KIVANG ADIGÜZEL

191180003

① Her $n \geq n_0$ değeri için $n_0, c_1, c_2 > 0$ olduğunu göstermeliyiz

- $c_2(f(n)+g(n)) \geq \max(f(n), g(n)) \geq c_1(f(n)+g(n)) \geq 0$ şeklinde gösterilebilir.

Asimptotik olarak negatif olmadığını bildiğimiz için;

$$\left.\begin{array}{l} n_0 > 0 \\ f(n) \geq 0 \\ g(n) \geq 0 \end{array}\right\} \quad f(n)+g(n) \geq \max(f(n), g(n))$$

ve $f(n) \leq \max(f(n), g(n))$

$+\ g(n) \leq \max(f(n), g(n))$

$\frac{1}{2}\Big/\ f(n)+g(n) \leq 2\max(f(n), g(n)) \longrightarrow \frac{1}{2}(f(n)+g(n)) \leq \max(f(n), g(n))$

Bu eşitliklikleri göz önünde bulundurursak $n \geq n_0$ için;

$$0 \leq \frac{1}{2}(f(n)+g(n)) \leq \max(f(n), g(n)) \leq (f(n)+g(n))$$

Sonuç olarak

$\max(f(n), g(n)) = \overset{(teta)}{\Theta}(f(n)+g(n)) \longrightarrow$ çünkü $c_1 = 0.5$, $c_2 = 1$ olarak bulundu!

② $b > 0$ o.ü. a ve b sabitleri için $(n+a)^b = \Theta(n^b)$ doğruluğu araştırılıyor.

$|a| \leq n$ olduğu zaman $n+a \leq 2n$

$|a| \leq n/2$ olduğu zaman $n+a \leq n/2$

Bu eşitsizlikleri göz önünde bulundurursak;

$0 \leq \frac{n}{2} \leq n+a \leq 2n \rightarrow$ bunu bozmadan b üssü ekleyebiliriz

$0 \leq \left(\frac{n}{2}\right)^b \leq (n+a)^b \leq (2n)^b \longrightarrow 0 \leq \frac{n^b}{2^b} \leq (n+a)^b \leq 2^b n^b$

$n_0 = 2|a|$

$c_1 = 1/2^b \quad c_2 = 2^b \xrightarrow{\text{Bu yüzden}} (n+a)^b = \overset{teta!}{\Theta}(n^b)$

③ $f(n) = 2^{n+1}$ ve $g(n) = 2^n$ $\quad f(n) = O(g(n))$?? EVET

3.1/ $2^{n+1} = 2^n . 2 \quad n \geq 1$ için herhangi $c \geq 2$

$0 \leq 2^{n+1} \leq c.2^n$

Bu yüzden ilk kısım doğru

$2^{n+1} = O(2^n)$ ✓

3.2/ $f(n) = 3^{2n} \quad f(n) = O(n)$?

$f(n) = O(g(n)) \rightarrow 3^{2n} = c_1 . n$

Bu durum için $n = 1$ iken $c_1 = 9$ ise doğru

$x \qquad 3^{2x}$

X YANLIŞ

CamScanner ile tarandı

4. Running Time $T(n)$; her $n \geq n_0$ için

$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq T(n) \leq c_2 g(n)$$

$n \geq n_0$ olduğu sürece

- $0 \leq T(n) \leq c_2 g(n)$; $T(n) = O(g(n))$.
  Bu bir üst sınırdır. $\longrightarrow$ En kötü çalışma durumu
  çalışma zamanı : $O(n)$
- $0 \leq c_1 g(n) \leq T(n)$; $T(n) = \Omega(g(n))$
  Bu bir alt sınırdır $\longrightarrow$ En iyi çalışma durumu
  çalışma zamanı : $\Omega(n)$

5. 5.1) $w(f(n)) \cap o(f(n))$

$f > g$ $f \leq g$

Kesiştikleri yer yok

5.2) $\Omega(f(n)) \cap O(f(n))$

$f \geq g$ $f \leq g$ $\rightarrow$ eşitlik durumu kesişim olur. ($f = g$)

* 3. hafta slaytında yer alan bilgilere göre yaptım.

5.1'e şöyle de çözüm getirilebilir $n \geq n_0$ ve $c_1 > 0$ iken

$0 \leq f(n) < c_1 g(n) \rightarrow o(g(n))$ için

$0 \leq c_2 g(n) < f(n) \longrightarrow w(g(n))$ için

Dolayısıyla

$o(g(n)) \cap w(g(n)) \longrightarrow 0 \leq c_2 g(n) < f(n) < c_1 g(n)$

n değeri çok büyüdüğü için eşitsizlik asimptotik olarak doğru olmaz.

⑥ $O(g(n,m)) = \{ f(n,m) :$ pozitif n_0, m_0, c için

$0 \leq f(n,m) \leq c g(n,m) \rightarrow \begin{matrix} n \geq n_0 \\ m \geq m_0 \end{matrix}$ } Birden fazla parametre varsa

$\Omega(g(n,m)) = \{ f(m,n) : c_1, n_0, m_0 > 0,\ 0 \leq c_1 g(m,n) \leq f(n,m)$

$n \geq n_0$ ve $m \geq m_0$

$\theta(g(n,m)) = \{ f(n,m) : c_1, c_2, n_0, m_0 > 0,$

$0 \leq c_1 (g(n,m)) \leq f(n,m) \leq c_2 g(n,m),$

$n \geq n_0$ veya $m \geq m_0$

$\omega(g(m,n)) = \{ f(m,n) :\ n \geq n_0$ ve $m \geq m_0\ ; 0 \leq c g(m,n) < f(m,n) \}$

⑦ $\log(n!) = O(n\log(n))$

$n! = (n-0)(n-1)\dots(n-(n-1)) = n(1-\frac{0}{n})\cdot n(1-\frac{1}{n})\cdot n(1-\frac{2}{n})\dots n(1-\frac{n-1}{n})$

$= n^n(1-\frac{0}{n})(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n}) = n^n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\frac{k}{n})$

$= \log(n!) = \log(n^n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\frac{k}{n})) = \log(n^n) + \log(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\frac{k}{n}))$

$= n\log(n) + \log(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\frac{k}{n})) = O(n\log(n))$

7.2/ $n! = 1.2.3\dots n$ (n kere) n^n

$n! < c.n^n$ her $n \geq 1$ için $\rightarrow$ Buradan big O tanımından

$n! = O(n^n)$ gelir

⑧ $T(n) = O(n^k)$ ise $T(n) = n^{O(1)}$ olduğunu gösteriniz

değer vererek ilerleyeceğim. Başka çözüm getiremedim.

$n=1$ ve $k=1$ olsun $\longrightarrow T(n) = O(n^k) \Rightarrow 1 = 1$

$n=2$ ve $k=2$ olsun $\longrightarrow T(2) = O(2^2) \Rightarrow 2 \neq 4$

$n=3$ ve $k=3$ olsun $\longrightarrow T(3) \neq O(3^3)$

n ve k; 1'e eşitken bu ifade doğrudur.

(9) c, n_0, k sabitleri $n \geq n_0$, $f(n) \leq cn^k \rightarrow$ polinom olarak sınırı olması

$\lg(f(n)) \leq ck\lg n \longrightarrow \lg(f(n)) = O(\lg n)$

ve $\lg n! = \Theta(n\lg n)$ ile $\lceil n \rceil = \Theta(n) \longrightarrow n \geq 1$ için $n \leq \lceil n \rceil \leq 2n$

$$\lg(\lceil \lg n \rceil !) = \Theta(\lceil \lg n \rceil \lg \lceil \lg n \rceil)$$
$$= \Theta(\lg n \lg\lg n)$$
$$= \omega(\lg n)$$

$n > 4$, $\lg n \lg\lg n > \lg n$

$\lg(\lceil \lg n \rceil !) > \lg n$

$$\lceil \lg\lg n \rceil ! = \Theta(\lceil \lg\lg n \rceil \lg \lceil \lg\lg n \rceil)$$
$$= \Theta(\lg\lg n . \lg\lg\lg n)$$
$$= o(\lg\lg n \lg\lg n)$$
$$= o((\lg\lg n)^2) = o(\lg^2 \lg n) = o(\lg n)$$

Bu durumda $\lg^b n = o(n^a)$ polilogaritmik fonks. polinomialden daha yavaş büyüyor. $a=1$ $b=2$

$\lg(\lceil \lg\lg n \rceil !) < \lg n$ sonucu çıkarılabilir.

$\lg(\lceil \lg\lg n \rceil !) = O(\lg n) \longrightarrow \lceil \lg\lg n \rceil !$ polinom olarak sınırlı *

CamScanner ile tarandı

(10) $P(n) = O(n^k)$ en büyük terim $a_d n^d \to n^d$

polinom $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i = a_d n^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i n^i = a_d n^d + n^d \sum_{i=0}^{d-1} a_i n^{i-d}$

$= a_d n^d + n^d \varphi_n \Rightarrow n^d (a_d + \varphi_n)$

$\varphi_n = \sum_{i=0}^{d-1} a_i n^{i-d} \to -0{,}5 a_d \leq \varphi_n \leq 0{,}5 a_d$

$a_d - 0{,}5 a_d \leq a_d + \varphi_n \leq a_d + 0{,}5 a_d$

$n^d (a_d - 0{,}5 a_d) \leq n^d (a_d + \varphi_n) \leq n^d (a_d + 0{,}5 a_d)$

$0{,}5 a_d . n^d \leq n^d (a_d + \varphi_n) \leq 1{,}5 a_d . n^d$

$0{,}5 a_d . n^d \leq p(n) \leq 1{,}5 a_d . n^d \longrightarrow c_1 = 0{,}5 a_d$

$c_2 = 1{,}5 a_d$

$c_1 n^d \leq p(n) \leq c_2 n^d$

$p(n) = \Theta(n^d)$

$k = d$ iken $p(n) = \Theta(n^k)$

10.1) $k \geq d$ iken n^k büyüme hızı $> n^d$

$0 \leq p(n) \leq 1.5 a_d . n^d \leq 1{,}5 a_d . n^k$

$c_1 = 1.5 a_d$ $\quad 0 \leq p(n) \leq c_1 n^k \Longrightarrow p(n) = O(n^k)$

10.2) $n^k \leq n^d$ büyüme hızı $0 \leq 0{,}5 a_d n^k \leq 0{,}5 a_d n^d \leq p(n)$ $\quad c_1 = 0{,}5 a_d$

$p(n) = \Omega(n^k) \longleftarrow 0 \leq c_1 n^k \leq p(n)$

10.3) $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^d (a_d + \varphi_n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_d n^d}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_d}{n^{k-d}} = 0$ dolayısıyla $p(n) = o(n)$

10.4) ω için ele alınırsa

$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^d (a_d + \varphi_n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_d n^d}{n^k} = \lim_{n\to\infty} a_d n^{d-k} = \infty$ dolayısıyla $p(n) = \omega(n)$

11 11.1) $f(n) = n$ ve $g(n) = n^2 . n = O(n^2)$ olurken
$n^2 \neq O(n)$ YANLIŞ

11.2) 11.1'deki gibi düşünelim
$n^2 + n \neq \Theta(\min(n^2, n)) = \Theta(\min(n))$. YANLIŞ

11.3) $f(n) = 2n$ ve $g(n) = n$
$f(n) = O(g(n))$ ama $4^n = 2^{2n} \neq O(2^n)$ YANLIŞ

11.4) $f(n) \geq 1$ olduğu sürece yeterince büyük değerler için (n değerleri)
$0 \leq f(n) \leq c.(f(n))^2 \longrightarrow f(n) = O((f(n))^2)$
ama $f(n) < 1$ için sağlanmaz. YANLIŞ

11.5) $f(n) = O(g(n)) \xrightarrow{\text{her}} n_0, c > 0$ ve $n \geq n_0$ için
$1/c * \; 0 \leq f(n) \leq c.g(n)$ söylenebilir.
Yıldızlı eşitsizlik $1/c$ ile çarpılırsa
$0 \leq \frac{f(n)}{c} \leq g(n)$ elde edilir. Buradan da $\underline{g(n) = \Omega(f(n))}$ DOĞRU

11.6) $f(n) = \underset{2^n}{4^n} . \underset{8^n}{4^n} \neq \underset{8^{n/2}}{\Theta(4^{n/2})} = \underset{4^n}{\Theta(2^n)}$ YANLIŞ

11.7) $g(n) = o(f(n))$; $n \geq n_0$ ve $n_0, c > 0$
$0 \leq g(n) < cf(n)$
$f(n) \leq f(n) + g(n) \leq f(n) + cf(n)$
! $f(n) \leq f(n) + o(f(n)) \leq (1+c) f(n)$ *
$f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$

(12) $f(n) = O(g(n))$ ise $\lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$

$0 \leq f(n) \leq cg(n)$ tüm $n \geq n_0$ değerleri için doğrudur

$\log(f(n)) \in \{h(n) \mid 0 \leq h(n) \leq c' \log(g(n)), \forall n \geq n_0'\}$

$f(n) < cg(n) \longrightarrow \log(f(n)) \leq \log(cg(n)) = \log c + \log(g(n))$

$\log(c) + \log(g(n)) \leq c' \log(g(n)) \longrightarrow n \geq n_0'$ ve $n_0' \geq n_0$

$n_0', c' \rightarrow$ c'ye ve g'ye bağlı

$f(n) = 2$ ve $g(n) = 1$ dersek $f(n) = O(g(n))$

$\lg(f(n)) = 1$, $\lg(g(n)) = 0$, $\lg(f(n)) \neq O \lg(g(n))$

ayrıca $g(n) = 1$ (tüm n değerleri için) ve $f(n) = c \longrightarrow c > 1$

$\log(f(n)) \Rightarrow$ pozitif sabit sayı ve $\log(g(n)) = 0$

$f(n) = O(g(n))$ ise $\lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$

(13) $\frac{f(n)}{g(n)} = O\left[\frac{F(n)}{G(n)}\right]$ Bu iddianın doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz

$f(n) = n^2$ $g(n) = n$ olursa $O\left(\frac{F(n)}{G(n)}\right) = \frac{f(n)}{g(n)}$ sağlanır

$f(n) = n^4$ $g(n) = n^2$ olursa $O\left(\frac{F(n)}{G(n)}\right) = \frac{f(n)}{g(n)}$ sağlanır

$f(n) = n^5$ $g(n) = n^3$ olursa $O\left(\frac{F(n)}{G(n)}\right) = \frac{f(n)}{g(n)}$ sağlanır

Verilen değerlerde doğruluğa aykırı bir şey çıkmadı.

$\frac{f(n)}{g(n)} = O\left[\frac{F(n)}{G(n)}\right]$ doğrudur diyebilir (Değer vererek sonuca ulaşabildim)

CamScanner ile tarandı

(14) 14.2) $c_2 g(n) < f(n) < c_1 g(n)$

$c_4 h(n) \leq g(n) \leq c_3 h(n)$ → Sınırları odaklarsak

$c_2 c_4 h(n) \leq f(n) \leq c_1 c_3 h(n)$

$c_1 . c_3 = c'$ ve $c_2 c_4 = c''$ → $f(n) = \Theta(h(n))$

14.1) $f(n) = O(g(n))$ $g(n) = O(h(n))$

$f(n) \leq c_1 (g(n))$ $f(n) = O(h(n))$

$c_1 g(n) \leq c_2 h(n)$

$c_3 h(n) \geq c_2 h(n) \geq c_1 g(n) \geq f(n)$ → yani c'lerine göre şekillenecek sonucunu çıkarabiliriz

$c_3 < c_2 < c_1$ sağlarsa doğrudur

Kıvanç Adıgüzel
191180003

CamScanner ile tarandı