



بسمه تعالی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی کامپیوتر



درس ریاضیات گسسته، نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

استاد درس: دکتر چهرقانی

پاسخنامه تمرین سری سوم

سوال ۱:

الف) ضریب x^{20} در $(1+x+x^2+\dots+x^7)^2$

ب) ضریب x^{20} در

$(1+x+x^2+\dots+x^{20})^2 (1+x^2+x^4+\dots+x^{20})^2$

یا در $(1+x+x^2+\dots)^2 (1+x^2+x^4+\dots)^2$

ج) ضریب x^{30} در

$(x^2+x^3+x^4)(x^3+x^4+\dots+x^8)^4$

د) ضریب x^{30} در

$(1+x+x^2+\dots+x^{30})^3 (1+x^2+x^4+\dots+x^{30})(x+x^3+x^5+\dots+x^{29})$

یا در $(1+x+x^2+\dots)^3 (1+x^2+x^4+\dots)(x+x^3+x^5+\dots)$

سوال ۲:

الف) $(1+x)^8$

ب) $8(1+x)^7$

ج) $(1+x)^{-1}$

$$\begin{aligned} & \frac{x^3}{1-x} \text{ (د)} \\ & (1-2x)^{-1} \text{ (ه)} \\ & \frac{x^2}{1-ax} \text{ (ح)} \end{aligned}$$

سوال ۳:

الف) ضریب x^{12} در

$$\begin{aligned} (x^3+x^4+\dots)^4 &= x^{12}(1+x+x^2+\dots)^4 = x^{12}(1-x)^{-4} \\ \binom{-4}{12}(-1)^{12} &= (-1)^{12} \binom{4+12-1}{12}(-1)^{12} = \binom{15}{12} \end{aligned}$$

ب) ضریب x^{12} در

$$\begin{aligned} (x^3+x^4+\dots+x^9)^4 &= x^{12}(1+x+x^2+\dots+x^6)^4 \\ \left[\frac{(1-x)^7}{1-x} \right]^4 &= (1-x^7)^4(1-x)^{-4} \\ &= [1-4x^7+\dots+x^{28}] \left[\binom{-4}{0} + \dots + \binom{-4}{5}(-x)^5 + \dots + \binom{-4}{12}(-x)^{12} + \dots \right] \end{aligned}$$

برابر است با:

$$(-4) \binom{-4}{5}(-1)^5 + \binom{-4}{12}(-1)^{12} = (4)(-1)^5 \binom{8}{5} + \binom{15}{12} = \binom{15}{12} - 4 \binom{8}{5}$$

سوال ۴:

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{12} = x^{12} \left(\frac{1-x^6}{1-x} \right)^{12} = x^{12}(1-x^6)^{12} \left[\binom{-12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) + \dots \right]$$

پاسخ عددی است که صورت آن برابر است با ضریب x^{18} در:

$$\begin{aligned} (1-x^6)^{12} \left[\binom{12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) + \dots \right] \\ = \left[1 - \binom{12}{1}x^6 + \binom{12}{2}x^{12} - \binom{12}{3}x^{18} + \dots + x^{72} \right] \left[\binom{-12}{0} + \binom{-12}{1}(-x) \right] \end{aligned}$$

که برابر است با:

$$\begin{aligned} \binom{-12}{18}(-1)^{18} - \binom{12}{1} \binom{-12}{12}(-1)^{12} + \binom{12}{2} \binom{-12}{6}(-1)^{-6} - \binom{12}{3} \binom{-12}{0} \\ = \binom{29}{18} - \binom{12}{1} \binom{23}{12} + \binom{12}{2} \binom{17}{6} - \binom{12}{3} \end{aligned}$$

جواب آخر از تقسیم نتیجه ی اخیر بر 6^{12} به دست می آید.

سوال ۵:

$$(1 - x - x^2 - \dots - x^6)^{-1} = [1 - (x + x^2 + \dots + x^6)]^{-1} =$$

هیچ مهره ای انتخاب نشود 1

+ یکبار کشیدن $(x + x^2 + \dots + x^6)$

+ دوبار کشیدن $(x + x^2 + \dots + x^6)^2$

+....

سوال ۶:

الف. (۱)

$$c_0 = a_1 b_0 = 1,$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 2,$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 3,$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

الف. (۲)

$$c_3 = 4, c_2 = 3, c_1 = 2, c_0 = 1$$

ب. (۱)

$$c_n = n + 1$$

ب. (۲) به ازای هر n بزرگتر مساوی ۳

$$c_0 = 1, c_1 = 2, c_2 = 3, c_n = 4$$

سوال ۷:

فرض میکنیم $f(x)$ تابع مولد تعداد افراز هایی از n باشد که در آن ها هیچ جمع وندی دوبار دیده نمیشود. فرض

میکنیم $g(x)$ تابع مولد افراز هایی از n باشد که در آن ها هیچ جمع وندی بر ۳ بخش پذیر نیست.

$$g(x) = \frac{1}{1-x^1} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \dots$$

$$f(x) = (1 + x + x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\dots$$

$$= \frac{1-x^3}{1-x^1} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^9}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^{12}}{1-x^4} \dots = g(x)$$

سوال ۸:

هر بسته ی ۲۵ تایی را یک واحد میدانیم

در نتیجه پاسخ عبارت است از ضریب x^{120} در $(x^6+x^7+\dots+x^{39}+x^{40})^4=(1+x+\dots+x^{32})^4$
این ضریب برابر است با ضریب x^{96} در

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-x^{35}}{1-x}\right)^4 &= (1-x^{35})^4(1-x)^{-4} \\ &= [1-4x^{34}+6x^{70}-\dots+x^{140}][\binom{-4}{0}+\dots+\binom{-4}{26}(-x)^{26}+\dots+\binom{-4}{61}-x^{61} \\ &\quad +\dots+\binom{-4}{96}(-x)^{96}]\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\binom{-4}{96}(-1)^{96}-4\binom{-4}{61}(-1)^{61}+6\binom{-4}{26}(-1)^{26}=\binom{99}{96}-4\binom{64}{61}+6\binom{29}{26}$$

سوال ۹:

الف) ضریب x^{24} در

$$(x^2+x^3+\dots)^5=x^{10}(1+x+\dots)^5=x^{10}(1-x)^{-5}=x^{10}\left[\binom{-5}{0}+\binom{-5}{1}(-x)+\binom{-5}{2}(-x)^2+\dots\right]$$

برابر است با

$$\binom{-5}{14}(-1)^{14}=(-1)^{14}\binom{5+14-1}{14}(-1)^{14}=\binom{18}{14}$$

این عدد برابر است با تعداد طرق توزیع ۲۴ بطری از یک نوع نوشابه به طوری که هر کسی دست کم ۲ بطری

بگیرد. دو نوع نوشابه $\leq \binom{18}{14}^2$

ب) ضریب x^{24} در $(x^2+x^3+\dots)^5$ $\leq \binom{13}{9} \leq \binom{18}{14}$

سوال ۱۰ (امتیازی):

$F(x)$ تابع مولد تعداد افراز هایی از n که در آن هیچ جمع وندی بیشتر از دوبار دیده نمیشود

$G(x)$ تابع مولد تعداد افراز هایی از n که در آن هیچ جمع وندی بر ۳ بخش پذیر نیست

$$\begin{aligned}G(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdot \dots \\ F(x) &= (1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\dots\end{aligned}$$

$$= \frac{1-x^3}{1-x} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^9}{1-x^4} \cdot \frac{1-x^{12}}{1-x^5} \cdot \dots = g(x)$$