BÀI TẬP VI TÍCH PHÂN B1

BỘ MÔN GIẢI TÍCH, KHOA TOÁN-TIN HỌC, ĐH KHTN

L. K. Hà   O. T. Hải
N. V. Huy   B. L. T. Thanh

Trích soạn từ: J. Stewart, CACULUS, The 6th Edition.

Mục lục

Chương 1

Số thực

1.1 Suy luận logic trên lý thuyết số thực và ánh xạ

1. Cho A, B, C là ba tập hợp thỏa $A \subset B$ và $B \subset C$. Chứng tỏ $A \subset C$.

2. Viết mệnh đề sau ở dạng kí hiệu và tìm mệnh đề phủ định của nó: Có một số thực dương M sao cho với mọi phần tử x của tập A thì $x \leq M$.

3. Khi nào thì một ánh xạ không là đơn ánh? không là toàn ánh? không là song ánh?

4. Một hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là tăng nếu với hai số thực x, y bất kì thì $x < y$ dẫn tới $f(x) \leq f(y)$. Hàm như thế nào thì không tăng?

5. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Hàm này có phải là một song ánh hay không?

6. a) Cho số tự nhiên m. Chứng minh rằng nếu m^2 chẵn thì m cũng là số chẵn.

   b) Chứng minh rằng nếu một số chính phương là chẵn thì số chính phương đó chia hết cho 4.

7. Chứng minh rằng không tồn tại phân số dạng $\dfrac{m}{n}$, với m và n là số tự nhiên ($n \neq 0$), thỏa $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = 2$.

8. Cho số a thỏa $\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$. Chứng minh $a = 0$. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương: Mệnh đề 1 là "$\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$"; mệnh đề 2 là "$a \leq 0$".

9. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương: Mệnh đề 1 là "$\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$", mệnh đề 2 là "$\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon$".

10. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương: Mệnh đề 1 là "$\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$", mệnh đề 2 là "$\forall \varepsilon > 0, a \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$".

11. a) Dùng các ký hiệu $\forall$ hay $\exists$ để biểu thị hình thức logic của các phát biểu sau sau:

    i/ Tập hợp A bị chặn trên.
    ii/ Số α không phải là cận trên của tập A.
    iii/ Số α không phải là phần tử lớn nhất của A.

    b) Cho $A = [0, 1)$. Số $\dfrac{999}{1000}$ có phải là cận trên của A không? Tại sao?

c) Chứng minh không tồn tại $\max A$ và chứng minh $\sup A = 1$.

d) Số 0 là gì đối với tập A?

12. a) Dùng các ký hiệu $\forall$ hay $\exists$ để biểu thị hình thức logic của các phát biểu sau:

i/ Tập hợp A bị chặn dưới.
ii/ Số α không phải là cận dưới của tập A.
iii/ Số α không phải là phần tử nhỏ nhất của A.

b) Cho $A = (1, 2]$. Số $\dfrac{1000}{999}$ có phải là cận dưới của A không? Tại sao?

c) Chứng minh không tồn tại $\min A$ và chứng minh $\inf A = 1$.

d) Số 2 là gì đối với tập A?

13. Cho $A = \left\{ n + \dfrac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Tập A có bị chặn trên không, vì sao? Chứng minh A có phần tử nhỏ nhất.

14. Cho $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Chứng minh A không có phần tử lớn nhất. Chứng minh $\sup A = 1$ và chứng minh A có phần tử nhỏ nhất.

15. Cho $\left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$. Chứng minh tồn tại $\max A$ và $\min A$.

16. Chứng minh rằng $\alpha = \sup A$ khi và chỉ khi α là cận trên của A, đồng thời $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > \alpha - \varepsilon$.

17. Chứng minh rằng $\alpha = \inf A$ khi và chỉ khi α là cận dưới của A, đồng thời $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \alpha + \varepsilon$.

18. a) Cho hai số thực x, y thỏa $y - x > 1$. Chứng minh rằng có số nguyên m sao cho $x < m < y$.
Hướng dẫn. sử dụng ký hiệu $[x]$ cho phần nguyên của x, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, từ đó chỉ ra số m thỏa đề bài.

b) (Tính trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$) Cho hai số thực a, b tùy ý và $a < b$. Chứng minh rằng có số hữu tỉ $q = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}^*$, sao cho $a < q < b$.
Hướng dẫn. Gọi n là số tự nhiên đủ lớn để $n(b - a) > 1$, sau đó dùng kết quả câu a ở trên.

19. *Sự tồn tại số vô tỉ từ tiên đề về sự tồn tại biên trên:*

a) Hãy chứng minh phương trình $x^2 = 2$ có nghiệm dương duy nhất là số thực (nghiệm này được ký hiệu là $\sqrt{2}$) và không có nghiệm là số hữu tỉ.
Hướng dẫn. Đặt $L = \left\{ s \in \mathbb{R}^+ / s^2 < 2 \right\}$ và $R = \left\{ s \in \mathbb{R}^+ / s^2 > 2 \right\}$.
(i) Chứng minh hai tập L và R khác rỗng, L bị chặn trên, R bị chặn dưới. Từ đó chứng minh $\sup L \le \inf R$.
(ii) Chứng minh không tồn tại $\max L$ và không tồn tại $\min R$. Suy ra rằng nếu số x thỏa $\sup L \le x \le \inf R$ thì $x^2 = 2$, đồng thời $\sup L = \inf R$.
(iii) Chứng minh nếu x thỏa $x^2 = 2$ thì x không phải là số hữu tỉ.

b) Cho $A = \left\{q \in \mathbb{Q} / \sqrt{2} \leq q < 3\right\}$. Tìm $\sup A$, $\inf A$ (có chứng minh). Có tồn tại $\max A$, $\min A$ không, vì sao?

20. *Tính trù mật của $\mathbb{Q}$ và phần bù của nó trong $\mathbb{R}$:* Chứng minh tập hợp các số hữu tỉ thì dày đặc (trù mật) trong tập hợp các số thực, nghĩa là giữa hai số thực bất kỳ luôn có một số hữu tỉ. Cũng vậy đối với tập hợp các số vô tỉ.
Hướng dẫn. sử dụng kết quả bài tập 18 và chứng minh tổng của số hữu tỉ với $\sqrt{2}$ (dựa vào bài tập 19) là số vô tỉ.

21. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây (bất đẳng thức tam giác)

a) $|x+y| \leq |x| + |y|$ b) $|x| - |y| \leq |x-y|$ c) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

22. Dùng phép quy nạp, chứng minh các công thức sau là đúng:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z}^+$.

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{Z}^+$.

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, n \in \mathbb{Z}^+$.

23. Cho $\alpha > -1$ và n là số tự nhiên tùy ý lớn hơn 1. Dùng phép qui nạp, hãy chứng minh bất đẳng thức Bernouli: $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$.

24. Cho số thực $c \neq 1$ và số nguyên dương n. Hãy chứng tỏ công thức sau là đúng:

$$1 + c + c^2 + c^3 + \cdots + c^n = \frac{1-c^n}{1-c}.$$

25. (Nhị thức Newton) Cho hai số thực a, b và số nguyên dương n. Hãy chứng tỏ công thức sau là đúng:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i},$$

với $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

1.2 Dãy số thực

1. (*Hiểu định nghĩa giới hạn dãy số*) Trong các câu sau, giá trị của số tự nhiên n lớn cỡ nào để sai số giữa a_n và L bé hơn số dương ε bất kỳ, cho trước? Từ đó, có kết luận gì về dãy số (a_n)?

a) $a_n = \dfrac{n}{n-1}$, $L = 1$ $(n \geq 2)$

b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}$, $L = -1$ $(n \geq 2)$

c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $L = 1$

2. Trong các câu sau, giá trị của số tự nhiên n lớn cỡ nào để a_n lớn hơn số M bất kỳ, cho trước? Từ đó, có kết luận gì về dãy số (a_n)?

a) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

b) $a_n = \sqrt{2n^2+1} - n$

3. *Ứng dụng định lý giới hạn kẹp để xây dựng các giới hạn cơ bản*:

Dùng định nghĩa giới hạn và tính chất bảo toàn phép toán qua giới hạn, ta dễ dàng chứng minh được các kết quả sau

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$$

với P là đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức Q

$$\text{Nếu } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ thì } \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0, \ k \in \mathbb{N}^* \text{ cho trước.}$$

Ngoài ra, với số thực dương $r > 0$ và với mọi số tự nhiên $1 \le k \le n$, khai triển nhị thức Newton sẽ cho bất đẳng thức $(1+r)^n \ge 1 + C_n^k \cdot r^k$.

Sử dụng các kết quả trên, làm các câu sau

a) Cho số $0 < q < 1$. Chứng minh có số dương r sao cho $q = \dfrac{1}{1+r}$ và $q^n < \dfrac{1}{nr}$. Có nhận xét gì về dãy $\left(q^n\right)$?

b) Cho số u thỏa $-1 < u < 1$. Chứng minh $\lim u^n = 0$

c) Đặt $r_n = \sqrt[n]{2} - 1$. Chứng minh các bất đẳng thức

$$0 < r_n < \frac{1}{n}; \quad 1 < \sqrt[n]{2} < 1 + \frac{1}{n}$$

Từ đó có nhận xét gì về dãy $\left(\sqrt[n]{2}\right)$?

d) Đặt $r_n = \sqrt[n]{n} - 1$, $n \ge 2$. Chứng minh các bất đẳng thức

$$n > C_n^2 r_n^2; \quad 0 < r_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}; \quad 1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Từ đó có nhận xét gì về dãy $\left(\sqrt[n]{n}\right)$?

e) Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2+1}$

f) Với số dương r, chứng minh $\dfrac{n^2}{(1+r)^n} < \dfrac{n^2}{C_n^3 r^3}$. Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(1+r)^n}$

g) (Tổng quát hóa) Dùng các kỹ thuật chứng minh tương tự trong các câu trên, ta có các giới hạn cơ bản sau đây

i. Với số thực $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

iii. Với số thực $a > 0$ và số thực p tùy ý, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{(1+a)^n} = 0$

iv. Với số thực $q \in (-1, 1)$, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

4. (*Tính chất của dãy đơn điệu bị chặn*)

a) Một dãy số $(s_n)_{n\geq p}$ được gọi là *dãy tăng* (hay *đồng biến*) có nghĩa là $s_p \leq s_{p+1} \leq s_{p+2} \leq \ldots$, hay là $\forall n \geq p, s_n \leq s_{n+1}$. Chứng minh rằng nếu dãy $(s_n)_{n\geq p}$ tăng và bị chặn trên thì $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, trong đó $s = \sup_n s_{n\geq p} = \sup\left\{s_n / n \geq p\right\}$

b) Hãy phát biểu kết quả tương tự như câu trên với một dãy giảm.

c) Cho dãy các số dương $(a_n)_{n\geq p}$. Đặt

$$s_n = \sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n \text{ (nếu } n = p \text{ thì } s_p = a_p)$$

Chứng minh dãy $(s_n)_{n\geq p}$ hội tụ. Khi đó, người ta viết là

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

hay viết kiểu khác là

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots \text{ (nghĩa của tổng "vô hạn" các số hạng)}$$

5. (*Định nghĩa hằng số Népère*) Cho hai dãy số (e_n) và (E_n) định bởi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad E_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Chứng minh rằng

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, e_{n+1} \geq e_n$. Hướng dẫn:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

dùng bất đẳng thức Bernoulli ở bài tập 23, trang 6.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n \geq E_{n+1}$. Hướng dẫn:

$$\frac{E_n}{E_{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+2}.$$

c) Chứng minh hai dãy đã cho có cùng giới hạn. Giới hạn đó được ký hiệu bởi e, hằng số Népère.

Chương 2

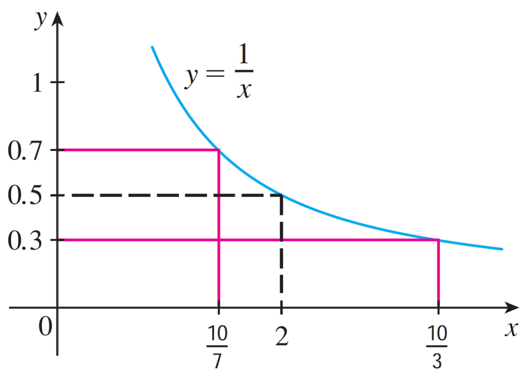
Hàm số liên tục

2.1 Giới hạn hàm số

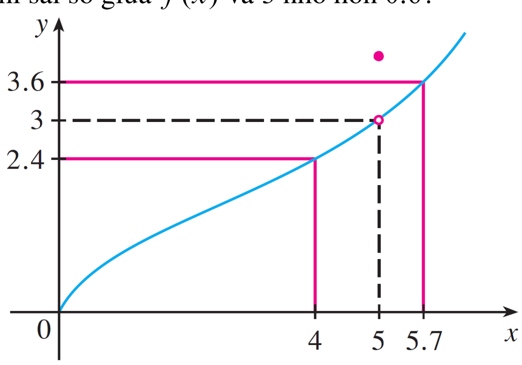
1-8 Bài tập giúp hiểu định nghĩa giới hạn của hàm số

1. Sử dụng đồ thị của $f(x) = 1/x$ dưới đây, tìm số $\delta > 0$ để

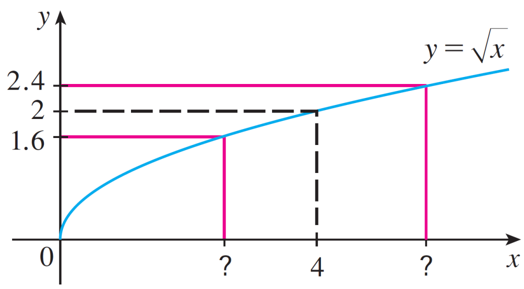
$$\text{nếu } |x-2| < \delta \text{ thì } \left|\frac{1}{x} - 0.5\right| < 0.2$$



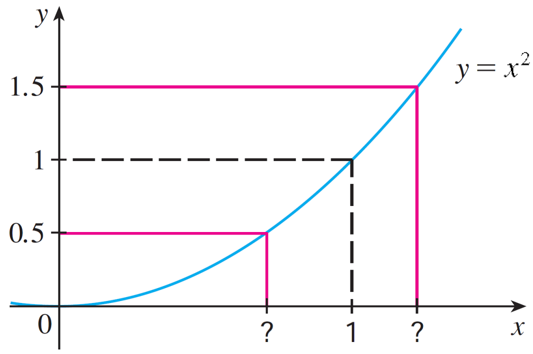
2. Sử dụng đồ thị hàm số f dưới đây, hãy cho biết sai số giữa x và 5 ($x \neq 5$) nhỏ cỡ bao nhiêu thì sai số giữa $f(x)$ và 3 nhỏ hơn 0.6?



3. Sử dụng đồ thị của $f(x) = \sqrt{x}$ dưới đây, hãy cho biết sai số giữa x và 4 nhỏ cỡ bao nhiêu thì sai số giữa $\sqrt{x}$ và 2 nhỏ hơn 0.4?



4. Sử dụng đồ thị của $f(x) = x^2$ dưới đây, hãy cho biết sai số giữa x và 1 nhỏ cỡ bao nhiêu thì sai số giữa x^2 và 1 nhỏ hơn $\frac{1}{2}$?



5. Một thợ máy cần làm ra một đĩa kim loại có diện tích $1000\,\text{cm}^2$.

a) Đĩa như trên có bán kính bao nhiêu?

b) Nếu thợ máy được phép có sai số diện tích khi gia công là $\pm 5\,\text{cm}^2$ thì anh ta phải kiểm soát sai số bán kính như thế nào khi gia công?

c) Nếu dùng các ký hiệu ε, δ trong định nghĩa $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, thì trong hai câu trên x, $f(x)$, a và L đại diện cho đại lượng nào, số nào? Giá trị ε cho trước là gì? Giá trị δ tương ứng là gì?

6. Một lò nung trong phòng thí nghiệm dùng để nghiên cứu cách tạo ra chất liệu trong suốt tốt nhất dùng cho linh kiện điện tử của tàu con thoi. Muốn vậy, nhiệt độ lò phải được kiểm soát một cách chính xác bằng cách điều chỉnh công suất cung cấp cho lò, thông qua quan hệ

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

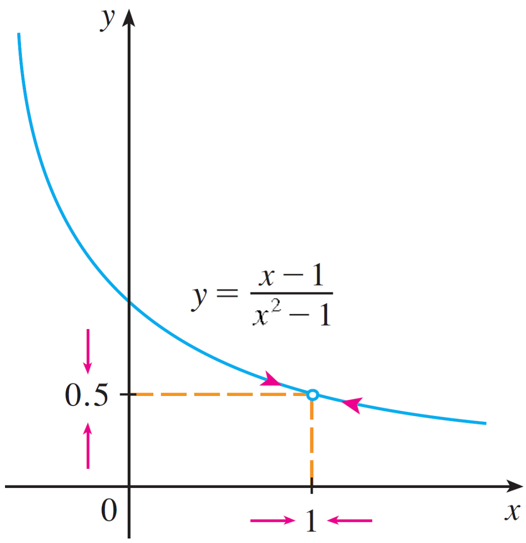
trong đó $T(w)$ là nhiệt độ theo độ Celcius (^{0}C) và w là công suất cung cấp cho lò, đo theo watts.

a) Công suất nào cung cấp cho lò để duy trì nhiệt độ nung $200\,^0$C?

b) Nếu nhiệt độ đang kiểm soát được phép dao động trong mức $\pm 1\,^0$C, thì công suất cung cấp cho lò phải được điều chỉnh trong khoảng dao động nào?

c) Nếu dùng các ký hiệu ε, δ trong định nghĩa $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, thì trong hai câu trên x, $f(x)$, a và L đại diện cho đại lượng nào, số nào? Giá trị ε cho trước là gì? Giá trị δ tương ứng là gì?

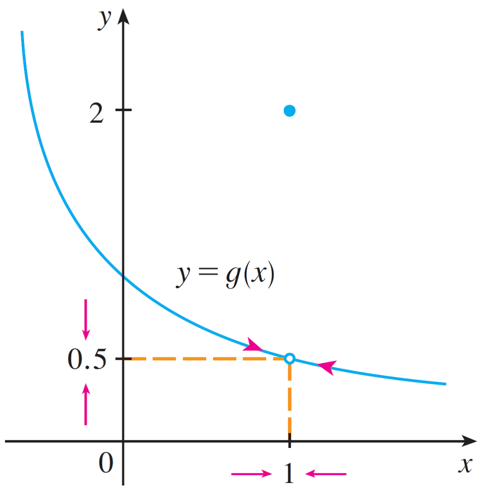
7. Đồ thị của $y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ được cho dưới đây



a) Hãy cho biết sai số giữa x và 1 $(x \neq 1)$ nhỏ cỡ bao nhiêu thì sai số giữa y và 0.5 nhỏ hơn số $\varepsilon > 0$ được cho trước tùy ý? Từ đó có nhận xét gì về giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} y$?

b) Với hàm số g xác định trên $\mathbb{R}$ định bởi

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases} \quad \text{với đồ thị của } g \text{ như sau}$$



Có nhận xét gì về $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$?

8. Chứng minh các giới hạn sau theo phương pháp của bài tập trên

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

b) $\lim\limits_{x \to -1.5} \dfrac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4x+5\right)=1$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+x-4\right)=8$

9. Trong các câu sau, với số $M>0$ cho trước tùy ý, sai số giữa x và a ($x\neq a$) nhỏ cỡ nào để $f(x)>M$? Dựa vào đó ta có kết luận gì?

a) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $a=1$

b) $f(x)=\dfrac{x}{(x-2)^2}$, $a=2$

2.2 Hàm số liên tục

Trong phần bài tập của mục này, ta thừa nhận các hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm mà nó xác định. Như vậy, nếu f là hàm sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Ví dụ, hàm cos liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}$, do đó $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$, với số x_0 tùy ý.

1. (Định lý giới hạn kẹp) Tìm các giới hạn sau

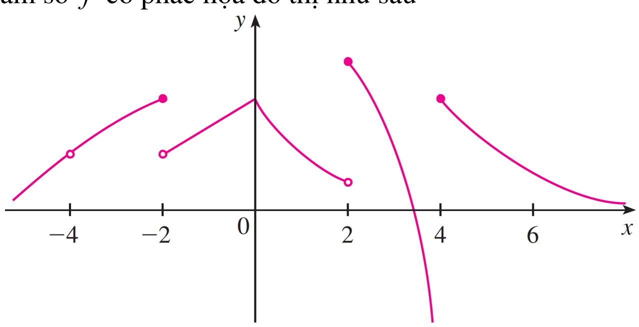
a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}[1+\sin^2\dfrac{2\pi}{x}]$

2-11 Bài tập giúp hiểu khái niệm liên tục của hàm số

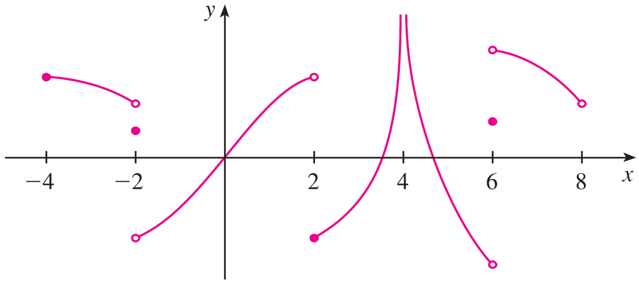
2. Một hàm số f có phác họa đồ thị như sau



a) Cho biết f gián đoạn tại những điểm nào, tại sao?

b) Tại các điểm trong câu a), hãy cho biết f liên tục bên trái, bên phải, hoặc không liên tục ở phía nào cả.

3. Đồ thị của một hàm số g được phác họa ở dưới



Hãy nêu các khoảng, nửa khoảng mà g liên tục trên đó.

4. Hãy phác họa đồ thị của một hàm số liên tục tại mọi nơi, ngoại trừ điểm 3, nhưng liên tục bên trái tại 3.

5. Hãy phác họa đồ thị của một hàm số gián đoạn kiểu bước nhảy (jump discontinuous) tại $x = 2$, gián đoạn bỏ được (removable discontinuous) tại $x = 4$, và liên tục tại mọi điểm còn lại.

6. Số nguyên lớn nhất mà không vượt quá số x được ký hiệu bởi $[x]$. Phác họa đồ thị của hàm số f cho bởi $f(x) = [x]$, $x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Hãy cho biết các điểm gián đoạn của f và chúng thuộc loại gián đoạn gì?

7. Một bãi đỗ xe tính phí theo quy luật sau: \$3 cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên), \$2 cho mỗi (hoặc một phần của) giờ tiếp theo, và phí đỗ xe trong ngày tối đa là \$10.

a) Phác họa đồ thị của phí đỗ xe như là hàm số tùy thuộc vào biến thời gian đỗ xe tại bãi đỗ trên.

b) Hãy xét sự gián đoạn của hàm số trên và cho biết ý nghĩa đó đối với những ai đỗ xe tại bãi đỗ này.

8. Hãy giải thích sự liên tục hoặc gián đoạn của các hàm số sau

a) Nhiệt độ ở một địa điểm nhất định như là một hàm số (có giá trị thay đổi) theo thời gian.

b) Nhiệt độ tại một thời điểm nhất định như là một hàm số (có giá trị thay đổi) theo khoảng cách tính từ cực Tây của thành phố New York đi về phía Đông.

c) Độ cao so với mực nước biển như là một hàm số (có giá trị thay đổi) theo khoảng cách tính từ cực Tây của thành phố New York đi về phía Đông.

d) Giá cước taxi như là hàm số theo độ dài lộ trình của khách.

e) Cường độ dòng trong mạch điện chính cung dòng cho các đèn trong một căn phòng như là hàm số theo thời gian.

9. Hãy xét tính liên tục tại điểm a cho trước của các hàm số f được định nghĩa trong các câu sau đây

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}, \quad a = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{nếu } x \neq -2 \\ 1 & \text{nếu } x = -2 \end{cases}, \quad a = -2$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}, \quad a = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}, \quad a = 1$

e) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}, \quad a = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 6 & \text{nếu } x = 3 \end{cases}, \quad a = 3$

10. Tìm các điểm gián đoạn của của hàm số. Tại điểm nào trong số các điểm này, hàm số liên tục bên trái; bên phải; hoặc không liên tục ở bên nào cả?

a) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{nếu } 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{nếu } x \geq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{nếu } x < 0 \\ e^x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

11. Hàm nào trong số các hàm f dưới đây gián đoạn kiểu bỏ được tại a. Nếu có sự gián đoạn kiểu bỏ được, hãy tìm hàm số g bằng giá trị với f tại các điểm $x \neq a$ và liên tục tại a.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

c) $f(x) = [\sin x], \quad a = \pi$

12-15 Bài tập áp dụng định lý giá trị trung gian của hàm số liên tục

12. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm trên khoảng được chỉ ra

a) $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$
b) $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$
c) $\cos x = x, \quad (0, 1)$
d) $\ln x = e^{-x}, \quad (1, 2)$

13. Chứng minh các phương trình sau có ít nhất một nghiệm thực

a) $x^3 + 1 = x$
b) $x^2 + 10 \sin x = 1000$
c) $\cos x = x^3$
d) $\ln x = 3 - 2x$
e) $100e^{-x/100} = 0.01x^2$
f) $\arctan x = 1 - x$

14. Nếu a, b là hai số thực dương, chứng tỏ rằng phương trình sau đây

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-1, 1)$.

15. Một tu sĩ Tây Tạng rời khỏi tu viện lúc 7:00 AM, đi theo lộ trình thường lệ lên đỉnh núi và đến nơi lúc 7:00 PM. Sáng hôm sau, ông ta khởi hành lúc 7:00 AM từ đỉnh núi ngược theo lộ trình cũ, về đến tu viện lúc 7:00 PM. Chứng minh rằng có một nơi trên lộ trình, ông ta đi qua đó trong ngày hôm trước và trong ngày hôm sau vào cùng giờ.

Chương 3

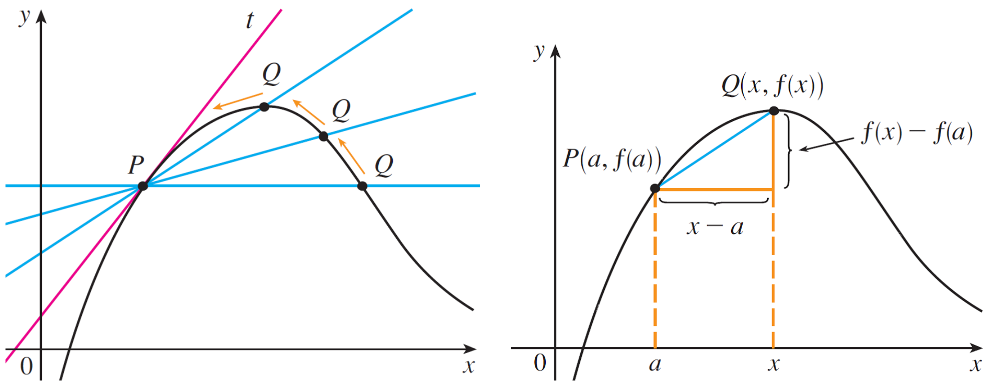
Đạo hàm & vi phân

3.1 Khái niệm đạo hàm, độ dốc tiếp tuyến

Nhắc lại kiến thức.

- Một đường thẳng d đi qua điểm P$(a; b)$ cố định, trên đó có điểm Q$(x; y)$ di động thì tỉ số sau không đổi:
$$\frac{y-b}{x-a} = m.$$
Tỉ số trên được gọi là *độ dốc* hay *hệ số góc* của đường thẳng d. Khi đó, tọa độ $(x; y)$ của Q luôn thỏa phương trình $y = b + m(x-a)$, mà ta gọi là phương trình của đường thẳng d.

- Một đường cong đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm P$\big(a; f(a)\big)$ cố định, trên đó có điểm Q$\big(x; f(x)\big)$ di động thì *độ dốc* của đường thẳng PQ là
$$m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
sẽ thay đổi, đường thẳng PQ cũng dịch chuyển theo Q.



Nếu Q tiến dần đến điểm P, nghĩa là $x \to a$, và giới hạn sau tồn tại

$$\boxed{m_P := \lim_{Q\to P} m_{PQ} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \qquad (3.1)$$

thì ta nói m_P là *độ dốc của đường cong* tại điểm P. Người ta cũng ký hiệu $f'(a)$ thay cho m_P. Đường thẳng có phương trình

$$\boxed{y = f(a) + m_P(x-a) = f(a) + f'(a)(x-a)} \tag{3.2}$$

được gọi là *tiếp tuyến của đồ thị hàm số* tại $\mathrm{P}\big(a; f(a)\big)$; hoặc tại a.

- Ký hiệu $f'(a)$ ở trên được gọi *đạo hàm của f tại a*. Tổng quát, f' cũng là hàm số cho bởi công thức

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}} \tag{3.3}$$

Nếu viết $y = f(x)$ thì f' cũng có các ký hiệu khác sau đây

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\quad f'(a) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=a} \tag{3.4}$$

Bài tập

1. Một đường cong có phương trình $y = f(x)$.

a) Viết biểu thức cho độ dốc của cát tuyến đi qua hai điểm $P(3,\ f(3))$ và $Q(x,\ f(x))$.

b) Viết biểu thức cho độ dốc của tiếp tuyến của đường cong tại P.

2-8 **a)** Dùng định nghĩa (3.1), hãy tính độ dốc của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm cho trước.

b) Viết phương trình của tiếp tuyến đó theo công thức (3.2).

2. $f(x) = 4x - x^2$, tại điểm $(1,\ 3)$.

3. $f(x) = x - x^3$, tại điểm $(1,\ 0)$.

4. $f(x) = 2x^3 - 5x$, tại điểm $(-1,\ 3)$.

5. $f(x) = 3x^2 - 5x$, tại điểm $(2,\ 2)$.

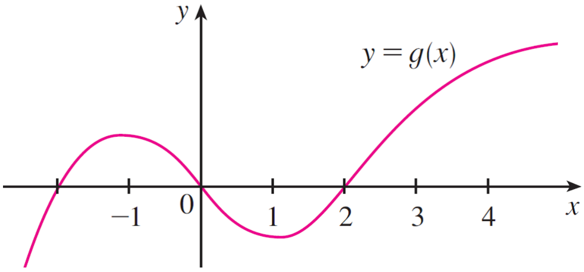
6. $f(x) = 1 - x^3$, tại điểm $(0, 1)$

7. $f(x) = 3 + 4x^2 - 2x^3$, tại điểm $(1,\ 5)$.

8. $f(x) = 4x^2 - x^3$, tại điểm $(2,\ 8)$.

---

9. Một hàm số g có đồ thị như sau



Hãy sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần và giải thích

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$$

10. Nếu tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(4, 3)$ đi qua điểm $(0, 2)$ thì hãy tìm giá trị của $f(4)$ và $f'(4)$.

11. Hãy phác họa đồ thị của một hàm số f thỏa $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ và $f'(2) = -1$.

12. Hãy phác họa đồ thị của một hàm số g thỏa $g(0) = g'(0) = 0$, $g'(-1) = -1$, $g'(1) = 3$ và $g'(2) = 1$.

13-23 Sử dụng định nghĩa (3.3) cho khái niệm đạo hàm của f tại x, hãy tính $f'(x)$ trong các bài sau

13. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

14. $f(x) = f(x) = x^3 - 5x$

15. $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

16. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$

17. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

18. $f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

19. $f(x) = \dfrac{5x}{1+x^3}$

20. $f(x) = \sqrt{x}$

21. $f(x) = \sqrt{3x+1}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

23. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

24-29 Giới hạn trong các bài sau đại diện cho đạo hàm $f'(a)$ của một hàm số f tại một số a nào đó. Trong mỗi trường hợp như vậy, hãy viết biểu thức $f(x)$ cho giá trị của f tại x, và cho biết giá trị của a.

24. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{10}-1}{h}$

25. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}$

26. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2^x-32}{x-5}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x-\pi/4}$

28. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi+h)+1}{h}$

29. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^4+t-2}{t-1}$

3.2 Kỹ năng tính đạo hàm, đạo hàm của hàm ẩn

- Kỹ năng tính đạo hàm thông qua công thức và các quy tắc thuộc chương trình phổ thông. Sinh viên có thể ôn lại kỹ năng này trong phần phụ lục.
- Dưới đây là các bài tập tính đạo hàm của một hàm số mà ta chưa biết công thức tường minh biểu diễn hàm số đó, được gọi là *hàm ẩn*. Ví dụ, ê lip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{3.5}$$

Giả sử một phần nào đó của ê lip (E) là đồ thị của hàm (hàm ẩn) $y = y(x)$, thì ta có thể tính $y'(x)$ bằng cách lấy đạo hàm theo x ở hai vế phương trình (3.5) như sau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{25} + \frac{2y}{9}y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{9}{25} \cdot \frac{x}{y}$$

Sở dĩ ta gọi là hàm ẩn là vì từ phương trình ê-lip ở trên, ta chưa xác định được công thức của y theo x là công thức nào: $\frac{1}{3}\sqrt{1-25x^2}$ hay là $-\frac{1}{3}\sqrt{1-25x^2}$? Thậm chí, có những phương trình đường cong mà không thể tìm công thức tường minh để tính y theo x.

Bài tập

1-16 Tìm đạo hàm hàm ẩn y theo x, được cho bởi các phương trình trong các bài 7-10

1. $x^3 + y^3 = 1$
2. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$
3. $x^2 + xy - y^2 = 4$
4. $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$
5. $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$
6. $y^5 + x^2y^3 = 1 + x^4y$
7. $y\cos x = x^2 + y^2$
8. $\cos(xy) = 1 + \sin y$
9. $4\cos x \sin y = 1$
10. $y\sin\left(x^2\right) = x\sin\left(y^2\right)$
11. $\tan(x/y) = x + y$
12. $\sqrt{x+y} = 1 + x^2y^2$
13. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$
14. $x\sin x + y\sin y = 1$
15. $y\cos x = 1 + \sin(xy)$
16. $\tan(x-y) = \dfrac{y}{1+x^2}$

17-24 Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm cho trước của đường cong định bởi phương trình có dạng $F(x,y) = k$, k là hằng số.

17. $y\sin 2x = \cos 2y,\ (\pi/2, \pi/4)$
18. $\sin(x+y) = 2x - 2y,\ (\pi, \pi)$
19. $x^2 + xy + y^2 = 3,\ (1,1)$ (ellip)

20. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2,\ (1, 2)$ (hyperbola)

21. $x^2 + y^2 = \left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2,\ \left(0, \frac{1}{2}\right)$ (cardioid)

22. a) Đường cong với phương trình $y^2 = 5x^4 - x^2$ có tên là *kampyle of Eudoxus*. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong này tại điểm $(1, 2)$.

b) Vẽ đồ thị của đường cong và tiếp tuyến của nó.

23. a) Đường cong với phương trình $y^2 = x^3 + 3x^2$ có tên là *Tschirnhausen cubic*. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong này tại điểm $(1, -2)$.

b) Tìm điểm trên đường cong có tiếp tuyến nằm ngang.

c) Vẽ đồ thị đường cong và tiếp tuyến của nó.

24. Tìm công thức của y'' theo x và y

a) $9x^2 + y^2 = 9$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

3.3 Liên hệ giữa đạo hàm với vận tốc; tỉ lệ biến thiên; tốc độ biến thiên

Nhắc lại kiến thức.

- Một chất điểm chuyển động thẳng trên một trục tọa độ với tọa độ s thay đổi theo thời gian t như là một hàm số $s = s(t)$ (ta gọi là *phương trình chuyển động*). Trong khoảng thời gian Δt tính từ thời điểm t_0 đến thời điểm $t_0 + \Delta t$, chất điểm thực hiện một *độ dời* là $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Như vậy, vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian $[t_0, t_0 + \Delta t]$ là

$$v_{[t_0, t_0+\Delta t]} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Khi khoảng thời gian Δt cực ngắn, nói cách khác $\Delta t \to 0$, thì đạo hàm

$$s'(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} := v(t_0)$$

được xem là *vận tốc tức thời tại thời điểm* t_0 của chất điểm. Tổng quát, $v(t) = s'(t)$ là hàm số vận tốc tức thời, thay đổi theo từng thời điểm t. Và $a(t) = v'(t)$ là hàm số gia tốc tức thời, thay đổi theo từng thời điểm t. Chuyển động rơi tự do có $a(t) = g$, là hằng số gia tốc trọng trường.

- Trong khoa học thực tiễn, ta thường xét một đại lượng y thay đổi theo đại lượng x qua quan hệ hàm số $y = f(x)$. Nếu giá trị x biến thiên một lượng Δx, từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$, thì theo đó đại lượng y cũng biến thiên một lượng $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Đặt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.6}$$

và tính đạo hàm

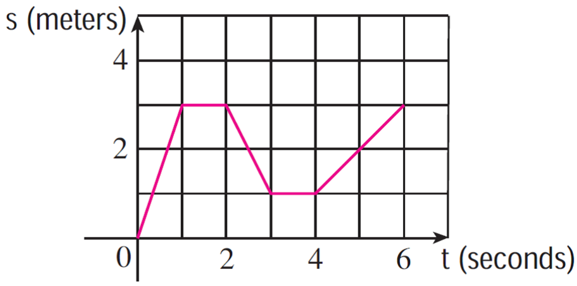
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.7}$$

Khi đó, tỉ số (3.6) được gọi là *tỉ lệ biến thiên trung bình của y theo x* trên đoạn $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Ý nghĩa của tỉ lệ này là nó cho biết độ biến thiên của y (tức Δy) gấp bao nhiêu lần độ biến thiên Δx xung quanh giá trị x_0 của x. Đạo hàm (3.7) được gọi *tỉ lệ biến thiên tức thời của y theo x tại* x_0.

Đặc biệt, nếu đại lượng x là thời gian thì thuật ngữ *tỉ lệ biến thiên* được thay bằng *tốc độ biến thiên*.

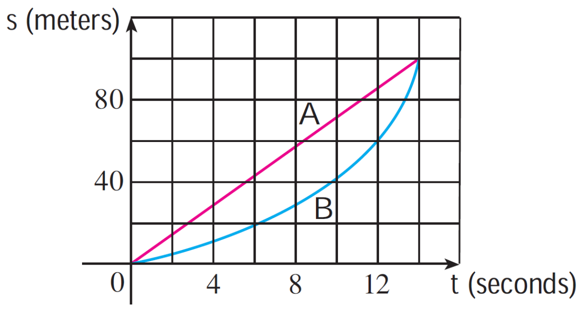
3.3.1 Các bài tập vận tốc trung bình, vận tốc tức thời, 1-5

1. Một chất điểm bắt đầu di chuyển theo phương ngang, hướng từ trái sang phải. Đồ thị của hàm vị trí chất điểm như dưới đây



Khi nào chất điểm di chuyển sang phải, sang trái, đứng yên?

2. Đồ thị bên dưới biểu diễn hàm vị trí của hai vận động viên A và B trên đường đua cự ly 100m.



a) Mô tả và so sánh vận tốc của hai vận động viên.

b) Dựa vào đồ thị, ước lượng tại thời điểm nào khoảng cách giữa các vận động viên là lớn nhất?

c) Tại thời điểm nào họ có cùng vận tốc?

3. Một quả bóng được ném lên cao và sau t (giây), độ cao của quả bóng cách mặt đất được cho bởi công thức $h(t) = 40t - 16t^2$.

a) Tính độ cao quả bóng lúc $t = 2$. Trong khoảng thời gian Δt (giây), tính từ thời điểm $t = 2$ đến thời điểm $t = 2 + \Delta t$, thì vận tốc trung bình v_{tb} của quả bóng là bao nhiêu?

b) Tính $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{tb}}$. Giá trị giới hạn mang ý nghĩa gì?

4. Trên Sao Hỏa, một hòn đá được ném lên cao và sau t giây, độ cao của hòn đá cách mặt đất được cho bởi phương trình $h(t) = 10t - 1.86t^2$.

a) Tính độ cao hòn đá sau 1 s kể từ lúc ném đi. Trong khoảng thời gian Δt (giây), tính từ thời điểm $t = 1$ đến thời điểm $t = 1 + \Delta t$, thì vận tốc trung bình v_{tb} của hòn đá là bao nhiêu?

b) Tính $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{tb}$. Giá trị giới hạn mang ý nghĩa gì?

5. Chuyển động của một chất điểm trên một đường thẳng được cho bởi phương trình $s = t^2 - 8t + 18$, trong đó s được đo theo mét, t được đo theo giây.

a) Tính vận tốc trung bình của chất điểm trong các khoảng thời gian dưới đây

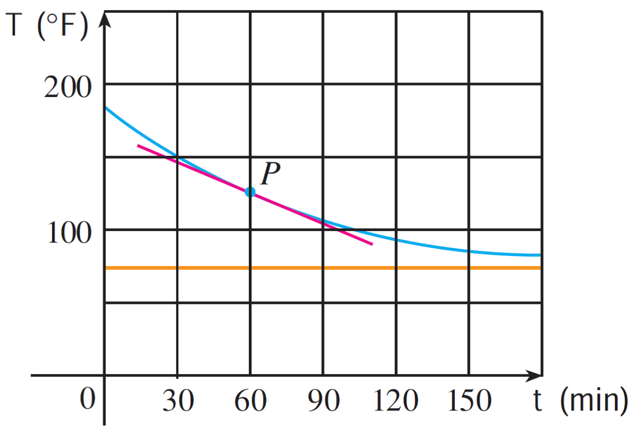
(i) $[3,\ 4]$ (ii) $[3.5,\ 4]$ (iii) $[4,\ 5]$ (iv) $[4,\ 4.5]$

b) Tính vận tốc tức thời của chất điểm khi $t = 4$

3.3.2 Các bài tập về tốc độ biến thiên, tỉ lệ biến thiên, 1-19

1. Nếu đem một lon coca ấm để trong tủ lạnh. Kể từ lúc đó, nhiệt độ lon coca thay đổi như là một hàm số theo biến thời gian t. Tốc độ biến thiên nhiệt theo thời gian là âm hay dương? Hãy đoán xem, sự giảm nhiệt vào lúc đầu nhanh hơn hay chậm hơn so với lúc $t = 60$ phút? Hãy cho một giải thích hợp lý.

2. Một con gà nướng lúc mới lấy ra khỏi lò có nhiệt độ 185°F và được đặt lên bàn trong phòng ăn có nhiệt độ 75°F. Nhiệt độ gà như là hàm số theo thời gian, giảm dần về nhiệt độ phòng như mô tả trong đồ thị dưới đây



Bằng cách đo độ dốc của tiếp tuyến, hãy ước lượng tốc độ biến thiên nhiệt sau một giờ kể từ lúc lấy gà ra khỏi lò.

3. Bảng dưới cho biết tỉ lệ phần trăm P (ước tính) dân số Châu Âu sử dụng điện thoại di động trong các năm

Year	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

a) Hãy tính tốc độ tăng trưởng trung bình của việc sử dụng điện thoại di động giữa các năm

(i) Từ 2000 đến 2002 (ii) Từ 2000 đến 2001 (iii) Từ 1999 đến 2000

Ở mỗi trường hợp, kết quả phải đi kèm đơn vị.

b) Hãy ước tính tốc độ tăng trưởng tức thời trong năm 2000 bằng cách lấy trung bình cộng của hai tốc độ biến thiên trung bình. Đơn vị là gì?

4. Số N quán của chuỗi coffeehouse tính đến ngày 30 tháng Sáu hằng năm được cho trong bảng sau

Year	1998	1999	2000	2001	2002
N	1886	2135	3501	4709	5886

a) Hãy tính tốc độ tăng trưởng trung bình của số quán giữa các năm

(i) Từ 2000 đến 2002 (ii) Từ 2000 đến 2001 (iii) Từ 1999 đến 2000

Ở mỗi trường hợp, kết quả phải đi kèm đơn vị.

b) Hãy ước tính tốc độ tăng trưởng tức thời trong năm 2000 bằng cách lấy trung bình cộng của hai tốc độ biến thiên trung bình. Đơn vị là gì?

5. Chi phí sản xuất (tính theo đô la) ra x đơn vị sản phẩm hàng tiêu dùng nào đó là $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.

a) Tính tỉ lệ biến thiên của C theo x khi quy mô sản xuất biến thiên

(i) từ $x = 100$ đến $x = 105$ (ii) từ $x = 100$ đến $x = 101$

b) Tính tỉ lệ biến thiên tức thời của C theo x khi $x = 100$. (Theo thuật ngữ kinh tế học, tỉ lệ biến thiên tức thời này được gọi là chi phí biên. Ý nghĩa của nó như vầy: từ sản phẩm thứ 100, muốn sản xuất thêm một sản phẩm nữa thì chi phí đội thêm được ước lượng khoảng $C'(100)$ đô la.)

6. Một thùng hình trụ chứa 100 000 ga-lông nước, chảy ra ngoài tại đáy thùng trong một giờ, thì theo định luật Torricelli, thể tích V của nước còn lại trong thùng sau t phút chảy được cho bởi công thức

$$V(t) = 100\,000 \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 60$$

Tìm tốc độ thoát nước (tức thời) như là một hàm theo t. Đơn vị của tốc độ này là gì? (Chú ý rằng lượng nước thoát ra trong khoảng thời gian Δt bằng $-\Delta V = V(t) - V(t + \Delta t)$.) Tại các thời điểm $t = 0,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60$ phút, hãy tìm tốc độ chảy và lượng nước còn lại trong thùng. Thời điểm nào thì tốc độ chảy lớn nhất? Nhỏ nhất?

7. Chi phí sản xuất ra x ounces vàng ở một mỏ vàng còn mới là $C = f(x)$ đô la.

a) Ý nghĩa và đơn vị của $f'(x)$ là gì?

b) Khi nói $f'(800) = 17$, điều đó nghĩa là gì?

Gợi ý. Xem $\Delta x = 1$ ounce rất nhỏ so với 800 ounces, thì

$$\Delta C = \frac{\Delta C}{\Delta x}\Big|_{x=800} \approx \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=800} = f'(800) \Rightarrow \Delta C \approx ?$$

c) Theo bạn, $f'(x)$ sẽ tăng hay giảm trong thời kỳ khai thác ngắn hạn? Khoảng thời gian dài sau đó thì sao? Giải thích.

8. Số vi khuẩn sau t giờ trong một thí nghiệm là $n = f(t)$.

a) Ý nghĩa và đơn vị của $f'(5)$ là gì?

b) Giả sử môi trường và dưỡng chất nuôi vi khuẩn là vô hạn. Theo bạn, giá trị nào lớn hơn, $f'(5)$ hay là $f'(10)$? Nếu nguồn dinh dưỡng nuôi là có hạn, điều đó có ảnh hưởng đến kết luận của bạn không? Giải thích.

9. Gọi $T(t)$ là nhiệt độ (đo theo ^{0}F) tại Dallas sau t giờ tính từ lúc nửa đêm của Ngày 2, tháng Sáu, 2001. Dưới đây là bảng giá trị của T được ghi sau mỗi 2 tiếng.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

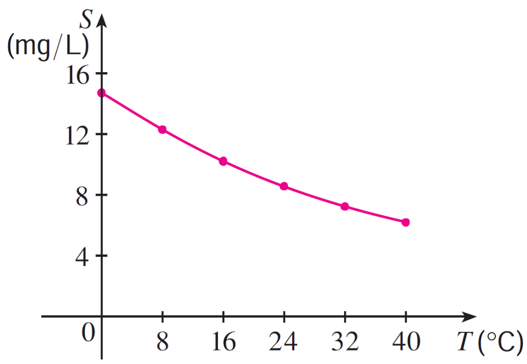
Cho biết ý nghĩa và ước lượng giá trị của $T'(10)$.

10. Nếu một công ty bán cà phê xay với đơn giá là p đô la một pound, thì lượng cà phê (đơn vị pound) bán được là $Q = f(p)$.

a) Ý nghĩa và đơn vị của $f'(8)$ là gì?

b) Theo bạn, $f'(8)$ là dương hay âm? Giải thích?

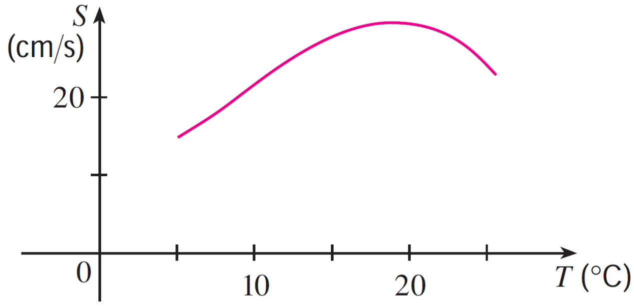
11. Lượng oxy hòa tan trong nước phụ thuộc vào nhiệt độ nước. Đồ thị sau cho biết khả năng hòa tan S (đơn vị mg/L) của oxy trong nước thay đổi như là một hàm số theo nhiệt độ T.



a) Ý nghĩa và đơn vị của $S'(T)$ là gì?

b) Ước lượng giá trị của $S'(16)$ và giải thích ý nghĩa.

12. Đồ thị dưới đây cho thấy sự ảnh hưởng của nhiệt độ T của nước lên vận tốc bơi tối đa S của cá hồi



a) Ý nghĩa và đơn vị của $S'(T)$ là gì?

b) Ước lượng giá trị của $S'(15)$, $S'(25)$ và giải thích ý nghĩa.

13. a) Một công ty sản xuất các con chip máy tính dạng vuông mỏng bằng silicon, độ dài cạnh vuông là 15 mm (dĩ nhiên chỉ là số gần đúng), và họ muốn biết diện tích $A(x)$ của miếng vuông biến thiên ra sao khi độ dài x của cạnh vuông có sai lệch. Muốn vậy, hãy tính $A'(15)$ và giải thích ý nghĩa của số này.

Gợi ý. nếu Δx rất nhỏ thì

$$\left.\frac{\Delta A}{\Delta x}\right|_{x=15} \approx \left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right|_{x=15} = A'(15) \Rightarrow \Delta A \approx ?$$

b) Chứng minh rằng tỉ lệ biến thiên của diện tích hình vuông theo độ dài cạnh bằng một nửa chu vi hình vuông đó. Về phương diện hình học, hãy giải thích vì sao điều này đúng bằng cách vẽ hình vuông cạnh bằng x, rồi x được tăng thêm một lượng Δx. Trong tình huống này, làm thế nào để xấp xỉ ΔA nếu Δx là rất nhỏ?

14. a) Tinh thể muối ăn hình lập phương có thể dễ dàng làm tăng kích thước bằng cách hòa tan muối với nước rồi cho bốc hơi thật chậm. Nếu V là thể tích của một khối lập phương có độ dài cạnh bằng x, hãy tính $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ khi $x = 3$ và giải thích ý nghĩa số này.

b) Chứng minh rằng tỉ lệ biến thiên thể tích khối lập phương theo độ dài cạnh bằng một nửa diện bề mặt ngoài của khối đó. (Thử hình dung điều này theo phương diện hình học tương tự bài trên.)

15. Một viên đá rơi xuống hồ nước tạo ra gợn sóng hình tròn lan tỏa ra ngoài với tốc độ 16 cm/s. Tính tốc độ tăng (kèm đơn vị) của diện tích hình tròn sau (a) 1s; (b) 3s; (c) 5s. Bạn có thể kết luận được gì? (Gợi ý. Tốc độ biến thiên diện tích tăng theo thời gian với quy luật nào?).

16. Một quả bóng được thổi phồng lên. Tính tỉ lệ tăng diện tích mặt quả bóng ($S = 4\pi r^2$) theo bán kính r khi r bằng (a) 1 ft; (b) 2 ft; (c) 3 ft. Bạn có thể đưa ra kết luận gì?

17. Khối lượng của một phần thanh kim loại tính từ đầu bên trái đến điểm cách đó x mét là $m = 3x^2$ kg. Tìm *mật độ khối theo chiều dài* (khối lượng phân bố trên một đoạn "vô cùng ngắn", nghĩa là dm/dx) của thanh kim loại khi x bằng (a) 1 m; (b) 2 m; (c) 3 m. Chỗ nào có mật độ khối lớn nhất? Nhỏ nhất?

18. Theo thời gian t, điện lượng Q (đơn vị đo là C) đi qua một tiết diện dây dẫn được cho theo quy luật $Q = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Tính cường độ dòng điện (đơn vị đo là

A, $1\,A = 1\,C/s$) khi (a) $t = 0,5$ s; (b) $t = 1$ s. Vào thời điểm nào thì dòng điện yếu nhất?

19. Định luật Newton về hấp dẫn cho biết độ lớn của lực F tương tác giữa hai vật có khối lượng m và M là

$$F = \frac{GmM}{r^2} \text{ (}G\text{ là hằng số hấp dẫn, }r\text{ là khoảng cách giữa hai vật)}$$

a) Tính $\mathrm{d}F/\mathrm{d}r$ và giải thích ý nghĩa của nó cùng với dấu âm.

b) Giả sử Trái đất hút một vật với lực yếu đi theo khoảng cách với tỉ lệ là 2 N/km khi $r = 20\,000$ km (tỉ lệ biến thiên theo khoảng cách là -2 N/km). Hỏi tỉ lệ biến thiên lực theo khoảng cách là bao nhiêu khi $r = 10\,000$ km?

20. Để biết thêm về tỉ lệ biến thiên trong khoa học tự nhiên, khoa học xã hội và các lĩnh vực khác, có thể tham khảo James Stewart, Calculus, 6th edition, Chương 3, Mục 7.

3.3.3 Các bài tập liên hệ giữa các tỉ lệ biến thiên, dựa trên quy tắc móc xích, 1-24

Nhắc lại kiến thức. Công thức liên hệ giữa các tỉ lệ biến thiên là

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Ví dụ, đo bán kính của một quả cầu kín khó hơn đo chu vi vòng ngoài của nó. Do đó, thay vì tính tỉ lệ biến thiên thể tích V theo bán kính r, người ta sẽ tính tỉ lệ biến thiên V theo chu vi p, nghĩa là tính $\mathrm{d}V/\mathrm{d}p$. Vì $V = 4\pi r^3/3$ và $r = p/2\pi$ nên

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} = (4\pi r^2)\cdot\frac{1}{2\pi} = 2r^2 = \frac{p^2}{2\pi^2}.$$

Chú ý. Trong nhiều bài toán, việc tính theo quy tắc móc xích như trên thường đơn giản hơn so với cách tính bằng cách thay biến trực tiếp, ví dụ, thay r bởi $p/2\pi$ vào biểu thức V.

Bài tập

1. Mỗi cạnh của một hình vuông tăng với một tốc độ 6 cm/s. Tốc độ tăng diện tích của hình vuông là bao nhiêu khi diện tích hình vuông là 16 cm^2? (*Gợi ý.* Ký hiệu S, a, t lần lượt là các đại lượng diện tích, độ dài cạnh, thời gian. $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$.)

2. Chiều dài của một hình chữ nhật tăng với một tốc độ 8 cm/s và chiều rộng của nó tăng với tốc độ 3 cm/s. Khi chiều dài đạt 20 cm và chiều rộng đạt 10 cm, diện tích của hình chữ nhật tăng theo tốc độ nào?

3. Một thùng hình trụ với bán kính 5 m đang được bơm nước với tốc độ 3 m^3/phút. Chiều cao của mực nước tăng nhanh như thế nào?

4. Bán kính của một hình cầu tăng với tốc độ 4 mm/s. Thể tích tăng nhanh như thế nào khi đường kính 80 mm?

5. Giả sử $y = \sqrt{2x+1}$, với x và y là những đại lượng thay đổi theo t.

a) Nếu $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 3$, tìm $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ khi $x = 4$.
b) Nếu $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 5$, tìm $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ khi $x = 12$.

6. Giả sử $4x^2 + 9y^2 = 36$, ở đó x và y là những hàm số của t.

a) Nếu $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$, tìm $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ khi $x = 2$ và $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$
b) Nếu $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 3$, tìm $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ khi $x = -2$ và $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

7. Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 5$ và $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 4$, tìm $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ khi $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.

8. Một chất điểm M chuyển động dọc theo một hyperbol $xy = 8$. Khi M đến vị trí $(4, 2)$, hình chiếu B của nó lên trục tung đang di chuyển xuống với vận tốc 3 cm/s. Hỏi hình chiếu A của M lên trục hoành di chuyển với vận tốc nào tại thời điểm đó?

9-12 Trình tự giải nhóm các bài toán này được gợi ý như sau:

a) Chỉ ra những đại lượng được nêu trong bài toán.
b) Cần tính đại lượng gì?
c) Vẽ một hình minh họa cho tình huống tại mỗi thời điểm t.
d) Viết phương trình liên quan tới các đại lượng.
e) Giải quyết vấn đề.

9. Một chiếc máy bay bay theo chiều ngang ở độ cao 1 dặm, tốc độ 500 dặm/giờ, bay ngang qua phía trên một trạm radar. Tìm tốc độ tăng của cự ly giữa máy bay và trạm khi máy bay cách trạm 2 dặm.

10. Nếu một quả cầu tuyết tan chảy sao cho diện tích bề mặt của nó giảm với tốc độ 1 cm^2/phút, tìm tốc độ giảm của đường kính khi đường kính là 10 cm.

11. Một đèn đường được đặt ở trên đỉnh của cột điện cao 15 ft. Một người cao 6 ft đi từ cột với tốc độ 5 ft/s theo một hướng thẳng. Bóng của đỉnh đầu người ấy di chuyển với tốc độ nào khi anh ta cách cột 40 ft?

12. Vào buổi trưa, tàu A cách 150 km về phía tây của tàu B. Tàu A di chuyển về phía đông với tốc độ 35 km/h và tàu B di chuyển về phía bắc với tốc độ 25 km/h. Khoảng cách giữa hai tàu thay đổi theo thời gian như thế nào vào lúc 4:00 PM?

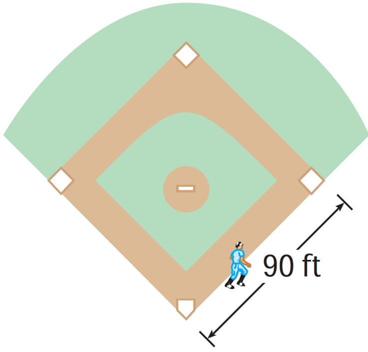
---

13. Hai chiếc xe bắt đầu di chuyển từ cùng một điểm. Một chiếc đi về phía nam với tốc độ 60 dặm/h và chiếc còn lại di chuyển về phía tây với tốc độ 25 dặm/h. Khoảng cách giữa hai chiếc xe tăng theo thời gian ở mức nào lúc hai giờ sau đó?

14. Một đèn từ mặt đất chiếu lên một bức tường cách đó 12 m. Nếu một người cao 2 m đi từ đèn đến bức tường với tốc độ 1,6 m/s, chiều dài của cái bóng trên bức tường giảm nhanh như thế nào khi anh ta cách tường 4 m?

15. Một ông bắt đầu đi bộ về phía bắc với vận tốc 4 ft/s từ một điểm P. Năm phút sau, một phụ nữ bắt đầu đi bộ về phía nam với vận tốc 5 ft/s từ vị trí cách P 500 ft về phía Đông. Khi người phụ nữ bắt đầu di chuyển thì khoảng cách hai người thay đổi theo thời gian như thế nào?

16. Một sân bóng chày hình vuông với chiều dài cạnh 90 ft. Một vận động viên bóng chày đánh vào bóng và chạy về đỉnh bên trái hình vuông với tốc độ 24 ft/s.



a) Khoảng cách của anh ta so với đỉnh trên giảm theo thời gian như thế nào khi anh ta ở trung điểm của cạnh dưới bên phải sân vuông?

b) Cũng vào lúc đó, khoảng cách giữa anh ta với đỉnh bên trái tăng với tốc độ nào?

17. Độ cao của một tam giác đang gia tăng với tốc độ 1 cm/phút trong khi diện tích của tam giác đang gia tăng với tốc độ 2 cm^2/phút. Cạnh ứng với chiều cao của tam giác thay đổi với tốc độ nào khi độ cao của tam giác đang ở mức 10 cm và diện tích là 100 cm^2?

18. Một chiếc thuyền được kéo vào một bến tàu bằng một sợi dây cột vào mũi thuyền và đi qua một ròng rọc trên bến tàu, cao hơn 1 m so với mũi thuyền.

Nếu sợi dây được kéo vào với tốc độ 1 m/s, tốc độ tiến của thuyền là bao nhiêu khi nó cách bến tàu 8 m?

19. Vào buổi trưa, tàu A cách 100 km về phía tây của tàu B. Tàu A di chuyển về phía nam với tốc độ 35 km/h và tàu B di chuyển về phía bắc với tốc độ 25 km/h. Khoảng cách giữa hai tàu thay đổi theo thời gian ra sao lúc 4:00 PM?

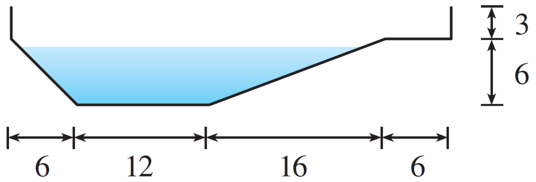
20. Một chất điểm di chuyển dọc theo đường cong $y = 2\sin(\pi x/2)$. Khi chất điểm đi qua điểm $(\frac{1}{3}, 1)$, toạ độ x tăng với tốc độ $\sqrt{10}$ cm/s. Khoảng cách từ chất điểm tới gốc tọa độ thay đổi nhanh như thế nào ngay lúc này?

21. Nước bị rò rỉ ra khỏi bể hình nón ngược với tốc độ 10 000 cm^3/phút, trong khi đó bể cũng được bơm nước với tốc độ bơm (công suất bơm) không đổi. Bể có chiều cao 6 m và đường kính ở phía trên cùng là 4 m. Nếu mực nước đang dâng với tốc độ 20 cm/phút vào lúc mà chiều cao của mực nước đạt 2 m, tìm công suất bơm vào bể.

22. Một máng dài 10 ft và tiết diện hai đầu máng có hình dạng của tam giác cân với độ dài cạnh bên là 3 ft, chiều cao 1 ft. Nếu máng được bơm nước với tốc độ 12 ft^3/phút, hỏi mực nước dâng với tốc độ nào khi mực nước đạt 6 inches? (1 in $= 0,083333$ ft.)

23. Một máng nước dài 10 m với mặt cắt ngang có hình dạng của một hình thang cân mà đáy dưới rộng 30 cm, đáy trên rộng 80 cm, và chiều cao 50 cm. Nếu máng được bơm nước với công suất 0,2 m^3/phút thì tốc độ dâng của mực nước là bao nhiêu khi mực nước đạt 30 cm?

24. Một hồ bơi rộng 20 ft, dài 40 ft, sâu 3 ft ở cuối vùng cạn và 9 ft tại điểm sâu nhất của nó. Một mặt cắt ngang được thể hiện trong hình dưới đây



Nếu hồ bơi được bơm nước với công suất bơm là 0,8 ft^3/phút, thì mực nước dâng với tốc độ nào khi mực nước cách đáy ở chỗ sâu nhất là 5 ft?

3.4 Vi phân và phép xấp xỉ tuyến tính

Nhắc lại kiến thức. Cho một hàm f có đạo hàm tại x_0 và đại lượng y thay đổi theo đại lượng x qua quan hệ $y = f(x)$.

- Hàm số bậc nhất L định bởi

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

được gọi là *tuyến tính hóa* tại x_0 của hàm số f. Đường thẳng (có phương trình) $y = L(x)$ là tiếp tuyến của đường cong (có phương trình) $y = f(x)$ tại điểm x_0.

- Phép xấp xỉ

$$\boxed{f(x) \approx L(x)} \quad \text{với } x \text{ rất gần } x_0 \tag{3.8}$$

được gọi là *phép xấp xỉ tuyến tính của f tại x_0*.

- Viết lại (3.8) dưới hình thức khác,

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{với } x \text{ rất gần } x_0 \tag{3.9}$$

thì (3.9) được gọi là *phép xấp xỉ vi phân*. Khi đã xác định rõ (hoặc hiểu ngầm) x_0, người ta thường ký hiệu $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$ và $\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$. Lúc đó (3.9) được viết dưới hình thức

$$\boxed{\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x \quad \text{với } \Delta x \text{ rất nhỏ}} \tag{3.10}$$

- Các ký hiệu và khái niệm ở trên áp dụng cho hàm $y = f(x)$ tổng quát. Nếu áp dụng cho trường hợp riêng, $y = f(x) = x$, $f' \equiv 1$, thì

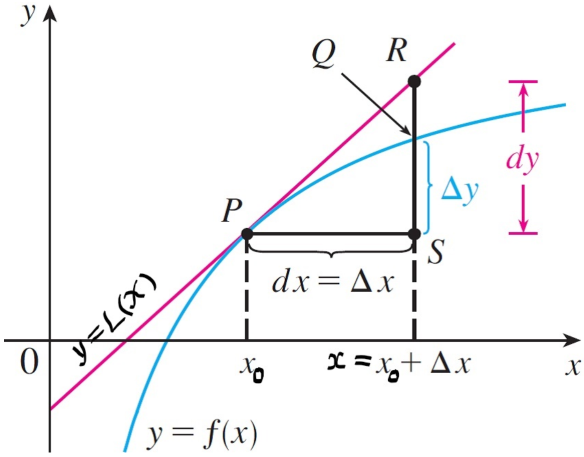
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \Leftrightarrow f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}x \Leftrightarrow \Delta x = \mathrm{d}x.$$

Như vậy người ta đồng nhất ký hiệu Δx với $\mathrm{d}x$. Trở lại trường hợp $y = f(x)$ tổng quát, ta viết lại *phép xấp xỉ vi phân* như sau

$$\boxed{\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x \quad \text{với } \Delta x = \mathrm{d}x \text{ rất nhỏ}} \tag{3.11}$$

.

Minh họa cho các khái niệm trên là hình ảnh dưới đây



Chú ý.

- Ký hiệu đạo hàm của Leibnitz (3.4), $f'(x_0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$, mặc dù có hình thức giống phân số nhưng ta ***không nên*** hiểu đây là phân số với tử số và mẫu số lần lượt là $\mathrm{d}y$ và $\mathrm{d}x$.

- Theo quan điểm hiện đại, người ta định nghĩa *vi phân của y (hay của f) tại x_0* là hàm số bậc nhất định bởi
$$h \mapsto f(x_0) \cdot h$$
Nhưng theo truyền thống, người ta quen gọi biểu thức $\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$ là vi phân của f tại x_0. Về bản chất, *biểu thức* và *hàm số* là hai khái niệm khác nhau.

Bài tập

1-4 Tìm tuyến tính hóa $L(x)$ của hàm số f tại a.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2, \quad a = -1$

2. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

3. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

4. $f(x) = x^{3/4}, \quad a = 16$

---

5. Lập phép xấp xỉ tuyến tính của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x}$ tại $a = 0$, áp dụng để xấp xỉ giá trị của $\sqrt{0,9}$ và $\sqrt{0,99}$.

6. Lập phép xấp xỉ tuyến tính của hàm số $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ tại $a = 0$, áp dụng để xấp xỉ giá trị của $\sqrt[3]{0,95}$ và $\sqrt[3]{1,1}$.

7-10 Các phép xấp xỉ dưới đây có đúng là phép xấp xỉ tuyến tính không?

7. $\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \dfrac{1}{3}x$

8. $\tan x \approx x$

9. $\dfrac{1}{(2x+1)^4} \approx 1 - 8x$

10. $e^x \approx 1 + x$

11-12 Tính vi phân

11. Tìm vi phân của các hàm số sau

a) $y = x^2 \sin 2x$

b) $y = \ln \sqrt{t^2 + 1}$

c) $y = \dfrac{s}{2s+1}$

d) $y = e^{-u} \cos u$

e) $y = \dfrac{u+1}{u-1}$

f) $y = (r^3 + 1)^{-2}$

g) $y = e^{\tan \pi t}$

h) $y = \sqrt{1 + \ln s}$

12. Tìm vi phân dy và tính vi phân tại giá trị cho trước của x và dx.

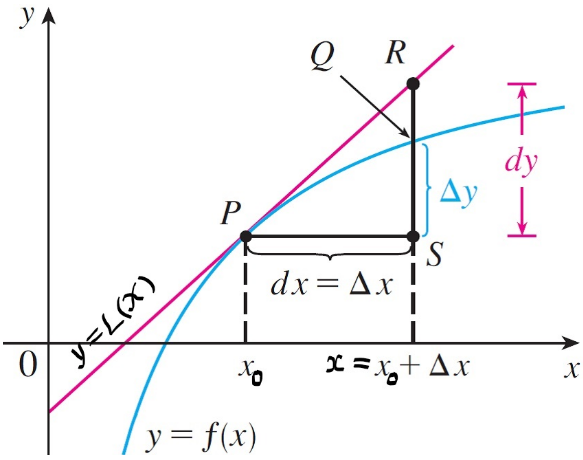
a) $y = e^{x/10}, \quad x = 1, \quad \mathrm{d}x = 0,1$

b) $y = \dfrac{1}{x+1}, \quad x = 1, \quad \mathrm{d}x = -0,01$

c) $y = \tan x, \quad x = \pi/4, \quad \mathrm{d}x = -0,1$

d) $y = \cos x, \quad x = \pi/3, \quad \mathrm{d}x = 0,05$

13-16 Tính Δy, dy tại giá trị x_0 cho trước. Sau đó phác họa đồ thị của hàm (bằng cách lập bảng giá trị hàm ở gần điểm cho trước) và vẽ tiếp tuyến, tương tự như hình vẽ sau



để cho thấy các đoạn thẳng có độ dài dx, dy và Δy.

13. $y = 2x - x^2, \quad x_0 = 2, \quad \Delta x = -0,4$

14. $y = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 1$

15. $y = \dfrac{2}{x}, \quad x_0 = 4, \quad \Delta x_0 = 1$

16. $y = e^x, \quad x_0 = 0, \quad \Delta x = 0,5$

17-22 Sử dụng phép xấp xỉ tuyến tính (hoặc vi phân) để ước lượng giá trị của:

17. $(2,001)^5$

18. $e^{-0,015}$

19. $(8,06)^{2/3}$

20. $1/1002$

21. $\tan 44^o$

22. $\sqrt{99,8}$

23-25 Dựa vào hiểu biết về xấp xỉ tuyến tính hoặc vi phân, hãy giải thích vì sao các xấp xỉ sau có thể chấp nhận được

23. $\dfrac{1}{\cos 0,08} \approx 1$

24. $(1,01)^6 \approx 1,06$

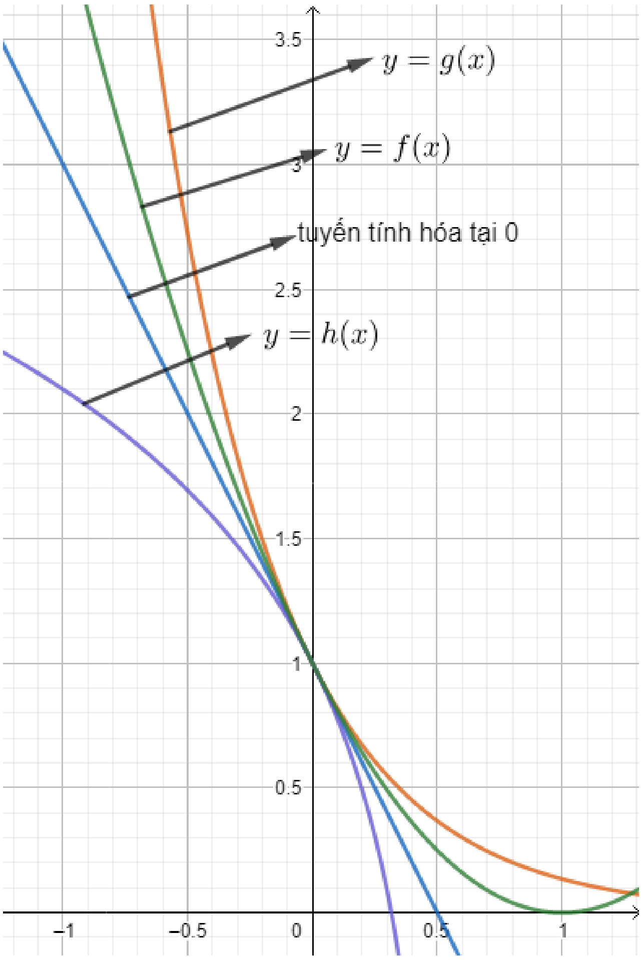
25. $\ln 1,05 \approx 0,05$

---

26. Cho ba hàm số định bởi $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = e^{-2x}$, $h(x) = 1 + \ln(1-2x)$.

a) Tìm tuyến tính hóa của ba hàm trên tại 0. Có nhận xét gì?

b) Dưới đây là đồ thị của f, g, h được vẽ chung với tuyến tính hóa của chúng tại 0.



Nhận xét xem hàm nào có xấp xỉ tuyến tính tốt nhất? tệ nhất? Vì sao?

27. Người ta đo được cạnh của một khối lập phương có độ dài 30 cm, với sai số dao động trong khoảng 0,1 cm. Sử dụng vi phân để ước lượng sai số tối đa, sai số tương đối, và sai số phần trăm khi tính (a) thể tích khối lập phương và (b) diện tích bề mặt của của khối lập phương.

Chú thích. Sai số; sai số tương đối; sai số phần trăm của thể tích được hiểu là ΔV; $\dfrac{\Delta V}{V}$ và $\left(\dfrac{\Delta V}{V}\cdot 100\right)\%$.

28. Bán kính của một đĩa tròn đo được là 24 cm với sai số dao động trong khoảng 0,2 cm.

a) Sử dụng vi phân để ước lượng sai số tối đa khi tính diện tích của đĩa.

b) Ước lượng sai số tương đối và sai số phần trăm.

29. Chu vi vòng của một khối cầu đo được là 84 cm, với sai số dao động trong khoảng 0,5 cm.

a) Sử dụng vi phân để ước lượng sai số tối đa khi tính diện tích mặt cầu. Qua đó tìm sai số tương đối. (Biết công thức chu vi là $p = 2\pi R$ và diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2$).

b) Hỏi như trên khi tính thể tích của khối cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

30. Sử dụng vi phân, hãy ước lượng thể tích sơn cần dùng để phủ lên bề mặt của một bán cầu có đường kính 50 m với độ dày sơn là 0,05 cm.

31. Sử dụng vi phân, hãy cho một công thức tính xấp xỉ thể tích của một tấm mỏng uốn hình trụ với độ cao h, bán kính trong là r và độ dày Δr.

32. Giả sử ta có một đoạn thẳng dài 20 cm để làm cạnh góc vuông của một tam giác vuông sao cho góc nhọn đối diện với cạnh này có số đo 30°. Số đo góc này được phép sai lệch trong khoảng $\pm 1^{\circ}$.

a) Sử dụng vi phân, hãy ước lượng sai số cho phép khi tính độ dài cạnh huyền (độ dài đúng phải là $20\sin 30^{\circ} = 10$ cm).

b) Theo đó, sai số phần trăm là bao nhiêu?

33. Nếu một dòng điện với cường độ I đi qua một điện trở với trở kháng là R, thì định luật Ohm cho biết điện áp ở hai đầu điện trở là $V = RI$. Nếu điện áp không đổi và trở kháng R được đo với một sai số nào đó, hãy dùng vi phân để chứng minh rằng sai số tương đối khi tính I xấp xỉ bằng sai số tương đối của R.

34. Khi máu chạy trong mạch thì cường độ F của mạch (thể tích máu đi qua tiết diện của mạch trong một đơn vị thời gian) tỉ lệ với lũy thừa bậc 4 của bán kính R của tiết diện:

$$F = k \cdot R^4 \text{ (Công thức này được biết dưới cái tên \textit{định luật Poiseuille})}$$

Khi động mạch bị nghẽn ở nơi nào, người ta đặt một dụng cụ có tên là *angioplasty*, trong đó có ống thông với một đầu có van bi một chiều, giúp nông rộng động mạch và duy trì dòng chảy F bình thường.

Chứng tỏ rằng độ biến thiên tương đối của F (tức là $\Delta F/F$) gấp bốn lần độ biến thiên tương đối của của R. Bán kính mạch máu tăng 5% sẽ hưởng đến cường độ F của mạch như thế nào?

3.5 Các định lý giá trị trung bình của đạo hàm và tính đơn điệu của hàm số

Nhắc lại kiến thức.

- **Định lý Rolle.** Cho hàm $y = f(x)$ thỏa
  1. Liên tục trên đoạn $[a, b]$
  2. Có đạo hàm trong khoảng (a, b)
  3. $f(a) = f(b)$

  Thì $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

- **Định lý Lagrange.** (Đạo hàm trung bình) Cho hàm f thỏa
  1. Liên tục trên đoạn $[a, b]$
  2. Có đạo hàm trong khoảng (a, b)

  Thì
  $$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ hay } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$
  $f'(c)$ được gọi là ***đạo hàm trung bình*** trên khoảng (a, b).

Bài tập

1. Xác minh các hàm số sau thỏa ba giả thiết của định lý Rolle trên đoạn cho trước, sau đó tìm số c trong khoảng tương ứng sao cho $f'(c) = 0$.

a) $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \quad [1, 3]$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, \quad [0, 3]$

c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

d) $f(x) = \cos 2x, \quad [\pi/8, 7\pi/8]$

2. Cho $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Kiểm tra $f(-1) = f(1)$, tìm $f'(x)$, kiểm tra không tồn tại số c trong khoảng $(-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$. Điều này có mâu thuẫn với Định lý Rolle không? Tại sao?

3. Cho $f(x) = \tan x$. Chứng tỏ rằng $f(0) = f(\pi)$ nhưng không tồn tại số c trong khoảng $(0, \pi)$ sao cho $f'(c) = 0$. Điều này có mâu thuẫn với Định lý Rolle không? Tại sao?

4. Xác minh hàm số thoả mãn ba giả thiết của Định lý giá trị trung bình của đạo hàm (định lý Lagrange) trên đoạn cho trước. Sau đó tìm tất cả các số c thoả mãn kết luận của định lý này.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1, 1]$

b) $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

c) $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad [0, 1]$

e) $f(x) = 1/x, \quad [1, 3]$

f) $f(x) = \frac{x}{x + 2}, \quad [1, 4]$

5. Tìm số c thoả mãn Định lý giá trị trung bình trên đoạn trước. Vẽ đồ thị của hàm số, vẽ đường cát tuyến đi qua hai điểm đầu mút và đường tiếp tuyến tại $(c, f(c))$. Có nhận xét gì về đường cát tuyến và đường tiếp tuyến này?

a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

b) $f(x) = x^3 - 2x, \quad [-2, 2]$

6. Cho $f(x) = (x-3)^{-2}$. Chứng tỏ rằng không tồn tại c trong khoảng $(1, 4)$ sao cho $f(4) - f(1) = f'(c)(4-1)$. Điều này có mâu thuẫn với Định lý giá trị trung bình không? Tại sao?

7. Cho $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Chứng tỏ rằng không tồn tại c sao cho $f(3) - f(0) = f'(c)(3-0)$. Điều này có mâu thuẫn với Định lý giá trị trung bình không? Tại sao?

8. Chứng minh các phương trình sau có duy nhất một nghiệm thực.

a) $2x + \cos x = 0$

b) $2x - 1 - \sin x = 0$

9. Chứng tỏ rằng phương trình $x^3 - 15x + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trong đoạn $[-2, 2]$.

10. Chứng tỏ rằng phương trình $x^4 + 4x + c = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

11. a) Chứng tỏ rằng một đa thức bậc 3 có nhiều nhất 3 nghiệm thực.

b) Chứng tỏ rằng một đa thức bậc n có nhiều nhất n nghiệm thực.

12. Chứng minh bất đẳng thức $\big|\sin a - \sin b\big| \le |a - b|$ với hai số a, b tùy ý.

13. Giả sử với mọi số x, $f'(x) = c$, c là hằng số. Chứng minh có hằng số d sao cho $f(x) = cx + d, \forall x$.

14. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $2 \arcsin x = \arccos(1 - 2x^2)$ (với $x \ge 0$)

b) $\arcsin \dfrac{x-1}{x+1} = 2 \arctan \sqrt{x} - \dfrac{\pi}{2}$ (với $x \ge 0$)

15. Lúc 2:00 PM, đồng hồ xe chỉ vận tốc 30 dặm/h. Lúc 2:10 PM, đồng hồ chỉ vận tốc 50 dặm/h. Có một thời điểm giữa 2:00 và 2:10, gia tốc xe là 120 dặm/h^2. Hãy giải thích điều này.

16. Hai vận động viên điền kinh chạy đua, xuất phát cùng lúc và về đến đích cùng lúc. Chứng minh rằng có ít nhất một thời điểm hai người có cùng vận tốc.

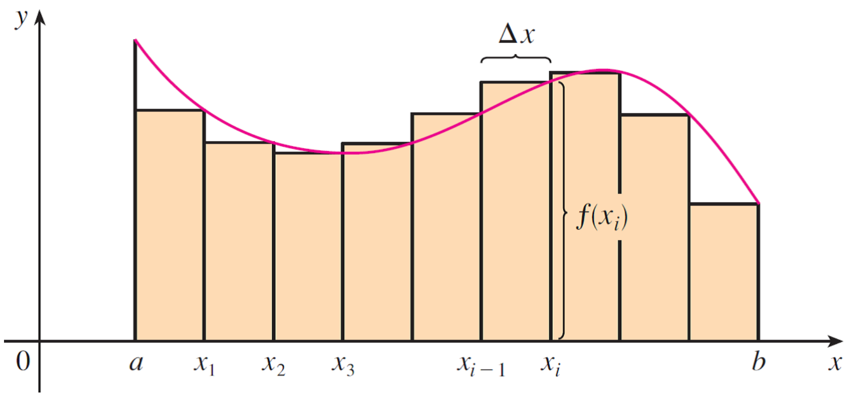
17. Số a được gọi là điểm bất động của hàm số f khi $f(a) = a$. Giả sử với mọi số thực x, hàm số f có $f'(x) \ne 1$. Chứng minh f có nhiều nhất một điểm bất động.

Chương 4

Tích phân

4.1 Bài tập hiểu khái niệm tính tích phân

Nhắc lại kiến thức. Xét một hàm số $y = f(x)$, xác định trên đoạn $[a, b]$, có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây



Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn con có độ dài bằng nhau, $\Delta x = (b - a)/n$, với các điểm chia x_i là điểm biên của các đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$, cho bởi

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_i = a + i\Delta x,\ \ldots,\ x_n = b$$

Đoạn con thứ i, $[x_{i-1}, x_i]$, có điểm biên phải là x_i, là cạnh ngang của hình chữ nhật với chiều cao $f(x_i)$, có diện tích là $f(x_i)\Delta x$. Đặt

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

là tổng diện tích các hình chữ nhật lấy theo biên phải như trên. Tương tự cho tổng diện tích các hình chữ nhật lấy theo biên trái là

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x.$$

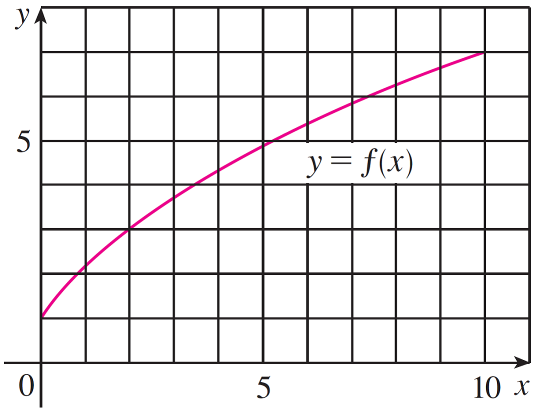
Nếu ta lấy điểm mẫu ngẫu nhiên $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ trên mỗi đoạn con thì tổng

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

được gọi là tổng Riemann (hay tổng tích phân) của hàm số f trên đoạn $[a, b]$.

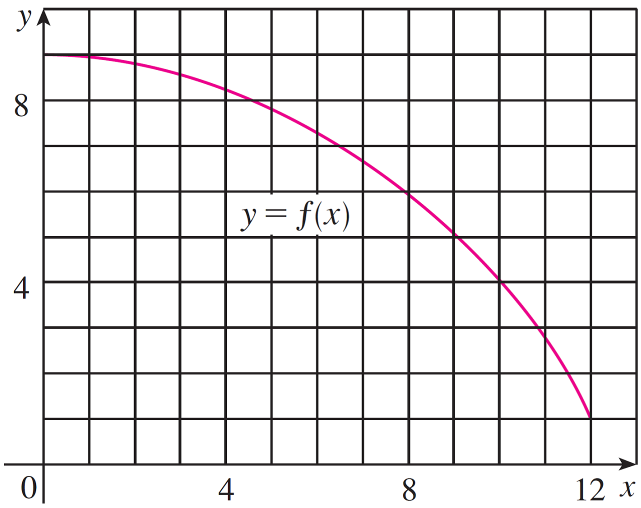
4.1.1 Các bài toán đưa về việc tính tổng Riemann của hàm số, 1-11

1. **a)** Đọc giá trị của f thông qua đồ thị dưới đây, dùng năm hình chữ nhật để tìm một xấp xỉ dưới (thiếu, nhỏ hơn) và một xấp xỉ trên (dư, lớn hơn) cho diện tích phía dưới đường cong, tính từ $x = 0$ đến $x = 10$.



b) Làm tương tự câu trên với mười hình chữ nhật.

2. **a)** Dùng sáu hình chữ nhật để xấp xỉ diện tích phía dưới đồ thị của hàm f cho dưới đây từ $x = 0$ đến $x = 12$



theo các kiểu xấp xỉ
(i) L_6 (điểm mẫu là các điểm biên trái)
(ii) R_6 (điểm mẫu là các điểm biên phải)
(iii) M_6 (điểm mẫu là các trung điểm)

b) L_6 và R_6, giá trị nào là xấp xỉ dưới (thiếu), giá trị nào là xấp xỉ trên (dư) của diện tích?

c) Số nào trong ba số L_6, R_6, M_6 là xấp xỉ tốt nhất? Giải thích.

3. **a)** Xấp xỉ diện tích phía dưới đồ thị của $y = \cos x$, từ $x = 0$ đến $x = \pi/2$, bằng cách dùng bốn hình chữ nhật với các điểm biên phải. Phác họa đồ thị cùng với các hình chữ nhật. Xấp xỉ này là thiếu hay dư?

b) Lập lại câu trên với các điểm biên trái.

4. a) Xấp xỉ diện tích phía dưới đồ thị của $y = \sqrt{x}$, từ $x = 0$ đến $x = 4$, bằng cách dùng bốn hình chữ nhật với các điểm biên phải. Phác họa đồ thị cùng với các hình chữ nhật. Xấp xỉ này là thiếu hay dư?

b) Lập lại câu trên với các điểm biên trái.

5. a) Xấp xỉ diện tích phía dưới đồ thị của $y = 1 + x^2$ từ $x = -1$ đến $x = 2$ bằng cách dùng ba hình chữ nhật với các điểm biên phải. Sau đó cải thiện xấp xỉ với sáu hình chữ nhật. Phác họa đồ thị cùng với các hình chữ nhật. Xấp xỉ này là thiếu hay dư?

b) Lập lại câu a) với các điểm biên trái.

c) Lập lại câu a) với các trung điểm.

d) Từ các phác họa đồ thị trong các câu trên, xấp xỉ nào có vẻ tốt nhất (chính xác nhất)?

6. Tốc độ chạy của một vận động viên tăng đều đặn trong ba giây đầu tiên. Vận tốc được ghi nhận cách nửa giây một, được cho trong bảng sau

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v (ft/s)	0	6.2	10.8	14.9	18.1	19.4	20.2

Tìm các xấp xỉ thiếu và dư cho độ dài quãng đường anh ta chạy trong ba giây này.

7. Đồng hồ vận tốc của xe mô-tô được ghi nhận cách mỗi 12 giây một lần, với giá trị được cho trong bảng dưới đây

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (ft/s)	30	28	25	22	24	27

a) Hãy ước tính độ dài quãng đường mô-tô chạy trong suốt khoảng thời gian trong bảng, bằng cách lấy vận tốc mẫu tại đầu mỗi khoảng thời gian 12 giây.

b) Hãy cho một xấp xỉ khác bằng cách lấy vận tốc mẫu tại cuối mỗi khoảng thời gian 12 giây.

c) Trong các xấp xỉ ở trên, cái nào là xấp xỉ thiếu, cái nào là xấp xỉ dư? Giải thích.

8. Dầu chảy ra từ một bồn với tốc độ chảy là $r(t)$ lít/h. Theo thời gian, dầu chảy chậm dần với tốc độ được ghi cách mỗi 2 h trong bảng sau

t (h)	0	2	4	6	8	10
r(t) (L/h)	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

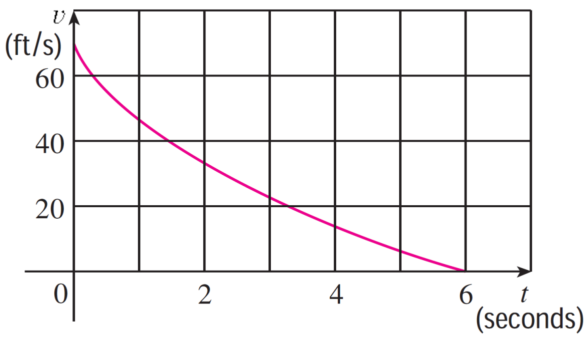
Tìm xấp xỉ thiếu và xấp xỉ dư cho lượng dầu chảy ra trong suốt 10 h.

9. Khi ước tính độ dài quãng đường thông qua vận tốc, thỉnh thoảng người ta ghi nhận vận tốc tại các thời điểm $t_0, t_1, t_2, \ldots$ không cách đều nhau. Nhưng ta có thể xấp xỉ độ dài quãng đường bằng tổng Riemann với Δt được thay bởi $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Ví dụ, vào Ngày 7, tháng Năm, 1992, tàu con thoi Endeavour được phóng đi theo nhiệm vụ STS-49, với mục đích là lắp đặt một động cơ mới cho vệ tinh viễn thông Intelsat. Bảng dưới đây, cung cấp bởi NASA, ghi nhận vận tốc tàu từ lúc xuất phát đến lúc rời bỏ rocket nhiên liệu đẩy sau 62 giây

Event	Time (s)	Velocity (ft/s)
Launch	0	0
Begin roll maneuver	10	185
End roll maneuver	15	319
Throttle to 89%	20	447
Throttle to 67%	32	742
Throttle to 104%	59	1325
Maximum dynamic pressure	62	1445
Solid rocket booster separation	125	4151

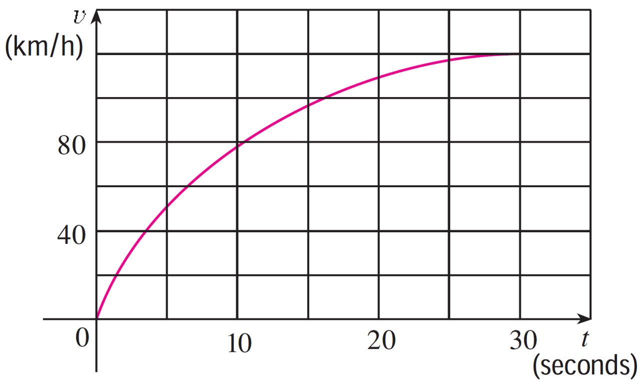
Sử dụng dữ liệu này, hãy ước tính độ cao cách mặt đất của tàu sau 62 giây kể từ lúc rời khỏi bệ phóng, bằng cách lấy trung bình cộng của xấp xỉ thiếu và xấp xỉ dư.

10. Đồ thị của vận tốc hãm của một ô tô được cho trong hình dưới



Dựa vào đó hãy ước tính quãng đường kể từ lúc xe thắng đến lúc xe dừng hẳn.

11. Dưới đây là đồ thị vận tốc của một chiếc xe đang tăng tốc, kể từ lúc xuất phát đến lúc đạt vận tốc 120 km/h là 30 giây



Dựa vào đó hãy ước tính quãng đường xe đi được trong suốt thời gian này.

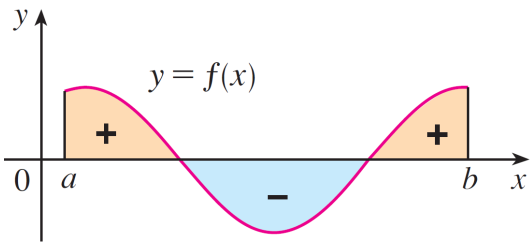
4.1.2 Các bài tập giúp hiểu khái niệm tích phân. Xấp xỉ tích phân bằng tổng Riemann, 1-10

Nhắc lại kiến thức. Với hàm f mô tả như mục trên, nếu giới hạn sau đây của tổng Riemann

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

tồn tại không phụ thuộc vào cách chọn điểm mẫu $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, thì ta nói hàm số f khả tích trên đoạn $[a, b]$, và giá trị của giới hạn trên được ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Ta thừa nhận (không chứng minh) hàm số liên tục trên $[a, b]$ (hoặc liên tục trên từng khúc của $[a, b]$) thì khả tích trên đó.

Khi f dương trên đoạn $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx$ được xem là diện tích của phần mặt phẳng nằm dưới đồ thị của f và nằm trên trục hoành. Khi f có dấu tùy ý thì giá trị của $\int_a^b f(x)dx$ là hiệu của phần diện tích nằm trên trục hoành với phần diện tích nằm dưới trục hoành như hình vẽ dưới đây

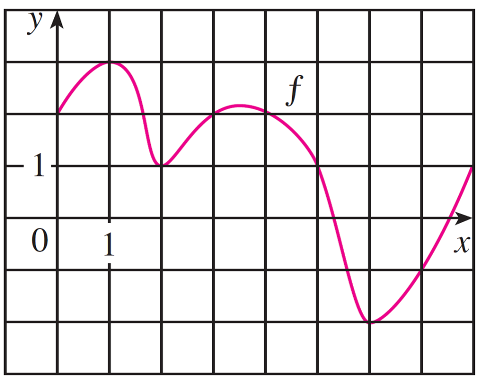


Tích phân được xấp xỉ bởi tổng Riemann

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \text{ (xấp xỉ càng chính xác khi } n \text{ càng lớn)}$$

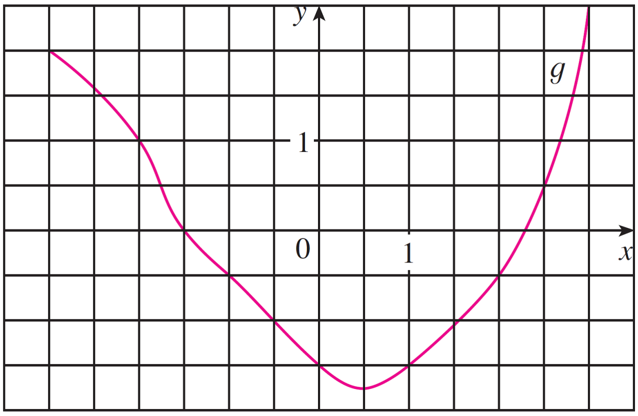
Ta có thể xấp xỉ theo quy tắc trung điểm bằng cách chọn điểm mẫu x_i^* là $\overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ = "trung điểm" của đoạn $[x_{i-1}, x_i]$.

1. Dựa theo đồ thị cho trước của f



hãy xấp xỉ $\int_0^8 f(x)dx$ bằng cách dùng bốn đoạn con với (a) các điểm biên phải, (b) các điểm biên trái, và (c) các trung điểm.

2. Dựa theo đồ thị cho trước của g



hãy xấp xỉ $\int_{-3}^{3} g(x)dx$ bằng cách dùng sáu đoạn con với (a) các điểm biên phải, (b) các điểm biên trái, và (c) các trung điểm.

3. Dưới đây là bảng giá trị của một hàm đồng biến

x	0	5	10	15	20	25
f(x)	−42	−37	−25	−6	15	36

Hãy tìm một xấp xỉ thiếu và một xấp xỉ dư cho $\int_{0}^{25} f(x)dx$.

4. Bảng giá trị dưới đây của một hàm f có được từ thực nghiệm đo đạc.

x	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	−3.4	−2.1	−0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

Dựa vào đó, hãy xấp xỉ $\int_{3}^{9} f(x)dx$ bằng cách dùng ba đoạn con với (a) các điểm biên phải, (b) các điểm biên trái và (c) các trung điểm. Nếu biết f là một hàm đồng biến, ta có thể kết luận được xấp xỉ nào là nhỏ hơn, lớn hơn giá trị chính xác của tích phân?

5. Dùng quy tắc trung điểm với giá trị n cho trước, hãy xấp xỉ các tích phân sau

a) $\int_{2}^{10} \sqrt{x^3+1}dx, \quad n = 4$

b) $\int_{0}^{\pi/4} \cos^4 x dx, \quad n = 4$

c) $\int_{0}^{1} \sin(x^2)dx, \quad n = 5$

d) $\int_{1}^{5} x^2 e^{-x} dx, \quad n = 4$

6. Dùng máy tính bỏ túi có chức năng nhập biểu thức tổng Riemann có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\Delta x\right) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\tfrac{b-a}{n}\right) \cdot \tfrac{b-a}{n},$$

hãy xấp xỉ các tích phân sau với $n = 10, 30, 50$ và 100

(i) $\int_0^1 x^4 dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

7. Hãy biểu diễn các giới hạn như là tích phân của một hàm số trên đoạn cho trước.

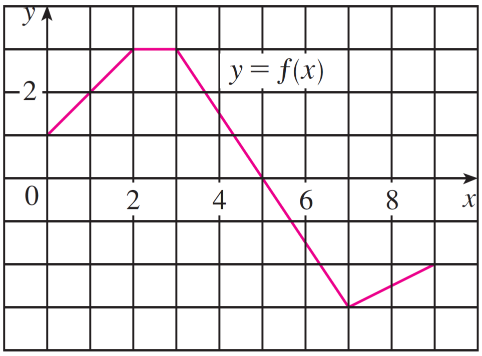
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\Delta x, \qquad [2, 6]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\cos x_i}{x_i}\Delta x, \qquad [\pi, 2\pi]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\Delta x, \qquad [1, 8]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5\right]\Delta x, \qquad [0, 2]$

8. Cho biết đồ thị hàm số f



Hãy tính tích phân theo kiểu diện tích.

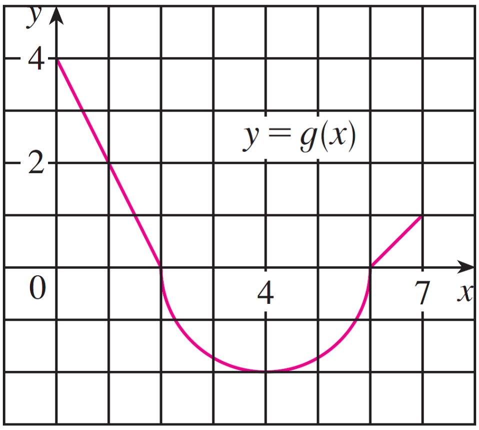
a) $\int_0^2 f(x)dx$

b) $\int_0^5 f(x)dx$

c) $\int_5^7 f(x)dx$

d) $\int_0^9 f(x)dx$

9. Đồ thị của hàm g dưới đây bao gồm hai đoạn thẳng và một nửa đường tròn. Dựa vào đó hãy tính tích phân theo kiểu diện tích.



(a) $\int_0^2 g(x)dx$ (b) $\int_2^6 g(x)dx$ (c) $\int_0^7 g(x)dx$

10. Hãy tính các tích phân sau theo kiểu diện tích.

a) $\int_0^3 (\frac{1}{2}x - 1)dx$

b) $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}dx$

c) $\int_{-3}^0 (1 + \sqrt{9 - x^2})dx$

d) $\int_{-1}^3 (3 - 2x)dx$

e) $\int_{-1}^2 |x|dx$

f) $\int_0^{10} |x - 5|dx$

4.2 *Giá trị trung bình* của hàm số trên một đoạn

Nhắc lại kiến thức. Xét hàm số f xác định trên đoạn $[a, b]$. Đoạn $[a, b]$ được chia thành n đoạn con có độ dài $\Delta x = (b - a)/n$, với các điểm biên của các đoạn con là

$$x_0 = a; x_1 = a + \Delta x; \ldots; x_i = a + i\Delta x; \ldots; x_n = b$$

Trên các đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ lấy một điểm mẫu x_i^* thì giá trị trung bình của n giá trị $f(x_1^*)$, $\ldots$, $f(x_n^*)$ là

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n} = \frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{(b - a)/\Delta x} = \frac{1}{b - a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Nếu lấy giới hạn khi $n \to \infty$, tổng Riemann ở trên trở thành tích phân, và ta định nghĩa *giá trị của bình của f trên đoạn* $[a, b]$ là

$$\boxed{f_{\text{ave}} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ (nếu } f \text{ khả tích)}}$$

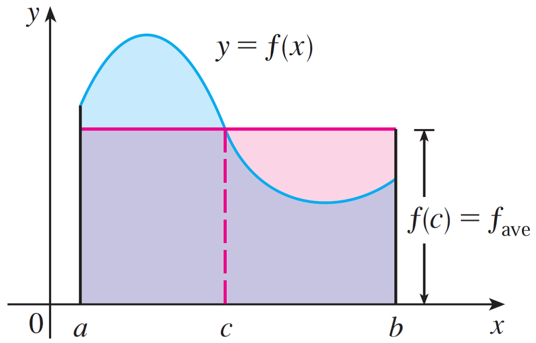
Định lý 4.1 (định lý giá trị trung bình của hàm số)**.** *Nếu f là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì có số $c \in (a, b)$ sao cho*

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{4.1}$$

hay là

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \tag{4.2}$$

Minh họa cho định lý là hình dưới



1–8 Find the average value of the function on the given interval.

1. $f(x) = 4x - x^2$, $[0, 4]$

2. $f(x) = \sin 4x$, $[-\pi, \pi]$

3. $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $[1, 8]$

4. $g(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}$, $[0, 2]$

5. $f(t) = te^{-t^2}$, $[0, 5]$

6. $f(\theta) = \sec^2(\theta/2)$, $[0, \pi/2]$

7. $h(x) = \cos^4 x \sin x$, $[0, \pi]$

8. $h(u) = (3 - 2u)^{-1}$, $[-1, 1]$

9–12

(a) Find the average value of f on the given interval.

(b) Find c such that $f_{\text{ave}} = f(c)$.

(c) Sketch the graph of f and a rectangle whose area is the same as the area under the graph of f.

9. $f(x) = (x - 3)^2$, $[2, 5]$

10. $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 4]$

11. $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$, $[0, \pi]$

12. $f(x) = 2x/(1 + x^2)^2$, $[0, 2]$

1. Ở một thành phố, nhiệt độ (^{o}F) sau t giờ kể từ lúc 9:00 AM được mô hình hóa theo công thức

$$T(t) = 50 + 14\sin\frac{\pi t}{12}$$

Tính nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian từ 9 AM đến 9 PM.

2. Một tách cà phê nóng 95^0C, để trong phòng có nhiệt độ môi trường là 20^0C. Sau 30 phút thì tách cà phê nguội xuống 61^0C. Định luật Newton về quá trình lạnh cho công thức nhiệt độ tách cà phê sau t phút:

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}$$

trong đó hằng số $k \approx 0,02$. Tính nhiệt độ trung bình của tách cà phê trong 30 phút đầu.

3. Trong động mạch, vận tốc máu chảy ở trung tâm mạch lớn hơn vận tốc ở gần thành mạch, và được mô hình hóa theo công thức tính là

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

trong đó l là độ dài của đoạn mạch, R là bán kính ống mạch, r là khoảng cách từ một vị trí trong mạch đến tâm trục của mạch, η là độ sính (độ nhầy) của máu, và P là độ chênh lệch áp suất ở hai đầu đoạn mạch. Hãy tính vận tốc trung bình của máu trên đoạn $0 \le r \le R$.

4.3 Liên hệ giữa tích phân với đạo hàm

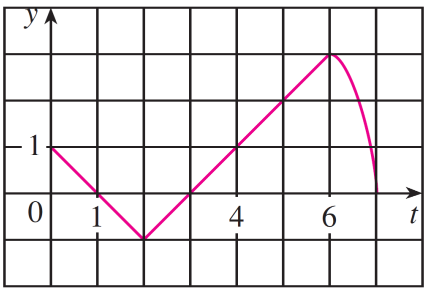
4.3.1 Định lý cơ bản của giải tích

Định lý 4.2 (Định lý cơ bản của giải tích)**.** *Cho f là một hàm số liên tục trên $[a,b]$ và F là hàm định bởi*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a < x < b$$

Khi đó $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

1. Đặt $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, trong đó f là hàm số có đồ thị như hình dưới.



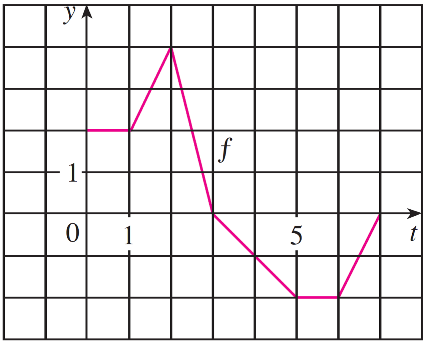
a) Tính $g(x)$ với $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6$.

b) Ước tính $g(7)$.

c) g đạt giá trị lớn nhất; nhỏ nhất tại điểm nào?

d) Phác họa thô sơ đồ thị của g.

2. Đặt $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, trong đó f là hàm số có đồ thị như hình dưới.



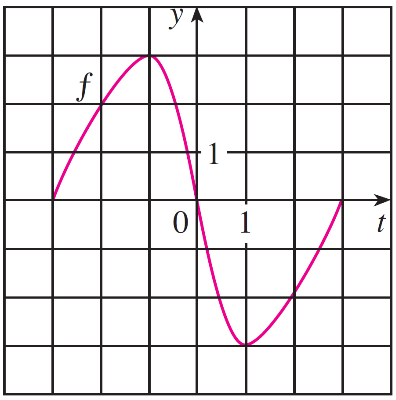
a) Tính $g(0),\ g(1),\ g(2),\ g(3),\ g(6)$.

b) g đồng biến trên khoảng nào?

c) g đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào?

d) Phác họa thô sơ đồ thị của g.

3. Đặt $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)dt$, trong đó f là hàm số có đồ thị như hình dưới.



a) Tính $g(-3),\ g(3)$.

b) Ước lượng $g(-2),\ g(-1),\ g(0)$.

c) g đồng biến trên khoảng nào? Giá trị lớn nhất của g đạt được tại điểm nào?

d) Phác họa thô sơ đồ thị của g.

---

4. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $g(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3+1}dt$

b) $g(x) = \int_{3}^{x} e^{t^2-t}dt$

c) $g(y) = \int_{2}^{y} t^2 \sin t dt$

d) $g(r) = \int_{0}^{r} \sqrt{x^2+4}dx$

e) $F(x) = \int_{x}^{\pi} \sqrt{1+\sec t}dt$, ($\sec t = 1/\cos t$)

f) $G(x) = \int_{x}^{1} \cos\sqrt{t}dt$

g) $h(x) = \int_{2}^{1/x} \arctan t dt$

h) $h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+r^3}dr$

i) $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t+\sqrt{t}}dt$

j) $y = \int_1^{\cos x} (1+v^2)^{10}dv$

k) $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{u^2+1}du$

l) $y = \int_{e^x}^{0} \sin^3 t dt$

m) $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}dt$

n) $g(x) = \int_{\tan x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}dt$

o) $y \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\sin t dt$

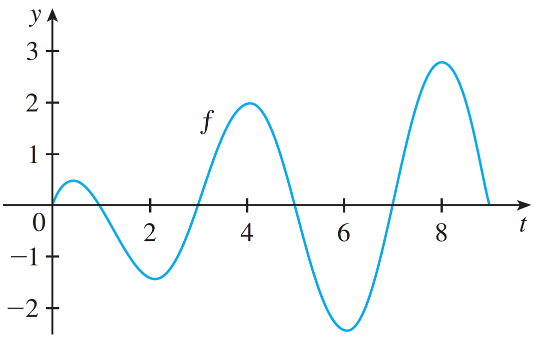
p) $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)du$

5. Cho $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ và $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}du$. Tính $F''(2)$.

6. Đường cong $y = \int_0^x \frac{1}{t^2+t+1}dt$ lồi lên trên khoảng nào?

7. Nếu $f(1) = 12$, f' là hàm liên tục và $\int_1^4 f'(x)dx = 17$ thì giá trị của $f(4)$ là gì?

8. Cho $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, trong đó f là hàm số có đồ thị dưới đây

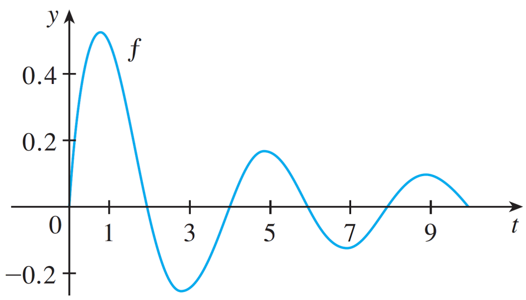


a) Cực trị của g xảy ra tại điểm nào?

b) g đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào trên đoạn $[0, 9]$?

c) Phác họa đồ thị của g.

9. Hỏi như bài trên với đồ thị sau



10. Nếu f là hàm số liên tục; g và h là hai hàm số khả vi (có đạo hàm) thì công thức tính $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ là gì?.

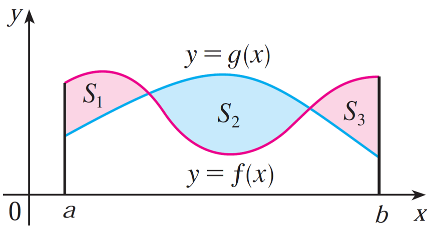
4.3.2 Kỹ năng tính tích phân thông qua nguyên hàm

Kỹ năng này trong chương trình phổ thông. Sinh viên có thể làm bài tập ôn lại kỹ năng tính tích phân đơn giản trong phần phụ lục.

4.4 Các đại lượng hình học liên quan tích phân

4.4.1 Bài tập tính diện tích miền phẳng

Nhắc lại kiến thức. Một miền phẳng nằm giữa hai đồ thị của $y = f(x)$ và $y = g(x)$; và nằm giữa hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ như minh họa dưới đây

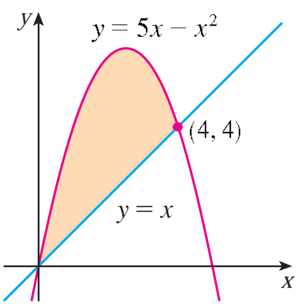


sẽ có diện tích là

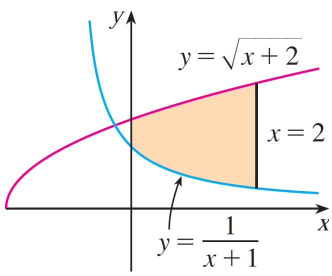
$$\boxed{S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx}$$

1–4 Find the area of the shaded region.

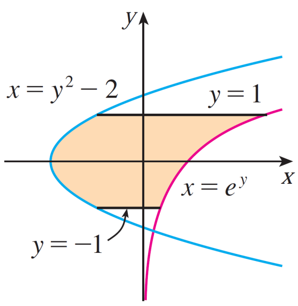
1.



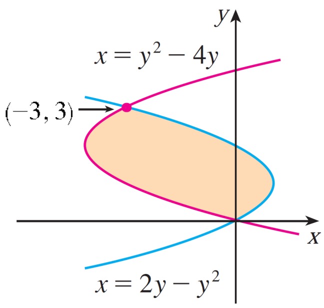
2.



3.



4.



5–28 Sketch the region enclosed by the given curves. Decide whether to integrate with respect to x or y. Draw a typical approximating rectangle and label its height and width. Then find the area of the region.

5. $y = x + 1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$

6. $y = \sin x, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

7. $y = x, \quad y = x^2$

8. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

9. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

10. $y = 1 + \sqrt{x}, \quad y = (3 + x)/3$

11. $y = x^2, \quad y^2 = x$

12. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

14. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $y = \tan x, \quad y = 2 \sin x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

16. $y = x^3 - x, \quad y = 3x$

17. $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x = 9$

18. $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -3, \quad x = 3$

19. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

20. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

21. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

22. $y = \sin(\pi x/2), \quad y = x$

23. $y = \cos x, \quad y = \sin 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

24. $y = \cos x, \quad y = 1 - \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

25. $y = x^2, \quad y = 2/(x^2 + 1)$

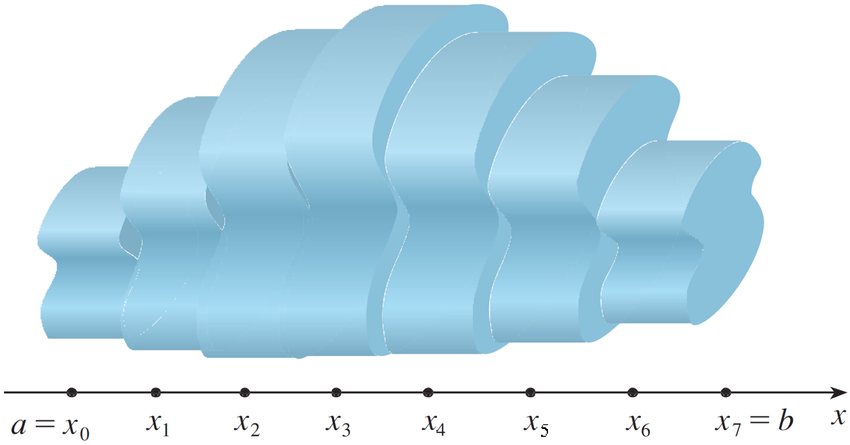
26. $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$

27. $y = 1/x, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$

28. $y = 3x^2, \quad y = 8x^2, \quad 4x + y = 4, \quad x \geqslant 0$

4.4.2 Bài tập tính thể tích khối theo kỹ thuật cắt lát, 1-13

Nhắc lại kiến thức. Một vật thể được cắt lát bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox, vật nằm giữa $x = a$ và $x = b$ như hình dưới

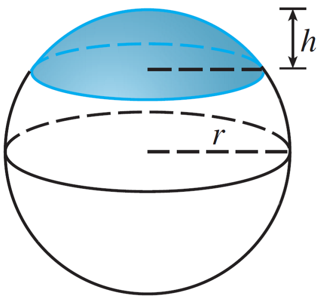


Thể tích vật này được xấp xỉ bằng tổng thể tích các lát mỏng tương tự tổng Riemann. Nếu $S(x)$ là diện tích thiết diện bị cắt tại vị trí x, thì thể tích vật được tính bởi công thức

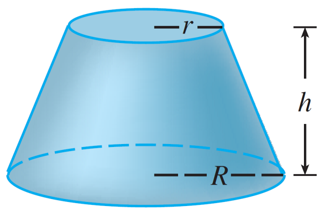
$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x}$$

1. Cho biết công thức diện tích hình tròn bán kính x ($x > 0$) là $S(x) = \pi x^2$. Bằng kỹ thuật cắt lát, hãy lập công thức tính thể tích khối cầu bán kính R.

2. Hãy tính thể tích của chỏm cầu như mô tả trong hình dưới.

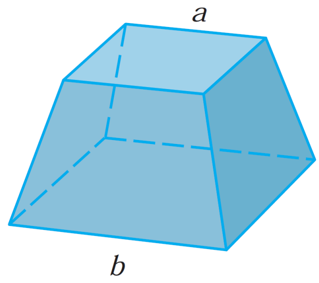


3. a) Lập công thức tính thể tích hình nón cân, đáy là hình tròn có bán kính r và chiều cao h_1.
   b) Dựa theo công thức câu trên, hãy lập công thức tính thể tích hình nón cụt, cân như mô tả trong hình vẽ bên.

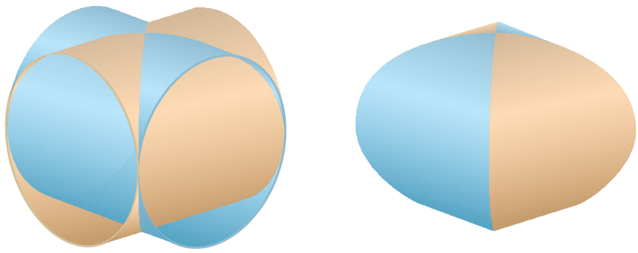


4. **a)** Bằng kỹ thuật cắt lát, hãy lập công thức tính thể tích hình tứ diện có diện tích đáy bằng S với chiều cao tương ứng là h. Mở rộng cho công thức thể tích hình chóp. (*Nhắc lại kiến thức.* Hai tam giác đồng dạng theo tỉ số k sẽ có tỉ số diện tích là k^2.)

b) Hãy áp dụng kết quả câu trên, thiết lập công thức tính thể tích hình chóp cụt đều với độ cao h, cạnh hình vuông trên và dưới lần lượt là a và b như mô tả trong hình bên.

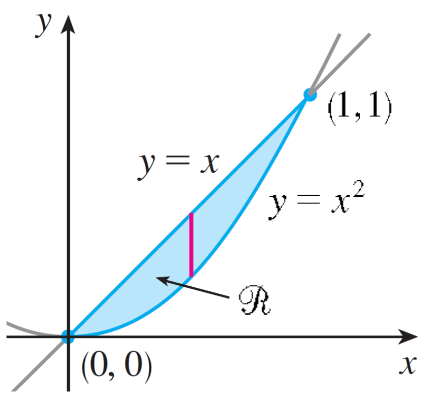


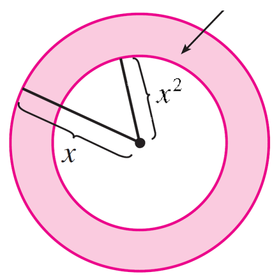
5. Tính thể tích phần giao nhau của hai hình trụ cùng bán kính, phương vuông góc nhau như hình vẽ dưới.



---

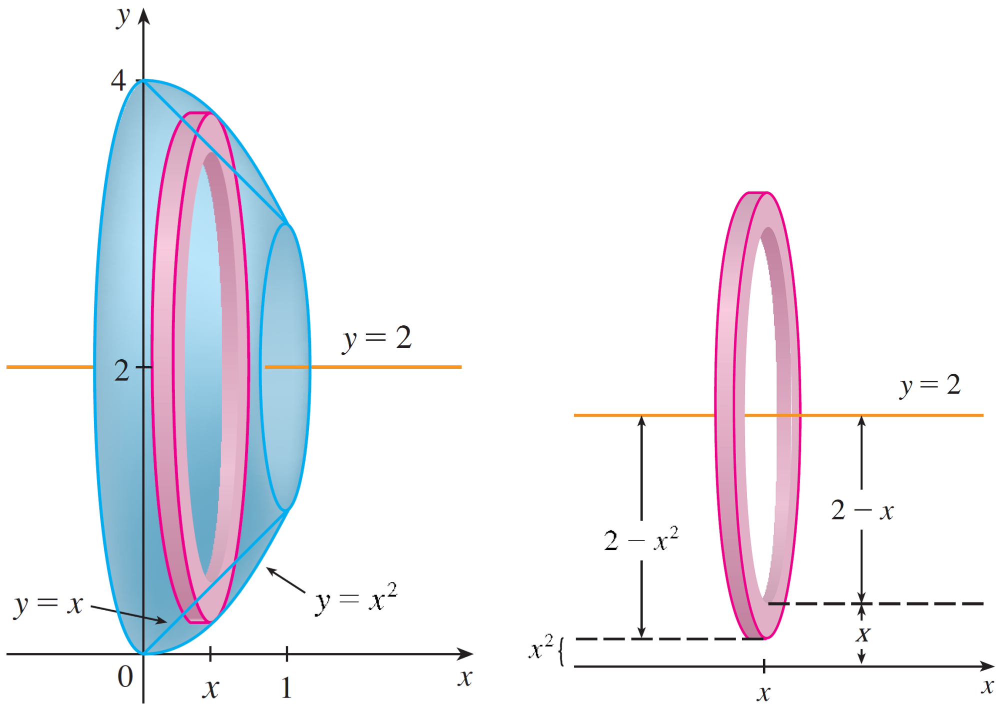
6. **a)** Một miền $\mathcal{R}$ bị bao bởi các đường cong $y = x$ và $y = x^2$ như hình dưới, được quay quanh trục Ox sẽ tạo ra hình phễu (có độ dày). Thiết diện phễu bị cắt bởi mặt vuông góc với trục Ox là hình vành khuyên.





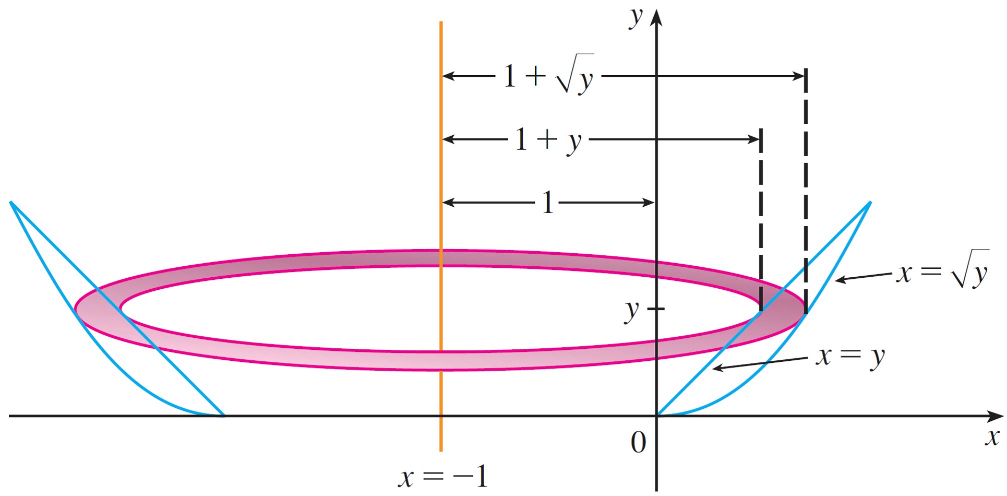
Hãy tính thể tích của phễu.

b) Nếu miền $\mathcal{R}$ quay quay đường thẳng $y = 2$ để tạo ra hình phễu thứ hai như dưới đây



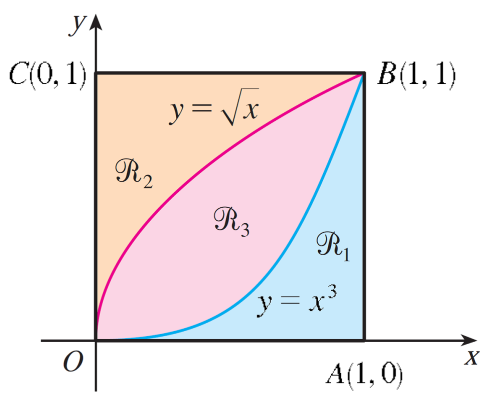
Hãy tính thể tích của hình phễu thứ hai.

c) Nếu miền $\mathcal{R}$ quay quay đường thẳng $x = -1$ để tạo ra hình phễu thứ ba như dưới đây



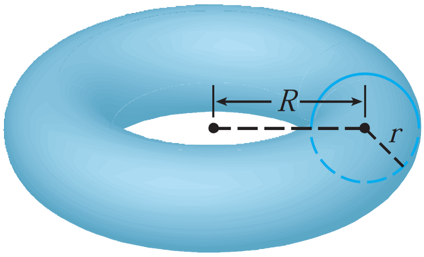
Hãy tính thể tích của hình phễu thứ ba.

7. Xem hình bên và tìm thể tích của khối được sinh bởi việc quay các miền cho trước, xung quanh các trục cho trước.



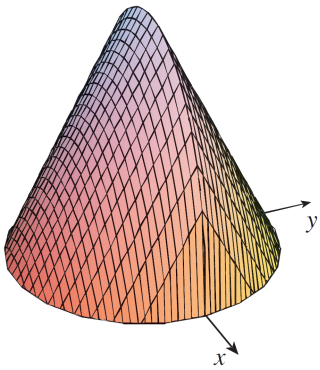
a) $\mathcal{R}_1$ quanh OA
b) $\mathcal{R}_1$ quanh OC
c) $\mathcal{R}_1$ quanh AB
d) $\mathcal{R}_1$ quanh BC
e) $\mathcal{R}_2$ quanh OA
f) $\mathcal{R}_2$ quanh OC
g) $\mathcal{R}_2$ quanh AB
h) $\mathcal{R}_2$ quanh BC
i) $\mathcal{R}_3$ quanh OA
j) $\mathcal{R}_3$ quanh OC
k) $\mathcal{R}_3$ quanh AB
l) $\mathcal{R}_3$ quanh BC

8. Ruột bánh xe hình xuyến có kích thước như mô tả trong hình dưới. Hãy tính thể tích của ruột theo kỹ thuật cắt lát nằm ngang (thiết diện có dạng vành khuyên).



---

9. Một vật có hình dạng như sau



với đáy là hình tròn bán kính bằng 1. Các thiết diện song song và cùng vuông góc với mặt đáy là các tam giác đều. Hãy tìm thể tích của vật này. (Cho biết diện tích tam giác đều cạnh a bằng $a^2\sqrt{3}/4$.)

10. Một vật có đáy là hình tròn bán kính r, các thiết diện song song và cùng vuông góc với đáy là các hình vuông. Tính thể tích vật này.

11. Một vật có đáy là hình ê-lip với đường bao quanh có phương trình $9x^2 + 4y^2 = 36$. Các thiết diện vuông góc với trục Ox là các tam giác vuông cân với cạnh huyền nằm trên đáy. Tính thể tích vật này.

12. Một vật có đáy là miền bao quanh bởi các đường $y = 1 - x^2$ và trục Ox. Các thiết diện vuông góc với trục Oy là các hình vuông.

13. Một vật có đáy là miền R bị bao quanh bởi các đường $y = 1 - x^2$ và trục Ox. Các thiết diện vuông góc với trục Ox là các tam giác cân mà cạnh đáy nằm trên R, đường cao tam giác bằng cạnh đáy.

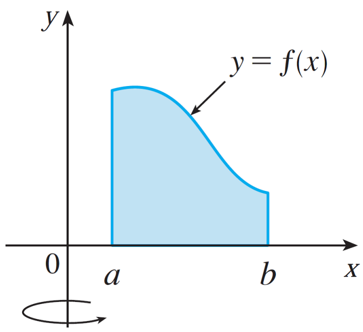
4.4.3 Bài tập tính thể tích khối tròn xoay, 1-8

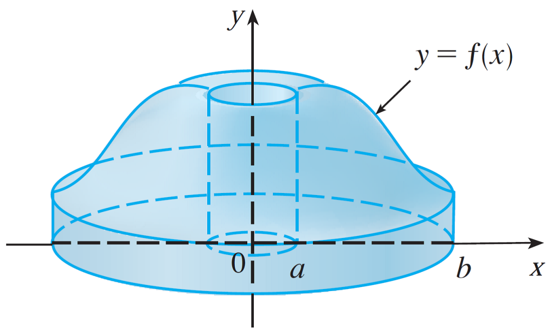
Nhắc lại kiến thức. Cho hàm số $y = f(x)$ **không âm** trên đoạn $[a, b]$ (có đồ thị phía trên trục hoành). Gọi S là phần mặt phẳng nằm dưới đồ thị của f và nằm trên đoạn $[a, b]$. Khi đó

- Thể tích khối tạo bởi mặt S xoay tròn quanh trục **Ox** được tính bởi

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x \text{ (dựa trên kỹ thuật cắt lát mà có)}} \tag{4.3}$$

- Thể tích khối tạo bởi mặt S xoay tròn quanh trục **Oy**, với giả thiết $0 \le a < b$,

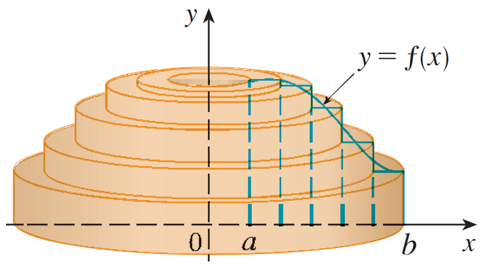




được tính bởi

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x} \tag{4.4}$$

Công thức (4.4) được thành lập dựa trên việc xấp xỉ V bởi tổng Riemann của các thể tích các vỏ hình trụ (có độ dày Δx) như hình vẽ bên. Để dễ nhớ, hình dung như sau:
$2\pi x$ là chu vi đáy hình trụ, $f(x)$ là chiều cao hình trụ, dx là độ dày vỏ hình trụ.



Chú ý. Dùng công thức (4.3) cho trường hợp đồ thị hàm số quay quanh trục của biến số, và dùng công thức (4.4) cho trường hợp đồ thị hàm số quay quanh trục của giá trị hàm. Do đó, nếu miền được mô tả bởi $x = f(y)$ thì trục Ox là trục của giá trị hàm, trục Oy là trục của biến, và ta phải đổi vai trò giữa x và y trong các công thức (4.3)-(4.4).

1. Dùng công thức (4.3), có trường hợp đổi vai trò x và y, hãy tính thể tích của khối sinh ra từ việc quay một miền bị bao bởi các đường cho trước, quanh trục cho trước.

   a) $y = 2 - \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$, quanh trục Ox.

   b) $y = 1 - x^2,\ y = 0$, quanh trục Ox.

   c) $y = 1/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$, quanh trục Ox.

d) $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$, quanh trục Ox.

e) $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 9$, quanh trục Oy.

f) $x = e^y$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$, quanh trục Oy.

g) $y = x^3$, $y = x$, $x \geq 0$, quanh trục Ox.

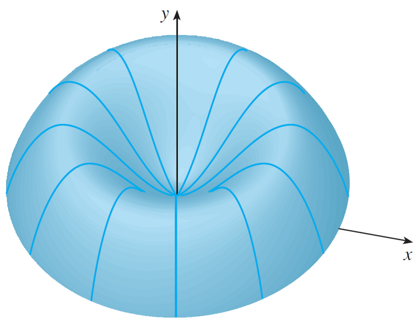
h) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 5 - x^2$, quanh trục Ox.

i) $x = y^2$, $x = 2y$, quanh trục Oy.

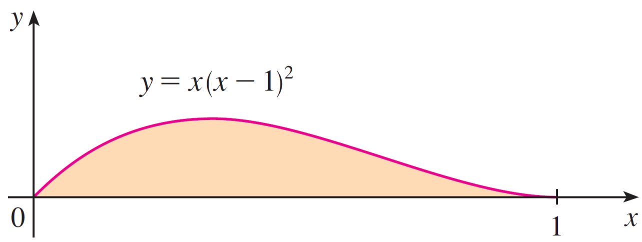
j) $y = \frac{1}{4}x^2$, $x = 2$, $y = 0$, quanh trục Oy.

---

2. Dùng công thức (4.4), tìm thể tích khối có được bằng cách quay miền bị bao bởi các đường $y = 2x^2 - x^3$ và $y = 0$; xung quanh trục Oy, như hình vẽ minh họa ở dưới.

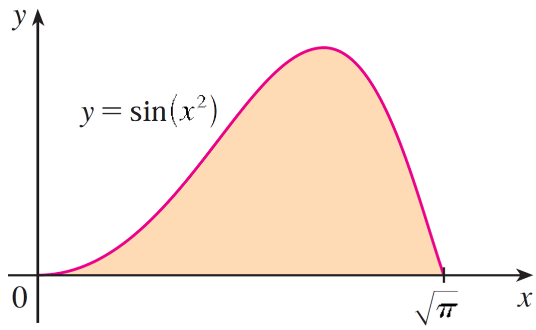


3. Dùng công thức (4.4), tìm thể tích của khối được tạo hình bằng cách quay miền trong hình vẽ dưới đây quanh trục Oy.



Hãy cho biết tại sao sử dụng phương pháp cắt lát trong trường hợp này rất khó.

4. Dùng công thức (4.4), tìm thể tích của khối được tạo hình bằng cách quay miền trong hình vẽ dưới đây quanh trục Oy.



Áp dụng phương pháp cắt lát trong trường hợp này có nên không? Giải thích.

5. Dùng công thức (4.4), tìm thể tích của khối được tạo hình bằng cách quay miền bao bởi các đường cong cho trước quanh trục Oy.

a) $y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$

b) $y = x^2,\ y = 0, x = 1$

c) $y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

d) $y = 3 + 2x - x^2,\ x + y = 3$

e) $y = 4(x-2)^2,\ y = x^2 - 4x + 7$

---

6. Áp dụng công thức tương tự (4.4) với x và y đổi vai trò, tìm thể tích của khối được tạo hình bằng cách quay miền bao bởi các đường cong cho trước quanh trục Ox.

a) $x = 1 + y^2,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2$

b) $x = \sqrt{y},\ x = 0,\ y = 1$

c) $y = x^3,\ y = 8,\ x = 0$

d) $x = 4y^2 - y^3,\ x = 0$

e) $x = 1 + (y-2)^2,\ x = 2$

f) $x + y = 3,\ x = 4 - (y-1)^2$

---

7. Tính thể tích của khối được tạo hình bằng cách quay miền bao bởi các đường cong cho trước, quanh trục được chỉ rõ

a) $y = x^4,\ y = 0,\ x = 1$; xung quanh trục $x = 2$

b) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1$; xung quanh trục $x = -1$

c) $y = 4x - x^2,\ y = 3$; xung quanh trục $x = 1$

d) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$; xung quanh trục $x = 1$

e) $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1$; xung quanh trục $y = 1$

f) $y = x^2,\ x = y^2$; xung quanh trục $y = -1$

---

8. Bằng bất kỳ phương pháp nào thuận tiện (bao gồm cắt lát), hãy tìm thể tích của khối được tạo hình bằng cách quay miền bao bởi các đường cong cho trước, quanh trục được chỉ rõ

a) $y = -x^2 + 6x - 8,\ y = 0$; xung quanh trục Oy

b) $y = -x^2 + 6x - 8,\ y = 0$; xung quanh trục Ox

c) $y = 5,\ y = x + \frac{4}{x}$; xung quanh trục $x = -1$

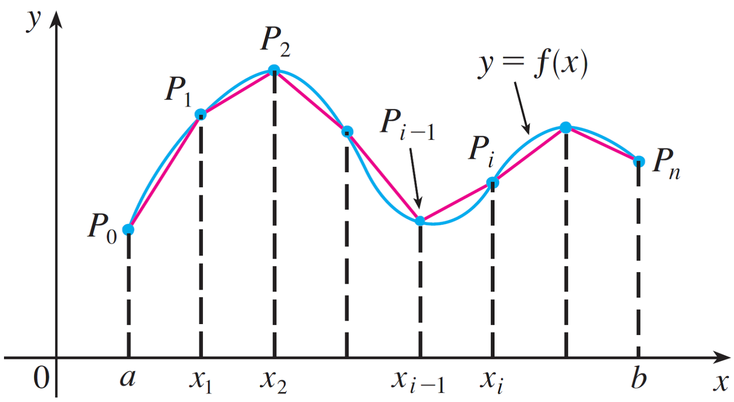
d) $x = 1 - y^4,\ x = 0$; xung quanh trục $x = 2$

e) $x^2 + (y-1)^2 = 1$; xung quanh trục Oy

f) $x = (y-3)^2,\ x = 4$; xung quanh trục $y = 1$

4.4.4 Độ dài đường cong

Nhắc lại kiến thức. Nếu f là hàm số có đạo hàm f' liên tục trên đoạn $[a, b]$, với đồ thị là đường cong như dưới đây,



thì người ta lập tổng Riemann của các độ dài đoạn thẳng $P_{i-1}P_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2},$$

trong đó $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)\Delta x$ và $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ (dựa theo định lý Lagrange về giá trị trung bình của đạo hàm), thì sau khi lấy giới hạn tổng, ta đi đến công thức độ dài đường cong $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ như sau

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x}$$

Trong trường hợp phương trình đường cong có dạng $x = g(y)$, $y \in [c, d]$ thì công thức độ dài đường cong là

$$\boxed{L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, \mathrm{d}y = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\, \mathrm{d}y}$$

7–18 Find the length of the curve.

$\boxed{7.}$ $y = 1 + 6x^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

8. $y^2 = 4(x + 4)^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad y > 0$

9. $y = \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{1}{10x^3}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

10. $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{1}{4y^2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

$\boxed{11.}$ $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y - 3), \quad 1 \leqslant y \leqslant 9$

12. $y = \ln(\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

$\boxed{13.}$ $y = \ln(\sec x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

14. $y = 3 + \frac{1}{2}\cosh 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

15. $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

16. $y = \sqrt{x - x^2} + \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

17. $y = e^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

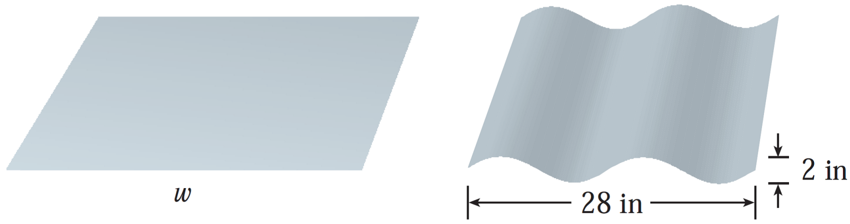
18. $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad a > 0$

1. Gió đều đặn thổi một cánh diều bay về hướng Tây. Độ cao y cách đất của diều đi về phía Tây từ vị trí $x = 0$ đến $x = 80$ cho bởi phương trình $y = 150 - \frac{1}{40}(x - 50)^2$. Tính độ dài đường bay của của diều.

2. Một con ó bay với vận tốc 15 m/s ở độ cao 180 rồi bất ngờ thả rơi con mồi. Đường quỹ đạo rơi của con mồi dạng parabola cho bởi phương trình $y = 180 - \frac{x^2}{45}$, chấm dứt ở chỗ con mồi chạm đất, trong đó y là độ cao của con mồi và x là quãng đường dịch chuyển theo phương ngang (đo theo mét). Tính độ dài đường rơi của con mồi tính từ lúc bị thả đến lúc chạm đất.

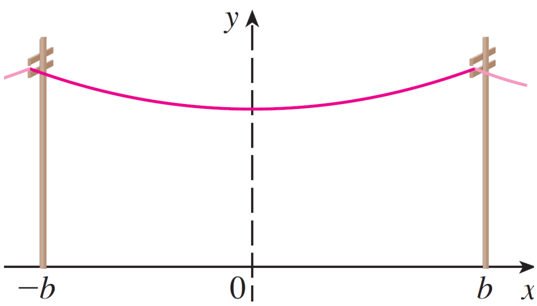
3. Vòm cổng điện St. Louis được xây dựng theo dạng đường cong chính giữa với phương trình là $y = 211,49 - 20,96\cosh 0,03291765x$, trong đó y và x được đo theo mét và $|x| \leq 91,2$. Lập công thức tích phân tính độ dài đường cong vòm rồi dùng máy tính bỏ túi để xấp xỉ độ dài và làm tròn đến hàng đơn vị mét.

4. Một xưởng cán tole sản xuất các tấm lợp mái nhà có bề rộng 28 in, biên độ gợn sóng cao 2 in, dạng sóng hình sin nhìn theo mặt nghiêng như hình dưới



Chứng minh phương trình sóng là $y = \sin(\pi x/7)$. Tính bề rộng w của tấm tole phẳng dùng để uốn ra tấm tole gợn sóng như trên (dùng máy tính bỏ túi, làm tròn đến 4 chữ số thập phân).

5. **a)** Dây điện được treo giữa hai cột điện ở vị trí $x = -b$ và $x = b$ như hình dưới.

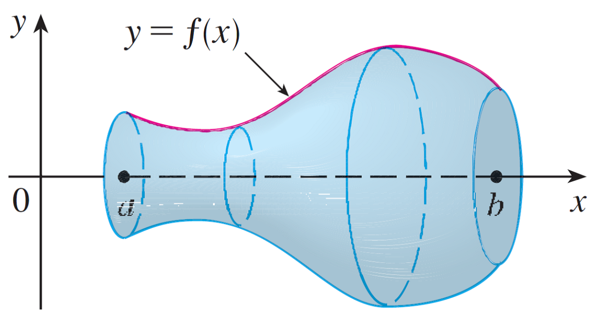


Hình dạng treo của dây được biểu diễn bởi phương trình $y = c + \cosh(x/a)$. Tìm độ dài đoạn dây treo giữa hai cột điện.

b) Nếu hai cột cách nhau 50 ft và đoạn dây treo giữa hai cột dài 51 ft, vị trí thấp nhất của dây cách đất 20 ft, thì vị trí treo hai đầu đoạn dây lên cột cách đất bao nhiêu ft?

4.4.5 Diện tích mặt tròn xoay

Nhắc lại kiến thức. Xét một hàm f có f' liên tục trên đoạn $[a, b]$. Đường cong $y = f(x)$, $a \le x \le b$, xoay quanh trục Ox tạo thành một mặt tròn xoay



có diện tích được tính bởi công thức

$$S_{\text{tr.xoay}} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Nếu đường cong là $x = g(y)$, $c \le y \le d$ thì ta đổi vai trò x và y trong công thức trên

$$S_{\text{tr.xoay}} = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

5–12 Find the area of the surface obtained by rotating the curve about the x-axis.

$\boxed{5.}$ $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

6. $9x = y^2 + 18$, $2 \leqslant x \leqslant 6$

7. $y = \sqrt{1 + 4x}$, $1 \leqslant x \leqslant 5$

8. $y = c + a\cosh(x/a)$, $0 \leqslant x \leqslant a$

9. $y = \sin \pi x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

10. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

$\boxed{11.}$ $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

12. $x = 1 + 2y^2$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

13–16 The given curve is rotated about the y-axis. Find the area of the resulting surface.

13. $y = \sqrt[3]{x}$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

14. $y = 1 - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

$\boxed{15.}$ $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 \leqslant y \leqslant a/2$

16. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$

4.5 Tích phân suy rộng

4.5.1 Tích phân suy rộng loại 1, cận là vô cực.

(i) Nếu $\int_a^t f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)\,dx$ phân kỳ.

(ii) Nếu $\int_t^b f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)\,dx$ phân kỳ.

(iii) Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)\,dx$ và $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ hội tụ, đồng thời ký hiệu

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Nếu **một trong hai** tích phân, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hay $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ phân kỳ, thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ phân kỳ.

Định lý. *Tích phân* $\int_a^\infty \frac{1}{(x-a_0)^p}\,dx$ *(với $a_0 < a$), hội tụ khi $p > 1$ và phân kỳ khi $p \le 1$.*

4.5.2 Tích phân suy rộng loại 2, miền tích phân có *điểm kỳ dị*

. Trong định nghĩa tích phân suy rộng loại 2, ta tạm gọi *điểm kỳ dị* của hàm số f là số c điểm mà tại đó f không xác định, hoặc $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$.

(i) Giả sử b là điểm kỳ dị của f. Nếu $\int_a^t f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \in [a,b)$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kỳ.

(ii) Giả sử a là điểm kỳ dị của f. Nếu $\int_t^b f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \in (a,b]$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kỳ.

(iii) Giả sử hai số a, b đều là điểm kỳ dị của f và f xác định trên (a, b). Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ và $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ hội tụ, đồng thời ký hiệu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.5}$$

Nếu **một trong hai** tích phân, $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ hay $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ phân kỳ, thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ phân kỳ.

(iv) Giả sử f xác định trên $[a, c) \cup (c, b]$ và c là điểm kỳ dị của f. Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ và $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ hội tụ, và ta có ký hiệu như (4.5) với các khái niệm như mục (iii).

Định lý. *Với $a < c < b$, hai tích phân suy rộng $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^p}\,\mathrm{d}x$ và $\int_c^b \frac{1}{(x-c)^p}\,\mathrm{d}x$ cùng hội tụ khi $p < 1$, cùng phân kỳ khi $p \geq 1$.*

4.5.3 Các tiêu chuẩn khảo sát tích phân suy rộng

Định lý 4.3 (tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối)**.**

1. *Nếu $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ cũng hội tụ và*

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Ta cũng có kết quả tương tự như trên đối với những hình thức khác của tích phân suy rộng loại 1.

2. *Giả sử $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là tích phân suy rộng loại 2. Nếu $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ cũng hội tụ và*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Định lý 4.4 (tiêu chuẩn so sánh bất đẳng thức)**.**

1. *Giả sử* f, g *là hai hàm số thỏa* $f(x) \geq g(x) \geq 0$ *với mọi* $x \geq M$ *(*M *là một số nào đó). Khi đó*

   – *Nếu* $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *hội tụ thì* $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ *cũng hội tụ.*

   – *Nếu* $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ *phân kỳ thì* $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *cũng phân kỳ.*

   Ta cũng có cách so sánh tương tự đối với tích phân $\int_{-\infty}^{a}$.

2. *Giả sử* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *và* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *là hai tích phân suy rộng loại 2, trong đó* $c \in [a,b]$ *là* ***điểm kỳ dị*** *của tích phân, nghĩa là tại đó hai hàm* f *và* g *không xác định hoặc có giới hạn vô cực. Hơn nữa* $f(x) \geq g(x) \geq 0$ *với mọi* x *thuộc một lân cận của* c*. Khi đó,*

   – *Nếu* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *hội tụ thì* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *cũng hội tụ.*

   – *Nếu* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *phân kỳ thì* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *cũng phân kỳ.*

Định lý 4.5 (tiêu chuẩn so sánh lim)**.** *Cho* f, g *là các hàm số* ***dương****.*

1. *Nếu*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,\infty)$$

   thì $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

   Ta cũng có cách so sánh tương tự đối với $\int_{-\infty}^{a}$.

2. *Nếu* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *và* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *là tích phân suy rộng loại 2 với* $c \in [a,b]$ *là* ***điểm kỳ dị*** *của tích phân, và nếu*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,\infty)$$

   thì $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *và* $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

1. Explain why each of the following integrals is improper.

(a) $\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4}\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

(c) $\int_0^{2} \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ (d) $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{1}{x^2 + 5}\,dx$

2. Which of the following integrals are improper? Why?

(a) $\int_1^{2} \dfrac{1}{2x - 1}\,dx$ (b) $\int_0^{1} \dfrac{1}{2x - 1}\,dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin x}{1 + x^2}\,dx$ (d) $\int_1^{2} \ln(x - 1)\,dx$

1-36 Không dùng tiêu chuẩn so sánh, xác định xem mỗi tích phân sau hội tụ hay phân kỳ. Tính giá trị của tích phân nếu nó hội tụ.

1. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3-4x}\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

5. $\displaystyle\int_2^{\infty} e^{-5p}\,dp$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 2^r\,dr$

7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (y^3 - 3y^2)\,dy$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin^2\alpha\,d\alpha$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t\,dt$

13. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x}\,dx$

14. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dv}{v^2+2v-3}$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} ze^{2z}\,dz$

16. $\displaystyle\int_2^{\infty} ye^{-3y}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-3x^4}\,dx$

19. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$

21. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3}{x^5}\,dx$

24. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

25. $\displaystyle\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

26. $\displaystyle\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3}\,\mathrm{d}x$

27. $\displaystyle\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$

28. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

29. $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x$

30. $\displaystyle\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,\mathrm{d}x$

31. $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+5}$

32. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x\,\mathrm{d}x$

33. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

35. $\displaystyle\int_0^2 z^2 \ln z dz$

36. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

37-39 Tìm các giá trị của p để các tích phân sau hội tụ. Trong trường hợp hội tụ, hãy tính giá trị tích phân đó

37. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$

38. $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,\mathrm{d}x$

39. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,\mathrm{d}x$

40-47 Dùng các tiêu chuẩn so sánh, hãy khảo sát các tích phân suy rộng là hội tụ hay phân kỳ

40. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

41. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

43. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x\sin x}\,\mathrm{d}x$

44. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+\ln x+1}{x^5+3x^2+3}\,\mathrm{d}x$

45. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^3+2x-1}{x^4+x^3+\sqrt{x^3+1}+2}\,\mathrm{d}x$

46. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2(2+x)}}\,\mathrm{d}x$

47. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

49–54 Use the Comparison Theorem to determine whether the integral is convergent or divergent.

49. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$

50. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{2+e^x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

55. The integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

is improper for two reasons: The interval $[0, \infty)$ is infinite and the integrand has an infinite discontinuity at 0. Evaluate it by expressing it as a sum of improper integrals of Type 2 and Type 1 as follows:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

56. Evaluate

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

by the same method as in Exercise 55.

Chương 5

Chuỗi số

5.1 Các khái niệm chung về chuỗi số

Nhắc lại kiến thức. Cho trước dãy số $(a_n)_{n\geq n_0}$.

- Một hình thức tổng vô hạn số hạng (chưa có nghĩa) như sau

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \qquad \text{hay} \qquad a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_n + \cdots$$

  được gọi là *chuỗi số*, trong đó mỗi số a_n được gọi là *số hạng tổng quát* của chuỗi. Khi không có nhầm lẫn, hình thức trên được viết gọn là $\sum a_n$.

- Với mỗi $n \geq n_0$, tổng gồm hữu hạn số hạng

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n$$

  được gọi là một *tổng riêng phần* của chuỗi.

- Nếu dãy (s_n) hội tụ về số thực s, viết là $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, thì ta nói $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ là *chuỗi hội tụ*, và có thể dùng ký hiệu $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ thay cho s. Lúc này giá trị s được gọi là *tổng chuỗi*.

- Nếu dãy (s_n) phân kỳ, ta nói $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ là *chuỗi phân kỳ*.

- Hai chuỗi $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=n_2}^{\infty} a_n$ có cùng bản chất, nghĩa là việc thêm hay bỏ vài số hạng đầu của một chuỗi sẽ không ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kỳ của nó.

- Chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} ar^n$ (với $a \neq 0$), được gọi là *chuỗi hình học*. Mỗi số hạng tổng quát của chuỗi hình học khi nhân với số r sẽ cho số hạng tiếp theo. (Số r giống như **công bội** trong cấp số nhân.)

Định lý 5.1. *Cho chuỗi hình học* $\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n$. *Khi đó,*

- *nếu* $|r| < 1$ *thì chuỗi hình học hội tụ về tổng là*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n = \frac{ar^{n_0}}{1-r}$$

(tổng chuỗi bằng số hạng đầu chia cho "1 trừ công bội".)

- *Nếu* $|r| \geq 1$ *thì chuỗi hình học phân kỳ.*

Bài tập

1. Cho trước biểu thức tổng riêng phần s_n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Hãy xác định biểu thức của số hạng tổng quát a_n và tính tổng của chuỗi.

(i) $s_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ (ii) $s_n = 3 - n2^{-n}$

2. Trong các chuỗi sau, hãy viết biểu thức tổng riêng phần và rút gọn. Chuỗi có hội tụ hay không? Nếu có thì hãy tìm tổng của chuỗi.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n^2} - \cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+3)}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$

3. Kiểm tra các chuỗi sau là chuỗi hình học và xét tính hội tụ. Nếu chuỗi hội tụ thì hãy tìm tổng.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6(0,9)^{n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{10^n}$

i) $3 - 4 + \dfrac{16}{3} - \dfrac{64}{9} + \cdots$

j) $4 + 3 + \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{16} + \cdots$

k) $10 - 2 + 0,4 - 0,08 + \cdots$

l) $2 + 0,5 + 0,125 + 0,03125 + \cdots$

m) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^k$

n) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (\cos 1)^k$

4. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây như là tổng của một chuỗi hình học, dưới dạng một số hữu tỉ.

a) $0,\overline{2} = 0,222\ldots$

b) $0,\overline{73} = 0,737373\ldots$

c) $3,\overline{417}$

d) $6,2\overline{54}$

e) $1,53\overline{42}$

f) $7,\overline{12345}$

5. Tìm các giá trị của x để các chuỗi sau hội tụ và tìm tổng chuỗi với giá trị của x vừa tìm.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$

6. Tìm giá trị của c biết $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2$.

7. Tìm giá trị của c sao cho $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$.

5.2 Các tính chất về chuỗi

Nhắc lại kiến thức.

- Nếu hai chuỗi $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ và $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ thì chuỗi tổng $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n)$ cũng hội tụ và
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

- Cho số $\alpha \neq 0$. Chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha a_n$ hội tụ. Trong trường hợp hai chuỗi này hội tụ thì
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$
- Nếu $\sum a_n$ hội tụ, trong khi $\sum b_n$ phân kỳ, thì chuỗi tổng $\sum (a_n + b_n)$ là phân kỳ, chuỗi $\sum \alpha b_n$ cũng phân kỳ.
- Nếu cả hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng phân kỳ thì, về mặt tổng quát, ta không có kết luận gì về chuỗi tổng $\sum (a_n + b_n)$.

Định lý 5.2 (Dấu hiệu nhận biết chuỗi phân kỳ)**.** *Xét chuỗi* $\sum a_n$.

- *Nếu không tồn tại giới hạn* $\lim_{n\to\infty} a_n$*; hoặc tồn tại* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$*, thì chuỗi* $\sum a_n$ *phân kỳ.*
- *Nếu* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *thì, về mặt tổng quát, ta không có kết luận gì về sự hội tụ của chuỗi* $\sum a_n$.

Định lý 5.3 (Chuỗi Dirichlet)**.** *Chuỗi* $\sum \frac{1}{n^p}$, *được gọi là chuỗi Dirichlet, hội tụ khi* $p > 1$; *phân kỳ khi* $p \leq 1$. *(Trường hợp* $p = 1$ *thì chuỗi này được gọi là chuỗi điều hòa.)*

Ghi chú. Hàm zeta-Riemann cho bởi $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, được dùng trong lý thuyết số để nghiên cứu sự phân bố của các số nguyên tố. Như vậy, miền xác định của hàm này là $(1, \infty)$.

Bài tập

1. Các chuỗi sau là hội tụ hay phân kỳ?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0,85}}$

d) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

e) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

f) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

g) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}+\cdots$

2. Các chuỗi sau là hội tụ hay phân kỳ?

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\cdots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3n-1}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{2^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{2}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}[(0.8)^{n-1}-(0.3)^n]$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5^n}+\frac{2}{n}\right)$

k) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}+\frac{1}{n^2}\right)$

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, trong đó

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3^n} & \text{nếu } n \text{ lẻ}\\[2mm] \dfrac{2}{3^n} & \text{nếu } n \text{ chẵn}\end{cases}$$

5.3 Chuỗi lũy thừa

Nhắc lại kiến thức. Cho trước số a và dãy số $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Chuỗi số có dạng sau

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$$

  được gọi là *chuỗi lũy thừa theo* $(x-a)$, hoặc là *chuỗi lũy thừa xung quanh điểm* a. Các số c_n được gọi là các *hệ số* của chuỗi lũy thừa.

- Ta qui ước rằng $(x-a)^0=1$, ngay cả trường hợp $x=a$, nghĩa là qui ước $0^0=1$. Qui ước này chỉ trong phạm vi lý thuyết chuỗi lũy thừa mà thôi.

- *Miền hội tụ* của chuỗi trên là tập hợp mọi giá trị của x làm cho chuỗi lũy thừa hội tụ.

Định lý.

Với mọi chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, chỉ xảy ra một trong ba khả năng sau:

(i) Chuỗi chỉ hội tụ tại $x = a$ mà thôi.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Có số dương R sao cho chuỗi hội tụ khi $|x-a| < R$, và phân kỳ khi $|x-a| > R$.

- Số R trong trường hợp (iii) của định lý trên được gọi là *bán kính hội tụ* của chuỗi lũy thừa. Người ta qui ước $R = 0$ trong trường hợp (i); và $R = \infty$ trong trường hợp (ii).
- Trong trường hợp (i) của định lý, miền hội tụ chỉ có một điểm a. Trong trường hợp (ii), miền hội tụ là $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Riêng trường hợp (iii), không có kết luận tổng quát về sự hội của chuỗi khi $|x-a| = R$. Do đó, ở trường hợp (iii), có bốn khả năng của miền hội tụ là

$$(a-R, a+R) \qquad [a-R, a+R) \qquad (a-R, a+R] \qquad [a-R, a+R]$$

Định lý (Cách tìm bán kính hội tụ).

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Đặt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L \text{ (hữu hạn hoặc vô hạn).}$$

Khi đó,

1. Nếu $L = \infty$ thì bán kính hội tụ là $R = 0$.

2. Nếu $L = 0$ thì bán kính hội tụ là $R = \infty$.

3. Nếu $L > 0$ là số dương hữu hạn thì bán kính hội tụ là $R = \dfrac{1}{L}$.

Bài tập

1-26 Tìm bán kính hội tụ hội tụ của chuỗi lũy thừa.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n-1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n^2}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2 x^n}{2^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n x^n}{n^3}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n\sqrt{n}}x^n$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(x+1)^n$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5\sqrt[n]{n}}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n}(x-a)^n$, với $b > 0$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n}{\ln n}(x-a)^n$, với $b > 0$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{n^3}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

5.4 Đạo hàm, nguyên hàm của chuỗi lũy thừa

Nhắc lại kiến thức. Định lý sau là nội dung chính của mục này

Định lý 5.4. *Nếu chuỗi lũy thừa $\sum c_n(x-a)^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$, thì hàm số f định bởi*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \tag{5.1}$$

có đạo hàm trên khoảng $(a-R, a+R)$, đồng thời đạo hàm và nguyên hàm của f cũng là tổng của chuỗi có được bằng cách lấy đạo hàm hoặc nguyên hàm từng số hạng của chuỗi (5.1),

(i)
$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \tag{5.2}$$

(ii)
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$
$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \tag{5.3}$$

Hơn nữa, hai chuỗi ở (5.2) và (5.3) cũng có bán kính hội tụ là R.

Bài tập

1-8 Dựa theo kết quả của chuỗi hình học, hãy tìm khai triển dạng chuỗi lũy thừa cho các hàm số, đồng thời chỉ rõ bán kính hội tụ.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

2. $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

3. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x+10}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

7. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

8. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

9-10 Biểu diễn hàm số như là tổng của chuỗi lũy thừa bằng cách phân tích các phân thức. Chỉ rõ bán kính hội tụ của chuỗi

9. $f(x) = \dfrac{3}{x^2-x-2}$

10. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$

---

11. **a)** Dùng đạo hàm, hãy tìm khai triển dạng chuỗi lũy thừa cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$. Bán kính hội tụ là gì?

b) Dùng câu (a), tìm khai triển dạng chuỗi lũy thừa cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$.

c) Dùng câu (b), tìm khai triển dạng chuỗi lũy thừa cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$.

12. **a)** Tìm khai triển dạng chuỗi lũy thừa cho hàm $f(x) = \ln(1+x)$. Bán kính hội tụ là gì?

b) Dùng câu (a), tìm khai triển dạng chuỗi lũy thừa cho hàm số $f(x) = x\ln(1+x)$.

c) Dùng câu (a), tìm khai triển dạng chuỗi lũy thừa cho hàm số $f(x) = \ln(x^2+1)$.

13-19 Biểu diễn hàm số như là tổng của chuỗi lũy thừa và xác định bán kính hội tụ.

13. $f(x) = \ln(5+x)$

14. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

15. $f(x) = \ln(x^2+4)$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

18. $f(x) = \arctan(2x)$

19. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

20-23 Tìm các nguyên hàm dưới dạng tổng của chuỗi lũy thừa, xác định bán kính hội tụ.

20. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}\,dt$

21. $\displaystyle\int \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

22. $\displaystyle\int \frac{x-\arctan x}{x^3}\,dx$

23. $\displaystyle\int \arctan(x^2)\,dx$

5.5 Đa thức Taylor và chuỗi Taylor

Nhắc lại kiến thức. Trong mục trước, dựa theo kết quả về chuỗi hình học, ta tìm được khai triển dạng lũy thừa cho vài hàm số có liên quan đến đạo hàm hay nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{x^k}{1 - x^\alpha}$. Dưới đây, ta tìm cách khai triển một hàm số tổng quát hơn thành chuỗi lũy thừa.

Định lý. Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Nếu f là hàm tổng của chuỗi này trên $(a - R, a + R)$ thì các hệ số c_k của chuỗi có liên hệ với các đạo hàm của f như sau

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \ldots, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \ldots$$

trong đó $f^{(k)}(a)$ là đạo hàm cấp k của f tại a.

Định lý trên gợi cho ta thành lập một chuỗi lũy thừa từ một hàm f cho trước và ta sẽ khảo sát sự hội tụ của chuỗi này.

- Giả sử f là hàm số có đạo hàm mọi cấp trên một khoảng nào đó chứa điểm a. Người ta định nghĩa *chuỗi Taylor* của f xung quanh điểm a (hoặc tại a) là chuỗi lũy thừa sau đây

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

  Nếu $a = 0$ thì chuỗi Taylor được đổi tên thành *chuỗi Mac-Laurin*.

- *Đa thức Taylor* bậc n của f xung quanh a là tổng riêng phần của chuỗi Taylor nói trên, nghĩa là đa thức

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{\mathrm{n}} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Định lý 5.5 (Khai triển Taylor với dư số Lagrange)**.** *Giả sử hàm f có đạo hàm đến cấp $n+1$ liên tục trong một khoảng $(a-R, a+R)$. Khi đó,*

1. *Với mỗi số $x \in (a-R, a+R)$ cho trước, luôn tồn tại số ξ nằm giữa a và x sao cho*
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ với } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{5.4}$$
T_n là đa thức Taylor bậc n của f xung quanh điểm a như đã nói ở trên. Biểu thức $R_n(x)$ được gọi là dư số Lagrange.

2. *Giả sử có hằng số $M > 0$ sao cho với mọi cấp k và với mọi $x \in (a-R, a+R)$, $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M$. Khi đó, chuỗi Taylor xung quanh a của f hội tụ về f trên khoảng $(a-R, a+R)$.*

Bài tập

1. a) Tìm các đa thức Taylor đến bậc 6 của $f = \cos$ tại $a = 0$.
b) Tính giá trị f và những đa thức này tại $x = \pi/4, \pi/2, \pi$.
c) Có nhận xét gì về giá trị của các đa thức so với f?

2. a) Tìm các đa thức Taylor đến bậc 3 của $f(x) = 1/x$ tại $a = 1$.
b) Tính giá trị f và những đa thức này tại $0,9$ và $1,3$.
c) Có nhận xét gì về giá trị của các đa thức so với f?

3-10 Tìm đa thức Taylor $T_3(x)$ cho hàm f tại a.

3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$

4. $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$

5. $f(x) = \cos x \quad a = \pi/2$

6. $f(x) = e^{-x}\sin x, \quad a = 0$

7. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

8. $f(x) = x\cos x, \quad a = 0$

9. $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$

10. $f(x) = \arctan x, \quad a = 1$

11-12 Sử dụng CAS để tìm đa thức Taylor T_n tại a, bậc $n = 2, 3, 4, 5$. Vẽ đồ thị những đa thức này và f trên cùng mặt phẳng tọa độ.

11. $f(x) = \cot x, \quad a = \pi/4$

12. $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}, \quad a = 0$

13-22 a) Xấp xỉ f bằng đa thức Taylor bậc n tại a.
b) Sử dụng dư số Lagrange để đánh giá độ chính xác của phép xấp xỉ $f(x) \approx T_n(x)$ khi x nằm trong đoạn cho trước.
c) Kiểm tra kết quả phần (b) bằng đồ thị của $|R_n(x)|$ (dùng CAS).

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \le x \le 4.2$

14. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0.9 \le x \le 1.1$

15. $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.8 \le x \le 1.2$

16. $f(x) = \sin x, \quad a = \pi/6, \quad n = 4, \quad 0 \le x \le \pi/3$

17. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad -0.2 \le x \le 0.2$

18. $f(x) = \ln(1+2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \le x \le 1.5$

19. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \le x \le 0.1$

20. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \le x \le 1.5$

21. $f(x) = x \sin x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \le x \le 1$

22. $f(x) = \sinh(2x), \quad a = 0, \quad n = 5, \quad -1 \le x \le 1$

---

23. Sử dụng kết quả của Bài tập 5 để ước lượng $\cos 80^\circ$ chính xác đến 5 chữ số thập phân.

24. Sử dụng kết quả của Bài tập 16 để ước lượng $\cos 38^\circ$ chính xác đến 5 chữ số thập phân.

25. Sử dụng dư số Lagrange để xác định số số hạng của chuỗi Maclaurin của e^x dùng để xấp xỉ $e^{0,1}$ với biên độ chính xác $0,00001$.

26. Cần bao nhiêu số hạng của chuỗi Maclaurin của $\ln(1+x)$ để xấp xỉ $\ln 1,4$ với biên độ chính xác là $0,001$?

27-29 Dùng dư số Lagrange, hoặc đánh giá dư số chuỗi đan dấu (xem phụ lục về chuỗi đan dấu) để ước lượng miền giá trị của x cho các xấp xỉ có độ chính xác theo yêu cầu.

27. $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}, \quad |\text{sai số}| < 0,01$

28. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}, \quad |\text{sai số}| < 0,005$

29. $\arctan x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}, \quad |\text{sai số}| < 0,05$

---

30. Giả sử ta biết

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

và chuỗi Taylor của f xung quanh 4 hội tụ về $f(x)$ với mọi x trong khoảng hội tụ. Chứng minh rằng đa thức Taylor cấp 5 xấp xỉ $f(5)$ với sai số bé hơn $0,0002$.

31. Một xe hơi di chuyển với tốc độ 20 m/s và gia tốc 2 m/s^2 tại một thời điểm cho trước. Dùng đa thức Taylor cấp 2 để ước lượng quãng đường xe hơi di chuyển trong giây tiếp theo. Có hợp lý khi dùng xấp xỉ này để ước lượng khoảng cách di chuyển trong suốt phút tiếp theo?

---

32. Tìm khai triển Mac-Laurin, chỉ ra bán kính hội tụ, cho các hàm số sau

a) $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

b) $x \mapsto \ln(1+x)$

c) arctan

d) $x \mapsto e^x$

e) sin

f) cos

g) $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Phụ lục A

Bài tập làm thêm liên quan đạo hàm

A.1 Kỹ năng tính đạo hàm

Sau đây là bảng công thức đạo hàm của một số hàm sơ cấp

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C = 0,\ C$ là hằng số
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\alpha}\right) = \alpha x^{\alpha-1}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x}\right) = e^{x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^{x}\right) = a^{x}\ln a$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln x\right) = \dfrac{1}{x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\log_a x\right) = \dfrac{1}{x\ln a}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin x\right) = \cos x$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos x\right) = -\sin x$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arcsin x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arccos x\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tan x\right) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cot x\right) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan x\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $None$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u^{\alpha}\right) = \alpha u^{\alpha-1}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{u}\right) = e^{u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^{u}\right) = \left(a^{u}\ln a\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln u\right) = \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\log_a u\right) = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin u\right) = \cos u\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos u\right) = -\sin u\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arcsin u\right) = \dfrac{1}{1-u^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arccos u\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tan u\right) = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cot u\right) = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan u\right) = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

Bài tập

1. Dựa vào các quy tắc

$$(k\cdot u)' = k\cdot u' \ (k \text{ là hằng số});\quad (u\pm v)' = u' + v';\quad (u\cdot v)' = u'v + uv'$$

và dựa vào công thức, hãy tính đạo hàm của y theo x.

a) $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$
b) $y = (x^3 - 2)(1 - x^2)$
c) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$
d) $y = (x^2 + 3x)(2 - x)$
e) $y = x^n\sqrt{x}$
f) $y = x^n \sin x$
g) $y = x^7 \tan x$
h) $y = x \cot x$
i) $y = x \cos x$
j) $\sin x \cdot \sqrt{x}$
k) $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$
l) $y = \sqrt{x} \cdot \tan x$
m) $y = \sqrt{x} \cdot \cot x$
n) $y = \sin x \cdot \tan x$
o) $y = \sin x \cdot \cos x$
p) $y = 3 \cos x \cdot \cot x$
q) $y = (x^3 - x + 1)\sqrt{x}$
r) $y = (x^2 - \sqrt{x}) \sin x$

2-38 Dựa vào quy tắc

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

và dựa vào công thức, hãy tính đạo hàm của y theo x.

2. $y = \frac{1}{x}$
3. $y = \frac{3}{2x + 1}$
4. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $y = \frac{-3}{x^5}$
6. $y = \frac{1}{\sin x}$
7. $y = \frac{5}{\cos x}$
8. $y = \frac{2x + 1}{1 - 3x}$
9. $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$
10. $y = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x - 3}$
11. $y = \frac{x^9}{\sin x}$
12. $y = \frac{x^3}{\cos x}$
13. $y = \frac{x^n}{\tan x}$
14. $y = \frac{x^6}{\cot x}$
15. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin x}$
16. $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$
17. $y = \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$
18. $y = \frac{\sqrt{x}}{\cot x}$
19. $y = \frac{\sin x}{x}$
20. $y = \frac{x}{\cos x}$
21. $y = \frac{\tan x}{x}$
22. $y = \frac{\sin x}{\cot x}$
23. $y = \frac{\tan x}{\cos x}$
24. $y = (\sqrt{x} + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

25. $y = \dfrac{\sqrt{x} - \sin x}{x^7}$

26. $y = \dfrac{5x^2 - \sqrt{x}}{\cos x}$

27. $y = \dfrac{\cos x - 3\sin x}{x^3}$

28. $y = \dfrac{\tan x - \cot x}{\sqrt{x}}$

29. $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{\cos x}$

30. $y = \dfrac{x^3 \sin x}{\cot x}$

31. $y = \dfrac{\tan x}{\sqrt{x} \cdot \cos x}$

32. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 5x^2 \sin x}$

33. $y = \dfrac{3}{x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}}$

34. $y = \dfrac{2x - 7}{3\sqrt{x} + x^3}$

35. $y = (\dfrac{1}{x} + \sqrt{x}) \cos x$

36. $y = (\dfrac{1}{x} - \tan x)\sqrt{x}$

37. $y = (\cos x + \dfrac{1}{x^2})\sqrt{x}$

38. $y = (\cot x - \dfrac{1}{x^3})\sqrt{x}$

39-62 Dựa theo quy tắc của đạo hàm hàm hợp (quy tắc móc xích)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

hãy tính đạo hàm $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ của

39. $y = (x - 2)^3$

40. $y = (x^2 + x + 1)^4$

41. $y = (1 - 2x^2)^5$

42. $y = \sin^5 x$

43. $y = (\sqrt{x})^7$

44. $y = \left(1 + \sqrt{1 - 2x}\right)^3$

45. $y = \cos^4 x$

46. $y = \tan^3 x$

47. $y = \cot^7 x$

48. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

49. $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

50. $y = \sqrt{\sin x}$

51. $y = \sqrt{\cos x}$

52. $y = \sqrt{\tan x}$

53. $y = \sqrt{\cot x}$

54. $y = \sqrt{(x^2 + 1)\sin x}$

55. $y = \sin(x^2)$

56. $y = \sin(1 + 3\sqrt{x})$

57. $y = \sin(x^3 - 2\sqrt{x})$

58. $y = \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

59. $y = \cos\left(\dfrac{1}{x^7}\right)$

60. $y = \tan\left(\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}\right)$

61. $y = \tan(x^2\sqrt{x})$

62. $y = \tan\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}\right)$

A.2 Các bài toán tối ưu hóa

Trong mục này, kiến thức về sự liên hệ giữa đạo hàm với tính đơn điệu (tăng, giảm), với cực trị v.v.. được kế thừa từ phổ thông.

2-2 .

1.

2.

A.3 Tính lồi, lõm của hàm số

2-2 ......

1.

2.

A.4 Quy tắc L'Hospital để tính giới hạn

Nhắc lại kiến thức.

Định lý A.1 (Quy tắc L'Hospital)**.** *Cho hai hàm số f và g thỏa*

1. *Khả vi trong khoảng* (a, b)
2. $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$
3. *Xảy ra một trong hai trường hợp:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$*; hoặc* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
4. *Tồn tại* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *hữu hạn hay vô hạn.*

Khi đó $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Chú ý. Trong định lý trên, các thiết về giới hạn với "$x \to a$" có thể thay bởi "$x \to b$". Hơn nữa a có thể là $-\infty$, và b có thể là ∞.

Bài tập

1. Cho trước

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 1 \qquad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} p(x) = \infty$$

Các giới hạn nào sau đây là dạng vô định? Đối với giới hạn không thuộc dạng vô định, hãy tìm giới hạn nếu có thể.

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

f) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)p(x)]$

g) $\lim\limits_{x\to a} [h(x)p(x)]$

h) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)q(x)]$

i) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-p(x)]$

j) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)-q(x)]$

k) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)+q(x)]$

l) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$

m) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$

n) $\lim\limits_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

o) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$

p) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$

q) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{1/q(x)}$

2. Sử dụng quy tắc Lô-pi-tan, hãy tính các giới hạn sau.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a-1}{x^b-1}$

b) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)+} \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\tan 5x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x^3}$

e) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{3t}-1}{t}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan px}{\tan qx}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\ln x}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\sin \pi x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x-\tan x}$

n) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{5^t-3^t}{t}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x-x}{x^3}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

q) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$

t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arctan 4x}$

u) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x}$

v) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a-ax+a-1}{(x-1)^2}$

w) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$

y) $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$

3. Sử dụng quy tắc Lô-pi-tan, tính các giới hạn sau.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin(\pi/x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$

c) $\lim\limits_{x\to0} \cot 2x\cdot\sin 6x$

d) $\lim\limits_{x\to0} \sin x\cdot\ln x$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to1^+} \ln x\cdot\tan(\pi x/2)$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan(1/x)$

h) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to0} \left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\ln x)$

k) $\lim\limits_{x\to\infty} (xe^{1/x}-x)$

l) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to0^+} (\tan 2x)^x$

n) $\lim\limits_{x\to0} (1-2x)^{1/x}$

o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)^x$

q) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{(\ln 2)/(1+\ln x)}$

r) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x+x)^{1/x}$

s) $\lim\limits_{x\to0^+} (4x+1)^{\cot x}$

t) $\lim\limits_{x\to1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$

u) $\lim\limits_{x\to0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

v) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

Phụ lục B

Bài tập làm thêm liên quan tích phân

B.1 Ôn lại kỹ năng tính tích phân

B.1.1 Tính tích phân thông qua nguyên hàm

Nhắc lại kiến thức. Sau đây là nguyên hàm của vài hàm sơ cấp cơ bản

- $\displaystyle\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$
- $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
- $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \cot x + C$
- $\displaystyle\int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$
- $\displaystyle\int \csc x \cot x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$
- $\displaystyle\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$
- $\displaystyle\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$

Chú thích. Trong các công thức trên, có bốn hàm sơ cấp ít quen thuộc ở bậc phổ thông, đó là $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ (đọc là secant x, hoặc vắn tắt là sec x); $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ (đọc là co-secant x, hoặc co-sec x); $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ (đọc là sin-hyperbolic x, là hàm lẻ); $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ (đọc là cosine-hyperbolic, là hàm chẵn).

Từ định lý cơ bản của giải tích, nếu f liên tục thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad (F \text{ là nguyên hàm bất kỳ của } f)}$$

Ngoài ra,

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}dx$$
$$\int \big[f(x) + g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Bài tập

1-24 Hãy tính các tích phân sau bằng cách tìm nguyên hàm.

1. $\displaystyle\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x - e^x)\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_{-2}^0 (u^5 - u^3 + u^2)\,\mathrm{d}u$

5. $\displaystyle\int_{-2}^2 (3u + 1)\,\mathrm{d}u$

6. $\displaystyle\int_0^4 (2v + 5)(3v - 1)\,\mathrm{d}v$

7. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{t}(t + 1)\,\mathrm{d}t$

8. $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{2t}\,\mathrm{d}t$

9. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(4y^3 + \frac{2}{y^3}\right)\mathrm{d}y$

10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{y + 5y^7}{y^3}\,\mathrm{d}y$

11. $\displaystyle\int_0^1 x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})\,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int_0^5 (2e^x + 4\cos x)\,\mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{5}{x}}\,\mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int_1^9 \frac{3x - 2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int_0^\pi (4\sin x - 3\cos x)\,\mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec x \tan x\,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos^x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x + \sin x \tan^2 x}{\sec^2 x}\,\mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\sinh x + \cosh x}\,\mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int_0^{1\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1}{t^4 - 1}\,\mathrm{d}t$

22. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x - 1)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$

23. $\displaystyle\int_{-1}^2 \big(x - 2|x|\big)\,\mathrm{d}x$

24. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |\sin x|\,\mathrm{d}x$

B.1.2 Đổi biến trong tích phân

Định lý B.1 (công thức đổi biến tích phân).

▪ *Nếu $u = g(x)$ là hàm số khả vi với miền giá trị của g nằm trong một khoảng I; và f liên tục trên I thì*

$$\boxed{\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)\,du}$$

▪ *Nếu $g'(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và f liên tục trên miền giá trị của $u = g(x)$ thì*

$$\boxed{\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du}$$

Bằng cách đổi biến $u = \cos x$, ta tìm được nguyên hàm của $\tan x$ như một công thức

$$\boxed{\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C = -\ln|\cos x| + C}$$

Tương tự, đổi biến $u = \sin x$, ta có công thức

$$\boxed{\int \cot x\,dx = -\ln|\csc x| + C = \ln|\sin x| + C}$$

1–6 Evaluate the integral by making the given substitution.

1. $\int e^{-x}\,dx, \quad u = -x$

2. $\int x^3(2 + x^4)^5\,dx, \quad u = 2 + x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \dfrac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \sin\theta\,d\theta, \quad u = \cos\theta$

6. $\int \dfrac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx, \quad u = 1/x$

7–46 Evaluate the indefinite integral.

7. $\int x \sin(x^2)\, dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\, dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\, dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4}\, dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\, dx$

12. $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int e^x \sin(e^x)\, dx$

15. $\int \sin \pi t\, dt$

16. $\int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx$

17. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\, dx$

18. $\int \sec 2\theta \tan 2\theta\, d\theta$

$\boxed{19.}$ $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

20. $\int \frac{dx}{ax+b} \quad (a \neq 0)$

$\boxed{21.}$ $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\int \sqrt{x}\,\sin(1+x^{3/2})\,dx$

23. $\int \cos\theta\,\sin^6\theta\,d\theta$

24. $\int (1+\tan\theta)^5\sec^2\theta\,d\theta$

$\boxed{25.}$ $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

26. $\int e^{\cos t}\sin t\,dt$

27. $\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}}\,dz$

28. $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

29. $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

30. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

32. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$\boxed{33.}$ $\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$

34. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

36. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

37. $\int \cot x\,dx$

38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan t}}$

39. $\int \sec^3 x\tan x\,dx$

40. $\int \sin t\sec^2(\cos t)\,dt$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x}$

42. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

$\boxed{43.}$ $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$

45. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

46. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

51–70 Evaluate the definite integral.

51. $\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

52. $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

53. $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$

54. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

55. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\,dt$

56. $\int_{1/6}^{1/2} \csc \pi t \cot \pi t\,dt$

57. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \tan^3\theta\,d\theta$

58. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

59. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\sin x}{1+x^6}\,dx$

61. $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x)\,dx$

63. $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx \quad (a>0)$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

65. $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

66. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

67. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

68. $\int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

70. $\int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T-\alpha)\,dt$

B.1.3 Tích phân từng phần

Nhắc lại kiến thức. Với hai hàm số khả vi f và g, ta có công thức *nguyên hàm từng phần* như sau

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x}$$

hoặc nếu đặt $u=f(x),\ v=g(x)$ thì dạng trên trở thành

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u}$$

1–2 Evaluate the integral using integration by parts with the indicated choices of u and dv.

1. $\int x^2 \ln x \, dx; \quad u = \ln x, \ dv = x^2 \, dx$

2. $\int \theta \cos \theta \, d\theta; \quad u = \theta, \ dv = \cos \theta \, d\theta$

3–32 Evaluate the integral.

3. $\int x \cos 5x \, dx$

4. $\int xe^{-x} \, dx$

5. $\int re^{r/2} \, dr$

6. $\int t \sin 2t \, dt$

7. $\int x^2 \sin \pi x \, dx$

8. $\int x^2 \cos mx \, dx$

9. $\int \ln(2x + 1) \, dx$

10. $\int \sin^{-1} x \, dx$

15. $\int (\ln x)^2 \, dx$

16. $\int t \sinh mt \, dt$

17. $\int e^{2\theta} \sin 3\theta \, d\theta$

18. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta \, d\theta$

19. $\int_0^{\pi} t \sin 3t \, dt$

20. $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x} \, dx$

21. $\int_0^1 t \cosh t \, dt$

22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}} \, dy$

23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

24. $\int_0^{\pi} x^3 \cos x \, dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$

26. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

28. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

29. $\displaystyle\int \cos x \ln(\sin x)\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

31. $\displaystyle\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^t e^s \sin(t-s)\,ds$

33–38 First make a substitution and then use integration by parts to evaluate the integral.

33. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$

34. $\displaystyle\int t^3 e^{-t^2}\,dt$

$\boxed{35.}$ $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3\cos(\theta^2)\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t}\sin 2t\,dt$

37. $\displaystyle\int x\ln(1+x)\,dx$

38. $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$

47–50 Use integration by parts to prove the reduction formula.

$\boxed{47.}$ $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

48. $\displaystyle\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

49. $\displaystyle\tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

50. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x\sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

B.2 Ứng dụng của tích phân trong các ngành khoa học khác

...

...

Phụ lục C

Bài tập làm thêm liên quan chuỗi số

C.1 Các tiêu chuẩn khảo sát chuỗi dương

C.1.1 Tiêu chuẩn tích phân

Nhắc lại kiến thức. Ta có dấu hiệu sau đây để biết sự hội tụ của một chuỗi dương, đồng thời xấp xỉ tổng của chuỗi này.

Tiêu chuẩn tích phân và xấp xỉ tổng chuỗi.

Giả sử f là một hàm số liên tục, dương, giảm trên $[a, \infty)$. Khi đó

1. Chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ hội tụ khi và chỉ khi tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.

2. Trong trường hợp chuỗi $\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ hội tụ về tổng s, ta có

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \le s \le s_n + \int_n^{\infty} f(x)\mathrm{d}x, \tag{C.1}$$

   trong đó $s_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = f(n_0) + f(n_0+1) + f(n_0+2) + \cdots + f(n)$ là tổng riêng phần của chuỗi.

Kết quả về chuỗi Dirichlet được suy từ tiêu chuẩn tích phân ở trên. Bất đẳng thức (C.1) cho phép ta xấp xỉ

$$s \approx s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x, \tag{C.2}$$

nghĩa là xấp xỉ s bởi trung bình cộng của hai đầu mút của đoạn chứa s trong (C.1), thì sai số không vượt quá một nửa độ dài đoạn đó,

$$|\text{sai số}| \le \frac{1}{2}\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x.$$

Bài tập

1. Dùng tiêu chuẩn tích phân, khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

2. Tìm điều kiện của p để các chuỗi sau hội tụ

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

d) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)[\ln(\ln n)]^p}$

3. Tìm tất cả giá trị dương của b để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ hội tụ.

4. Tìm tất cả giá trị dương của c để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ hội tụ.

---

5. Chuỗi Dirichlet $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ đã biết hội tụ. Vậy hãy xấp xỉ tổng chuỗi này với sai số không quá $0,00001$.

6. Tìm tổng của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ chính xác đến ba chữ số thập phân.

7. Tìm tổng của chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$ chính xác đến năm chữ số thập phân.

8. Hãy xấp xỉ tổng chuỗi $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ với sai số không quá $0,01$.

C.1.2 Tiêu chuẩn so sánh

Nhắc lại kiến thức. Sau đây là hai tiêu chuẩn so sánh các chuỗi dương

Tiêu chuẩn so sánh dạng bất đẳng thức.

Cho hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ thỏa: $\forall n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq b_n$.

1. Nếu chuỗi (lớn) $\sum b_n$ hội tụ thì chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ hội tụ.
2. Nếu chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ phân kỳ thì chuỗi (lớn) $\sum b_n$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn so sánh dạng lim.

Giả sử hai chuỗi $\sum a_n, \sum b_n$ thỏa điều kiện $\forall n \geq n_0, a_n \geq 0,\ b_n > 0$, đồng thời

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

1. Nếu K là số thực dương thì hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
2. Nếu $K = 0$ ($\sum a_n$ "giống chuỗi nhỏ") và chuỗi $\sum b_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ.
3. Nếu $K = \infty$ ($\sum a_n$ "giống chuỗi lớn") và chuỗi $\sum a_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum b_n$ hội tụ.

Chú ý. Người ta hay dùng hai tiêu chuẩn trên để so sánh các chuỗi dương với chuỗi Dirichlet hoặc chuỗi hình học.

Bài tập

1. Dùng các tiêu chuẩn so sánh, dạng lim hay bất đẳng thức, hãy khảo sát sự hội tụ của các chuỗi dương sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-4}{n^2-2n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+13}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n^3}.$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1}$

k) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

2. Tìm điều kiện của p để chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ hội tụ.

C.2 Các tiêu chuẩn khảo sát chuỗi có dấu bất kỳ

C.2.1 Chuỗi đan dấu

Nhắc lại kiến thức.

- Cho dãy số (a_n) sao cho $\forall n, a_n \geq 0$. Khi đó chuỗi $\sum(-1)^n a_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} a_n$ được gọi là chuỗi đan dấu, vì các số hạng tổng quát được sắp theo thứ tự âm dương xen kẽ.
- Chuỗi đan dấu $\sum(-1)^n a_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} a_n$ ($\forall n, a_n > 0$) được gọi là chuỗi Leibnitz, nếu:
  1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
  2. Dãy (a_n) là dãy (dương) giảm.

Định lý (Leibnitz).

- Chuỗi Leibnitz hội tụ và có tổng s thỏa $|s| \leq a$, trong đó a là giá trị tuyệt đối của số hạng đầu tiên.
- Giả sử $\sum(-1)^n a_n$ hay $\sum(-1)^{n-1} a_n$ là chuỗi Leibnitz ($\forall n, a_n > 0$), có tổng s và các tổng riêng phần là s_n. Khi đó, sai số trong phép xấp xỉ $s \approx s_n$ được đánh giá bởi bất đẳng thức
$$|s - s_n| \leq a_{n+1}.$$

Bài tập

1-20 Kiểm tra sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$

2. $\displaystyle\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \cdots$

3. $\displaystyle-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots$

4. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\arctan n$

15. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{1+\sqrt{n}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi}{2^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\frac{\pi}{n})$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(\frac{\pi}{n})$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

21-24 Chứng minh chuỗi hội tụ. Ta cần cộng bao nhiêu số hạng của chuỗi để xấp xỉ tổng chuỗi với sai số theo yêu cầu.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$, $|\text{sai số}| < 0,00005$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n5^n}$, $|\text{sai số}| < 0,0001$

23. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n n!}$, $|\text{sai số}| < 0,000005$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{-n}$, $|\text{sai số}| < 0,01$

25-25 Xấp xỉ tổng của chuỗi đúng đến 4 chữ số thập phân.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{10^n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$

C.2.2 Chuỗi có dấu bất kỳ

Nhắc lại kiến thức.

- Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ.
- Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là *hội tụ có điều kiện* khi chuỗi này hội tụ, nhưng không hội tụ tuyệt đối.
- **Định lý.** Nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ (hội tụ tuyệt đối kéo theo hội tụ).

Định lý (Tiêu chuẩn tỉ số d'Alembert).

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.
3. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ thì, nói chung, ta không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum a_n$.

Định lý (Tiêu chuẩn căn số Cauchy).

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.
3. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ thì, nói chung, ta không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum a_n$.

Bài tập

1-27 Xác định xem chuỗi hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện, hay phân kỳ?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^5}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+4}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1.1)^n}{n^4}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n}{4^n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(-10)^{n+1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\arctan n}{n^2}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-\cos n}{n^{2/3}-2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi/3}{n!}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

21. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}100^n}{n!}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}$

26. $1-\frac{1.3}{3!}+\frac{1.3.5}{5!}-\frac{1.3.5.7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5.7.\cdots.(2n-1)}{(2n-1)!}+\cdots$

27. $\frac{2}{5}+\frac{2.6}{5.8}+\frac{2.6.10}{5.8.11}+\frac{2.6.10.14}{5.8.11.14}+\cdots$

28-57 Kiểm tra sự hội tụ và phân kỳ của các chuỗi sau

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{(k+2)!}$

36. $\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-k}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{3^n}\right)$

39. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^2}{n!}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{1+2^n}$

42. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}3^{k+1}}{k^k}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$

45. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

47. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{k}-1}{k(\sqrt{k}+1)}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(1/n^2)$

49. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2+\sin k}$

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\tan(1/n)$

51. $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin(1/n)$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^{n^2}}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n}$

54. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\ln k}{(k+1)^3}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cosh n}$

57. $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{\sqrt{j}}{j+5}$

C.3 Chuỗi Fourier