بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

درس ریاضیات گسسته، نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

استاد درس: دکتر چهرقانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر

پاسخنامه تمرین سری دوم

سوال ۱:

تعداد جواب های صحیح معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۲۵$ را در صورتی که هر کدام از شروط زیر برآورده شود بیابید.

الف) به ازای هر $۰ \le i \le ۵$, $۰ \le x_i$

$$\binom{۲۵+۵-۱}{۲۵} = \binom{۲۹}{۲۵}$$

ب) به ازای هر $۰ \le i \le ۵$, $۰ \le x_i \le ۶$

فرض میکنیم c_i به معنی این باشد که $x_i > ۶$. بنابراین:

$$c_۱ = c_۲ = c_۳ = c_۴ = c_۵ = \binom{۱۸+۵-۱}{۱۸} = \binom{۲۲}{۱۸}$$

$$c_۱c_۲ = c_۱c_۳ = c_۱c_۴ = \cdots = \binom{۱۱+۵-۱}{۱۱} = \binom{۱۵}{۱۱}$$

$$c_۱c_۲c_۳ = c_۱c_۲c_۴ = \cdots = \binom{۴+۵-۱}{۴} = \binom{۸}{۴}$$

$$N(\overline{c_۱}\,\overline{c_۲}\,\overline{c_۳}\,\overline{c_۴}\,\overline{c_۵}) = \binom{۲۹}{۲۵} - ۵\binom{۲۲}{۱۸} + \binom{۵}{۲}\binom{۱۵}{۱۱} - \binom{۵}{۳}\binom{۸}{۴}$$

پ) $۸ \le x_۱ \le$ ۰و $۷ \le x_۲ \le ۲$ و $۵ \le x_۳ \le ۱$ و $۸ \le x_۴ \le ۳$ و $x_۵ \le ۲$

ابتدا تمام کران پایین ها را از ۲۵ کم میکنیم سپس مانند قسمت ب ،c_i ها را حساب میکنیم.

۲۵-۲-۱-۳-۲=۱۷

$$c_۱ = \binom{۸+۵-۱}{۸} = \binom{۱۲}{۸}$$
$$c_۲ = \binom{۱۱+۵-۱}{۱۱} = \binom{۱۵}{۱۱}$$
$$c_۳ = \binom{۱۲+۵-۱}{۱۲} = \binom{۱۶}{۱۲}$$
$$c_۴ = \binom{۸+۵-۱}{۸} = \binom{۱۲}{۸}$$
$$c_۱c_۲ = \binom{۲+۵-۱}{۲} = \binom{۶}{۲}$$
$$c_۱c_۳ = \binom{۳+۵-۱}{۳} = \binom{۷}{۳}$$
$$c_۱c_۴ = \binom{۲+۵-۱}{۲} = \binom{۶}{۲}$$
$$c_۲c_۳ = \binom{۶+۵-۱}{۶} = \binom{۱۰}{۶}$$
$$c_۲c_۴ = \binom{۵+۵-۱}{۵} = \binom{۹}{۵}$$
$$c_۳c_۴ = \binom{۶+۵-۱}{۶} = \binom{۱۰}{۶}$$
$$c_۲c_۳c_۴ = \binom{۰+۵-۱}{۰} = \binom{۴}{۰}$$

$$N(\overline{c_۱}\,\overline{c_۲}\,\overline{c_۳}\,\overline{c_۴}\,\overline{c_۵}) = \binom{۲۱}{۱۷} - \left(\binom{۱۲}{۸} + \binom{۱۵}{۱۱} + \binom{۱۶}{۱۲} + \binom{۱۲}{۸}\right) + \left(\binom{۶}{۲} + \binom{۷}{۳} + \binom{۶}{۲} + \binom{۱۰}{۶} + \binom{۹}{۵} + \binom{۱۰}{۶}\right) - \binom{۴}{۰}$$

سوال ۲:

یک دانشگاه ۳۰۰ صندلی جدید برای سایت های دانشکده های خود تهیه کرده است. با فرض اینکه۱۵ دانشکده در این دانشگاه، سایت داشته باشند به چند روش میتوان صندلی ها را بین آنها تقسیم کرد به صورتی که :

الف) به هردانشکده حداقل ۱۰ و حداکثر ۳۰ صندلی برسد.

ابتدا به هرکدام ۱۰ صندلی داده و ۱۵۰ تای مانده را تقسیم میکنیم.

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{۱۵} = ۱۵۰$$

فرض میکنیم c_i به معنی این باشد که $x_i>۲۰$. بنابراین

$$c_۱ = c_۲ = \cdots = c_{۱۵} = \binom{۱۲۹ + ۱۵ - ۱}{۱۲۹} = \binom{۱۴۳}{۱۲۹}$$

$$s_1 = ۱۵\binom{۱۴۳}{۱۲۹}$$

$$c_۱c_۲ = c_۱c_۳ = c_۱c_۴ = \cdots = \binom{۱۰۸ + ۱۵ - ۱}{۱۰۸} = \binom{۱۲۲}{۱۰۸}$$

$$s_۲ = \binom{۱۵}{۲}\binom{۱۲۲}{۱۰۸}$$

$$s_۳ = \binom{۱۵}{۳}\binom{۱۰۱}{۸۷}$$

$$s_۴ = \binom{۱۵}{۴}\binom{۸۰}{۶۶}$$

$$s_۵ = \binom{۱۵}{۵}\binom{۵۹}{۴۵}$$

$$s_۶ = \binom{۱۵}{۶}\binom{۳۸}{۲۴}$$

$$s_۷ = \binom{۱۵}{۷}\binom{۱۷}{۳}$$

$$N(\overline{c_۱}\,\overline{c_۲}\ldots\overline{c_{۱۵}}) = \binom{۱۶۴}{۱۵۰} - s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6 - s_7$$

ب) به هر دانشکده حداقل ۱۰ و حداکثر ۳۰ صندلی برسد و تعداد صندلی هر دانشکده بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

مانند بخش الف عمل میکنیم با این تفاوت که فرض میکنیم

$Z_i = 5x_i$

$$z_۱ + z_۲ + \cdots + z_{۱۵} = ۳۰$$

فرض میکنیم c_i به معنی این باشد که $z_i>۴$. بنابراین

$$c_۱ = c_۲ = \cdots = c_{۱۵} = \binom{۲۵ + ۱۵ - ۱}{۲۵} = \binom{۳۹}{۲۵}$$

$$s_1 = ۱۵\binom{۳۹}{۲۵}$$

$$c_۱c_۲ = c_۱c_۳ = c_۱c_۴ = \cdots = \binom{۲۰ + ۱۵ - ۱}{۲۰} = \binom{۳۴}{۲۰}$$

$$s_۲ = \binom{۱۵}{۲}\binom{۳۴}{۲۰}$$

$$s_۳ = \binom{۱۵}{۳}\binom{۲۹}{۱۵}$$

$$s_۴ = \binom{۱۵}{۴}\binom{۲۴}{۱۰}$$
$$s_۵ = \binom{۱۵}{۵}\binom{۱۹}{۵}$$
$$s_۶ = \binom{۱۵}{۶}\binom{۱۴}{۰}$$

$$N(\overline{c_۱}\,\overline{c_۲}\,...\,\overline{c_{۱۵}}) = \binom{۴۴}{۳۰} - s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5 + s_6$$

سوال ۳:

اگر ۱۰ تاس متمایز ریخته شوند، احتمال اینکه هر شش عدد حداقل یکبار بیایند چقدر است.

فرض میکنیم c_i به معنی این باشد که عدد i نیابد. بنابراین

$$c_۱ = c_۲ = \cdots = c_۶ = (\frac{۵}{۶})^{۱۰}$$
$$s_1 = ۶(\frac{۵}{۶})^{۱۰}$$
$$c_۱c_۲ = c_۱c_۳ = c_۱c_۴ = \cdots = (\frac{۴}{۶})^{۱۰}$$
$$s_۲ = \binom{۶}{۲}\ (\frac{۴}{۶})^{۱۰}$$
$$s_۳ = \binom{۶}{۳}(\frac{۳}{۶})^{۱۰}$$
$$s_۴ = \binom{۶}{۴}(\frac{۲}{۶})^{۱۰}$$
$$s_۵ = \binom{۶}{۵}(\frac{۱}{۶})^{۱۰}$$

$$N(\overline{c_۱}\,\overline{c_۲}\,\overline{c_۳}\,\overline{c_۴}\,\overline{c_۵}\,\overline{c_۶}) = ۱ - s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5$$

سوال ۴:

برای برگزاری یک مسابقه ی ورزشی از بین ۶ داور ایرانی و ۶ داور آلمانی و ۶ داور ژاپنی و ۶ داور اسپانیایی میخواهیم ۵ داور انتخاب کنیم(فرض کنید که داور های هم وطن را یکسان در نظر میگیریم).

الف) به چند روش میتوان انتخاب کرد که از هر کشور حداقل یک داور انتخاب شود؟

از هر کشور یک داور انتخاب شده و سپس مسیله به شکل زیر میشود.

$$x_{\text{ایرانی}} + x_{\text{آلمانی}} + x_{\text{ژاپنی}} + x_{\text{اسپانیایی}} = ۱$$

$$\binom{۴}{۱} = ۴$$

ب) به چند روش میتوان انتخاب کرد که هیچ داور ژاپنی انتخاب نشود؟

$$x_{\text{ایرانی}} + x_{\text{آلمانی}} + x_{\text{اسپانیایی}} = ۵$$

$$\binom{۷}{۵} = ۲۱$$

پ) به چند روش میتوان انتخاب کرد که داورها دقیقا از دوکشور مختلف انتخاب شوند؟

ابتدا با $\binom{۴}{۲}$ دو کشور را انتخاب کرده و سپس مسیله زیر را حل میکنیم

$$x_۱ + x_۲ = ۳$$

$$\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۳} = ۶ * ۴ = ۲۴$$

سوال ۵:

به چند طریق میتوان حروف **pastathopulos** را به طوری مرتب کرد که :

الف) هیچ دو حرف یکسانی کنار هم نباشند.

حروف یکسان = ۲ حرف p و ۲ حرف a و ۲ حرف s و ۲ حرف t و ۲ حرف o

فرض کنیم c_i یعنی ۲ تا از حرف i کنار هم بیایند.

$$c_p = c_a = c_o = c_t = c_s = \frac{۱۲!}{(۲!)^۴}$$

$$S_1 = \binom{۵}{۱}\frac{۱۲!}{(۲!)^۴}$$

$$S_۲ = \binom{۵}{۲}\frac{۱۱!}{(۲!)^۳}$$

$$S_۳ = \binom{۵}{۳}\frac{۱۰!}{(۲!)^۲}$$

$$S_۴ = \binom{۵}{۴}\frac{۹!}{(۲!)^۱}$$

$$S_{۵} = \binom{۵}{۵}\frac{۸!}{۱}$$

$$N(\overline{c_{۱}}\,\overline{c_{۲}} \dots \overline{c_{۱۵}}) = \frac{۱۳!}{۲!^{۵}} - s_1 + s_2 - s_3 + s_4 - s_5$$

ب) دقیقا ۳جفت حروف یکسان متوالی مشاهده شود.

$$E_{۳} = S_{۳} - \binom{۴}{۱} S_{۴} + \binom{۵}{۲} S_{۵}$$

پ) حداقل دو جفت حروف یکسان متوالی مشاهده شود.

$$L_{۲} = S_{۲} - \binom{۲}{۱} S_{۳} + \binom{۳}{۱} S_{۴} - \binom{۴}{۱} S_{۵}$$

سوال ۶:

اعداد ۱ تا ۸ را روی ۸ کارت نوشته ایم و آنهارا بین ۸ نفر توزیع میکنیم(هر کدام یک کارت). سپس تمام کارت ها را از آنها پس میگیریم و بار دیگر کارت ها را بین آنها توزیع میکنیم. به چند روش میتوان اینکار را انجام داد به صورتی که مجموع کارت اول و دوم هیچکدام از ۸ نفر برابر با ۹ **نشود**.

حل این سوال مانند این است که بخواهیم جوری تقسیم کنیم که هیچکس دو کارت یکسان دریافت نکند. زیرا در سوال فعلی هنگام پخش کردن بار دوم هر کسی در گرفتن یک کارت محدودیت دارد. در حالت ذکر شده همینگونه میباشد.

$$(۸!)d_{۸} = (۸!)^{۲}\, e^{-۱}$$

سوال ۷:

چند عدد طبیعی ۵ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آنها برابر ۲۷ باشد؟

برای حل این سوال باید معادله ی زیر را با شروط آن حل کرد.

$$x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} + x_{۴} + x_{۵} = ۲۷$$

$10 > X_1 > 0$

$1 < i < 6 \Rightarrow x_i < 10$

با کم کردن یک بخاطر x_1 میرسیم به

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۲۶$$
$$9 > X_1$$
$$1<i<6 \Rightarrow x_i<10$$

فرض میکنیم c_i به معنی این باشد که شرط x_iرعایت نشود. بنابراین:

$$c_۱ = \binom{۱۷ + ۵ - ۱}{۱۷} = \binom{۲۱}{۱۷}$$
$$c_۲ = c_۳ = c_۴ = c_۵ = \binom{۱۶ + ۵ - ۱}{۱۶} = \binom{۲۰}{۱۶}$$
$$c_۱c_۲ = c_۱c_۳ = c_۱c_۴ = c_۱c_۵ = \binom{۷ + ۵ - ۱}{۷} = \binom{۱۱}{۷}$$
$$c_۲c_۳ = c_۲c_۴ = c_۲c_۵ = \cdots = \binom{۶ + ۵ - ۱}{۶} = \binom{۱۰}{۶}$$
$$N(\overline{c_۱}\,\overline{c_۲}\,\overline{c_۳}\,\overline{c_۴}\,\overline{c_۵}) = \binom{۳۰}{۲۶} - (۴\binom{۲۰}{۱۶} + \binom{۲۱}{۱۷}) + \binom{۴}{۲}\binom{۱۰}{۶} - \binom{۱۱}{۷}$$

سوال ۸:

فرض کنید A={۷,۶,۵,۴,۳,۲,۱} و B={۵,۴,۳,۲,۱} . چند تابع $f: A \rightarrow B$ وجود دارد که $|f(A)|<۵$

فرض میکنیم c_i به معنی این است که i در برد f نباشد.

$$L_1 = \binom{۵}{۱}۴^۷ - \binom{۵}{۲}۳^۷ + \binom{۵}{۳}۲^۷ - \binom{۵}{۴}۱^۷ + \binom{۵}{۵}$$

سوال ۹:

۱۲ نفر از دانشجویان در هنگام ورود به جلسه امتحان، تلفن همراه و ساعت هوشمند خود را تحویل مراقب امتحان میدهند. در پایان امتحان، مراقب تلفن ها و ساعت ها را به صورت تصادفی بین آنها پخش میکند.

الف) به چند روش میتوان ساعت ها و تلفن ها را بین ۱۲ نفر تقسیم کرد به شکلی که هیچکدام ساعت **یا** تلفن خود را دریافت نکند؟

$$(d_{12})^2$$

ب) به چند روش میتوان ساعت ها و تلفن ها را بین ۱۲ نفر تقسیم کرد به شکلی که هیچکدام هم ساعت **و** هم تلفن خود را دریافت نکند؟

$$(۱۲!)^{۲} - \binom{۱۲}{۱}(۱۱!)^{۲} + \binom{۱۲}{۲}(۱۰!)^{۲} - \cdots + (-۱)^{۱۲}\binom{۱۲}{۱۲}(۰!)^{۲}$$

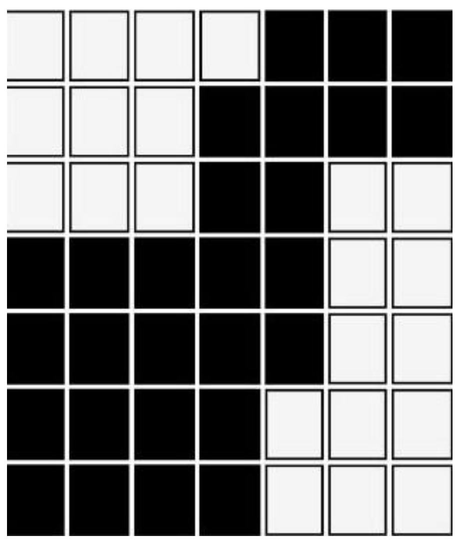
سوال ۱۰:

چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد که بر ۲ و ۳ و ۵ بخشپذیر نیستند؟

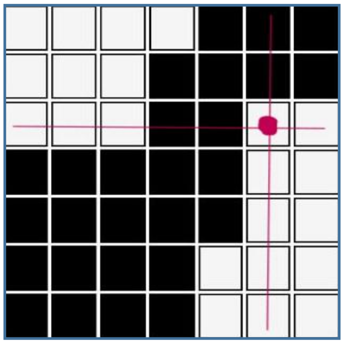
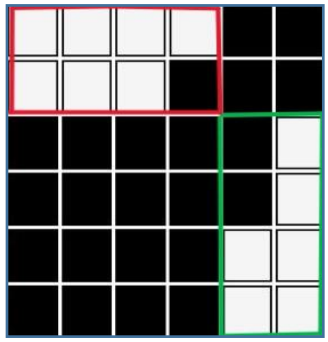
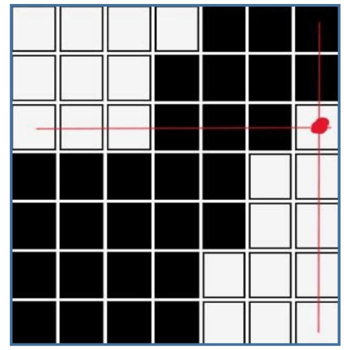
$$۱۰۰ - (۵۰ + ۳۳ + ۲۰) + (۱۶ + ۱۰ + ۶) - (۳)$$

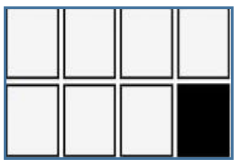
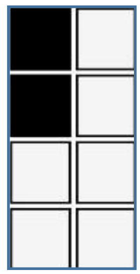
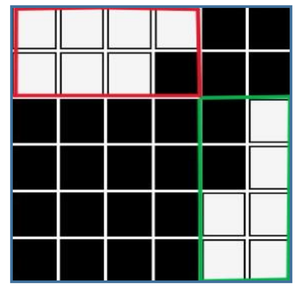
سوال ۱۱ (امتیازی):

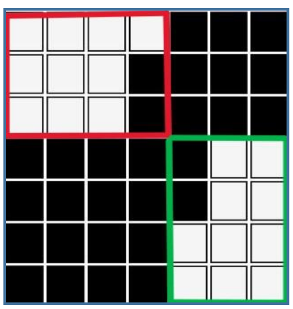
برای شکل زیر $r(C,x)$ را حساب کنید(رخ نمیتواند در خانه های مشکی قرار بگیرد).

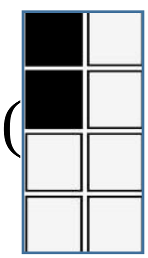


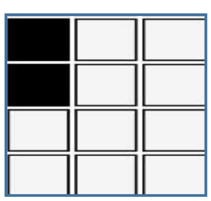
طبق روش حل پیش می رویم.

 $=x$  $+$ 

$=x[($  $)($  $)]+x$ 

$+$ 

$=x[(1+7x+9x^2)(1+6x+6x^2)]+x[$  $)($  $)]$

$+[($  $)($  $)=$

$X(1+13x+57x^2+96x^3+54x^4)+x[(1+7x+9x^2)(1+6x+6x^2)]$
$+(1+10x+24x^2+12x^3)(1+10x+24x^2+12x^3)$
$=1+22x+174x^2+618x^3+1008x^4+684x^5+144x^6$