

آمار و احتمالات مهندسی متغیرهای تصادفی، امید ریاضی و واریانس

فردوس گرگی

متغیر تصادفی

تعریف: متغیر تصادفی تابعی است که به هر عنصر فضای نمونه‌ای یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

$$X : S \rightarrow \mathbb{R}$$

- معمولا برای کمی‌سازی نیاز به متغیرهای تصادفی داریم. مثلا تعداد قطعات ناسالم، طول عمر لامپ، ...

مثال ۱

در آزمایش پرتاب یک جفت تاس، متغیر تصادفی X را مجموع خال‌ها در نظر بگیریم:

$$S = \{(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

$$X : S \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\} \subseteq \mathbb{R} \quad (\omega \rightarrow X(\omega))$$

$$(1, 1) \rightarrow 2, \quad (1, 2) \rightarrow 3, \dots, (1, 6) \rightarrow 7$$

$$\vdots$$

$$(6, 1) \rightarrow 7, \quad (6, 2) \rightarrow 8, \dots, (6, 6) \rightarrow 12$$

- برد X مجموعه‌ای متناهی است.

$$\{\omega | X(\omega) \leq 3\} \text{ پیشامد} = \{X \leq 3\} \text{ پیشامد} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

از خط تولید یک کارخانه سه قطعه به تصادف انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را تعداد قطعات سالم در نظر بگیریم:

$$S = \{(N, N, N), (N, N, D), (N, D, N), (D, N, N), (N, D, D), (D, N, D), (D, D, N), (D, D, D)\}$$

$$X : S \rightarrow \{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{R} \quad (\omega \rightarrow X(\omega))$$

$$(N, N, N) \rightarrow 3,$$

$$(N, N, D) \rightarrow 2, \quad (N, D, N) \rightarrow 2, \quad (D, N, N) \rightarrow 2,$$

$$(N, D, D) \rightarrow 1, \quad (D, N, D) \rightarrow 1, \quad (D, D, N) \rightarrow 1,$$

$$(D, D, D) \rightarrow 0.$$

• برد X مجموعه‌ای متناهی است.

$$\{\omega | X(\omega) = 2\} = \text{پیشامد } \{X = 2\} = \{(N, N, D), (N, D, N), (D, N, N)\}$$

متغیر تصادفی

مثال ۳

در بررسی مدت زمان کارکرد یک لامپ، متغیر تصادفی X را طول عمر لامپ (بر حسب یک واحد زمانی مانند ماه یا سال) در نظر بگیریم:

$$S = (0, \infty)$$

$$X : S \rightarrow (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$$

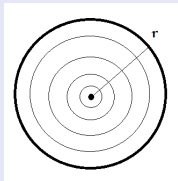
- برد X مجموعه‌ای نامتناهی و به صورت یک بازه است. پیشامد این که لامپ بیش از t_1 و کمتر از t_2 ماه کار کند:
- $$\{\omega | t_1 < X(\omega) < t_2\} = \{t_1 < X < t_2\}$$

مثال ۴

در پرتاب یک دارت به سمت یک سیل، متغیر تصادفی X را میزان فاصله نقطه برخورد دارت تا مرکز سیل در نظر بگیریم:

$$S = \text{نقاط سطح دایره}$$

$$X : S \rightarrow [0, r] \subseteq \mathbb{R}$$



- برد X مجموعه‌ای نامتناهی و به صورت یک بازه است. پیشامد این که دارت در فاصله کمتر از d تا مرکز سیل برخورد کند
- $$\{\omega | X(\omega) < d\} = \{X < d\}$$

مثال ۵

یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا شیر ظاهر شود (به محض ظهور شیر، پرتاب سکه متوقف می‌شود).
متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌های لازم برای ظاهر شدن شیر در نظر بگیریم:

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \dots, \underbrace{TT \dots T}_{k-1 \text{ بار}} H, \dots\}$$

$$X : S \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$$

• برد X مجموعه‌ای نامتناهی است ولی به صورت بازه نیست.
پیشامد این که حداقل ۴ پرتاب تا رخداد اولین شیر انجام شود $\{\omega | X(\omega) \geq 4\} = \{X \geq 4\}$

متغیر تصادفی گسسته

تعریف: اگر مجموعه مقادیر ممکن برای متغیر تصادفی X متناهی باشد و یا در صورت نامتناهی بودن، به صورت بازه نباشد، X را متغیر تصادفی گسسته نامیم. در این حالت با دانستن احتمال رخداد هر یک از مقادیر ممکن X (تک تک نقاط) می توان احتمال همه پیشامدها را محاسبه کرد.

در مثال ۱ (پرتاب یک جفت تاس)، مثال ۲ (تعداد قطعات سالم) و مثال ۵ (پرتاب مکرر سکه تا رخداد شیر)، متغیرهای تصادفی تعریف شده گسسته هستند. در مثال ۳ (طول عمر لامپ) و مثال ۴ (پرتاب دارت)، متغیرهای تصادفی تعریف شده پیوسته هستند. در چنین متغیرهایی احتمال در بازه ها و مساحت ها و ... محاسبه می شود و احتمال در یک نقطه صفر است. ● فعلا با متغیرهای تصادفی گسسته کار می کنیم.

حال می‌خواهیم احتمال پیشامدها را در فضای متغیرهای تصادفی گسسته بیابیم.

- در مثال ۱ (پرتاب یک جفت تاس)، برای محاسبه احتمال پیشامد $\{X \leq 3\}$ داریم:

$$\underbrace{P(X \leq 3)}_{\text{پیشامد}} = P(\{\omega | X(\omega) \leq 3\}) = P(\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}) = \frac{3}{36}$$

- در مثال ۲ (تعداد قطعات سالم)، فرض کنید احتمال سالم یا معیوب بودن هر قطعه پنجاه درصد است، در این صورت برای محاسبه احتمال پیشامد $\{X = 2\}$ داریم:

$$\underbrace{P(X = 2)}_{\text{پیشامد}} = P(\{\omega | X(\omega) = 2\}) =$$

$$P(\{(N, N, D), (N, D, N), (D, N, N)\}) = \frac{3}{8}$$

- در مثال ۵ (پرتاب مکرر سکه تا رخداد اولین شیر)، برای محاسبه احتمال پیشامد $\{X \geq 3\}$ داریم:

$$P(X \geq 3) = P(\{\omega | X(\omega) \geq 3\}) =$$

$$P(\{(T, T, H), (T, T, T, H), (T, T, T, T, H), \dots\})$$

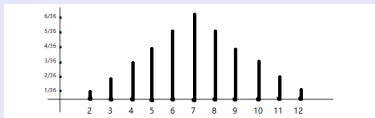
تابع جرم احتمال

تعریف: مجموعه زوج‌های مرتب $(x, f(x))$ را تابع احتمال یا تابع جرم احتمال یا توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته X می‌نامیم اگر به ازای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = P(X = x); \quad f(x) \geq 0; \quad \sum_x f(x) = 1. \quad (1)$$

جدول توزیع احتمال مثال ۱

x	۲	۳	۴	...	۱۲	
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$...	$\frac{1}{36}$	۱ (مجموع)

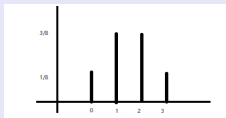


نکته

تکیه‌گاه (support) یک متغیر تصادفی برابر است با مجموعه مقادیری از \mathbb{R} که متغیر تصادفی آن‌ها را با احتمال ناصفر اختیار می‌کند.

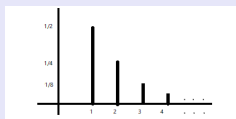
جدول توزيع احتمال مثال ٢

x	٠	١	٢	٣	
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	مجموع ١



جدول توزيع احتمال مثال ٥

x	١	٢	٣	...	k	...	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$...	$(\frac{1}{2})^k$...	مجموع ١



تابع جرم احتمال

مثال ۶

جعبه‌ای شامل ۱۰ لامپ است که سه تای آن‌ها سوخته است. سه لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X تعداد لامپ‌های سالم در بین لامپ‌های انتخاب شده باشد، تابع احتمال آن را حساب کنید. مطلوب است اینکه حداقل دو لامپ سالم انتخاب شده باشد.

$$f(\cdot) = P(X = \cdot) = \frac{\binom{3}{\cdot}}{\binom{10}{\cdot}} = \frac{1}{120} \quad f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{120} \quad (2)$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{63}{120} \quad f(3) = P(X = 3) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{35}{120}$$

x	\cdot	۱	۲	۳	
$f(x)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	مجموع ۱

$$P(X \geq 2) = f(2) + f(3) = \frac{98}{120} \quad (3)$$

تابع جرم احتمال

مثال ۷

در جدول زیر، $f(x)$ یک تابع جرم احتمال است. مقدار a را بیابید.

x	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	a	$3a$

اولا باید $a \geq 0$

ثانیا باید مجموع مقادیر تابع احتمال به همه مقادیر ممکن x یک باشد. پس

$$\frac{1}{\lambda} + a + 3a = 1 \rightarrow \frac{32a + 1}{\lambda} = 1 \rightarrow a = \frac{7}{32} (\geq 0)$$

$f(x)$ یک تابع جرم احتمال است، مقدار a را بیابید.

$$f(x) = a\left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

اولا مقدار a باید نامنفی باشد ($a \geq 0$)
ثانیا باید مجموع مقادیر f به ازای همه مقادیر x یک شود.

$$\sum_{x=0}^{\infty} a\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \quad \rightarrow \quad a \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^0}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \quad \rightarrow \quad a = \underbrace{\frac{2}{3}}_{\geq 0} \quad (5)$$

$f(x)$ یک تابع جرم احتمال است. $P(X < 5)$ را بیابید.

$$f(x) = a(2^{-x}); \quad x = 2, 3, 4, \dots \quad (6)$$

اولا مقدار a باید نامنفی باشد ($a \geq 0$)
ثانیا باید مجموع مقادیر f به ازای همه مقادیر x یک شود.

$$\sum_{x=2}^{\infty} a(2^{-x}) = 1 \quad \rightarrow \quad a \sum_{x=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \quad \rightarrow \quad a \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \quad \rightarrow \quad \underbrace{a = 2}_{\geq} \quad (7)$$

$$P(X < 5) = \underline{f(2)} + f(3) + f(4) = \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} = \frac{14}{16} \quad (8)$$

تابع توزیع تجمعی (cdf)

تعریف: توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته X که دارای تابع (جرم) احتمال یا توزیع احتمال $f(x)$ است عبارت است از:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t); \quad -\infty < x < \infty \quad (9)$$

با داشتن توزیع تجمعی در متغیرهای تصادفی پیوسته، احتمال همه پیشامدها را می‌توان حساب کرد.

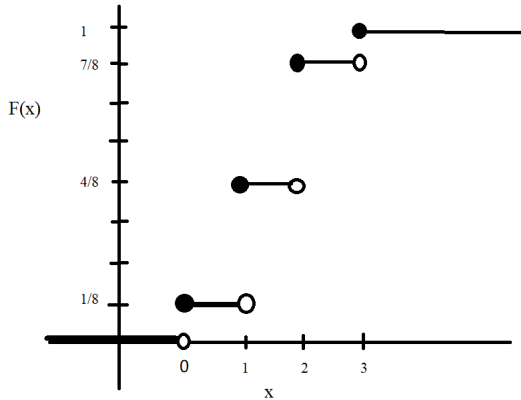
محاسبه توزیع تجمعی مثال ۲

x	۰	۱	۲	۳	
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	(مجموع) ۱

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{8} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & ; 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & ; 2 \leq x < 3 \\ 1 & ; x \geq 3 \end{cases} \quad (10)$$

تابع توزیع تجمعی

نمودار توزیع تجمعی مثال ۲



تابع توزیع تجمعی

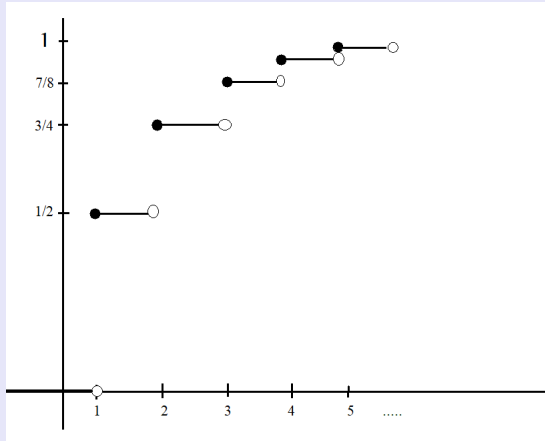
محاسبه توزیع تجمعی مثال ۵

x	۱	۲	۳	...	k	...	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$...	$(\frac{1}{2})^k$...	(مجموع) ۱

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ \frac{1}{2} & ; 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & ; 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{8} & ; 3 \leq x < 4 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{k+1})}{1 - \frac{1}{2}} & ; k \leq x < k + 1 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (11)$$

تابع توزیع تجمعی

نمودار تابع توزیع تجمعی مثال ۵



تابع توزیع تجمعی

مثال ۱۰

فرض کنید احتمال تولد نوزاد دختر p و احتمال تولد نوزاد پسر $1 - p$ باشد. ($0 < p < 1$). اگر متغیر تصادفی X را تعداد تولد های ثبت شده تا تولد اولین دختر از زمان مشخصی در نظر بگیریم، مطلوب است $F(X = 3) = P(X \leq 3)$ (احتمال این که حداکثر پس از ثبت سومین تولد نوزاد دختری به دنیا آمده باشد).

x	۱	۲	۳	...	k	...	
$f(x)$	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$...	$(1-p)^{k-1} p$...	(مجموع) ۱

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ p & ; 1 \leq x < 2 \\ 1 - (1-p)^2 & ; 2 \leq x < 3 \\ 1 - (1-p)^3 & ; 3 \leq x < 4 \\ \vdots & \vdots \\ 1 - (1-p)^k & ; k \leq x < k+1 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad F(3) = 1 - (1-p)^3 \quad (12)$$

- $\forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq F(x) \leq 1$
- $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$ غیر نزولی
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (F(-\infty) = 0)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad (F(+\infty) = 1)$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a) \quad (F(x^+) = F(x))$ از راست پیوسته
- $P(X < a) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a^-)$
- $P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a^-)$

مقدار پرش در نقطه a که از آن برای محاسبه $f(a)$ استفاده می‌کنیم.

$$\{X \leq a\} = \{X < a\} \cup \{X = a\} \Rightarrow P(X \leq a) = P(X < a) + P(X = a)$$

تابع توزیع تجمعی

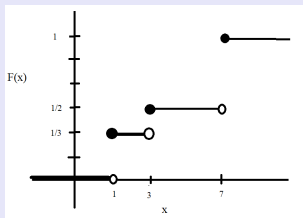
نکته: اگر $F(x)$ پلکانی باشد، متغیر تصادفی X گسسته است و اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، $F(x)$ پلکانی می شود. مقدار پرش در پله ها در واقع همان مقدار جرم احتمال در نقاط پرش است.

خواص تابع توزیع تجمعی

- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a^-)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a^-)$

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر است. تابع جرم احتمال را بیابید.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ \frac{1}{3} & ; 1 \leq x < 3 \\ \frac{2}{3} & ; 3 \leq x < 7 \\ 1 & ; x \geq 7 \end{cases}$$



$$\forall x < 1 : f(x) = 0;$$

$$f(1) = P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$\forall 1 < x < 3 : f(x) = P(X = x) = F(x) - F(x^-) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$f(3) = P(X = 3) = F(3) - F(3^-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\forall 3 < x < 7 : f(x) = P(X = x) = F(x) - F(x^-) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

$$f(7) = P(X = 7) = F(7) - F(7^-) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\forall x > 7 : f(x) = P(X = x) = F(x) - F(x^-) = 1 - 1 = 0$$

جدول توزیع احتمال مثال ۱۱

x	۱	۳	۷	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	(مجموع) ۱

مثال ۱۲

در مثال ۱۱، مقادیر زیر را بیابید: $P(x > 3), P(2 < X < 6)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ \frac{1}{3} & ; 1 \leq x < 3 \\ \frac{2}{3} & ; 3 \leq x < 7 \\ 1 & ; x \geq 7 \end{cases}$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(2 < X < 6) = P(X < 6) - P(X \leq 2) = F(6^-) - F(2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

امید ریاضی

تعریف: اگر متغیر تصادفی گسسته X دارای تابع جرم احتمال $f(x)$ باشد، میانگین یا مقدار مورد انتظار یا امید ریاضی X برابر است با:

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

امید ریاضی در واقع مرکز ثقل جامعه آماری است. آن را با μ نیز نمایش می‌دهند.

در یک کارخانه نساجی، توزیع احتمال تعداد ایرادها در هر ده متر از پارچه‌ای به صورت زیر است. میانگین ایرادها در هر ده متر را بیابید. در ده توپ صدمتری، چه تعداد ایراد مورد انتظار است؟

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۰/۴۱	۰/۳۷	۰/۱۶	۰/۰۵	۰/۰۱

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

$$= 0 \times 0/41 + 1 \times 0/37 + 2 \times 0/16 + 3 \times 0/05 + 4 \times 0/01 = 0/88$$

تعداد مورد انتظار (میانگین تعداد) ایرادها در هر ده متر

$$10 \times \frac{1}{1} \times 0/88 = 88$$

تعداد مورد انتظار ایرادها در ده توپ صد متری

مثال ۱۴

پیک یک رستوران به تعداد دفعاتی که غذا تحویل مشتری می‌دهد پول دریافت می‌کند. او با احتمال ۳۵ درصد روزی پرترافیک با درآمد حداقل ۱۰۰ هزار تومان و با احتمال ۵ درصد روزی بدون سفارش دارد. با احتمال ۶۰ درصد نیز روزی معمولی با درآمد حداقل ۴۰ هزار تومان درآمد دارد. مقدار مورد انتظار درآمد روزانه او را حساب کنید.

متغیر تصادفی X را میزان دستمزد روزانه در نظر می‌گیریم. داریم:

$$E(X) = \sum_x x f(x) = \frac{35}{100} \times 100000 + \frac{5}{100} \times 0 + \frac{60}{100} \times 40000 = 59000$$

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با توزیع احتمال $f(x)$ باشد. میانگین یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$$

امید ریاضی X خاصیت خطی دارد:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_x (ax + b)f(x) = \sum_x axf(x) + \sum_x bf(x) = \\ &= a \underbrace{\sum_x xf(x)}_{E(X)} + b \underbrace{\sum_x f(x)}_1 = aE(X) + b \end{aligned}$$

کارگری در یک کارواش به ازای شستن هر خودرو ۲ دلار دریافت می‌کند و هر روز سه دلار هزینه رفت و آمد می‌دهد. فرض کنید جدول توزیع احتمال برای تعداد خودروهایی که در یک روز به کارواش می‌آیند به صورت زیر است. مقدار مورد انتظار درآمد خالص کارگر در هر روز چقدر است؟

x	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f(x)$	۱/۶	۱/۶	۱/۴	۱/۴	۱/۱۲	۱/۱۲

اگر متغیر تصادفی X را تعداد خودروهایی که به کارواش می‌آیند در نظر بگیریم، درآمد خالص کارگر در پایان هر روز برابر با $g(X) = 2X - 3$ است. برای میانگین درآمد او داریم:

$$E(g(X)) = \sum_X g(x)f(x) =$$

$$11 \times 1/6 + 13 \times 1/6 + 15 \times 1/4 + 17 \times 1/4 + 19 \times 1/12 + 21 \times 1/12 = 15/33$$

فرض کنید توزیع احتمال تعداد خریداری شده از محصولی از یک کارخانه برای یک شرکت در یک سال به صورت زیر است.

x	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/8$

قیمت هر محصول صد دلار است و شرکت برای هر خرید، تخفیفی معادل $3X^2$ می‌گیرد که X تعداد محصول خریداری شده است. مقدار مورد انتظار پولی که شرکت برای خرید محصول مورد نظر در یک سال پرداخت می‌کند چقدر است؟

$$g(X) = 100X - 3X^2 = \text{مقدار پول پرداختی}$$

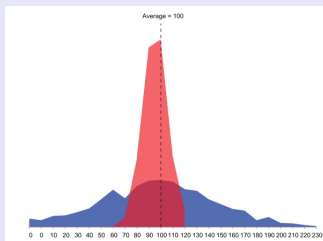
$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \sum_x g(x)f(x) = \sum_x (100x - 3x^2)f(x) = 100 \sum_x xf(x) - \\ &3 \sum_x x^2 f(x) = 100 \cdot (1(1/2) + 2(1/4) + 3(1/8) + 4(1/8)) - 3(1(1/2) + 4(1/4) + \\ &9(1/8) + 16(1/8)) = 100 \cdot (15/8) - 3(37/8) = 187/5 - 13/875 = 173/625 \end{aligned}$$

تعریف: فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با توزیع احتمال $f(x)$ و میانگین $E(X) = \mu$ باشد. واریانس X عبارت است از:

$$VAR(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$

میانگین نشان می‌دهد که داده‌ها حول چه عددی قرار دارند و مرکزشان کجاست. واریانس نشان می‌دهد که داده‌ها چگونه حول این مرکز پراکنده شده‌اند. آیا همه در نزدیکی این مرکز قرار دارند یا از آن دور هستند.

واریانس کمیتی همواره نامنفی است. جذر واریانس را انحراف معیار گویند و معمولاً با σ نشان می‌دهند.



فرض کنید برای متغیر تصادفی X داریم:

$$f(X) = \frac{|x|+1}{5}; \quad x = -1, 0, 1$$

واریانس X را حساب کنید.
داریم:

x	-1	0	1
$f(x)$	$2/5$	$1/5$	$2/5$

$$\mu_X = E(X) = -1(2/5) + 0(1/5) + 1(2/5) = 0$$

$$Var(X) = E((X - \mu_X)^2) = \sum_x (x - \mu_X)^2 f(x) =$$

$$(-1 - 0)^2(2/5) + (0 - 0)^2(1/5) + (1 - 0)^2(2/5) = \frac{4}{5}$$

واریانس متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

فرض کنید جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر است:

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	۱/۱۰	۲/۱۰	۳/۱۰	۴/۱۰

واریانس X را بیابید.
داریم:

$$E(X) = 0(1/10) + 1(2/10) + 2(3/10) + 3(4/10) = 2$$

$$E(X^2) = 0^2(1/10) + 1^2(2/10) + 2^2(3/10) + 3^2(4/10) = 5$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 2^2 = 1$$

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع توزیع احتمال $f(x)$ باشد. واریانس متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\sigma_{g(X)}^2 &= E[(g(X) - \underbrace{\mu_{g(X)}}_{E(g(X))})^2] = \sum_x (g(x) - \mu_{g(x)})^2 f(x) \\ &= E[g(X)^2] - (E[g(X)])^2\end{aligned}$$

نکته:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

در مثال ۱۸، مطلوب است

$$Var(2^X), Var\left(\frac{X-1}{3}\right)$$

داریم:

$$Var(2^X) = E[(2^X - E(2^X))^2] = E[(2^X)^2] - (E(2^X))^2$$

$$E[(2^X)^2] = E(2^{2X}) = 2 \cdot (1/10) + 2^2(2/10) + 2^4(3/10) + 2^6(4/10) = 31/3$$

$$E(2^X) = 2 \cdot (1/10) + 2^1(2/10) + 2^2(3/10) + 2^3(4/10) = 4/9$$

$$Var(2^X) = 31/3 - 4/9^2 = 7/29$$

$$Var\left(\frac{X-1}{3}\right) = E\left[\left(\frac{X-1}{3} - E\left(\frac{X-1}{3}\right)\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{X-1}{3}\right)^2\right] - \left(E\left(\frac{X-1}{3}\right)\right)^2$$

$$E\left[\left(\frac{X-1}{3}\right)^2\right] =$$

$$(-1/3)^2(1/10) + (0/3)^2(2/10) + (1/3)^2(3/10) + (2/3)^2(4/10) = 2/9$$

$$E\left(\frac{X-1}{3}\right) = (-1/3)(1/10) + (0/3)(2/10) + (1/3)(3/10) + (2/3)(4/10) = 1/9$$

$$Var\left(\frac{X-1}{3}\right) = 2/9 - 1/9 = 1/9$$

متغیر تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی

تعریف: متغیر تصادفی تابعی است که به هر عنصر فضای نمونه‌ای یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

$$X : S \rightarrow \mathbb{R} \quad (۱۳)$$

متغیر تصادفی پیوسته

تعریف: اگر مجموعه مقادیر ممکن برای متغیر تصادفی X نامتناهی و به صورت یک بازه و یا اجتماع چند بازه باشد، X را متغیر تصادفی پیوسته نامیم.

در این حالت احتمال رخداد هر یک نقطه از مقادیر ممکن X صفر است (صفر حدی). معمولاً احتمال را روی بازه‌ها بررسی می‌کنیم که به صورت محاسبه مساحت زیر منحنی تابع احتمال در بازه مربوطه است.

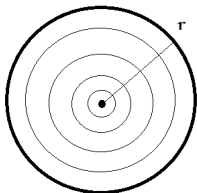
نکته

تکیه‌گاه (support) یک متغیر تصادفی برابر است با مجموعه مقادیری از \mathbb{R} که متغیر تصادفی آن‌ها را با احتمال ناصفر اختیار می‌کند.

متغیر تصادفی پیوسته

مثال ۱

در پرتاب یک دارت به سمت یک سیبل، متغیر تصادفی X را میزان فاصله نقطه برخورد دارت تا مرکز سیبل در نظر می‌گیریم.



$S =$ نقاط سطح دایره (۱۴)

$$X : S \rightarrow [0, r] \subseteq \mathbb{R} \quad (15)$$

تکیه‌گاه X بازه‌ای از اعداد حقیقی است. X یک متغیر تصادفی پیوسته است.

مثال ۲

- طول عمر یک لامپ: $X \in [0, \infty)$
- مسافت طی شده با یک اتومبیل با ۱ لیتر بنزین: $X \in [a, b]$
- مدت زمان یک مکالمه تلفنی: $X \in [0, T]$

تابع چگالی احتمال

$$P(a < X \leq b) = P(a < X < b) + \underbrace{P(X = b)}_{\cdot} = P(a < X < b)$$

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

تابع چگالی احتمال

تابع $f(x)$ ، که روی مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} تعریف شده است، تابع چگالی احتمال (یا تابع چگالی) متغیر تصادفی پیوسته X نامیده می‌شود اگر:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx; \quad f(x) \geq 0 (\forall x \in \mathbb{R}); \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

تابع چگالی را نمی‌توان به صورت جدول توزیع احتمال نشان داد و معمولاً با فرمول نشان داده می‌شود. ممکن است در تابع چگالی تعداد متناهی ناپیوستگی داشته باشیم، ولی در مثال‌های کاربردی غالباً این تابع پیوسته است.

در واقع $f(x)$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که مقدار احتمال هر پیشامد با محاسبه مساحت زیر نمودار $f(x)$ در بازه مربوط به آن پیشامد به دست می‌آید.

چون احتمال هر پیشامد نامنفی است، نمودار تابع چگالی احتمال رو و یا بالای محور طول‌ها (که نشان دهنده مقادیر متغیر تصادفی X است)، قرار دارد.

تابع چگالی احتمال

مثال ۳

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X نشان دهنده مدت زمان کارکرد یک قطعه بر حسب روز بوده و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. احتمال این که قطعه مذکور بین ۵ تا ۱۵ روز کار کند چقدر است؟ احتمال این که قطعه بیش از ۱۰ روز کار کند چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

داریم:

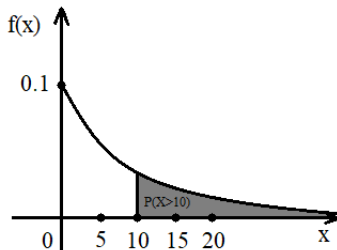
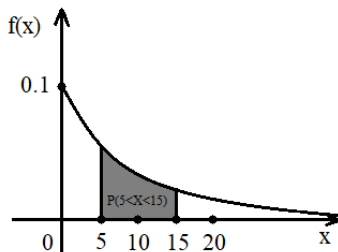
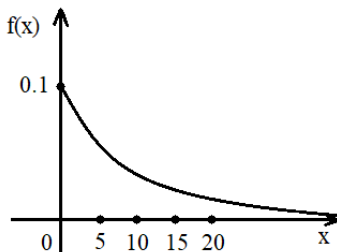
$$P(5 \leq X \leq 15) = \int_5^{15} f(x) dx = \int_5^{15} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -e^{-\frac{x}{10}} \Big|_5^{15} = -e^{-\frac{15}{10}} + e^{-\frac{5}{10}} = 0.37$$

همچنین:

$$P(X \geq 10) = \int_{10}^{\infty} f(x) dx = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = -e^{-\frac{x}{10}} \Big|_{10}^{\infty} = -e^{-\infty} + e^{-\frac{10}{10}} = 0 + \frac{1}{e} = 0.37$$

تابع چگالی احتمال

نمودار تابع چگالی احتمال مثال ۳



تابع چگالی احتمال

مثال ۴

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X نشان دهنده میزان فاصله نقطه برخورد دارت تا مرکز سیبلی به شعاع ۳۰ سانتی متر بوده و تابع چگالی آن به صورت زیر باشد. اولاً مقدار a را بیابید. ثانیاً احتمال این که دارت در فاصله‌ای کمتر از ۱۰ سانتی متر تا مرکز سیبیل به آن اصابت کند چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} a(30 - x) & ; 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

داریم:

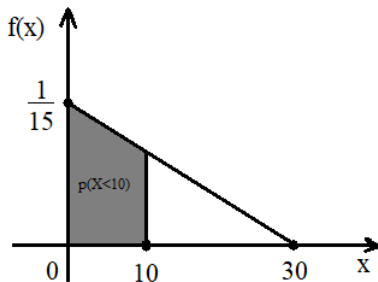
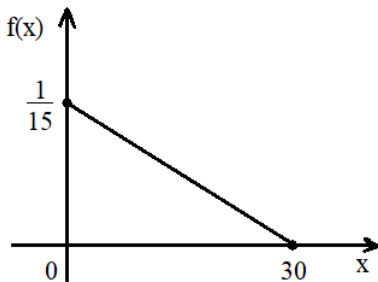
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{30} a(30 - x) dx + \int_{30}^{\infty} 0 dx = 1 \\ \Rightarrow \int_0^{30} a(30 - x) dx &= 1 \Rightarrow a(30x - \frac{x^2}{2}) \Big|_0^{30} = 1 \Rightarrow a(900 - \frac{900}{2} - 0) = 1 \Rightarrow \\ a &= \frac{1}{450} ; f(x) \geq 0 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} P(X \leq 10) &= \int_0^{10} f(x) dx = \int_0^{10} \frac{1}{450} (30 - x) dx = -\frac{1}{450} (30x - \frac{x^2}{2}) \Big|_0^{10} = \\ \frac{1}{450} (300 - 50 - 0) &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

تابع چگالی احتمال

نمودار تابع چگالی احتمال مثال ۴



فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار a چقدر است؟ احتمال $P(X \geq 1)$ چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} a(2x - x^2) & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

داریم:

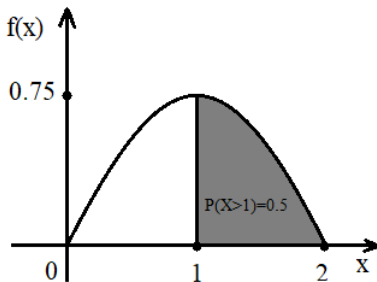
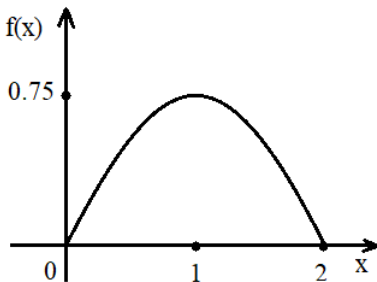
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^2 a(2x - x^2) dx + \int_2^{\infty} 0 dx = 1 \\ \Rightarrow \int_0^2 a(2x - x^2) dx &= 1 \Rightarrow a(x^2 - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^2 = 1 \Rightarrow a(4 - \frac{8}{3} - 0) = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^2 \frac{3}{4}(2x - x^2) dx = \frac{3}{4}(x^2 - \frac{x^3}{3}) \Big|_1^2 = \\ \frac{3}{4}((4 - \frac{8}{3}) - (1 - \frac{1}{3})) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

تابع چگالی احتمال

نمودار تابع چگالی احتمال مثال ۵



تابع چگالی احتمال

مثال ۶

می‌خواهیم عددی در بازه $(0/1, 0/5)$ به تصادف انتخاب کنیم (هیچ عددی بر اعداد دیگر برتری ندارد). فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته‌ای است که مقدار عدد انتخاب شده را نشان می‌دهد. تابع چگالی احتمال X به صورت زیر تعریف می‌شود. مقدار a چقدر است؟ احتمال این که عددی بزرگتر از $0/35$ انتخاب شود چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} a & ; 0/1 \leq x \leq 0/5 \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0/1} 0 dx + \int_{0/1}^{0/5} a dx + \int_{0/5}^{\infty} 0 dx = 1 \\ \Rightarrow \int_{0/1}^{0/5} a dx &= 1 \Rightarrow ax \Big|_{0/1}^{0/5} = 1 \Rightarrow a(0/5 - 0/1) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} = 2/5 \Rightarrow \end{aligned}$$

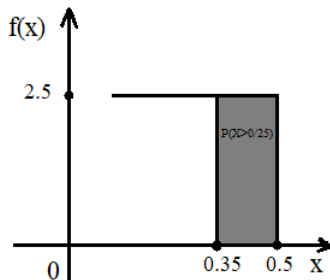
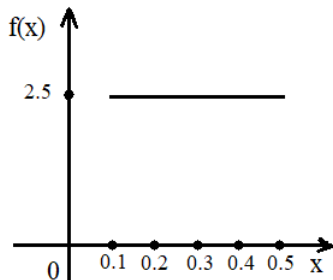
$$f(x) = \begin{cases} 2/5 & ; 0/1 \leq x \leq 0/5 \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همچنین:

$$\begin{aligned} P(X \geq 0/35) &= \int_{0/35}^{\infty} f(x) dx = \int_{0/35}^{0/5} 2/5 dx = 2/5 x \Big|_{0/35}^{0/5} = 1/25 - 0/875 = \\ &= 0/375 \end{aligned}$$

تابع چگالی احتمال

نمودار تابع چگالی احتمال مثال ۶



تابع توزیع تجمعی

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته

تعریف: تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته X که دارای چگالی احتمال $f(x)$ است عبارت است از:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt; \quad -\infty < x < \infty \quad (16)$$

- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع توزیع تجمعی آن پیوسته است و بالعکس. یعنی در هیچ نقطه‌ای در تابع توزیع پرش نداریم. زیرا در همه تک‌نقطه‌ها مقدار احتمال صفر است.
- برای متغیر تصادفی پیوسته X داریم:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

- $F(x)$ غیر نزولی است و مقدار آن در بازه $[0, 1]$ قرار می‌گیرد (برد).

تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

مثال ۷

تابع توزیع را در مثال ۳ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

داریم:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt = 0 & ; x < 0 \\ \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt} + \underbrace{\int_0^x \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt}_{-e^{-\frac{1}{t}} \Big|_0^x} = -e^{-\frac{1}{x}} + 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

بنابراین:

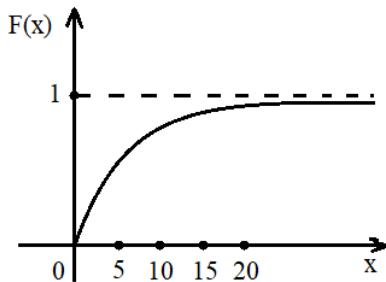
$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}} + 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

$$P(5 \leq X \leq 15) = F(15) - F(5) = (-e^{\frac{-15}{10}} + 1) - (-e^{\frac{-5}{10}} + 1) = 0.38$$

$$P(X \geq 10) = P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - (-e^{\frac{-10}{10}} + 1) = \frac{1}{e} = 0.37$$

نمودار توزیع تجمعی مثال ۷



تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

مثال ۸

تابع توزیع را در مثال ۴ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{45} (30 - x) & ; 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

داریم:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt =$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt = 0 & ; x < 0 \\ \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{0} + \underbrace{\int_0^x \frac{1}{45} (30 - t) dt}_{\frac{1}{45} (30t - \frac{t^2}{2}) \Big|_0^x} = \frac{1}{45} (30x - \frac{x^2}{2}) & ; 0 \leq x < 30 \\ \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{0} + \underbrace{\int_0^{30} \frac{1}{45} (30 - t) dt}_{\frac{1}{45} (900 - \frac{900}{2})} + \underbrace{\int_{30}^x 0 dt}_{0} = \frac{1}{45} (450) = 1 & ; x \geq 30 \end{cases}$$

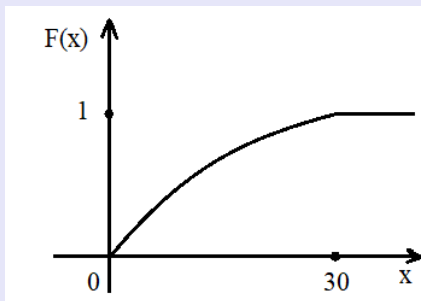
تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

بنابراین:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{45} \left(30x - \frac{x^2}{2} \right) & ; 0 \leq x < 30 \\ 1 & ; x \geq 30 \end{cases}$$

$$P(X \leq 10) = F(10) = \frac{1}{45} \left(30 \cdot (10) - \frac{10^2}{2} \right) = \frac{5}{9}$$

نمودار توزیع تجمعی مثال ۸



تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

مثال ۹

تابع توزیع را در مثال ۵ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x - x^2) & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

داریم:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt =$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt = 0 & ; x < 0 \\ \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{0} + \underbrace{\int_0^x \frac{2}{3}(2t - t^2) dt}_{\frac{2}{3}(t^2 - \frac{t^3}{3})|_0^x} = \frac{2}{3}(x^2 - \frac{x^3}{3}) & ; 0 \leq x < 2 \\ \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dt}_{0} + \underbrace{\int_0^2 \frac{2}{3}(2t - t^2) dt}_{\frac{2}{3}(4 - \frac{8}{3})} + \underbrace{\int_2^x 0 dt}_{0} = \frac{2}{3}(\frac{4}{3}) = 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

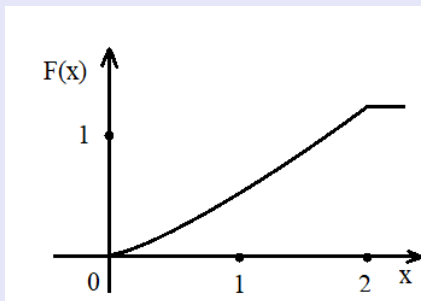
تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

بنابراین:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{x}{2} \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) & ; 0 \leq x < 2 \\ 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

$$P(X \geq 1) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{6} \left(1^3 - \frac{1^4}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

نمودار توزیع تجمعی مثال ۹



تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

مثال ۱۰

تابع توزیع را در مثال ۶ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 2/5 & ; 0/1 \leq x \leq 0/5 \\ 0 & ; \text{ow} \end{cases}$$

داریم:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 \cdot dt = 0 & ; x < 0/1 \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{0/1} 0 \cdot dt}_{0} + \underbrace{\int_{0/1}^x 2/5 dt}_{2/5 t \big|_{0/1}^x} = 2/5 x - 0/25 & ; 0/1 \leq x < 0/5 \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{0/1} 0 \cdot dt}_{0} + \underbrace{\int_{0/1}^{0/5} 2/5 dt}_{1/25 - 0/25} + \underbrace{\int_{0/5}^x 0 \cdot dt}_{0} = 1 & ; x \geq 0/5 \end{cases}$$

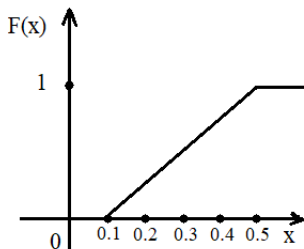
تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

بنابراین:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0.1 \\ 2/5x - 0.2 & ; 0.1 \leq x < 0.5 \\ 1 & ; x \geq 0.5 \end{cases}$$

$$P(X \geq 0.35) = P(X > 0.35) = 1 - P(X \leq 0.35) = 1 - F(0.35) = 1 - (2/5(0.35) - 0.2) = 0.375$$

نمودار توزیع تجمعی مثال ۱۰



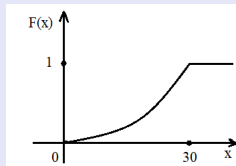
تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

مثال ۱۱

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X نشان دهنده میزان فاصله نقطه برخورد دارت تا مرکز سیبلی به شعاع ۳۰ سانتی متر باشد. در این مثال فرض کنید همه نقاط سیبل شانس یکسانی در برخورد دارت دارند. تابع توزیع تجمعی X را بیابید. ثانیاً احتمال این که دارت در فاصله‌ای کمتر از ۱۰ سانتی متر تا مرکز سیبل به آن اصابت کند چقدر است؟ تابع چگالی احتمال X را نیز بیابید.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{\pi x^2}{\pi 30^2} & ; 0 \leq x < 30 \\ 1 & ; x \geq 30 \end{cases}$$



داریم:

$$P(X \leq 10) = F(10) = \frac{10^2}{30^2} = \frac{1}{9}$$

تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

برای متغیر تصادفی پیوسته X با تابع توزیع $F(x)$ ، به شرط وجود مشتق $F(x)$ ، داریم:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

مثال ۱۲

در مثال ۱۱ تابع چگالی احتمال را بیابید.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{\pi x^2}{\pi 3.14} & ; 0 \leq x < 3.14 \\ 1 & ; x \geq 3.14 \end{cases}$$

داریم:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{3.14} \right) = \frac{2x}{3.14} = \frac{x}{1.57} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1.57} & ; 0 \leq x \leq 3.14 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

مثال ۱۳

فرض کنید تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X به صورت زیر است. مقدار a را بیابید. تابع چگالی X را به دست آورید.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ ax^2 + \frac{2}{3}x & ; 0 \leq x < 3 \\ 1 & ; x \geq 3 \end{cases}$$

$$F(\infty) = 1, F(-\infty) = 0$$

حال باید a را به گونه‌ای بیابیم که F پیوسته، غیر نزولی و بین ۰ و ۱ باشد:

$$F(3) = F(3^-) \Rightarrow 1 = a(3^2) + \frac{2}{3}(3) \Rightarrow 9a + 2 = 1 \Rightarrow 9a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$$

$$F'(x) = 0 \rightarrow x = 3; \quad F''(x) = -\frac{2}{9} < 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ماکزیمم نسبی}$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq 1, \quad F \text{ غیر نزولی}$$

همچنین

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x \right) = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{9}x + \frac{2}{3} & ; 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی پیوسته

امید ریاضی

تعریف: اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، میانگین یا مقدار مورد

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

انتظار یا امید ریاضی X برابر است با:

امید ریاضی در واقع مرکز ثقل جامعه آماری است. آن را با μ نیز نمایش می‌دهند.

قضیه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با چگالی احتمال $f(x)$ باشد. میانگین یا مقدار مورد انتظار

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

نکته

امید ریاضی X خاصیت خطی دارد:

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} ax f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} b f(x) dx =$$
$$a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{E(X)} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_1 = aE(X) + b$$
$$\forall b \in \mathbb{R} : \quad E(b) = b$$

واریانس متغیر تصادفی پیوسته

واریانس

تعریف: فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با چگالی احتمال $f(x)$ و میانگین μ باشد. واریانس X عبارت است از:

$$VAR(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

واریانس کمیتی همواره نامنفی است. جذر واریانس را انحراف معیار گویند و معمولاً با σ نشان می‌دهند.

قضیه

واریانس متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

قضیه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. واریانس متغیر تصادفی $g(X)$ عبارت است از:

$$\sigma_{g(X)}^2 = E[(g(X) - \underbrace{\mu_{g(X)}}_{E(g(X))})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) - \mu_{g(x)})^2 f(x) dx$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X); \quad \forall b \in \mathbb{R} : \quad Var(b) = 0$$

نتیجه:

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی پیوسته

مثال ۱۴

در مثال ۴، مقدار فاصله‌ای که انتظار می‌رود نقطه برخورد دارت با مرکز سیبل داشته باشد چقدر است؟ واریانس و انحراف معیار X را نیز حساب کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{45} \cdot (30 - x) & ; 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 x \times 0 dx}_{=0} + \int_0^{30} x \times \frac{1}{45} (30 - x) dx + \quad \text{داریم:}$$

$$\underbrace{\int_0^{30} x \times 0 dx}_{=0} = \frac{1}{45} \left(15x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{30} = 30 - 20 = 10.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 x^2 \times 0 dx}_{=0} + \int_0^{30} x^2 \times \frac{1}{45} (30 - x) dx \quad \text{همچنین}$$

$$+ \underbrace{\int_0^{30} x^2 \times 0 dx}_{=0} = \frac{1}{45} \left(10x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{30} = 600 - 450 = 150.$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 150 - 100 = 50; \quad \sigma_X = \sqrt{50} = 7.07$$

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی پیوسته

مثال ۱۵

در مثال ۱۴، فرض کنید به هر بازیکن، بسته به میزان فاصله نقطه برخورد دارتش تا مرکز، X ، به مقدار $9 - 0.3X$ دلار جایزه می‌دهند. مقدار متوسط جایزه‌ای که یک بازیکن دریافت می‌کند چقدر است؟ مقدار انحراف از معیار را برای جایزه دریافتی بیابید. با توجه به این که

$$E(X) = 10, Var(X) = 50.$$

داریم:

$$E(9 - 0.3X) = 9 - 0.3E(X) = 9 - 0.3 \times 10 = 6$$

$$Var(9 - 0.3X) = 0.9Var(X) = 0.9 \times 50 = 45$$

$$\Rightarrow \sigma_{9-0.3X} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

نکته

$$\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$$

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی پیوسته

مثال ۱۶

برای متغیر تصادفی X با چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x - x^2) & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مقادیر $E(X)$ ، $Var(X)$ ، $E(\frac{1}{X})$ و $\sigma_{\sqrt{X}}$ را بیابید:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \times \frac{2}{3}(2x - x^2) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{12} \right|_0^2 = 2 - 2 = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 \times \frac{2}{3}(2x - x^2) dx = \left. \frac{2x^3}{12} - \frac{2x^4}{24} \right|_0^2 = 2/3$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2/3 - 0^2 = 2/3$$

$$E(\frac{1}{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{x} \times \frac{2}{3}(2x - x^2) dx = \left. \frac{2x}{3} - \frac{2x^2}{6} \right|_0^2 = 2 - \frac{2}{3} = 4/3$$

$$E(\sqrt{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} f(x) dx = \int_0^2 \sqrt{x} \times \frac{2}{3}(2x - x^2) dx = \left. \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{15} x^{5/2} \right|_0^2 = 0.96$$

$$E(\sqrt{X}^2) = E(X) = 0 \Rightarrow Var(\sqrt{X}) = 1 - 0.96^2 = 0.0784$$

$$\Rightarrow \sigma_{\sqrt{X}} = \sqrt{0.0784} = 0.28$$

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی پیوسته

مثال ۱۷

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X نشان دهنده مدت زمان کارکرد یک قطعه بر حسب روز بوده و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد. مقدار مورد انتظار مدت زمان کارکرد این قطعه چقدر است؟ واریانس این زمان را حساب کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x}_u \times \underbrace{\frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}}_{dv} dx =$$

داریم:

$$\underbrace{(-x e^{-\frac{x}{10}})}_{\cdot} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\frac{x}{10}} dx = -10 e^{-\frac{x}{10}} \Big|_0^{\infty} = 0 + 10 = 10$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x^2}_u \times \underbrace{\frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}}_{dv} dx =$$

$$\underbrace{(-x^2 e^{-\frac{x}{10}})}_{\cdot} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -2x e^{-\frac{x}{10}} dx = 200 \Rightarrow \text{Var}(X) = 200 - 10^2 = 100$$

خواص امید ریاضی و واریانس

خواص امید ریاضی

- اگر a, b و c اعداد حقیقی ثابت باشند، آنگاه

$$E(aX + b) = aE(X) + b; \quad E(c) = c$$

- اگر $X \geq 0$ ، آنگاه $E(X) \geq 0$

- اگر $a \leq X \leq b$ ، آنگاه $a \leq E(X) \leq b$

- اگر $g(X)$ و $h(X)$ دو تابع دلخواه از X باشند، آنگاه

$$E(g(X) \pm h(X)) = E(g(X)) \pm E(h(X))$$

خواص واریانس و انحراف معیار

- برای هر متغیر تصادفی X ، همواره $Var(X) \geq 0$

- اگر a, b و c اعداد حقیقی ثابت باشند، آنگاه

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X), \sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X; \quad Var(c) = 0, \sigma_c = 0$$

- اگر $g(X)$ تابعی از متغیر تصادفی X باشند، آنگاه

$$Var(g(X)) = E([g(X) - E(g(X))]^2) = E([g(X)]^2) - [E(g(X))]^2$$