بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

درس ریاضیات گسسته، نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

استاد درس: دکتر چهرقانی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

پاسخنامه تمرین سری اول

سوال ۱:

سه نفر از دانشجویان ورودی ۹۹ و پنج نفر از دانشجوهای ورودی ۱۴۰۰ دانشکده کامپیوتر تصمیم گرفته‌اند برای سه تا از دوستانشان که در ماه مهر به دنیا آمده‌اند و همگی ورودی ۹۹ هستند، تولد بگیرند. در هریک از شرایط زیر مشخص کنید این ۱۱ دوست به چند روش می‌توانند دور یک میز بنشینند.

الف) بدون هیچ قیدی؟

ب) همه متولدها کنار یکدیگر نشسته باشند تا عکس‌برداری از آن‌ها راحت‌تر شود؟

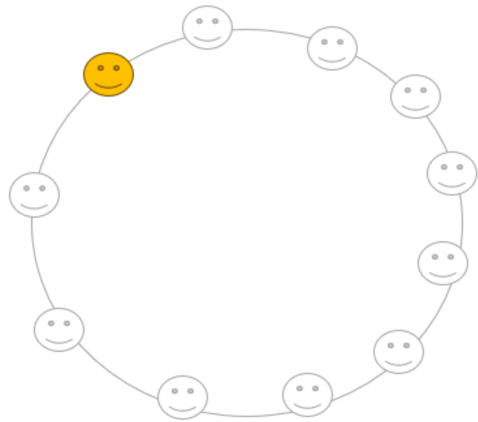
ب) هیچ دو متولدی کنار یکدیگر نباشند ؟

د) همه دانشجویان یک ورودی کنار هم باشند؟

پاسخ:

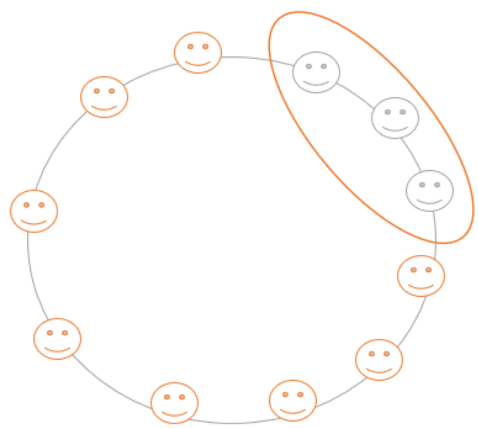
الف) $10!$

کافی است یکی از افراد را ثابت در نظر بگیریم. (به دلیل دایره‌ای بودن میز)



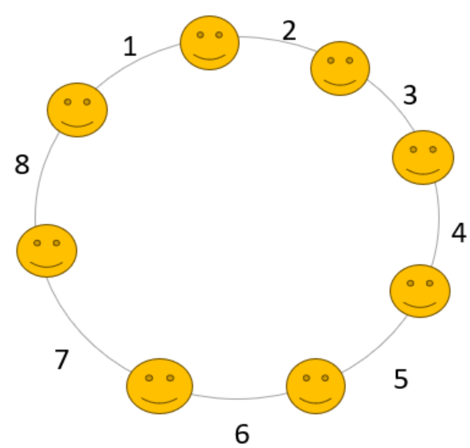
ب) $8! \times 6$

سه متولد را یکنفر در نظر می‌گیریم. بنابراین چیدمان 9 نفر ($11 - 3 + 1 = 9$) دور میز را به دست می‌آوریم که برابر با $8!$ خواهد بود. و سه نفر متولد نیز به $3 \times 2 \times 1$ حالت می‌توانند جا به جا شوند.



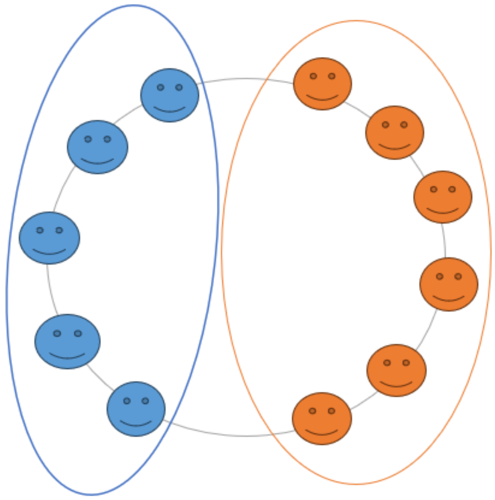
ج) $7! \times \binom{8}{3} \times 6 = 7! \times 56 \times 6$

غیر متولدها به $7!$ حالت امکان نشستن دور میز را دارند. کافی است جایگاه متولدها را از بین ۸ جایگاهی که در زیر با شماره‌های ۱ تا ۸ مشخص شده است، انتخاب کنیم و نهایتا جایگشت نشستن متولدها خود ۶ حالت است.



د) $1 \times 6! \times 5!$

تعداد ورودی‌های ۹۹ و ۱۴۰۰ به ترتیبت ۶ و ۵ نفر هستند. مشابه قسمت ب هر ورودی را یک فرد در نظر می‌گیریم. در این صورت به ۱ حالت امکان قرار دادن ورودی‌ها کنار یکدیگر وجود دارد. و جایگشت نشستن ورودی‌های ۹۹ و ۱۴۰۰ به ترتیب برابر خواهد بود با $6!$ و $5!$



سوال ۲:

رویداد لینوکس‌فست[1] دانشکده مهندسی کامپیوتر امیرکبیر هرساله ارائه‌ها و کارگاه‌های مختلف در زمینه نرم‌افزار آزاد و لینوکس ارائه می‌دهد. در سال جاری ۴ شرکت A، B، C و D حامیان مالی رویداد هستند. انجمن علمی دانشکده به عنوان برگزارکننده رویداد قصد دارد برای برگزاری ۱۰تا از کارگاه‌های رویداد از حامیان کمک بگیرد.

الف) به چند روش می‌توان شرکت برگزارکننده هر کارگاه را تعیین کرد ؟

ب) اگر ترتیب کارگاه‌ها اهمیتی نداشته باشد و فقط تعداد کارگاه‌های هر شرکت مهم باشد، به چند طریق مختلف می‌توان کارگاه‌ها را بین شرکت‌ها تقسیم کرد ؟

توضیح: مثلا ۶، ۳، ۱، ۰ یک نمونه از تقسیم‌بندی کارگاه‌هاست. به این معنی که شرکت A شش کارگاه، شرکت B سه کارگاه، شرکت C یک کارگاه را برگزار می‌کنند و به شرکت D کارگاهی تعلق نمی‌گیرد.

ج) اگر ترتیب مهم نباشد و هر شرکت تقاضا داشته باشد که حداقل دو کارگاه برگزار کند، چه تعداد حالت مختلف برای تقسیم‌بندی وجود خواهد داشت؟

[1] فیلم‌های سال‌های پیش رویداد لینوکس فست

د) اگر تعداد کل کارگاه‌ها بتواند بین ۱۰ تا ۱۴ متغیر باشد و هر شرکت تقاضای برگزاری حداقل ۱ کارگاه را داشته باشد، تعداد حالت‌های تقسیم‌بندی چندتا خواهد شد ؟

پاسخ:

الف) 4^{10}

برای هر کارگاه ۴ انتخاب وجود دارد.

ب)$\binom{13}{3}$

مسئله معادل یافتن تعداد پاسخ‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ است به گونه‌ای که x_1, x_2, x_3 و x_4 همگی عدد صحیح باشند.

ج) $\binom{10-8+3}{3} = \binom{5}{3}$

مشابه قسمت ب است. صرفا اعداد x_1, x_2, x_3 و x_4 بزرگتر یا برابر 2 باید باشند. برای حل چنین مسئله‌ای می توانیم ابتدا ۲ واحد را به هریک از متغیرها اختصای دهیم. مقدار باقی‌مانده 2= 8-10 خواهد بود. و فرض کنیم مجموع متغیرها برابر 2 است.

د) $\binom{9}{3} + \binom{10}{3} + \binom{11}{3} + \binom{12}{3} + \binom{13}{3}$

تعداد پاسخ‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$ به ازای k=10, 11, 12, 13, 14 به ازای x_1, x_2, x_3 و x_4 های طبیعی پاسخ ما است.

سوال ۳:

با کمک اصول جمع و ضرب به سوالات زیر پاسخ دهید. (شما مجاز به استفاده از هر گونه راه‌حلی به غیر از اصول ضرب یا جمع نیاز می باشید.)

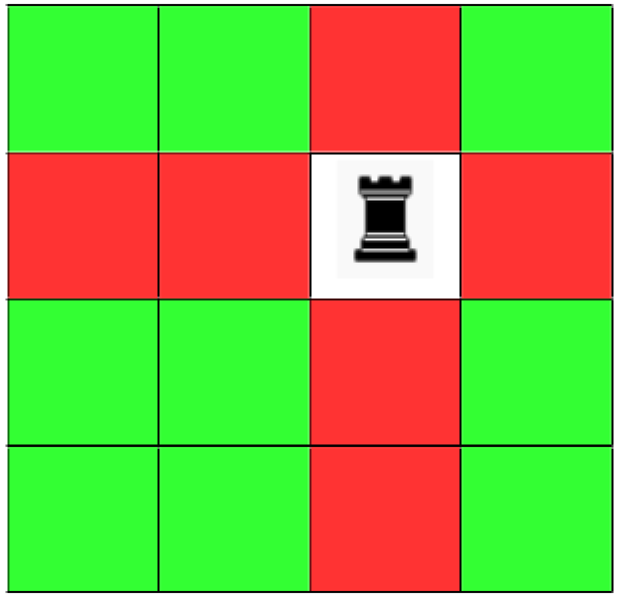
الف) فرض کنید چهار مهره رخ متفاوت داریم. به چند طریق می‌توان این مهره‌ها را در یک صفحه‌ی ۴ × ۴ قرار داد به طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟

ب) در قسمت ب اگر رخ‌ها متفاوت نباشند، پاسخ چه خواهد بود ؟

ج) اگر تجزیه‌ی عدد طبیعی n به عوامل اول به صورت $n = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times \ldots \times {p_k}^{a_k}$ باشد. ثابت کنید تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n برابر با $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_k + 1)$ است.

پاسخ:

الف) رخ‌ها را با شماره‌های ۱ تا ۴ نام‌گذاری می‌کنیم. رخ شماره ۱ برای قرار گرفتن در جدول، ۱۶ حالت دارد. با قرار گرفتن رخ شماره ۱، ۹ خانه برای قرار گرفتن دیگر رخ‌ها می‌ماند (طبق شکل زیر).



پس از قرار دادن رخ شماره ۱، رخ شماره ۲، ۹ حالت برای قرار گرفتن در جدول دارد. به همین ترتیب رخ‌های بعدی به ترتیب ۴ و ۱ حالت برای قرار گرفتن در جدول خواهند داشت. پس طبق اصل ضرب پاسخ برابر با مقدار زیر است:

$$۱۶ \times ۹ \times ۴ \times ۱ = ۵۷۶$$

ب)

در این قسمت رخ‌ها با یکدیگر تفاوتی ندارند و نباید آن‌ها را شماره‌گذاری کنیم. در هر سطر باید دقیقا یک رخ قرار بگیرد. قرار دادن رخ در سطر اول، ۴ حالت دارد. حال یکی از خانه‌های سطر دوم مورد تهدید است و قرار دادن رخ در آن ۳ حالت دارد. به همین ترتیب قرار دادن رخ در سطرهای سوم و چهارم، به ترتیب ۲ و ۱ حالت دارد. پس پاسخ برابر

$$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

راه حل دوم:

هر $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$ پاسخ از قسمت ب یک پاسخ برای قسم ج خواهند بود. بنابراین $\frac{۵۷۶}{۲۴} = ۲۴$

ج)

عامل اول p_i را در نظر بگیرید. توان این عامل در یک مقسوم‌علیه مثبت از n یا ۰ است یا ۱ است، یا ...یا a_i است. بنابراین توان این عامل در یک مقسوم‌علیه مثبت از n، $a_i + ۱$ حالت دارد. به همین صورت برای سایر عوامل نیز خواهیم داشت. پس طبق اصل ضرب، پاسخ برابر با :

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_k + 1)$$

سوال ۴:

چارت آموزشی دانشکده[۲] را در نظر بگیرید. می‌دانیم هر دانشجو باید در انتهای دوره کارشناسی با درنظر گرفتن واحدهایی که اتخاذ کرده است دو بسته را به عنوان بسته‌های اصلی و فرعی به آموزش دانشکده اعلام کند. و نهایتا هر نفر باید مجموعا ۱۰ درس **متفاوت** از دروس تخصصی (۶ درس از بسته اصلی و ۴ درس از بسته فرعی) و ۵ درس به عنوان دروس اختیاری را گذرانده باشد. درصورتی که دانشجویی بخواهد یکی از دو بسته" شبکه‌های کامپیوتری" و "هوش مصنوعی" بسته اصلی‌اش و دیگری بسته‌ی فرعی‌اش باشد، چند راه مختلف برای انتخاب دروسش دارد؟

نکات زیر را به منظور ساده‌سازی حل درنظر بگیرید.

- پیش‌نیاز/ هم‌نیازی اهمیتی ندارد و تمام واحدها همواره ارائه می‌شوند. یعنی دانشجویان می‌توانند هر واحدی که بخواهند را اخذ کند.
- دروس اختیاری صرفا از بین بخش "دروس اختیاری" (صفحه ۲۱ و ۲۲ چارت) می‌توانند باشند.

مثلا واحدهای زیر به عنوان واحدهایی نهایی یک دانشجو با بسته اصلی "شبکه‌های کامپیوتری" و بسته‌ی فرعی "هوش مصنوعی" معتبر هستند.

[۲] صفحات ۱۷ تا ۲۳ چارت

سته تخصصی شبکه‌های کامپیوتری

	کد درس	عنوان
⇦	CE222	سیگنال‌ها و سیستم‌ها
⇦	CE261	برنامه‌نویسی وب
	CE361	انتقال داده‌ها
⇦	CE362	مبانی امنیت اطلاعات
	CE363	سیستم‌های چندرسانه‌ای
⇦	CE364	برنامه‌نویسی دستگاه‌های سیار
⇦	CE422	مبانی رایانش ابری
⇦	CE461	مبانی اینترنت اشیا

بسته تخصصی هوش مصنوعی

	کد درس	عنوان
⇦	CE221	طراحی الگوریتم‌ها
	CE222	سیگنال‌ها و سیستم‌ها
⇦	CE251	مبانی و کاربردهای هوش مصنوعی
⇦	CE351	مبانی هوش محاسباتی
	CE352	اصول علم ربات
⇦	CE451	مقدمه‌ای بر بیوانفورماتیک
	CE452	داده کاوی
	CE421	بازیابی اطلاعات

درس‌های اختیاری

	کد درس	عنوان
⇦	CE371	گرافیک کامپیوتری
⇦	CE372	تعامل انسان و کامپیوتر
	CE373	کارگاه ساخت ربات
⇦	CE374	طراحی بازی‌های کامپیوتری
⇦	CE375	نظریه محاسبات
⇦	CE376	شبیه‌سازی کامپیوتری
	CE377	مبانی پویانمایی کامپیوتری
	CE378	مدیریت پروژه فناوری اطلاعات
	CE379	تجارت الکترونیکی

پاسخ:

$$\binom{22}{5}\left[(21\times 35)+(7\times 70)+(35\times 7)+(35\times 28)\right]=\binom{22}{5}\times 2450$$

بسته‌های شبکه و هوش در درس سیگنال و سیستم‌ها مشترک هستند. هر دو بسته شبکه و هوش ۸ درس را شامل می‌شوند.

تعداد راه‌های انتخاب دروس تخصصی به شرح زیر است.

1 - شبکه اصلی و هوش فرعی باشد.

- درس سیگنال به عنوان درسی از بسته شبکه اخذ شود: $\binom{7}{5}\times\binom{7}{4}=21\times 35=735$

روش به دست‌آوردن: درس سیگنال حتما جزو درس‌های انتخابی شبکه است. بنابراین ۵ درس دیگر برای بسته اصلی(شبکه) باید از بین ۷ درس باقی‌مانده انتخاب شود. به دلیل اخذ درس سیگنال در بسته اصلی، نمی توان آن را در بسته فرعی نیز اخذ کرد. بنابراین از بین ۷ درس باقی‌مانده‌ی بسته هوش باید ۴ درس اخذ شود.

- درس سیگنال به عنوان درسی از بسته شبکه اخذ نشود: $\binom{7}{6}\times\binom{8}{4}=7\times 70=490$

2 - هوش اصلی و شبکه فرعی باشد.

- درس سیگنال به عنوان درسی از بسته شبکه اخذ شود: $\binom{7}{3}\times\binom{7}{6}=35\times 7=245$

- درس سیگنال به عنوان درسی از بسته شبکه اخذ نشود: $\binom{7}{4} \times \binom{8}{6} = 35 \times 28 = 980$

۲۲ درس اختیاری داریم بنابراین تعداد راه‌های انتخاب دروس اختیاری = $\binom{22}{5}$

سوال ۵:

با توجه به قضیه بسط دو جمله‌ای و تعمیم یافته‌ی آن (بسط چندجمله‌ای) ضریب عبارت هر قسمت را تعیین کنید.

الف) x^8y^4 در $(x + y)^{12}$

ب) x^3y^4 در $(2x - 3y)^7$

ب) wy^2x^1 در $(w + 2x + y)^4$

ج) $w^2x^3y^1z^4r^7$ در در $(v + 3w + 2x + y - z - 2r)^{17}$

پاسخ:

الف) $\binom{12}{4}$

ب) $(-3)^4 \times 2^3 \times \binom{7}{3} = 81 \times 8 \times \binom{7}{3}$

ب) $2 \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{2}$

ج) $\binom{17}{2} \times \binom{15}{3} \times \binom{12}{4} \times \binom{8}{1} \times (3)^2 \times (2)^3 \times (-1)^4 \times (-2)^7$

سوال ۶:

به چند طریق می‌توانیم در یک صفحه شطرنجی از مبدا به نقطه (۳, ۸) برسیم. درصورتی که:

الف) دو حرکت زیر مجاز باشند:

v:(m, n) ->(m, n+1)   H: (m, n) -> (m+1, n)

ب) علاوه بر حرکات قسمت الف، حرکت B : (m, n) -> (m+1, n+1) نیز مجاز باشد.

ج) دو حرکت زیر مجاز باشند:

L : (m, n) -> (m+1, n-1)   U : (m, n) -> (m+1, n+1)

پاسخ:

الف) $\binom{11}{3}$ – به سه حرکت H و ۸ حرکت v نیاز داریم. و صرفا نیاز است تعیین کنیم که این ۱۱ حرکت با چه ترتیبی کنار یکدیگر قرار بگیرند.

ب)

$$\binom{11}{3} + \left(10 \times \binom{9}{2}\right) + \binom{10}{2} \times \binom{8}{1} + \binom{8}{3} = 165 + 360 + 252 + 56 = 833$$

افزایش در راستای x نهایتا باید سه واحد باشد. بنابراین تعداد استفاده از حرکت B بین ۰ تا ۳ متغییر است.

- صفر حرکت B: $\binom{11}{3}$

مشابه قسمت الف

- یک حرکت B: $10 \times \binom{9}{2}$

به دو حرکت H، هفت حرکت V و یک حرکت B نیاز خواهیم داشت. بنابراین مسئله معادل تعداد حالات قرارگیری دو H، هفت V و یک B در یک رشته است.

- دو حرکت B: $\binom{10}{2} \times \binom{8}{1}$

حرکت‌هایمان شامل دو B، یک H و هفت V خواهد بود.

- سه حرکت B: $\binom{8}{3}$

حرکت‌ها شامل سه حرکت B و پنج V است.

ج) فرض می‌کنیم از حرکت U، u بار و از حرکت L، lبار استفاده شده است.
در این صورت u+l تعداد افزایش واحد در واحد افقی و u-l تعداد افزایش واحد عمودی است.
بنابراین u+l = 8 و u-l= 3
2u = 11 بنابراین تعداد حرکات U برابر ۵,۵ خواهد بود. بنابراین با دو حرکت L و U نمی‌توان از نقطه مبدا به (۸, ۳) رسید.

سوال ۷:

در چند جایگشت از حروف کلمه DiscreteMathematics بین هر دو حرف e حداقل دو حرف دیگر وجود دارد ؟

$$\frac{\binom{14}{3} \times 16!}{2! \times 2! \times 2! \times 2! \times 3! \times 2!} = \frac{\binom{14}{3} \times 16!}{192}$$

سه حرف e داریم و کل حروف ۱۹تا هستند. در زیر n1, n2, n3 and n4 تعداد حروف هستند.
در ابتدا مشخص می‌کنیم که در هریک از ۴ جایگاه زیر چند حرف قرار بگیرد. و سپس تعداد حالات چیدمان ۱۶ حرف باقی‌مانده (به غیر از eها) به ۱۶ فاکتوریل مشخص خواهد شد. (اگر حرف تکراری داشته باشیم باید در نظر بگیریم و تقسیم کنیم.)

* n1 + n2 + n3 + n4 = 16

n2 >= 2

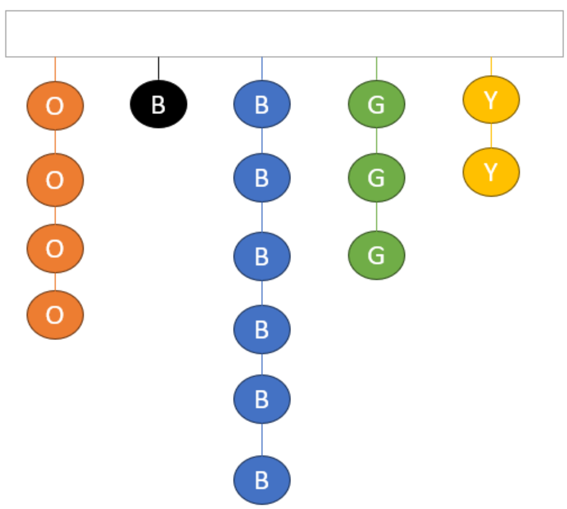
n3 >= 2

مخرج به دلیل حروف تکراری است.
حروف تکراری = ۲ تا m / ۲ تا i / ۲ تا c / ۲ تا s / ۳ تا t / ۲ تا a

برای حل معادله * میتوانیم از تغییر متغیر استفاده کنیم.
حل شهودی: برای اینکه *به فرم معادله‌های آشنا برای ما (همه متغییرها بزرگتر از صفر / و یا همه‌ی متغییرها بزرگتر مساوی صفر) دربیاید، از ۱۶ تا ۲ تا به n2 می‌دهیم و ۲ تا به n3 می دهیم تا طلبکاری نداشته باشند 😊
در این صورت ۱۱تای باقی مانده را می توانیم به سادگی باید بین ۴ عدد به گونه‌ای تقسیم کنیم که همگی مساوی یا بیشتر از صفر شوند.

سوال ۸:

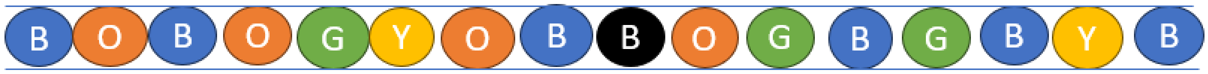
شانزده هدف سفالی یک‌شکل همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است، در پنج ستون و به شکل معلق مرتب شده‌اند. در ستون نخست (از چپ) چهار هدف نارنجی، در ستون دوم یک هدف سیاه، در ستون سوم شش هدف آبی، در ستون چهارم سه هدف سبز ودر ستون پنجم دو هدف زرد وجود دارد. برای ملحق شدن به تیم تیراندازی دانشکده باید هر ۱۶ هدف را با استفاده از یک تپانچه و فقط با ۱۶ گلوله مورد اصابت قرار داد و هنگام انجام این کار همواره باید به هدف واقع در انتهای یک ستون زد. تحت این شرایط، به چند طریق متفاوت می‌توان هر ۱۶ هدف را مورد اصابت قرار داد؟



پاسخ:

$$\binom{16}{4} \times \binom{12}{1} \times \binom{11}{6} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{2}$$

مسئله معادل قرار دادن چهار مهره نارنجی، یک مهره سیاه، شش مهره آبی، سه مهره سبز و دو مهره زرد در یک ردیف است.
فرض می‌کنیم برای مثال رشته زیر مشخص شده است:



در این صورت ابتدا آخرین آبی (مهر آبی ششم از بالا در ابتدا) را مورد اصابت قرار می‌دهیم. سپس آخرین نارنجی (مهره نارنجی چهارم از بالا در ابتدا) را و بعد آبی دوم (مهر آبی پنجم از بالا در ابتدا) را مورد اصابت قرار می‌دهیم و ... یعنی با مشخص شدن رنگ به طور یکتا معلوم می‌شود که کدام مهره باید مورد اصابت قرار بگیرد.

سوال ۹:

دانشجویی ۸ کتاب مختلف دارد. به چند طریق می‌تواند کتاب‌هایش را در دو قفسه مختلف بگذارد به نوعی که هر طبقه حداقل یک کتاب داشته باشد؟

پاسخ:

الف) $8! \times 7$

طبق تعداد کتاب‌های هر طبقه ۷ حالت زیر پیش می‌آید:

طبقه دوم = ۱ کتاب => تعداد حالات = $8!$

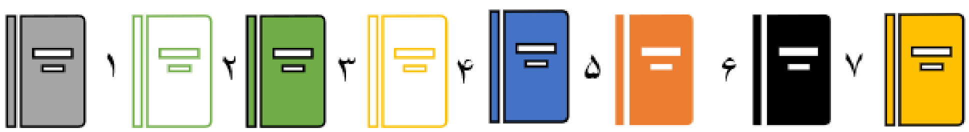
طبقه دوم = ۲ کتاب => تعداد حالات = $8!$

...

طبقه دوم = ۷ کتاب => تعداد حالات = $8!$

در بالا صرفا از اصل جمع و اصل ضرب استفاده شده است.

راه‌حل ساده‌تر این بود که کتاب ها را می‌چیدیم. و سپس مشخص می‌کردیم که از کجا جزو طبقه دوم محسوب شود. یکی از ۷ جایگاه شکل زیر می‌تواند محل جدا کردن کتاب‌های طبقه‌ی اول یا دوم باشد. مجددا پاسخ برابر خواهد بود با $8! \times 7$



روش دوم قابلیت تعمیم نیز دارد.

برای مثال اگر ۵ طبقه و ۲۰ کتاب داشتیم پاسخ مسئله با کمک ایده تعداد پاسخ‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = ۲۰$ برابر است با : $20! \times \binom{19}{4}$

سوال ۱۰:

به چند طریق می‌توان ۱۷ را به صورت حاصل جمعی از ۲ها و ۳ها نوشت درصورتی که ترتیب عوامل جمع

الف) مورد نظر نباشد.

ب) مورد نظر باشد.

پاسخ:

الف) به ۳ حالت

اگر تعداد ۲ها را x و تعداد ۳ها را y در نظر بگیریم، کافی است تعداد جواب‌های معادله $۲x + ۳y = ۱۷$ را به دست بیاوریم به گونه‌ای که x و y طبیعی باشند.

(x, y) = { (۱, ۵), (۴, ۳), (۷, ۱)}

ب) $\binom{۶}{۱} \times \binom{۷}{۳} \times \binom{۸}{۷} = ۶ \times ۳۵ \times ۸ = ۱۶۸۰$

برای هرکدام از حالت‌ها باید تعداد حالات چیدمان ۲ها و ۳ها را به دست آوریم. هر ترکیب بالا به ترتیب تعداد چیدمان یکی از حالت‌های زوج مرتب (x, y) است.