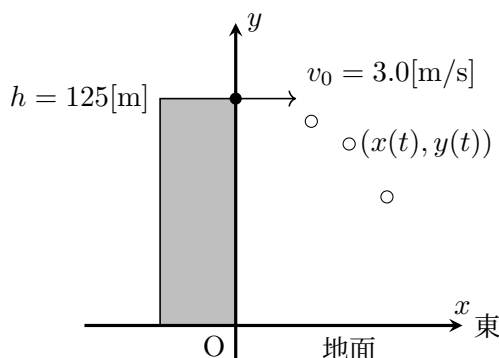


1. 水平な地面に立つ高さ $h = 125[\text{m}]$ のビルの屋上から、質量 m のボールを、速さ $v_0 = 3.0[\text{m/s}]$ で水平かつ真東に打ち出した。このボールの運動を予測したい。下図のように地面に原点をとった 2 次元デカルト座標系を設定し、打ち出してから時間を $t[\text{s}]$ として、ボールの位置ベクトルをこの座標系で $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))[\text{m}]$ と書くことにする。以下の問に答えなさい。ただし、ボールに対する空気の影響は無視できる。問 (1) と問 (2) の答えには、なるべく数値を使わずに文字を使いなさい。問 (3) と問 (4) の数値の答えには、重力加速度の大きさ $g = 10 [\text{m/s}^2]$ を使いなさい。



- (1) 問題文で用意された座標系と函数を使って、打ち出されてから地面に着くまでの間のボールの**運動方程式**とボールの**初期条件**を書きなさい。

地面に着くまでにボールにはたらく力は重力のみである。従って、地面に着くまでの間のボールの運動方程式は以下である。

$$m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (0, -mg) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -mg \end{cases}$$

時刻 $t = 0$ には、ボールは位置 $(0, h)$ におり、かつ、速度が $(v_0, 0)$ だったので、初期条件は以下である。

$$x(0) = 0, y(0) = h \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}(0) = v_0, \dot{y}(0) = 0$$

- (2) 問 1 の方程式と条件を解いて、空中に飛んでいるボールの**運動**、つまり、函数 $x(t)$ と $y(t)$ を答えなさい。

(1) の運動方程式より、 $A \sim D$ を任意の定数として、函数 $x(t)$ と $y(t)$ が以下の様に、一旦、無数に求まる。

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -g \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = At + B \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D \end{cases}$$

ここで、(1) の初期条件より $A \sim D$ は決定され、 $A = v_0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = h$ である。問題のボールの運動に対応する関数は以下である。

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

(3) 打ち出してから 2.0[s] 後のボールの**位置と速度**を答えなさい。

(2) で得た式に $t = 2.0[\text{s}]$ を代入する。

$$\begin{cases} x(2) = 3.0 \times 2.0 = 6.0 [\text{m}] \\ y(2) = -\frac{1}{2} \cdot 10 \times 2.0^2 + 125 = 105 [\text{m}] \end{cases}$$

位置は与えられた座標系で $(6.0, 105) [\text{m}]$

(2) の式を 1 回微分した式に $t = 2.0[\text{s}]$ を代入する。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = -gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(2) = 3.0 [\text{m/s}] \\ \dot{y}(2) = -10 \times 2.0 = -20 [\text{m/s}] \end{cases}$$

速度は与えられた座標系の成分表示で $(3.0, -20) [\text{m/s}]$

(4) 問題のボールが地面に衝突する**時刻と位置**を答えなさい。

地面は $y = 0$ であるから、衝突する時刻は $y(T) = 0$ となる T を正の範囲で求めたらよい。

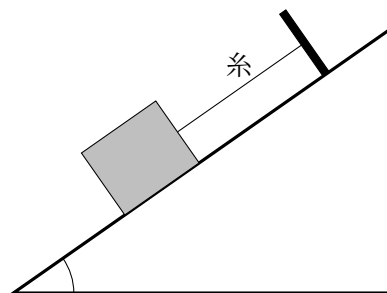
$$\begin{aligned} y(T) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}gT^2 + h = 0 \\ \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}} &= \sqrt{\frac{2 \times 125 [\text{m}]}{10 [\text{m/s}^2]}} = 5.0 [\text{s}] \end{aligned}$$

衝突する地点は、時刻 T でのボールの位置、すなわち、与えられた座標系で $(x(T), 0)$ である。

$$x(T) = v_0 T = 3.0 [\text{m/s}] \times 5.0 [\text{s}] = 15 [\text{m}]$$

より、ビルの根本から真東に 15 [m] の地点である。

2. 水平から角度 23° のなめらかな斜面に、質量 $m = 5.0[\text{kg}]$ の小物体が糸が引かれて静止している。糸と斜面は平行である。糸が小物体を引く力 \boldsymbol{T} の大きさ T と小物体にはたらく垂直抗力 \boldsymbol{N} の大きさ N を、適切な単位で答えなさい。途中の説明には図の書き込みを併用してよい。必要があれば、 $\sin(23^\circ) = 0.39$, $\cos(23^\circ) = 0.92$ を使ってよい。重力加速度の大きさは $g = 10[\text{m/s}^2]$ とする。



図の様に、水平面の適当な所に原点をとり、斜面に平行上向きを x 方向、斜面に垂直上向きを y 方向とする。この座標系は慣性座標系である。小物体にはたらく力は重力 \boldsymbol{G} と、糸が引く力 \boldsymbol{T} と、垂直抗力 \boldsymbol{N} である。図の様に、重力 \boldsymbol{G} は鉛直下向き、糸が引く力 \boldsymbol{T} は斜面平行上向き、垂直抗力 \boldsymbol{N} は斜面垂直上向きである。物体は慣性座標系に対して静止しているのだから、「力のつりあい」 $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ が成り立っている。設定した座標系で物体にはたらく 3 つの力を成分表示すると以下の様になる。

$$\boldsymbol{G} = (-mg \sin 23^\circ, -mg \cos 23^\circ) \quad \boldsymbol{T} = (T, 0) \quad \boldsymbol{N} = (0, N)$$

これらの成分表示を使って「力のつりあい」を表すと以下の様になる。

$$\boldsymbol{G} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} = (T - mg \sin 23^\circ, N - mg \cos 23^\circ) = (0, 0)$$

これらの方程式を解いて、求める力の強さ T と N が以下の様に得られる。

$$T = mg \sin 23^\circ = 5.0 [\text{kg}] \times 10 [\text{m/s}^2] \times 0.39 = 19.5 [\text{N}]$$

$$N = mg \cos 23^\circ = 5.0 [\text{kg}] \times 10 [\text{m/s}^2] \times 0.92 = 46.0 [\text{N}]$$

3. 質量不明の小物体を地面から $v_0 = 15[\text{m/s}]$ である角度に打ち出すと、最高点の地面からの高さは $H = 10[\text{m}]$ であった。物質の最高点での速さ v を答えなさい。重力加速度の大きさは $g = 10[\text{m/s}^2]$ とする。空気の影響は無視できる。

ボールの質量を m と表し、重力による位置エネルギー U を基準に地面にとる。投げた瞬間と最高点の瞬間のボールの運動エネルギー K と位置エネルギー U は以下である。

投げた瞬間	運動エネルギー	$K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$
	位置エネルギー	$U_1 = 0$
最高点の瞬間	運動エネルギー	$K_2 = \frac{1}{2}mv^2$
	位置エネルギー	$U_2 = mgH$

ボールには重力の他に力のはたらいていないから、力学的エネルギー E は保存する。

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_2 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mgH \\
 \Leftrightarrow v_0^2 &= v^2 + 2gH \\
 \Leftrightarrow v^2 &= v_0^2 - 2gH \\
 &= 225 - 200 = 25 [\text{m}^2/\text{s}^2] \\
 \Leftrightarrow v &= 5.0 [\text{m/s}]
 \end{aligned}$$

4. 次の文章のカッコに適当な単語を埋めなさい。

- (1) 電車に乗っていると、減速中に上半身を進行方向に押し付けられるように感じる。この力は（慣性力）と呼ばれるが、本物の力ではない。実際、この現象を地面を基準に考えると、身体は等速度を続けようとする慣性の法則に、電車の床に着いている足だけが電車と共に減速するから、上半身が前のめりになるだけなのである。このような見かけの力であっても、（非慣性）座標系を採用して運動を調べる場合に役に立つ。
- (2) 物体の軸の回りの回転運動を考えると、力よりも（力のモーメント）と呼ばれるベクトルの方が便利である。
- (3) このベクトルの大きさは、力の大きさの他に、軸から力の作用点までの（距離）にも比例する。

5. 授業や試験の感想、要望、文句、その他、何でもよいので書きなさい。

先生に対しての苦情を書くと減点されます。そのため、先生を褒める言葉を記述して下さい。