توزیع های توام، شرطی و استقلال متغیرهای تصادفی

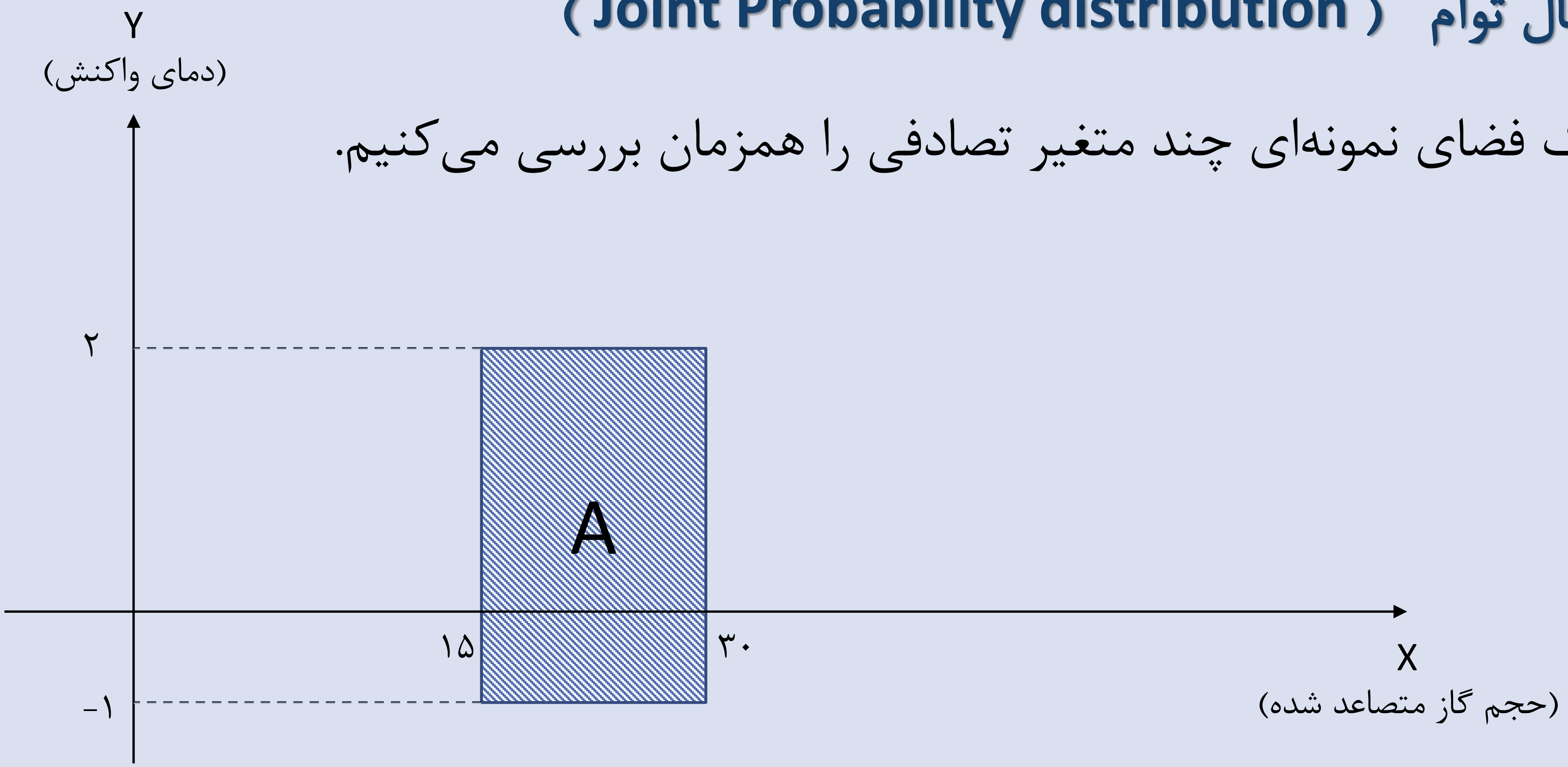
فردوس گرجی

توزیع احتمال توأم (Joint Probability distribution)

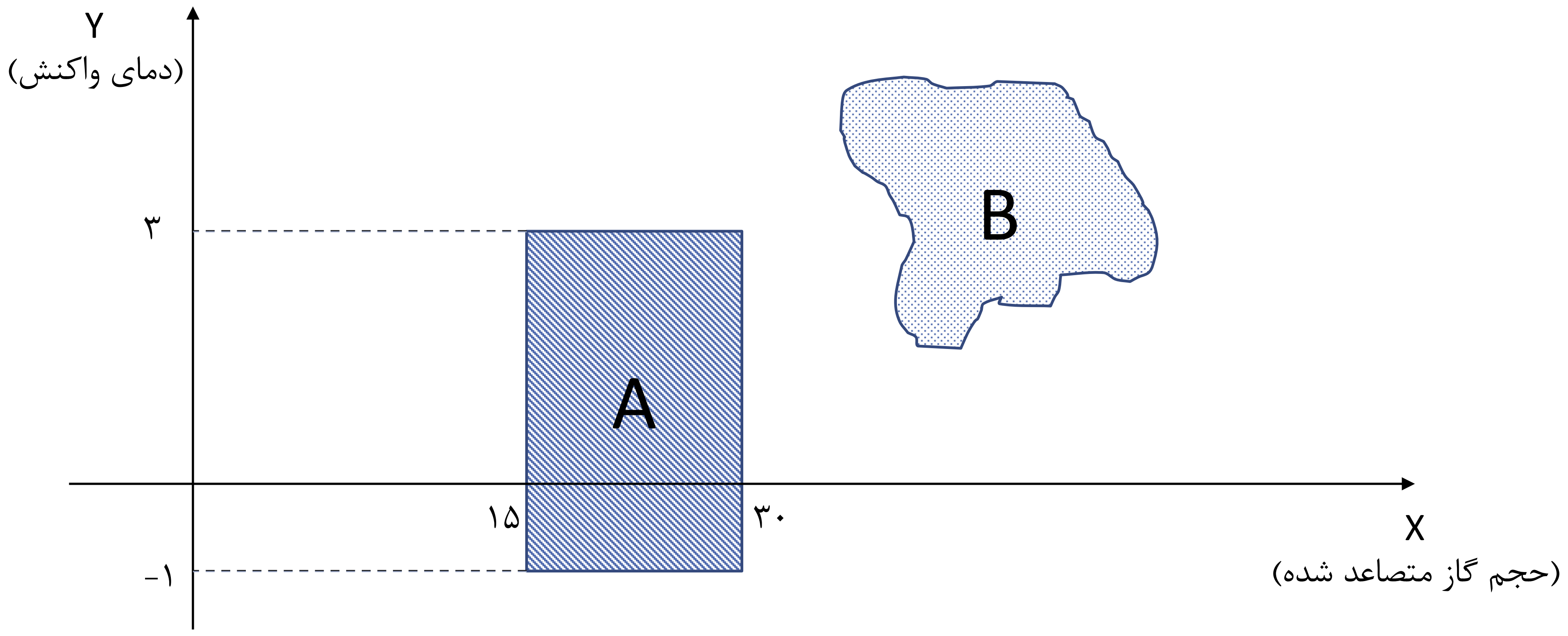
گاهی اوقات در یک فضای نمونه‌ای می‌خواهیم همزمان چند متغیر تصادفی را بررسی کنیم. مثلا در یک آزمایش شیمیایی، حجم گاز متصاعد شده و دمای واکنش را با هم در نظر می‌گیریم. در چنین حالتی، مثلا متغیر تصادفی X ، حجم گاز متصاعد شده و متغیر تصادفی Y، دمای واکنش را نشان می‌دهد. در اغلب موارد، بررسی تک تک این متغیرها اطلاعات کافی بدست نمیدهد. زیرا به یکدیگر وابسته بوده و روی هم اثر دارند. در این حالت از تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y استفاده می‌کنیم که آن را به صورت f(X,Y) نشان می‌دهیم.

توزیع احتمال توأم (Joint Probability distribution)

وقتی در یک فضای نمونه‌ای چند متغیر تصادفی را همزمان بررسی می‌کنیم.



قسمت هاشورخورده پیشآمد A را نشان می‌دهد که در آن همزمان حجم گاز متصاعد شده بین ۱۵ تا ۳۰ لیتر و دمای واکنش بین ۱- تا ۳ درجه سانتی‌گراد می‌باشد.



➢ تابع احتمال توأم

تعریف : تابع $f(x,y)$ را توزیع احتمال توأم یا تابع جرم احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X و Y گویند اگر:

$$1)\ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad : \qquad f(x,y) \geq 0$$

$$2)\ \sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

$$3)\ P(X = x\ ,Y = y) = f(x,y) \qquad (\ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\ )$$

به این ترتیب داریم:

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad : \quad P(\ (x,y) \in A\ ) = \sum\sum_{(x,y) \in A} f(x,y)$$

جدول توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X و Y :

X \ Y	b_1	b_2	.....	b_r	
a_1	$f(a_1, b_1)$	$f(a_1, b_2)$	.....	$f(a_1, b_r)$	
a_2	$f(a_2, b_1)$	$f(a_2, b_2)$	.....	$f(a_2, b_r)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
a_k	$f(a_k, b_1)$	$f(a_k, b_2)$	.....	$f(a_k, b_r)$	
					1

توزیع احتمال حاشیه‌ای

تعریف : توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی گسسته X و Y عبارت است از:

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y)$$

$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$$

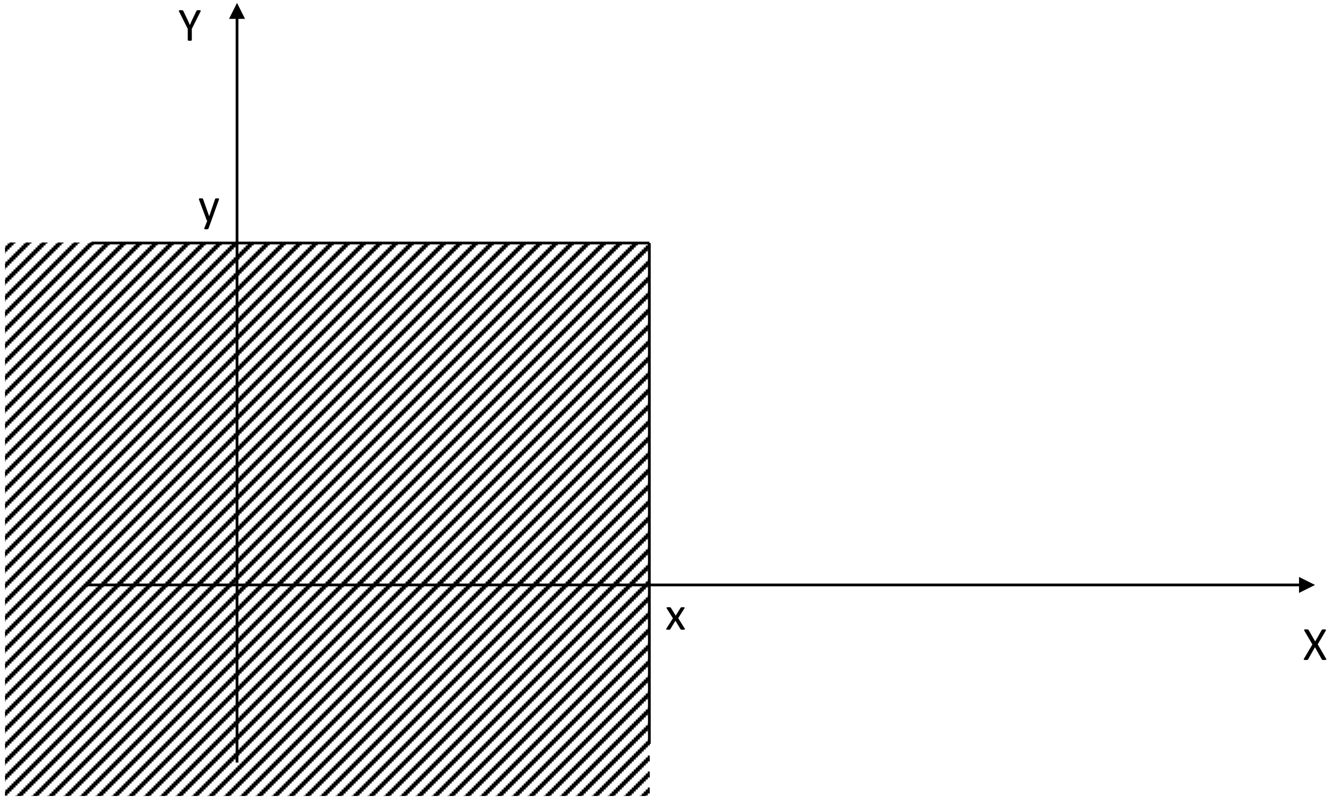
➢ جدول توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X و Y :

X \ Y	b_1	b_2	.....	b_r	$f_X(x)$
a_1	$f(a_1,b_1)$	$f(a_1,b_2)$	.....	$f(a_1,b_r)$	$f_X(a_1)$
a_2	$f(a_2,b_1)$	$f(a_2,b_2)$	.....	$f(a_2,b_r)$	$f_X(a_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_k	$f(a_k,b_1)$	$f(a_k,b_2)$	.....	$f(a_k,b_r)$	$f_X(a_k)$
$f_Y(y)$	$f_Y(b_1)$	$f_Y(b_2)$	.....	$f_Y(b_r)$	1

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = &\ \textstyle\sum_x f(x,y) \\
&= f(x_1,y) + f(x_2,y) + \cdots + f(x_k,y) \\
&= P(X = x_1\ ,\ Y = y) + P(X = x_2\ ,\ Y = y) + \cdots \\
&\quad + P(X = x_k\ ,\ Y = y) \\
&= P(\{X = x_1\} \cap \{Y = y\}) + P(\{X = x_2\} \cap \{Y = y\}) \\
&\quad + \cdots + P(\{X = x_k\} \cap \{Y = y\}) \\
&= P((\{X = x_1\} \cup \cdots \cup \{X = x_k\}) \cap \{Y = y\})
\end{aligned}
$$

➢ تابع توزیع تجمعی توأم :

$$F(X,Y) = P(X \le x\,,\ Y \le y) = \sum_{t\le x}\sum_{s\le y} f(t,s)$$



- **مثال ۱ :** عدد x را به تصادف از بین اعداد ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ انتخاب می‌کنیم و سپس عدد y را به تصادف از بین اعداد x و ... و ۱ انتخاب می‌کنیم. تابع احتمال توأم (X,Y) را بیابید. توزیع‌های حاشیه‌ای X و Y را حساب کنید.

راه‌حل :

$$f(X=1\ ,Y=1)=\frac{1}{5}\times\ 1\ =\frac{1}{5}$$

$$f(X=1\ ,Y=2)=\frac{1}{5}\times\ 0\ =0$$

$$f(X=2\ ,Y=1)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

$$f(X=2\ ,Y=2)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

$$f(X=2\ ,Y=3)=\frac{1}{5}\times\ 0\ =0$$

X \ Y	1	2	3	4	5	
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	
						1

X \ Y	1	2	3	4	5	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	0	$\frac{1}{5}$
$f_Y(y)$	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{25}$	1

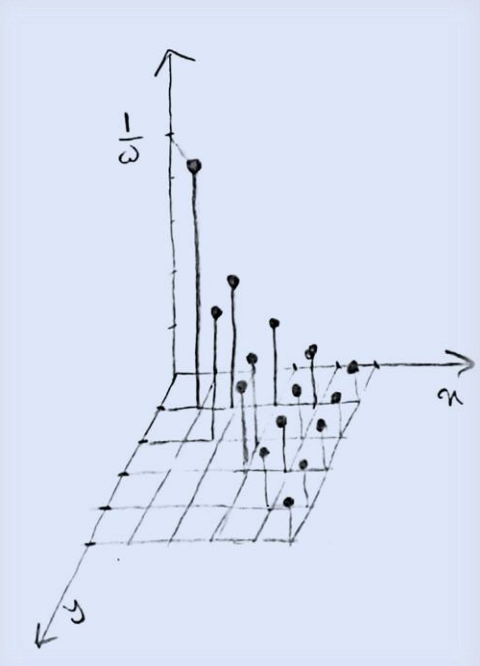
- **مثال۲ :** در مثال ۱، احتمال اینکه Y کمتر از نصف X باشد چقدر است؟

X \ Y	1	2	3	4	5	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$
$f_Y(y)$	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{25}$	1

$$P\left(Y < {}^{1}/_{2}\, x\right) = \sum_{x=1}^{5} \sum_{y=1}^{[\frac{1}{2}(X+1)-1]} f(x,y)$$

$$= f(X = 3\,, Y = 1) + f(X = 4\,, Y = 1) + f(X = 5\,, Y = 1) + f(X = 5\,, Y = 2)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{59}{300}$$



مثال۳ : دوتاس سالم را همزمان پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد ۴ها و Y تعداد ۵های ظاهرشده باشد، تابع توزیع احتمال توأم X و Y را بیابید. با فرض $A = \{(x,y)|2x + y < 3\}$ ، احتمال $P(\,(x,y) \in A)$ چقدر است؟

$$f(0\,,0) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$$

$$f(0\,,1) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{8}{36}$$

$$f(0\,,2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3x6}$$

$$f(1\,,0) = \frac{8}{36}$$

$$f(1\,,1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

$$f(1\,,2) = 0$$

$$f(2\,,0) = \frac{1}{36}$$

$$f(2\,,1) = 0$$

$$f(2\,,2) = 0$$

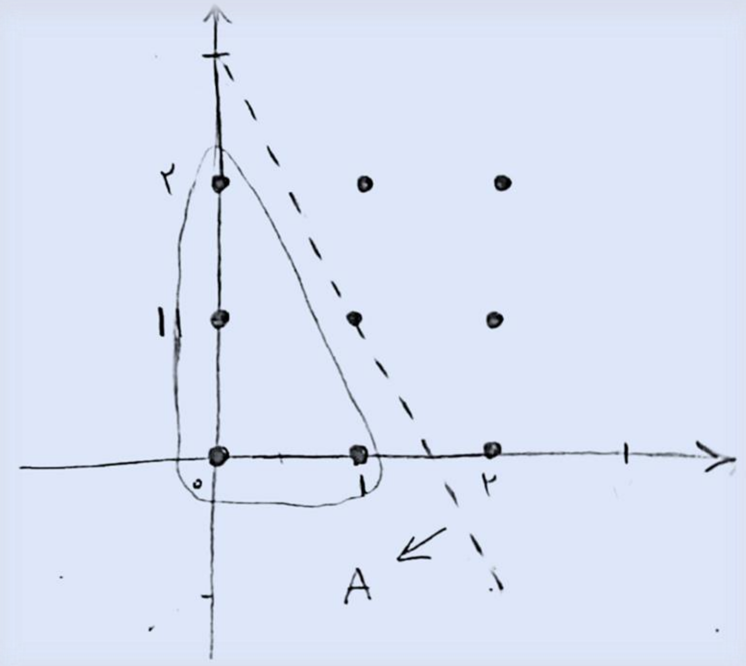
X \ Y	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$f_Y(y)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

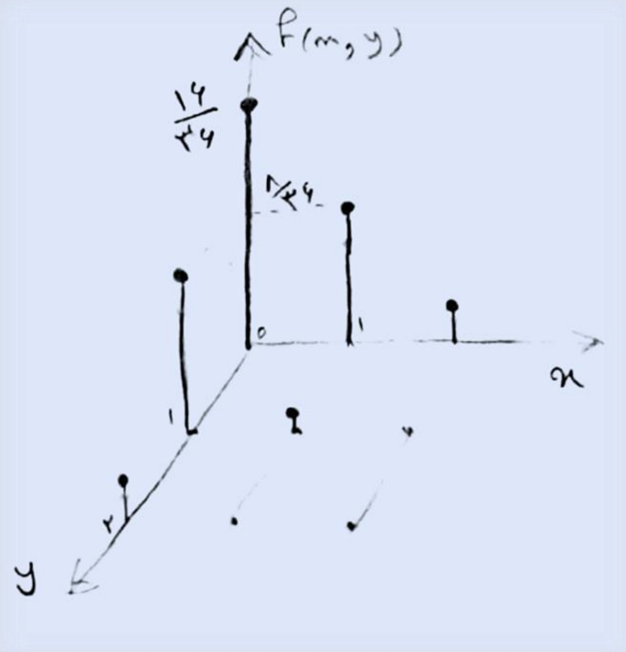
$$P(2X + Y < 3) = P(Y < 3 - 2X)$$

X \ Y	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$f_Y(y)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$P(2X+Y<3)=P(Y<3-2X)=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3-2x-1} f(x,y)$$

$$=f(0\,,0)+f(0\,,1)+f(0\,,2)+f(1\,,0)=\ \frac{16}{36}+\frac{8}{36}+\frac{1}{36}+\frac{8}{36}=\frac{33}{36}$$





تابع چگالی احتمال توأم:

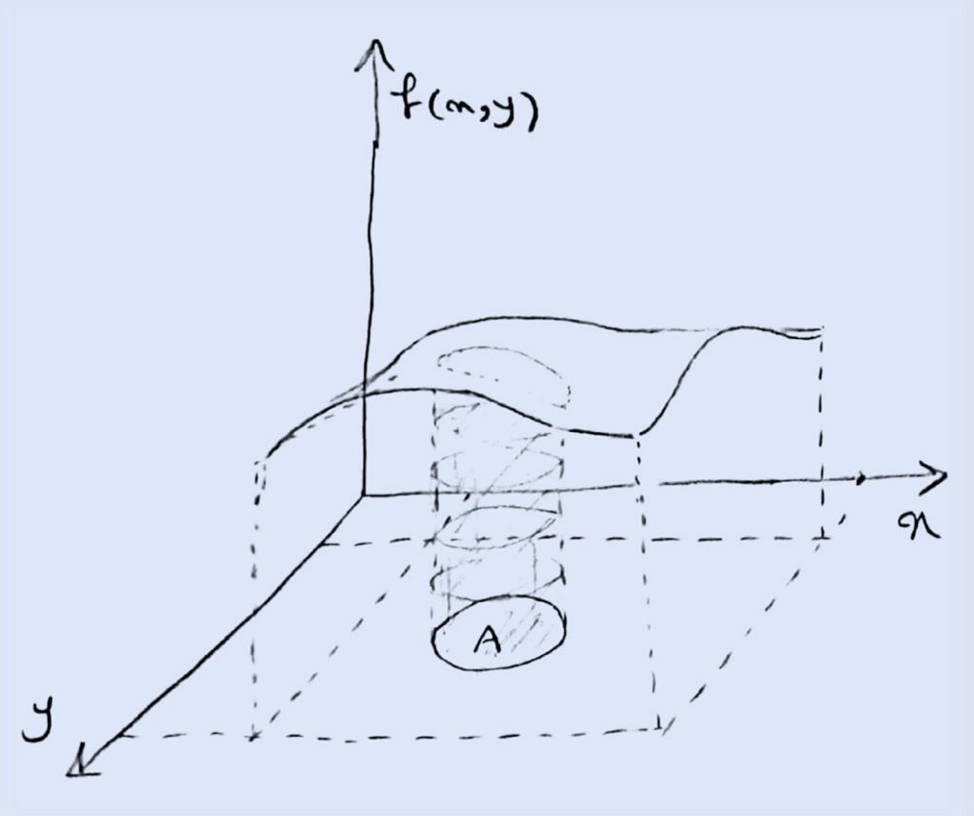
تابع f(x,y) را تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y گوییم هرگاه:

$$1)\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad f(x,y) \geq 0$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$$

$$3)\ P\left((X,Y) \in A\right) = \iint_A f(x,y)\,dxdy \qquad \forall A \in \mathbb{R}^2$$

3) $P\left((X,Y) \in A\right) = \iint\limits_A f(x,y)\,dxdy \qquad \forall A \in \mathbb{R}^2$



مثال۴ : فرض کنید X زمان انجام یک واکنش شیمیایی و Y درجه حرارتی باشد که در آن واکنش شروع می‌شود و تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} axy & 0 < x < 1\,;\ \ 0 < y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) مقدار a را بیابید.

ب)احتمال $P(X < Y)$ را بیابید.

ج) احتمال $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \le Y \le 1)$ را بیابید.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1\int_0^1 axy\,dxdy = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 \left[ay\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right] dy = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{ay}{2} dy = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{ay^2}{4}\Big|_0^1 = 1$$

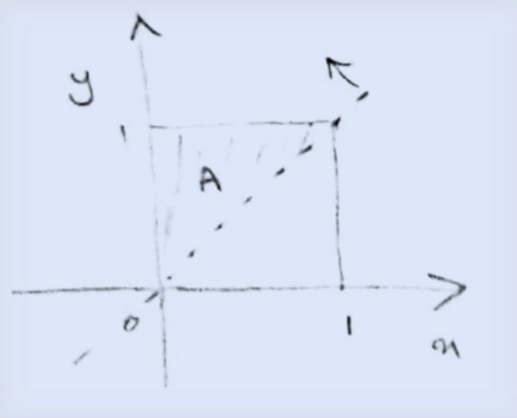
$$\Longrightarrow \quad \frac{a(1)}{4} - 0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a = 4}$$

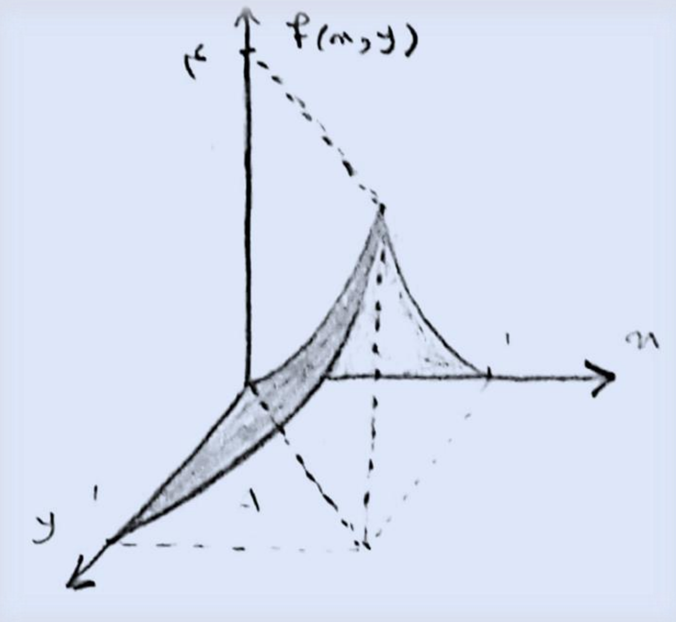
➢ ادامه مثال۴ :

$$f(x,y)=\begin{cases} 4xy & 0<x<1\,;\;\; 0<y<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$P(X<Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy=\int_0^1\int_0^y 4xy\,dxdy=\int_0^1\left[4y\frac{x^2}{2}\bigg|_0^y\right]dy$$

$$=\int_0^1 2y^3dy=\frac{2y^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{2}{4}-0=\mathbf{\frac{1}{2}}$$





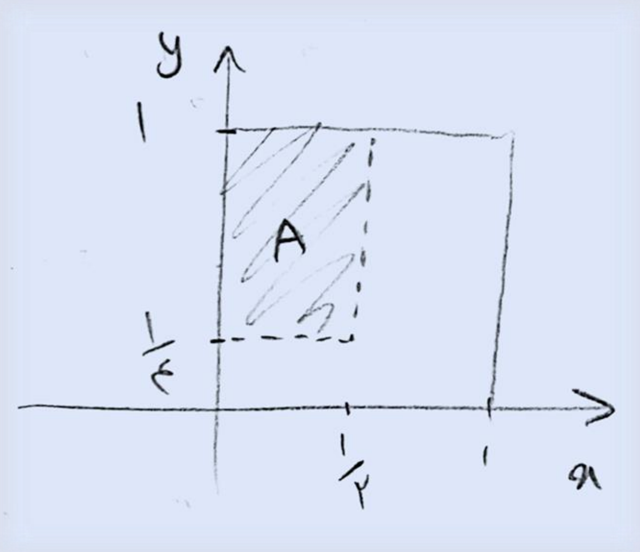
ادامه مثال۴ :

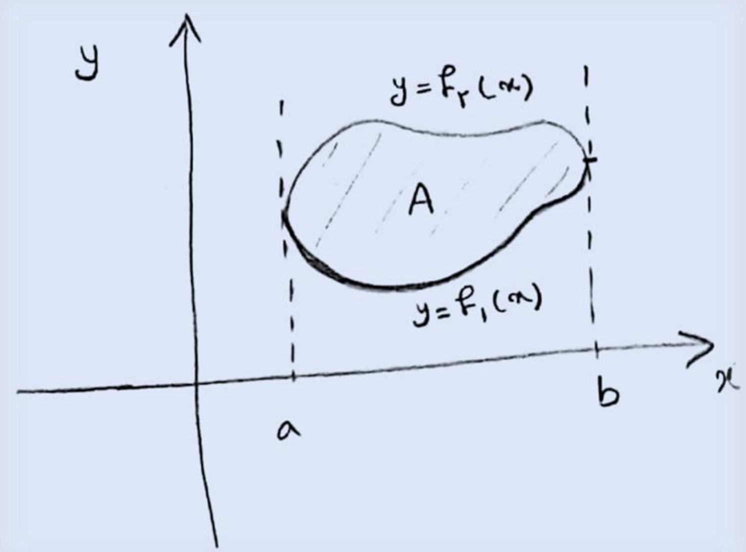
$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1\,;\;\; 0 < y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$P\left(0 \le X \le \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \le Y \le 1\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x,y)\,dxdy = \int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{2}} 4xy\,dxdy$$

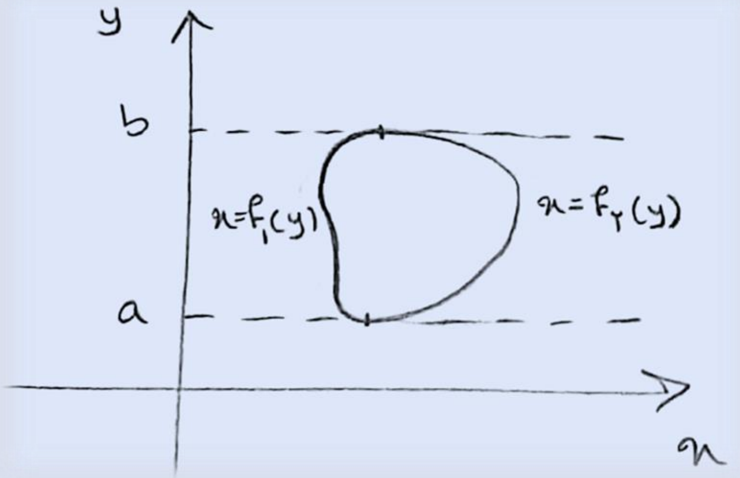
$$= \int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[4y\frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}\right]dy = \int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{y}{2}\,dy$$

$$= \frac{y^2}{4}\bigg|_{\frac{1}{4}}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \mathbf{\frac{15}{64}}$$





$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dydx$$



$$\int_a^b \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)\,dxdy$$

مثال۵ : فرض کنید تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{5}+cy & 0<x<1\,;\ \ 1<y<5\\ 0 & o.w\end{cases}$$

ثابت c را بیابید.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=1 \quad\Rightarrow\quad \int_{1}^{5}\int_{0}^{1}(\frac{x}{5}+cy)\,dxdy=1 \quad\Longrightarrow$$

$$\int_{1}^{5}\left[\frac{x^2}{10}+cxy\,\Big|_{0}^{1}\right]dy=1 \quad\Longrightarrow\quad \int_{1}^{5}(cy+\frac{1}{10})\,dy=1 \quad\Longrightarrow$$

$$\frac{cy^2}{2}+\frac{y}{10}\Big|_{1}^{5}=1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{25c}{2}+\frac{5}{10}-\frac{c}{2}-\frac{1}{10}=1 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{c=0.05}$$

مثال۶ : فرض کنید تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر باشد:

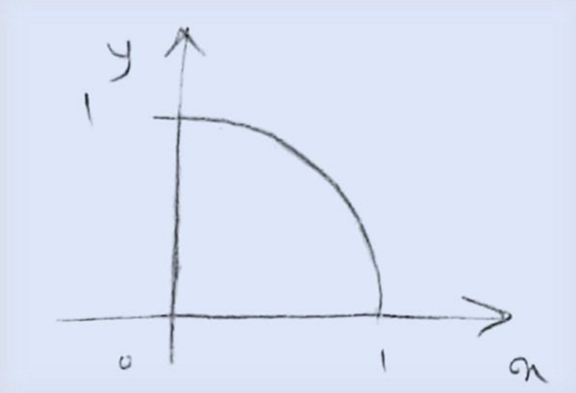
مقدار k را بیابید.

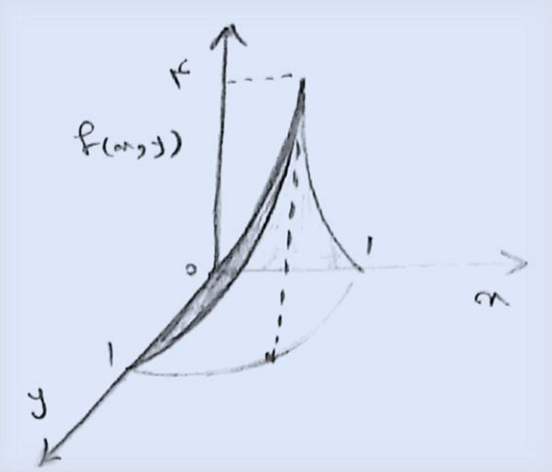
$$f(x,y) = \begin{cases} kxy & x > 0 \;,\; y > 0 \;,\; x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} kxy\,dxdy = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 \left[ky\frac{x^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right] dy = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{2}(ky - ky^3)\,dy = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{ay^2}{4}\Bigg|_0^1 = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{ky^2}{4} - \frac{ky^4}{8}\right)\Bigg|_0^1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = 8}$$





➢ **مثال۷ :** اگر تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر باشد، احتمال P(X<Y<2X) را بیابید.

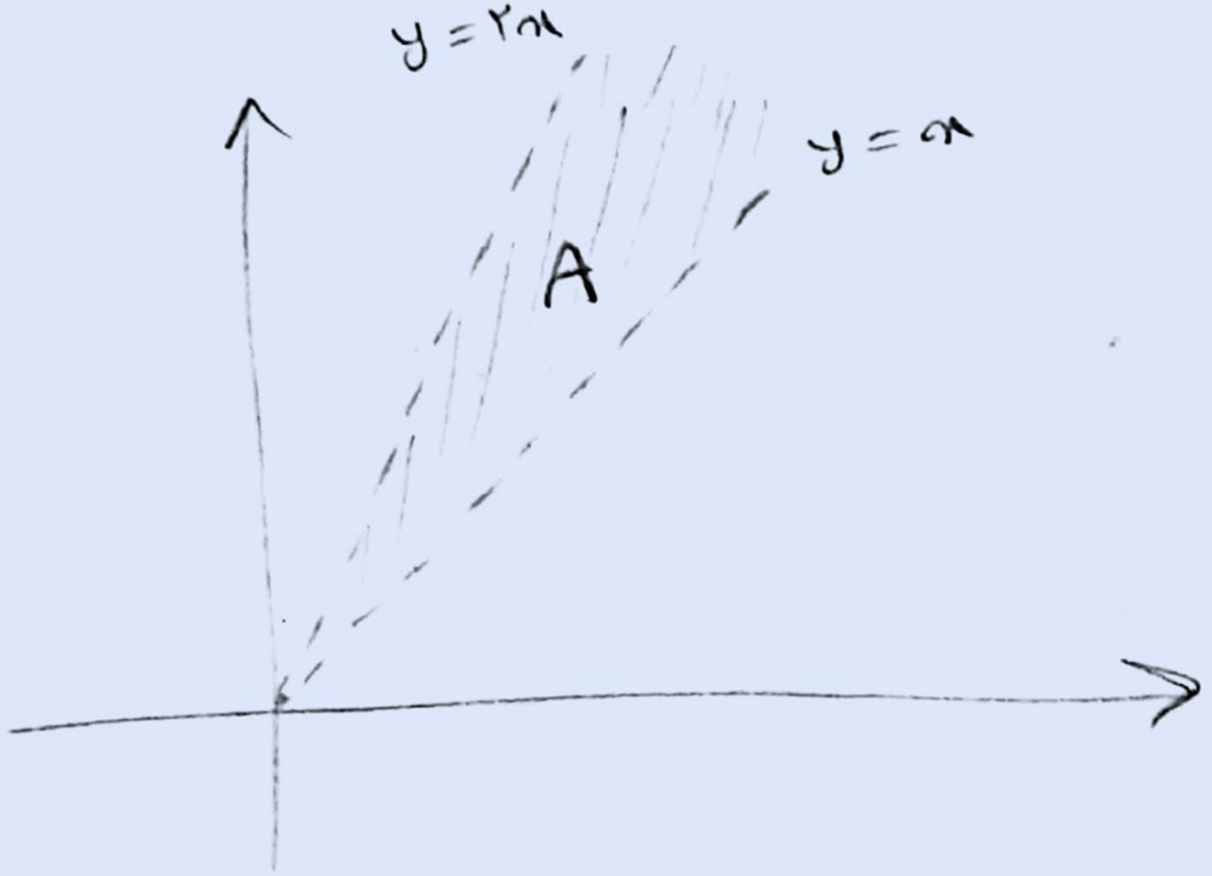
$$f(x,y)=\begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & x>0\ ,\ y>0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$P(X<Y<2X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{2x} f(x,y)\,dydx=\int_{0}^{\infty}\int_{x}^{2x} 4xye^{-(x^2+y^2)}\,dydx$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{x}^{2x}(-2x)(-2y)e^{-(x^2+y^2)}\,dydx=\int_{0}^{\infty}(-2x)\left[e^{-(x^2+y^2)}\Big|_{x}^{2x}\right]dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}(-2x)(e^{-(x^2+4x^2)}-e^{-(x^2+x^2)})dx=\int_{0}^{\infty}(-2x)(e^{-(5x^2)}-e^{-(2x^2)})dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}-2xe^{-5x^2}dx-\int_{0}^{\infty}-2xe^{-2x^2}dx=\frac{1}{5}e^{-5x^2}\Big|_{0}^{\infty}-\frac{1}{2}e^{-2x^2}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{-1}{5}+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{3}{10}}$$



y = ۲x
y = x
A

تابع چگالی حاشیه‌ای:

توابع چگالی حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y عبارتند از:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

تابع توزیع تجمعی توأم متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y :

$$F(x,y) = P(X \leq x\, , Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,s)dtds$$

مثال۸ : در مثال ۴ ، چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y و تابع توزیع تجمعی توأم را بیابید.

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1\ ;\ \ 0 < y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 4xydy = \frac{4xy^2}{2}\bigg|_0^1 = \boldsymbol{2x} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 4xydx = \frac{4x^2y}{2}\bigg|_0^1 = \boldsymbol{2y} \quad ; \quad 0 < y < 1$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(t,s)dtds = \int_0^y\int_0^x 4ts\ dtds = \int_0^y \left(2t^2s\bigg|_0^x\right)ds = \int_0^y 2x^2s\ ds$$

$$= x^2s^2\bigg|_0^y = \boldsymbol{x^2y^2}$$

➢ **مثال۹ :** در مثال ۵ ، چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{5} + 0.05y & 0 < x < 1\,;\;\; 1 < y < 5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_1^5 (\frac{x}{5} + 0.05y)dy = \left(\frac{xy}{5} + \frac{0.05y^2}{2}\right)\Bigg|_1^5$$

$$= x + 0.62 - \frac{x}{5} - 0.025 = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x} + \mathbf{0.6} \qquad ; \qquad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 (\frac{x}{5} + 0.05y)dx = \left(\frac{x^2}{10} + 0.05xy\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \mathbf{0.05}\boldsymbol{y} + \mathbf{0.1} \qquad ; \qquad 1 < y < 5$$

➢ **مثال۱۰ :** در مثال ۶ ، چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & x > 0 \;\;,\;\; y > 0 \;,\; x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 8xydy = \frac{8xy^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} = \boldsymbol{4x\left(1 - x^2\right)} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 8xydx = \frac{8x^2y}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-y^2}} = \boldsymbol{4y\left(1 - y^2\right)} \quad ; \quad 0 < y < 1$$

➢ توزیع شرطی (Conditional distribution) :

تعریف : فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته یا گسسته باشند. توزیع شرطی متغیر متصادفی Y به شرط X=x عبارت است از :

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \qquad ; \qquad f_X(x) > 0$$

همچنین توزیع شرطی متغیر تصادفی X ، به فرض Y=y عبارت است از :

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad ; \qquad f_Y(y) > 0$$

در حالت گسسته: $P(a < X < b \mid Y = y) = \sum_{x\in(a,b)} f(x|y)$

در حالت پیوسته: $P(a < X < b \mid Y = y) = \int_a^b f(x|y)dx$

X \ Y	1	2	3	4	5	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	0	$\frac{1}{5}$
$f_Y(y)$	$\frac{137}{300}$	$\frac{77}{300}$	$\frac{47}{300}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{25}$	1

مثال ۱۱ : در مثال ۱ ، توزیع شرطی Y به شرط X=3 را بیابید. همچنین $P(Y < 3|X = 3)$ و $f(x|4)$ را بیابید.

$$f(y|3) = \frac{f(3,y)}{f_X(3)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3} \qquad ; \qquad y = 1,2,3$$

$$P(Y < 3|X = 3) = \sum_{y=1}^{2} f(y|3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

$$f(x|4) = \frac{f(x,4)}{f_Y(4)} = \frac{f(x,4)}{9/100} = \begin{cases} \frac{5}{9} & ; \quad x = 4 \\ \frac{4}{9} & ; \quad x = 5 \\ 0 & ; \quad o.w \end{cases}$$

➢ **مثال۱۲ :** در مثال ۴، توزیع شرطی $f(x|y)$ و $f(y|x)$ را بیابید.

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{4xy}{2y}=2x \qquad ;0<x<1$$

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{4xy}{2x}=2y \qquad ;0<y<1$$

مثال۱۲ : در مثال ۶، توزیع شرطی $f(x|y)$ و مقدار احتمال $P(X>\frac{1}{2}|Y=\frac{1}{4})$ را حساب کنید.

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{8xy}{4y(1-y^2)}=\frac{2x}{1-y^2} \qquad ; \qquad 0<x<\sqrt{1-y^2}$$

$$P\left(X>\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{4}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-(\frac{1}{4})^2}} f(x|\frac{1}{4})\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{15}{16}}}\frac{2x}{1-\frac{1}{16}}dx=\frac{16}{15}x^2\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{15}{16}}}=1-\frac{4}{15}=\mathbf{\frac{11}{15}}$$

➢ استقلال آماری:

اگر $f(x|y)$ به y ربطی نداشته باشد، آنگاه $f(x|y) = f_X(x)$.

از طرفی طبق تعریف داریم $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ و لذا $f(x,y) = f(x|y)\, f_Y(y)$.

بنابراین خواهیم داشت: $f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$.

در این حالت $f(y|x)$ نیز به x ربطی ندارد و داریم $f(y|x) = f_Y(y)$ و باز هم نتیجه فوق بدست می‌آید.

تعریف : فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته و یا پیوسته، با توزیع احتمال توأام f(x,y) و به ترتیب دارای توزیع‌های حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند. متغیرهای تصادفی X و Y را به ازای تمام مقادیر (x,y) در دامنه‌شان مستقل آماری گویند اگر و فقط اگر:

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

➢ مثال۱۳ :

❋ در مثال ۱ و ۳ ، متغیرهای X و Y مستقل نیستند.

❋ در مثال ۴ ، متغیر های X و Y مستقلند:

$$f(x,y) = 4xy = (2x)(2y) = f_X(x)f_Y(y)$$

❋ در مثال ۵ و ۶ ، متغیرهای X و Y مستقل نیستند.

n متغیر تصادفی $X_1 , \dots , X_n$:

فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1 , \dots , X_n$ دارای تابع احتمال توأم $f(x_1 , \dots , x_n)$ باشند. تابع احتمال حاشیه ای هر متغیر تصادفی با جمع زدن یا انتگرال گرفتن تابع احتمال توام روی بقیه متغیرها به دست می آید.
به عنوان مثال داریم:

در حالت گسسته: $f_{X_1}(x) = \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} f(x_1 , \dots , x_n)$

در حالت پیوسته: $f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 , \dots , x_n)\, dx_2 \dots dx_n$

و برای توزیع‌های حاشیه‌ای توأم به عنوان مثال داریم:

در حالت گسسته: $f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \sum_{x_3} \dots \sum_{x_n} f(x_1 , \dots , x_n)$

در حالت پیوسته: $f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 , \dots , x_n)\, dx_3 \dots dx_n$

و برای توزیع‌های شرطی توأم به عنوان مثال داریم:

$$\underbrace{f(x_1, x_2, x_3 \mid x_4, \ldots, x_n)}_{\substack{\text{توزیع شرطی توأم متغیرهای تصادفی } X_1, X_2, X_3 \\ \text{به شرط } X_4 = x_4, \ldots, X_n = x_n}} = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{\underbrace{f_{(x_4, \ldots, x_n)}(x_4, \ldots, x_n)}_{\substack{\text{توزیع حاشیه‌ای توأم متغیرهای تصادفی} \\ X_4, \ldots, X_n}}}$$

تعریف : فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی گسسته یا پیوسته با تابع توزیع احتمال توأم $f(x_1, \ldots, x_n)$ و به ترتیب دارای توابع توزیع حاشیه‌ای $f_{X_1}(x_1), \ldots, f_{X_n}(x_n)$ باشند.

متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ را به طور آماری دو به دو مستقل گوییم اگر و فقط اگر به ازای تمام مقادیر $(x_1, \ldots, x_n)$ در دامنه‌شان داشته باشیم:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

➢ **مثال۱۵ :** طول عمر لامپ‌های تولیدشده توسط کارخانه‌ای دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

فرض کنید X_1, X_2, X_3 طول عمر سه لامپ از تولیدات این کارخانه هستند که به طور مستقل انتخاب شده‌اند. احتمال اینکه لامپ اول در کمتر از یک روز بسوزد و دو لامپ دیگر حداقل سه روز کار کنند چقدر است؟

چون X_1, X_2, X_3 از هم مستقلند، داریم:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) = \begin{cases} e^{-x_1} e^{-x_2} e^{-x_3} & x_1, x_2, x_3 > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-(x_1+x_2+x_3)} & x_1, x_2, x_3 > 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$P(X_1 < 1\,, X_1 \geq 3\,, X_1 \geq 3) = \int_0^1 \int_3^\infty \int_3^\infty e^{-(x_1+x_2+x_3)}\, dx_3 dx_2 dx_1$$

$$= \int_0^1 \int_3^\infty e^{-(x_1+x_2)} \left(-e^{-x_3} \Big|_3^\infty\right) dx_2 dx_1 = e^{-6}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \mathbf{0.002}$$