



بسمه تعالی  
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)  
دانشکده مهندسی کامپیوتر



درس ریاضیات گسسته، نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳  
استاد درس: دکتر چهرقانی

## تمرین سری سوم فصل ۹ - تابع مولد

### نکات مهم:

- پاسخ به تمرین ها می بایست به صورت به صورت انفرادی انجام شود.
- پاسخ تمرین ها می بایست در قالب یک فایل PDF با نام «DM\_HW3\_StudentID» در زمان مقرر در صفحه درس بارگذاری شود.
- موعده تحویل این تمرین تا ۱۸ آبان ۱۴۰۲ ساعت ۲۳:۵۵ می باشد و امکان ارسال با تاخیر وجود ندارد. لذا پیشنهاد می شود انجام تمرین را به روزهای پایانی موکول نکنید.
- راه حل سوالات یکسان نیستند. بنابراین استفاده از هر راه حلی که شما را به پاسخ سوال می رساند و بدون ابهام توضیح داده شده باشد مجاز است و نمره کامل سوال را می گیرد.
- پرسش های خود درباره این تمرین را می توانید از طریق ایمیل [discrete.math1402@gmail.com](mailto:discrete.math1402@gmail.com) مطرح فرمائید.
- خواهشمند است در متن ایمیل شماره دانشجویی خود را ذکر نمایید.

سوال ۱ (۲۰ نمره):

برای مسائل زیر تابع مولد را تعیین کنید و نشان دهید کدام ضریب در تابع برای حل مسئله لازم است. (هر جا که مناسب باشد هم صورت چند جمله ای و هم صورت سری توانی تابع مولد را بنویسید)

- الف)  $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ ،  $0 \leq c_i \leq 7$ ، به ازای هر  $1 \leq i \leq 4$
- ب)  $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ ،  $0 \leq c_i$ ، به ازای هر  $1 \leq i \leq 4$  و  $c_2$  و  $c_3$  زوج هستند.
- ج)  $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 30$ ، به ازای هر  $2 \leq c_1 \leq 4$ ،  $3 \leq c_i \leq 8$ ، به ازای هر  $2 \leq i \leq 5$
- د)  $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 30$ ،  $c_i \geq 0$ ،  $1 \leq i \leq 5$ ،  $c_2$  زوج و  $c_3$  فرد است.

سوال ۲ (۲۵ نمره):

- توابع مولد دنباله های زیر را بیابید. (مثلا در مورد دنباله ی  $0, 1, 3, 9, 27, \dots$  جواب مطلوب  $\frac{x}{1-3x}$  است نه  $\sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^{i+1}$  یا  $0 + x + 3x^2 + 9x^3 + \dots$ )
- الف)  $\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \dots, \binom{8}{8}$
- ب)  $\binom{8}{1}, 2\binom{8}{2}, 3\binom{8}{3}, \dots, 8\binom{8}{8}$
- ج)  $1, -1, 1, -1, \dots$
- د)  $0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots$
- ه)  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$
- ی)  $0, 0, 1, a, a^2, a^3, \dots, a \neq 0$

سوال ۳ (۱۰ نمره):

- به چند طریق میتوان ۲۴ جعبه ی یکسان را در چهار خط چنان گذاشت که
- الف) در هر خط حداقل سه جعبه باشد
- ب) در هر خط حداقل سه و حداکثر نه جعبه باشد؟

سوال ۴ (۵ نمره):

اگر تاسی را ۱۲ بار بریزیم احتمال اینکه مجموع اعداد حاصل ۳۰ باشد چقدر است؟

سوال ۵ (۵ نمره):

در کیسه ای ۶ مهره ی یکسان هست که اعداد ۱ تا ۶ روی آن ها نوشته شده است. به تعداد دفعات دلخواه مهره ای را از کیسه بیرون میکشیم و عدد روی مهره را میخوانیم. تحقیق کنید که  $(1-x-x^2-\dots-x^6)^{-1}$  تابع مولد برای تعداد طرقی است که مجموع اعداد خوانده شده برابر  $n$  (عددی طبیعی) است.

سوال ۶ (۱۵ نمره):

- الف) چهار جمله ی نخست پیچش هر جفت از دنباله های زیر یعنی  $c_0, c_1, c_2, c_3$  را بیابید
- (۱) به ازای هر  $n$  عضو  $N$  و  $a_n=1$  و  $b_n=1$
- (2)  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$  و در سایر  $a$  ها عضو  $N$   $a_n = 0$  و به ازای هر  $n$  عضو  $N$   $b_n=1$
- ب) برای هر یک از نتایج قسمت الف یک فرمول کلی برای  $c_n$  بیابید.

سوال ۷ (۱۰ نمره):

- الف) ضریب  $x^7$  را در  $(1+x+x^2+\dots)^{15}$  را بیابید.
- ب) به ازای  $n \in \mathbb{Z}^+$ ، ضریب  $x^7$  را در  $(1+x+x^2+\dots)^n$  را بیابید.

سوال ۸ (۵ نمره):

به چند طریق میتوان ۳۰۰۰ پاکت یکسان را در بسته های ۲۵ تایی بین ۴ نفر تقسیم کرد که هر نفر حداقل ۱۵۰ و حداکثر ۱۰۰۰ پاکت بگیرد؟

سوال ۹ (۵ نمره):

دو صندوق نوشابه یکی حاوی ۲۴ بطری از یک نوع و دیگری حاوی ۲۴ بطری از نوع دیگر را بین ۵ نفر تقسیم میکنیم. به چند طریق میتوان این ۴۸ بطری را تقسیم کرد که الف) هر نفر حداقل دو بطری از هر نوع بگیرد. ب) هر نفر حداقل دو بطری از یک نوع و سه بطری از نوع دیگر بگیرد.

**سوال ۱۰ (امتیازی):**

نشان دهید تعداد افراز هایی از عدد صحیح مثبت  $n$  که در آن ها هیچ جمع وندی بیشتر از ۲ بار ظاهر نشود برابر است با تعداد افراز هایی که در آن هیچ جمع وندی بر ۳ بخش پذیر نیست.