

# Введение в математический анализ

Вебинар 1. Организационная информация  
Необходимая база по математике

# Немного обо мне

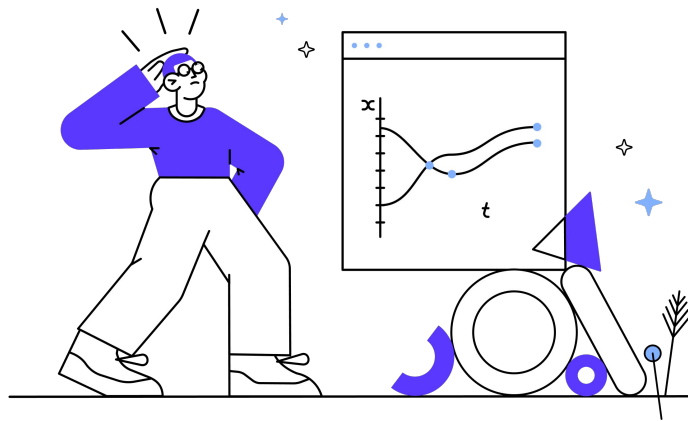
- Бакалавриат: Новосибирский государственный университет
- Магистратура: МГТУ им. Баумана
- Специальность: математическое моделирование, механика жидкости и газа
- Область интересов: вычислительные методы, data science, машинное обучение, методы оптимизации, NLP

# Немного обо мне

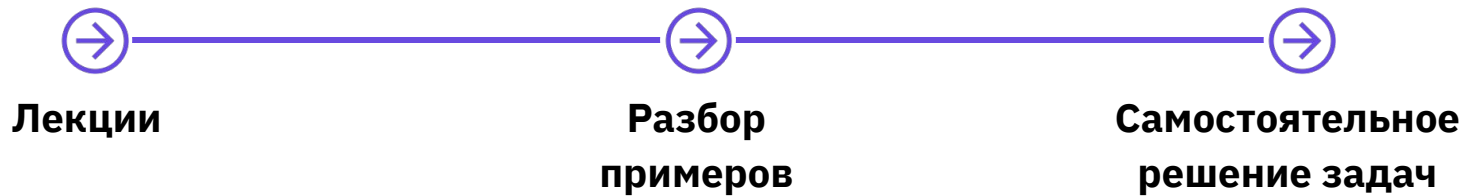
- Живу в Москве
- Работаю в Магните
- Задачи: разработка рекомендательной системы, оптимизация промо акций, отток клиентов, упрощение тарифной линейки

# Для чего нужен курс

- Изучить инструменты математического анализа.
- Применять полученные инструменты на практике. (например, в курсах “Методы оптимизации”, “Искусственные и нейронные сети” и других дисциплинах Data science).
- Читать научную литературу.
- Тренировать математическое мышление.



# Структура курса



# Рекомендации по прохождению курса

1. Выделить время на курс
2. Вести конспект
3. Решать домашнее задание по частям
4. Вопросы по не получившейся части задавать в чат группы или наставнику
5. ...

# Зачем нужна математика неспециалисту?

Математика — это способ правильно рассуждать. Как говорил Фейнман, «математика — это не только язык науки, это — сконцентрированный опыт точного мышления множества людей».

Виктор Васильев

Источник: [knife.media/viktor-vasilyev/](https://knife.media/viktor-vasilyev/)

# Мнение

«Думаю, чрезвычайно важно подчеркнуть, что ситуация, когда вам что-то непонятно, совершенно нормальна. Занимаясь математикой, я нахожусь под властью этого ощущения 90 процентов времени, так что добро пожаловать в мой мир! Замешательство (а порой даже отчаяние) — чувство, неизменно сопровождающее любого математика»

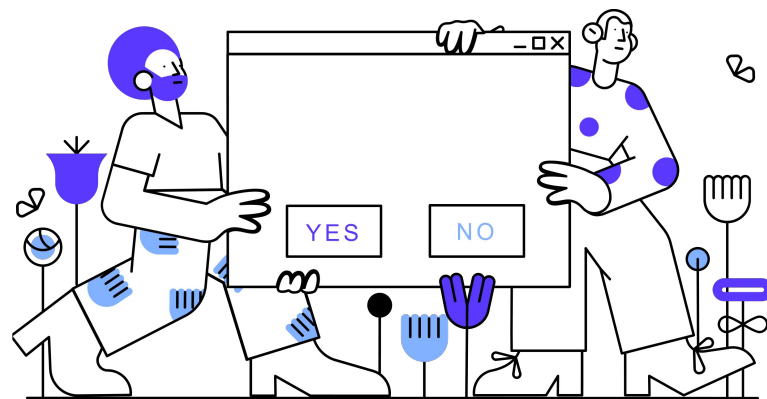
(с) Математик Эдвард Френкель, лауреат премии Германа Вейля, профессор Калифорнийского университета Беркли, автор научно-популярной литературы по математике



# Темы курса

- Множество. Последовательность.
- Функция. Предел функции.
- Производная функции одной переменной.
- Производная функции нескольких переменных.
- Интеграл. Ряды. (Дифференциальные уравнения)

# Тест-викторина



# Чему равно $a^0$

1

1

2

0

3

a

4

1 или 0

Чему равно  $(a^b)^c$

1

$$a^{b^c}$$

2

$$a^{bc}$$

3

$$a^{b+c}$$

# Если производная функции равна нулю:

1

Функция равна нулю в этой точке

2

Касательная к графику функции параллельна оси  $x$

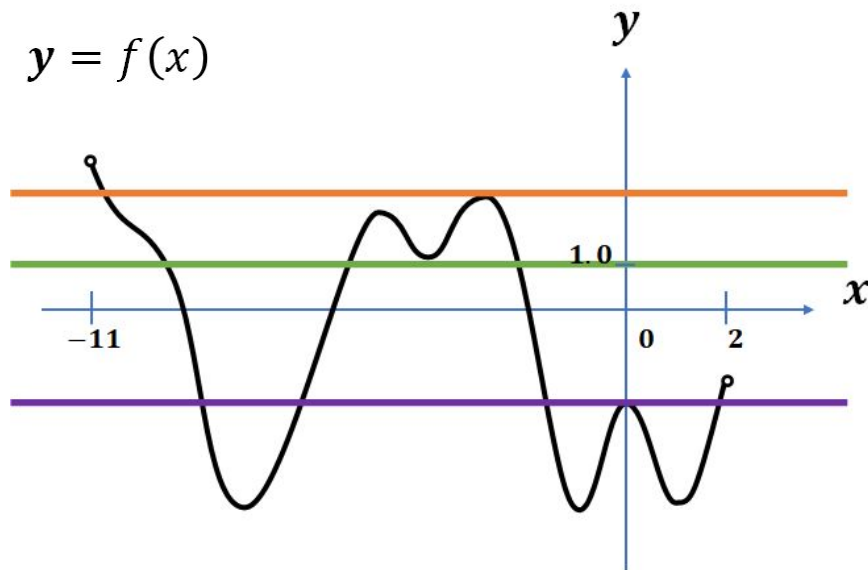
3

Функция принимает максимальное значение в этой точке

4

Функция принимает минимальное значение в этой точке

# Если производная функции равна нулю:



# Сколько существует замечательных пределов?

1

Два

2

Все пределы  
замечательны

3

Один

# Сколько существует замечательных пределов?

**Первый замечательный предел**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Второй замечательный предел**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$



# Полезные ресурсы

- Колесов, Романов «Элементарное введение в высшую математику» - учебник с задачами для начинающих
- [mathprofi.ru/](https://mathprofi.ru/) - высшая математика (разбор задач; задачи для самостоятельного решения; минимум теории)
- [polybook.ru/comma/](https://polybook.ru/comma/) - ОДУ, анализ данных, краевые задачи, нелинейная динамика
- [wolframalpha.com/](https://wolframalpha.com/) - программа для вычислений и анализа данных
- [t.me/physics\\_lib/](https://t.me/physics_lib/) - телеграм канал

# Учебники

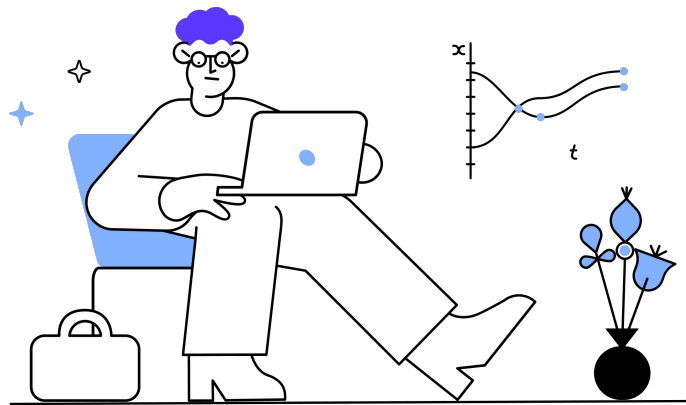
- Фихтенгольц Г. «Основы математического анализа»
- Демидович Б. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу»
- Гоник Л. «Матан. Краткий курс в комиксах»
- Пухначёв Ю. «Семь семинаров по математическому анализу»

# Математика для машинного обучения

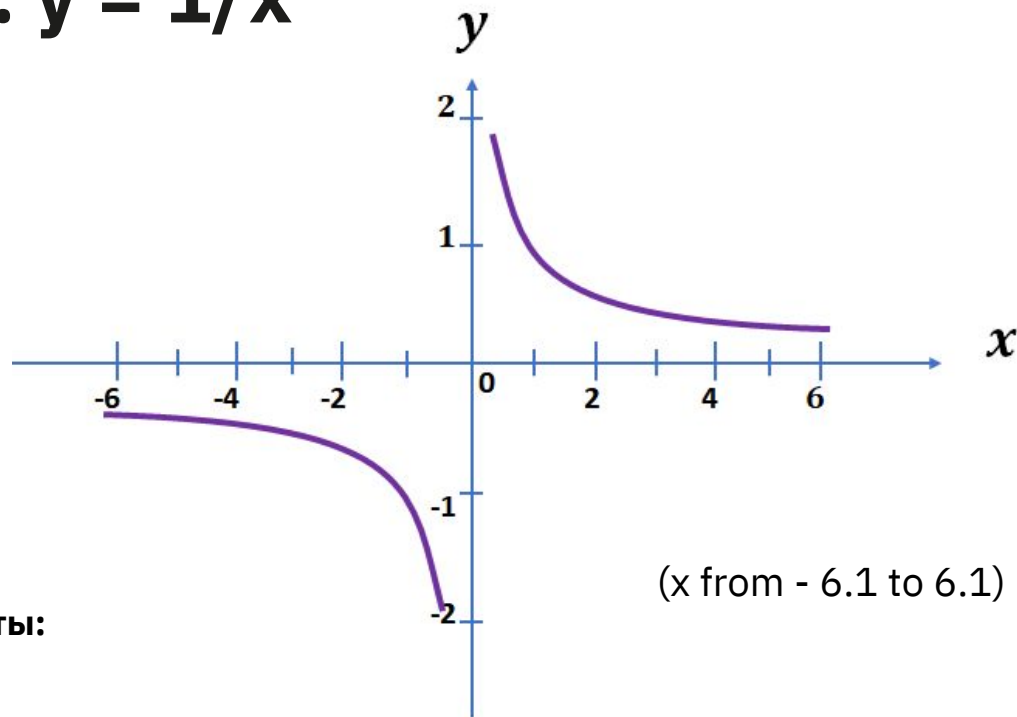
[mml-book.github.io/](https://mml-book.github.io/)

# Что понадобится из базовой математики

1. Графики функций
2. Решение уравнений и неравенств
3. Логарифмы (для дифференцирования некоторых функций и вычисления пределов).
4. Тригонометрические формулы
5. Формулы квадрата разности и разности квадратов
6. ...



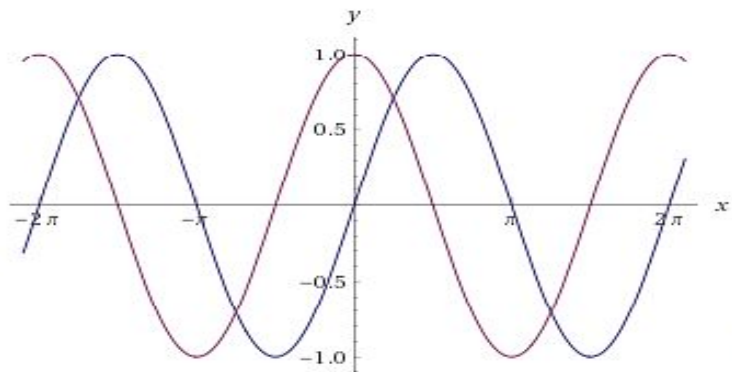
# Гипербола: $y = 1/x$



Подробнее про асимптоты:

[math24.ru](http://math24.ru)

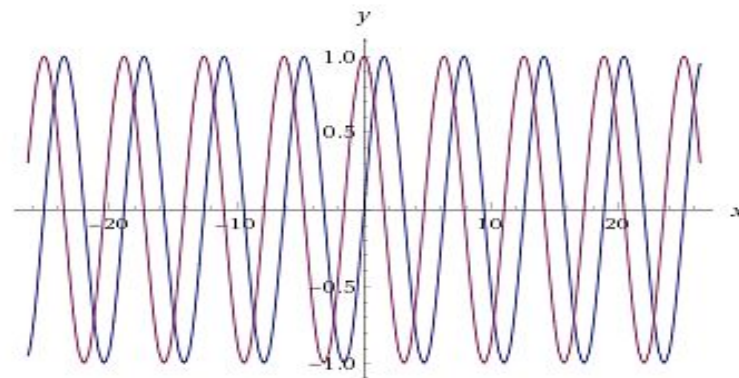
# Тригонометрия: $y=\sin(x)$ ; $y=\cos(x)$



( $x$  from  $-6.6$  to  $6.6$ )

—  $\sin(x)$

—  $\cos(x)$

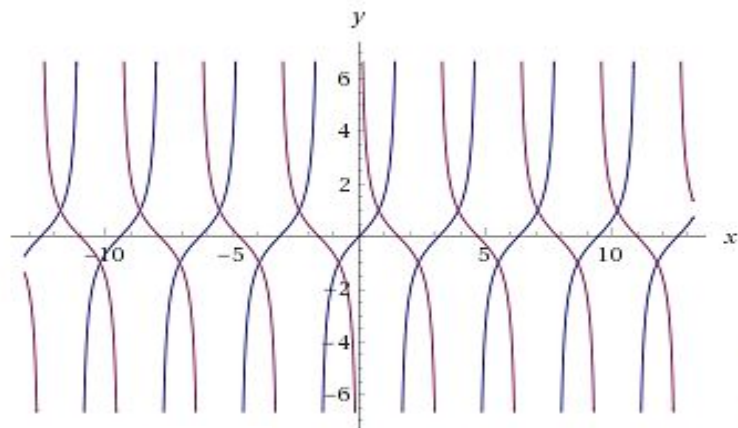


( $x$  from  $-26.4$  to  $26.4$ )

—  $\sin(x)$

—  $\cos(x)$

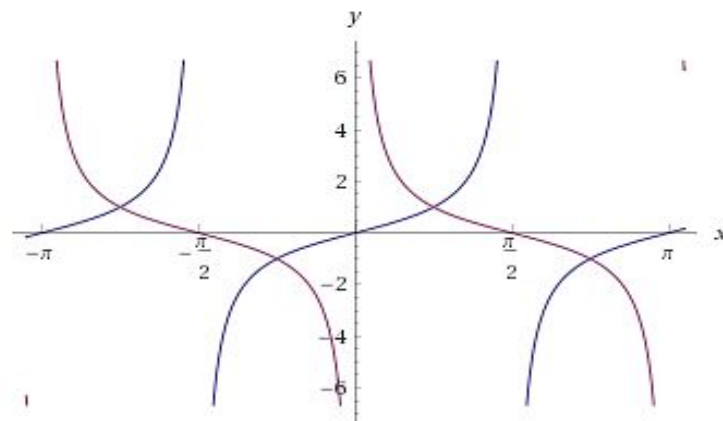
# Тригонометрия: $y=\operatorname{tg}(x)$ ; $y=\operatorname{ctg}(x)$



( $x$  from -13.2 to 13.2)

—  $\operatorname{tg}(x)$

—  $\operatorname{ctg}(x)$



( $x$  from -3.3 to 3.3)

—  $\operatorname{tg}(x)$

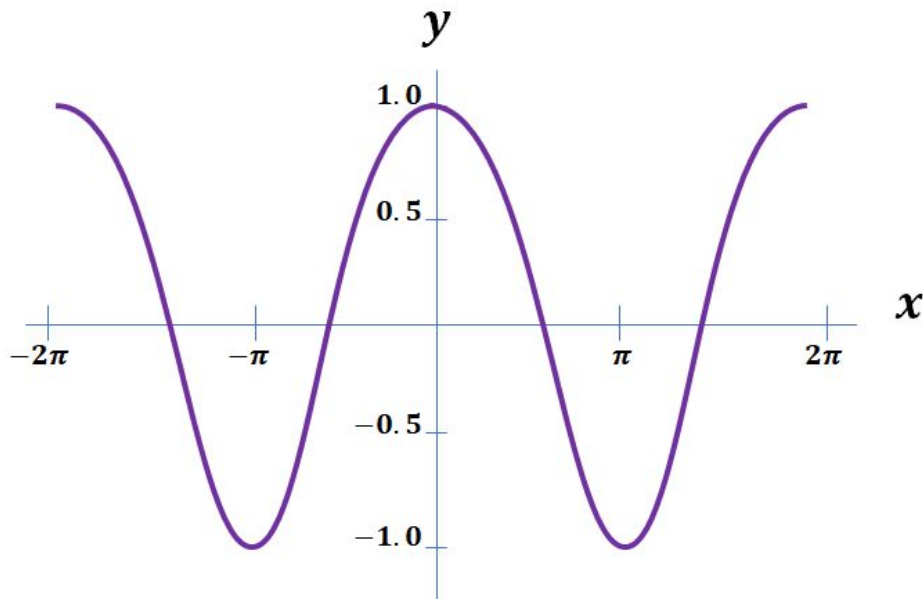
—  $\operatorname{ctg}(x)$

# Тригонометрия: $y=\operatorname{tg}(x)$ ; $y=\operatorname{ctg}(x)$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \pi n - \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$



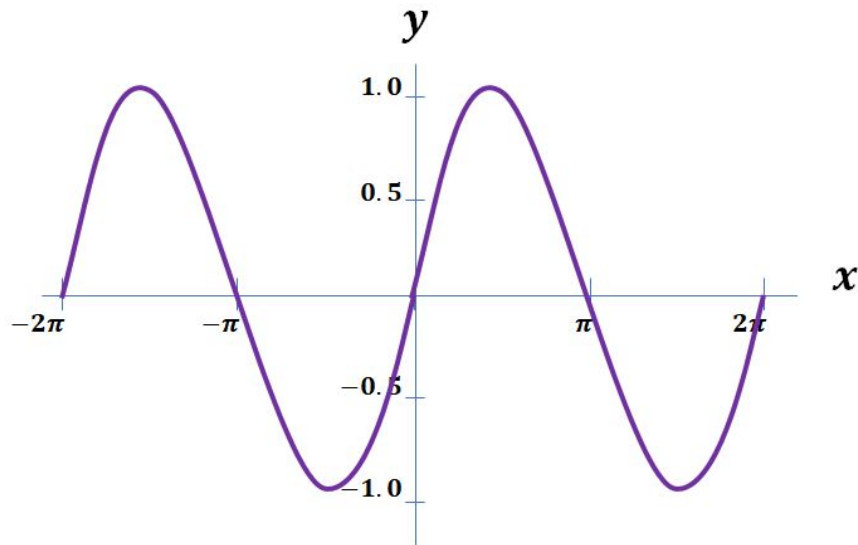


# Тригонометрия: $y=\operatorname{tg}(x)$ ; $y=\operatorname{ctg}(x)$

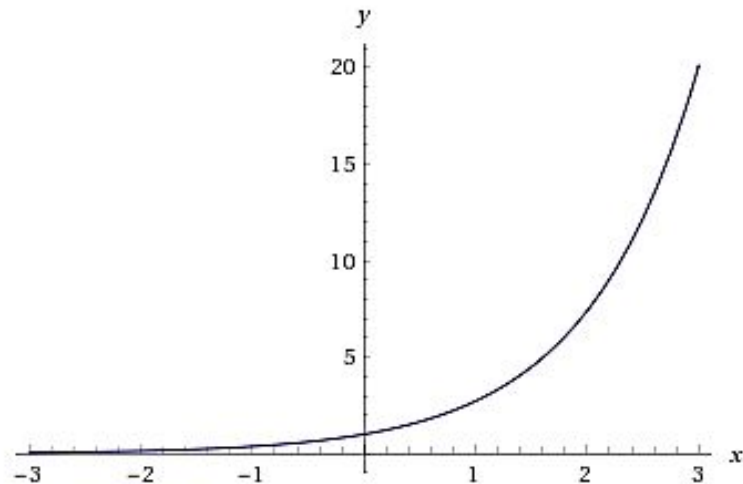
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x = 0$$

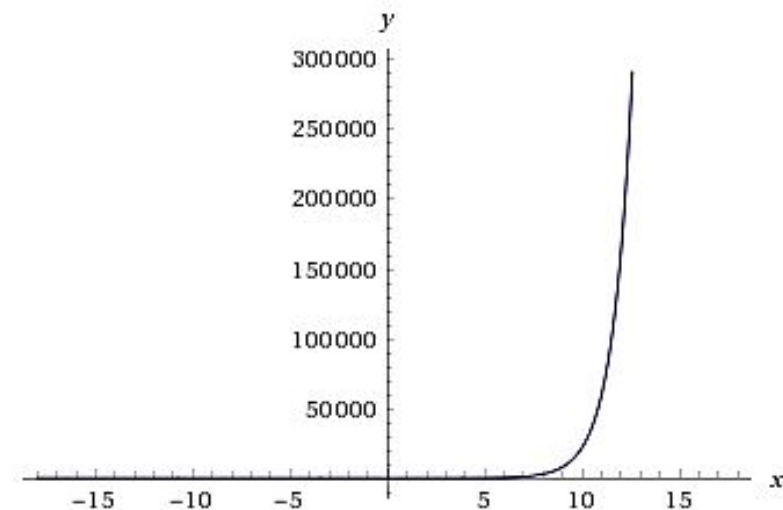
$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



# Экспонента: $y = e^x$

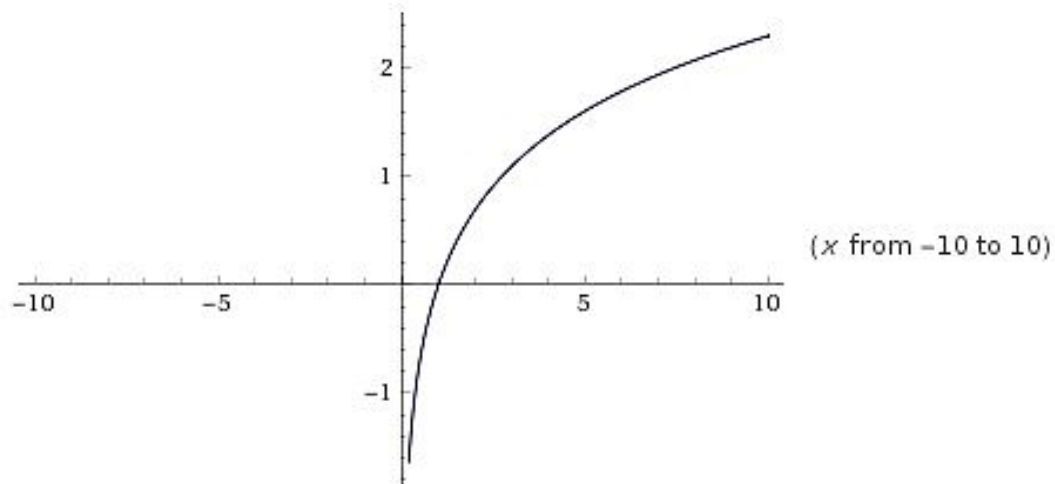


( $x$  from -3 to 3)



( $x$  from -18 to 18)

# Логарифм: $y = \ln(x)$



# Логарифмы: формулы

Определение логарифма:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$
$$b > 0$$

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$
$$a > 0, a \neq 1$$

Почему  $a > 0$ ,  $b > 0$  ???

## Почему $a > 0$ , $b > 0$

$$2^4 = 16$$

$$(-2)^4 = 16$$

$$2^3 = 8$$

или

$$(-2)^3 = -8$$

$$-2(-2)^2 = -8$$

$$-2(2)^2 = -8$$

$$2(2)^2 = 8$$

$$(2)^3 = 8$$

# Логарифмы: формулы

Определение логарифма:

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$

$$\begin{aligned} a &> 0, a \neq 1 \\ b &> 0 \end{aligned}$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$$

$$\log_a x^n = n \log_a|x|$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_{|a|} x$$

$$\log_{a^n} x^n = \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

# Логарифмы: формулы

Определение логарифма:

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$

$$\begin{aligned} a &> 0, a \neq 1 \\ b &> 0 \end{aligned}$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$$

$$\log_a x^n = n \log_a|x|$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_{|a|} x$$

$$\log_{a^n} x^n = \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

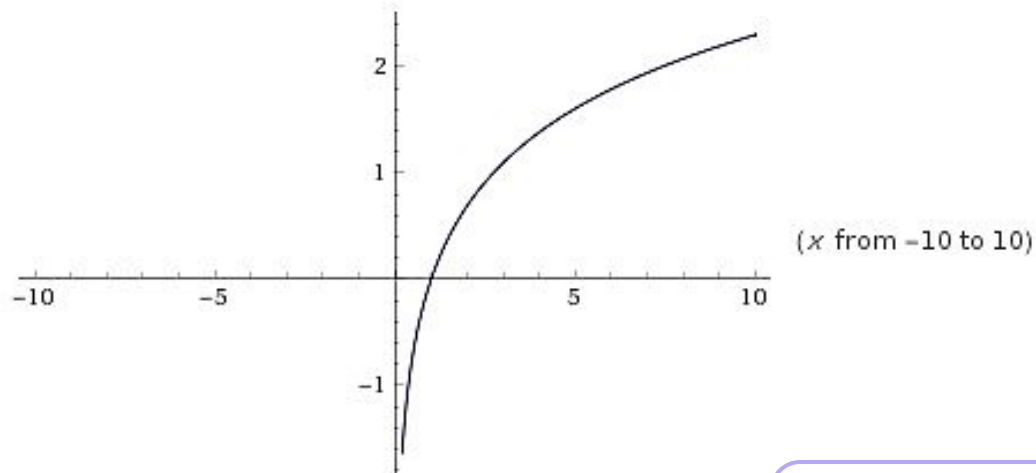
$$a^{(b+c)} = a^b a^c$$

$$a^{(b-c)} = \frac{a^b}{a^c}$$



График  $y=\ln(x)$ , по которому видно, что логарифм может быть меньше или равен нулю.

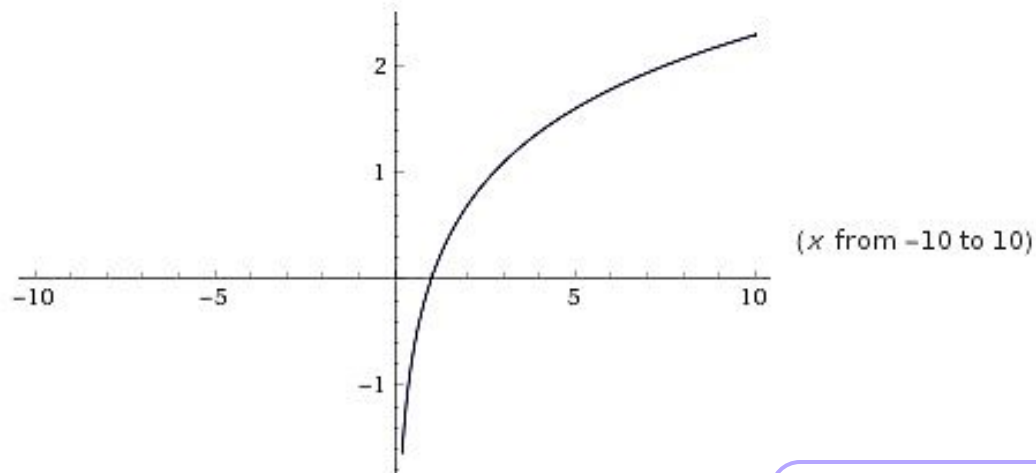
Plot:



Область значений логарифма  
не ограничена.

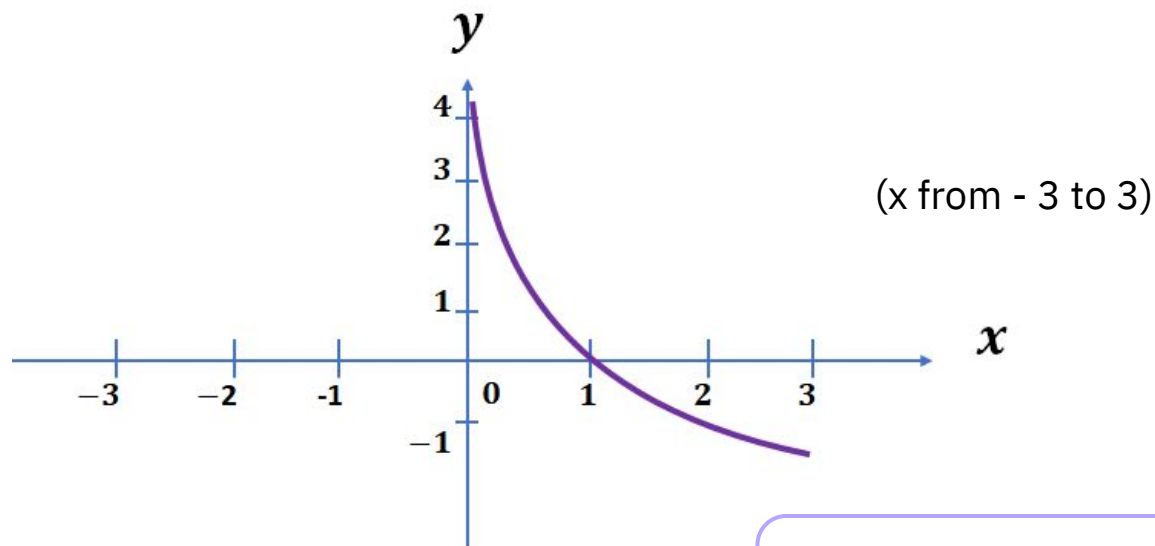
График  $y=\ln(x)$ , логарифм меньше нуля

Plot:



**Случай 1:** основание больше 1 ( $e > 1$ ), подлогарифменное выражение ( $b < 1$ )

График  $y=\ln(x)$ , логарифм меньше нуля



**Случай 2:** основание меньше 1  
( $a < 1$ ,  $a = 0.5$ ), подлогарифменное  
выражение ( $b > 1$ )

Логарифмическое дифференцирование используется для вычисления производных **показательно-степенных функций**

$$y = f(x)$$

$$\ln y = \ln f(x)$$

$$(\ln y)' = (\ln f(x))', \Rightarrow \frac{1}{y} y'(x) = (\ln f(x))'$$

$$y' = y(\ln f(x))' = f(x) (\ln f(x))'$$

## Логарифмы

(пригодятся для вычисления пределов и логарифмического дифференцирования (производные))

$$y = x^x, \quad x > 0.$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$y = x^x, \quad x = 0.$$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = \ln x^x, \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

$$y = x^{\ln x}, x > 0.$$

$$\ln y = \ln(x^{\ln x})$$

$$y = x^{\ln x}, x > 0.$$

$$\ln y = \ln(x^{\ln x})$$

$$\ln y = \ln(x^{\ln x}), \Rightarrow \ln y = \ln x \ln x = \ln^2 x$$



$$y = x^{\cos x}, x > 0.$$

$$\ln y = \ln(x^{\cos x})$$

$$y = x^{\cos x}, x > 0.$$

$$\ln y = \ln(x^{\cos x}), \Rightarrow \ln y = \cos x \ln x.$$

$$y = x^{2x} (x > 0, x \neq 1)$$

$$y = x^{2x} (x > 0, x \neq 1)$$

$$\ln y = \ln x^{2x}, \Rightarrow \ln y = 2x \ln x$$



$$y = (x - 1)^2(x - 3)^5 \quad x > 3$$

$$\ln y = \ln[(x - 1)^2(x - 3)^5]$$

$$y = (x - 1)^2(x - 3)^5$$

$$\ln y = \ln[(x - 1)^2(x - 3)^5]$$

$$\ln y = \ln(x - 1)^2 + \ln(x - 3)^5, \Rightarrow \ln y = 2 \ln(x - 1) + 5 \ln(x - 3)$$



$$y(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}, \quad x > -1.$$

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$$



$$y(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}, \quad x > -1.$$

$$\begin{aligned} \ln y = \ln \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4} &\Rightarrow \ln y = \ln(x+1)^2 - \ln(x+2)^3 - \ln(x+3)^4, \\ &\Rightarrow \ln y = 2 \ln(x+1) - 3 \ln(x+2) - 4 \ln(x+3). \end{aligned}$$



$$y = \sqrt[x]{x}, \quad x > 0$$

$$y = \sqrt[x]{x}, \quad x > 0$$

$$\ln y = \ln(\sqrt[x]{x}), \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$y = \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{x}}$$

$$\ln y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{x}}$$

$$y = \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{x}}$$

ⓘ одз!

$$\ln y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)(x-2)}{x}}, \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} [\ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln x]$$

$$y = x^{x^x} \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$y = x^{x^x} \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$\ln y = \ln(x^{x^x}), \Rightarrow \ln y = x^x \ln x$$

$$\ln y = x^x \ln x \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$\ln \ln y = \ln (x^x \ln x) = \ln x^x + \ln \ln x = x \ln x + \ln \ln x$$

**Больше примеров на логарифмическое дифференцирование здесь:**

[math24.ru/](https://math24.ru/)



# Решение полных квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$x^2 + px + q = 0$  (Теорема Виета – только для приведённых уравнений)

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-7) + 1}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-(-7) - 1}{2} = 3$$

# Алгоритм решения неполного квадратного уравнения

$$ax^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \quad ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$ax^2 - c = 0$$

$$ax^2 = c$$

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$$

# Неполные квадратные уравнения: примеры для тренировки

$$x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 + 8 = 0$$

$$x^2 - 8x = 0$$

# Неполные квадратные уравнения: примеры для тренировки

$$x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + 8 = 0$$

$$x^2 - 8x = 0$$

# Неполные квадратные уравнения: примеры для тренировки

$$x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + 8 = 0$$

$$x^2 = -8$$

$$\emptyset$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}i$$

$$i^2 = -1$$

$$x^2 - 8x = 0$$

# Неполные квадратные уравнения: примеры для тренировки

$$x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + 8 = 0$$

$$x^2 = -8$$

$$\emptyset$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}i$$

$$i^2 = -1$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x - 8) = 0$$

$$x = 0, x = 8$$

**Больше примеров на квадратные уравнения здесь:**

[math10.com/](https://math10.com/)



# Спасибо

