

---

## Mục lục

1 Cơ sở logic và chứng minh	3
Tài liệu tham khảo	15

Li Akê tự hỏi Toán học là gì

Li Akê tự hỏi Toán học là gì

## Cơ sở logic và chứng minh

*“Toán học thuần túy, theo cách của riêng nó, là thi ca của tư duy logic.” (Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.)*

— Albert Einstein

### MỆNH ĐỀ

#### Bài toán 1 Nhận diện mệnh đề

Khẳng định nào sau đây là một mệnh đề? Nếu là mệnh đề thì chân trị của cô ấy là đúng hay sai?

- |   |  |
|---|--|
| (a) Có mưa vào tháng 6.   | (j) Biểu diễn số 17 trong hệ nhị phân là 10001.                    |
| (b) Cô ấy là người tài năng.  | (k) Có ít nhất 5 thuật toán sắp xếp.                               |
| (c) Tp. Hồ Chí Minh là thủ đô của Việt Nam.                                     | (l) Mọi bài toán đều có một thuật toán giải với thời gian đa thức. |
| (d) Mọi việc đều tương đối.   | (m) $\sum_{n=1}^{100} n = 5050$ .                                  |
| (e) $6n + 1$ là số nguyên tố.   | (n) $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$ .                                      |
| (f) Mỗi mệnh đề chỉ có thể có chân trị đúng hoặc sai.                           | (o) Không có số tự nhiên lớn nhất.                                 |
| (g) $n^2 + n + 41$ là số nguyên tố.   | (p) Tất cả các số nguyên tố đều lẻ.                                |
| (h) $n^2 + n + 41$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên $n$ .                    | (q) 1 là số nguyên tố.   |
| (i) Tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2 + n + 41$ là số nguyên tố.          | (r) $0.999... = 1$ .   |
| (s) Mọi số tự nhiên chẵn lớn hơn 2 đều có thể viết thành tổng hai số nguyên tố. |  |

- (t) Sau khi thực hiện thực thi đoạn code C (có khai báo thư viện thích hợp) như bên dưới, giá trị của biến  $x$  bằng 1.

```
1  int x = 2000;
2  while (x > 2) {
3      x = x / 2;
4  }
```

### Bài toán 2 Biểu diễn mệnh đề bằng ngôn ngữ toán học

Viết lại các câu sau thành biểu thức logic (bằng đặt các mệnh đề thích hợp).

- Bình đang học Toán và Anh văn nhưng không học Tin học.
- Bình đang học Toán và Tin học nhưng không học cùng một lúc Tin học và Anh văn.
- Không đúng là Bình đang học Anh văn mà không học Toán.
- Không đúng là Bình đang học Anh văn hay Tin học mà không học Toán.
- Bình không học Tin học lẫn Anh văn nhưng đang học Toán.

### Bài toán 3

Cho  $P, Q, R$  là những mệnh đề:

$P$  : "Bạn bị cúm".

$Q$  : "Bạn thi trượt kỳ thi cuối khóa".

$R$  : "Bạn được lên lớp".

Hãy diễn đạt những mệnh đề theo ngôn ngữ thông thường.

- $P \rightarrow Q$ .
- $Q \rightarrow R$ .
- $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$ .
- $Q \leftrightarrow R$ .
- $P \vee Q \vee R$ .
- $(P \wedge Q) \vee (\bar{Q} \wedge R)$ .

### Bài toán 4

Cho biết chân trị của mệnh đề kéo theo sau đây.

- Nếu  $1 + 1 = 2$  thì  $1 + 2 = 3$ .
- Nếu  $3 + 4 = 12$  thì  $3 + 2 = 6$ .
- Nếu  $1 + 1 = 2$  thì  $1 + 2 = 4$ .

### Bài toán 5

Are these statements true or false? The universe of discourse is the set of all people, and  $P(x, y)$  means " $x$  is a parent of  $y$ ."

- $\exists x \forall y P(x, y)$ .
- $\forall x \exists y P(x, y)$ .
- $\neg \exists x \exists y P(x, y)$ .
- $\exists x \neg \exists y P(x, y)$ .
- $\exists x \exists y \neg P(x, y)$ .

### Bài toán 6

Hoàn thành bản sau bằng cách phát biểu mệnh đề phủ định.		
Ý nghĩa	Mệnh đề	Phủ định mệnh đề
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 <  x - a  < \delta \Rightarrow  f(x) - L  < \epsilon)$	
đơn ánh	$\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$	
toàn ánh	$\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$	
song ánh	$\forall y \in Y, \exists! x \in X, f(x) = y$	

### Bài toán 7

Hãy đưa ra phủ định cho các mệnh đề sau

Statement	When True?	When False?	Negation
$\forall x \forall y P(x, y)$			
$\forall y \forall x P(x, y)$			
$\forall x \exists y P(x, y)$			
$\exists x \forall y P(x, y)$			
$\exists x \exists y P(x, y)$			
$\exists y \exists x P(x, y)$			

### Bài toán 8

Viết dạng phủ định của  $A$  và xét chân trị của  $A$  ( xét trực tiếp  $A$  hay xét gián tiếp  $\bar{A}$  rồi suy ra  $A$  ).

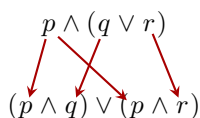
- a)  $A = "\forall n \in \mathbb{N}, 4 \mid n^2 \rightarrow 4 \mid n"$ .  
b)  $A = "\exists x \in \mathbb{R}, \sin x + 2x = 1"$  c)  $A = "\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 3 \sin y > 0"$ . d)  $A = "\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, (x^2 \geq y^2) \rightarrow (x \geq y)"$ .  
e)  $A = "\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Q}, 2^y + 2^{-y} \geq \sin x + 3"$ .  
f)  $A = "\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Q}, \forall t \in \mathbb{Z}, x \leq y^2 + 2t"$ .  
g)  $A = "\exists x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{N}, x^3 - 3y \neq 5t"$ .

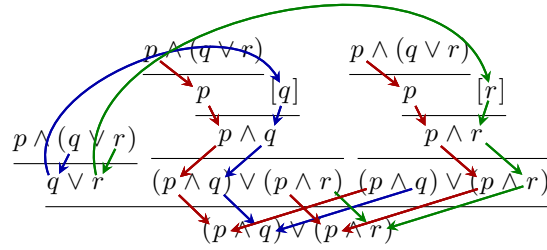
### Bài toán 9 Bảng chân trị của dạng mệnh đề

Lập bảng chân trị cho dạng mệnh đề.

- (a)  $(p \wedge q) \vee r$ . (d)  $(p \vee \neg q) \rightarrow q$ . (g)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ .  
(b)  $(p \vee q) \wedge \neg r$ . (e)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ . (h)  $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ .  
(c)  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$ . (f)  $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ . (i)  $(p \oplus q) \wedge (p \Leftrightarrow \neg q)$ .

$p$	$q$	$p \wedge q$
$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$





### Bài toán 10 Rút gọn mệnh đề

Cho các mệnh đề  $p$ ,  $q$  và  $r$ , hãy rút gọn dạng mệnh đề  $P$  bằng 2 cách: (i) dùng các luật của mệnh đề (de Morgan, distributive law, complement law, ...)

- |   |  |
|---|--|
| (a) $P = \neg \neg((p \wedge q) \vee r)$ .                  | (f) $\overline{p \vee q} \vee [(p \wedge q) \vee \bar{q}]$ .   |
| (b) $P = (\neg p \wedge \neg \neg r)$ .                     | (g) $p \vee q \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$ .  |
| (c) $P = \neg(p \wedge (\neg p \vee r))$ .                  | (h) $p \wedge (q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$ .   |
| (d) $P = (\neg p \wedge (p \vee (\neg q \wedge \neg p)))$ . | (i) $(p \rightarrow q) \wedge [\bar{q} \vee (\bar{q} \wedge r)]$ .   |
| (e) $[(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})] \vee q$ .         | (j) $\bar{p} \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \bar{s})$ . |

### Bài toán 11 Hằng đúng

Sử dụng bảng chân trị hoặc sự tương giữa các mệnh đề để chứng minh các mệnh đề kéo theo sau đây là hằng đúng hoặc là hằng sai.

- |  |  |
|--|--|
| (a) $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ .             | (e) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$                                     |
| (b) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ .                    | (f) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$ .                                     |
| (c) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ .               | (g) $[(p \rightarrow q) \wedge' q \rightarrow r] \rightarrow p \rightarrow r$ .      |
| (d) $p \rightarrow (q \wedge r) \Rightarrow p \rightarrow q$ . | (h) $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$ . |

### Bài toán 12

Kiểm tra các hằng đúng sau

- (a)  $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow r) \iff p \leftrightarrow (q \wedge r)$ .
- (b)  $(\bar{p} \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \bar{q}) \Rightarrow p \wedge q$ .
- (c)  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ .
- (d)  $(p \wedge q) \rightarrow r \Rightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ .

### Ví dụ (Hai dạng mệnh đề tương đương)

Cho các mệnh đề  $p$ ,  $q$  và  $r$  cùng các dạng mệnh đề  $L(p, q, r) = [(p \rightarrow q) \vee r] \rightarrow (\bar{q} \rightarrow r)$  và  $K(p, q, r) = \bar{q} \rightarrow (p \vee r)$ . Chứng minh rằng  $L(p, q, r) \iff K(p, q, r)$ .

**Chứng minh.**

Áp dụng luật về phép kéo theo,  $p \rightarrow q \iff \bar{p} \vee q$ , ta thu được

$$\begin{aligned} L(p, q, r) &\iff [(\bar{p} \vee q) \vee r] \rightarrow (\bar{q} \vee r) \iff \overline{(\bar{p} \vee (q \vee r))} \vee (q \vee r) \\ &\iff (p \wedge \overline{(q \vee r)}) \vee (q \vee r) \iff (p \vee (q \vee r)) \wedge ((q \vee r) \vee \overline{(q \vee r)}) \\ &\iff (p \vee (q \vee r)) \wedge 1 \iff q \vee p \vee r \iff \bar{q} \rightarrow (p \vee r) = K(p, q, r). \end{aligned}$$

Ở ta, ta sử dụng các luật: Luật phủ định của phủ định  $\bar{\bar{q}} \iff q$ ; Luật De Morgan  $\neg(p \vee q) \iff \bar{p} \wedge \bar{q}$ ; Luật phân phối  $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ .

### Bài toán 13

Xem xét các suy luận sau có đúng hay không? Vì sao?

$$(a) \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \bar{q} \\ \bar{r} \end{array}}{\therefore p \vee r}$$

$$(f) \frac{\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \rightarrow (r \wedge q) \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \bar{s} \end{array}}{\therefore t}$$

$$(b) \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \bar{q} \rightarrow \bar{p} \\ p \end{array}}{\therefore r}$$

$$(g) \frac{\begin{array}{l} p \\ \bar{p} \rightarrow q \\ (q \wedge r) \rightarrow s \\ t \rightarrow r \end{array}}{\therefore \bar{s} \rightarrow \bar{t}}$$

$$(c) \frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \bar{q} \vee r \\ \bar{r} \end{array}}{\therefore q}$$

$$(h) \frac{\begin{array}{l} q \\ t \rightarrow p \\ (p \wedge q) \rightarrow s \end{array}}{\therefore t \rightarrow s}$$

$$(d) \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow (p \vee s) \\ (t \rightarrow p) \rightarrow r \\ q \vee s \end{array}}{\therefore t}$$

$$(i) \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow \bar{q} \\ (p \wedge \bar{s}) \vee t \\ t \rightarrow q \end{array}}{\therefore \bar{s} \rightarrow t}$$

(e)

$$(j) \frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \bar{p} \\ \bar{q} \vee r \\ s \rightarrow \bar{r} \end{array}}{\therefore \bar{s}}$$

### Bài toán 14 Suy luận

Hãy kiểm tra xem các suy luận sau có đúng hay không.

- (a) Nếu An được lên chức và làm việc nhiều thì An sẽ được tăng lương.  
Nếu được tăng lương An sẽ mua xe mới.

Mà An không mua xe mới.

Vậy An không được lên chức hay An không làm việc nhiều.

- (b) Nếu muốn dự họp sáng thứ ba thì Minh phải dậy sớm.

Nếu Minh đi nghe nhạc tối thứ hai thì Minh sẽ về trễ. Nếu về trễ và thức dậy sớm thì Minh phải đi họp mà chỉ ngủ dưới 7 giờ.

Nhưng Minh không thể đi họp nếu chỉ ngủ dưới 7 giờ.

Do đó hoặc là Minh không đi nghe nhạc tối thứ hai hoặc là Minh phải bỏ họp sáng thứ ba.

- (c) Nếu Bình đi làm về muộn thì vợ anh ta sẽ rất giận dữ.

Nếu An thường xuyên vắng nhà thì vợ anh ta sẽ rất giận dữ.

Nếu vợ Bình hay vợ An giận dữ thì cô Hà bạn họ sẽ nhận được lời than phiền.

Mà Hà không nhận được lời than phiền.

Vậy Bình đi làm về sớm và An ít khi vắng nhà.

#### Bài toán 15

Triết học có câu “Nó là nó , mà nó không phải là nó, nhưng nó vẫn là chính nó”. Câu nói này vi phạm điều gì của logic?

#### Bài toán 16

Trong video [Đỉnh cao cả khía ngày Tết \(Kênh Thánh Dựng\)](#), các phi tần có các lập luận sau:

- (i) Người ta nói: ”đỏ tình thì đen bạc”. Vì phi tần A đang được hoàng thượng sủng ái nên sợ thua bạc.

- (ii) Hồng nhan thì bạc phận, chứ chưa chắc bạc phận thì là hồng nhan.

Hãy đưa ra cơ sở lập luận hoặc chỉ ra sai lầm (về logic) trong lập luận.

#### Bài toán 17

Cho biết suy luận nào trong các suy luận dưới đây là đúng và quy tắc suy luận nào đã được sử dụng?

- (a) Điều kiện đủ để Bình Dương thắng trận là đối thủ dừng gõ lại vào phút cuối.

Mà CSG đã thắng trận. Vậy đối thủ Bình Dương không gõ lại vào phút cuối.

- (b) Nếu Minh giải được bài toán thứ tư thì em đã nộp trước giờ quy định.

Mà Minh đã không nộp bài trước giờ quy định.

Vậy Minh không giải được bài toán thứ tư.

- (c) Nếu lãi suất giảm thì số người gửi tiết kiệm sẽ giảm.

Mà lãi suất đã không giảm.

Vậy số người gửi tiết kiệm không giảm.

- (d) Nếu được thưởng cuối năm Hà sẽ đi Đà Lạt.

Nếu đi Đà Lạt Hà sẽ thăm Suối vàng.

Do đó nếu được thưởng cuối năm Hà sẽ thăm Suối vàng.



## Bài toán 18 Lập luận logic

- (a) Mọi virus máy tính đều có khả năng tự sao chép và lây nhiễm qua các bộ lưu trữ khác. Wanna Cry là một loại virus máy tính. Hãy đưa ra suy luận của bạn về Wanna Cry. Bạn đã sử dụng quy tắc logic nào để thu nhận được thông tin đó.
- (b) Nhựa không dẫn điện. Cái muỗng này không dẫn điện. Vậy cái muỗng này là bằng nhựa.
- (c) Tất cả trẻ con đều vô tội. Không có người lớn nào là trẻ con. Vậy không có người lớn nào là vô tội.
- (d) Ăn mặn thì uống nhiều nước. Thằng bé uống nhiều nước. Vậy là đã ăn mặn
- (e) Có một người đàn ông nghiện thuốc đọc báo thấy rằng: “Hút thuốc lá có thể gây ung thư”. Và kể từ đó ông ta không bao giờ đọc báo nữa
- (f) Một anh chàng ngốc có lần tẩn mẩn hỏi vợ :
  - Này mình, có lúc tôi thấy mặt mình đỏ lợ. Tại sao vậy ?
  - Chị vợ qua quát :
    - Tại xấu hổ.
  - Rồi ngày kia, trong bữa giỗ cha, anh ta thấy vợ bưng mâm cơm cúng từ bếp lên mà mặt mày đỏ lợ, liền mắng vợ :
    - Bữa nay giỗ cha tôi, bà xấu hổ cái gì mà đỏ mặt ?
- (g) Vừa tới Ohio, tôi đã thấy một con sóc trắng. Kết luận: Tất cả sóc Ohio đều màu trắng.
- (h) Con bò thì 4 chân. Do đó, nếu con vật không phải là con bò thì số chân khác 4.

## CÁC LẬP LUẬN SAI LOGIC

### Bài toán 19

Đưa ra thí dụ về lập luận sai.

- (a) Nhầm lẫn giữa tồn tại với 'với mọi'.
- (b) Nhầm lẫn khi dùng 'đảo đề'.
- (c) 'Thường xảy ra' với luôn xảy ra.

### Bài toán 20 Chứng Điếc Của Cào Cào

Một giáo sư côn trùng học nghiên cứu tâm sinh lý của cào cào. Ông bắt một con, để trên giấy và hô to: -Cào cào, nhảy. Cào cào nhảy tung rồi lại rơi xuống tờ giấy. Ông bèn lấy kéo cắt hai cẳng cào cào, để lại trên giấy và hô to: -Cào cào, nhảy. Lần này cào cào đứng im, không nhảy, nó nhìn láo lợ. Nhà côn trùng học lấy giấy bút ghi một cách thận trọng: “Khi ta cắt hai cẳng của cào cào, nó sẽ bị ... điếc”.

### Bài toán 21

Xem xét các lập luận sau đúng hay sai? Vì sao?

- (a) Bảo hay nói dối. Bảo là đàn ông. Vì An là đàn ông nên An hay nói dối.
- (b) Bảo hay nói dối. Bảo là đàn ông. Vì Hoa là phụ nữ nên Hoa ít nói dối.
- (c) Hacker thường có trí tuệ rất cao. Vì Peter là một hacker nên Peter có trí tuệ rất cao.

### Bài toán 22

Hãy xem xét các lập luận nào sau đây là đúng? (Nếu đúng thì đưa ra quy tắc logic đã sử dụng, nếu sai thì đưa ra một thí dụ minh họa).

- (a) Từ mệnh đề “vì  $p$  nên  $q$ ” sẽ cho thông tin “ $p$  vì  $q$ ”.
- (b) Từ mệnh đề “vì  $p$  nên  $q$ ” sẽ cho thông tin “ $\neg p$  suy ra  $\neg q$ ”.
- (c) Từ mệnh đề “vì  $p$  nên  $q$ ” sẽ cho thông tin “ $\neg q$  suy ra  $\neg p$ ”.

### Bài toán 23 Vị từ & Lượng từ

Sử dụng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

- (a) Mọi sinh viên trong lớp này đều là sinh viên ngành công nghệ thông tin.
- (b) Tất cả sinh viên chuyên ngành khoa học máy tính đều phải học môn toán rời rạc.
- (c) Có một sinh viên trong lớp này không có máy vi tính.
- (d) Tất cả sinh viên trong lớp này đã học ít nhất một môn tin học.
- (e) Có một sinh viên trong lớp này học ít nhất một môn tin học.
- (f) Có một sinh viên năm ba trong lớp này.

### Bài toán 24

Với  $p$ ,  $q$ ,  $r$  và  $t$  là các mệnh đề. Hãy cho biết sự đúng đắn của suy luận sau.

- (a)  $p \wedge r \wedge \bar{q} \Rightarrow (p \wedge r) \vee q$ .
- (d)  $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge \bar{r} \Rightarrow q$ .
- (b)  $(p \rightarrow q) \wedge \bar{r} \wedge \bar{q} \Rightarrow \overline{p \vee r}$ .
- (c)  $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge (r \rightarrow s) \wedge \bar{s} \Rightarrow p \rightarrow \bar{q}$ .
- (e)  $(p \rightarrow q) \wedge (\bar{r} \vee \bar{q}) \wedge r \Rightarrow \bar{p}$ .

## CÁC NGHỊCH LÝ

#### Bài toán 25 Self referential paradoxes

Mỗi câu sau có là mệnh đề hay không? Nếu là mệnh đề thì chân trị của mệnh đề là gì?

- (a) Ta là kẻ nói dối.
- (b) Tôi đang nói dối.
- (c) (Chú bé người gỗ Pinocchio nói) Mũi tôi đang dài ra.
- (d) Mệnh đề này sai.
- (e) “Khẳng định này sai”.

## CÁC BÀI TOÁN LOGIC

#### Bài toán 26

Có 2019 tờ giấy. Trên tờ giấy thứ  $i$ ,  $i = \overline{1, 2019}$ , ghi có đúng  $i$  tờ giấy viết sai. Vậy có bao nhiêu tờ viết đúng và tờ nào viết đúng?

#### Bài toán 27

Có 2019 tờ giấy. Trên tờ giấy thứ  $i$ ,  $i = \overline{1, 2019}$ , ghi có  $i$  tờ giấy viết đúng. Vậy có bao nhiêu tờ viết đúng và tờ nào viết đúng?

#### Bài toán 28

Có ba điều sau xảy ra:

- (i) Nếu  $A$  vô tội thì  $B$  và  $C$  đều vô tội.
- (ii) Trong hai người  $B$  và  $C$ , nhất định phải có người vô tội.
- (iii)  $A$  vô tội hoặc  $B$  có tội.

Hãy tìm xem ai có tội.

#### Bài toán 29








Có ba điều sau xảy ra:

- (i)  $A$  nói:  $B$  nói dối hoặc  $C$  nói dối.
- (ii)  $B$  nói:  $A$  nói dối.
- (iii)  $C$  nói:  $A$  và  $B$  đều nói dối

Ai nói dối? Ai nói thật?

# CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

## Các phương pháp chứng minh

-  Phương pháp “trực tiếp”
-  Phương pháp phản chứng
-  Phương pháp đảo đề
-  Phương pháp qui nạp
-  “Phương pháp” trực quan (biểu đồ, hình ảnh, ...)
-  Chứng minh theo từng trường hợp (proof by cases)
-  ...

### Bài toán 30

(a) Chứng minh  $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$ .

### Bài toán 31

Với mọi số thực  $s$  và  $t$ , chứng minh

(a)  $\max(r, s) + \min(r, s) = r + s$ .

(b)  $\max\{s, t\} = \frac{s + t + |s - t|}{2}$  và  $\min\{s, t\} = \frac{s + t - |s - t|}{2}$ .

(c)  $\max\{|a|; |b|\} = \frac{|a + b| + |a - b|}{2}$  và  $\min\{|a|; |b|\} = \frac{||a + b| - |a - b||}{2}$ .

### Bài toán 32

Để hoán đổi giá trị cho 2 số nguyên mà không cần thêm biến phụ, người ta dùng thuật toán sau

```
1 void Swap (int &a, int &b) {  
2     a=a+b;  
3     b=a-b;  
4     a=a-b;  
5 }
```

Hãy chứng minh thuật toán trên đúng đắn, nghĩa là sau khi thực thi đoạn mã trên, biến  $a$  sẽ nhận giá trị của biến  $b$  và ngược lại.

### Bài toán 33

Số  $e$  (số Euler, hằng số Napier) có thể xấp xỉ nhờ  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{k!}$ . Đoạn chương trình bên dưới sẽ cho phép tính tổng  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{k!}$ .

```
1 #include<stdio.h>
2
3 float ApproxE(int n) {
4
5     int i, factor;
6     float e=1;
7     factor=1;
8
9     for (i=1; i<=n; i++)
10     {
11         factor*=i;
12         e+= 1.0/factor;
13     }
14
15     return e;
16 }
```

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên  $n$ , đoạn mã trên cần  $2n$  phép toán (chỉ xét phép nhân và chia).

### Bài toán 34

Cho hai số thực  $a$  và  $b$  thỏa  $a + b \geq 0$ . Chứng minh rằng  $a \geq 0$  hoặc  $b \geq 0$ .

### Bài toán 35

Viết một đoạn chương trình (bằng ngôn ngữ bất kỳ) để kiểm tra kết quả: Mọi số chẵn lớn hơn 2 và bé hơn 2020 đều có thể viết thành tổng hai số nguyên tố.

### Bài toán 36

Qui nạp

Chứng minh

- (a)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ ,  $\forall n \geq 1$ . (e)  $\frac{n}{2} + 1 \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq n + 1$ ,  $\forall n \geq 0$ .
- (b)  $1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n+1)! - 1$ ,  $\forall n \geq 1$ . (f)  $8 \mid (3^n + 7^n - 2)$ ,  $\forall n \geq 0$ .
- (c)  $2^n < n!$ ,  $\forall n \geq 4$ . (g)  $4 \mid (6.7^n - 2.3^n)$ ,  $\forall n \geq 0$ .
- (d)  $n^3 < 2^n$ ,  $\forall n \geq 10$ . (h)  $3^{n+1} \mid (2^{3^n} + 1)$ ,  $\forall n \geq 0$ .
- (i) Cho số thực  $a$  sao cho  $a + \frac{1}{a}$  là một số nguyên. Chứng minh rằng  $a^n + \frac{1}{a^n}$  là một số nguyên với mỗi  $n \in \mathbb{N}$ .

### Bài toán 37

Trong một giải vô địch bóng đá có  $n$  đội tham gia, hai đội bất kì phải đấu với nhau đúng một trận. Chứng minh rằng tại mọi thời điểm của giải đấu, luôn có 2 đội có số trận đấu bằng nhau.

### Bài toán 38

Trong một giải vô địch bóng đá có  $n$  đội tham dự, đã có  $n + 1$  trận đấu diễn ra. Chứng minh rằng có một đội đã thi đấu ít nhất 3 trận.

---

## Tài liệu tham khảo

[Ham13] Richard H Hammack. *Book of proof*. Richard Hammack, 2013.

[Kra07] Steven G Krantz. *The history and concept of mathematical proof*, volume 5. February, 2007.

Li Akê tự hỏi Toán học là gì