



بسمه تعالی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی کامپیوتر



درس ریاضیات گسسته، نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳
استاد درس: دکتر چهرقانی

تمرین سری چهارم فصل ۴ - استقرای ریاضی

نکات مهم:

- پاسخ به تمرین ها می بایست به صورت به صورت انفرادی انجام شود.
- پاسخ تمرین ها می بایست در قالب یک فایل PDF با نام «DM_HW3_StudentID» در زمان مقرر در صفحه درس بارگذاری شود.
- موعده تحویل این تمرین تا ۱ آذر ۱۴۰۲ ساعت ۲۳:۵۵ می باشد و امکان ارسال با تاخیر وجود ندارد. لذا پیشنهاد می شود انجام تمرین را به روزهای پایانی موکول نکنید.
- راه حل سوالات یکسان نیستند. بنابراین استفاده از هر راه حلی که شما را به پاسخ سوال می رساند و بدون ابهام توضیح داده شده باشد مجاز است و نمره کامل سوال را می گیرد.
- پرسش های خود درباره این تمرین را می توانید از طریق ایمیل discrete.math1402@gmail.com مطرح فرمائید.
- خواهشمند است در متن ایمیل شماره دانشجویی خود را ذکر نمایید.

سوال ۱ (۲۰ نمره):

هر یک از برابری های زیر را با استقرای ریاضی ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 2 + (n-1)2^{n+1} \text{ (الف)}$$

$$\sum_{i=1}^n 2(3^{i-1}) = 3^n - 1 \text{ (ب)}$$

سوال ۲ (۱۰ نمره):

ثابت کنید که به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ $n > 3 \Rightarrow 2^n < n!$

سوال ۳ (۱۰ نمره):

به ازای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ ثابت کنید که $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2i+1} = H_{2n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)H_n$ که H_n عدد همسان n ام است $(H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$

سوال ۴ (۱۰ نمره):

روی یک گردونه اعداد ۱ تا ۲۵ به تصادف قرار داده شده اند. نشان دهید بدون توجه به نحوه ی قرارگیری اعداد روی این گردونه، سه عدد کنار هم وجود دارد که حاصل جمع آن ها حداقل ۲۹ است.

سوال ۵ (۱۰ نمره):

دنباله ی اعداد $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ و $n \geq 3$ را در نظر بگیرید. مقدار a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 را تعیین کنید.

سوال ۶ (۱۰ نمره):

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ $|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$ و $-|x| \leq x \leq |x|$ در نتیجه به ازای $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

و از آن جا

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

ثابت کنید که اگر $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ و $n \geq 2, n \in Z^+$

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

سوال ۷ (۲۰ نمره):

به ازای $n \geq 0$ ، فرض کنیم F_n عدد فیبوناچی n ام را نشان میدهد، ثابت کنید که

$$F_n + F_n + \dots + F_n = \sum_{i=0}^n F_i = F_{n+1} - 1$$

سوال ۸ (۱۰ نمره):

ثابت کنید که به ازای هر $n \in Z^+$ ، $n > 4 \Rightarrow n^2 < 2^n$

سوال ۹ (امتیازی):

به ازای $n \in Z^+$ حاصل جمع S_n را با فرمول زیر تعریف میکنیم:

$$S_n = \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(n-1)}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}$$

الف) S_4, S_5 و S_6 را محاسبه کنید

ب) فرمولی برای حاصل جمع های S_n حدس بزنید

پ) به ازای هر $n \in Z^+$ ، حدس خود را با استقرای متناهی ثابت کنید.