统计学习实验三：Logistics Regression

王嗣萱 2018110601014

1 实验原理

1.1 Logistic 分布

Logistic 分布是一种连续型的概率分布，其分布函数和密度函数分别为：

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \le x) = \frac{1}{1+e^{-(x-\mu)/\gamma}} \\ f(x) &= F^{'}(X \le x) = \frac{e^{-(x-\mu)/\gamma}}{\gamma(1+e^{-(x-\mu)/\gamma})^2} \end{aligned} \tag{1}$$

其中，μ 表示位置参数，γ 为形状参数。我们可以看下其图像特征：

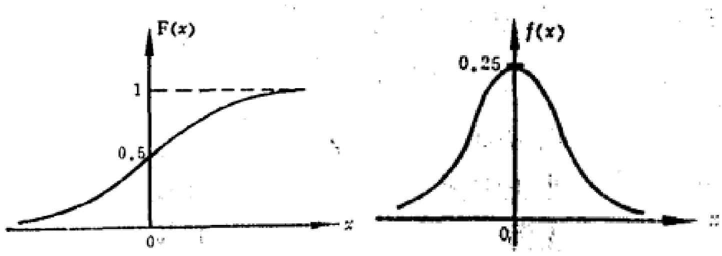


图 1: Logistic 分布

Logistic 分布是由其位置和尺度参数定义的连续分布。Logistic 分布的形状与正态分布的形状相似，但是 Logistic 分布的尾部更长，所以我们可以使用 Logistic 分布来建模比正态分布具有更长尾部和更高波峰的数据分布。在深度学习中常用到的 Sigmoid 函数就是 Logistic 的分布函数在 $\mu = 0, \gamma = 1$ 的特殊形式。

1.2 Logistic 回归

本次实验中考虑'0'，'1' 的二分类问题，即一个伯努利分布。

Sigmoid 函数，也称为逻辑函数（Logistic function）：

$$g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}} \tag{2}$$

逻辑回归的假设函数形式如下：

$$
\begin{aligned}
&h_\theta(x) = g(\theta^T x), g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}} \\
&P(y=1|x;\theta) = h_\theta(x) \\
&P(y=0|x;\theta) = 1 - h_\theta(x)
\end{aligned} \tag{3}
$$

可以将其合并为一个表达式：

$$P(y|x;\theta) = (h_\theta(x))^y (1-h_\theta(x))^{1-y} \tag{4}$$

logistic regression 的目标函数是根据最大似然思想求得的。似然函数为：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} (h_\theta(x^i))^{y^i} (1-h_\theta(x^i))^{1-y^i} \tag{5}$$

对 $L(\theta)$ 求对数可以得到:

$$l(\theta) = -logL(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} [y^i log(h_\theta(x^i)) + (1-y^i) log(1-h_\theta(x^i))] \tag{6}$$

使用 $J(\theta) = \frac{1}{m} l(\theta) = -\frac{1}{N} logL(w)$ 作为 logistic regression 的损失函数

1.3 梯度下降

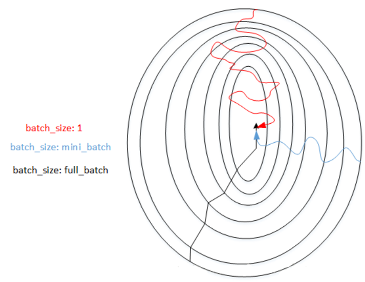


图 2: 梯度下降

批量梯度下降每次迭代时使用所有样本进行梯度的更新，每次更新的梯度就是所有的梯度和，故当目标函数为凸函数时，一定可以达到全局最优，但是由于每次需要使用所有样本，因此训练过程非常慢，并且当样本非常大时将耗费巨大的计算资源和时间。

随机梯度下降每次迭代随机使用一个样本，因此每轮迭代将非常快，但是由于单个样本不能代表全局样本的趋势，故可能无法收敛，同时使最优解的准确度下降，但由于其速度上有非常好的优势，故现在大多数样本较大的机器学习采用该策略。随机梯度下降通常来说使得参数在大体上趋向于最优的，通常会达到最优解附近。

mini-batch 梯度下降则是上述两种方法的折中，每次迭代采用 batch-size 个样本数据来对参数进行更新，故在该方法中 size 的选择通常是较为重要的，选择较好的 size 可以发挥批量梯度下降和随机梯度下降的优势，在较快的速度内完成迭代且最终有着不错的收敛效果。实际上当 size 选择为 1 的时候就是随机梯度下降，当 size 为 data-size 的时候则为批量梯度下降。

2 Python 代码实现

```
import time
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import gzip as gz

x_dim = 28 * 28
y_dim = 2
W_dim = (y_dim, x_dim)
b_dim = y_dim

alpha = 1e-6
batch_size = 5  # 5,17,85,745,12665
epochs_num = 1


def load_data(filename, kind):
  with gz.open(filename, 'rb') as fo:
  buf = fo.read()
  index = 0
  if kind == 'data':
  header = np.frombuffer(buf, '>i', 4, index)
  index += header.size * header.itemsize
  data = np.frombuffer(buf, '>B', header[1] * header[2] * header[3],
     index).reshape(header[1], -1)
  elif kind == 'lable':
  header = np.frombuffer(buf, '>i', 2, 0)
  index += header.size * header.itemsize
  data = np.frombuffer(buf, '>B', header[1], index)
  return data


def init_data():
  X_train = load_data('train-images-idx3-ubyte.gz', 'data')
  y_train = load_data('train-labels-idx1-ubyte.gz', 'lable')
  X_test = load_data('t10k-images-idx3-ubyte.gz', 'data')
  y_test = load_data('t10k-labels-idx1-ubyte.gz', 'lable')
  X_train = np.array(X_train[y_train <= 1, :])
  y_train = np.array(y_train[y_train <= 1])
  X_test = np.array(X_test[y_test <= 1, :])
  y_test = np.array(y_test[y_test <= 1])
  return X_train, y_train, X_test, y_test
```

```
def softmax(x):
  return np.exp(x) / np.exp(x).sum()


def loss(W, b, x, y):
  return -np.log(softmax(np.dot(W, x) + b)[y])  # 预测值与标签相同的
     概率


def L_Gra(W, b, x, y):
  W_G = np.zeros(W.shape)
  b_G = np.zeros(b.shape)
  S = softmax(np.dot(W, x) + b)
  W_row = W.shape[0]
  W_column = W.shape[1]
  b_column = b.shape[0]
  for i in range(W_row):
  for j in range(W_column):
  W_G[i][j] = (S[i] - 1) * x[j] if y == i else S[i] * x[j]
  for i in range(b_column):
  b_G[i] = S[i] - 1 if y == i else S[i]
  return W_G, b_G


def test_accurate(W, b, X_test, y_test):
  num = len(X_test)
  results = []
  for i in range(num):
  y_i = np.dot(W, X_test[i]) + b
  res = 1 if softmax(y_i).argmax() == y_test[i] else 0
  results.append(res)
  accurate_rate = np.mean(results)
  return accurate_rate


def mini_batch(batch_size, alpha, epoches, X_train, y_train, X_test,
    y_test):
  accurate_rates = []
  W = np.zeros(W_dim)
  b = np.zeros(b_dim)
  x_batches = np.zeros(((int(X_train.shape[0] / batch_size), batch_
```

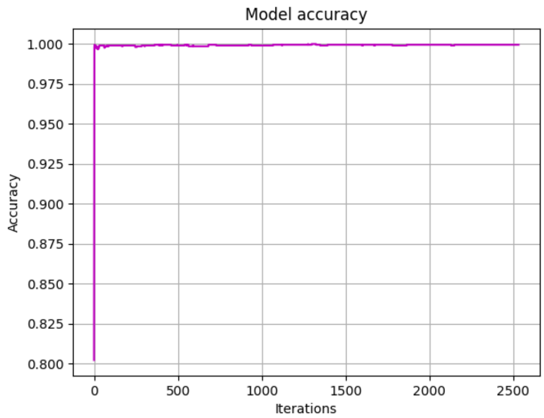
```
        size, 784)))
    y_batches = np.zeros(((int(X_train.shape[0] / batch_size), batch_
        size)))
    batches_num = int(X_train.shape[0] / batch_size)
    for i in range(0, X_train.shape[0], batch_size):
    x_batches[int(i / batch_size)] = X_train[i:i + batch_size]
    y_batches[int(i / batch_size)] = y_train[i:i + batch_size]
    print('Start training...')
    start = time.time()
    for epoch in range(epoches):
    for i in range(batches_num):
    W_gradients = np.zeros(W_dim)
    b_gradients = np.zeros(b_dim)
    x_batch, y_batch = x_batches[i], y_batches[i]
    for j in range(batch_size):
    W_g, b_g = L_Gra(W, b, x_batch[j], y_batch[j])
    W_gradients += W_g
    b_gradients += b_g
    W_gradients /= batch_size
    b_gradients /= batch_size
    W -= alpha * W_gradients
    b -= alpha * b_gradients
    accurate_rates.append(test_accurate(W, b, X_test, y_test))
    end = time.time()
    time_cost = (end - start)
    return W, b, time_cost, accurate_rates


def run(alpha, batch_size, epochs_num, X_train, y_train, X_test, y_
    test):
    W, b, time_cost, accuracys = mini_batch(batch_size, alpha, epochs_
        num, X_train, y_train, X_test, y_test)
    print("Result: accuracy:{:.2%},time cost:{:.2f}".format(accuracys
        [-1], time_cost))
      plt.title('Model accuracy')
      plt.xlabel('Iterations')
      plt.ylabel('Accuracy')
      plt.plot(accuracys, 'm')
      plt.grid()
      plt.show()


if __name__ == '__main__':
```

```
X_train, y_train, X_test, y_test = init_data()
run(alpha, batch_size, epochs_num, X_train, y_train, X_test, y_test
    )
```

3 结果及图形展示




```
Start training...
Result: accuracy:99.95%,time cost:63.51
```

图 3: batch size = 5

由于“1”“0”的差距很大，分类的准确率在前几次就已经达到了需求。

```
Start training...
Result: accuracy:99.91%,time cost:14.68
```

图 4: batch size = 85

```
Start training...
Result: accuracy:99.53%,time cost:11.54
```

图 5: 批量梯度下降

使用的小批量梯度下降和批量梯度下降，对于该二分类问题，二者准确率都足够高。

4 总结体会

通过这次实验，了解了逻辑回归在分类上的作用和成效，其中又对于梯度下降中的小批量梯度下降法（MBGD）有了进一步的了解，虽然对于这个二分类问题中，由于分

成的样本过多导致运行时间过长，但当样本更大时（扩展到十分类问题）MBGD 的效率就会更高。