$

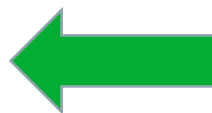
ĐLBT Năng lượng  $E_{\text{trên}} = E_{\text{dưới}}$

$$0 + 0 + MgH = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + 0.$$

$$\omega = v/R \quad \text{↪} \quad MgH = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$



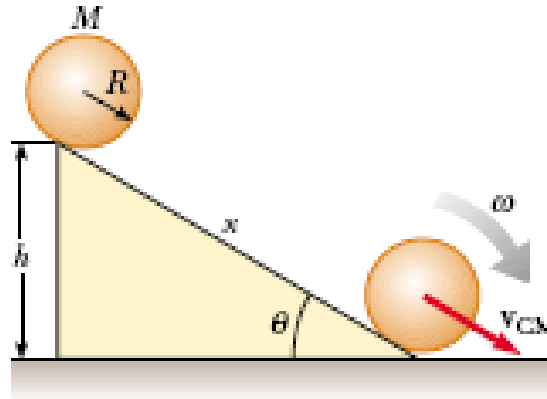
$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gH}$$



$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)v^2 = gH$$

Trụ đồng nhất, BK R và KLượng m đứng yên ở độ cao đầu h, lăn không trượt trên Mp nghiêng 1 góc  $\theta$ . Tính vận tốc khối tâm và vận tốc của nó cuối mp nghiêng.

$$I_C = \frac{1}{2} m R^2$$



$$V_C = R\omega$$

$$\omega = \frac{V_C}{R}$$

**Bảo toàn cơ năng**

$$K_{(h)} = 0; U_{(h)} = mgh \quad \longrightarrow \quad K_{(0)} = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}; U_{(0)} = 0$$

$$E_{(h)} = mgh = E_{(0)} = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}$$



$$\frac{3}{4} m V_C^2 = mgh$$

$$V_C = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

$$\omega = \frac{V_C}{R} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{gh}{3}}$$

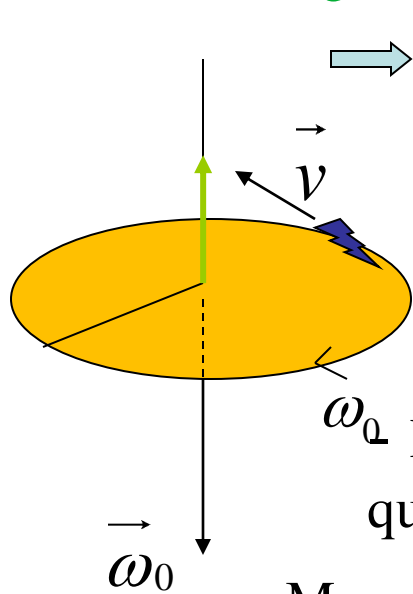


## Ví dụ

Một con gián khối lượng  $m$  bò ngược chiều kim đồng hồ theo mép một cái khay nhiều ô (một đĩa tròn lắp trên một trục thẳng đứng), bán kính  $R$ , momen quán tính  $I$ , với ổ trục không ma sát. Vận tốc của gián đối với trái đất là  $v$ , còn khay quay theo chiều kim đồng hồ với vận tốc góc  $\omega_0$ , con gián tìm được một mẩu vụn bánh mì ở mép khay và tất nhiên, nó dừng lại.

a/ Sau khi gián dừng lại, vận tốc cái khay là bao nhiêu ?

b/ Cơ năng có được bảo toàn không ?



Ngoại lực ở đây chỉ là trọng lực theo phương trục quay. Theo phương vuông góc với trục quay không có ngoại lực  $\rightarrow$  Momen quay  $M = 0 \Rightarrow L (\text{hệ}) = \text{const}$

a/

- Vận tốc gián là  $v \rightarrow$  Vận tốc góc của gián đ/v trái đất là:

$$\left. \begin{array}{l} \omega_g \text{ Kh/l gián là } m, \text{ cách trục đĩa là } R \rightarrow \text{Momen} \quad \omega_g = \frac{v}{R} \\ \text{quán tính của gián đ/v trục quay là :} \end{array} \right\} (1)$$

- Momen động lượng của hệ khi gián đang bò là :  $I_g = mR^2$

$$(1) \longrightarrow L = I_g \omega_g + (-I \omega_0) = mR^2 \frac{v}{R} - I \omega_0 = mRv - I \omega_0 \quad (2)$$

- Momen động lượng của hệ khi gián dừng lại :

$$L' = (I + I_g) \omega = (I + mR^2) \omega \quad (3)$$

-Bảo toàn momen động lượng :  $L' = L$

$$L' = (I + mR^2) \omega = L = mRv - I\omega_0 \xrightarrow[=?]{\omega} \omega = \frac{mRv - I\omega_0}{I + mR^2} \quad (4)$$

?? ↓

Nếu  $\omega$  cùng dấu với  $\omega_0$  thì hệ quay cùng chiều ban đầu của đĩa (theo chiều kim đồng hồ ).

b / Cơ năng hệ có bảo toàn không ? :  $\xrightarrow{U=0}$  Xét  $\Delta K = 0$  hay  $\neq 0$  ?

Động năng hệ khi gián đang bò :  $K_1 = k_g + K_d = ? \longrightarrow = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_0$

Khi gián dừng lại :  $K_2 = ?$

$$= \frac{1}{2}(I + I_g)\omega^2$$

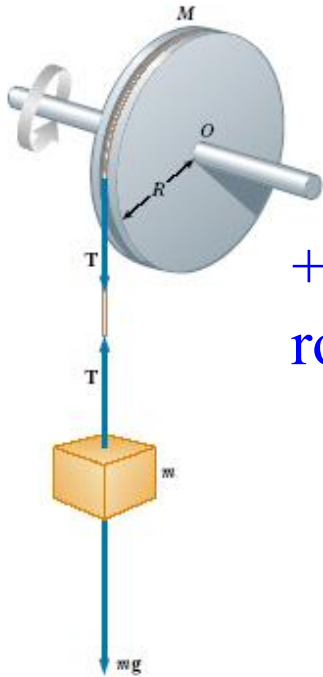
$$\longrightarrow = \frac{1}{2}(I + mR^2) \left[ \frac{mRv - I\omega_0}{I + mR^2} \right]^2$$

$$\Delta K = K_2 - K_1 = -\frac{mI(v + R\omega_0)^2}{2(I + mR^2)} < 0$$

$$K_2 < K_1$$

→ Cơ năng (động năng) hệ bị giảm .

Một ròng rọc khối lượng  $M$ , bán kính  $R$  gắn vào một trục nằm ngang không ma sát. Đầu kia của dây gắn với một vật khối lượng  $m$ . Hãy tính:  
 a/ Gia tốc rơi của vật treo . b/ Sức căng của dây. c/ Vận tốc của vật khi nó rơi được một đoạn đường  $s$ .



→ + Hệ : - Ròng rọc → chuyển động quay.

- Vật treo → chuyển động tịnh tiến.

+ Chuyển động của vật và của một điểm trên bề mặt ròng rọc có cùng gia tốc.

$$a = \beta \cdot R$$

( $\beta$  : Gia tốc góc của ròng rọc).

$$\vec{T}' = \vec{T}$$

$\vec{T}$  : đặt vào điểm trên mặt ròng rọc.

a/ Gia tốc rơi của vật :

+ Xét vật :  $mg - T = ma = mg - T' \quad (1)$

+ Xét ròng rọc :  $\vec{M} = I \vec{\beta} \quad \vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{T}] \xrightarrow{\vec{R} \perp \vec{T}} M = RT = I \beta$

$\beta = \frac{a}{R} \rightarrow Ia = TR^2 \quad (2)$

$$\left. \begin{array}{l} mg - T = ma = mg - T, \quad (1) \\ Ia = TR^2 \quad (2) \end{array} \right\} \longrightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{I}{R^2}}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} = \frac{2mg}{2m + M}$$

b/ Sức căng :

$$T = m(g - a)$$

c/ Vận tốc vật khi rơi được đoạn đường s :

$$\left. \begin{array}{l} (s - s_o) = v_o t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_t - v_o = at \end{array} \right\} \longrightarrow v_t^2 - v_o^2 = 2a(s - s_o)$$

$$v_o = 0$$

$$s_o = 0$$

$$v_t = \sqrt{2as}$$

# CÁC HỆ THỨC TƯƠNG ĐƯƠNG GIỮA CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN VÀ CHUYỂN ĐỘNG QUAY

## Chuyển động tịnh tiến

## Chuyển động quay

$m$   
 $\vec{v}$   
 $\vec{F}$

$\vec{a}$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i$$

$$d\vec{P} = \vec{F}dt$$

$$\vec{F} = \text{const}$$

$$\vec{P} = \text{const}$$

$$I_{\text{vat}} = \sum m_i r_i^2$$

$$\vec{\omega} \quad \vec{\beta}$$

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$$

$$\vec{M} = I\vec{\beta}$$

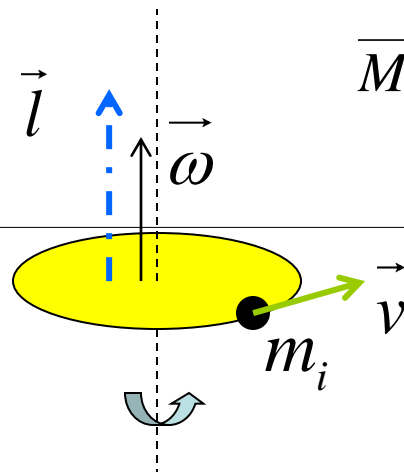
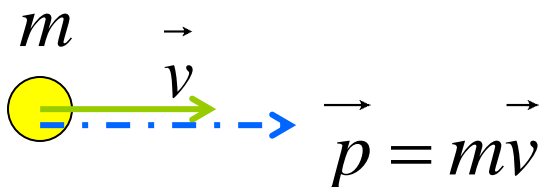
$$\vec{l} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]$$

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt$$

$$\vec{M} = \text{const}$$

$$\vec{L} = \text{const}$$



Hai vật có khối lượng  $m_1=2\text{kg}$  và  $m_2=1\text{kg}$  được nối với nhau bằng một sợi dây vắt qua một ròng rọc (khối lượng ròng rọc  $m=1\text{kg}$ ). Ròng rọc có dạng đĩa tròn. Ma sát giữa dây và ròng rọc không đáng kể.

A) Tính gia tốc của hệ và các lực căng dây.

B) Ban đầu vật  $m_1$  cách mặt đất  $2\text{m}$ , sau bao lâu thì vật  $m_1$  chạm đất?

(Nếu ban đầu hệ ở trạng thái đứng yên).

