

Présentation CSI  
Étude de Vlasov-Poisson 1D $x$ -1D $v$   
Optimisation de WENO pour Vlasov-Poisson

Josselin Massot  
Encadré par : Anaïs Crestetto  
et Nicolas Crouseilles

24 avril 2019

- 1 Introduction - Vlasov-Poisson et WENO
- 2 Automatisation de calcul de CFL
- 3 Mise en application dans l'équation de Vlasov

- 1 Introduction - Vlasov-Poisson et WENO
- 2 Automatisation de calcul de CFL
- 3 Mise en application dans l'équation de Vlasov

$$\begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f + E \partial_v f = 0 \\ \partial_x E = \int_{\mathbb{R}} f \, dv - 1 \end{cases}$$

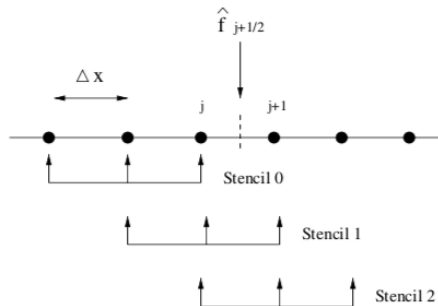
- Filamentation dans la solution
  - Ordre élevé dans l'espace des phases  $(x, v)$
- Approche classique : méthode de *splitting* de Strang
  - **Problèmes** : ordre élevé en temps, passage à Vlasov-Maxwell (*splitting* du champ magnétique  $B$ )

**WENO c'est bien ! ✓**

**MAIS** : instable avec méthode d'Euler explicite en temps (*toy model* pour démonstration, ou simulation test)

- [R. Wang & R. J. Spiteri (2007)] besoin d'au moins "*RK3*" (démonstration faite avec  $WENO^\ell$ )
- [M. Motamed & C. B. Macdonald & S. J. Ruuth (2010)] estimation d'une CFL de  $RK(3,3) - WENO^\ell$

**W**eighted **E**ssentially **N**on-**O**scillatory : schéma  $DF$  non linéaire  
 3 estimations sur 3 *stencils* différents, pondérées (poids non linéaires)



3 étapes de calcul :

- Indicateurs de continuité
- Poids
- Flux

# WENO (les indicateurs de continuité)

Résolution de :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u) \quad , \quad \frac{df^+}{du} \geq 0 \text{ et } \frac{df^-}{du} \leq 0$$

**Indicateurs de continuité** *Indicator of smoothness* :

$$\beta_i^\pm \leftarrow (f_{\llbracket j-2, j+3 \rrbracket}^\pm) \quad , \quad i = 0, 1, 2$$

Approximations de dérivées premières et secondes sur les 3 *stencils*.

$$\beta_0^+ = \frac{13}{12} \left( f_{j-2}^+ - 2f_{j-1}^+ + f_j^+ \right)^2 + \frac{1}{4} \left( f_{j-2}^+ - 4f_{j-1}^+ + 3f_j^+ \right)^2$$

$$\beta_1^+ = \frac{13}{12} \left( f_{j-1}^+ - 2f_j^+ + f_{j+1}^+ \right)^2 + \frac{1}{4} \left( f_{j-1}^+ - f_{j+1}^+ \right)^2$$

$$\beta_2^+ = \frac{13}{12} \left( f_j^+ - 2f_{j+1}^+ + f_{j+2}^+ \right)^2 + \frac{1}{4} \left( 3f_j^+ - 4f_{j+1}^+ + f_{j+2}^+ \right)^2$$

$$\beta_0^- = \frac{13}{12} \left( f_{j+1}^- - 2f_{j+2}^- + f_{j+3}^- \right)^2 + \frac{1}{4} \left( 3f_{j+1}^- - 4f_{j+2}^- + f_{j+3}^- \right)^2$$

$$\beta_1^- = \frac{13}{12} \left( f_j^- - 2f_{j+1}^- + f_{j+2}^- \right)^2 + \frac{1}{4} \left( f_j^- - f_{j+2}^- \right)^2$$

$$\beta_2^- = \frac{13}{12} \left( f_{j-1}^- - 2f_j^- + f_{j+1}^- \right)^2 + \frac{1}{4} \left( f_{j-1}^- - 4f_j^- + 3f_{j+1}^- \right)^2$$



**Poids non normalisés :**

$$\alpha_i^\pm \leftarrow \frac{\gamma_i}{(\epsilon + \beta_i^\pm)^2}, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}_+^* : \sum_k \gamma_k = 1$$

On prend :  $\gamma_0 = \frac{1}{10}, \gamma_1 = \frac{6}{10}, \gamma_2 = \frac{3}{10}$ . Paramètre  $\epsilon = 10^{-6}$

Linéarisation (DL) :  $\alpha_i^\pm = \gamma_i + \mathcal{O}(\Delta x^2)$

**Les poids normalisés :**

$$w_i^\pm \leftarrow \frac{\alpha_i^\pm}{\sum_k \alpha_k^\pm}$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^+ \leftarrow w_0^+ \left( \frac{2}{6} f_{j-2}^+ - \frac{7}{6} f_{j-1}^+ + \frac{11}{6} f_j^+ \right) + w_1^+ \left( -\frac{1}{6} f_{j-1}^+ + \frac{5}{6} f_j^+ + \frac{2}{6} f_{j+1}^+ \right) \\ + w_2^+ \left( \frac{2}{6} f_j^+ + \frac{5}{6} f_{j+1}^+ - \frac{1}{6} f_{j+2}^+ \right)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^- \leftarrow w_2^- \left( -\frac{1}{6} f_{j-1}^- + \frac{5}{6} f_j^- + \frac{2}{6} f_{j+1}^- \right) + w_1^- \left( \frac{2}{6} f_j^- + \frac{5}{6} f_{j+1}^- - \frac{1}{6} f_{j+2}^- \right) \\ + w_0^- \left( \frac{11}{6} f_{j+1}^- - \frac{7}{6} f_{j+2}^- + \frac{2}{6} f_{j+3}^- \right)$$

$$\boxed{(\partial_x f(u))_j \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ (f_{j+\frac{1}{2}}^+ - f_{j-\frac{1}{2}}^+) + (f_{j+\frac{1}{2}}^- - f_{j-\frac{1}{2}}^-) \right]}$$

- 1 Introduction - Vlasov-Poisson et WENO
- 2 Automatisation de calcul de CFL
- 3 Mise en application dans l'équation de Vlasov

**Analyse de von Neumann** : permet l'analyse de schémas linéaires

$$u_{j+k} \mapsto e^{ik\phi}$$

fonction de  $\phi$  : coefficient d'amplification du schéma

- Analyse de schémas non-linéaires possible mais pas systématique
- Écriture du schéma sous la forme :  $(\partial_x u^n) \approx W(\phi)u^n$

**Polynôme caractéristique**  $p$  : permet d'obtenir le domaine de stabilité d'une méthode type Runge-Kutta

$$\{z \in \mathbb{C} / |p(z)| \leq 1\}$$

**CFL**  $\sigma$  : rapport d'homothétie maximal faisant entièrement rentrer le coefficient d'amplification dans un domaine de stabilité

$$\Delta t \leq \sigma \Delta x$$

*toy model*

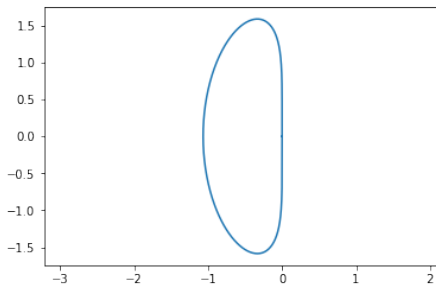
$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(t=0, x) = u^0(x) = \cos(2\pi\kappa x) \\ x \in [0, 1] \end{cases}$$

- Discrétisation WENO en espace  $x$
- Discrétisation RK( $s, n$ ) en temps  $t$

**But** : calculer la CFL du couple RK( $s, n$ ) – WENO5 (*automatiquement*)

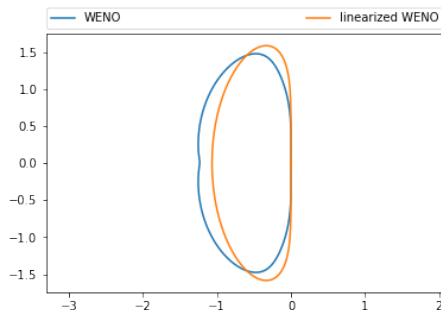
# Coefficient d'amplification de $\text{WENO}^\ell$

Linéarisation de  $\text{WENO}^\ell$  :  $\alpha_i = \gamma_i$  + analyse de von Neumann



# Coefficient d'amplification de WENO

Calculs assistés par ordinateur avec SymPy : analyse de von Neumann sur WENO en espérant que ça marche



Pour des méthodes type Runge-Kutta explicites :

- Pour une méthode  $RK(n,n)$  : troncature du développement de Taylor de l'exponentiel :

$$p^{(n,n)}(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

- Pour une méthode  $RK(s,n)$ ,  $s > n$  :

$$p^{(s,n)}(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^s \alpha_k z^k$$

avec  $\alpha_{n+1} \neq \frac{1}{(n+1)!}$



# Obtention du polynôme caractéristique

Résolution de :

$$\dot{u} = L(u)$$

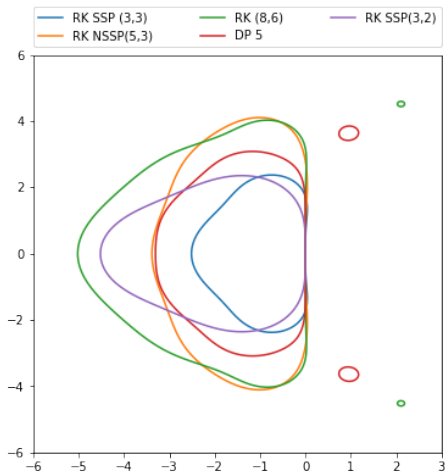
- ❶ Écriture du schéma de la méthode RK à étudier
- ❷  $L(u) \mapsto \lambda u$
- ❸  $\lambda \Delta t \mapsto z$

Exemple RK(3,3) Shu-Osher:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) & \mapsto u^{(1)} &= u^n + \Delta t \lambda u^n \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}) & \mapsto u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \lambda u^{(1)} \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}) & \mapsto u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \lambda u^{(2)} \end{aligned}$$

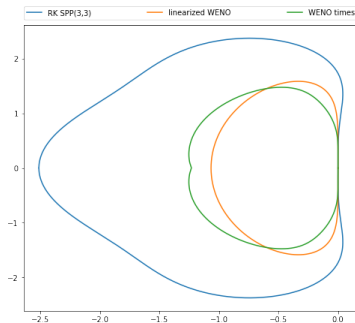
$$u^{n+1} = \underbrace{\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right)}_{p^{(3,3)}(z)} u^n$$

# Exemples de domaines de stabilité



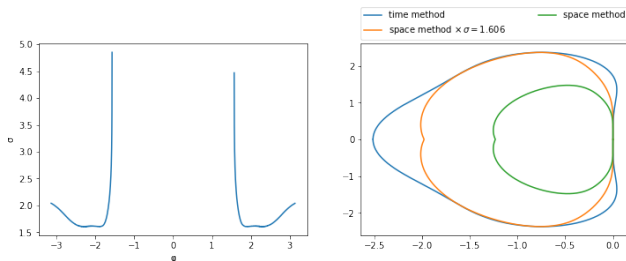
# Estimation automatique de CFL

- 1 Discrétiser  $\phi \in [0, 2\pi] \equiv [-\pi, \pi]$
- 2 Évaluer le coefficient d'amplification sur ces points :  $w(\phi)$
- 3 Évaluer la frontière du domaine de stabilité  $r(\theta)$
- 4  $\forall \phi, \rho(\phi) = \operatorname{argmin}_{r(\theta)}(\arg(r(\theta) - w(\phi)))$
- 5  $\sigma(\phi) = \left| \frac{\rho(\phi)}{w(\phi)} \right|$
- 6 CFL  $\sigma = \min_{\phi} \sigma(\phi)$

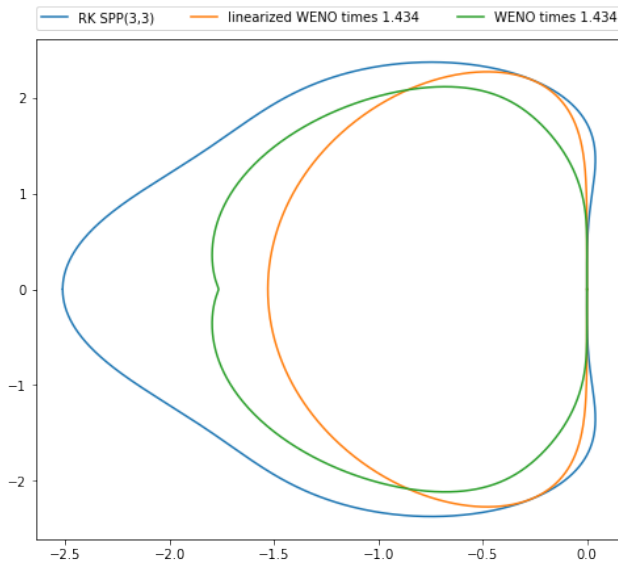


# Quelques CFL

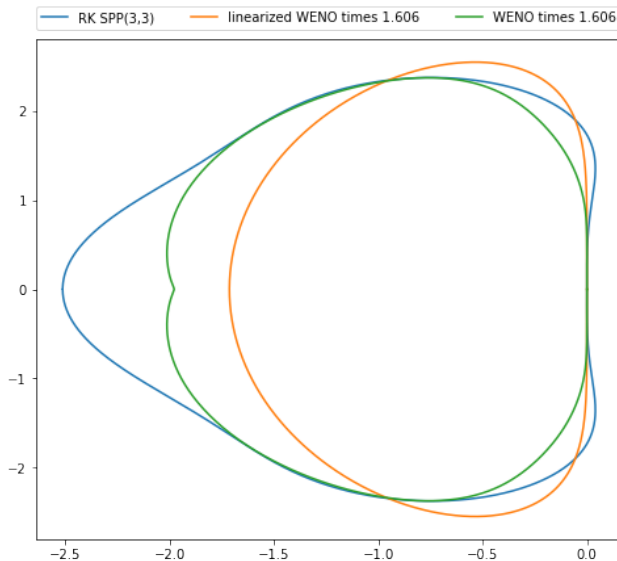
Méthode RK	étages $s$	$\sigma$	Coût par unité de temps $\propto \frac{s}{\sigma}$
WENO <sup>ℓ</sup> -RK(3,3)	3	1.433	—
RK SSP(3,3)	3	1.606	1.86
RK SSP(4,3)	4	1.923	2.08
RK SSP(4,4)	4	1.680	2.38
RK (5,3)	5	2.538	1.97
RK (7,6)	7	1.756	3.99
RK (8,6)	8	2.564	3.12



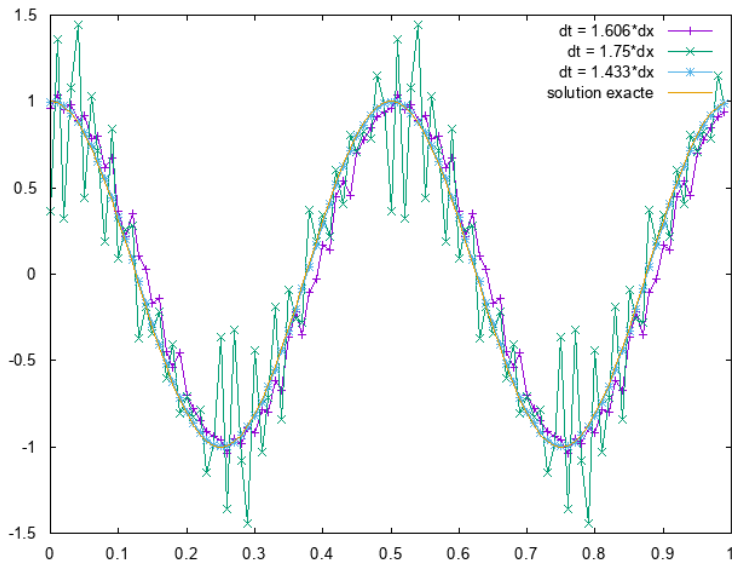
# Quelques CFL



# Quelques CFL



# Validation de CFL



- 1 Introduction - Vlasov-Poisson et WENO
- 2 Automatisation de calcul de CFL
- 3 Mise en application dans l'équation de Vlasov



# Mise en situation dans l'équation de Vlasov

**Problème :** condition CFL dominée par la vitesse

$$\Delta t \leq \sigma \frac{\Delta x}{v_{\max}}, \quad \text{avec } [-v_{\max}, v_{\max}] \equiv \mathbb{R}$$

- FFT en  $x$  de Vlasov-Poisson :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{f} + i\kappa v \hat{f} + \widehat{E \partial_v f} = 0 \\ i\kappa \hat{E} = \widehat{\rho - 1} \end{cases}$$

- Utilisation de schéma de Lawson (IFRK), écriture exponentielle :

$$\begin{cases} \partial_t (e^{i\kappa v t} \hat{f}) + e^{i\kappa v t} \widehat{E \partial_v f} = 0 \\ \hat{E} = -\frac{i}{\kappa} \widehat{\rho - 1} \end{cases}$$

- WENO uniquement pour approximer  $E \partial_v f$ , donc CFL :

$$\Delta t \leq \sigma \frac{\Delta v}{E_{\max}}$$

avec  $E_{\max} \lesssim 0.6$

Résolution de

$$\partial_t u + Lu + N(u) = 0$$

- Écriture exponentielle :

$$\partial_t (e^{Lt} u) + e^{Lt} N(u) = 0$$

- Écriture d'une méthode  $RK(s, n)$  sur

$$\partial_t v + \tilde{N}(v, t) = 0$$

avec  $v = e^{Lt} u$ ,  $\tilde{N}(v, t) = e^{Lt} N(e^{-Lt} v)$

- Réécriture en fonction de  $u$ ,  $L$  et  $N$

Polynôme caractéristique :

$$u^{n+1} = \left( p^{(s, n)}(z) \right) e^{L\Delta t} u^n$$

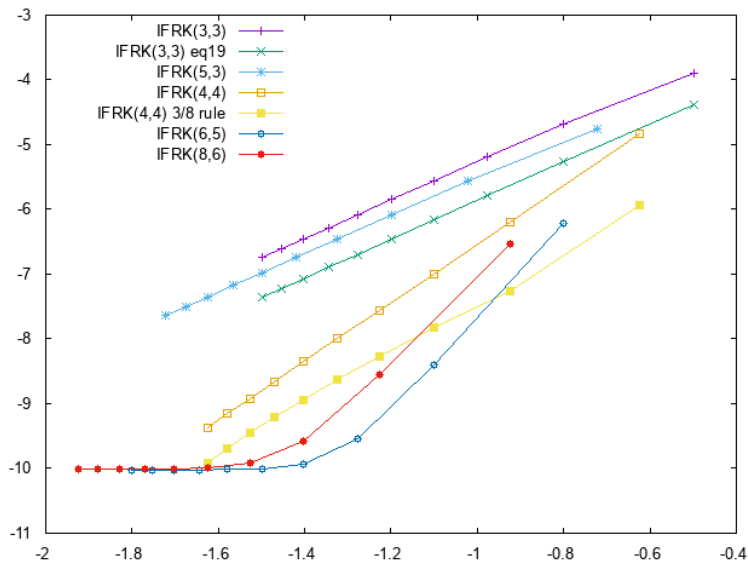
Si  $L \in i\mathbb{R} \Rightarrow$  même stabilité que  $RK(s, n)$

Le modèle de Vlasov-Poisson préserve l'énergie

$$H(t) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} v^2 f \, dv \, dx + \int_{\Omega} E^2 \, dx$$

Mesure de l'erreur  $\left\| \frac{H(t) - H(0)}{H(0)} \right\|_{\infty}$  en fonction du coût numérique  $\frac{\Delta t}{s}$  pour chaque méthode RK( $s, n$ ) étudiée.

# Sélection du meilleur schéma en temps



- Meilleure estimation du coefficient d'amplification de WENO, en étudiant WENO non linéarisé
- Méthode automatique pour évaluer la CFL d'un couple  $RK(s,n)$ –WENO5
- Schéma spectral en  $x$ , WENO en  $v$ , associé au schéma IFRK optimal, avec maximisation de la CFL, validé

Maintenant que le code de simulation est validé, on peut tester différentes modélisations

- Implémenter la résolution d'Euler avec un schéma d'ordre élevé
- Valider une modélisation hybride fluide-cinétique sur différents profils en vitesse ( $\delta_0(v) + \mathcal{M}_{\rho_h, u_h, T_h}$ ) (en lien avec IPP Garching)
- Passer à 1D $\times$ -2D $v$  (Vlasov-Maxwell)
- Comprendre un peu mieux pourquoi l'analyse de von Neumann fonctionne sur WENO-JS et pas WENO-M ou WENO-Z



Isherwood, L., Grant, Z. J., and Gottlieb, S. (2018).

Strong stability preserving integrating factor runge-kutta methods.



Ketcheson, D. (2015).

Nodepy (numerical odes in python) software version 0.6.



Motamed, M., Macdonald, C. B., and Ruuth, S. J. (2010).

On the linear stability of the fifth-order weno discretization.

*Journal of Scientific Computing*, 47:127–149.



Wang, R. and Spiteri, R. J. (2007).

Linear instability of the fifth-order weno method.

*Journal on Numerical Analysis*, 45(5):1871–1901.

Merci de votre attention



Backup

# Modifications de WENO : WENO-M & WENO-Z

WENO-JS : [G.-S. Jiang & C.-W. Shu (1996)]

$$\alpha_i \leftarrow \frac{\gamma_i}{(\epsilon + \beta_i)^2}$$
$$w_i \leftarrow \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_k}$$

*Paramètre :  $\epsilon = 10^{-6}$*

WENO-M : [A. K. Henrick, T. D. Aslam & J. M. Powers (2005)]

$$\alpha_i \leftarrow \frac{\gamma_i}{(\epsilon + \beta_i)^2}$$
$$w_i \leftarrow \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_k}$$
$$g_i \leftarrow w_i \left( \frac{\gamma_i + \gamma_i^2 - 3w_i\gamma_i + w_i^2}{\gamma_i^2 + w_i(1 - 2\gamma_i)} \right)$$
$$w_i \leftarrow \frac{g_i}{\sum g_k}$$

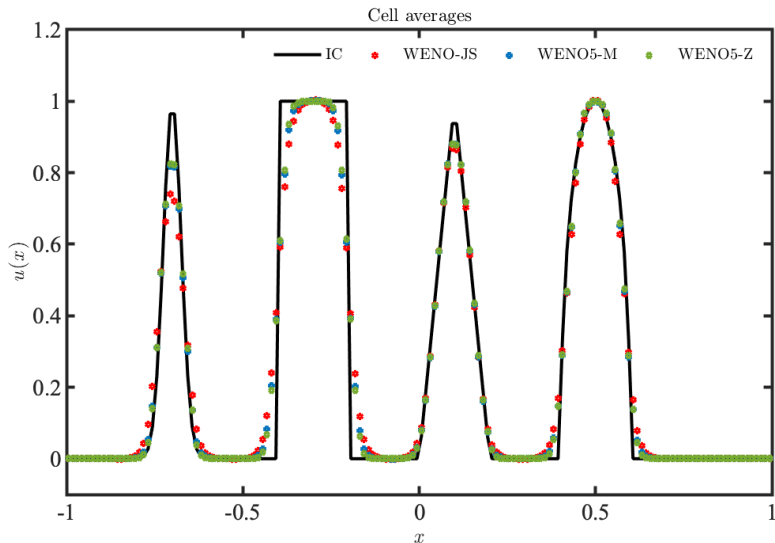
*Paramètre :  $\epsilon = 10^{-6}$*

WENO-Z : [R. Borges, M. Carmona, B. Costa & W. S. Don (2008)]

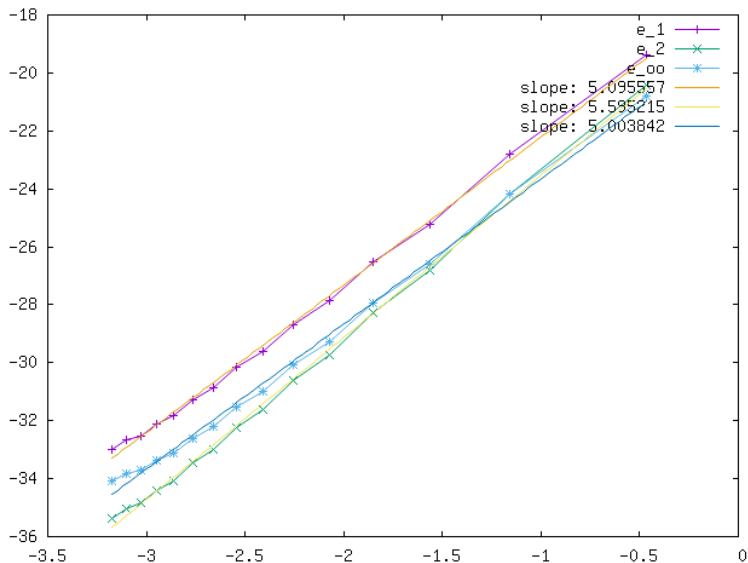
$$\alpha_i \leftarrow \gamma_i \left( 1 + \frac{\tau_5}{\epsilon + \beta_i} \right)$$
$$w_i \leftarrow \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_k}$$

*Paramètres* :  $\epsilon = 10^{-40}$ ,  $\tau_5 = |\beta_0 - \beta_2|$

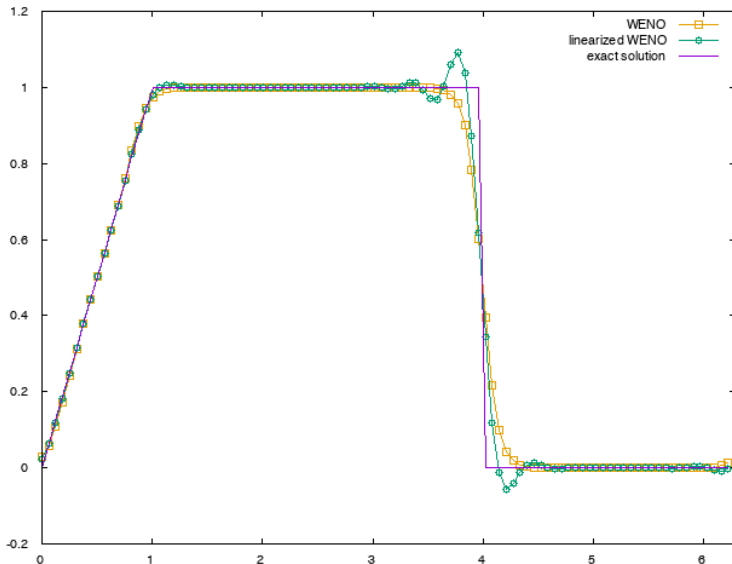
# Modifications de WENO : WENO-M & WENO-Z



## Mesure de l'ordre



## Réaction à une discontinuité



## Test sur une fonction chapeau

