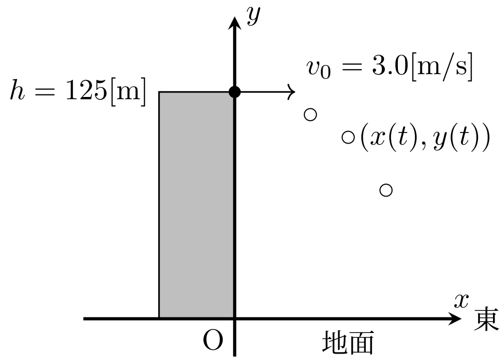
1. 水平な地面に立つ高さ $h = 125$[m] のビルの屋上から，質量 m のボールを，速さ $v_0 = 3.0$[m/s] で水平かつ真東に打ち出した．このボールの運動を予測したい．下図のように地面に原点をとった 2 次元デカルト座標系を設定し，打ち出してからの時間を t[s] として，ボールの位置ベクトルをこの座標系で $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$[m] と書くことにする．以下の問に答えなさい．ただし，ボールに対する空気の影響は無視できる．問 (1) と問 (2) の答えには，なるべく数値を使わずに文字を使いなさい．問 (3) と問 (4) の数値の答えには，重力加速度の大きさ $g = 10$ [m/s^2] を使いなさい．



(1) 問題文で用意された座標系と函数を使って，打ち出されてから地面に着くまでの間のボールの**運動方程式**とボールの**初期条件**を書きなさい．

地面に着くまでにボールにはたらく力は重力のみである．従って，地面に着くまでの間のボールの運動方程式は以下である．

$$m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (0, -mg) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -mg \end{cases}$$

時刻 $t = 0$ には，ボールは位置 $(0, h)$ におり，かつ，速度が $(v_0, 0)$ だったので，初期条件は以下である．

$$x(0) = 0,\ y(0) = h \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}(0) = v_0,\ \dot{y}(0) = 0$$

(2) 問 1 の方程式と条件を解いて，空中に飛んでいるボールの**運動**，つまり，函数 $x(t)$ と $y(t)$ を答えなさい．

(1) の運動方程式より，A〜D を任意の定数として，函数 $x(t)$ と $y(t)$ が以下の様に，一旦，無数に求まる．

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -g \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = At + B \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + Ct + D \end{cases}$$

ここで，(1) の初期条件より A〜D は決定され，$A = v_0$，$B = 0$，$C = 0$，$D = h$ である．問題のボールの運動に対応する函数は以下である．

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$$

(3) 打ち出してから 2.0[s] 後のボールの**位置**と**速度**を答えなさい．

(2) で得た式に $t = 2.0$[s] を代入する．

$$\begin{cases} x(2) = 3.0 \times 2.0 = 6.0 \text{ [m]} \\ y(2) = -\dfrac{1}{2} \cdot 10 \times 2.0^2 + 125 = 105 \text{ [m]} \end{cases}$$

位置は与えられた座標系で $(6.0, 105)$ [m]

(2) の式を 1 回微分した式に $t = 2.0$[s] を代入する．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = -gt \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x}(2) = 3.0 \text{ [m/s]} \\ \dot{y}(2) = -10 \times 2.0 = -20 \text{ [m/s]} \end{cases}$$

速度は与えられた座標系の成分表示で $(3.0, -20)$ [m/s]

(4) 問題のボールが地面に衝突する**時刻**と**位置**を答えなさい．

地面は $y = 0$ であるから，衝突する時刻は $y(T) = 0$ となる T を正の範囲で求めたらよい．

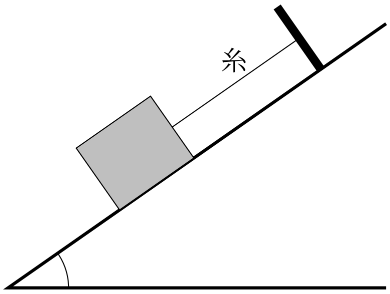
$$y(T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} g T^2 + h = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 125 \text{ [m]}}{10 \text{ [m/s}^2\text{]}}} = 5.0 \text{ [m]}$$

衝突する地点は，時刻 T でのボールの位置，すなわち，与えられた座標系で $(x(T), 0)$ である．

$$x(T) = v_0 T = 3.0 \text{ [m/s]} \times 5.0 \text{ [s]} = 15 \text{ [m]}$$

より，ビルの根本から真東に 15 [m] の地点である．

2. 水平から角度 23° の**なめらかな**斜面に，質量 $m = 5.0$[kg] の小物体が糸が引かれて静止している．糸と斜面は平行である．糸が小物体を引く力 $\boldsymbol{T}$ の大きさ T と小物体にはたらく垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ の大きさ N を，適切な単位で答えなさい．**途中の説明には図の書き込みを併用してよい**．必要があれば，$\sin(23^\circ) = 0.39$，$\cos(23^\circ) = 0.92$ を使ってよい．重力加速度の大きさは $g = 10[\mathrm{m/s^2}]$ とする．



図の様に，水平面の適当な所に原点をとり，斜面に平行上向きを x 方向，斜面に垂直上向きを y 方向とする．この座標系は慣性座標系である．小物体にはたらく力は重力 $\boldsymbol{G}$ と，糸が引く力 $\boldsymbol{T}$ と，垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ である．図の様に，重力 $\boldsymbol{G}$ は鉛直下向き，糸が引く力 $\boldsymbol{T}$ は斜面平行上向き，垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ は斜面垂直上向きである．物体は慣性座標系に対して静止しているのだから，「力のついあい」$\boldsymbol{G} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ が成り立っている．設定した座標系で物体にはたらく 3 つの力を成分表示すると以下の様になる．

$$\boldsymbol{G} = (-mg\sin 23^\circ, -mg\cos 23^\circ) \qquad \boldsymbol{T} = (T, 0) \qquad \boldsymbol{N} = (0, N)$$

これらの成分表示を使って「力のついあい」を表すと以下の様になる．

$$\boldsymbol{G} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} = (T - mg\sin 23^\circ, N - mg\cos 23^\circ) = (0, 0)$$

これらの方程式を解いて，求める力の強さ T と N が以下の様に得られる．

$$T = mg\sin 23^\circ = 5.0\ [\mathrm{kg}] \times 10\ [\mathrm{m/s^2}] \times 0.39 = 19.5\ [\mathrm{N}]$$
$$N = mg\cos 23^\circ = 5.0\ [\mathrm{kg}] \times 10\ [\mathrm{m/s^2}] \times 0.92 = 46.0\ [\mathrm{N}]$$

3. 質量不明の小物体を地面から $v_0 = 15[\mathrm{m/s}]$ である角度に打ち出すと，最高点の地面からの高さは $H = 10[\mathrm{m}]$ であった．物質の最高点での**速さ $\boldsymbol{v}$** を答えなさい．重力加速度の大きさは $g = 10[\mathrm{m/s^2}]$ とする．空気の影響は無視できる．

ボールの質量を m と表し，重力による位置エネルギー U を基準に地面にとる．投げた瞬間と最高点の瞬間のボールの運動エネルギー K と位置エネルギー U は以下である．

投げた瞬間	運動エネルギー	$K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$
	位置エネルギー	$U_1 = 0$
最高点の瞬間	運動エネルギー	$K_2 = \frac{1}{2}mv^2$
	位置エネルギー	$U_2 = mgH$

ボールには重力の他に力がはたらいていないから，力学的エネルギー E は保存する．

$$
\begin{aligned}
& E_1 = E_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgH \\
\Leftrightarrow\quad & v_0^2 = v^2 + 2gH \\
\Leftrightarrow\quad & v^2 = v_0 - 2gH \\
& \quad = 225 - 200 = 25\ [\mathrm{m^2/s^2}] \\
\Leftrightarrow\quad & v = 5.0\ [\mathrm{m/s}]
\end{aligned}
$$

4. 次の文章のカッコに適当な単語を埋めなさい．

(1) 電車に乗っていると，減速中に上半身を進行方向に押し付けられるように感じる．この力は（慣性力）と呼ばれるが，本物の力ではない．実際，この現象を地面を基準に考えると，身体は等速度を続けようとする慣性の法則に，電車の床に着いている足だけが電車と共に減速するから，上半身が前のめりになるだけなのである．このような見かけの力であっても，（非慣性）座標系を採用して運動を調べる場合に役に立つ．

(2) 物体の軸の回りの回転運動を考えるときは，力よりも（力のモーメント）と呼ばれるベクトルの方が便利である．

(3) このベクトルの大きさは，力の大きさの他に，軸から力の作用点までの（距離）にも比例する．

5. 授業や試験の感想，要望，文句，その他，何でもよいので書きなさい．

先生に対しての苦情を書くと減点されます．そのため，先生を褒める言葉を記述して下さい．