CƠ HỌC VẬT RẮN

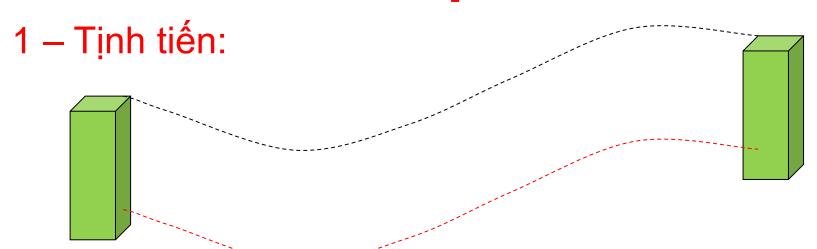
PGS. TS. Lê Công Hảo

CƠ HỌC VẬT RẮN

Vật rắn (VR):

- + Là một hệ chất điểm.
- + Khoảng cách giữa các chất điểm không đổi trong quá trình chuyển động
- + Áp dụng được các qui luật CĐ hệ chất điểm vào CĐ vật rắn.

1. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VR



- Finh tiến, mọi điểm trên VR đều vạch ra các qũi đạo giống nhau với cùng một vận tốc.
 - Mọi điểm trên vật rắn:
 - + Cùng vectơ vận tốc
 - + Cùng vectơ gia tốc

2. Khối Tâm C

Định nghĩa: Xem vật rắn như một hệ gồm n chất điểm.

+ C được gọi là khối tâm của vật rắn nếu vị trí C thoả:

$$\vec{r}_{C} = \vec{OC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{i} \vec{r}_{i}}{\sum_{i=1}^{n} m_{i}}$$

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i.$$

2. KHỐI TÂM C ("COM")

1 - Định nghĩa: Nếu chọn gốc toạ độ trùng khối tâm C Khối tâm của hệ là điểm C thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = 0 \qquad \int_{\text{VR}} \vec{r} dm = 0 \qquad M_1 \qquad M_2$$

Nếu khối lượng vật rắn phân bố liên tục

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{1}{M} \int_{M} \overrightarrow{r} dm = 0 \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad \mathbf{m_3} \quad \mathbf{M_3}$$

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int x \, dm, \qquad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int y \, dm, \qquad z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int z \, dm,$$

* Đặc điểm của C:

- Đặc trưng cho hệ; là điểm rút gọn của hệ.
- Nằm trên các yếu tố đối xứng.

* Phân biệt khối tâm và trọng tâm:

- Trọng tâm là điểm đặt của trọng lực
- Trên thực tế C trùng với trọng tâm G

Toạ độ khối tâm:

* Hệ chất điểm:
$$G(x_G,y_G,z_G) = G\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}, \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}\right)$$

* Vật rắn:

$$G(x_G, y_G, z_G) = G \begin{pmatrix} \int x dm & \int y dm & \int z dm \\ \frac{VR}{m}, \frac{VR}{m}, \frac{VR}{m}, \frac{VR}{m} \end{pmatrix}$$

Đặc điểm khối tâm

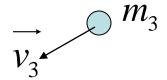
Động lượng của khối tâm:

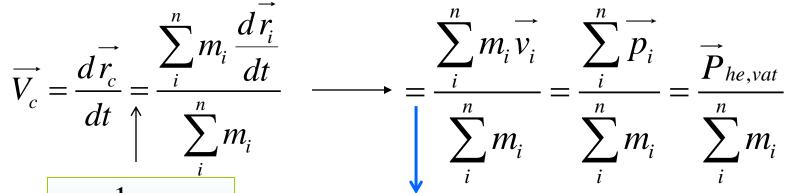
$$\overrightarrow{V_c} = \frac{d\overrightarrow{r_c}}{dt} = \frac{\sum_{i}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt}}{\sum_{i}^{n} m_i}$$

$$\vec{r_c} = \frac{1}{m} \sum_{i} m_i \vec{r_i}$$

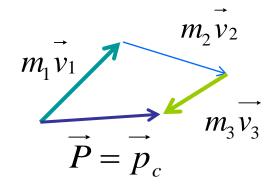
$$m_1$$
 m_2

$$m_2 \rightarrow v_2$$





$$\vec{p}_c = \left(\sum_{i}^{n} m_i\right) \vec{v}_c = \vec{P}_{he,vat}$$



Gia tốc khối tâm

$$\overrightarrow{a_c} = \frac{d\overrightarrow{v_c}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{a_i}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{F_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

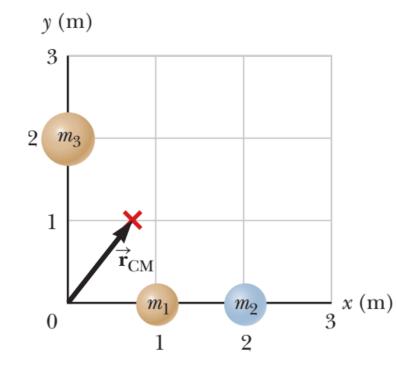
$$\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{F_i}$$

$$\overrightarrow{M} = \sum_{i=1}^n m_i$$

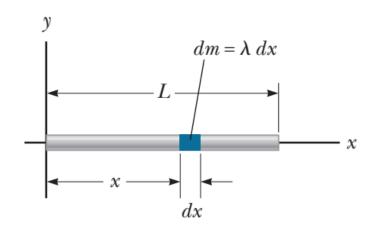
$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{Ma_c}$$

Đặc trưng động lực học của vật rắn chuyển động tịnh tiến xem như đồng nhất với động lực học của khối tâm, tức của một chất điểm mà ta đã quen biết. \rightarrow <u>Chỉ cần</u> <u>xét chuyển động quay của vật rắn</u>.

Cho hệ 3 hạt đặt tại vị trí như hình vẽ. Tìm tọa độ khối tâm biết $m_1 = m_2 = 1$ kg, $m_3 = 2$ kg?

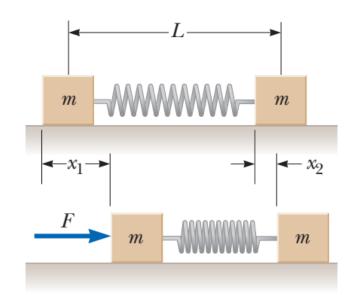


Tìm khối tâm của thanh dài L khối lượng M phân bố đều trên thanh? Khi thanh có khối lượng phân bố không đều, và khối lượng trên đơn vị chiều dài thay đổi theo vị trí như $\lambda = \alpha.x$?



Tìm vị trí treo bản hiệu café này? Biết rằng bản hiệu này có khối lượng M phân bố đều và có bề dày t

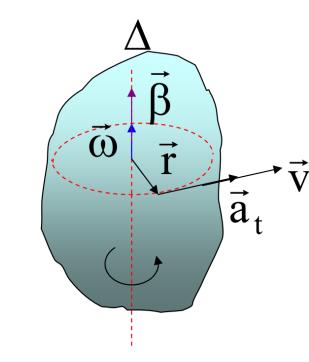
Cafe Miễn phí Hai vật có khối lượng m như nhau và được gắn thông qua lò xo, khi lò xo nghỉ, 2 vật cách nhau L. Tác dụng 1 lực F vào vật bên trái như hình vẽ, hai vật di chuyển x₁ và x₂. Bỏ qua ma sát tính vận tốc khối tâm và năng lượng dao động hệ sau khi không còn tác động lực F?



Chuyển động quay quanh trục của vật rắn

Mọi điểm có quĩ đạo tròn cùng truc Δ

Trong cùng khoảng thời gian mọi điểm cùng quay đi góc θ Mọi điểm có cùng vận tốc góc $\omega=d\theta/dt$ & gia tốc góc $\beta=d\omega/dt=d^2\theta/dt^2$



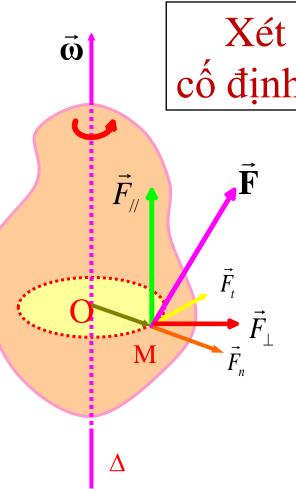
Vận tốc dài

Gia tốc tiếp tuyến

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{R} \Longrightarrow v = \omega R_i$$

$$a_i = R_i \times \beta$$

4.2. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH



Xét vật rắn quay quanh một trục cố định dưới tác dụng của ngoại lực

Ta có thể phân tích $\vec{\mathbf{F}}$ thành các thành phần khác nhau:

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{/\!/} + \vec{\mathbf{F}}_{\perp}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\perp} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{t}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{//} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{t}} + \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}$$

Lực tác dụng lên vật rắn quay quanh trục

4.2.1. Mômen động lượng của vật rắn quay

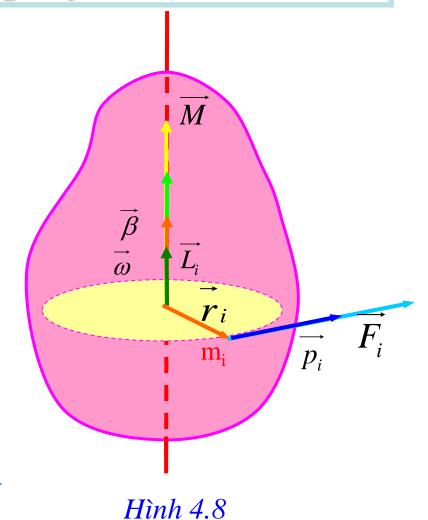
Mômen động lượng của chất điểm thứ i đối với trục quay là:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

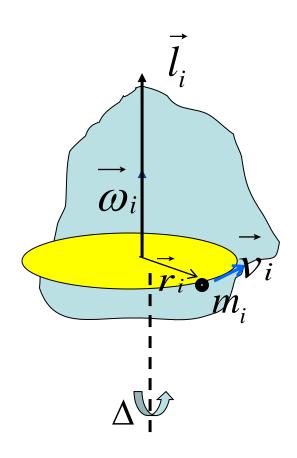
- $\vec{\mathbf{p}}_i = \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{v}}_i$ hướng theo phương *tiếp tuyến*.
- $\vec{\mathbf{r}}_i$ hướng theo phương bán kính.



 \vec{L}_i hướng theo trục quay



4.2. Phương trình cơ bản của vật rắn quay:



+Vật rắn đang quay quanh trục Δ .

Xét chất điểm m_i có vận tốc V_i

$$\vec{v}_i = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_i \cdot \vec{r}_i \end{bmatrix} \longrightarrow Xác \, dịnh véc tơ \, \vec{\omega}_i$$

+ Momen động lượng của chất điểm,theo định nghĩa:

$$L_i = m_i \omega_i r_i^2 = \omega m_i r_i^2$$

$$L_i = m_i \omega_i r_i^2 = \omega m_i r_i^2$$

 \Rightarrow Momen động lượng của vật rắn quay đối với trục Δ :

$$L = \sum_{i} L_{i} = \omega \sum_{i} m_{i} r_{i}^{2}$$

Đặt $I = \sum_{i} m_i r_i^2$: Momen quán tính của vật đối với trục Δ

$$\longrightarrow L = I\omega \rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega}$$

Trường hợp tổng quát : $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{(t)}; \vec{L} = \vec{L}_{(t)}$

Frường hợp tổng quát :
$$\omega = \omega_{(t)}; L = L_{(t)}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\beta}$$

$$\vec{D}$$
Đặt $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\vec{M} = \vec{I} \vec{\beta}$$

$$\vec{M} = \vec{R_i} \times \vec{F_i}$$

Phương trình cơ bản của chuyến động quay vật rắn.

MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MỘT VÀI VẬT RẮN ĐƠN GIẢN

4.3.1. Công thức

Mômen quán tính với một trục quay xác định cho vật rắn gồm các chất điểm phân bố rời rạc:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$$

> Khi vật rắn gồm các chất điểm phân bố liên tục:

$$I = \int_{m} R^{2} dm$$

4.3.1.1. Mômen quán tính I của một thanh đồng chất đối với trục quay vuông góc với thanh tại trung điểm

Bài toán

Cho một thanh có chiều dài ℓ , khối lượng m, tiết diện S. Tìm mômen quán tính I đối với trục quay Δ là trung trực của thanh. Giả sử thanh nằm dọc theo trục Ox.

MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MỘT VÀI VẬT RẮN ĐƠN GIẢN

Chọn dm như hình vẽ. Gọi ρ là khối lượng riêng của thanh thì dm = ρ Sdx.

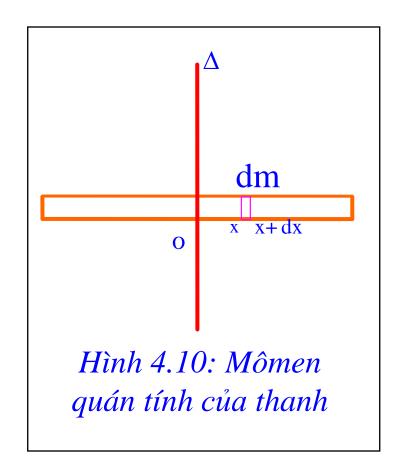
Với R = x, ta có:

$$I = \int_{m}^{\infty} x^{2} dm$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \rho Sx^{2} dx = \frac{1}{12} \rho S1^{3}$$

Với $\rho Sl = m$ là khối lượng thanh.

Vậy:
$$\mathbf{I} = \frac{1}{12} \mathbf{ml}^2$$



4.3.1.2 Mômen quán tính I của vòng tròn đối với trục quay là trục của vòng tròn

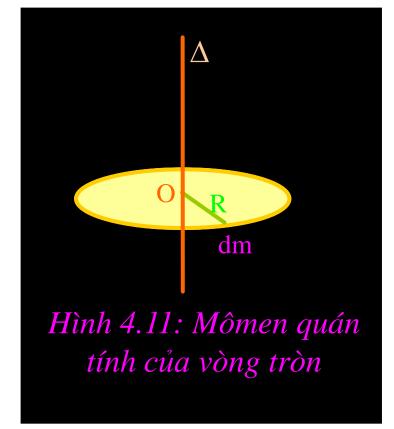
Bài toán

Cho vòng tròn tâm O bán kính R, khối lượng m. Tìm mômen quán tính của vòng tròn đối với trục quay là trục của vòng tròn.

4.3.1.2 Mômen quán tính I của vòng tròn đối với trục quay là trục của vòng tròn

Chia vòng tròn ra làm nhiều phần nhỏ có khối lượng dm, vì ở trên vòng tròn nên dm cách tâm O một khoảng bằng bán kính R. Vậy ta có:

$$I = \int_{m} R^{2} dm \implies I = R^{2} \int_{m} dm = mR^{2}$$



$$V \hat{a} y: I = mR^2$$

4.3.1.3 Mômen quán tính I của một đĩa tròn đối với trục quay là trục của đĩa

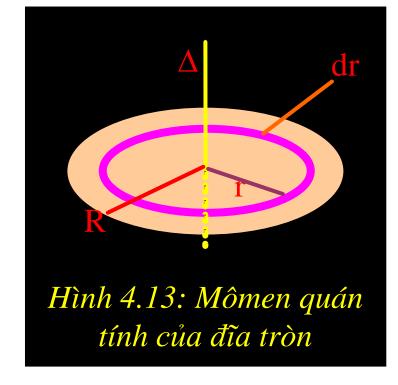
Bài toán

Cho một đĩa tròn mỏng tâm O bán kính R, khối lượng m. Tìm mômen quán tính của đĩa tròn đối với trục quay là trục của đĩa.

4.3.1.3 Mômen quán tính I của một đĩa tròn đối với trục quay là trục của đĩa

Chia đĩa thành nhiều vành tròn tương đương những vòng tròn có bán kính trong r, bán kính ngoài r + dr, diện tích của vành là $dS = 2\pi r dr$ và khối lượng của nó là $dm = \sigma dS$, với σ là khối lượng trên đơn vị diện tích.

$$dI = r^2 dm$$



$$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi .rdr \implies I = 2\sigma \pi \int_{0}^{R} r^{3} dr = \frac{\sigma \pi}{2} \left[r^{4} \right]_{0}^{R}$$

Với m = $\sigma \pi R^2$ nên:

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

4.3.1.4 Mômen quán tính của trụ rỗng, trụ đặc

Trụ rỗng

Chia trụ rỗng thành n vòng tròn, mỗi vòng có mômen quán tính

$$I_i = m_i R_i^2 = m_i R^2$$

Mômen quán tính của trụ rỗng:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_{i} = \sum_{i=1}^{n} m_{i} R_{i}^{2} = R^{2} \sum_{i=1}^{n} m_{i} = mR^{2}$$

Vậy:
$$I = mR^2$$

Trụ đặc

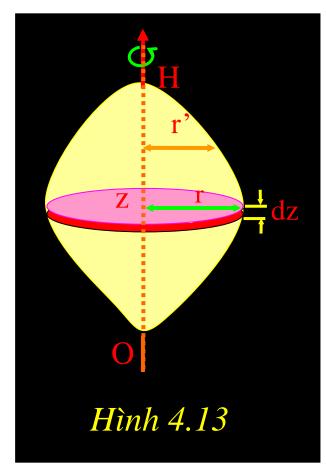
Chia hình trụ đặc thành n đĩa tròn, mỗi đĩa có mômen quán tính:

$$I_i = \frac{1}{2} m_i R_i^2 = \frac{1}{2} m_i R^2$$

Mômen quán tính của hình trụ đặc:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_{i} R^{2} = \frac{1}{2} R^{2} \sum_{i=1}^{n} m_{i}$$

Vậy:
$$I = \frac{1}{2} mR^2$$



4.3.1.5 Mômen quán tính của các vật tròn xoay

Khái niệm: Vật tròn xoay là những vật mà bề mặt của chúng được tạo thành bởi sự quay của một đường cong phẳng quanh một trục nằm trong mặt phẳng chứa đường cong đó.

Bài toán

Tính mômen quán tính của vật tròn xoay đối với trục Oz khi biết sự phụ thuộc hàm r(z) và mật độ ρ.

4.3.1.5 Mômen quán tính của các vật tròn xoay

Ta chia vật thành những đĩa mỏng có chiều cao dz. Mômen quán tính của mỗi đĩa được tính

$$dI = \frac{1}{2}dmr^2 = \frac{1}{2}\pi\rho r^4 dz$$

Với dm = $\rho \pi r^2 dz$ là khối lượng của đĩa.

Vậy mômen quán tính của hình tròn xoay:

$$I = \int_{\text{vtx}} dI = \frac{1}{2} \pi \rho \int_{0}^{H} r^{4} dz$$



Tính mômen quán tính của hình nón và hình cầu.

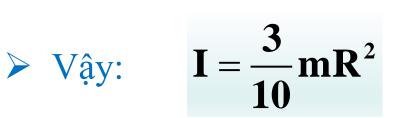
Hình nón

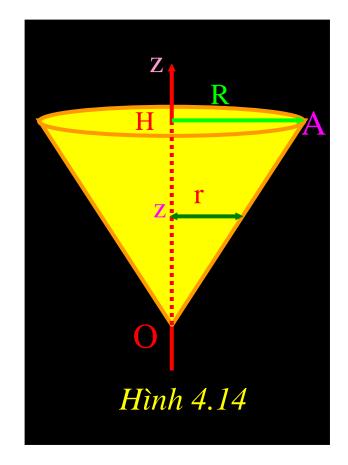
Đối với hình nón thì hàm r(z) có dạng:

$$r = \frac{R}{H}z$$

$$I = \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{R}{H}\right)^{4} \int_{0}^{H} z^{4} dz = \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{R}{H}\right)^{4} \frac{H^{5}}{5}$$

ightharpoonup Khối lượng hình nón: $m = \pi R^2 H \rho$



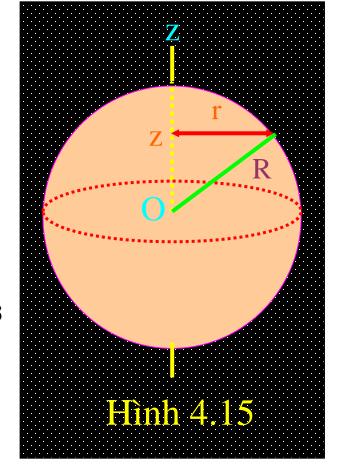


Hình cầu

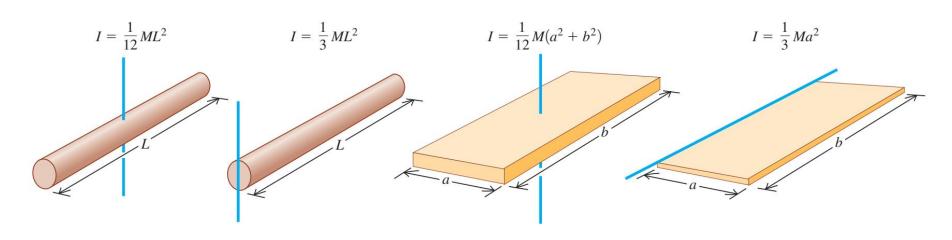
Từ hình vẽ ta có: $r^2 = R^2 - z^2$

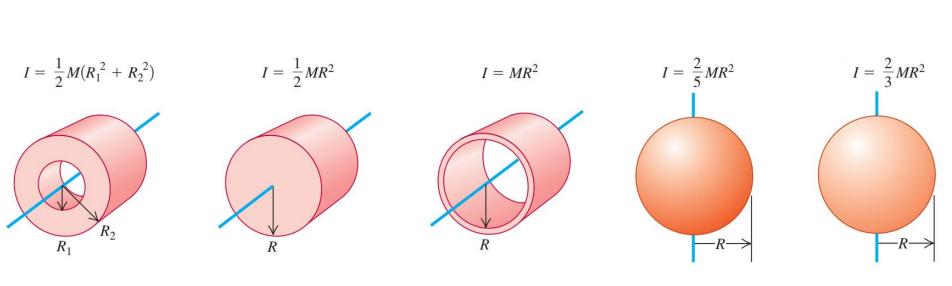
$$I = \frac{1}{2} \pi \rho \int_{-R}^{R} r^4 dz = \pi \rho \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 dz$$
$$= \pi \rho \left(R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) = \frac{8}{15} \pi \rho R^5$$

Với khối lượng quả cầu: $m = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$ Vậy: $I = \frac{2}{5}mR^2$

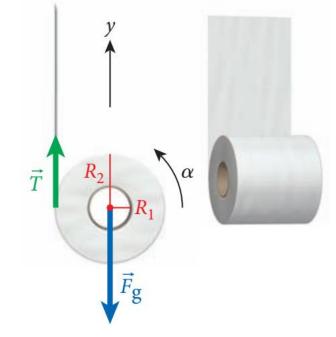


Tóm tắt Mômen quán tính của một số vật

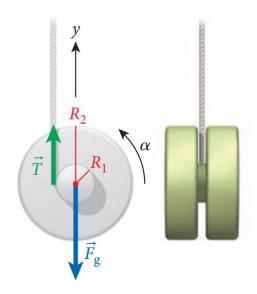




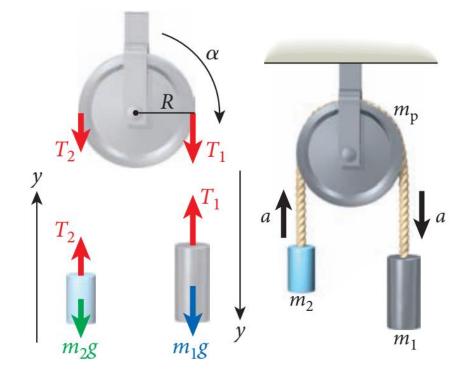
Bạn làm rơi cuộn giấy vệ sinh 274 g ở độ cao 0,73 m. Biết $R_1 = 2,7$ cm, $R_2 = 6,1$ cm. Bao lâu nó chạm đất?



Con Yo-yo bán kính trong R₁ và BKN R₂



Tính gia tốc?



4.3.2. Định lý Steiner – Huyghens cho mômen quán tính I đối với một trục bất kỳ không qua khối tâm

<u> Định lý Steiner – Huyghens</u>

$$I = I_C + ma^2$$

 $\underline{V\acute{o}i}$ Δ : trục quay bất kỳ không qua khối tâm

 $\Delta_{\rm c}$: trục quay qua khối tâm của vật và song song với Δ

I: mômen quán tính của vật rắn đối với trục Δ

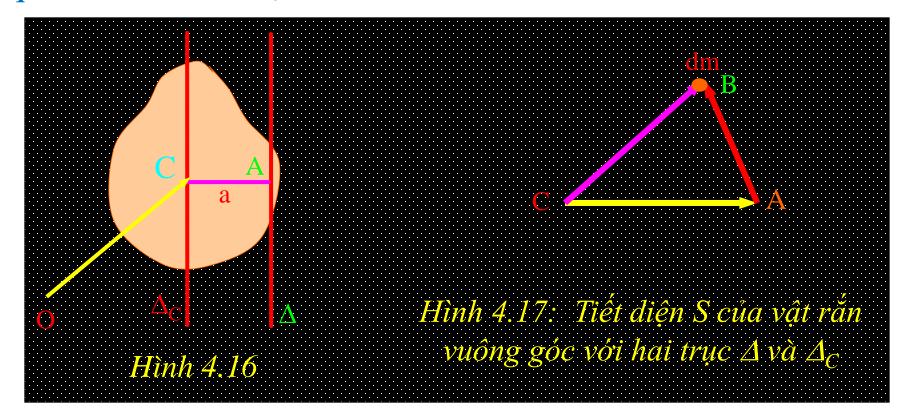
 I_c : mômen quán tính của vật rắn đối với trục Δ_c

m: khối lượng của vật rắn

a : khoảng cách giữa hai trục Δ và $\Delta_{\rm c}$

CHỨNG MINH

- \succ Xét tiết diện S của vật rắn vuông góc với hai trục Δ và $\Delta_{\mathbb{C}}$.
- ightharpoonup Khoảng cách từ khối lượng vi phân dm đến các trục đi qua C và A lần lượt là \vec{r} và \vec{r}' .



Từ hình vẽ ta có:
$$\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$$

Do đó:
$$(\vec{r}')^2 = r^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{r}$$

$$= ma^2$$
 Vậy
$$I = \int (\vec{r}')^2 dm = \int r^2 dm + a^2 \int dm - 2\vec{a} \int \vec{r} dm$$
 Mômen quán tính của vật đối với trục đi qua A
$$I_C \text{ của vật đối với trục đi qua khối tâm C} = 2\vec{a}(m\vec{r}_C)$$

 \vec{r}_{c} là bán kính véctơ xác định vị trí của khối tâm C, mà gốc véctơ này chính là C, nên

$$\vec{r}_{C} = 0$$

Do đó:

$$I = I_C + ma^2$$

❖ Ví dụ: Tính mômen quán tính của thanh với trục quay không qua khối tâm.

$$I = I_C + ma^2$$

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Thí nghiệm trên ghế Giucopxki:

Hệ cô lập gồm 2 "vật quay":



$$I_{1} \quad I_{2} \quad ; \quad \overrightarrow{\omega}_{1} \quad ; \quad \overrightarrow{\omega}_{2}$$

$$\overrightarrow{L} = I_{1} \overrightarrow{\omega}_{1} + I_{2} \overrightarrow{\omega}_{2} = const$$

Thời điểm đầu tiên hệ đứng yên : $L_0=0$

Bảo tòan momen động lượng:

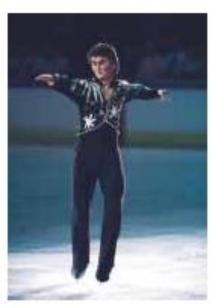
$$\vec{L} = \vec{L}_0 = \vec{I_1 \omega_1} + \vec{I_2 \omega_2} = 0$$

$$I_1 \overset{\rightarrow}{\omega}_1 \overset{\downarrow}{=} -I_2 \overset{\rightarrow}{\omega}_2 \longrightarrow \overset{\rightarrow}{\omega}_2 = -\frac{I_1}{I} \overset{\rightarrow}{\omega}_1$$

$$\vec{\omega}_2 = -\frac{I_1}{I_2} \vec{\omega}_1$$

 \Rightarrow Người cho bánh xe quay: ω_1

- Ghế quay ngược chiều với vận tốc góc ω_2



Vũ công và định luật bảo tòan momen động lượng

Ngọai lực tác dụng lên vũ công là trọng lực.

Trọng lực song song với trục quay.

$$\overrightarrow{M} = 0 \rightarrow \overrightarrow{L} = I\overrightarrow{\omega} = const$$

+ Vũ công dang thẳng tay:

$$R_i \uparrow \Rightarrow I \uparrow \Rightarrow \omega \downarrow$$



Ví dụ

Một đĩa mài có momen quán tính 1,2 x10⁻³ kg.m².được gắn vào một cái khoan điện, khoan này cho nó một momen quay 16 Nm. Tìm:

a/ Vận tốc góc và

b/ momen động lượng của đĩa sau khi động cơ khởi động 33 ms.

Phương trình cơ bản của chuyển động quay:

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{16}{1,2.10^{-3}} = 1,33.10^4 \, rad \, / \, s^2$$

Vận tốc góc:
$$\omega = \beta t + \omega_0 = \beta t$$
 Quay từ nghỉ: $\omega_0 = 0$ $\omega = 1,33.10^4 t$

a/ Vận tốc góc của đĩa lúc $t = 33.10^{-3} s$

$$\omega = 1,33.10^{4}.33.10^{-3} = 440 rad / s$$

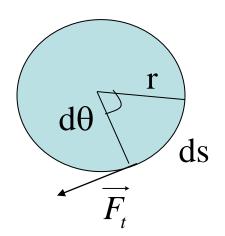
b/ Momen động lượng lúc đó là:

$$L = I\omega = 1, 2.10^{-3}.440 = 0,528 (kgm^2/s)$$

Công của momen lực và động năng của vật rắn quay

Xét vật rắn quay quanh trục cố định Δ , lực tiếp tuyến \overrightarrow{F}_{t} nằm trong mặt phẳng quỹ đạo.

Công vi phân của lực tiếp tuyến là:



$$dA = F_t . ds = r . F_t . d\theta$$

$$\vec{r} \perp \vec{F}_t \qquad ds = r d\theta$$

$$M = r . F_t$$

$$(4.8) dA = M.d\theta \longrightarrow A = \int_{-\infty}^{\infty} M.d\theta$$

Với chuyển động của chất điểm:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$$

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M . \omega$$

$$\overrightarrow{M} \nearrow \overrightarrow{\omega} \qquad \qquad P = M . \omega$$

Động năng của vật quay:

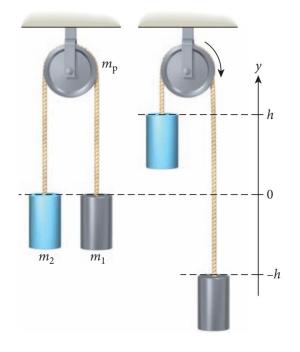
Bộng năng của vật quay:
$$dA = M.d\theta$$

$$M = I\beta \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \beta = \frac{d\omega}{dt}$$

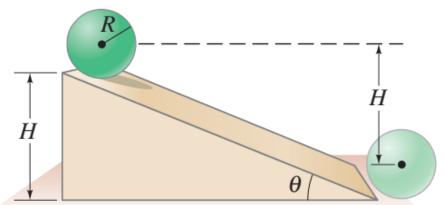
$$dA = I\beta.d\theta = I \qquad d\theta \qquad d\theta = Id\omega \qquad d\theta = I\omega d\omega$$

$$N\text{ếu}: I = const \qquad dA = d \qquad dA$$

$$K_t = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$



Hai vật $m_1 = 3kg$, $m_2 = 1,4 kg$ kết nối qua RR khối lượng = 2,3kg. Tính VT vật m_2 khi ở độ cao h = 0,16 m? Quả cầu đặc, KLượng M và BK R, chuyển động TT nghỉ từ độ cao H của Mp nghiêng 1 góc θ. Tính vận tốc của nó (không trượt)

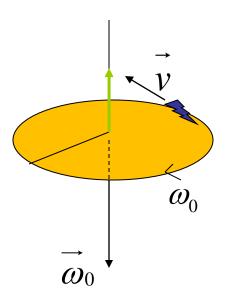


Ví dụ

Một con gián khối lượng m bò ngược chiều kim đồng hồ theo mép một cái khay nhiều ô (một đĩa tròn lắp trên một trục thẳng đứng), bán kính R, momen quán tính I, với ổ trục không ma sát. Vận tốc của gián đối với trái đất là v, còn khay quay theo chiều kim đồng hồ với vận tốc góc ω_0 , con gián tìm được một mẫu vụn bánh mì ở mép khay và tất nhiên, nó dừng lại.

a/ Sau khi gián dừng lại, vận tốc cái khay là bao nhiêu?

b/ Cơ năng có được bảo toàn không?



CÁC HỆ THỰC TƯƠNG ĐƯƠNG GIỮA CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN VÀ CHUYỂN ĐỘNG QUAY

