



نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

مدت آزمون ۴۵ دقیقه

۱ - دو عدد «۲۰۶۳» و «۱۴۴۵» را می‌خواهیم در هم ضرب کنیم. این کار را به سه روش زیر انجام داده و مشخص کنید در هر حالت چند ضرب یک رقم در یک رقم باید محاسبه شوند.
الف) ضرب مدرسه‌ای (۲ نمره)

$$2063 \times 1445 = 10315 + 82520 + 825200 + 2063000 = 2981035$$

به ۱۶ ضرب نیاز است (۴ سری ضرب یک رقم در ۴ رقم)

ب) ضرب با ایده تقسیم و حل (۴ نمره)

$$20 \times 14 = 2 \times 1 \times 100 + (2 \times 4 + 0 \times 1) \times 10 + 0 \times 4 = 200 + 80 + 0 = 280$$

$$20 \times 45 = 2 \times 4 \times 100 + (2 \times 5 + 0 \times 4) \times 10 + 0 \times 5 = 800 + 100 + 0 = 900$$

$$63 \times 14 = 6 \times 1 \times 100 + (6 \times 4 + 3 \times 1) \times 10 + 3 \times 4 = 600 + 270 + 12 = 882$$

$$63 \times 45 = 6 \times 4 \times 100 + (6 \times 5 + 3 \times 4) \times 10 + 3 \times 5 = 2400 + (30 + 12) \times 10 + 15 = 2400 + 420 + 15 = 2835$$

$$2063 \times 1445 = 20 \times 14 \times 10000 + (20 \times 45 + 63 \times 14) \times 100 + 63 \times 45 = 2800000 + (900 + 882) \times 100 + 2835 = 2,800,000 + 178,200 + 2,835 = 2,981,035$$

به ۱۶ ضرب نیاز است (۴ سری ضرب ۲ رقم در ۲ رقم داریم که هر یک به ۴ ضرب یک رقم در یک رقم نیاز دارند)

ج) ضرب به روش کاراتسوبا (۵ نمره)

$$20 \times 14 = 2 \times 1 \times 100 + ((2+0) \times (1+4) - 2 \times 1 - 0 \times 4) \times 10 + 0 \times 4 = 200 + 80 + 0 = 280$$

$$63 \times 45 = 6 \times 4 \times 100 + ((6+3) \times (4+5) - 6 \times 4 - 3 \times 5) \times 10 + 3 \times 5 = 2400 + (81 - 24 - 15) \times 10 + 15 = 2400 + 420 + 15 = 2835$$

$$(20+63) \times (14+45) = 83 \times 59 = 8 \times 5 \times 100 + ((8+3) \times (5+9) - 8 \times 5 - 3 \times 9) \times 10 + 3 \times 9 = 4000 + (11 \times 14 - 40 - 27) \times 10 + 27 = 4000 + (154 - 40 - 27) \times 10 + 27 = 4000 + 870 + 27 = 4897$$

$$2063 \times 1445 = 20 \times 14 \times 10000 + ((20+63) \times (14+45) - 20 \times 14 - 63 \times 45) \times 100 + 63 \times 45 = 2800000 + (4897 - 280 - 2835) \times 100 + 2835 = 2,800,000 + 178,200 + 2,835 = 2,981,035$$

$$11 \times 14 = 1 \times 1 \times 100 + ((1+1) \times (1+4) - 1 \times 1 - 1 \times 4) \times 10 + 1 \times 4 = 100 + 50 + 4 = 154$$

به ۹ ضرب نیاز است (۳ سری ضرب ۲ رقم در ۲ رقم داریم که هر یک به ۳ ضرب یک رقم در یک رقم نیاز دارند). البته این با فرض این است که ضرب 11×14 را نیز یک رقم در یک رقم حساب کنیم. اگر آن را هم دقیق و به صورت بازگشتی حساب کنیم، برای محاسبه آن نیز به ۳ ضرب نیاز داریم که در کل می‌شود ۱۲ ضرب.

۲ - رابطه بازگشتی زمان اجرای شبه کد زیر را بنویسید: (۱ نمره)

Quiz1 (A):

$k = \text{len}(A)$

if $k < 4$:

answer = 100

for i in range(1, k):

answer -= A[i]

return answer

return Quiz1(A[0:k/2]) x Quiz1(A[k/4:3xk/4]) x Quiz1(A[k/2:k]) + k x k

$$T(n) = 3T(n/2) + O(1)$$



۳ - روابط بازگشتی زیر را با استفاده از قضیه اصلی حل کنید. (هر کدام ۲ نمره، در کل ۸ نمره)

الف) $T(n) = 8T(n/2) + 2n^3 + 8n^2 + 16n + 32$

$a=8, b=2, d=3 \Rightarrow b^d=2^3=8 \Rightarrow a=b^d \Rightarrow T(n) = \Theta(n^3 \log n)$

ب) $T(n) = 30T(n/5) + 30n^5 + 27n^4 + 12n^3 + 5n^2 + 27n + 11$

$a=30, b=5, d=5 \Rightarrow b^d=5^5 > a=30 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^5)$

ج) $T(n) = 27T(n/3) + 14n^2 + 3n^3 + 27$

$a=27, b=3, d=3 \Rightarrow b^d=3^3=27 \Rightarrow a=b^d \Rightarrow T(n) = \Theta(n^3 \log n)$

د) $T(n) = 9T(n/3) + 2n + 21$

$a=9, b=3, d=1 \Rightarrow b^d=3^1=3 \Rightarrow a > b^d \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$

۴ - می‌خواهیم با روش جایگذاری ثابت کنیم که جواب $T(n) = T(n/3) + T(n/2) + 11$ برابر با $O(n)$ است. گام استقرای ما به چه صورت خواهد بود؟ (۳ نمره)

فرض کنید $c=66$ و $n_0=1$ ، آنگاه گام استقرا به صورت زیر خواهد بود:

$$T(n) = T(n/3) + T(n/2) + 11 \leq cn/3 + cn/2 + 11 = 5cn/6 + 11 = 5 \times 66/6n + 11 = 55n + 11 \leq 55n + 11n = 66n = cn$$

۵ - رابطه بازگشتی زیر را با رسم جدول و به روش درخت بازگشت حل کنید. (۳ نمره)

$$T(n) = 11T(n/11) + O(n)$$

سطح	اندازه زیر مسئله	تعداد زیر مسئله	کار هر زیر مسئله	کل کار سطح
1	n	1	cn	$cn = O(n)$
2	n/11	11	cn/11	$11 \times cn/11 = O(n)$
t	n/11 ^t	11 ^t	cn/11 ^t	$11^t \times cn/11^t = O(n)$
$\log_{11} n$	1	n	c	$n \times c = O(n)$

در کل می‌شود $O(n \log_{11} n) = O(n \log n)$