# Automata và Ngôn ngữ hình thức - Weekly Exercise 1

## Giảng viên hướng dẫn: Phạm Trọng Nghĩa, Lê Ngọc Thành

Sinh viên thực hiện:

| MSSV | Họ tên | Email |
| --- | --- | --- |
| 21127329 | Châu Tấn Kiệt | ctkiet212@clc.fitus.edu.vn |


**1. Gọi $A_i$ = {1,2,3,..,i}, $i \in Z^+$. Tìm:**

a) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_n =$ {1,2,3,..,n}

b) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = A_1 = 1$

**2. Tìm $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ với mỗi số dương i:**

Ta có: $i \in Z^+$

a) $A_i = \{-i, -i+1, -i+2, ..., -1, 0, 1, ..., i-1, i\}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = Z$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = \{-1, 0, 1\}$

b) $A_i = \{-i, i\}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{-1, 1\} \cup \{-2, 2\} \cup ... \cup \{-i, i\} = Z \setminus \{0\}$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{-1, 1\} \cap \{-2, 2\} \cap ... \cap \{-i, i\} = \varnothing$

c) $A_i = [-i, i]$ là tập của các số thực $r$ thỏa $-i \leq r \leq i$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [-1, 1] \cup [-2, 2] \cup ... \cup [-i, i] = R$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [-1, 1] \cap [-2, 2] \cap ... \cap [-i, i] = A_1 = [-1, 1]$

**3. Giả sử A và B là 2 tập con của tập vũ trụ U. Những khả năng nào có thể xảy ra? Giải thích?**

a) $2^{(A \cup B)} = 2^A \cup 2^B (i)$

$2^{(A \cup B)} \subset 2^A \cup 2^B (ii)$

$2^{(A \cup B)} \supset 2^A \cup 2^B (iii)$

$2^{(A \cup B)}$ bao gồm tất cả tập con của $(A \cup B)$. $2^A \cup 2^B$ gồm những phần tử tồn tại hoặc ở A hoặc ở B. Vậy trường hợp (i) đúng chỉ khi $A \subseteq B$ hoặc $B \subseteq A$ hoặc $A = B$. Trường hợp (iii) đúng với mọi A,B và (ii) sai

b) $2^{(A \cap B)} = 2^A \cap 2^B (i)$

$2^{(A \cap B)} \subset 2^A \cap 2^B (ii)$

$2^{(A \cap B)} \supset 2^A \cap 2^B (iii)$

$2^{(A \cap B)}$ bao gồm tất cả tập con của $(A \cap B)$. $2^A \cap 2^B$ chỉ gồm những phần tử tồn tại ở cả A hoặc ở B. Vậy trường hợp (i) đúng chỉ khi $A \subseteq B$ hoặc $B \subseteq A$ hoặc $A \cap B = \varnothing$. Trường hợp (ii) và (iii) luôn sai vì cần thỏa điều kiện của (i)

**5. Sử dụng quy nạp toán học, chứng minh rằng $\forall n \in N$**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Gọi $S(n)$ là phát biểu:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Bước cơ sở: Đặt $n_0 = 1$, ta có $S(n_0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (đúng)
Bước quy nạp:

$$S(n+1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Vậy $S(n+1)$ đúng -> $S(n)$ đúng

**6. Sử dụng quy nạp toán học, chứng minh rằng** $\forall n \in Z^+$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3^i} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

Gọi $S(n)$ là phát biểu:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3^i} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

Bước cơ sở: Đặt $n_0 = 1$, ta có $S(n_0) = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ (đúng)

Bước quy nạp:

$$S(n+1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}} = 1 - \frac{3}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} = 1 - \frac{1}{3^{n+1}}$$

Vậy $S(n+1)$ đúng -> $S(n)$ đúng

**7. Sử dụng quy nạp toán học, chứng minh rằng** $\forall n \in Z^+$

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Gọi $S(n)$ là phát biểu:

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Bước cơ sở: Đặt $n_0 = 1$, ta có $S(n_0) = 2 = 2$ (đúng)

Bước quy nạp:

$$S(n+1) = \sum_{i=1}^{n} i2^i + n2^{n+2} + 2 = (n-1)2^{n+1} + (n+1).2^{n+1} + 2 = 2n.2^{n+1} + 2 = n.2^{n+2} + 2$$

Vậy $S(n+1)$ đúng -> $S(n)$ đúng

**8. Sử dụng quy nạp toán học, chứng minh rằng $2^n > n^3$ khi $n$ là số nguyên lớn hơn 9**

Gọi $S(n)$ là phát biểu: $2^n > n^3$ khi $n$ là số nguyên lớn hơn 9
Bước cơ sở: Đặt $n_0 = 10$, ta có $S(n_0) = 1024 > 1000$ (đúng)

Bước quy nạp:

$$S(n+1) = 2^{n+1} \geq 2n^3 = n^3 + n^3 = n^3 + n.n^2 = n^3 + 10n^2 = n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 4n^2 \geq (n+1)^3$$

Vậy $S(n+1)$ đúng -> $S(n)$ đúng

**9. Với những số tự nhiên n nào thì $2n + 3 \leq 2^n$**

Gọi $S(n)$ là phát biểu: $2n + 3 \leq 2^n$
Bước cơ sở: Đặt $n_0 = 4$, ta có 11 < 16 (đúng)
Bước quy nạp:

$$S(n+1) = 2(n+1) + 3 < 2^{n+1} = 2n + 3 + 2 < 2^n + 2^n$$

Có: $2 < 2^n$ với $n = 4$. Vậy $S(n+1)$ đúng -> $S(n)$ đúng.
Kết luận: Với $n \geq 4$ thì $2^n > n^3$

12. **Gọi $\mathcal{L} = \{w \in \{a,b\}^* : |w| \equiv_3 0\}$. Liệt kê 10 chuỗi đầu tiên theo thứ tự chuẩn tắc của ngôn ngữ $\mathcal{L}$**

Tập các chuỗi $w \in \{a,b\}^*$ và $|w|$ chia hết cho 3 gồm:
$\{\epsilon, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, aaaaaa\}$

13. **Cho bảng chữ cái $\Sigma = \{a,b\}$. Hãy đưa ra lời mô tả ngắn gọn cho mỗi ngôn ngữ $\mathcal{L}$ sau:**

a) $\mathcal{L}$ là ngôn ngữ gồm các chuỗi $w$ có đặc điểm chỉ chứa duy nhất một tiền tố kết thúc bằng ký tự $a$
-> Có thể hiểu là các chuỗi $w$ này chỉ có 1 ký tự $a$:
-> $\mathcal{L} = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 1\}$

b) $\mathcal{L}$ là ngôn ngữ gồm các chuỗi $w$ có đặc điểm mọi tiền tố khác rỗng của nó đều kết thúc bằng ký tự $a$
-> Có thể hiểu là các chuỗi $w$ chứa toàn bộ là ký tự $a$
-> $\mathcal{L} = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|\}$

14. **Hãy cho biết mỗi phát biểu sau là đúng hay sai cùng lời giải thích ngắn gọn**

- Ở đây em chọn 5 câu: a,b,c,d,e

a) $\forall \mathcal{L} : (\mathcal{L}^+)^+ = \mathcal{L}^+$ : Đúng
Vì $(\mathcal{L}^+)^+ = (\mathcal{L}^1 \cup \mathcal{L}^2 \cup \mathcal{L}^3 \cup \ldots)^+ = \mathcal{L}^+$

b) $\forall \mathcal{L} : (\mathcal{L}^*)^+ = (\mathcal{L}^+)^*$ : Sai
Vì $(\mathcal{L}^*)^+$ không bao gồm chuỗi rỗng $\epsilon$
và $(\mathcal{L}^+)^*$ có bao gồm chuỗi rỗng $\epsilon$

c) $\forall \mathcal{L} : \mathcal{L}^* = \mathcal{L}^+ \cup \varnothing$: Sai
Vì $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^0 = \mathcal{L}^+ \cup \epsilon$ và $\epsilon \neq \varnothing$

d) $\forall \mathcal{L} : \mathcal{L}^*\mathcal{L} = \mathcal{L}^+$ : Sai
Vì tồn tại $\mathcal{L} = \{\epsilon\} \rightarrow \mathcal{L}^* \neq \mathcal{L}^+$

e) $\forall \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 : (\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2)^* = \mathcal{L}_1^*\mathcal{L}_2^*$
Vì $(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2)^* = \{s : s \in (\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2)^*\}$ và $\mathcal{L}_1^*\mathcal{L}_2^* = \{st : s \in \mathcal{L}_1^* \wedge t \in \mathcal{L}_2^*\}$